. 30к.

П-34

Н.С.ПИСКУНОВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ДЛЯ ВТУЗОВ

2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ
2

Н. С. ПИСКУНОВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

## ДЛЯ ВТУЗОВ

### ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ

*Допущено Министерством*
*высшего и среднего специального образования СССР*
*в качестве учебного пособия*
*для высших технических учебных заведений*

№ У41646

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

22.161.1
П 34
УДК 517

Пискунов Н. С. **Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2:** Учебное пособие для втузов.—13-е изд.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.—560 с.

Хорошо известное учебное пособие по математике для втузов с достаточно широкой математической подготовкой.

Второй том включает разделы: дифференциальные уравнения, кратные и криволинейные интегралы, интегралы по поверхности, ряды, уравнения математической физики, операционное исчисление, элементы теории вероятностей и математической статистики, матрицы.

Для студентов высших технических учебных заведений.

*Николай Семенович Пискунов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

для втузов

том 2

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *Л. С. Сомова*

ИБ № 12688

Сдано в набор 06.08.84. Подписано в печать 31.01.85. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 35. Усл. кр.-отт. 35,25. Уч.-изд. л. 33,67. Тираж 250 000 экз. (1-й завод 1—150 000 экз.). Заказ № 3531. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

МПО «Первая Образцовая типография» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

$\Pi \frac{1702050000—042}{053\,(02)—85} 63—85$

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к девятому изданию . . . . . 9
Предисловие к пятому изданию . . . . . 11

ГЛАВА XIII
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи. Уравнение движения тела при сопротивлении среды, пропорциональном скорости. Уравнение цепной линии . . . 13
§ 2. Определения . . . . . 16
§ 3. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия) 17
§ 4. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. Задача о распаде радия . . . . . 22
§ 5. Однородные уравнения первого порядка . . . . . 25
§ 6. Уравнения, приводящиеся к однородным . . . . . 27
§ 7. Линейные уравнения первого порядка . . . . . 30
§ 8. Уравнение Бернулли . . . . . 33
§ 9. Уравнение в полных дифференциалах . . . . . 35
§ 10. Интегрирующий множитель . . . . . 38
§ 11. Огибающая семейства кривых . . . . . 39
§ 12. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка. . 45
§ 13. Уравнение Клеро . . . . . 47
§ 14. Уравнение Лагранжа . . . . . 49
§ 15. Ортогональные и изогональные траектории . . . . . 50
§ 16. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия) 55
§ 17. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ . . . . . 56
§ 18. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка. Задача о второй космической скорости . . . . . 59
§ 19. Графический метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка . . . . . 66
§ 20. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства 68
§ 21. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . . 74
§ 22. Линейные однородные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами . . . . . 79
§ 23. Неоднородные линейные уравнения второго порядка . . . . . 81
§ 24. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . . 84
§ 25. Неоднородные линейные уравнения высших порядков . . . . . 90
§ 26. Дифференциальное уравнение механических колебаний . . . . . 94
§ 27. Свободные колебания. Векторное и комплексное изображение гармонических колебаний . . . . . 96
§ 28. Вынужденные колебания . . . . . 99
§ 29. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . . 103

§ 30. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . . 108
§ 31. Понятие о теории устойчивости Ляпунова. Поведение траектории дифференциального уравнения в окрестности особой точки . . . . 113
§ 32. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера . . . . . 127
§ 33. Разностный метод приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса . . . . . 130
§ 34. Приближенный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка . . . . . 136
Упражнения к главе XIII . . . . . 141

ГЛАВА XIV
**КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

§ 1. Двойной интеграл . . . . . 152
§ 2. Вычисление двойного интеграла . . . . . 154
§ 3. Вычисление двойного интеграла (продолжение) . . . . . 160
§ 4. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов 166
§ 5. Двойной интеграл в полярных координатах . . . . . 168
§ 6. Замена переменных в двойном интеграле (общий случай) . . . . 174
§ 7. Вычисление площади поверхности . . . . . 179
§ 8. Плотность распределения вещества и двойной интеграл . . . . . 182
§ 9. Момент инерции площади плоской фигуры . . . . . 184
§ 10. Координаты центра масс площади плоской фигуры . . . . . 188
§ 11. Тройной интеграл . . . . . 190
§ 12. Вычисление тройного интеграла . . . . . 191
§ 13. Замена переменных в тройном интеграле . . . . . 196
§ 14. Момент инерции и координаты центра масс тела . . . . . 199
§ 15. Вычисление интегралов, зависящих от параметра . . . . . 201
Упражнения к главе XIV . . . . . 202

ГЛАВА XV
**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ**

§ 1. Криволинейный интеграл . . . . . 208
§ 2. Вычисление криволинейного интеграла . . . . . 211
§ 3. Формула Грина . . . . . 217
§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . . 219
§ 5. Поверхностный интеграл . . . . . 224
§ 6. Вычисление поверхностного интеграла . . . . . 226
§ 7. Формула Стокса . . . . . 229
§ 8. Формула Остроградского . . . . . 233
§ 9. Оператор Гамильтона. Некоторые его применения . . . . . 236
Упражнения к главе XV . . . . . 239

ГЛАВА XVI
**РЯДЫ**

§ 1. Ряд. Сумма ряда . . . . . 245
§ 2. Необходимый признак сходимости ряда . . . . . 248
§ 3. Сравнение рядов с положительными членами . . . . . 250
§ 4. Признак Даламбера . . . . . 252
§ 5. Признак Коши . . . . . 256
§ 6. Интегральный признак сходимости ряда . . . . . 257
§ 7. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница . . . . . 260

§ 8. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость . . . 263
§ 9. Функциональные ряды . . . . . 266
§ 10. Мажорируемые ряды . . . . . 267
§ 11. Непрерывность суммы ряда . . . . . 269
§ 12. Интегрирование и дифференцирование рядов . . . . . 272
§ 13. Степенные ряды. Интервал сходимости . . . . . 275
§ 14. Дифференцирование степенных рядов . . . . . 279
§ 15. Ряды по степеням $x-a$ . . . . . 280
§ 16. Ряды Тейлора и Маклорена . . . . . 282
§ 17. Примеры разложения функций в ряды . . . . . 283
§ 18. Формула Эйлера . . . . . 285
§ 19. Биномиальный ряд . . . . . 286
§ 20. Разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Вычисление логарифмов . . . . . 288
§ 21. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов . . . . . 290
§ 22. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов 292
§ 23. Уравнение Бесселя . . . . . 295
§ 24. Ряды с комплексными членами . . . . . 299
§ 25. Степенные ряды с комплексной переменной . . . . . 300
§ 26. Решение дифференциального уравнения первого порядка методом последовательных приближений (метод итераций) . . . . . 302
§ 27. Доказательство существования решения дифференциального уравнения. Оценка погрешности при приближенном решении . . . . 304
§ 28. Теорема единственности решения дифференциального уравнения 308
Упражнения к главе XVI . . . . . 310

ГЛАВА XVII

**РЯДЫ ФУРЬЕ**

§ 1. Определение. Постановка задачи . . . . . 318
§ 2. Примеры разложения функций в ряды Фурье . . . . . 322
§ 3. Одно замечание о разложении периодической функции в ряд Фурье . . . . . 327
§ 4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций . . . . . 329
§ 5. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$ . . . . . 331
§ 6. О разложении непериодической функции в ряд Фурье . . . . . 332
§ 7. Приближение в среднем заданной функции с помощью тригонометрического многочлена . . . . . 334
§ 8. Интеграл Дирихле . . . . . 339
§ 9. Сходимость ряда Фурье в данной точке . . . . . 341
§ 10. Некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье . . . . 343
§ 11. Практический гармонический анализ . . . . . 345
§ 12. Ряд Фурье в комплексной форме . . . . . 346
§ 13. Интеграл Фурье . . . . . 349
§ 14. Интеграл Фурье в комплексной форме . . . . . 352
§ 15. Ряд Фурье по ортогональной системе функций . . . . . 355
§ 16. Понятие о линейном функциональном пространстве. Аналогия между разложением функций в ряд Фурье и разложением векторов . . . . . 357
Упражнения к главе XVII . . . . . 362

ГЛАВА XVIII

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

§ 1. Основные типы уравнений математической физики . . . . . 364
§ 2. Вывод уравнения колебаний струны. Формулировка краевой задачи. Вывод уравнений электрических колебаний в проводах . . 365
§ 3. Решение уравнения колебаний струны методом разделения переменных (методом Фурье) . . . . . 368

§ 14. Квадратичные формы и их преобразования . . . . . 534
§ 15. Ранг матрицы. Существование решений системы линейных уравнений . . . . . 536
§ 16. Дифференцирование и интегрирование матриц . . . . . 537
§ 17. Матричная запись системы дифференциальных уравнений и решений системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . . 539
§ 18. Матричная запись линейного уравнения $n$-го порядка . . . . . 543
§ 19. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом последовательных приближений с использованием матричной записи . . . . . 544
Упражнения к главе XXI . . . . . 548
Приложения . . . . . 550
Предметный указатель . . . . . 553

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Девятое издание данного учебника отличается от его восьмого издания. Это издание полностью соответствует программе по математике для втузов, рассчитанной на 400 — 450 часов.

В учебник включены две новые главы XX и XXI.

Глава XX «Элементы теории вероятностей и математической статистики» содержит материал, предусмотренный соответствующим разделом обязательной программы по математике МВССО СССР.

Глава XXI «Матрицы. Матричная запись систем и решений систем линейных дифференциальных уравнений» также содержит материал, предусмотренный обязательной программой. Но, кроме того, в этой главе обращено большое внимание на матричную запись систем линейных дифференциальных уравнений и решений систем линейных дифференциальных уравнений.

Использована матричная запись последовательных приближенных решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этот материал необходимо поместить в курсе дифференциального и интегрального исчисления для втузов потому, что в настоящее время во многих книгах по электротехнике, радиотехнике, автоматике исследование решений систем дифференциальных уравнений производится с использованием аппарата теории матриц.

Написаны новые §§ 26, 27, 28 гл. XVI. Здесь рассмотрен метод последовательных приближений решения дифференциальных уравнений, доказывается теорема о существовании решения дифференциального уравнения и теорема единственности. Обращено внимание на строгость изложения всей главы о дифференциальных уравнениях.

Параграф 31 гл. XIII «Понятие о теории устойчивости Ляпунова» значительно расширен. В этом издании он называется так: «Понятие о теории устойчивости Ляпунова. Поведение траекторий дифференциального уравнения в окрестности особой точки». Здесь параллельно с рассмотрением устойчивости решений систем дифференциальных уравнений рассмотрено поведение траекторий вблизи особой точки на фазовой плоскости. Это необходимо было сделать потому, что при изучении соответствующих вопросов в курсах электротехники, радиотехники, автоматики этими понятиями необходимо свободно пользоваться. Заново написаны неко-

торые параграфы с изложением теории комплексных чисел. Существенно расширен § 2 гл. XI, где дано доказательство существования определенного интеграла от непрерывной функции. Написан дополнительный § 11 гл. XI «Интегрирование комплексной функции действительной переменной». Написаны новые §§ 24 и 25 гл. XVI, посвященные рядам с комплексными членами и степенным рядам с комплексной переменной. Написан новый § 12 гл. XVII, посвященный рядам Фурье в комплексной форме. Расширено изложение вопроса об интеграле Фурье. Освещены понятия, используемые в специальной прикладной литературе (спектр, спектральная функция). Написаны новые § 15 «Ряд Фурье по ортогональной системе функций» и § 16 «Понятие о линейном функциональном пространстве. Аналогия между разложением функций в ряд Фурье и разложением векторов» в гл. XVII. Этот материал изложен таким образом, чтобы студенты и инженеры могли понимать материал других дисциплин, опирающийся на этот математический аппарат.

В главе XIX написан новый § 20 «Дельта-функция и ее изображение».

В главе VIII помещен § 19 «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов». Содержанием этого параграфа ранее являлось Приложение I, помещавшееся в конце первого тома этого учебника.

В главе VII даны § 10 «Интерполяционная формула Ньютона» и § 11 «Численное дифференцирование». Содержанием этих параграфов ранее являлось Приложение II.

Произведены некоторые дополнения в главах V, VII, IX, XII, XIII.

Глава XIII «Дифференциальные уравнения» целиком перенесена во второй том.

*Автор*

---

Настоящее (13-е) издание не отличается от предыдущего (1978 г.).

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В пятом издании полностью сохранен без изменений весь текст четвертого издания, но этот материал разделен на два тома (для удобства использования настоящего и предыдущих изданий учебника нумерация глав тоже оставлена без изменения).

Содержание всего учебника определяется программами курса математики для втузов, рассчитанными на 300 — 450 часов. Учебник предназначается для изучения курса математики как в стационарных, так и в заочных втузах. Это учитывалось при изложении материала; в частности, с этой целью в учебнике разобрано много примеров, иллюстрирующих изложенный теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Первый том содержит материал, соответствующий программе 1-го курса втуза, за исключением главы XIII «Дифференциальные уравнения», которая, как правило, проходится на 2-м курсе. Но так как в некоторых втузах предварительные сведения о дифференциальных уравнениях, необходимые для последующих дисциплин, даются на 1-м курсе, то часть этой главы (§§ 1 — 28) и помещена в первом томе.

Отметим, что материал, содержащийся в программе втузов, рассчитанный на число часов порядка 300, почти полностью содержится в первом томе (но в нем содержится и материал, выходящий за рамки этой программы).

Второй том — конец главы XIII (§§ 29 — 34), главы XIV — XIX — содержит материал, соответствующий программе 2-го курса втуза.

Первые две главы первого тома — «Число. Переменная. Функция» и «Предел. Непрерывность функций» написаны в пределах возможного кратко. Некоторые вопросы, обычно излагаемые в этих главах, без ущерба для дела перенесены в третью и последующие главы. Это дало возможность раньше перейти к основному понятию дифференциального исчисления — производной, чего требуют другие дисциплины втузовского курса (целесообразность такого расположения материала подтверждается опытом работы).

В связи с включением во втузовскую программу по высшей математике вопросов, необходимых для обеспечения курсом математики втузовских дисциплин, связанных с автоматикой и вычис-

лительной техникой, в учебнике подробно изложены соответствующие разделы:

«Численное интегрирование дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» *), «Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений», «Понятие о теории устойчивости Ляпунова», «Оператор Гамильтона», «Интеграл Фурье» и т. д.

В главе XVIII рассмотрены основные уравнения математической физики.

Обращено большое внимание на выяснение характера физических явлений, приводящих к уравнениям различных типов и соответствующим краевым задачам. Большое внимание уделено численным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В главе XIX излагаются основные понятия операционного исчисления и операционный метод решения дифференциальных уравнений. Это требуется для многих последующих дисциплин, и особенно электротехнических.

В учебник включено большое количество задач и примеров для упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами.

Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Это обстоятельство также делает книгу удобной для самостоятельного изучения курса математики, в частности для студентов-заочников.

*Автор*

---

Шестое издание отличается от пятого только тем, что в конце 1-го тома дано приложение, где изложен важный для инженеров вопрос «Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов».

---

Седьмое издание отличается от шестого только тем, что в конце 1-го тома дано приложение «Интерполяционная формула Ньютона. Численное дифференцирование».

---

*) Обычно излагаемые численные методы анализа также изложены в данном учебнике.

ГЛАВА XIII

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. Постановка задачи. Уравнение движения тела при сопротивлении среды, пропорциональном скорости. Уравнение цепной линии

Пусть функция $y=f(x)$ отражает количественную сторону некоторого явления. Часто, рассматривая это явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости $y$ от $x$, а можем установить зависимость между величинами $x$ и $y$ и производными от $y$ по $x$: $y'$, $y''$, ..., $y^{(n)}$, т. е. написать дифференциальное уравнение.

Из полученной зависимости между переменными $x$, $y$ и производными требуется установить непосредственную зависимость $y$ от $x$, т. е. найти $y=f(x)$ или, как говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. С некоторой высоты сброшено тело, масса которого $m$. Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость $v$ падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (с коэффициентом пропорциональности $k$), т. е. требуется найти $v=f(t)$.

Решение. По второму закону Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение движущегося тела (производная от скорости по времени), а $F$ — сила, действующая на тело в направлении движения. Эта сила складывается из двух: силы тяжести $mg$ и силы сопротивления воздуха — $kv$ (мы берем ее с минусом, так как она направлена в сторону, противоположную направлению скорости). Итак,

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{1}$$

Мы получили соотношение, связывающее неизвестную функцию $v$ и ее производную $\frac{dv}{dt}$, т. е. дифференциальное уравнение относитель-

но неизвестной функции $v$. (Это уравнение движения некоторых типов парашютов.) Решить дифференциальное уравнение — это значит найти такую функцию $v=f(t)$, которая тождественно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Таких функций имеется бесконечное множество.

Читатель легко проверит, что всякая функция вида

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1), каково бы ни было постоянное число $C$. Какая же из этих функций дает искомую зависимость $v$ от $t$? Для того чтобы ее найти, используем дополнительное условие: при сбрасывании тела ему была придана начальная скорость $v_0$ (которая, в частности, может быть равной нулю); мы предполагаем эту начальную скорость известной. Но тогда искомая функция $v=f(t)$ должна быть такова, чтобы при $t=0$ (в начале движения) выполнялось условие $v=v_0$. Подставляя $t=0$, $v=v_0$ в формулу (2), найдем

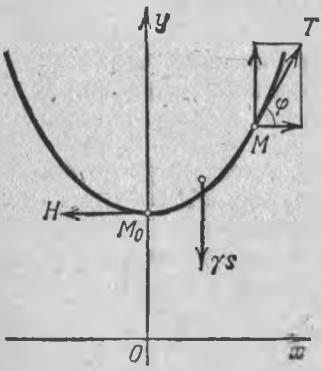


Рис. 250.

$$v_0=C+\frac{mg}{k},\ \text{откуда}\ C=v_0-\frac{mg}{k}.$$

Таким образом, постоянная $C$ найдена. Следовательно, искомая зависимость $v$ от $t$ такова:

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

Из этой формулы следует, что при достаточно больших $t$ скорость $v$ мало зависит от $v_0$.

Заметим, что если $k=0$ (т. е. сопротивление воздуха отсутствует или оно столь мало, что мы можем им пренебречь), то мы получаем известный из физики результат *):

$$v=v_0+gt. \tag{2''}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию $v=v_0$ при $t=0$.

Пример 2. Гибкая однородная нить подвешена за два конца. Найти уравнение кривой, по которой расположится нить под действием собственного веса (так располагаются подвешенные канаты, провода, цепи).

Решение. Пусть $M_0$ $(0, b)$ — наиболее низкая точка нити, $M$ — ее произвольная точка (рис. 250). Рассмотрим часть нити $M_0M$. Эта часть находится в равновесии под действием трех сил:

1) натяжение $T$, действующее по касательной в точке $M$ и составляющее с осью $Ox$ угол $\varphi$;

2) натяжение $H$ в точке $M_0$, действующее горизонтально;

3) вес нити $\gamma s$, направленный вертикально вниз, где $s$ — длина дуги $M_0M$, $\gamma$ — линейный удельный вес нити.

---

*) Формула (2'') может быть получена из (2') с помощью предельного перехода:

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}\right]=v_0+gt.$$

Разлагая натяжение $T$ на горизонтальную и вертикальную составляющие, получим уравнение равновесия:

$$T\cos\varphi = H, \quad T\sin\varphi = \gamma s.$$

Деля члены второго равенства на составляющие члены первого, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma}{H}s. \tag{3}$$

Положим теперь, что уравнение искомой кривой можно записать в виде $y = f(x)$. Здесь $f(x)$ — неизвестная функция, которую надлежит найти. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}s, \tag{4}$$

где через $a$ обозначено отношение $\frac{H}{\gamma}$.

Продифференцируем обе части равенства (4) по $x$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx}. \tag{5}$$

Но, как известно (см. § 1 гл. VI),

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Подставляя значение $\frac{ds}{dt}$ в уравнение (5), получим дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

Оно выражает связь между первой и второй производными от неизвестной функции $y$.

Не останавливаясь на методах решения уравнений, укажем, что всякая функция вида

$$y = a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+C_1\right)+C_2 \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (6) при любых значениях постоянных $C_1$ и $C_2$, в чем можно легко убедиться, подставив первую и вторую производные указанной функции в уравнение (6). Укажем далее без доказательства, что этими функциями (при различных $C_1$ и $C_2$) исчерпываются все возможные решения уравнения (6). Это будет показано в § 18.

Графики всех полученных таким образом функций называются *цепными линиями*.

Выясним теперь, как надо подобрать постоянные $C_1$ и $C_2$, чтобы получить именно ту цепную линию, низшая точка $M$ которой имеет координаты $(0, b)$. Так как при $x=0$ точка цепной линии занимает наинизшее положение, то в этой точке касательная горизонтальна, т. е. $\frac{dy}{dx}=0$. Кроме того, по условию, в этой точке ордината равна $b$, т. е. $y=b$.

Из уравнения (7) находим

$$y' = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y=\varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0;\ y_0)$.

Из только что высказанной теоремы вытекает, что уравнение (1′) имеет бесконечное число различных решений (например, решение, график которого проходит через точку $(x_0;\ y_0)$; другое решение, график которого проходит через точку $(x_0;\ y_1)$ и т. д., если только эти точки лежат в области $D$).

Условие, что при $x=x_0$ функция $y$ должна равняться заданному числу $y_0$, называется *начальным условием*. Оно часто записывается в виде

$$y|_{x=x_0}=y_0.$$

Определение 1. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y=\varphi(x,\ C), \tag{2}$$

которая зависит от одной произвольной постоянной $C$ и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной $C$;

б) каково бы ни было начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$, т. е. $y|_{x=x_0}=y_0$, можно найти такое значение $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,\ C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. При этом предполагается, что значения $x_0$ и $y_0$ принадлежат к той области изменения переменных $x$ и $y$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

2. В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{2′}$$

не разрешенному относительно $y$. Разрешив это соотношение относительно $y$, получаем общее решение. Однако выразить $y$ из соотношения (2′) в элементарных функциях не всегда оказывается возможным; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде. Равенство вида $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение 2. *Частным решением* называется любая функция $y=\varphi(x,\ C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,\ C)$, если в последнем произвольной постоянной $C$ придать определенное значение $C=C_0$. Соотношение $\Phi(x,\ y,\ C_0)=0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Пример 1. Для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

общим решением будет семейство функций $y=\frac{C}{x}$; это можно проверить простой подстановкой в уравнение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующему начальному условию: $y_0=1$ при $x_0=2$. Подставляя эти значения $x_0$ и $y_0$ в формулу $y=C/x$, получим $1=C/2$, или $C=2$. Следовательно, искомым частным решением будет функция $y=2/x$.

С точки зрения геометрической общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной $C$ (или, как

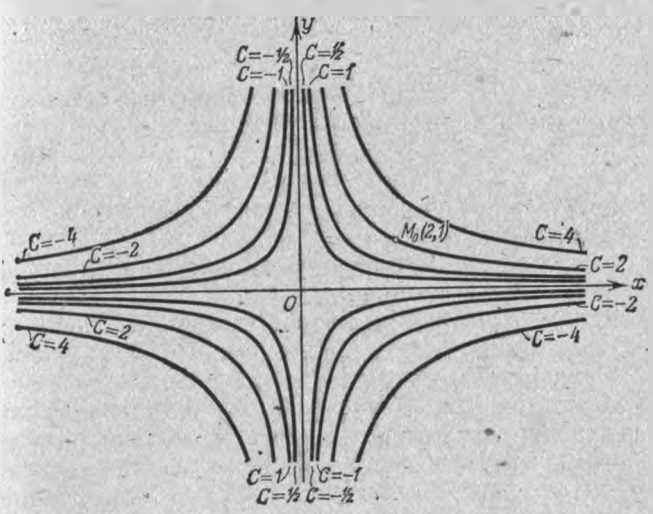



Рис. 251.

говорят, от одного параметра $C$). Эти кривые называются *интегральными кривыми* данного дифференциального уравнения. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Так, в последнем примере общий интеграл геометрически изображается семейством гипербол $y=C/x$, а частный интеграл, определенный указанным начальным условием, изображается одной из этих гипербол, проходящей через точку $M_0(2;\ 1)$. На рис. 251 изображены кривые семейства, соответствующие некоторым значениям параметра: $C=1/2$, $C=1$, $C=2$, $C=-1$ и т. д.

Чтобы сделать рассуждения более наглядными, мы будем в дальнейшем называть решением уравнения не только функцию $y=\varphi(x, C_0)$, удовлетворяющую уравнению, но и соответствующую интегральную кривую. В связи с этим мы будем говорить, например, о решении, проходящем через точку $(x_0;\ y_0)$.

Следовательно, чтобы установить связь между $x$, $y$ и $\frac{dy}{dx}$, т. е. чтобы написать дифференциальное уравнение, общий интеграл которого определяется формулой (2), нужно исключить $C$ из соотношений (2) и (3).

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол $y=Cx^2$ (рис. 253).

Дифференцируя по $x$ уравнение семейства, найдем

$$\frac{dy}{dx}=2Cx.$$

Подставляя сюда значение

$$C=y/x^2$$

из уравнения семейства, получаем дифференциальное уравнение данного семейства:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет смысл при $x\neq 0$, т. е. в любой области, не содержащей точек на оси $Oy$.

## § 4. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. Задача о распаде радия

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\,f_2(y), \tag{1}$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от $x$, на функцию, зависящую только от $y$. Преобразуем его следующим образом (предполагая, что $f_2(y)\neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)}\,dy=f_1(x)\,dx. \tag{1'}$$

Считая $y$ известной функцией от $x$, равенство (1′) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Интегрируя левую часть по $y$, а правую по $x$, найдем

$$\int\frac{1}{f_2(y)}\,dy=\int f_1(x)\,dx+C. \tag{1''}$$

Мы получили соотношение, связывающее решение $y$, независимую переменную $x$ и произвольную постоянную $C$, т. е. получили общий интеграл уравнения (1).

1. Дифференциальное уравнение типа (1′)

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0 \tag{2}$$

называют уравнением с *разделенными переменными*. Общий

интеграл его по доказанному есть

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Пример 1. Дано уравнение с разделенными переменными $x\,dx + y\,dy = 0$. Интегрируя, получим общий интеграл: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через $C^2$, будем иметь $x^2 + y^2 = C^2$. Это — уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 254) с центром в начале координат и радиусом $C$.

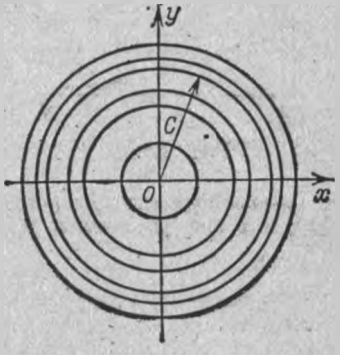


Рис. 254.

2. Уравнение вида

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

называется уравнением с *разделяющимися переменными*. Оно может быть приведено*) к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y)\,M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx + \frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy = 0,$$

или

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0,$$

т. е. к уравнению вида (2).

Пример 2. Дано уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C$, т. е. $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$**) или $\ln|y| = \ln|C/x|$; отсюда получаем общее решение: $y = C/x$.

Пример 3. Дано уравнение $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0$. Разделяя переменные, находим $\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0$, $\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$. Интегрируя, получаем $\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$, или $\ln|xy| + x - y = C$; последнее соотношение есть общий интеграл данного уравнения.

Пример 4. Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t = 0$ масса радия была $m_0$.

---

*) Эти преобразования законно производить только в той области, где ни $N_1(y)$, ни $M_2(x)$ не обращаются в нуль.

**) Имея в виду дальнейшие преобразования, мы обозначили произвольную постоянную через $\ln|C|$, что допустимо, так как $\ln|C|$ (при $C \neq 0$) может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$.

Решение однородного уравнения. По условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Положив в этом тождестве $\lambda = 1/x$, получим

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Уравнение (1) в этом случае примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \qquad (1')$$

Сделаем подстановку

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}\,x.$$

Подставляя это выражение производной в уравнение (1'), получим

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u, \quad \text{или} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо $u$ отношение $y/x$, получим интеграл уравнения (1').

Пример 4. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Справа стоит однородная функция нулевого измерения; следовательно, имеем однородное уравнение. Делаем замену $y/x = u$; тогда

$$y = ux, \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{(1 - u^2)\,du}{u^3} = \frac{dx}{x}, \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x};$$

отсюда, интегрируя, находим

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2u^2}=\ln|uxC|.$$

Подставляя $u=y/x$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|.$$

Получить $y$ как явную функцию от $x$, записанную с помощью элементарных функций, в данном случае невозможно. Впрочем, здесь легко выразить $x$ через $y$:

$$x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}.$$

Замечание. Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Это вытекает из того, что отношение двух однородных функций одного и того же измерения является однородной функцией нулевого измерения.

Пример 5. Уравнения

$$(2x+3y)\,dx+(x-2y)\,dy=0, \quad (x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$$

являются однородными.

## § 6. Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}. \tag{1}$$

Если $c_1=c=0$, то уравнение (1) есть, очевидно, однородное. Пусть теперь $c$ и $c_1$ (или одно из них) отличны от нуля. Сделаем замену переменных

$$x=x_1+h, \quad y=y_1+k. \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Подставляя в уравнение (1) выражения $x$, $y$ и $\frac{dy}{dx}$, будем иметь

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}. \tag{3}$$

Подберем $h$ и $k$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c&=0,\\ a_1h+b_1k+c_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. определим $h$ и $k$ как решения системы уравнений (4). При этом условии уравнение (3) становится однородным:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}.$$

Решив это уравнение и перейдя снова к $x$ и $y$ по формулам (2), получим решение уравнения (1).

Система (4) не имеет решения, если

$$\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=0,$$

т. е. $ab_1=a_1b$. Но в этом случае $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, т. е. $a_1=\lambda a$, $b_1=\lambda b$ и, следовательно, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}. \tag{5}$$

Тогда подстановкой

$$z=ax+by \tag{6}$$

уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{7}$$

Подставляя в уравнение (5) выражения (6) и (7), получим

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1},$$

а это есть уравнение с разделяющимися переменными.

Прием, примененный к интегрированию уравнения (1), применяется и к интегрированию уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

где $f$ — какая угодно непрерывная функция.

Пример 1. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Чтобы преобразовать его в однородное уравнение, делаем замену $x=x_1+h$, $y=y_1+k$. Тогда

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}.$$

Решая систему двух уравнений

$$h+k-3=0, \quad h-k-1=0,$$

находим

$$h=2, \quad k=1.$$

В результате получаем однородное уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1},$$

которое решаем подстановкой

$$\frac{y_1}{x_1}=u;$$

тогда

$$y_1=ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1},$$

$$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u},$$

и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx_1}{x_1}.$$

Интегрируя, находим

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x_1|+\ln|C|,$$

$$\operatorname{arctg} u=\ln|Cx_1\sqrt{1+u^2}|,$$

или

$$Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Подставляя сюда $\frac{y_1}{x_1}$ вместо $u$, получим

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Наконец, переходя к переменным $x$ и $y$, окончательно получаем

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

Пример 2. Уравнение

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

уже нельзя решить подстановкой $x=x_1+h$, $y=y_1+k$, так как в этом случае система уравнений, служащая для определения $h$ и $k$, неразрешима (здесь определитель $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$ из коэффициентов при переменных равен нулю).

Это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$2x+y=z.$$

Тогда $y'=z'-2$, и уравнение приводится к виду

$$z'-2=\frac{z-1}{2z+5},$$

или

$$z'=\frac{5z+9}{2z+5}.$$

Решая его, найдем

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C.$$

Так как $z=2x+y$, то мы получим окончательно решение исходного уравнения в виде

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+C,$$

или

$$10y-5x+7\ln|10x+5y+9|=C_1,$$

т. е. в виде неявной функции $y$ от $x$.

## § 7. Линейные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от $x$ (или постоянные).

Решение линейного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух функций от $x$:

$$y=u(x)\,v(x). \tag{2}$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения (1).

Дифференцируя обе части равенства (2), находим

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), будем иметь

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + Puv = Q,$$

или

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q. \tag{3}$$

Выберем функцию $v$ такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{4}$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции $v$, находим

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int P\,dx,$$

или

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}.$$

Так как нам достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (4), то за функцию $v(x)$ возьмем

$$v(x) = e^{-\int P\,dx}, \tag{5}$$

где $\int P\,dx$ — какая-нибудь первообразная. Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение (3), получим $\left(\text{учитывая, что } \frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x),$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Подставляя $u$ и $v$ в формулу (2), окончательно получаем

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right],$$

или

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \qquad (6)$$

Замечание. Очевидно, что выражение (6) не изменится, если вместо функции $v(x)$, определенной равенством (5), мы возьмем какую-нибудь функцию $v_1(x) = \overline{C}v(x)$. Действительно, подставляя в (6) $v_1(x)$ вместо $v(x)$, получим

$$y = \overline{C}v(x)\int \frac{Q(x)}{\overline{C}v(x)}\,dx + C\overline{C}v(x).$$

В первом слагаемом $\overline{C}$ сокращаются; во втором слагаемом произведение $C\overline{C}$ есть произвольная постоянная, которую обозначаем одной буквой $C$, и снова приходим к выражению (6). Если обозначим $\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx = \varphi(x)$, то выражение (6) примет вид

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x). \qquad (6')$$

Очевидно, что это — общий интеграл, так как $C$ можно подобрать так, что будет удовлетворяться начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$.

Значение $C$ определяется из уравнения

$$y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^2.$$

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Подставляя выражение $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3. \qquad (7)$$

Для определения $v$ получим уравнение $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$, откуда $\ln|v| = 2\ln|x+1|$, или $v = (x+1)^2$. Подставляя выражение функции $v$ в уравнение (7), получаем для определения $u$ уравнение $(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$, или $\frac{du}{dx} = x+1$, откуда $u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Полученное семейство является общим решением. Каково бы ни было начальное условие $(x_0; y_0)$, где $x_0 \neq -1$, всегда можно так подобрать $C$, чтобы соответствующее частное решение удовлетворяло заданному начальному условию. Например, частное решение, удовлетворяющее условию $y_0 = 3$ при $x_0 = 0$, найдется следующим образом: $3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2$, $C = 5/2$. Следовательно, искомое частное решение таково: $y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2$. Однако, если начальное условие $(x_0; y_0)$ выбрать так, что $x_0 = -1$, то мы не найдем частного решения, удовлетворяющего этому условию. Это объясняется тем, что при $x_0 = -1$ функция $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ разрывна и, следовательно, условия теоремы существования решения не соблюдены.

Замечание. В приложениях часто встречаются линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \tag{8}$$

где $a$ и $b$ — постоянные.

Его можно решить и с помощью подстановки (2) или путем разделения переменных:

$$dy = (-ay + b)\,dx, \quad \frac{dy}{-ay+b} = dx, \quad -\frac{1}{a}\ln|-ay+b| = x + C_1,$$

$$\ln|-ay+b| = -(ax + C^*), \text{ где } C^* = aC_1,$$

$$-ay + b = e^{-(ax+C^*)}, \quad y = -\frac{1}{a}e^{-(ax+C^*)} + \frac{b}{a},$$

или окончательно

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

$\left(\text{где обозначено } -\frac{1}{a}e^{-C^*} = C\right)$. Это и есть общее решение уравнения (8).

## § 8. Уравнение Бернулли

Рассмотрим уравнение вида *)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — непрерывные функции от $x$ (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$ (в противном случае получилось бы линейное уравнение). Это уравнение, называемое *уравнением Бернулли*, приводится к линейному следующим преобразованием.

---

*) К этому уравнению приводит задача о движении тела, если сопротивление среды $F$ зависит от скорости так: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. Уравнение движения будет тогда $m\frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$, или $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m}v = -\frac{\lambda_2}{m}v^n$.

Разделив все члены уравнения на $y^n$, получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \tag{2}$$

Сделаем, далее, замену

$$z=y^{-n+1}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2), будем иметь линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz=(-n+1)\,Q.$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо $z$ выражение $y^{-n+1}$, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \tag{3}$$

Решение. Разделив все члены на $y^3$, получим

$$y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3. \tag{4}$$

Введем новую функцию $z=y^{-2}$; тогда $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$. Подставляя эти значения в уравнение (4), получим линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3. \tag{5}$$

Найдем его общий интеграл:

$$z=uv, \quad \frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v.$$

Подставляем в уравнение (5) выражения $z$ и $\frac{dz}{dx}$:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-2xuv=-2x^3,$$

или

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Приравниваем нулю выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0, \quad \frac{dv}{v}=2x\,dx,$$

$$\ln|v|=x^2, \quad v=e^{x^2}.$$

Для определения $u$ получаем уравнение

$$e^{x^2}\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Разделяем переменные:

$$du=-2e^{-x^2}x^3\,dx, \quad u=-2\int e^{-x^2}x^3\,dx+C.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \quad z = uv = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения есть

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}, \text{ или } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}.$$

Замечание. Аналогично тому, как это делалось для линейных уравнений, можно показать, что решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)\, v(x),$$

где $v(x)$ — какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $v' + Pv = 0$.

## § 9. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах. Докажем, что если левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал, то выполняется условие (2), и обратно — при выполнении условия (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x, y) = 0, \tag{3}$$

и, следовательно, его общий интеграл есть $u(x, y) = C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy;$$

тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Дифференцируя первое соотношение по $y$, а второе — по $x$ получим

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем имет

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

т. е. равенство (2) является необходимым условием для того чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциало некоторой функции $u(x, y)$. Покажем, что это условие является и достаточным, т. е. что при выполнении равенства (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x, y)$ находим $u=\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\varphi(y)$, где $x_0$ — абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по $x$ мы считаем $y$ постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от $y$. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (4). Для этого продифференцируем*) обе части последнего равенства по $y$ и результат приравняем $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\varphi'(y)=N(x, y);$$

но так как $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то можем написать $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\,dx+\varphi'(y)=N$, т. е. $N(x, y)\big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x, y)$, или

$$N(x, y)-N(x_0, y)+\varphi'(y)=N(x, y).$$

Следовательно,

$$\varphi'(y)=N(x_0, y),$$

или

$$\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy+C_1.$$

---

*) Интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx$ зависит от $y$. Для того чтобы найти производную от этого интеграла по $y$, нужно продифференцировать по $y$ подынтегральную функцию: $\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx$. Это вытекает из теоремы Лейбница о дифференцировании определенного интеграла по параметру (см. § 10 гл. XI).

Таким образом, функция $u(x, y)$ будет иметь вид

$$u=\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy+C_1.$$

Здесь $P(x_0; y_0)$ — точка, в окрестности которой существует решение дифференциального уравнения (1).

Приравнивая это выражение произвольной постоянной $C$, получим общий интеграл уравнения (1):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy=C. \tag{5}$$

Пример. Дано уравнение

$$\frac{2x}{y^3}\,dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0.$$

Проверяем, не есть ли это уравнение в полных дифференциалах. Обозначим

$$M=\frac{2x}{y^3}, \qquad N=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.$$

Условие (2) при $y\neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x, y)$. Найдем эту функцию.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$, то, следовательно,

$$u=\int \frac{2x}{y^3}\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — не определенная пока функция от $y$.

Дифференцируя это соотношение по $y$ и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4},$$

находим

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

следовательно,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1,$$

$$u(x, y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

## § 10. Интегрирующий множитель

Пусть левая часть уравнения

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

не есть полный дифференциал. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую всех членов уравнения левая часть уравнения становится полным дифференциалом. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения; функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (1).

Для того чтобы найти интегрирующий множитель $\mu$, поступаем следующим образом: умножим обе части данного уравнения на неизвестный пока интегрирующий множитель $\mu$:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

т. е.

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

или

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

После деления обеих частей последнего уравнения на $\mu$, получим

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Очевидно, что всякая функция $\mu(x, y)$, удовлетворяющая последнему уравнению, является интегрирующим множителем уравнения (1). Уравнение (2) является уравнением в частных производных с неизвестной функцией $\mu$, зависящей от двух переменных $x$ и $y$. Можно доказать, что при определенных условиях оно имеет бесчисленное множество решений и, следовательно, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель. Но в общем случае задача нахождения $\mu(x, y)$ из уравнения (2) еще труднее, чем первоначальная задача интегрирования уравнения (1). Только в некоторых частных случаях удается найти функцию $\mu(x, y)$.

Пусть, например, уравнение (1) допускает интегрирующий множитель, зависящий только от $y$. Тогда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0,$$

и для отыскания $\mu$ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

из которого определяется (одной квадратурой) $\ln\mu$, а следовательно, и $\mu$. Ясно, что так можно поступать только в том случае, если выражение $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ не зависит от $x$.

Аналогично, если выражение $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ не зависит от $y$, а зависит только от $x$, то легко находится интегрирующий множитель, зависящий только от $x$.

Пример. Решить уравнение

$$(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0.$$

Решение. Здесь $M=y+xy^2$, $N=-x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть уравнения не есть полный дифференциал. Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя, зависящего только от $y$. Заметив, что

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

заключаем, что уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от $y$. Находим его: $\dfrac{d\ln\mu}{dy}=-\dfrac{2}{y}$; отсюда $\ln\mu=-2\ln y$, т. е. $\mu=1/y^2$. После умножения всех членов данного уравнения на найденный интегрирующий множитель $\mu$ получаем уравнение $\left(\dfrac{1}{y}+x\right)dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$ в полных дифференциалах $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2}\right)$. Решая это уравнение, найдем его общий интеграл $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}+C=0$, или $y=-\dfrac{2x}{x^2+2C}$.

## § 11. Огибающая семейства кривых

Пусть дано уравнение вида

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{1}$$

где $x$ и $y$ — переменные декартовы координаты, а $C$ — параметр, могущий принимать различные фиксированные значения.

При каждом данном значении параметра $C$ уравнение (1) опр деляет некоторую кривую на плоскости $Oxy$. Придавая $C$ в возможные значения, мы получаем семейство кривых, за сящих от одного параметра, или — как часто говорят — одн параметрическое семейство кривых. Таким образ уравнение (1) есть уравнение одн параметрического семейства кривы (так как оно содержит только с ну произвольную постоянную).

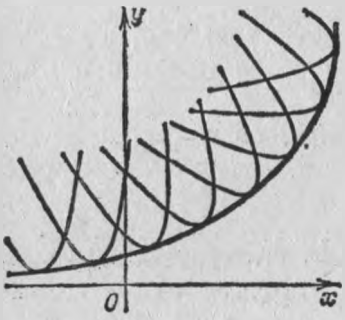



Рис. 256.

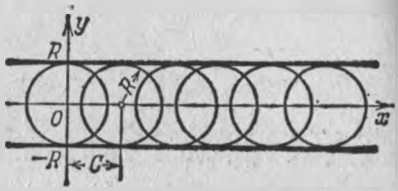



Рис. 257.

Определение. Линия $L$ называется *огибающей* однопара метрического семейства линий, если она в каждой своей точк касается той или иной линии семейства, причем в различны точках линии $L$ ее касаются различные линии данного семейств (рис. 256).

Пример 1. Рассмотрим семейство линий $(x-C)^2+y^2=R^2$, где $R$ – постоянная, $C$ — параметр. Это — семейство окружностей радиуса $R$ с центрам на оси $Ox$. Очевидно, что это семейство будет иметь огибающими прямые $y=R$ $y=-R$ (рис. 257).

Нахождение уравнения огибающей данного се мейства. Пусть дано семейство кривых

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{1}$$

зависящих от параметра $C$.

Предположим, что это семейство имеет огибающую, уравнение которой можно записать в виде $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция от $x$. Рассмотрим некоторую точку $M(x;\ y)$, лежащую на огибающей. Эта точка также лежит на некоторой кривой семейства (1). Этой кривой соответствует определенное значение параметра $C$, которое при данных $x$ и $y$ определяется из уравнения (1): $C=C(x,\ y)$. Следовательно, для всех точек огибающей удовлетворяется равенство

$$\Phi(x,\ y,\ C(x,\ y))=0. \tag{2}$$

Допустим, что $C(x,\ y)$ — дифференцируемая функция, не постоянная ни на каком интервале рассматриваемых значений $x$, $y$. Из уравнения (2) огибающей найдем угловой коэффициент касательной к огибающей в точке $M(x;\ y)$. Продифференцируем

равенство (2) по $x$, считая, что $y$ есть функция от $x$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right)y'=0,$$

или

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'+\Phi_C\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,y'\right)=0. \tag{3}$$

Далее, угловой коэффициент касательной к кривой семейства (1) в точке $M(x;\ y)$ найдется из равенства

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'=0 \tag{4}$$

($C$ на данной кривой постоянно).

Мы предполагаем, что $\Phi'_y\neq 0$, в противном случае мы считали бы $x$ функцией, а $y$ аргументом. Так как угловой коэффициент $k$ огибающей равен угловому коэффициенту $k$ кривой семейства, то из (3) и (4) получаем

$$\Phi'_C\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,y'\right)=0.$$

Но так как на огибающей $C(x,\ y)\neq\text{const}$, то

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,y'\neq 0,$$

и потому для ее точек справедливо равенство

$$\Phi'_C(x,\ y,\ C)=0. \tag{5}$$

Таким образом, для определения огибающей служат следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,\ y,\ C)&=0,\\ \Phi'_C(x,\ y,\ C)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Обратно, если, исключая $C$ из этих уравнений, получим уравнение $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, при этом значение $C\neq\text{const}$ на этой кривой, то $y=\varphi(x)$ есть уравнение огибающей.

Замечание 1. Если для семейства (1) некоторая функция $y=\varphi(x)$ является уравнением геометрического места *особых точек*, т. е. точек, где $\Phi'_x=0$ и $\Phi'_y=0$, то координаты этих точек также удовлетворяют уравнениям (6).

Действительно, координаты особых точек можно выразить через параметр $C$, входящий в уравнение (1):

$$x=\lambda(C),\quad y=\mu(C). \tag{7}$$

Если эти выражения подставим в уравнение (1), то получим тождество относительно $C$:

$$\Phi(\lambda(C),\ \mu(C),\ C)=0.$$

Дифференцируя это тождество по $C$, получим:

$$\Phi'_x\frac{d\lambda}{dC}+\Phi'_y\frac{d\mu}{dC}+\Phi'_C=0;$$

так как для любых точек выполняются равенства $\Phi'_x=0$, $\Phi'_y=0$, то, следовательно, для них также выполняется равенство $\Phi'_C=0$.

Этим мы и доказали, что координаты особых точек удовлетворяют уравнениям (6).

Итак, уравнения (6) определяют либо огибающую, либо геометрическое место особых точек кривых семейства (1), либо сочетание того и другого. Таким образом, получив кривую, удовлетворяющую уравнениям (6), необходимо дополнительно исследовать, является ли она огибающей или геометрическим местом особых точек.

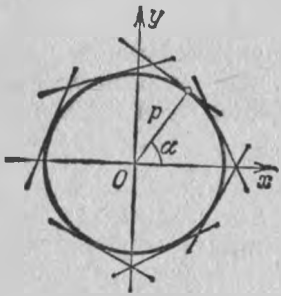



Рис. 258.

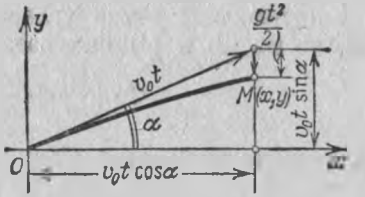



Рис. 259.

Пример 2. Найти огибающую семейства окружностей

$$(x-C)^2+y^2-R^2=0,$$

зависящих от одного параметра $C$.

Решение. Дифференцируя уравнение семейства по $C$, получаем $2(x-C)=0$. Исключая $C$ из этих двух уравнений, получим уравнения $y^2-R^2=0$ или $y=\pm R$.

Из геометрических соображений ясно, что полученная пара прямых является огибающей (а не геометрическим местом особых точек, так как окружности, входящие в семейство, не имеют особых точек).

Пример 3. Найти огибающую семейства прямых:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{a}$$

где $\alpha$ — параметр.

Решение. Дифференцируя по $\alpha$ данное уравнение семейства, будем иметь:

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \tag{b}$$

Для исключения параметра $\alpha$ из уравнений (a) и (b) умножим члены первого на $\cos\alpha$, а второго — на $\sin\alpha$ и вычтем из первого второе; тогда будем иметь $x=p\cos\alpha$. Подставляя это выражение в равенство (b), найдем $y=p\sin\alpha$. Возводя члены двух последних уравнений в квадрат и складывая почленно, получим $x^2+y^2=p^2$. Это — окружность. Она является огибающей семейства (а не геометрическим местом особых точек, так как прямые линии не имеют особых точек) (рис. 258).

Пример 4. Найти огибающую траекторий снарядов, выпущенных из пушки со скоростью $v_0$ под различными углами наклона ствола орудия к горизонту. При этом будем считать, что орудие находится в начале координат, а траектории снарядов лежат в плоскости $Oxy$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Р е ш е н и е. Найдем сначала уравнение траектории снаряда в том случае, когда ствол орудия составляет с положительным направлением оси $Ox$ угол $\alpha$. Во время полета снаряд участвует одновременно в двух движениях: равномерное движение со скоростью $v_0$ в направлении ствола орудия и падение вниз под действием силы тяжести. Поэтому в каждый момент времени $t$ положение снаряда $M$ (рис. 259) будет определяться равенствами

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Это — параметрические уравнения траектории (параметром является время $t$). Исключив $t$, найдем уравнение траектории в виде

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha};$$

наконец, введя обозначения $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, получим

$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \tag{8}$$

Это уравнение определяет параболу с вертикальной осью, проходящую через начало координат и обращенную ветвями вниз. Для различных значений $k$ мы получим различные траектории. Следовательно, уравнение (8) является

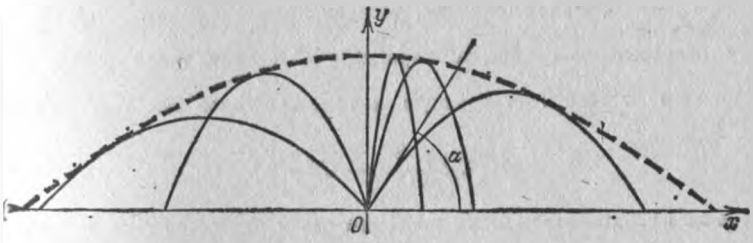



Рис. 260.

уравнением однопараметрического семейства парабол, являющихся траекториями снаряда при различных углах $\alpha$ и данной начальной скорости $v_0$ (рис. 260).

Найдем огибающую этого семейства парабол.

Дифференцируя по $k$ обе части уравнения (8), имеем

$$x - 2akx^3 = 0. \tag{9}$$

Исключая $k$ из уравнений (8) и (9), получим

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, ось которой совпадает с осью $Oy$. Она не является геометрическим местом особых точек (так как параболы (8) не имеют особых точек). Итак, парабола

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

является огибающей семейства траекторий. Она называется п а р а б о л о й б е з о п а с н о с т и, так как ни одна точка за ее пределами не достижима для снаряда, выпущенного из данного орудия с данной начальной скоростью $v_0$.

Пример 5. Найти огибающую семейства полукубических парабол

$$y^3-(x-C)^2=0.$$

Решение. Дифференцируем по параметру $C$ данное уравнение семейства:

$$2(x-C)=0.$$

Исключая параметр $C$ из двух уравнений, получим

$$y=0.$$

Ось $Ox$ является геометрическим местом особых точек — точек возврата первого рода (рис. 261). Действительно, найдем особые точки кривой

$$y^3-(x-C)^2=0$$

при фиксировании значения $C$. Дифференцируя по $x$ и $y$, находим

$$F'_x=-2(x-C)=0;$$
$$F'_y=3y^2=0.$$

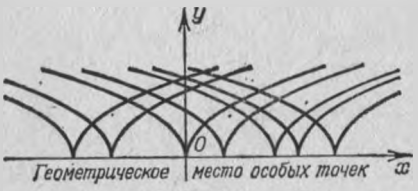


Рис. 261.

Решая совместно три предыдущих уравнения, найдем координаты особой точки: $x=C$, $y=0$; таким образом, каждая кривая данного семейства имеет особую точку на оси $Ox$.

При непрерывном изменении параметра $C$ особые точки заполнят всю ось $Ox$.

Пример 6. Найти огибающую и геометрическое место особых точек семейства

$$(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0. \tag{10}$$

Решение. Дифференцируя по $C$ обе части равенства (10), найдем

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-C)^2=0,$$

или

$$y-C-(x-C)^2=0. \tag{11}$$

Исключим теперь параметр $C$ из полученного равенства (11) и из уравнения (10) семейства. Подставив выражение $y-C=(x-C)^2$ в уравнение семейства, получим

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0, \quad \text{или} \quad (x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0;$$

отсюда получаем два возможных значения $C$ и два соответствующих им решения задачи.

Первое решение:

$$C=x;$$

поэтому из равенства (11) находим

$$y-x-(x-x)^2=0,$$

или

$$y=x.$$

Второе решение:

$$C=x-\frac{2}{3};$$

поэтому из равенства (11) находим

$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0,$$

или

$$y=x-\frac{2}{9}.$$

Мы получили две прямые $y=x$ и $y=x-\frac{2}{9}$. Первая из них является геометрическим местом особых точек, а вторая — огибающей (рис. 262).

Замечание 2. В § 7 гл. VI было доказано, что нормаль к кривой служит касательной к ее эволюте. Следовательно, семейство нормалей к данной кривой является в то же время семейством касательных к ее эволюте. Таким образом, эволюта кривой является огибающей семейства нормалей этой кривой (рис. 263).

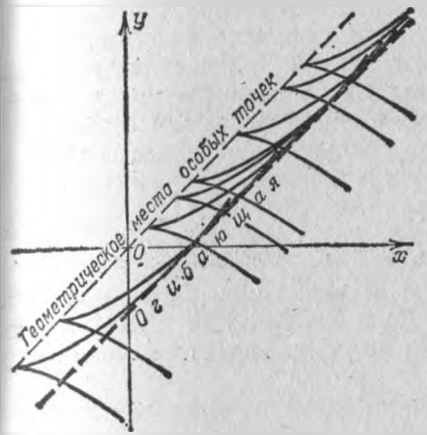



Рис. 262.

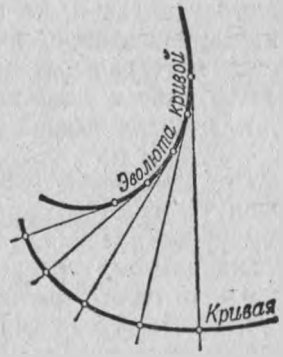



Рис. 263.

Это замечание позволяет указать еще один метод для нахождения эволюты: чтобы получить уравнение эволюты, надо сначала найти семейство всех нормалей данной кривой, а затем найти огибающую этого семейства.

## § 12. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть дифференциальное уравнение

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1}$$

имеет общий интеграл

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \tag{2}$$

Предположим, что семейство интегральных кривых, соответствующее уравнению (2), имеет огибающую. Докажем, что эта огибающая также является интегральной кривой дифференциального уравнения (1).

Действительно, в каждой своей точке огибающая касается некоторой кривой семейства, т. е. имеет с ней общую касательную. Следовательно, в каждой общей точке огибающая и кривая семейства имеют одинаковые значения величин $x$, $y$, $y'$.

Но для кривой из семейства числа $x$, $y$, $y'$ удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, тому же уравнению удовлетворяют абсцисса, ордината и угловой коэффициент каждой точки огибающей. Но это и означает, что огибающая является интегральной кривой, а ее уравнение является решением данного дифференциального уравнения.

Так как огибающая не является, вообще говоря, кривой семейства, то ее уравнение не может быть получено из общего интеграла (2) ни при каком частном значении $C$. Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении $C$ и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

Пусть известен общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

исключая $C$ из этого уравнения и уравнения $\Phi'_C(x, y, C) = 0$, получим уравнение $\psi(x, y) = 0$. Если эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (и не принадлежит семейству (2)), то это и есть *особый интеграл*.

Отметим, что через каждую точку кривой, изображающей особое решение, проходит по крайней мере по две интегральные кривые, т. е. в каждой точке особого решения нарушается единственность решения.

Заметим, что точка, в которой нарушается единственность решения дифференциального уравнения, т. е. точка, через которую проходит по крайней мере две интегральные кривые, называется *особой точкой* *). Таким образом, особое решение состоит из особых точек.

Пример. Найти особое решение уравнения

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \qquad (*)$$

Решение. Найдем его общий интеграл. Разрешим уравнение относительно $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

*) Граничные точки области существования решения также называют *особыми*. Внутренняя точка области, через которую проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, называется *обыкновенной точкой*.

Отсюда, интегрируя, находим общий интеграл

$$(x-C)^2+y^2=R^2.$$

Легко видеть, что семейство интегральных линий представляет собой семейство окружностей радиуса $R$ с центрами на оси абсцисс. Огибающей семейства кривых будет пара прямых $y=\pm R$.

Функции $y=\pm R$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (*). Следовательно, это есть особый интеграл.

## § 13. Уравнение Клеро

Рассмотрим так называемое *уравнение Клеро*

$$y=x\frac{dy}{dx}+\psi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

Оно интегрируется с помощью введения вспомогательного параметра. Именно, положим $\frac{dy}{dx}=p$; тогда уравнение (1) примет вид

$$y=xp+\psi(p). \tag{1'}$$

Продифференцируем по $x$ все члены последнего уравнения, имея в виду, что $p=\frac{dy}{dx}$ является функцией от $x$:

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+\psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

или

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

Приравнивая каждый множитель нулю, получим

$$\frac{dp}{dx}=0 \tag{2}$$

и

$$x+\psi'(p)=0. \tag{3}$$

1) Интегрируя равенство (2), получаем $p=C$ ($C=\text{const}$). Подставляя это значение $p$ в уравнение (1'), найдем его общий интеграл

$$y=xC+\psi(C), \tag{4}$$

который с геометрической точки зрения представляет собой семейство прямых линий.

2) Если из уравнения (3) найдем $p$ как функцию от $x$ и подставим ее в уравнение (1'), то получим функцию

$$y=xp(x)+\psi[p(x)], \tag{1''}$$

которая, как легко показать, представляет собой решение уравнения (1).

В самом деле, в силу равенства (3) находим $\frac{dy}{dx}=p+$ $+[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}$, т. е. $\frac{dy}{dx}=p$. Поэтому, подставляя функцию (1″) в уравнение (1), получаем тождество $xp+\psi(p)=xp+\psi(p)$.

Решение (1″) не получается из общего интеграла (4) ни при каком значении $C$. Это есть особое решение; оно получается в результате исключения параметра $p$ из уравнений

$$y=xp+\psi(p), \qquad x+\psi'(p)=0,$$

или, что все равно, исключением $C$ из уравнений

$$y=xC+\psi(C), \qquad x+\psi'(C)=0.$$

Следовательно, особое решение уравнения Клеро определяет огибающую семейства прямых, заданных общим интегралом (4).

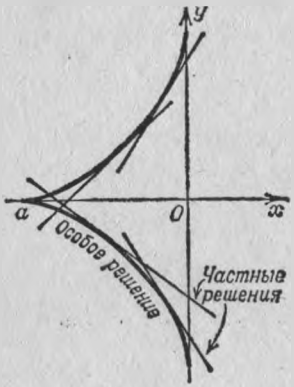


Рис. 264.

Пример. Найти общий и особый интегралы уравнения

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Решение. Общий интеграл получаем, заменяя $\frac{dy}{dx}$ на $C$:

$$y=xC+\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Для получения особого решения дифференцируем последнее уравнение по $C$:

$$x+\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}=0.$$

Особое решение (уравнение огибающей) получается в параметрическом виде (где параметром служит $C$)

$$x=-\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \qquad y=\frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}.$$

Исключив параметр $C$, можем получить непосредственную зависимость между $x$ и $y$. Возводя обе части каждого уравнения в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно полученные уравнения, найдем особое решение в следующем виде:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

Это — астроида. Однако огибающей семейства (а следовательно, и особым решением) является не вся астроида, а только ее левая половина (так как из параметрических уравнений огибающей видно, что $x\leqslant 0$) (рис. 264).

## § 14. Уравнение Лагранжа

*Уравнением Лагранжа* называется уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

где $\varphi$ и $\psi$ — известные функции от $\frac{dy}{dx}$.

Это уравнение линейно относительно $y$ и $x$. Рассмотренное в предыдущем параграфе уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Интегрирование уравнения Лагранжа, так же как и интегрирование уравнения Клеро, производится с помощью введения вспомогательного параметра $p$. Положим

$$y' = p;$$

тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1'}$$

Дифференцируя по $x$, получим

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

или

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{1''}$$

Из этого уравнения сразу можно найти некоторые решения: именно, оно обращается в тождество при всяком постоянном значении $p = p_0$, удовлетворяющем условию

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

Действительно, при постоянном значении $p$ производная $\frac{dp}{dx} \equiv 0$, и обе части уравнения (1'') обращаются в нуль.

Решение, соответствующее каждому значению $p = p_0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = p_0$, является линейной функцией от $x$ (так как производная $\frac{dy}{dx}$ постоянна только у линейных функций). Для того чтобы найти эту функцию, достаточно подставить в равенство (1') значение $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Если окажется, что это решение не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной, то оно будет особым решением.

Найдем теперь общее решение. Для этого запишем уравнение (1'') в виде

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

и будем рассматривать $x$ как функцию от $p$. Тогда полученное уравнение будет линейным дифференциальным уравнением относительно функции $x$ от $p$.

Решая его, найдем

$$x=\omega(p,\ C). \tag{2}$$

Исключая параметр $p$ из уравнений (1′) и (2), получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0.$$

Пример. Дано уравнение

$$y=xy'^2+y'^2. \tag{I}$$

Положив $y'=p$, будем иметь

$$y=xp^2+p^2. \tag{I′}$$

Дифференцируя по $x$, получим

$$p=p^2+[2xp+2p]\frac{dp}{dx}. \tag{I″}$$

Найдем особые решения. Так как $p=p^2$ при $p_0=0$ и $p_1=1$, то решениями будут линейные функции [см. (I′)] $y=x\cdot 0^2+0^2$, т. е. $y=0$, и $y=x+1$.

Будут ли эти функции частными или особыми решениями, мы увидим, когда найдем общий интеграл. Для его разыскивания запишем уравнение (I″) в виде $\frac{dx}{dp}-x\frac{2}{1-p}=\frac{2}{1-p}$ и будем рассматривать $x$ как функцию независимой переменной $p$. Интегрируя полученное линейное (относительно $x$) уравнение, находим

$$x=-1+\frac{C^2}{(p-1)^2}. \tag{II}$$

Исключая $p$ из уравнения (I′) и (II), получим общий интеграл

$$y=(C+\sqrt{x+1})^2.$$

Особым интегралом исходного уравнения будет

$$y=0,$$

поскольку это решение не получается из общего ни при каком значении $C$.

Функция же $y=x+1$ является не особым, а частным решением; она получается из общего решения при $C=0$.

## § 15. Ортогональные и изогональные траектории

Пусть имеем однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \tag{1}$$

Линии, пересекающие все кривые данного семейства (1) под постоянным углом, называются *изогональными траекториями*. Если этот угол прямой, то траектории называются *ортогональными траекториями*.

Ортогональные траектории. Найдем уравнение ортогональных траекторий. Напишем дифференциальное уравнение данного семейства кривых, исключая параметр $C$ из уравнений

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0$$

и

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

Пусть это дифференциальное уравнение будет

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{1'}$$

Здесь $\frac{dy}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной к кривой семейства в точке $M(x;\ y)$. Так как ортогональная траектория, проходящая через точку $M(x;\ y)$, перпендикулярна к соответствующей кривой семейства, то угловой коэффициент касательной к ней $\frac{dy_T}{dx}$ связан с $\frac{dy}{dx}$ соотношением (рис. 265)

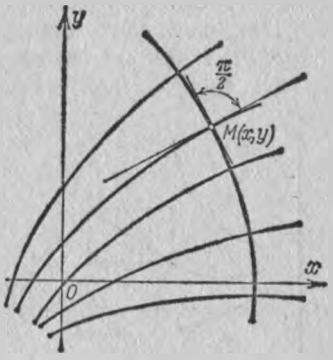


Рис. 265.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \tag{2}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1') и опуская индекс $T$, получим соотношение между координатами произвольной точки $(x;\ y)$ и угловым коэффициентом ортогональной траектории в этой точке, т. е. дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$F\left(x,\ y-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)=0. \tag{3}$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\Phi_1(x,\ y,\ C)=0$$

дает семейство ортогональных траекторий.

С ортогональными траекториями приходится иметь дело, например, при рассмотрении плоского течения жидкости.

Положим, что течение жидкости на плоскости происходит так, что в каждой точке плоскости $Oxy$ определен вектор $\boldsymbol{v}(x,\ y)$ скорости движения. Если этот вектор зависит только от положения точки на плоскости, но не зависит от времени, то движение называется стационарным, или установившимся. Такое дви-

жение мы и будем рассматривать. Кроме того, мы допустим, что существует потенциал скоростей, т. е. такая функция $u(x, y)$, что проекции вектора $\boldsymbol{v}(x, y)$ на оси координат $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ являются ее частными производными по $x$ и $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

Линии семейства

$$u(x, y) = C \tag{5}$$

называются *эквипотенциальными линиями* (т. е. линиями равного потенциала).

Линии, касательные к которым во всех точках совпадают по направлению с вектором $\boldsymbol{v}(x, y)$, называются *линиями тока* и дают траектории движущихся точек.

Покажем, что линии тока суть ортогональные траектории семейства эквипотенциальных линий (рис. 266).

Пусть $\varphi$ — угол, образованный вектором скорости $\boldsymbol{v}$ с осью $Ox$. Тогда на основании соотношения (4)

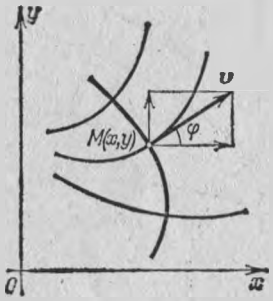


Рис. 266.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |\boldsymbol{v}| \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |\boldsymbol{v}| \sin\varphi;$$

отсюда находим угловой коэффициент касательной к линии тока

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \tag{6}$$

Угловой коэффициент касательной к эквипотенциальной линии получим, дифференцируя по $x$ соотношение (5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к эквипотенциальной линии обратен по величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту касательной к линии тока. Отсюда и следует, что эквипотенциальные линии и линии тока взаимно ортогональны.



В случае электрического или магнитного поля ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий служат силовые линии этого поля.

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства парабол

$$y = Cx^2.$$

Решение. Напишем дифференциальное уравнение семейства

$$y' = 2Cx.$$

Исключая $C$, получим $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$. Заменяя здесь $y'$ на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий $-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$, или $y\,dy = -\frac{x\,dx}{2}$.

Его общий интеграл

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Следовательно, ортогональными траекториями данного семейства парабол будет некоторое семейство эллипсов с полуосями $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ (рис. 267).

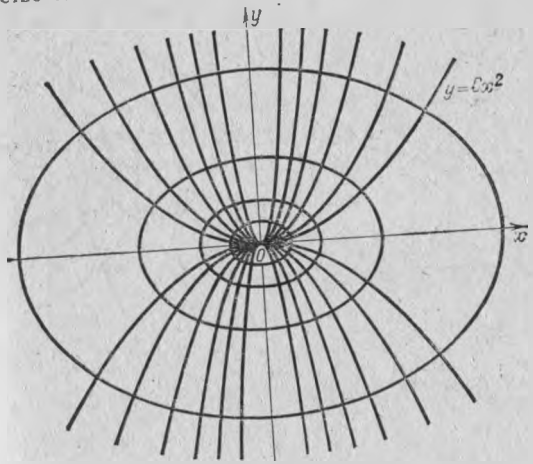


Рис. 267.

Изогональные траектории. Пусть траектории пересекают кривые данного семейства под углом $\alpha$, причем $\operatorname{tg}\alpha = k$.

Угловой коэффициент $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 268) касательной к кривой семейства и угловой коэффициент $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ к изогональной траектории связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi},$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}. \qquad (2')$$

Подставляя это выражение в уравнение (1′) и опуская индекс $T$, получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий.

Пример 2. Найти изогональные траектории семейства прямых

$$y=Cx, \qquad (8)$$

пересекающие линии данного семейства под углом $\alpha$, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\alpha=k.$$

Решение. Напишем дифференциальное уравнение данного семейства. Дифференцируя по $x$ уравнение (8), находим $\frac{dy}{dx}=C$. С другой стороны, из того же уравнения $C=y/x$. Следовательно, дифференциальное уравнение данного семейства имеет вид $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

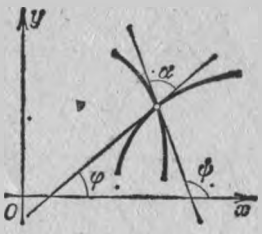



Рис. 268.

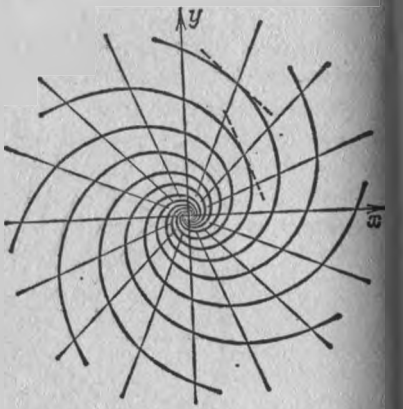



Рис. 269.

Пользуясь соотношением (2′), получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}=\frac{y}{x}.$$

Отсюда, опуская индекс $T$, находим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}}.$$

Интегрируя это однородное уравнение, получаем общий интеграл

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln C, \qquad (9)$$

который и определяет семейство изогональных траекторий. Чтобы выяснить, какие именно кривые входят в это семейство, перейдем к полярным координатам:

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi, \qquad \sqrt{x^2+y^2}=\rho.$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получим $\ln\rho=\frac{1}{k}\varphi+\ln C$, или $\rho=\varphi/Ce^k$. Следовательно, семейство изогональных траекторий является семейством логарифмических спиралей (рис. 269).

## § 16. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия)

Как уже указывалось выше (см. § 2), дифференциальное уравнение $n$-го порядка символически можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{1}$$

или, если его можно разрешить относительно $n$-й производной,

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

В настоящей главе мы будем рассматривать только такие уравнения высших порядков, которые можно разрешить относительно высшей производной. Для этих уравнений имеет место теорема о существовании и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме о решении уравнения первого порядка.

Теорема. *Если в уравнении*

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

*функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *и ее частные производные по аргументам* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой области, содержащей значения*

$$x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)},$$

*то существует и притом единственное решение* $y=y(x)$ *уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Эти условия называются *начальными условиями*. Доказательство этой теоремы выходит за рамки данной книги.

Если рассматривать уравнение второго порядка

$$y''=f(x, y, y'),$$

то начальными условиями при $x=x_0$ для решения будут условия

$$y=y_0,\quad y'=y_0',$$

где $x_0$, $y_0$, $y_0'$ — заданные числа. Геометрический смысл этих условий следующий: через заданную точку плоскости $(x_0; y_0)$ с задан-

ным тангенсом угла наклона касательной $y_0'$ проходит единственная кривая. Из этого, далее, следует, что если мы будем задавать различные значения $y_0'$ при постоянных $x_0$ и $y_0$, то получим бесчисленное множество интегральных кривых с различными углами наклона, проходящих через заданную точку.

Введем теперь понятие общего решения уравнения $n$-го порядка.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения $n$-го порядка называется функция

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от $n$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и такая, что:

а) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

б) при заданных начальных условиях

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, что функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ будет удовлетворять этим условиям (предполагая, что начальные значения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ принадлежат области, где выполняются условия существования решения).

Соотношение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется *частным решением*. График частного решения называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение $n$-го порядка — значит:

1) найти его общее решение (если начальные условия не заданы) или

2) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковые имеются).

В следующих параграфах будут изложены методы решения различных уравнений $n$-го порядка.

## § 17. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$

Простейшим уравнением $n$-го порядка является уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x). \tag{1}$$

Найдем общий интеграл этого уравнения.

Интегрируя по $x$ левую и правую части и принимая во внимание, что $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$, получим

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C_1,$$

где $x_0$ — любое фиксированное значение $x$, а $C_1$ — постоянная интегрирования.

Интегрируя еще раз, получим

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx+C_1(x-x_0)+C_2.$$

Продолжая далее, получим, наконец (после $n$ интегрирований), выражение общего интеграла

$$y=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\ldots dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

достаточно положить

$$C_n=y_0,\quad C_{n-1}=y_0',\ \ldots,\ C_1=y_0^{(n-1)}.$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$y''=\sin(kx)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=1.$$

Решение.

$$y'=\int_0^x \sin kx\,dx+C_1=-\frac{\cos kx-1}{k}+C_1,$$

$$y=-\int_0^x\left(\frac{\cos kx-1}{k}\right)dx+\int_0^x C_1\,dx+C_2,$$

или

$$y=-\frac{\sin kx}{k^2}+\frac{x}{k}+C_1x+C_2.$$

Это есть общий интеграл. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, достаточно определить соответствующие значения $C_1$ и $C_2$.

Из условия $y|_{x=0}$ находим $C_2=0$.

Из условия $y'|_{x=0}=1$ находим $C_1=1$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y=-\frac{\sin kx}{k^2}+x\left(\frac{1}{k}+1\right).$$

Дифференциальные уравнения рассмотренного вида встречаются в теории изгибания балок.

Пример 2. Рассмотрим упругую призматическую балку, изгибающуюся под действием внешних сил, как непрерывно распределенных (вес, нагрузка), так и сосредоточенных. Направим ось $Ox$ горизонтально, по оси балки в ее недеформированном состоянии, ось $Oy$ — вертикально вниз (рис. 270).

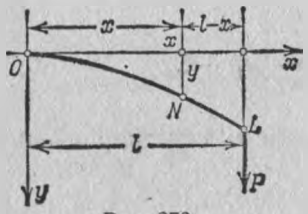


Рис. 270.

Каждая сила, действующая на балку (например, нагрузка балки, реакция опор), имеет момент относительно какого-нибудь поперечного сечения балки, равный произведению силы на расстояние точки приложения силы от данного сечения. Сумма $M(x)$ моментов всех сил, приложенных к части балки, расположенной по одну сторону от данного сечения, с абсциссой $x$, называется изгибающим моментом балки относительно данного сечения. В курсе сопротивления материалов доказывается, что изгибающий момент балки равен $EJ/R$, где $E$ — так называемый модуль упругости, зависящий от материала балки; $J$ — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести площади поперечного сечения; $R$ — радиус кривизны оси изогнутой балки, который выражается формулой (§ 6 гл. VI)

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{M(x)}{EJ}. \qquad (2)$$

Если считать, что деформации малы и что касательные к оси балки при изгибе образуют малый угол с осью $Ox$, то мы можем пренебречь квадратом малой величины $y'^2$ и считать $R=1/y''$.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой балки примет вид

$$y''=\frac{M(x)}{EJ}, \qquad (2')$$

а это уравнение есть уравнение вида (1).

Пример 3. Балка наглухо заделана в конце $O$ и подвергается действию сосредоточенной вертикальной силы $P$, приложенной к концу балки $L$ на расстоянии $l$ от места закрепления (рис. 270). Весом балки пренебрегаем.

Рассмотрим сечение в точке $N(x)$. Изгибающий момент относительно сечения $N$ в данном случае будет равен $M(x)=(l-x)P$. Дифференциальное уравнение (2′) примет вид

$$y''=\frac{P}{EJ}(l-x).$$

Начальные условия: при $x=0$ прогиб $y$ равен нулю и касательная к изогнутой оси балки совпадает с осью $Ox$, т. е. $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$. Интегрируя



уравнение, найдем

$$y'=\frac{P}{EJ}\int_0^x(l-x)\,dx=\frac{P}{EJ}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right);$$

$$y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right). \qquad (3)$$

В частности, из формулы (3) определяется прогиб $h$ на конце балки $L$:

$$h=y|_{x=l}=\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

## § 18. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка. Задача о второй космической скорости

I. Уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

не содержит явным образом искомой функции $y$.

Решение. Обозначим производную $\frac{dy}{dx}$ через $p$, т. е. положим $\frac{dy}{dx}=p$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$.

Подставляя эти выражения производных в уравнение (1), получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p)$$

относительно неизвестной функции $p$ от $x$. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение

$$p=p(x,\ C_1),$$

а затем из соотношения $\frac{dy}{dx}=p$ получаем общий интеграл уравнения (1)

$$y=\int p(x,\ C_1)\,dx+C_2.$$

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение цепной линии (см. § 1)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Положим

$$\frac{dy}{dx}=p;$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции $p$ от $x$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a},$$

откуда

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\frac{x}{a}+C_1,$$

$$p=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

Но так как $p=\frac{dy}{dx}$, то последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение относительно искомой функции $y$. Интегрируя его, получим уравнение цепной линии (см. § 1)

$$y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+C_1\right)+C_2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y|_{x=0}=a,\quad y'|_{x=0}=0.$$

Второе условие дает $C_1=0$, первое $C_2=0$.
Окончательно получаем

$$y=a\operatorname{ch}(x/a).$$

Замечание. Аналогичным способом можно проинтегрировать уравнение

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(n-1)}).$$

Полагая $y^{(n-1)}=p$, получим для определения $p$ уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p).$$

Узнав отсюда $p$ как функцию от $x$, из соотношения $y^{(n-1)}=p$ найдем $y$ (см. § 17).

II. Уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

не содержит явным образом независимой переменной $x$.

Для его решения снова положим

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{3}$$

но теперь мы будем считать $p$ функцией от $y$ (а не от $x$, как прежде). Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

Подставляя в уравнение (2) выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции $p$

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p). \tag{4}$$

Интегрируя его, найдем $p$ как функцию от $y$ и произвольной постоянной $C_1$:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Подставляя это значение в соотношение (3), получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $y$ от $x$

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1).$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)}=dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$3y''=y^{-5/3}.$$

Решение. Положим $\frac{dy}{dx}=p$, рассматривая $p$ как функцию от $y$. Тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$, и мы получаем уравнение первого порядка для вспомогательной функции $p$

$$3p\frac{dp}{dy}=y^{-5/3}.$$

Интегрируя это уравнение, находим $p^2=C_1-y^{-2/3}$ или $p=\pm\sqrt{C_1-y^{-2/3}}$. Но $p=\frac{dy}{dx}$; следовательно, для определения $y$ получаем уравнение $\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-2/3}}}=dx$, или $\frac{y^{1/3}\,dy}{\pm\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}=dx$, откуда $x+C_2=\pm\int\frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}$. Для вычисления последнего интеграла сделаем подста-

новку $C_1y^{2/3}-1=t^2$. Тогда

$$y^{1/3}=(t^2+1)^{1/2}\frac{1}{C_1^{1/2}},\quad dy=3t\,(t^2+1)^{1/2}\frac{1}{C_1^{3/2}}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}=\frac{1}{C_1^2}\int\frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\,(C_1y^{2/3}+2).$$

Окончательно получаем

$$x+C_2=\pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\,(C_1y^{2/3}+2).$$

Пример 3. Пусть точка движется по оси $Ox$ под действием силы, зависящей только от положения точки. Дифференциальное уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x).$$

Пусть при $t=0$ будет $x=x_0$, $\frac{dx}{dt}=v_0$.

Умножив обе части уравнения на $\frac{dx}{dt}\,dt$ и проинтегрировав в пределах от 0 до $t$, получим

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx,$$

или

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left[-\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx\right]=\frac{1}{2}mv_0^2=\text{const}.$$

Первое слагаемое последнего равенства представляет собой кинетическую энергию, второе — потенциальную энергию движущейся точки. Из полученного равенства следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной во все время движения.

Задача о математическом маятнике. Пусть материальная точка массы $m$ под действием силы тяжести движется по окружности $L$, лежащей в вертикальной плоскости. Найдем уравнение движения точки, пренебрегая силами сопротивления (т. е. силой трения, силой сопротивления воздуха и т. п.).

Поместим начало координат в низшей точке окружности, ось $Ox$ направим по касательной к окружности (рис. 271).

Обозначим через $l$ радиус окружности, через $s$ — длину дуги от начала $O$ до переменной точки $M$, где находится масса $m$, причем эту длину берем с соответствующим знаком ($s>0$, если точка $M$ правее точки $O$; $s<0$, если $M$ левее $O$).

Наша задача заключается в установлении зависимости $s$ от времени $t$.

Разложим силу тяжести $mg$ на тангенциальную и нормальную составляющие. Первая, равная $-mg\sin\varphi$, вызывает движение, вторая уничтожается реакцией кривой, по которой движется масса $m$.



Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\varphi.$$

Так как для окружности угол $\varphi=s/l$, то мы получаем уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\frac{s}{l}.$$

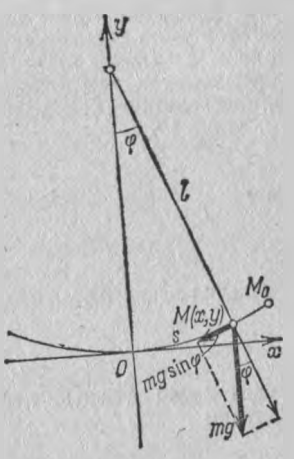


Рис. 271.

Это дифференциальное уравнение II типа (так как оно не содержит явным образом независимой переменной $t$).

Интегрируем его соответствующим образом:

$$\frac{ds}{dt}=p,\quad\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dp}{ds}\,p.$$

Следовательно, $p\frac{dp}{ds}=-g\sin\frac{s}{l}$, или $p\,dp=-g\sin\frac{s}{l}\,ds$, откуда

$$p^2=2gl\cos\frac{s}{l}+C_1.$$

Обозначим через $s_0$ наибольшую длину дуги, на которую отклоняется точка $M$. При $s=s_0$ скорость точки равна нулю:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0}=p\Big|_{s=s_0}=0.$$

Это дает возможность определить $C_1$: $0=2gl\cos\frac{s_0}{l}+C_1$, откуда $C_1=-2gl\cos\frac{s_0}{l}$. Поэтому $p^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gl\left(\cos\frac{s}{l}-\cos\frac{s_0}{l}\right)$, или, применяя к последнему выражению формулу для разности косинусов,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4gl\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l},\qquad(5)$$

откуда *)

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}.\qquad(6)$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,dt.\qquad(7)$$

*) Перед корнем мы берем знак плюс. Из замечания в конце решения задачи следует, что рассматривать случай, когда берется знак минус, нет надобности.

Будем пока предполагать, что $s \neq s_0$, тогда знаменатель дроби отличен от нуля. Если считать, что $s=0$ при $t=0$, то из равенства (7) получаем

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl}\,t. \tag{8}$$

Это равенство и дает зависимость $s$ от $t$. Интеграл, стоящий слева, не выражается через элементарные функции, не выражается через элементарные функции и функция $s$ от $t$. Рассмотрим поставленную задачу приближенно. Будем предполагать, что углы $s_0/l$ и $s/l$ малы. Углы $(s+s_0)/2l$ и $(s_0-s)/2l$ не будут превосходить $s_0/l$. В уравнении (6) синусы углов заменим приближенно углами:

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\frac{s_0-s}{2l}},$$

или

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0^2-s^2}. \tag{6'}$$

Разделяя переменные, получим (предполагаем пока, что $s \neq s_0$)

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{7'}$$

Снова будем считать, что $s=0$ при $t=0$. Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t, \tag{8'}$$

или

$$\arcsin\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

откуда

$$s = s_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t. \tag{9}$$

Замечание. При решении мы предполагали, что $s \neq s_0$. Но путем непосредственной подстановки убеждаемся, что функция (9) есть решение уравнения (6′) при любом значении $t$.

Напомним, что решение (9) является приближенным решением уравнения (5), так как уравнение (6) мы заменили приближенным уравнением (6′).

Равенство (9) показывает, что точка $M$ (которую можно рассматривать как конец маятника) совершает гармонические колебания с периодом колебания $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Этот период не зависит от амплитуды колебания $s_0$.

Пример 4. Задача о второй космической скорости.

Определить наименьшую скорость, с какой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Обозначим массу Земли и массу брошенного тела соответственно через $M$ и $m$. По закону тяготения Ньютона сила $f$ притяжения, действующая на тело $m$, будет

$$f = k\frac{M\cdot m}{r^2},$$

где $r$ — расстояние между центром Земли и центром масс брошенного тела, $k$ — гравитационная постоянная.

Дифференциальное уравнение движения указанного тела с массой $m$ будет

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M\cdot m}{r^2},$$

или

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M}{r^2}. \tag{10}$$

Мы взяли знак минус потому, что в задаче ускорение отрицательно. Дифференциальное уравнение (10) есть уравнение вида (2). Будем решать это уравнение при следующих начальных условиях: $r=R$, $\frac{dr}{dt}=v_0$ при $t=0$. Здесь $R$ — радиус Земли, $v_0$ — скорость бросания. Обозначим $\frac{dr}{dt}=v$, $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr}$, где $v$ — скорость движения. Подставляя в уравнение (10), получим $v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}$. Разделяя переменные, получаем $v\,dv=-kM\frac{dr}{r^2}$. Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+C_1. \tag{11}$$

Из условия, что $v=v_0$ на поверхности Земли (при $r=R$), определим $C_1$:

$$\frac{v_0^2}{2}=kM\frac{1}{R}+C_1,$$

или

$$C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

Подставим найденное значение $C_1$ в равенство (11):

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2},$$

или

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{12}$$

По условию тело должно двигаться так, чтобы скорость всегда была положительной, следовательно, $v^2/2>0$. Так как величина $kM/r$ при неограниченном возрастании $r$ делается как угодно малой, то условие $v^2/2>0$ будет выполняться при любом $r$ только в случае

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0, \tag{13}$$

или

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Следовательно, наименьшая скорость будет определяться равенством

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}, \tag{14}$$

где

$$k=6{,}66\cdot10^{-8}\ \frac{\text{см}^3}{\text{г}\cdot\text{с}^2},\qquad R=63\cdot10^7\ \text{см}.$$

На поверхности Земли при $r=R$ ускорение силы тяжести равно $g$ ($g=981$ см/с$^2$). На основании этого из равенства (10) получаем $g=k\frac{M}{R^2}$ или $M=\frac{gR^2}{k}$. Подставляя это значение $M$ в формулу (14), получаем

$$v_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot981\cdot63\cdot10^7}\approx11{,}2\cdot10^5\ \text{см/с}=11{,}2\ \text{км/с}.$$

## § 19. Графический метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка

Выясним геометрический смысл дифференциального уравнения второго порядка. Пусть имеем уравнение

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \tag{1}$$

Обозначим через $\varphi$ угол, который касательная к кривой образует с положительным направлением оси $Ox$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi. \tag{2}$$

Чтобы выяснить геометрический смысл второй производной, вспомним формулу, определяющую радиус кривизны кривой в данной точке *),

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Отсюда

$$y''=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Но

$$y'=\operatorname{tg}\varphi,\ 1+y'^2=1+\operatorname{tg}^2\varphi=\sec^2\varphi,\ (1+y'^2)^{3/2}=|\sec^3\varphi|=\frac{1}{|\cos^3\varphi|},$$

поэтому

$$y''=\frac{1}{R\,|\cos^3\varphi|}. \tag{3}$$

Подставляя теперь в уравнение (1) полученные выражения для $y$ и $y''$, будем иметь

$$\frac{1}{R\,|\cos^3\varphi|}=f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi),$$

*) До сих пор мы всегда считали радиус кривизны положительным числом, однако в настоящем параграфе мы будем считать радиус кривизны числом, которое может принимать как положительные, так и отрицательные значения: если кривая выпукла ($y''<0$), мы считаем радиус кривизны отрицательным ($R<0$); если кривая вогнута ($y''>0$),— положительным ($R>0$).

или

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x,\ y,\ \operatorname{tg} \varphi)}. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что дифференциальное уравнение второго порядка определяет величину радиуса кривизны интегральной линии, если заданы координаты точки и направление касательной в этой точке.

Из предыдущего вытекает способ приближенного построения интегральной кривой при помощи гладкой кривой, составленной из дуг окружностей *). Пусть, например, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

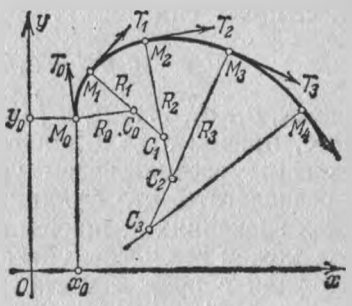



Рис. 272.

Через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ проведем луч $M_0T_0$ с угловым коэффициентом $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (рис. 272). Из уравнения (4) найдем величину $R = R_0$. Отложим отрезок $M_0C_0$, равный $R_0$, на перпендикуляре к направлению $M_0T_0$, и из точки $C_0$, как из центра, опишем небольшую дугу $\overset{\frown}{M_0M_1}$ радиусом $R_0$. Заметим при этом, что если $R_0 < 0$, то отрезок $M_0C_0$ нужно направлять в ту сторону, чтобы дуга окружности была обращена выпуклостью вверх, а при $R_0 > 0$ — выпуклостью вниз (см. сноску на предыдущей странице).

Пусть, далее, $x_1$, $y_1$ — координаты точки $M_1$, лежащей на построенной дуге и достаточно близкой к точке $M_0$, а $\operatorname{tg} \varphi_1$ — угловой коэффициент касательной $M_1T_1$ к проведенной окружности в точке $M_1$. Из уравнения (4) найдем соответствующее точке $M_1$ значение $R = R_1$. Проведем отрезок $M_1C_1$, перпендикулярный к $M_1T_1$, равный $R_1$, и из точки $C_1$, как из центра, опишем дугу $\overset{\frown}{M_1M_2}$ радиусом $R_1$. Затем на этой дуге возьмем близкую к $M_1$ точку $M_2(x_2,\ y_2)$ и продолжаем таким образом построение, пока не получим достаточно большой кусок кривой, состоящей из дуг окружностей. Из предыдущего ясно, что эта кривая приближенно является интегральной линией, проходящей через точку $M_0$. Очевидно, что построенная кривая будет тем ближе к интегральной кривой, чем меньше будут дуги $\overset{\frown}{M_0M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, ...

*) Кривая называется *гладкой*, если она имеет касательную во всех точках, причем угол наклона этой касательной есть непрерывная функция от длины дуги $s$.

## § 20. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства

Определение 1. Дифференциальное уравнение $n$-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно совокупности искомой функции $y$ и ее производных $y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $f(x)$ — заданные функции от $x$ или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений $x$ из той области, в которой мы рассматриваем уравнение (1). В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях $x$, причем коэффициент $a_0 = 1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него). Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется *правой частью уравнения*.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным *неоднородным* или уравнением с *правой частью*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{2}$$

и называется линейным *однородным* или уравнением *без правой части* (левая часть этого уравнения является однородной функцией первой степени относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$).

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка.

Теорема 1. *Если $y_1$ и $y_2$ — два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3}$$

*то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ — решения уравнения, то

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение (3) сумму $y_1 + y_2$ и принимая во внимание тождества (4), будем иметь

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = \\ = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $y_1 + y_2$ есть решение уравнения.

Теорема 2. *Если $y_1$ есть решение уравнения* (3) *и $C$ — постоянная, то $Cy_1$ есть также решение уравнения* (3).

Доказательство. Подставляя в уравнение (3) выражение $Cy_1$, получим

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

тем самым теорема доказана.

Определение 2. Два решения уравнения (3) $y_1$ и $y_2$ называются *линейно независимыми на отрезке* $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т. е. если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.$$

В противном случае решения называются *линейно зависимыми*. Иными словами, два решения $y_1$ и $y_2$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$, если существует такое постоянное число $\lambda$, что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае $y_1 = \lambda y_2$.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $y'' - y = 0$. Легко проверить, что функции $e^x$, $e^{-x}$, $3e^x$, $5e^{-x}$ являются решениями этого уравнения. При этом функции $e^x$ и $e^{-x}$ линейно независимы на любом отрезке, так как отношение $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ не остается постоянным при изменении $x$. Функции же $e^x$ и $3e^x$ линейно зависимы, так как $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const}$.

Определение 3. Если $y_1$ и $y_2$ суть функции от $x$, то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

называется *определением Вронского*, или *вронскианом* данных функций.

Теорема 3. *Если функции $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.*

Действительно, если $y_2 = \lambda y_1$, где $\lambda = \text{const}$, то $y_2' = \lambda y_1'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. *Если определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный для решений $y_1$ и $y_2$ линейного однородного уравнения (3), не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на отрезке $[a, b]$, где коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении $x$ на этом отрезке.*

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ — два решения уравнения (3), то

$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0.$$

## § 20. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства

Определение 1. Дифференциальное уравнение $n$-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно совокупности искомой функции $y$ и ее производных $y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $f(x)$ — заданные функции от $x$ или постоянные, причем $a_0 \not\equiv 0$ для всех значений $x$ из той области, в которой мы рассматриваем уравнение (1). В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях $x$, причем коэффициент $a_0 = 1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него). Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется *правой частью уравнения*.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным *неоднородным* или уравнением с *правой частью*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{2}$$

и называется линейным *однородным* или уравнением *без правой части* (левая часть этого уравнения является однородной функцией первой степени относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$).

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка.

Теорема 1. *Если $y_1$ и $y_2$ — два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3}$$

*то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ — решения уравнения, то

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение (3) сумму $y_1 + y_2$ и принимая во внимание тождества (4), будем иметь

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = \\ = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $y_1 + y_2$ есть решение уравнения.

Теорема 2. *Если $y_1$ есть решение уравнения* (3) *и $C$ — постоянная, то $Cy_1$ есть также решение уравнения* (3).

Доказательство. Подставляя в уравнение (3) выражение $Cy_1$, получим

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

тем самым теорема доказана.

Определение 2. Два решения уравнения (3) $y_1$ и $y_2$ называются *линейно независимыми на отрезке* $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т. е. если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.$$

В противном случае решения называются *линейно зависимыми*. Иными словами, два решения $y_1$ и $y_2$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$, если существует такое постоянное число $\lambda$, что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае $y_1 = \lambda y_2$.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $y'' - y = 0$. Легко проверить, что функции $e^x$, $e^{-x}$, $3e^x$, $5e^{-x}$ являются решениями этого уравнения. При этом функции $e^x$ и $e^{-x}$ линейно независимы на любом отрезке, так как отношение $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ не остается постоянным при изменении $x$. Функции же $e^x$ и $3e^x$ линейно зависимы, так как $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const}$.

Определение 3. Если $y_1$ и $y_2$ суть функции от $x$, то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

называется *определением Вронского*, или *вронскианом* данных функций.

Теорема 3. *Если функции $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.*

Действительно, если $y_2 = \lambda y_1$, где $\lambda = \text{const}$, то $y_2' = \lambda y_1'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. *Если определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный для решений $y_1$ и $y_2$ линейного однородного уравнения* (3), *не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на отрезке $[a, b]$, где коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении $x$ на этом отрезке.*

Доказательство. Так как $y_1$ и $y_2$ — два решения уравнения (3), то

$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0.$$

Умножая члены первого равенства на $y_1$, члены второго равенства на $y_2$ и вычитая из первых вторые, получим

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + a_1(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{5}$$

Разность, стоящая во второй скобке, есть определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, а именно, $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$. Разность, стоящая в первой скобке, есть производная от определителя Вронского

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1y_2'' - y_1''y_2.$$

Следовательно, равенство (5) принимает вид

$$W' + a_1W = 0. \tag{6}$$

Найдем решение последнего уравнения, удовлетворяющего начальному условию $W|_{x=x_0} = W_0$. Найдем сначала общее решение уравнения (6) в предположении, что $W \neq 0$. Разделяя переменные в уравнении (6), получаем $\frac{dW}{W} = -a_1\,dx$.

Интегрируя, находим

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx + \ln C,$$

или

$$\ln\frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx,$$

откуда

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx}. \tag{7}$$

Заметим, что можно было написать функцию (7) и сказать, что эта функция удовлетворяет уравнению (6), в чем можно легко убедиться непосредственной подстановкой этой функции в уравнение (6). Предположение $W \neq 0$ не требуется.

Формула (7) называется *формулой Лиувилля*.

Определим $C$ так, чтобы удовлетворялось начальное условие. Подставляя $x = x_0$ в левую и правую часть равенства (7), получаем

$$W_0 = C.$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее начальным условиям, примет вид

$$W = W_0e^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx}. \tag{7'}$$

По условию $W_0 \neq 0$. Но тогда из равенства (7') следует, что $W \neq 0$ ни при каком значении $x$, потому что показательная функ-

ция не обращается в нуль ни при каком конечном значении аргумента. Теорема доказана.

Замечание 1. Если определитель Вронского равен нулю при каком-нибудь значении $x=x_0$, то он равен также нулю при любом значении $x$ из рассматриваемого отрезка. Это непосредственно следует из формулы (7): если $W=0$ при $x=x_0$, то

$$W|_{x=x_0}=C=0;$$

следовательно, $W\equiv 0$, каково бы ни было значение верхнего предела $x$ в формуле (7).

Теорема 5. *Если решения $y_1$ и $y_2$ уравнения (3) линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского $W$, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.*

Доказательство. Предварительно заметим следующее. Функция $y\equiv 0$ есть решение уравнения (3) на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=0, \quad y'|_{x=x_0}=0,$$

где $x_0$ — любая точка отрезка $[a, b]$. Из теоремы существования и единственности (см. § 16), которая применима к уравнению (3), следует, что не существует другого решения уравнения (3), удовлетворяющего начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=0, \quad y'|_{x=x_0}=0.$$

Из этой теоремы так же следует, что если решение уравнения (3) тождественно равно нулю на некотором отрезке или интервале $(\alpha, \beta)$, принадлежащем отрезку $[a, b]$, то это решение тождественно равно нулю на всем отрезке $[a, b]$. Действительно, в точке $x=\beta$ (и в точке $x=\alpha$) решение удовлетворяет начальным условиям

$$y|_{x=\beta}=0, \quad y'|_{x=\beta}=0.$$

Следовательно, по теореме единственности оно равно нулю в некотором интервале $\beta-d<x<\beta+d$, где $d$ определяется величиной коэффициентов уравнения (3). Таким образом, расширяя интервал каждый раз на величину $d$, где $y\equiv 0$, мы докажем, что $y\equiv 0$ на всем отрезке $[a, b]$.

Теперь приступим к доказательству теоремы 5. Допустим, что $W(y_1, y_2)=0$ в некоторой точке отрезка $[a, b]$. Тогда по теореме 3 определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ будет равен нулю во всех точках отрезка $[a, b]$: $W=0$ или $y_1y_2'-y_1'y_2=0$.

Допустим, что $y_1\neq 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда на основании последнего равенство можно написать $\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=0$ или $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=0$.

Отюда следует

$$\frac{y_2}{y_1}=\lambda=\text{const},$$

т. е. решения $y_1$ и $y_2$ линейно зависимы, что противоречит предположению о их линейной независимости.

Допустим далее, что $y_1 = 0$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$, принадлежащих отрезку $[a, b]$. Рассмотрим интервал $(a, x_1)$. На этом интервале $y_1 \neq 0$. Следовательно, на основании только что доказанного следует, что на интервале $(a, x_1)$

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const}, \quad \text{или} \quad y_2 = \lambda y_1.$$

Рассмотрим функцию $y = y_2 - \lambda y_1$. Так как $y_2$ и $y_1$ суть решения уравнения (3), то $y = y_2 - \lambda y_1$ — решение уравнения (3) и $y \equiv 0$ на интервале $(a, x_1)$. Следовательно, на основании замечания в начале доказательства следует, что $y = y_2 - \lambda y_1 \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, или

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda$$

на отрезке $[a, b]$, т. е. $y_2$ и $y_1$ линейно зависимы.

Но это противоречит предположению о линейной независимости решений $y_2$ и $y_1$. Таким образом, мы доказали, что определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной из точек отрезка $[a, b]$.

Теорема 6. *Если $y_1$ и $y_2$ — два линейно независимых решения уравнения* (3), *то*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8}$$

*где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, есть его общее решение.*

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что функция $C_1 y_1 + C_2 y_2$ есть решение уравнения (3) при любых значениях $C_1$ и $C_2$.

Докажем теперь, что каковы бы ни были начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, можно так подобрать значения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, чтобы соответствующее частное решение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ удовлетворяло заданным начальным условиям.

Подставляя начальные условия в равенство (8), будем иметь

$$y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \quad y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \tag{9}$$

где обозначено

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \quad y'_1|_{x=x_0} = y'_{10}, \quad y'_2|_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Из системы (9) можно определить $C_1$ и $C_2$, так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

есть определитель Вронского при $x = x_0$ и, следовательно, не равен 0 (в силу линейной независимости решений $y_1$ и $y_2$). Частное решение, которое получится из семейства (8) при найденных значениях $C_1$ и $C_2$, удовлетворяет заданным начальным условиям. Таким образом, теорема доказана.

Пример 2. Уравнение $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, коэффициенты которого $a_1=1/x$ и $a_2=-1/x^2$ непрерывны на любом отрезке, не содержащем точки $x=0$, допускает частные решения $y_1=x$, $y_2=1/x$ (это легко проверить подстановкой в уравнение). Следовательно, его общее решение имеет вид $y=C_1x+C_2\frac{1}{x}$.

Замечание 2. Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного уравнения с переменными коэффициентами. Однако для уравнения с постоянными коэффициентами такой метод существует. Он будет изложен в следующем параграфе. Для случая же уравнений с переменными коэффициентами в главе XVI «Ряды» будут указаны некоторые приемы, которые дадут возможность находить приближенные решения, удовлетворяющие определенным начальным условиям.

Здесь мы докажем теорему, которая позволяет находить общее решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, если известно одно его частное решение. Так как иногда удается найти или угадать одно частное решение непосредственно, то эта теорема во многих случаях может оказаться полезной.

Теорема 7. *Если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, то нахождение общего решения сводится к интегрированию функций.*

Доказательство. Пусть $y_1$ есть известное частное решение уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$. Найдем другое частное решение данного уравнения так, чтобы $y_1$ и $y_2$ были линейно независимы. Тогда общее решение выразится формулой $y=C_1y_1+C_2y_2$, где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. На основании формулы (7) (см. доказательство теоремы 4) можно написать $y_2'y_1-y_2y_1'=Ce^{-\int a_1dx}$. Таким образом, для определения $y_2$ мы получаем линейное уравнение первого порядка. Проинтегрируем его следующим образом. Разделим все члены на $y_1^2$: $\frac{y_2'y_1-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1dx}$, или $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1dx}$; отсюда

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{Ce^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx+C'.$$

Так как мы ищем частное решение, то, положив $C'=0$, $C=1$, получаем

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx. \qquad (10)$$

Очевидно, что $y_1$ и $y_2$ — линейно независимые решения, так как $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \tag{11}$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение имеет частное решение $y_1 = x$. Найдем второе частное решение $y_2$ так, чтобы $y_1$ и $y_2$ были линейно независимы.

Заметим, что в нашем случае $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, на основании формулы (10) получаем

$$y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2 |1-x^2|} =$$
$$= x \int \left( \pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = x \left[ \mp \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right].$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 \left( \frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \mp 1 \right).$$

## § 21. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

где $p$ и $q$ — постоянные действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно, как было доказано выше, найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \text{ где } k = \text{const}; \tag{2}$$

тогда

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (1), находим

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то, значит,

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Следовательно, если $k$ будет удовлетворять уравнению (3), то $e^{kx}$ будет решением уравнения (1). Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* по отношению к уравнению (1).

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня; обозначим их через $k_1$ и $k_2$. При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны следующие случаи:

I. $k_1$ и $k_2$ — действительные и притом не равные между собой числа ($k_1 \neq k_2$);

II. $k_1$ и $k_2$ — комплексные числа;

III. $k_1$ и $k_2$ — действительные равные числа ($k_1 = k_2$).

Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$. В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}.$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример 1. Дано уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Общий интеграл есть

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

II. Корни характеристического уравнения комплексные. Так как комплексные корни входят попарно сопряженными, то обозначим

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{4}$$

Это — комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1) (см. § 4 гл. VII).

Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению (1), то этому уравнению удовлетворяют функции $u(x)$ и $v(x)$.

Действительно, подставляя выражение (5) в уравнение (1), будем иметь

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0,$$

или

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Но комплексная функция равняется нулю тогда и только тогда, когда равны нулю действительная часть и мнимая часть, т. е.

$$u'' + pu' + qu = 0, \qquad v'' + pv' + qv = 0.$$

Мы и доказали, что $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнения.

Перепишем комплексные решения (4) в виде суммы действительной и мнимой части:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

По доказанному частными решениями уравнения (1) будут действительные функции

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{6'}$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{6''}$$

Функции $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ линейно независимы, так как

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \operatorname{ctg}\beta x \neq \text{const}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \tag{7}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Важным частным случаем решения (7) является случай, когда корни характеристического уравнения *чисто мнимые*.

Это имеет место тогда, когда в уравнении (1) $p=0$, и оно имеет вид

$$y''+qy=0.$$

Характеристическое уравнение (3) принимает вид

$$k^2+q=0,\quad q>0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_{12}=\pm i\sqrt{q}=\pm i\beta,\quad \alpha=0.$$

Решение (7) принимает вид

$$y=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x.$$

Пример 2. Дано уравнение

$$y''+2y'+5y=0.$$

Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=1.$$

Построить график.

Решение. 1) Напишем характеристическое уравнение

$$k^2+2k+5=0$$

и найдем его корни

$$k_1=-1+2i,\quad k_2=-1-2i.$$

Следовательно, общий интеграл есть

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

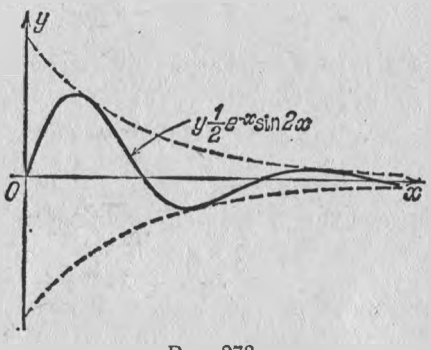



Рис. 273.

2) Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, и определим соответствующие значения $C_1$ и $C_2$. На основании первого условия находим: $0=e^{-0}(C_1\cos(2\cdot 0)+C_2\sin(2\cdot 0))$, откуда $C_1=0$. Заметив, что $y'=e^{-x}\cdot 2C_2\cos 2x-e^{-x}C_2\sin 2x$, из второго условия получаем $1=2C_2$, т. е. $C_2=1/2$. Таким образом, искомое частное решение есть $y=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$. График его показан на рис. 273.

Пример 3. Дано уравнение

$$y''+9y=0.$$

Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=3.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение

$$k^2+9=0.$$

Находим его корни:

$$k_1=3i,\quad k_2=-3i.$$

Общий интеграл есть

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Найдем частное решение. Предварительно найдем

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

Постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются из начальных условий:

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \qquad 3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0.$$

Они равны

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Частное решение:

$$y = \sin 3x.$$

III. Корни характеристического уравнения действительные и равные. В этом случае $k_1 = k_2$.

Одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым (функция $e^{k_2 x}$ тождественно равна $e^{k_1 x}$ и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Будем искать второе частное решение в виде

$$y_2 = u(x)\, e^{k_1 x},$$

где $u(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$
$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Подставляя выражения производных в уравнение (1), получаем

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + p)\, u' + (k_1^2 + pk_1 + q)\, u] = 0.$$

Так как $k_1$ — кратный корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Кроме того, $k_1 = k_2 = -p/2$ или $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Следовательно, для того чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1 x} u'' = 0$, или $u'' = 0$. Интегрируя, получаем $u = Ax + B$. В частности, можно положить $A = 1$, $B = 0$; тогда $u = x$. Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Это решение линейно независимо с первым, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = x \not\equiv \text{const}.$$

Поэтому общим интегралом будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 4. Дано уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$. Находим его корни: $k_1=k_2=2$. Общим интегралом будет

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$$

## § 22. Линейные однородные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение $n$-го порядка

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ — постоянные. Прежде чем указывать метод решения уравнения (1), введем определение, нужное нам для дальнейшего.

Определение 1. Если для всех $x$ отрезка $[a, b]$ имеет место равенство

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\ldots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

где $A_1$, $A_2$, ..., $A_{n-1}$ — постоянные числа, не все равные нулю, то говорят, что $\varphi_n(x)$ *выражается линейно через функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$.

Определение 2. $n$ функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ называются *линейно независимыми*, если никакая из этих функций линейно не выражается через остальные.

Замечание 1. Из определений следует, что если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ *линейно зависимы*, то найдутся постоянные $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$, не все равные нулю, такие, что для всех $x$ отрезка $[a, b]$ будет выполняться тождество

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)\equiv 0.$$

Пример 1. Функции $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=3e^x$ линейно зависимы, так как при $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=-\frac{1}{3}$ имеет место тождество

$$C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3\cdot 3e^x\equiv 0.$$

Пример 2. Функции $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$ линейно независимы, так как ни при каких $C_1$, $C_2$, $C_3$, одновременно не равных нулю, выражение $C_1\cdot 1+C_2x+C_3x^2$ не будет тождественно равно нулю.

Пример 3. Функции $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, ..., $y_n=e^{k_nx}$, ..., где $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$, ... — различные числа, линейно независимы. (Это утверждение мы приводим без доказательства.)

Перейдем теперь к решению уравнения (1). Для этого уравнения справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функции* $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ *являются линейно независимыми решениями уравнения* (1), *то его общее решение есть*

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (2)$$

*где* $C_1$, ..., $C_n$ — *произвольные постоянные.*

Если коэффициенты уравнения (1) постоянны, то общее решение находится так же, как и в случае уравнения второго порядка.

1) Составляем характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2) Находим корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

3) По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения, руководствуясь тем, что:

а) каждому действительному однократному корню $k$ соответствует частное решение $e^{kx}$;

б) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ и $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

в) каждому действительному корню $k$ кратности $r$ соответствует $r$ линейно независимых частных решений $e^{kx}$, $xe^{kx}$, ..., $x^{r-1}e^{kx}$;

г) каждой паре комплексных сопряженных корней

$$k^{(1)} = \alpha + i\beta, \quad k^{(2)} = \alpha - i\beta$$

кратности $\mu$ соответствуют $2\mu$ частных решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Этих частных решений будет ровно столько, какова степень характеристического уравнения (т. е. столько, каков порядок данного линейного дифференциального уравнения). Можно доказать, что эти решения линейно независимы.

4) Найдя $n$ линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Пишем общий интеграл

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4$ — произвольные постоянные.

Замечание 2. Из изложенного следует, что вся трудность решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами заключается в решении характеристического уравнения.

## § 23. Неоднородные линейные уравнения второго порядка

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

Структура общего решения такого уравнения (1) определяется следующей теоремой:

Теорема 1. *Общее решение неоднородного уравнения* (1) *представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения* $y^*$ *и общего решения* $\bar{y}$ *соответствующего однородного уравнения*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Нужно доказать, что сумма

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

есть общее решение уравнения (1). Докажем сначала, что функция (3) есть решение уравнения (1).

Подставляя сумму $\bar{y} + y^*$ в уравнение (1) вместо $y$, будем иметь $(\bar{y} + y^*)'' + a_1(\bar{y} + y^*)' + a_2(\bar{y} + y^*) = f(x)$, или

$$(\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y}) + (y^{*\prime\prime} + a_1 y^{*\prime} + a_2 y^*) = f(x). \tag{4}$$

Так как $\bar{y}$ есть решение уравнения (2), то выражение, стоящее в первых скобках, тождественно равно нулю. Так как $y^*$ есть решение уравнения (1), то выражение, стоящее во вторых скобках, равно $f(x)$. Следовательно, равенство (4) является тождеством. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь, что выражение (3) есть общее решение уравнения (1), т. е. докажем, что входящие в него произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \tag{5}$$

каковы бы ни были числа $x_0$, $y_0$ и $y_0'$ (лишь бы $x_0$ было взято из той области, где функции $a_1$, $a_2$ и $f(x)$ непрерывны).

Заметив, что $\bar{y}$ можно представить в форме $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где $y_1$ и $y_2$ — линейно независимые решения уравнения (2), а $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, можем переписать равенство (3) в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{3'}$$

Тогда на основании условий (5) будем иметь *)

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0, \qquad C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + y_0^{*\prime} = y_0'.$$

*) Здесь $y_{10}$, $y_{20}$, $y_0^*$, $y_{10}'$, $y_{20}'$, $y_0^{*\prime}$ обозначают числовые значения функций $y_1$, $y_2$, $y^*$, $y_1'$, $y_2'$, $y^{*\prime}$ при $x = x_0$.

Из этой системы уравнений нужно определить $C_1$ и $C_2$. Переписав систему в виде

$$C_1y_{10}+C_2y_{20}=y_0-y_0^*, \quad C_1y'_{10}+C_2y'_{20}=y'_0-y_0^{*\prime}, \tag{6}$$

замечаем, что определитель этой системы есть определитель Вронского для функций $y_1$ и $y_2$ в точке $x=x_0$. Так как эти функции по условию линейно независимы, то определитель Вронского не равен нулю; следовательно, система (6) имеет определенное решение $C_1$ и $C_2$, т. е. существуют такие значения $C_1$ и $C_2$, при которых формула (3) определяет решение уравнения (1), удовлетворяющее данным начальным условиям. Теорема полностью доказана.

Таким образом, если известно общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения (2), то основная задача при интегрировании неоднородного уравнения (1) состоит в нахождении какого-либо его частного решения $y^*$.

Укажем общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных. Напишем общее решение однородного уравнения (2)

$$y=C_1y_1+C_2y_2. \tag{7}$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (1) в форме (7), рассматривая $C_1$ и $C_2$ как некоторые пока неизвестные функции от $x$.

Продифференцируем равенство (7):

$$y'=C_1y'_1+C_2y'_2+C'_1y_1+C'_2y_2.$$

Подберем искомые функции $C_1$ и $C_2$ так, чтобы выполнялось равенство

$$C'_1y_1+C'_2y_2=0. \tag{8}$$

Если учесть это дополнительное условие, то первая производная $y'$ примет вид

$$y'=C_1y'_1+C_2y'_2.$$

Дифференцируя теперь это выражение, найдем $y''$:

$$y''=C_1y''_1+C_2y''_2+C'_1y'_1+C'_2y'_2.$$

Подставляя $y$, $y'$ и $y''$ в уравнение (1), получим

$$C_1y''_1+C_2y''_2+C'_1y'_1+C'_2y'_2+a_1(C_1y'_1+C_2y'_2)+a_2(C_1y_1+C_2y_2)=f(x),$$

или

$$C_1(y''_1+a_1y'_1+a_2y_1)+C_2(y''_2+a_1y'_2+a_2y_2)+C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x).$$

Выражения, стоящие в первых двух скобках, обращаются в нуль,

так как $y_1$ и $y_2$ — решения однородного уравнения. Следовательно, последнее равенство принимает вид

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \tag{9}$$

Таким образом, функция (7) будет решением неоднородного уравнения (1) в том случае, если функции $C_1$ и $C_2$ удовлетворяют системе уравнений (8) и (9), т. е. если

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для линейно независимых решений $y_1$ и $y_2$ уравнения (2), то он не равен нулю; следовательно, решая систему, мы найдем $C_1'$ и $C_2'$ как определенные функции от $x$:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Интегрируя, получим

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx + \overline{C}_1, \quad C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx + \overline{C}_2,$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения $C_1$ и $C_2$ в равенство (7), найдем интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$, т. е. общее решение неоднородного уравнения *).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Так как $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, то $\ln y' = \ln x + \ln c$; $y' = cx$; итак, $y = C_1x^2 + C_2$.

Чтобы последнее выражение было решением данного уравнения, надо определить $C_1$ и $C_2$ как функции от $x$ из системы

$$C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x.$$

Решая эту систему, найдем

$$C_1' = 1/2, \quad C_2' = -x^2/2,$$

откуда в результате интегрирования получаем

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \overline{C}_2.$$

Подставляя найденные функции в формулу $y = C_1x^2 + C_2$, получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6},$$

или $y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — произвольные постоянные.

*) Если положить $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, то получим частное решение уравнения (1).

При отыскании частных решений полезно пользоваться результатами следующей теоремы.

Теорема 2. *Решение $y^*$ уравнения*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x)+f_2(x), \tag{10}$$

*где правая часть есть сумма двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *), можно представить в виде суммы $y^*=y_1^*+y_2^*$, где $y_1^*$ и $y_2^*$ — соответственно решения уравнений*

$$y_1^{*\prime\prime}+a_1y_1^{*\prime}+a_2y_1^*=f_1(x), \tag{11}$$

$$y_2^{*\prime\prime}+a_1y_2^{*\prime}+a_2y_2^*=f_2(x). \tag{12}$$

Доказательство. Складывая правые и левые части равенств (11) и (12), получим

$$(y_1^*+y_2^*)''+a_1(y_1^*+y_2^*)'+a_2(y_1^*+y_2^*)=f_1(x)+f_2(x). \tag{13}$$

Из последнего равенства и следует, что сумма

$$y_1^*+y_2^*=y^*$$

есть решение уравнения (10).

Пример. Найти частное решение $y^*$ уравнения

$$y''+4y=x+3e^x.$$

Решение. Частное решение уравнения

$$y_1^{*\prime\prime}+4y_1^*=x$$

будет

$$y_1^*=\frac{1}{4}x.$$

Частное решение уравнения

$$y_2^{*\prime\prime}+4y_2^*=3e^x$$

будет

$$y_2^*=\frac{3}{5}e^x.$$

Частное решение $y^*$ данного уравнения будет

$$y^*=\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}e^x.$$

## § 24. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеем уравнение

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

где $p$ и $q$ — действительные числа.

*) Очевидно, что соответствующая теорема остается справедливой при любом числе слагаемых правой части.

В предыдущем параграфе был указан общий метод нахождения решения неоднородного уравнения. В случае уравнения с постоянными коэффициентами частное решение иногда бывает возможно найти проще, не прибегая к интегрированию. Рассмотрим несколько таких возможностей для уравнения (1).

I. Пусть правая часть уравнения (1) представляет собой произведение показательной функции на многочлен, т. е. имеет вид

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}, \tag{2}$$

где $P_n(x)$ — многочлен $n$-й степени. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) Число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n)\, e^{\alpha x} = Q_n(x)\, e^{\alpha x}. \tag{3}$$

Действительно, подставляя $y^*$ в уравнение (1) и сокращая все члены на множитель $e^{\alpha x}$, будем иметь:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x). \tag{4}$$

$Q_n(x)$ — многочлен степени $n$, $Q_n'(x)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_n''(x)$ — многочлен степени $n-2$. Таким образом, слева и справа от знака равенства стоят многочлены $n$-й степени. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ (число неизвестных коэффициентов равно $n+1$), получим систему $n+1$ уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

б) Число $\alpha$ есть простой (однократный) корень характеристического уравнения.

Если бы в этом случае частное решение мы стали искать в форме (3), то в равенстве (4) слева получился бы многочлен $(n-1)$-й степени, так как коэффициент при $Q_n(x)$, т. е. $\alpha^2 + p\alpha + q$, равен нулю, а многочлены $Q_n'(x)$ и $Q_n''(x)$ имеют степень, меньшую $n$. Следовательно, ни при каких $A_0, A_1, \ldots, A_n$ равенство (4) не было бы тождеством. Поэтому в рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде многочлена $(n+1)$-й степени, но без свободного члена (так как свободный член этого многочлена исчезнет при дифференцировании) *):

$$y^* = x Q_n(x)\, e^{\alpha x}.$$

в) Число $\alpha$ есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда в результате подстановки в дифференциальное уравнение функции $Q_n(x)\, e^{\alpha x}$ степень многочлена пони-

*) Заметим, что все приведенные выше результаты остаются в силе и в том случае, когда $\alpha$ — комплексное число (это следует из правил дифференцирования функции $e^{mx}$, где $m$ — любое комплексное число; см. § 4 гл. VII).

жается на две единицы. Действительно, если $\alpha$ — корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0$; кроме того, так как $\alpha$ является двукратным корнем, то $2\alpha=-p$ (так как по известной теореме элементарной алгебры сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком). Итак, $2\alpha+p=0$.

Следовательно, в левой части равенства (4) останется $Q_n^{*}(x)$, т. е. многочлен $(n-2)$-й степени. Для того чтобы в результате подстановки получить многочлен степени $n$, следует частное решение искать в виде произведения $e^{\alpha x}$ на многочлен $(n+2)$-й степени. При этом свободный член этого многочлена и член в первой степени исчезнут при дифференцировании; поэтому их можно не включать в частное решение.

Итак, в случае, когда $\alpha$ является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение можно брать в форме

$$y^{*}=x^2Q_n(x)\,e^{\alpha x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+3y=x.$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $xe^{0x}$ (т. е. вид $P_1(x)\,e^{0x}$), причем 0 не является корнем характеристического уравнения $k^2+4k+3=0$, то частное решение будем искать в форме $y^{*}=Q_1(x)\,e^{0x}$, т. е. положим

$$y^{*}=A_0x+A_1.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь

$$4A_0+3(A_0x+A_1)=x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим

$$3A_0=1,\quad 4A_0+3A_1=0,$$

откуда

$$A_0=1/3,\quad A_1=-4/9.$$

Следовательно,

$$y^{*}=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

Общее решение $y=\bar{y}+y^{*}$ будет

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''+9y=(x^2+1)\,e^{3x}.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения найдем легко:

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Правая часть заданного уравнения $(x^2+1)\,e^{3x}$ имеет вид $P_2(x)\,e^{3x}$. Так как коэффициент 3 в показателе степени не является корнем характеристического

уравнения, то частное решение ищем в виде $y^*=Q_2(x)\,e^{3x}$, или $y^*=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, будем иметь

$$[9(Ax^2+Bx+C)+6(2Ax+B)+2A+9(Ax^2+Bx+C)]\,e^{3x}=(x^2+1)\,e^{3x}.$$

Сокращая на $e^{3x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим

$$18A=1,\quad 12A+18B=0,\quad 2A+6B+18C=1,$$

откуда $A=1/18$, $B=-1/27$, $C=5/81$. Следовательно, частное решение будет

$$y^*=\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

и общее решение

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y''-7y'+6y=(x-2)\,e^x.$$

Решение. Здесь правая часть имеет вид $P_1(x)\,e^{1\cdot x}$, причем коэффициент 1 в показателе степени является простым корнем характеристического многочлена. Следовательно, частное решение ищем в виде $y^*=xQ_1(x)\,e^x$, или

$$y^*=x(Ax+B)\,e^x;$$

подставляя это выражение в уравнение, будем иметь

$$[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx)]\,e^x=$$
$$=(x-2)\,e^x,$$

или

$$(-10Ax-5B+2A)\,e^x=(x-2)\,e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим

$$-10A=1,\quad -5B+2A=-2,$$

откуда $A=-1/10$, $B=9/25$. Следовательно, частным решением является

$$y^*=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x,$$

а общим

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^x+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x.$$

II. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x)=P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x,\qquad(5)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Этот случай может быть рассмотрен приемом, примененным в предыдущем случае, если перейти от тригонометрических функций к показательным. Заменяя $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ через показательные функции по формулам Эйлера (см. § 5 гл. VII), получим

$$f(x)=P(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+Q(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$

или

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}P(x)+\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+\left[\frac{1}{2}P(x)-\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}.\qquad(6)$$

Здесь в квадратных скобках стоят многочлены, степени которых равняются высшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Таким образом, получили правую часть вида, рассмотренного в случае 1.

Доказывается (приводить доказательство мы не будем), что можно найти частные решения, не содержащие комплексные числа.

Итак, если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{7}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от $x$, то форма частного решения определяется так:

а) если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$y^* = U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{8}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

б) если число $\alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x\,[U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x]. \tag{9}$$

При этом во избежание возможных ошибок надо отметить, что указанные формы частных решений (8) и (9), очевидно, сохраняются и в том случае, когда в правой части уравнения (1) один из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равен нулю, т. е. когда правая часть имеет вид $P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$ или $Q(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Рассмотрим, далее, важный частный случай. Пусть правая часть линейного уравнения второго порядка имеет вид

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \tag{7'}$$

где $M$ и $N$ — постоянные числа.

а) Если $\beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \tag{8'}$$

б) Если $\beta i$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = x\,(A \cos \beta x + B \sin \beta x). \tag{9'}$$

Отметим, что функция (7') является частным случаем функции (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); функции (8') и (9') являются частными случаями функций (8) и (9).

Пример 4. Найти общий интеграл линейного неоднородного уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Поэтому общий интеграл соответствующего

однородного уравнения есть

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

где $A$ и $B$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя $y^*$ в заданное уравнение, будем иметь

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим два уравнения для определения $A$ и $B$:

$$-A + 2B + 5A = 2, \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

откуда $A = 2/5$, $B = 1/5$. Общее решение данного уравнения: $\bar{y} = y + y^*$, т. е.

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 4y = \cos 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Тогда

$$y^{*\prime} = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$
$$y^{*\prime\prime} = 4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Подставляя эти выражения производных в данное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему уравнений для определения $A$ и $B$: $4B = 1$, $-4A = 0$, откуда $A = 0$, $B = 1/4$. Таким образом, общий интеграл данного уравнения

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Пример 6. Решить уравнение $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$.

Решение. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{2x}(M \cos x + N \sin x),$$

причем $M = 3$, $N = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения есть

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Так как число $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = e^{2x}(A \cos x + B \sin x).$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим после приведения подобных членов

$$(2A + 4B) e^{2x} \cos x + (-4A + 2B) e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

Отсюда $A=3/10$, $B=3/5$. Следовательно, частное решение

$$y^*=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right),$$

а общее

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right).$$

Замечание. Отметим, что все рассуждения этого параграфа справедливы и для линейного уравнения первого порядка. Рассмотрим, например, уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами (это уравнение часто встречается в технических приложениях)

$$\frac{dy}{dx}+ay=b, \tag{10}$$

где $a$ и $b$ — постоянные. Находим общее решение однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx}+ay=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k+a=0, \quad k=-a.$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$\bar{y}=Ce^{-ax}.$$

Ищем частное решение $y^*$ неоднородного уравнения в форме

$$y^*=B.$$

Подставляя в уравнение (10), получаем $aB=b$, $B=b/a$. Итак,

$$y^*=b/a.$$

Общее решение уравнения (10) будет

$$y=\bar{y}+y^* \text{ или } y=Ce^{-ax}+b/a. \tag{11}$$

## § 25. Неоднородные линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ — непрерывные функции от $x$ (или постоянные числа). Пусть нам известно общее решение

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \tag{2}$$

соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0. \tag{3}$$

Как и в случае уравнения второго порядка, для уравнения (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\bar{y}$ — *общее решение однородного уравнения* (3), *а* $y^*$ — *частное решение неоднородного уравнения* (1), *то*

$$Y = \bar{y} + y^*$$

*есть общее решение неоднородного уравнения.*

Таким образом, задача интегрирования уравнения (1), как и в случае уравнения второго порядка, сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения.

Как и в случае уравнения второго порядка, частное решение уравнения (1) можно находить способом вариации произвольных постоянных, считая в выражении (2) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функциями от $x$.

Составим систему уравнений (ср. § 23)

$$\left.\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эта система уравнений с неизвестными функциями $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ имеет вполне определенные решения. (Определитель из коэффициентов при $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ представляет собой определитель Вронского, составленный для частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного уравнения, а так как эти частные решения по условию линейно независимы, то определитель Вронского отличен от нуля.)

Итак, система (4) может быть решена относительно функций $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Найдя их и интегрируя, получим

$$C_1 = \int C_1'\,dx + \bar{C}_1, \quad C_2 = \int C_2'\,dx + \bar{C}_2, \quad \ldots, \quad C_n = \int C_n'\,dx + \bar{C}_n,$$

где $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ — постоянные интегрирования.

Докажем, что в таком случае выражение

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \qquad (5)$$

есть общее решение неоднородного уравнения (1).

Дифференцируем выражение (5) $n$ раз, принимая каждый раз во внимание равенства (4); тогда будем иметь

$$\begin{aligned} y^* &= C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \\ y^{*\prime} &= C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{*(n-1)} &= C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}, \\ y^{*(n)} &= C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + f(x). \end{aligned}$$

Умножая члены первого, второго, ... и, наконец, последнего уравнения соответственно на $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_1$ и 1 и складывая, получим

$$y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \ldots + a_n y^* = f(x),$$

так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — частные решения однородного уравнения, и поэтому суммы членов, полученные при сложении по вертикальным столбцам, равны нулю.

Следовательно, функция

$$y^* = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

(где $C_1, \ldots, C_n$ — функции от $x$, определенные из уравнений (4)) является решением неоднородного уравнения (1). Это решение зависит от $n$ произвольных постоянных $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$. Как и в случае уравнения второго порядка, доказывается, что это есть общее решение.

Таким образом, утверждение доказано.

В случае неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (ср. § 24) частные решения иногда находятся проще, а именно:

I. Пусть в правой части дифференциального уравнения стоит функция $f(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, где $P(x)$ — многочлен от $x$; тогда надо различать два случая:

а) если $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде

$$y^* = Q(x)\, e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

б) если $\alpha$ есть корень кратности $\mu$ характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения можно искать в форме

$$y^* = x^{\mu} Q(x)\, e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$.

II. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

где $M$ и $N$ — постоянные числа. Тогда вид частного решения определяется следующим образом:

а) если число $\beta i$ не есть корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

где $A$ и $B$ — постоянные неопределенные коэффициенты;

б) если число $\beta i$ есть корень характеристического уравнения кратности $\mu$, то

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

III. Пусть

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от $x$. Тогда:

а) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

б) если число $\alpha + \beta i$ является корнем кратности $\mu$ характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x^\mu [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

где $U(x)$ и $V(x)$ имеют тот же смысл, что и в случае а).

Общее замечание к случаям II и III. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos \beta x$ или только $\sin \beta x$, мы должны искать решение в том виде, как было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, отнюдь не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций. В этом мы могли убедиться, рассматривая примеры 4, 5, 6 предыдущего параграфа, а также пример 2, приведенный в этом параграфе.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = x^3 + 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Находим общее решение однородного уравнения (см. пример 4 § 22)

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Дифференцируя $y^*$ четыре раза и подставляя полученные выражения в заданное уравнение, получим

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$-A_0 = 1, \quad -A_1 = 0, \quad -A_2 = 0, \quad -A_3 = 1.$$

Следовательно,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Общий интеграл неоднородного уравнения находится по формуле $y = \bar{y} + y^*$, т. е.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Пример 2. Решить уравнение $y^{IV}-y=5\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4-1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения является:

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Далее, правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x)=M\cos x+N\sin x,$$

где $M=5$, $N=0$.

Так как $i$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x).$$

Подставляя это выражение в уравнение, найдем

$$4A\sin x-4B\cos x=5\cos x,$$

откуда

$$4A=0,\quad -4B=5,$$

или $A=0$, $B=-5/4$. Следовательно, частным решением дифференциального уравнения является

$$y^*=-\frac{5}{4}x\sin x,$$

а общим решением

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-\frac{5}{4}x\sin x.$$

## § 26. Дифференциальное уравнение механических колебаний

В настоящем и следующих параграфах мы рассмотрим одну задачу прикладной механики, исследовав и разрешив ее с помощью линейных дифференциальных уравнений.

Пусть груз массы $Q$ покоится на упругой рессоре (рис. 274). Отклонение груза от положения равновесия обозначим через $y$. Отклонение вниз будем считать положительным, вверх — отрицательным. В положении равновесия вес уравновешивается упругостью пружины. Предположим, что сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия,— так называемая восстанавливающая сила — пропорциональна отклонению, т. е. равна $-ky$, где $k$ — некоторая постоянная для данной рессоры величина (так называемая «жесткость рессоры») *).

Предположим, что движению груза $Q$ препятствует сила сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения груза относительно нижней точки рессоры, т. е. сила $-\lambda v=-\lambda\frac{dy}{dt}$, где $\lambda=\text{const}\geqslant 0$ (амортизатор). Напишем дифференциальное уравне-

*) Рессоры, у которых восстанавливающая сила пропорциональна отклонению, называются рессорами с «линейной характеристикой».

ние движения груза на рессоре. На основании второго закона Ньютона будем иметь

$$Q\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-\lambda\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(здесь $k$ и $\lambda$ — положительные числа). Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=0, \tag{1'}$$

где обозначено

$$p=\lambda/Q,\quad q=k/Q.$$

Предположим, далее, что нижняя точка рессоры совершает вертикальные движения по закону $z=\varphi(t)$. Это, например, будет

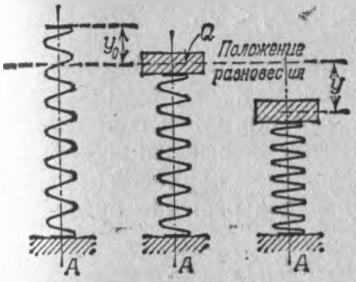



Рис. 274.

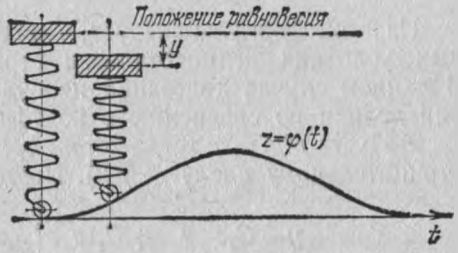



Рис. 275.

иметь место, если нижний конец рессоры прикреплен к катку, который вместе с рессорой и грузом движется по неровности (рис. 275).

В этом случае восстанавливающая сила будет равна не $-ky$, а $-k[y+\varphi(t)]$, сила сопротивления будет $-\lambda[y'+\varphi'(t)]$, и вместо уравнения (1) мы получим уравнение

$$Q\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+ky=-k\varphi(t)-\lambda\varphi'(t), \tag{2}$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(t), \tag{2'}$$

где обозначено

$$f(t)=\frac{k\varphi(t)+\lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Уравнение (1') называют уравнением *свободных* колебаний, уравнение (2') — уравнением *вынужденных* колебаний.

## § 27. Свободные колебания. Векторное и комплексное изображение гармонических колебаний

Рассмотрим сначала уравнение свободных колебаний

$$y''+py'+qy=0 \quad (p\geqslant 0,\ q>0,\ \text{см. § 26}). \tag{1}$$

Напишем соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2+pk+q=0$$

и найдем его корни:

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

1) Пусть $p^2/4>q$. Тогда корни $k_1$ и $k_2$ — действительные отрицательные числа. Общее решение выражается через показательные функции:

$$y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t} \quad (k_1<0,\ k_2<0). \tag{2}$$

Из этой формулы следует, что отклонение $y$ при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t\to\infty$. В данном случае колебаний не будет, так как силы сопротивления велики по сравнению с коэффициентом жесткости рессоры $k$.

2) Пусть $p^2/4=q$; тогда корни $k_1$ и $k_2$ равны между собой (и равны отрицательному числу $-p/2$). Поэтому общее решение будет

$$y=C_1e^{-\frac{p}{2}t}+C_2te^{-\frac{p}{2}t}=(C_1+C_2t)\,e^{-\frac{pt}{2}}. \tag{3}$$

Здесь отклонение также стремится к нулю при $t\to\infty$, однако не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию сомножителя $C_1+C_2t$).

3) Пусть $p=0$, т. е. отсутствует сила сопротивления. Уравнение (1) примет вид

$$y''+qy=0. \tag{4}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+q=0$, а его корни равны $k_1=\beta i$, $k_2=-\beta i$, где $\beta=\sqrt{q}$. Общее решение:

$$y=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t. \tag{5}$$

В последней формуле произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ заменим другими. Именно, введем постоянные $A$ и $\varphi_0$, связанные с $C_1$ и $C_2$ соотношениями

$$C_1=A\sin\varphi_0,\quad C_2=A\cos\varphi_0.$$

$A$ и $\varphi_0$ через $C_1$ и $C_2$ определяются так:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Подставляя значения $C_1$ и $C_2$ в формулу (5), будем иметь

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t,$$

или

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0). \tag{6}$$

Колебания в этом случае называются *гармоническими*. Интегральными кривыми являются синусоиды. Промежуток времени $T$, за который аргумент синуса изменяется на $2\pi$, называется *периодом* колебаний; в данном случае $T = 2\pi/\beta$. *Частотой* колебания называется число колебаний за время $2\pi$; в данном случае частота равна $\beta$; $A$ — величина наибольшего отклонения от положения равновесия — называется *амплитудой* колебания; $\varphi_0$ называется *начальной фазой*. График функции (6) изображен на рис. 276.

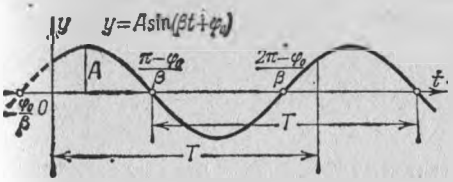



Рис. 276.

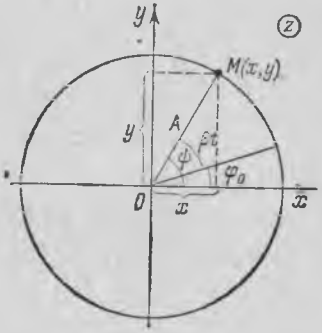



Рис. 277.

В электротехнических и других дисциплинах широко используют комплексное и векторное изображения гармонических колебаний.

Рассмотрим в комплексной плоскости $xOy$ радиус-вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$ постоянной длины $|\boldsymbol{A}| = A = \text{const}$.

Конец вектора $\boldsymbol{A}$ при изменении параметра $t$ (в данном случае $t$ — время) описывает окружность радиуса $A$ с центром в начале координат (рис. 277). Пусть угол $\psi$, образованный вектором $\boldsymbol{A}$ и осью $Ox$, выражается так: $\psi = \beta t + \varphi_0$. Величина $\beta$ называется *угловой скоростью вращения вектора* $\boldsymbol{A}$. Проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на оси $Oy$ и $Ox$ будут

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0), \qquad x = A \cos (\beta t + \varphi_0). \tag{7}$$

Выражения (7) суть решения уравнения (4).

Рассмотрим комплексную величину

$$z = x + iy = A \cos (\beta t + \varphi_0) + iA \sin (\beta t + \varphi_0),$$

или

$$z = A [\cos (\beta t + \varphi_0) + i \sin (\beta t + \varphi_0)]. \tag{8}$$

Комплексная величина $z$, как это было указано в § 1 гл. VII, изображается вектором $\boldsymbol{A}$.

Таким образом, решения уравнения гармонических колебаний (4) можно рассматривать как *проекции вектора $A$ на оси $Oy$ и $Ox$, вращающегося с угловой скоростью $\beta$ при начальной фазе $\varphi_0$.*

Пользуясь формулой Эйлера (см. (4) § 5 гл. VII), выражение (8) можно переписать так:

$$z = Ae^{i(\beta t + \varphi_0)}. \tag{9}$$

Мнимая и действительная части выражения (9) являются решениями уравнения (4). Выражение (9) называется *комплексным*

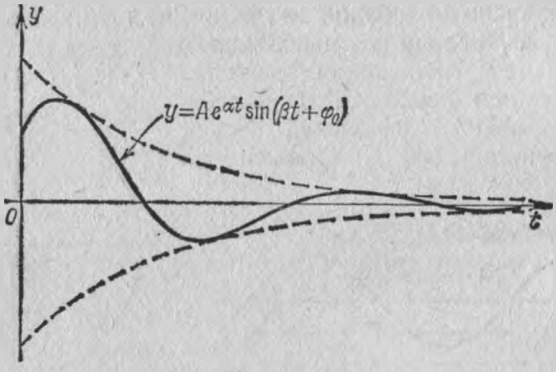



Рис. 278.

*решением* уравнения (4). Перепишем выражение (9) так:

$$z = Ae^{i\varphi_0}e^{i\beta t}. \tag{10}$$

Выражение $Ae^{i\varphi_0}$ называют *комплексной амплитудой*. Обозначим ее через $A^*$. Тогда комплексное решение (10) перепишется так:

$$z = A^*e^{i\beta t}. \tag{11}$$

4) Пусть $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$.

В этом случае корни характеристического уравнения — комплексные числа

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t), \tag{12}$$

или

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0). \tag{13}$$

Здесь в качестве амплитуды приходится рассматривать величину $Ae^{\alpha t}$, зависящую от времени. Так как $\alpha < 0$, то она стре-

мится к нулю при $t \to \infty$, т. е. здесь мы имеем дело с *затухающими колебаниями*. График затухающих колебаний изображен на рис. 278.

## § 28. Вынужденные колебания

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad (p \geqslant 0,\ q > 0,\ \text{см. § 26}). \tag{1}$$

Рассмотрим практически важный случай, когда возмущающая внешняя сила является периодической и изменяется по закону

$$f(t) = a \sin \omega t;$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t. \tag{1'}$$

1) Предположим сначала, что $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$, т. е. корни характеристического уравнения — комплексные числа $\alpha \pm i\beta$. В этом случае (см. формулы (12) и (13) § 27) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \tag{2}$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \tag{3}$$

Подставляя это выражение $y^*$ в исходное дифференциальное уравнение, находим значения $M$ и $N$:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}, \quad N = \frac{(q-\omega^2)\, a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Прежде чем подставить найденные значения $M$ и $N$ в равенство (3), введем новые постоянные $A^*$ и $\varphi^*$, положив

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

т. е.

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения можно записать в форме

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin(\omega t + \varphi^*),$$

или окончательно

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Общий интеграл уравнения (1) равен $y=\bar{y}+y^*$, т. е.

$$y=Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)+\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi^*).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части (решение однородного уравнения), представляет затухающие колебания; при увеличении $t$ он убывает, и, следовательно, через некоторый промежуток времени главное значение будет иметь второй член, определяющий вынужденные колебания. Частота $\omega$ этих колебаний равна частоте внешней силы $f(t)$; амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем меньше $p$ и чем ближе $\omega^2$ к $q$.

Исследуем подробнее зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты $\omega$ при различных значениях $p$. Для этого обозначим амплитуду вынужденных колебаний через $D(\omega)$:

$$D(\omega)=\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}.$$

Положим $q=\beta_1^2$ ($\beta_1$ при $p=0$ равнялась бы частоте собственных колебаний). Тогда

$$D(\omega)=\frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}=\frac{a}{\beta_1^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2+\frac{p^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Введем обозначения

$$\omega/\beta_1=\lambda, \qquad p/\beta_1=\gamma,$$

где $\lambda$ — отношение частоты возмущающей силы к частоте свободных колебаний системы, а постоянная $\gamma$ не зависит от возмущающей силы. Тогда величина амплитуды будет выражаться формулой

$$\bar{D}(\lambda)=\frac{a}{\beta_1^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2+\gamma^2\lambda^2}}. \tag{4}$$

Найдем максимум этой функции. Он, очевидно, будет при том значении $\lambda$, при котором квадрат знаменателя имеет минимум. Но минимум функции

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2+\gamma^2\lambda^2} \tag{5}$$

достигается при

$$\lambda=\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}}$$

и равен

$$\gamma\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Следовательно, максимальная величина амплитуды равна

$$\bar{D}_{max}=\frac{a}{\beta_1^2\gamma\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Графики функции $\overline{D}(\lambda)$ при различных значениях $\gamma$ показаны на рис. 279 (для определенности при построении графиков положено $a=1$, $\beta_1=1$). Эти кривые называются *кривыми резонанса.*

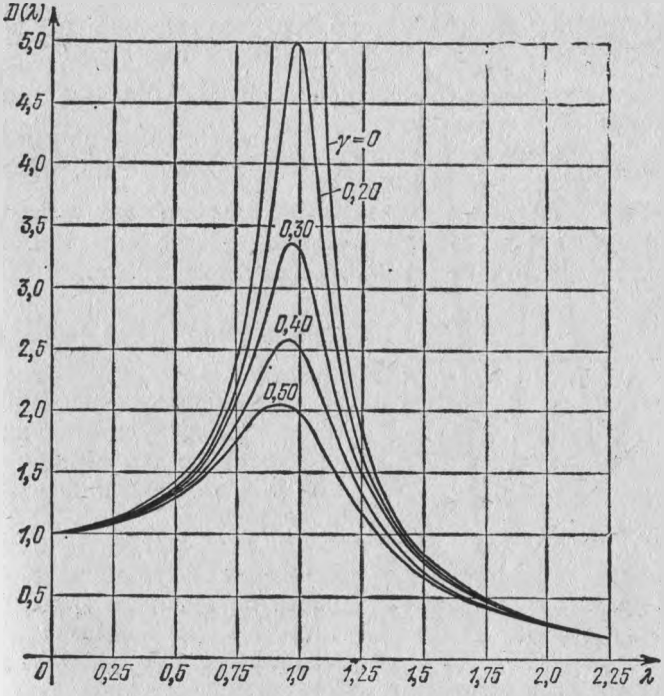



Рис. 279.

Из формулы (5) следует, что при малых $\gamma$ максимальное значение амплитуды достигается при значениях $\lambda$, близких к единице, т. е. когда частота внешней силы близка к частоте свободных колебаний. Если $\gamma=0$ (следовательно, $p=0$), т. е. если отсутствует сопротивление движению, амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает при $\lambda\to 1$, т. е. при $\omega\to\beta_1=\sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda\to 1\\(\gamma=0)}}\overline{D}(\lambda)=\infty.$$

При $\omega^2=q$ имеет место явление резонанса.

2) Предположим теперь, что $p=0$, т. е. рассмотрим уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии периодической внешней силы

$$y''+qy=a\sin\omega t. \qquad (6)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \qquad (\beta^2 = q).$$

Если $\beta \neq \omega$, т. е. если частота внешней силы не равна частоте собственных колебаний, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

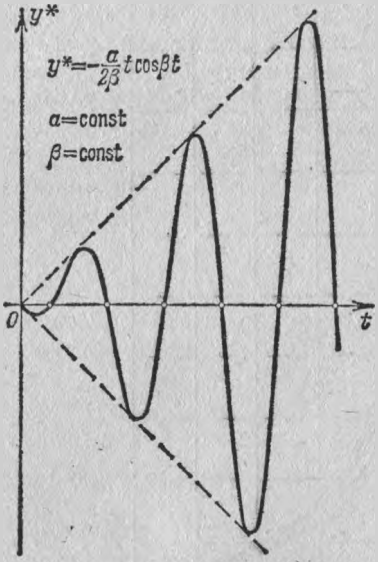


Рис. 280.

Подставляя это выражение в исходное уравнение, найдем

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

Общее решение есть

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t.$$

Таким образом, движение получается в результате наложения собственного колебания с частотой $\beta$ и вынужденного колебания с частотой $\omega$.

Если $\omega = \beta$, т. е. частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней силы, то функция (3) не является решением уравнения (6). В этом случае в соответствии с результатами § 24 частное решение надо искать в форме

$$y^* = t (M \cos \beta t + N \sin \beta t). \qquad (7)$$

Подставляя это выражение в уравнение, найдем $M$ и $N$:

$$M = -\frac{a}{2\beta}, \quad N = 0.$$

Следовательно,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \beta t.$$

Общее решение будет иметь вид

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} t \cos \beta t.$$

Второй член, стоящий в правой части, показывает, что в этом случае амплитуда колебания неограниченно возрастает при неограниченном возрастании времени $t$. Это явление, имеющее место

при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой внешней силы, называется *резонансом*.

График функции $y^*$ изображен на рис. 280.

## § 29. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

При решении многих задач требуется найти функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих аргумент $x$, искомые функции $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ и их производные.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ — искомые функции, $x$ — аргумент.

Такая система, когда в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется *нормальной*.

Проинтегрировать систему — значит определить функции $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$, удовлетворяющие системе уравнений (1) и данным начальным условиям

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10},\ y_2|_{x=x_0} = y_{20},\ \ldots,\ y_n|_{x=x_0} = y_{n0}. \qquad (2)$$

Интегрирование системы вида (1) можно произвести следующим образом.

Дифференцируем по $x$ первое из уравнений (1):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, ..., $\frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1$, $f_2$, ..., $f_n$ из уравнений (1), будем иметь уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая далее, таким же образом получим, наконец, уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Итак, мы получаем следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= F_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= F_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из первых $n-1$ уравнений определим $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$, выразив их через $x$, $y_1$ и производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, $\ldots$, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ (предполагается, что эти операции выполнимы):

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}),\\ y_3 &= \varphi_3(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= \varphi_n(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений (3), получим уравнение $n$-го порядка для определения $y_1$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}). \tag{5}$$

Решая это уравнение, определим $y_1$:

$$y_1 = \psi_1(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n). \tag{6}$$

Дифференцируя последнее выражение $n-1$ раз, найдем производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, $\ldots$, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции от $x$, $C_1$, $C_2$, $\ldots$, $C_n$. Подставляя эти функции в уравнение (4), определяем $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= \psi_n(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (2), остается лишь найти из уравнений (6) и (7) соответствующие значения постоянных $C_1$, $C_2$, $\ldots$, $C_n$ (подобно тому, как мы это делали в случае одного дифференциального уравнения).

Замечание 1. Если система (1) линейна относительно искомых функций, то и уравнение (5) будет линейным.

Пример 1. Проинтегрировать систему

$$\frac{dy}{dx}=y+z+x,\ \frac{dz}{dx}=-4y-3z+2x \tag{а}$$

при начальных условиях

$$y|_{x=0}=1,\quad z|_{x=0}=0. \tag{б}$$

Решение. 1) Дифференцируя по $x$ первое уравнение, будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

Подставляя сюда выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ из уравнений (а), получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1. \tag{в}$$

2) Из первого уравнения системы (а) находим

$$z=\frac{dy}{dx}-y-x \tag{г}$$

и подставляем в только что полученное уравнение; получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\left(\frac{dy}{dx}-y-x\right)+3x+1,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1. \tag{д}$$

Общее решение последнего уравнения есть

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9 \tag{е}$$

и на основании (г)

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14. \tag{ж}$$

Подберем постоянные $C_1$ и $C_2$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия (б): $y|_{x=0}=1$, $z|_{x=0}=0$. Тогда из равенств (е) и (ж) получаем

$$1=C_1-9,\qquad 0=C_2-2C_1+14,$$

откуда $C_1=10$, $C_2=6$. Таким образом, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (б), имеет вид

$$y=(10+6x)e^{-x}+5x-9,\quad z=(-14-12x)e^{-x}-6x+14.$$

Замечание 2. В приведенных рассуждениях мы предполагали, что из первых $n-1$ уравнений системы (3) можно определить функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Может случиться, что переменные $y_2, \ldots, y_n$ исключаются не из $n$, а из меньшего числа уравнений. Тогда для определения $y$ мы получим уравнение, порядок которого ниже $n$.

Пример 2. Проинтегрировать систему

$$\frac{dx}{dt}=y+z,\ \frac{dy}{dt}=x+z,\ \frac{dz}{dt}=x+y.$$

Решение. Дифференцируя по $t$ первое уравнение, находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y), \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z.$$

Исключая переменные $y$ и $z$ из уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y+z, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z,$$

будем иметь уравнение второго порядка относительно $x$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим его общее решение

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\alpha)$$

Отсюда находим

$$\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t} \quad \text{и} \quad y=\frac{dx}{dt}-z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-z. \qquad (\beta)$$

Подставляя в третье из заданных уравнений найденные выражения для $x$ и $y$, получим уравнение для определения $z$

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_2e^{2t}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$z=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\gamma)$$

Но тогда на основании уравнений ($\beta$) получаем

$$y=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\delta)$$

Уравнения ($\alpha$), ($\delta$) и ($\gamma$) дают общее решение заданной системы.

В дифференциальные уравнения системы могут входить производные высших порядков. В этом случае получается система дифференциальных уравнений высших порядков.

Так, например, задача о движении материальной точки под действием силы $F$ сводится к системе трех дифференциальных уравнений второго порядка. Пусть $F_x$, $F_y$, $F_z$ — проекции силы $F$ на оси координат. Положение точки в любой момент времени $t$ определяется ее координатами $x$, $y$, $z$. Следовательно, $x$, $y$, $z$ являются функциями от $t$. Проекции вектора скорости точки на оси координат будут $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Предположим, что сила $F$, а следовательно, и ее проекции $F_x$, $F_y$, $F_z$ зависят от времени $t$, положения $x$, $y$, $z$ точки и от скорости движения точки, т. е. от $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Искомыми функциями в этой задаче являются три функции

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Эти функции определяются из уравнений динамики (закон Ньютона)

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Получили систему трех дифференциальных уравнений второго порядка. В случае плоского движения, т. е. движения, когда траекторией является плоская кривая (лежащая, например, в плоскости $Oxy$), получаем систему двух уравнений для определения функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

Решать систему дифференциальных уравнений высших порядков можно путем сведения ее к системе уравнений первого порядка. На примере уравнений (9) и (10) покажем, как это делается. Введем обозначения

$$\frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Система двух уравнений второго порядка (9), (10) с двумя искомыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ заменяется системой четырех уравнений первого порядка с четырьмя искомыми функциями $x,\ y,\ u,\ v$

$$\frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$m\frac{du}{dt} = F_x(t,\ x,\ y,\ u,\ v),\qquad m\frac{dv}{dt} = F_y(t,\ x,\ y,\ u,\ v).$$

Заметим в заключение, что рассмотренный нами общий прием решения системы может быть в некоторых конкретных случаях заменен тем или иным искусственным приемом, быстрее приводящим к цели.

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z,\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = y.$$

Решение. Дифференцируем по $x$ два раза обе части первого уравнения:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Но $\frac{d^2z}{dx^2} = y$, поэтому получаем уравнение четвертого порядка $\frac{d^4y}{dx^4} = y$. Интегрируя это уравнение, получим его общее решение (см. § 22, пример 4)

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Находя отсюда $\frac{d^2y}{dx^2}$ и подставляя в первое уравнение, найдем $z$:

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

## § 30. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_{ij}$ суть постоянные. Здесь $t$ — аргумент, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ — искомые функции. Система (1) называется системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, эту систему можно решить путем сведения к одному уравнению $n$-го порядка, которое в данном случае будет линейным (это было указано в замечании 1 предыдущего параграфа). Но можно решать систему (1) и другим методом, не сводя к уравнению $n$-го порядка. Этот метод дает возможность более наглядно анализировать характер решений.

Будем искать частное решение системы в следующем виде:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt}. \qquad (2)$$

Требуется определить постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $k$ так, чтобы функции $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \alpha_n e^{kt}$ удовлетворяли системе уравнений (1). Подставляя их в систему (1), получим

$$\begin{aligned}
k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt},\\
k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}.
\end{aligned}$$

Сократим на $e^{kt}$. Перенося все члены в одну сторону и собирая коэффициенты при $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0,\\
a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\alpha_n &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Выберем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $k$ такими, чтобы удовлетворялась система (3). Эта система есть система линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Составим

определитель системы (3):

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Если $k$ таково, что определитель $\Delta$ отличен от нуля, то система (3) имеет только нулевые решения $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, а следовательно, формулы (2) дают только тривиальные решения

$$x_1(t)=x_2(t)=\dots=x_n(t)\equiv 0.$$

Таким образом, нетривиальные решения (2) мы получим только при таких $k$, при которых определитель (4) обращается в нуль. Мы приходим к уравнению $n$-го порядка для определения $k$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для системы (1), его корни называются корнями характеристического уравнения.

Рассмотрим несколько случаев.

I. Корни характеристического уравнения действительные и различные. Обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_n$ корни характеристического уравнения. Для каждого корня $k_i$ напишем систему (3) и определим коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$. Можно показать, что один из них произвольный, его можно считать равным единице. Таким образом, получаем:

для корня $k_1$ решение системы (1)

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1t},\qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1t},\ \dots,\ x_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{k_1t};$$

для корня $k_2$ решение системы (1)

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2t},\qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2t},\ \dots,\ x_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{k_2t};$$

. . . . . .

для корня $k_n$ решение системы (1)

$$x_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{k_nt},\quad x_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}e^{k_nt},\ \dots,\ x_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}.$$

Путем непосредственной подстановки в уравнения можно убедиться, что система функций

$$\left.\begin{aligned} x_1&=C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}+\dots+C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt},\\ x_2&=C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}+\dots+C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nt},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n&=C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2t}+\dots+C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, тоже является решением системы дифференциальных уравнений (1). Это есть общее решение системы (1). Легко показать, что можно найти такие значения постоянных, при которых решение будет удовлетворять заданным начальным условиям.

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_1+2x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=0,$$

или $k^2-5k+4=0$. Находим его корни $k_1=1$, $k_2=4$. Решение системы ищем в виде

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t, \qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$$

и

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Составляем систему (3) для корня $k_1=1$ и определяем $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$:

$$(2-1)\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \qquad 1\alpha_1^{(1)}+(3-1)\alpha_2^{(1)}=0,$$

или

$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \qquad \alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$

откуда $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Полагая $\alpha_1^{(1)}=1$, получаем $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$. Таким образом, мы получили решение системы

$$x_1^{(1)}=e^t, \qquad x_2^{(1)}=-e^t/2.$$

Составляем далее систему (3) для корня $k_2=4$ и определяем $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2^{(2)}$:

$$-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0, \qquad \alpha_1^{(2)}-\alpha_2^{(2)}=0,$$

откуда $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$ и $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Получаем второе решение системы

$$x_1^{(2)}=e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=e^{4t}.$$

Общее решение системы будет (см. (6))

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{4t}, \qquad x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

II. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется два комплексных сопряженных корня:

$$k_1=\alpha+i\beta, \qquad k_2=\alpha-i\beta.$$

Этим корням будут соответствовать решения

$$x_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

$$x_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Коэффициенты $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$ определяются из системы уравнений (3).

Так же как и в § 21, можно показать, что действительные и мнимые части комплексного решения тоже являются решениями. Таким образом, мы получаем два частных решения

$$\begin{aligned} \overline{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t}\left(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x + \lambda_j^{(2)}\sin\beta x\right), \\ \overline{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t}\left(\overline{\lambda}_j^{(1)}\sin\beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ — действительные числа, определяемые через $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$.

Соответствующие комбинации функций (9) войдут в общее решение системы.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

или $k^2 + 12k + 37 = 0$ и находим его корни

$$k_1 = -6 + i, \qquad k_2 = -6 - i.$$

Подставляя $k_1 = -6 + i$ в систему (3), находим

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \qquad \alpha_2^{(1)} = 1 + i.$$

Пишем решение (7):

$$x_1^{(1)} = e^{(-6+i)t}, \qquad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)t}. \tag{7'}$$

Подставляя $k_2 = -6 - i$ в систему (3), находим

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \qquad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Получим вторую систему решений (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \qquad x_2^{(2)} = (1-i)\,e^{(-6-i)t}. \tag{8'}$$

Перепишем решение (7'):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i\sin t), \qquad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{-6t}(\cos t + i\sin t),$$

или

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t, \\ x_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Перепишем решение (8'):

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= e^{-6t}\cos t - ie^{-6t}\sin t, \\ x_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t) - ie^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

За системы частных решений можно взять отдельно действительные части и отдельно мнимые части:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x}_1^{(1)} &= e^{-6t}\cos t, & \overline{x}_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t), \\ \overline{x}_1^{(2)} &= e^{-6t}\sin t, & \overline{x}_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Общим решением системы будет

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t, \\ x_2 &= C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Аналогичным методом можно находить решение системы линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

В механике и теории электрических цепей исследуется, например, решение системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a_{11}x+a_{12}y, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=a_{21}x+a_{22}y. \tag{10}$$

Снова ищем решение в форме

$$x=\alpha e^{kt}, \qquad y=\beta e^{kt}.$$

Подставляя эти выражения в систему (10) и сокращая на $e^{kt}$, получаем систему уравнений для определения $\alpha$, $\beta$ и $k$

$$(a_{11}-k^2)\alpha+a_{12}\beta=0, \quad a_{21}\alpha+(a_{22}-k^2)\beta=0. \tag{11}$$

Отличные от нуля $\alpha$ и $\beta$ определяются только в том случае, когда определитель системы будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k^2 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Это есть характеристическое уравнение для системы (10); оно является уравнением 4-го порядка относительно $k$. Пусть $k_1$, $k_2$, $k_3$ и $k_4$ — его корни (предполагаем, что корни различны). Для каждого корня $k_i$ из системы (11) находим значения $\alpha$ и $\beta$. Общее решение, аналогично (6), будет иметь вид

$$x=C_1\alpha^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha^{(2)}e^{k_2t}+C_3\alpha^{(3)}e^{k_3t}+C_4\alpha^{(4)}e^{k_4t},$$
$$y=C_1\beta^{(1)}e^{k_1t}+C_2\beta^{(2)}e^{k_2t}+C_3\beta^{(3)}e^{k_3t}+C_4\beta^{(4)}e^{k_4t}.$$

Если среди корней будут комплексные, то каждой паре комплексных корней в общем решении будут соответствовать выражения вида (9).

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x-4y, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-x+y.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение (12) и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix}=0,$$
$$k_1=i, \quad k_2=-i, \quad k_3=\sqrt{3}, \quad k_4=-\sqrt{3}.$$

Решение будем искать в форме

$$x^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{it}, \qquad y^{(1)}=\beta^{(1)}e^{it},$$
$$x^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{-it}, \qquad y^{(2)}=\beta^{(2)}e^{-it},$$
$$x^{(3)}=\alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t}, \qquad y^{(3)}=\beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$
$$x^{(4)}=\alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}, \qquad y^{(4)}=\beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Из системы (11) находим $\alpha^{(j)}$ и $\beta^{(j)}$:

$$\alpha^{(1)}=1, \quad \beta^{(1)}=1/2,$$
$$\alpha^{(2)}=1, \quad \beta^{(2)}=1/2,$$
$$\alpha^{(3)}=1, \quad \beta^{(3)}=-1/2,$$
$$\alpha^{(4)}=1, \quad \beta^{(4)}=-1/2.$$

Выпишем комплексные решения:

$$x^{(1)}=e^{it}=\cos t+i\sin t, \quad y^{(1)}=0{,}5\,(\cos t+i\sin t),$$
$$x^{(2)}=e^{-it}=\cos t-i\sin t, \quad y^{(2)}=0{,}5\,(\cos t-i\sin t).$$

Решением будут действительные и мнимые части:

$$\bar{x}^{(1)}=\cos t, \quad \bar{y}^{(1)}=0{,}5\cos t,$$
$$\bar{x}^{(2)}=\sin t, \quad \bar{y}^{(2)}=0{,}5\sin t.$$

Теперь можем написать общее решение

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^{\sqrt{3}t}+C_4e^{-\sqrt{3}t},$$
$$y=\frac{1}{2}C_1\cos t+\frac{1}{2}C_2\sin t-\frac{1}{2}C_3e^{\sqrt{3}t}-\frac{1}{2}C_4e^{-\sqrt{3}t}.$$

Замечание. Мы не рассматривали в этом параграфе случай кратных корней характеристического уравнения. Этот вопрос подробно изложен, например, в книге: Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.

## § 31. Понятие о теории устойчивости Ляпунова. Поведение траектории дифференциального уравнения в окрестности особой точки

Так как решения большинства дифференциальных уравнений и систем уравнений не выражаются через элементарные функции или квадратуры, то в этих случаях при решении конкретных дифференциальных уравнений применяются приближенные методы интегрирования. Понятие об этих методах было дано в § 3; кроме того, некоторые из этих методов будут рассмотрены в §§ 32—34, а также в главе XVI.

Недостаток этих методов заключается в том, что они дают только одно частное решение; чтобы получить другие частные решения, нужно все вычисления проводить снова. Зная одно частное решение, нельзя сделать заключение о характере других решений.

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента и, в частности, при неограниченном возрастании аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции и т. д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений.

Одним из основных вопросов качественной теории является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения; этот вопрос был подробно исследован знаменитым русским математиком А. М. Ляпуновым (1857—1918).

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_1(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt}=f_2(t, x, y). \tag{1}$$

Пусть $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — решения этой системы, удовлетворяющие начальным условиям

$$x|_{t=0}=x_0, \quad y|_{t=0}=y_0. \tag{1'}$$

Пусть далее, $\bar{x}=\bar{x}(t)$ и $\bar{y}=\bar{y}(t)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\bar{x}|_{t=0}=\bar{x}_0, \quad \bar{y}|_{t=0}=\bar{y}_0. \tag{1''}$$

Определение. Решения $x=x(t)$ и $y=y(t)$, удовлетворяющие уравнениям (1) и начальным условиям (1'), называются *устойчивыми* по Ляпунову при $t\to\infty$, если для каждого как угодно малого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что при всех значениях $t>0$ будут выполняться неравенства

$$|\bar{x}(t)-x(t)|<\varepsilon, \quad |\bar{y}(t)-y(t)|<\varepsilon, \tag{2}$$

если начальные данные удовлетворяют неравенствам

$$|\bar{x}_0-x_0|<\delta, \quad |\bar{y}_0-y_0|<\delta. \tag{3}$$

Выясним смысл этого определения. Из неравенств (2) и (3) следует, что при малых изменениях начальных условий мало отличаются соответствующие решения при всех положительных значениях $t$. Если система дифференциальных уравнений является системой, описывающей некоторое движение, то в случае устойчивости решений характер движений мало изменяется при малом изменении начальных данных.

Разберем это на примере одного уравнения первого порядка.
Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=-y+1. \tag{а}$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y=Ce^{-t}+1. \tag{б}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{t=0}=1. \tag{в}$$

Очевидно, что это решение $y=1$ получится при $C=0$ (рис. 281). Найдем, далее, частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{y}|_{t=0}=\bar{y}_0.$$

Найдем значение $C$ из уравнения (б):

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

откуда

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

Подставляя это значение $C$ в равенство (б), получаем

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1.$$

Очевидно, решение $y = 1$ является устойчивым. Действительно,

$$\bar{y} - y = [(\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} \longrightarrow 0$$

при $t \longrightarrow \infty$.

Следовательно, при произвольном $\varepsilon$ будет выполняться неравенство (3), если будет выполняться неравенство

$$(\bar{y}_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

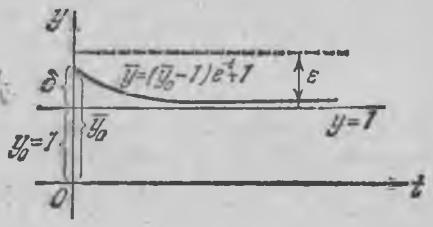



Рис. 281.

Если уравнения (1) описывают движение, где аргумент $t$ есть время, и при этом уравнения не содержат явно времени $t$, т. е. имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y),$$

то эта система называется *автономной*.

Рассмотрим, далее, систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = cx + gy, \qquad \frac{dy}{dt} = ax + by. \tag{4}$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a$, $b$, $c$, $g$ постоянные, при этом очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ есть решение системы (4), в чем убеждаемся непосредственной подстановкой. Исследуем вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы, чтобы решение $x = 0$, $y = 0$ было устойчиво. Эта исследование проводится так.

Дифференцируем первое уравнение и исключаем $y$ и $\frac{dy}{dt}$ на основании уравнений системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} + g\frac{dy}{dt} = c\frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c\frac{dx}{dt} + gax + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b + c)\frac{dx}{dt} - (ag - bc)\, x = 0. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$\lambda^2-(b+c)\lambda-(ag-bc)=0. \tag{6}$$

Это уравнение принято записывать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & g \\ a & b-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

(см. уравнение (4) § 30).

Обозначим корни характеристического уравнения (7) через $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Как мы увидим ниже, устойчивость или неустойчивость решений системы (4) определяется характером корней $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

Рассмотрим все возможные случаи.

I. Корни характеристического уравнения действительные, отрицательные и различные: $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Из уравнения (5) находим

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

Зная $x$, из первого уравнения (4) находим $y$. Таким образом, решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} x&=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},\\ y&=\left[C_1(\lambda_1-c)\,e^{\lambda_1 t}+C_2(\lambda_2-c)\,e^{\lambda_2 t}\right]\frac{1}{g}. \end{aligned} \tag{8}$$

Замечание. Если $g=0$ и $a\neq 0$, то уравнение (5) мы составим для функции $y$. Найдя $y$, из второго уравнения системы (4) находим $x$. Структура решений (8) сохранится. Если же $g=0$, $a=0$, то решение системы уравнений принимает вид:

$$x=C_1e^{ct},\quad y=C_2e^{bt}. \tag{8'}$$

Анализ характера решений в этом случае производится проще.

Подберем $C_1$ и $C_2$ так, чтобы решения (8) удовлетворяли начальным условиям

$$x|_{t=0}=x_0,\quad y|_{t=0}=y_0.$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, будет

$$\begin{aligned} x&=\frac{cx_0+gy_0-x_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}+\frac{x_0\lambda_1-cx_0-gy_0}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t},\\ y&=\frac{1}{g}\left[\frac{cx_0+gy_0-x_0\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1-c)\,e^{\lambda_1 t}+\frac{x_0\lambda_1-cx_0-gy_0}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_2-c)\,e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Из последних равенств следует, что при любом $\varepsilon>0$ можно выбирать $|x_0|$ и $|y_0|$ столь малыми, что для всех $t>0$ будет $|x(t)|<\varepsilon$, $|y(t)|<\varepsilon$, так как $e^{\lambda_1 t}<1$; $e^{\lambda_2 t}<1$.

Отметим, что в данном случае

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}y(t)=0. \tag{10}$$

Рассмотрим плоскость $xOy$. Для системы дифференциальных уравнений (4) и дифференциального уравнения (5) эта плоскость называется *фазовой плоскостью*. Решения (8) и (9) системы (4) будем рассматривать как параметрические уравнения некоторой кривой на фазовой плоскости $xOy$:

$$x=\bar{\varphi}(t,\ C_1,\ C_2),\qquad y=\bar{\psi}(t,\ C_1,\ C_2), \tag{11}$$

$$x=\varphi(t,\ x_0,\ y_0),\qquad y=\psi(t,\ x_0,\ y_0). \tag{12}$$

Эти кривые являются *интегральными кривыми, или траекториями* дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+gy}, \tag{13}$$

которое получается из системы (4) путем деления друг на друга правых и левых частей.

Начало координат $O(0;\ 0)$ является *особой точкой* для дифференциального уравнения (13), так как эта точка не принадлежит к области существования и единственности решения.

Характер решений (9) и вообще решений системы (4) наглядно иллюстрируется расположением интегральных кривых

$$\bar{F}(x,\ y,\ C)=0,$$

образующих общий интеграл дифференциального уравнения (13). Постоянная $C$ определяется из начального условия $y|_{x=x_0}=y_0$. После подстановки значения $C$ получаем уравнение семейства в форме

$$F(x,\ y,\ x_0,\ y_0). \tag{14}$$

В случае решений (9) особая точка называется *устойчивым узлом*. Говорят, что точка, двигаясь по траектории, неограниченно приближается к особой точке при $t\longrightarrow+\infty$.

Очевидно, что соотношение (14) может быть получено путем исключения параметра $t$ из системы (12). Не производя в дальнейшем полного анализа характера расположения интегральных кривых вблизи особой точки на фазовой плоскости при всех возможных случаях корней характеристического уравнения, ограничимся иллюстрацией этого на простейших примерах, не требующих проведения громоздких вычислений. Отметим, что характер поведения траекторий уравнения (13) вблизи начала координат при произвольных коэффициентах качественно такой же, какой будет рассмотрен в примерах.

Пример 1. Исследовать устойчивость решения $x=0$, $y=0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-x,\qquad \frac{dy}{dt}=-2y.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Решения (8′) в данном случае будут

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-2t}.$$

Решения (9) будут

$$x = x_0 e^{-t}, \qquad y = y_0 e^{-2t}. \tag{а}$$

Очевидно, что $x(t) \longrightarrow 0$ и $y(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$. Решение $x=0$, $y=0$ устойчиво. Обратимся теперь к фазовой плоскости. Исключая параметр $t$ из уравнений (а), получаем уравнение вида (14)

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}. \tag{б}$$

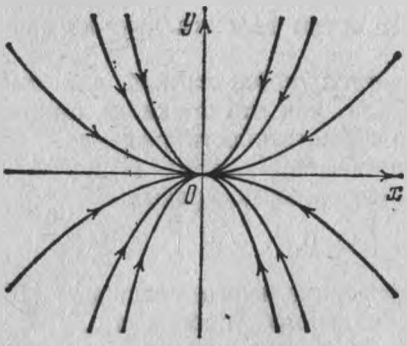


Рис. 282.

Это семейство парабол (рис. 282).

Уравнение вида (13) для данного примера будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|, \quad y = Cx^2. \tag{в}$$

Определим $C$ из условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad C = \frac{y_0}{x_0^2}.$$

Подставляя найденное значение $C$ в (в), получаем решение (б). Особая точка $O(0; 0)$ есть *устойчивый узел.*

II. Корни характеристического уравнения действительные, положительные, различные: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае решения выражаются также формулами (8) и соответственно (9). Но в данном случае при как угодно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будет $|x(t)| \longrightarrow \infty$, $|y(t)| \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow +\infty$, так как $e^{\lambda_1 t} \longrightarrow \infty$ и $e^{\lambda_2 t} \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow +\infty$. На фазовой плоскости особая точка — *неустойчивый узел*: при $t \longrightarrow +\infty$ точка на траектории удаляется от точки покоя $x=0$, $y=0$.

П р и м е р 2. Исследовать устойчивость решений системы

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

его решения

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Решение будет

$$x = x_0 e^t, \qquad y = y_0 e^{2t}.$$

Решение неустойчиво, так как $|x(t)| \longrightarrow \infty$, $|y(t)| \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow +\infty$. Исключая $t$, получаем

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

(рис. 283). Особая точка $O$ (0; 0) есть *неустойчивый узел.*

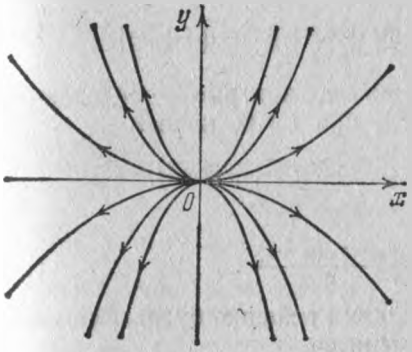



Рис. 283.

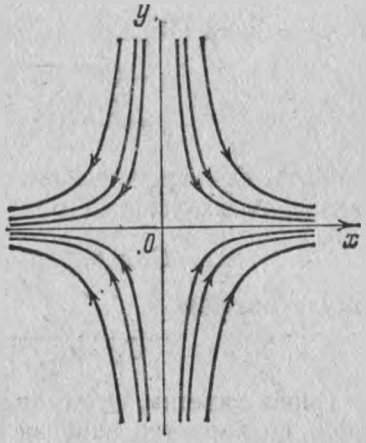



Рис. 284.

III. Корни характеристического уравнения действительные, разных знаков, например, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Из формул (9) следует, что при как угодно малых $|x_0|$ и $|y_0|$, если $cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0$, будет $|x(t)| \longrightarrow \infty$, $|y(t)| \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow +\infty$. Решение *неустойчиво.* На фазовой плоскости особая точка называется *седлом.*

Пример 3. Исследовать устойчивость решения системы

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

Решение. Характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Решение будет

$$x = x_0 e^t, \qquad y = y_0 e^{-2t}.$$

Решение неустойчиво. Исключая параметр $t$, получаем семейство кривых на фазовой плоскости

$$yx^2 = y_0 x_0^2.$$

Особая точка $O$ (0; 0) есть *седло* (рис. 284).

IV. Корни характеристического уравнения комплексные с отрицательной действительной частью: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha < 0$). Решение системы (4)

будет

$$x = e^{\alpha t}[C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t],$$
$$y = \frac{1}{g} e^{\alpha t}[(\alpha C_1 + \beta C_2 - cC_1) \cos \beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - cC_2) \sin \beta t]. \quad (15)$$

Если ввести обозначение

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \delta = \frac{C_1}{C}, \quad \cos \delta = \frac{C_2}{C},$$

то уравнения (15) можно переписать в виде

$$x = Ce^{\alpha t} \sin (\beta t + \delta),$$
$$y = \frac{Ce^{\alpha t}}{g}[(\alpha - c) \sin (\beta t + \delta) + \beta \cos (\beta t + \delta)], \quad (16)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$, причем

$$x_0 = C \sin \delta, \quad y_0 = \frac{C}{g}[(\alpha - c) \sin \delta + \beta \cos \delta],$$

откуда находим

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{gy_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta}. \quad (17)$$

Снова заметим, что если $g = 0$, то вид решения будет несколько иной, но характер анализа не изменится.

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будут выполняться соотношения

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

Решение *устойчиво*. В данном случае при $t \to +\infty$

$$x(t) \to 0 \text{ и } y(t) \to 0,$$

неограниченное число раз меняя знаки. На фазовой плоскости особая точка называется *устойчивым фокусом*.

Пример 4. Исследовать устойчивость решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

Находим $C_1$ и $C_2$ по формулам (17): $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$. Подставляя в (15), получаем

$$x = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \quad y = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t). \quad (A)$$

Очевидно, что при любых значениях $t$

$$|x| \leqslant |x_0| + |y_0|, \quad |y| \leqslant |x_0| + |y_0|.$$

При $t \to +\infty$ имеем $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$. Решение устойчиво.

Выясним характер расположения кривых на фазовой плоскости в этом случае. Преобразуем выражения (A). Пусть

$$x_0 = M\cos\delta, \qquad y_0 = M\sin\delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{y_0}{x_0}.$$

Тогда равенства (A) примут вид

$$x = Me^{-t}\cos(t-\delta), \quad y = Me^{-t}\sin(t-\delta). \tag{B}$$

На фазовой плоскости перейдем к полярным координатам $\rho$ и $\theta$ и установим зависимость $\rho = f(\theta)$. Уравнения (B) принимают вид

$$\rho\cos\theta = Me^{-t}\cos(t-\delta), \qquad \rho\sin\theta = Me^{-t}\sin(t-\delta). \tag{C}$$

Возведя в квадрат правые и левые части и складывая, получим

$$\rho^2 = M^2e^{-2t},$$

или

$$\rho = Me^{-t}. \tag{D}$$

Установим зависимость $t$ от $\theta$. Деля члены нижнего из равенств (C) на соответствующие члены верхнего равенства, получим

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(t-\delta),$$

откуда

$$t = \theta + \delta.$$

Подставляя в (D), получаем

$$\rho = Me^{-(\theta+\delta)},$$

или

$$\rho = Me^{-\delta-\theta}.$$

Обозначая $Me^{-\delta} = M_1$, окончательно получаем

$$\rho = M_1e^{-\theta}. \tag{E}$$

Это семейство логарифмических спиралей. В этом случае при $t \longrightarrow \infty$ точка по траектории приближается к началу координат. Особая точка $O(0; 0)$ есть *устойчивый фокус*.

V. Корни характеристического уравнения комплексные с положительной действительной частью: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha > 0)$. В этом случае решение также выразится формулами (15), где $\alpha > 0$. При любых начальных условиях $x_0$ и $y_0$ $(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0)$ и при $t \longrightarrow +\infty$ величины $|x(t)|$ и $|y(t)|$ могут принимать как угодно большие значения. Решение *неустойчиво*. На фазовой плоскости особая точка называется *неустойчивым фокусом*. Точка по траектории неограниченно удаляется от начала координат.

Пример 5. Исследовать устойчивость решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + y.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = 1 - i.$$

Решение (15) с учетом (17) в данном случае будет

$$x = e^t (x_0 \cos t + y_0 \sin t),$$
$$y = e^t (y_0 \cos t - x_0 \sin t).$$

На фазовой плоскости получим кривую в полярных координатах

$$\rho = \overline{M}_1 e^{\theta}.$$

Особая точка — *неустойчивый фокус* (рис. 285).

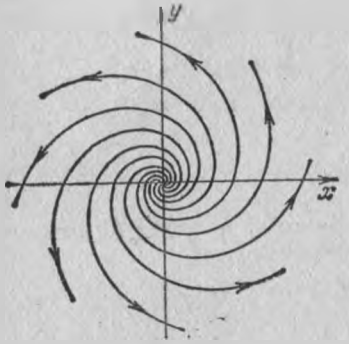



Рис. 285.

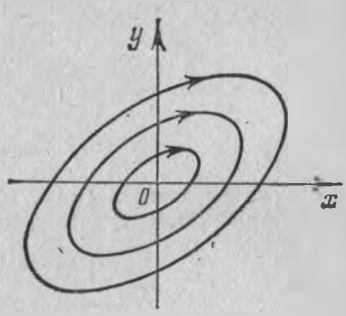



Рис. 286.

VI. Корни характеристического уравнения чисто мнимые: $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$. Решения (15) в этом случае примут вид

$$x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t,$$
$$y = \frac{1}{g} [(\beta C_2 - cC_1) \cos \beta t + (-\beta C_1 - cC_2) \sin \beta t]. \tag{18}$$

Постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются по формулам (17):

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{gy_0 + cx_0}{g}. \tag{19}$$

Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ и при всех достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будет $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ при любом $t$. Решение *устойчиво*. Здесь $x$ и $y$ — периодические функции от $t$.

Чтобы произвести анализ интегральных кривых на фазовой плоскости, целесообразно первое из решений (18) записать в следующем виде (см. (16)):

$$x = C \sin (\beta t + \delta),$$
$$y = \frac{C\beta}{g} \cos (\beta t + \delta) - \frac{Cc}{g} \sin (\beta t + \delta), \tag{20}$$

где $C$, $\delta$ — произвольные постоянные. Из выражений (20) следует, что $x$ и $y$ — периодические функции от $t$. Исключаем параметр $t$ из уравнений (20):

$$y = \frac{C\beta}{g} \sqrt{1 - \frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{g} x.$$

Освобождаясь от радикала, получим

$$\left(y+\frac{c}{g}x\right)^2=\left(\frac{C\beta}{g}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right). \tag{21}$$

Это семейство кривых 2-го порядка (кривые действительные), зависящих от произвольной постоянной $C$. Каждая из них не имеет неограниченно удаленных точек. Следовательно, это семейство эллипсов, окружающих начало координат (при $c=0$ оси эллипсов параллельны осям координат). Особая точка называется *центром* (рис. 286).

Пример 6. Исследовать устойчивость решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-4x.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -4 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2+4=0, \quad \lambda=\pm 2i.$$

Решения (20) будут

$$x=C\sin(2t+\delta), \qquad y=2C\cos(2t+\delta),$$

Уравнение (21) будет иметь вид

$$y^2=4C^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right), \quad \frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2}=1.$$

На фазовой плоскости имеем систему эллипсов. Особая точка — *центр*.

VII. Пусть $\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$. Решение (8) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} x&=C_1+C_2e^{\lambda_2 t},\\ y&=\frac{1}{g}\left[-C_1c+C_2(\lambda_2-c)\,e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, что при любом $\varepsilon>0$ и при достаточно малых $|x_0|$ и $|y_0|$ будет $|x(t)|<\varepsilon$, $|y(t)|<\varepsilon$ при $t>0$. Следовательно, решение *устойчиво*.

Пример 7. Исследовать устойчивость решения системы

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=-y. \tag{$\alpha$}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2+\lambda=0, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_2=-1.$$

Здесь $g=0$. Решения находим непосредственно, решая систему, не пользуясь формулами (22):

$$x=C_1, \quad y=C_2e^{-t}. \tag{$\beta$}$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям $x=x_0$, $y=y_0$ при $t=0$, будет

$$x=x_0, \quad y=y_0e^{-t}. \tag{$\gamma$}$$

Очевидно, что решение *устойчиво*. Дифференциальное уравнение на фазовой плоскости будет $\frac{dx}{dy}=0$. Общий интеграл будет $x=C$. Траектории — прямые,

параллельные оси $Oy$. Из уравнений (γ) следует, что точки по траекториям приближаются к прямой $y=0$ (рис. 287).

VIII. Пусть $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$. Из формул (22) или (8′) следует, что решение неустойчиво, так как $|x(t)|+|y(t)|\longrightarrow\infty$ при $t\longrightarrow+\infty$.

IX. Пусть $\lambda_1=\lambda_2<0$. Решение будет

$$x=(C_1+C_2t)\,e^{\lambda_1 t},$$
$$y=\frac{1}{g}\,e^{\lambda_1 t}\,[C_1(\lambda_1-c)+C_2(1+\lambda_1 t-ct)]. \tag{23}$$

Так как $e^{\lambda_1 t}\longrightarrow 0$ и $te^{\lambda_1 t}\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow+\infty$, то для любого $\varepsilon>0$

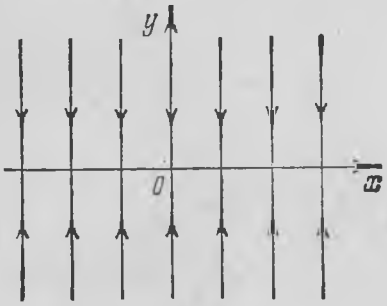



Рис. 287.

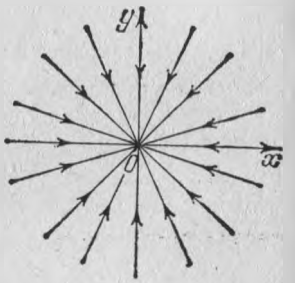



Рис. 288.

можно подобрать $C_1$ и $C_2$ такие (путем выбора $x_0$ и $y_0$), что будет $|x(t)|<\varepsilon$, $|y(t)|<\varepsilon$ при любом $t>0$. Следовательно, решение *устойчиво*. При этом $x(t)\longrightarrow 0$ и $y(t)\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow+\infty$.

Пример 8. Исследовать устойчивость решения системы

$$\frac{dx}{dt}=-x,\quad \frac{dy}{dt}=-y.$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad (\lambda+1)^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=-1.$$

Здесь $g=0$. Решение системы будет иметь форму (8′):

$$x=C_1e^{-t},\quad y=C_2e^{-t},$$

причем $x\longrightarrow 0$, $y\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow+\infty$. Решение устойчиво. Семейство кривых на фазовой плоскости будет

$$\frac{y}{x}=\frac{C_2}{C_1}=k,\quad \text{т. е. } y=kx.$$

Это семейство прямых, проходящих через начало координат. Точки по траекториям приближаются к началу координат. Особая точка $O(0;0)$ есть *узел* (рис. 288).

Заметим, что в случае $\lambda_1=\lambda_2>0$ форма решения (22) сохраняется, но при $t\to+\infty$

$$|x(t)|\to\infty \text{ и } |y(t)|\to\infty.$$

Решение *неустойчиво.*

X. Пусть $\lambda_1=\lambda_2=0$. Тогда

$$x=C_1+C_2t, \qquad y=\frac{1}{g}[-cC_1+C_2-cC_2t]. \tag{24}$$

Откуда видно, что $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $t\to+\infty$. Решение *неустойчиво.*

Пример 9. Исследовать устойчивость решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=0.$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad \lambda_1^2=0, \qquad \lambda_1=\lambda_2=0.$$

Находим решения

$$y=C_2, \qquad x=C_2t+C_1.$$

Очевидно, что $x\to\infty$ при $t\to+\infty$. Решение *неустойчиво.* Уравнение на фазовой плоскости будет $\frac{dy}{dx}=0$. Траектории $y=C$ — прямые, параллельные оси (рис. 289). Особая точка называется *вырожденным седлом.*

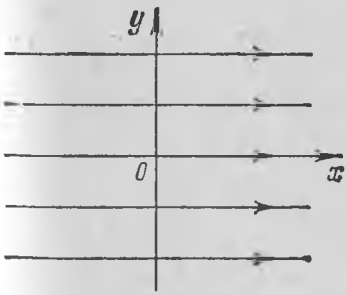



Рис. 289.




Рис. 290.

Чтобы дать общий критерий устойчивости решения системы (4), поступим следующим образом.

Запишем корни характеристического уравнения в форме комплексных чисел:

$$\lambda_1=\lambda_1^*+i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2=\lambda_2^*+i\lambda_2^{**}$$

(в случае действительных корней $\lambda_1^{**}=0$ и $\lambda_2^{**}=0$).

Возьмем плоскость $\lambda'\lambda''$ комплексной переменной и будем изображать корни характеристического уравнения точками на этой плоскости. Тогда на основании рассмотренных случаев условие устойчивости решения системы (4) можно сформулировать следующим образом.

*Если ни один из корней* $\lambda_1$, $\lambda_2$ *характеристического уравнения* (6) *не лежит справа от мнимой оси, причем хотя бы один корень отличен от нуля, то решение устойчиво; если же хотя бы один корень лежит справа от мнимой оси или оба корня равны нулю, то решение неустойчиво* (рис. 290).

Рассмотрим теперь более общую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Решение такой системы, кроме исключительных случаев, не выражается через элементарные функции и квадратуры.

Для того чтобы установить, устойчивы или неустойчивы решения этой системы, ее сравнивают с решениями линейной системы. Предположим, что при $x \to 0$ и $y \to 0$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ также стремятся к нулю и притом быстрее, чем $\rho$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; иными словами,

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Тогда можно доказать, что, кроме исключительного случая, решение системы (25) будет устойчиво тогда, когда устойчиво решение системы

$$\frac{dx}{dt} = cx + gy, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by, \tag{4}$$

и неустойчиво, когда решение системы (4) неустойчиво. Исключение составляет тот случай, когда оба корня характеристического уравнения лежат на мнимой оси; в этом случае вопрос об устойчивости или неустойчивости решения системы (25) решается значительно сложнее.

А. М. Ляпунов*) исследовал вопрос об устойчивости решений систем уравнений при довольно общих предположениях относительно вида этих уравнений.

В теории колебаний часто рассматривают уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{26}$$

---

*) Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.

Обозначим

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{27}$$

Тогда получаем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f(x, v). \tag{28}$$

Фазовой плоскостью для этой системы будет плоскость $(x, v)$. Траектории на фазовой плоскости дают геометрическое изображение зависимости скорости $v$ от координаты $x$ и наглядно качественно характеризуют изменение $x$ и $v$. Если точка $x=0$, $v=0$ является особой точкой, то она определяет положение равновесия.

Так, например, если особая точка системы уравнений есть центр, т. е. траектории на фазовой плоскости представляют собой замкнутые линии, окружающие начало координат, то движения, определяемые уравнением (26),— незатухающие колебательные движения. Если особая точка фазовой плоскости есть фокус (при этом $|x| \to 0, |v| \to 0$ при $t \to \infty$), то движения, определяемые уравнением (26),— затухающие колебания. Если особая точка есть узел или седло (и это единственная особая точка), то $x \to \pm\infty$ при $t \to \infty$. В этом случае движущаяся материальная точка уходит в бесконечность.

Если уравнение (26) линейное вида $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b\frac{dx}{dt}$, то система (28) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = ax + bv.$$

Это система вида (4). Точка $x=0$, $v=0$ есть особая точка, она определяет положение равновесия. Отметим, что переменная $x$— не обязательно механическое перемещение точки. Она может иметь различный физический смысл, например, обозначать величину, характеризующую электрические колебания.

## § 32. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Мы рассмотрим два метода численного решения дифференциального уравнения первого порядка. В этом параграфе рассмотрим метод Эйлера. Найдем приближенно решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Разделим отрезок $[x_0, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на $n$ равных частей (здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Обозначим

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, следовательно,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Обозначим

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

В каждой из точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x. \tag{2'}$$

При $x = x_0$ будем иметь

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0),\ \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x,$$

или

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,h.$$

В этом равенстве $x_0$, $y_0$, $h$ известны, следовательно, находим

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h.$$

При $x = x_1$ уравнение (2') примет вид

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h,$$

или

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h,\quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h.$$

Здесь известными являются $x_1$, $y_1$, $h$, а $y_2$ определяется.

Аналогично находим

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках $x_0$, $x_1, \ldots, x_n$ найдены. Соединяя на координатной плоскости точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$ отрезками прямой, получим ломаную — приближенное изображение интегральной кривой (рис. 291). Эта ломаная называется *ломаной Эйлера*.

Замечание. Обозначим через $y=\varphi_h(x)$ приближенное решение уравнения (1), соответствующее ломаной Эйлера при $\Delta x=h$. Можно доказать*), что если существует единственное решение $y=\varphi^*(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям и определенное на отрезке $[x_0, b]$, то $\lim\limits_{h\to 0}|\varphi_h(x)-\varphi^*(x)|=0$ при любом $x$ из отрезка $[x_0, b]$.

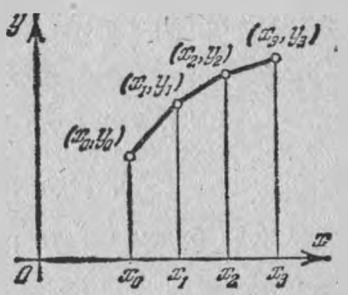


Рис. 291.

Пример. При $x=1$ найти приближенное значение решения уравнения

$$y'=y+x,$$

удовлетворяющего начальному условию $y_0=1$ при $x_0=0$.

Решение. Разделим отрезок [0, 1] на 10 частей точками $x_0=0$; 0,1; 0,2; ..., 1,0. Следовательно, $h=0{,}1$. Значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будем искать по формуле (2'):

$$\Delta y_k=(y_k+x_k)\,h,$$

или

$$y_{k+1}=y_k+(y_k+x_k)\,h.$$

Таким образом, получаем

$$y_1=1+(1+0)\cdot 0{,}1=1+0{,}1=1{,}1,$$
$$y_2=1{,}1+(1{,}1+0{,}1)\cdot 0{,}1=1{,}22,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В процессе решения составляем таблицу:

| $x_k$ | $y_k$ | $y_k+x_k$ | $\Delta y_k=(y_k+x_k)h$ |
|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | 1,000 | 1,000 | 0,100 |
| $x_1=0{,}1$ | 1,100 | 1,200 | 0,120 |
| $x_2=0{,}2$ | 1,220 | 1,420 | 0,142 |
| $x_3=0{,}3$ | 1,362 | 1,620 | 0,162 |
| $x_4=0{,}4$ | 1,524 | 1,924 | 0,1924 |
| $x_5=0{,}5$ | 1,7164 | 2,2164 | 0,2216 |
| $x_6=0{,}6$ | 1,9380 | 2,5380 | 0,2538 |
| $x_7=0{,}7$ | 2,1918 | 2,8918 | 0,2892 |
| $x_8=0{,}8$ | 2,4810 | 3,2810 | 0,3281 |
| $x_9=0{,}9$ | 2,8091 | 3,7091 | 0,3709 |
| $x_{10}=1{,}0$ | 3,1800 | | |

Мы нашли приближенное значение $y|_{x=1}=3{,}1800$. Точное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет

$$y=2e^x-x-1.$$

*) Доказательство см., например, в книге: Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.

Следовательно,

$$y|_{x=1} = 2(e-1) = 3{,}4366.$$

Абсолютная погрешность: 0,2566; относительная погрешность: $\frac{0.2566}{3.4366} = 0{,}075 \approx$ $\approx 8\%$.

## § 33. Разностный метод приближенного решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса

Снова будем искать решение уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Введем нужные для дальнейшего обозначения. Приближенные значения решения в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Первые разности, или разности первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \ldots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Вторые разности, или разности второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^2 y_{n-2} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}. \end{aligned}$$

Разности вторых разностей называются разностями третьего порядка и т. д. Через $y_0', y_1', \ldots, y_n'$ обозначим приближенные значения производных, через $y_0'', y_1'', \ldots, y_n''$ — приближенные значения вторых производных и т. д. Аналогично определяются первые разности производных

$$\Delta y_0' = y_1' - y_0', \quad \Delta y_1' = y_2' - y_1', \quad \ldots, \quad \Delta y_{n-1}' = y_n' - y_{n-1}',$$

вторые разности производных

$$\Delta^2 y_0' = \Delta y_1' - \Delta y_0', \quad \Delta^2 y_1' = \Delta y_2' - \Delta y_1', \quad \ldots, \quad \Delta^2 y_{n-2}' = \Delta y_{n-1}' - \Delta y_{n-2}'$$

и т. д.

Напишем далее формулу Тейлора для решения уравнения в окрестности точки $x = x_0$ (т. I, гл. IV, § 6, формула (6)):

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m. \tag{2}$$

В этой формуле $y_0$ известно, а значения $y_0', y_0'', \ldots$ производных

находятся из уравнения (1) следующим образом. Подставляя в правую часть уравнения (1) начальные значения $x_0$ и $y_0$, найдем $y_0'$:

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Дифференцируя члены уравнения (1) по $x$, получим

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Подставляя в правую часть значения $x_0$, $y_0$, $y_0'$, найдем

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\Big|_{x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0'}$$

Дифференцируя еще раз равенство (3) по $x$ и подставляя значения $x_0$, $y_0$, $y_0'$, $y_0''$, найдем $y_0'''$. Продолжая*) так, можем найти значения производных любого порядка при $x = x_0$. Все члены, кроме остаточного члена $R_m$, в правой части формулы (2) известны. Таким образом, пренебрегая остаточным членом, мы можем получить приближенные значения решения при любом значении $x$; их точность будет зависеть от величины $|x - x_0|$ и числа членов в разложении.

В рассмотренном ниже методе по формуле (2) определяют только несколько первых значений $y$, когда $|x - x_0|$ мало. Мы определим значения $y_1$ и $y_2$ при $x_1 = x_0 + h$ и при $x_2 = x_0 + 2h$, беря четыре члена разложения ($y_0$ известно на основании начальных данных):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''', \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0'''. \tag{4'}$$

Таким образом, будем считать, что известны три значения**) функции $y_0$, $y_1$, $y_2$. На основании этих значений, пользуясь уравнением (1), определяем

$$y_0' = f(x_0, y_0), \quad y_1' = f(x_1, y_1), \quad y_2' = f(x_2, y_2).$$

Зная $y_0'$, $y_1'$, $y_2'$, можно определить $\Delta y_0'$, $\Delta y_1'$, $\Delta^2 y_0'$. Результаты вычисления заносим в таблицу:

---

*) Мы в дальнейшем будем предполагать, что функция $f(x, y)$ столько раз дифференцируема по $x$ и по $y$, сколько требуется по ходу рассуждений.

**) Если бы мы стали находить решение с большей точностью, то потребовалось бы вычислять больше трех первых значений $y$. Подробно об этом см., например: Безикович Я. С. Приближенные вычисления.— М.: Гостехиздат, 1949.

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y'_0$ | | |
| | | | $\Delta y'_0$ | |
| $x_1 = x_0 + h$ | $y_1$ | $y'_1$ | | $\Delta^2 y'_0$ |
| | | | $\Delta y'_1$ | |
| $x_2 = x_0 + 2h$ | $y_2$ | $y'_2$ | | |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_{k-2} = x_0 + (k-2)\,h$ | $y_{k-2}$ | $y'_{k-2}$ | | |
| | | | $\Delta y'_{k-2}$ | |
| $x_{k-1} = x_0 + (k-1)\,h$ | $y_{k-1}$ | $y'_{k-1}$ | | $\Delta^2 y'_{k-2}$ |
| | | | $\Delta y'_{k-1}$ | |
| $x_k = x_0 + kh$ | $y_k$ | $y'_k$ | | |

Допустим теперь, что нам известны значения решения $y_0$, $y_1$, $y_2$, ..., $y_k$. На основании этих значений, пользуясь уравнением (1), мы можем вычислить значения производных $y'_0$, $y'_1$, $y'_2$, ..., $y'_k$, а следовательно, $\Delta y'_0$, $\Delta y'_1$, ..., $\Delta y'_{k-1}$ и $\Delta^2 y'_0$, $\Delta^2 y'_1$, ..., $\Delta^2 y'_{k-2}$. Определим значение $y_{k+1}$ по формуле Тейлора, полагая $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}_k + R_m.$$

Ограничимся в нашем случае четырьмя членами разложения:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k. \qquad (5)$$

В этой формуле неизвестными являются $y''_k$ и $y'''_k$, которые мы попытаемся определить через известные разности первого и второго порядков.

Предварительно представим по формуле Тейлора $y'_{k-1}$, полагая $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k, \tag{6}$$

и $y'_{k-2}$, полагая $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \tag{7}$$

Из равенства (6) находим

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \tag{8}$$

Вычитая из членов равенства (6) члены равенства (7), получим

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \tag{9}$$

Из (8) и (9) находим

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

или

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2}. \tag{10}$$

Подставляя выражение $y'''_k$ в равенство (8), получим

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2!}. \tag{11}$$

Итак, $y''_k$ и $y'''_k$ найдены. Подставляя выражения (10) и (11) в разложение (5), получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}. \tag{12}$$

Это и есть так называемая *формула Адамса* с четырьмя членами. Формула (12) дает возможность, зная $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$, определить $y_{k+1}$. Таким образом, зная $y_0$, $y_1$ и $y_2$, мы можем найти $y_3$ и далее $y_4$, $y_5$, ...

Замечание 1. Укажем без доказательства, что если существует единственное решение уравнения (1) на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальным условиям, то погрешность приближенных значений, определенных по формуле (12), по абсолютной величине не превосходит $Mh^4$, где $M$ — постоянная, зависящая от длины интервала и вида функции $f(x, y)$ и не зависящая от величины $h$.

Замечание 2. Если мы хотим получить бо́льшую точность вычисления, то следует брать больше, чем в разложении (5), членов, и формула (12) соответствующим образом изменится. Так,

если вместо формулы (5) мы возьмем формулу, содержащую справа пять членов, т. е. дополним членом порядка $h^4$, то вместо формулы (12) аналогичным путем получим формулу

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^2 y''_{k-3}.$$

Здесь $y_{k+1}$ определяется через значения $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$ и $y_{k-3}$. Таким образом, чтобы начать вычисления по этой формуле, нужно знать четыре первых значения решения $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$. При вычислении этих значений по формулам типа (4) следует брать пять членов разложения.

Пример 1. Найти приближенные значения решения уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$. Значения решения определить при $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Решение. Найдем сначала $y_1$ и $y_2$ по формулам (4) и (4'). Из уравнения и начальных данных получаем

$$y'_0 = (y + x)|_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Дифференцируя данное уравнение, получим

$$y'' = y' + 1.$$

Следовательно,

$$y''_0 = (y' + 1)|_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Дифференцируем еще раз:

$$y''' = y''.$$

Следовательно,

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

Подставляя в равенство (4) значения $y_0$, $y'_0$, $y''_0$ и $h = 0{,}1$, получим

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1 + \frac{0{,}1^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{0{,}1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1{,}1103.$$

Аналогично при $h = 0{,}2$ получим

$$y_2 = 1 + \frac{0{,}2}{1} \cdot 1 + \frac{0{,}2^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{0{,}2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1{,}2427.$$

Зная $y_0$, $y_1$, $y_2$, на основании уравнения находим

$$y'_0 = y_0 + x_0 = 1,$$
$$y'_1 = y_1 + x_1 = 1{,}1103 + 0{,}1 = 1{,}2103,$$
$$y'_2 = y_2 + x_2 = 1{,}2427 + 0{,}2 = 1{,}4427,$$
$$\Delta y'_0 = 0{,}2103, \quad \Delta y''_0 = 0{,}2324, \quad \Delta^2 y'_0 = 0{,}0221.$$

Полученные значения заносим в таблицу:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=1{,}0000$ | $y_0'=1$ | | |
| | | | $\Delta y_0'=0{,}2103$ | |
| $x_1=0{,}1$ | $y_1=1{,}1103$ | $y_1'=1{,}2103$ | | $\Delta^2 y_0'=0{,}0221$ |
| | | | $\Delta y_1'=0{,}2324$ | |
| $x_2=0{,}2$ | $y_2=1{,}2427$ | $y_2'=1{,}4427$ | | $\Delta^2 y_1'=0{,}0244$ |
| | | | $\Delta y_2'=0{,}2568$ | |
| $x_3=0{,}3$ | $y_3=1{,}3995$ | $y_3'=1{,}6995$ | | |
| $x_4=0{,}4$ | $y_4=1{,}5833$ | | | |

По формуле (12) находим $y_3$:

$$y_3=1{,}2427+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}4427+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2324+\frac{5\cdot 0{,}1}{12}\cdot 0{,}0221=1{,}3995.$$

Далее находим значения $y_3'$, $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$. Снова по формуле (12) находим $y_4$:

$$y_4=1{,}3995+\frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}6995+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2568+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0244=1{,}5833.$$

Точное выражение решения данного уравнения:

$$y=2e^x-x-1.$$

Следовательно, $y|_{x=0{,}4}=2e^{0{,}4}-0{,}4-1=1{,}58364$. Абсолютная погрешность: 0,0003; относительная погрешность: $\frac{0{,}0003}{1{,}5836}\approx 0{,}0002=0{,}02\%$. (Абсолютная погрешность значения $y_4$, вычисленного по методу Эйлера: 0,06; относительная погрешность: $0{,}038=3{,}8\%$.)

Пример 2. Найти приближенные значения решения уравнения

$$y'=y^2+x^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $y_0=0$ при $x_0=0$. Значения решения определить при $x=0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4.

Решение. Находим

$$y_0'=0^2+0^2=0,$$
$$y''|_{x=0}=(2yy'+2x)|_{x=0}=0,$$
$$y'''|_{x=0}=(2y'^2+2yy''+2)|_{x=0}=2.$$

По формулам (4) и (4′) получаем

$$y_1=\frac{0{,}1^3}{3!}\cdot 2=0{,}0003, \qquad y_2=\frac{0{,}2^3}{3!}\cdot 2=0{,}0027.$$

Из уравнения находим

$$y_0^{\cdot}=0, \quad y_1^{\cdot}=0{,}0100, \quad y_2^{\cdot}=0{,}0400.$$

На основании этих данных составляем первые строки таблицы, а затем значения $y_3$ и $y_4$ определяем по формуле (12).

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=0$ | $y_0^{\cdot}=0$ | | |
| | | | $\Delta y_0^{\cdot}=0{,}0100$ | |
| $x_1=0{,}1$ | $y_1=0{,}0003$ | $y_1^{\cdot}=0{,}0100$ | | $\Delta^2 y_0^{\cdot}=0{,}0200$ |
| | | | $\Delta y_1^{\cdot}=0{,}0300$ | |
| $x_2=0{,}2$ | $y_2=0{,}0027$ | $y_2^{\cdot}=0{,}0400$ | | $\Delta^2 y_1^{\cdot}=0{,}0201$ |
| | | | $\Delta y_2^{\cdot}=0{,}0501$ | |
| $x_3=0{,}3$ | $y_3=0{,}0090$ | $y_3^{\cdot}=0{,}0901$ | | |
| $x_4=0{,}4$ | $y_4=0{,}0213$ | | | |

Итак,

$$y_3=0{,}0027+\frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0400+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0300+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0200=0{,}0090,$$

$$y_4=0{,}0090+\frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0901+\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0501+\frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0201=0{,}02133.$$

Отметим, что первые верные четыре знака в $y_4$ таковы: $y_4=0{,}0213$. (Это можно получить другими, более точными методами, с оценкой погрешности.)

## § 34. Приближенный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотренные в §§ 32 и 33 методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений применимы и для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим

здесь разностный метод для решения систем уравнений. Рассуждения будем проводить для системы двух уравнений с двумя искомыми функциями.

Требуется найти решения системы уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \tag{2}$$

удовлетворяющие начальным условиям $y = y_0$, $z = z_0$ при $x = x_0$.

Будем определять значения функции $y$ и $z$ при значениях аргумента $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Пусть снова

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Приближенные значения функции обозначим

$$y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$$

и соответственно

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n.$$

Напишем рекуррентные формулы типа (12) § 33:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2}, \tag{4}$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2}. \tag{5}$$

Чтобы начать вычисления по этим формулам, нужно знать кроме заданных $y_0$ и $z_0$ еще $y_1, y_2$; $z_1, z_2$; эти значения находим по формулам типа (4) и (4′) § 33:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Для применения этих формул нужно знать $y'_0$, $y''_0$, $y'''_0$, $z'_0$, $z''_0$, $z'''_0$, к определению которых мы сейчас и приступим. Из уравнений (1) и (2) находим

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0), \qquad z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Дифференцируя уравнения (1) и (2) и подставляя значения $x_0$, $y_0$, $z_0$, $y_0'$ и $z_0'$, найдем

$$y_0'' = y''|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,y' + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,z'\right)\Big|_{x=x_0},$$

$$z_0'' = z''|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,y' + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,z'\right)\Big|_{x=x_0}.$$

Дифференцируя еще раз, найдем $y_0'''$ и $z_0'''$. Зная $y_1$, $y_2$, $z_1$, $z_2$, находим из данных уравнений (1) и (2) $y_1'$, $y_2'$, $z_1'$, $z_2'$, $\Delta y_0'$, $\Delta y_1'$, $\Delta^2 y_0$, $\Delta z_0'$, $\Delta z_1'$, $\Delta^2 z_0'$, после чего мы можем заполнить первые пять строк таблицы:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y_0'$ | | | $z_0$ | $z_0'$ | | |
| | | | $\Delta y_0'$ | | | | $\Delta z'$ | |
| $x_1$ | $y_1$ | $y_1'$ | | $\Delta^2 y_0'$ | $z_1$ | $z_1'$ | | $\Delta^2 z_0'$ |
| | | | $\Delta y_1'$ | | | | $\Delta z_1'$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | $y_2'$ | | $\Delta^2 y_1'$ | $z_2$ | $z_2'$ | | $\Delta^2 z_1'$ |
| | | | $\Delta y_2'$ | | | | $\Delta z_2'$ | |
| $x_3$ | $y_3$ | $y_3'$ | | | $z_3$ | $z_3'$ | | |

По формулам (4) и (5) найдем $y_3$ и $z_3$, а из уравнений (1) и (2) найдем $y_3'$ и $z_3'$. Вычислив $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$, $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$, снова по формулам (4) и (5) найдем $y_4$ и $z_4$ и т. д.

Пример 1. Найти приближенные значения решений системы

$$y' = z, \quad z' = y$$

с начальными условиями $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ при $x_0 = 0$. Вычислить значения решений при $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Решение. Из данных уравнений находим

$$y_0' = z|_{x=0} = 1, \qquad z_0' = y|_{x=0} = 0.$$

Дифференцируя данные уравнения, найдем

$$y_0''=y''|_{x=0}=z'|_{x=0}=0,$$
$$z_0''=z''|_{x=0}=y'|_{x=0}=1,$$
$$y_0'''=y'''|_{x=0}=z'|_{x=0}=1,$$
$$z_0'''=z'''|_{x=0}=y''|_{x=0}=0.$$

По формулам типа (4) и (5) находим

$$y_1=0+\frac{0,1}{1}\cdot 1+\frac{0,1^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{0,1^3}{3!}\cdot 1=0,1002,$$

$$y_2=0+\frac{0,2}{1}\cdot 1+\frac{0,2^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{0,2^3}{3!}\cdot 1=0,2013,$$

$$z_1=1+\frac{0,1}{1}\cdot 0+\frac{0,1^2}{1\cdot 2}\cdot 1+\frac{0,1^3}{3!}\cdot 0=1,0050,$$

$$z_2=1+\frac{0,2}{1}\cdot 0+\frac{0,2^2}{2!}\cdot 1+\frac{0,2^3}{3!}\cdot 0=1,0200.$$

На основании данных уравнений находим

$$y_1'=1,0050, \qquad z_1'=0,1002,$$
$$y_2'=1,0200, \qquad z_2'=0,2013,$$
$$\Delta y_0'=0,0050, \qquad \Delta z_0'=0,1002,$$
$$\Delta y_1'=0,0150, \qquad \Delta z_1'=0,1011,$$
$$\Delta^2 y_0'=0,0100, \qquad \Delta^2 z_0'=0,0009$$

и заполняем первые пять строк таблицы (см. с. 140).

Далее по формулам (4) и (5) находим

$$y_3=0,2013+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0200+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0150+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0100=0,3045,$$

$$z_3=1,0200+\frac{0,1}{1}\cdot 0,2013+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1011+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0009=1,0452$$

и аналогично

$$y_4=0,3045+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0452+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0252+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0102=0,4107,$$

$$z_4=1,0452+\frac{0,1}{1}\cdot 0,3045+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1032+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0021=1,0809.$$

Очевидно, что точные решения данной системы уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям, будут

$$y=\operatorname{sh} x, \qquad z=\operatorname{ch} x.$$

Поэтому пять верных после запятой знаков решений будут

$$y_4=\operatorname{sh} 0,4=0,41075, \qquad z_4=\operatorname{ch} 0,4=1,08107.$$

Замечание. Так как уравнения высших порядков и системы уравнений высших порядков во многих случаях сводятся к системе уравнений первого порядка, то изложенные методы применимы к решению этих задач.

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=0$ | $y_0'=1$ | | | $z_0=1$ | $z_0'=0$ | | |
| | | | $\Delta y_0''=0{,}0050$ | | | | $\Delta z_0''=0{,}1002$ | |
| $x_1=0{,}1$ | $y_1=0{,}1002$ | $y_1'=1{,}0050$ | | $\Delta^2 y_0''=0{,}0100$ | $z_1=1{,}0050$ | $z_1'=0{,}1002$ | | $\Delta^2 z_0''=0{,}0009$ |
| | | | $\Delta y_1''=0{,}0150$ | | | | $\Delta z_1''=0{,}1011$ | |
| $x_2=0{,}2$ | $y_2=0{,}2013$ | $y_2'=1{,}0200$ | | $\Delta^2 y_1''=0{,}0102$ | $z_2=1{,}0200$ | $z_2'=0{,}2013$ | | $\Delta^2 z_1''=0{,}0021$ |
| | | | $\Delta y_2''=0{,}0252$ | | | | $\Delta z_2'=0{,}1032$ | |
| $x_3=0{,}3$ | $y_3=0{,}3045$ | $y_3'=1{,}0452$ | | | $z_3=1{,}0452$ | $z_3'=0{,}3045$ | | |
| $x_4=0{,}4$ | $y_4=0{,}4107$ | | | | $z_4=1{,}0809$ | | | |

## Упражнения к главе XIII

Показать, что указанные функции, зависящие от произвольных постоянных, удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

| Функции | Дифференциальные уравнения |
|---|---|
| 1. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$. | $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. |
| 2. $y=Cx+C-C^2$. | $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+y=0$. |
| 3. $y^2=2Cx+C^2$. | $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$. |
| 4. $y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}$. | $xy\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}$. |
| 5. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$. | $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=0$. |
| 6. $y=(C_1+C_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$. | $\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=e^x$. |
| 7. $y=C_1e^{a\arcsin x}+C_2e^{-a\arcsin x}$. | $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$. |
| 8. $y=\frac{C_1}{x}+C_2$. | $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=0$. |

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

9. $y\,dx-x\,dy=0$. *Отв.* $y=Cx$. 10. $(1+u)\,v\,du+(1-v)\,u\,dv=0$. *Отв.* $\ln uv+u-v=C$. 11. $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$. *Отв.* $(1+y)(1-x)=C$. 12. $(t^3-xt^2)\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. *Отв.* $\frac{t+x}{tx}+\ln\frac{x}{t}=C$. 13. $(y-a)\,dx+x^2\,dy=0$. *Отв.* $y-a=Ce^{1/x}$. 14. $z\,dt-(t^2-a^2)\,dz=0$. *Отв.* $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$. 15. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Отв.* $x=\frac{y+C}{1-Cy}$. 16. $(1+s^2)\,dt-\sqrt{t}\,ds=0$. *Отв.* $2\sqrt{t}-\operatorname{arctg} s=C$.

17. $d\rho+\rho\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Отв.* $\rho=C\cos\theta$.

18. $\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi=0$. *Отв.* $\cos\varphi=C\cos\theta$.

19. $\sec^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\theta+\sec^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\varphi=0$. *Отв.* $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=C$.

20. $\sec^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+\sec^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Отв.* $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=C$.

21. $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Отв.* $\arcsin y-\operatorname{arctg} x=C$.

22. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Отв.* $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$.

23. $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$. *Отв.* $\operatorname{tg}^3 y=C(1-e^x)^3$.

24. $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. *Отв.* $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

### Задачи на составление дифференциальных уравнений

25. Доказать, что кривая, у которой угловой коэффициент касательной в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола. *Отв.* $y=ax^2+C$.

26. Найти такую кривую, проходящую через точку (0; —2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы. *Отв.* $y=e^x-3$.

27. Найти такую кривую, проходящую через точку (1; 1), чтобы угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки. *Отв.* $k(x-1)y-y+1=0$.

28. Найти такую кривую, для которой угловой коэффициент касательной в любой точке в $n$ раз более углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. *Отв.* $y=Cx^n$.

29. Через точку (2; 1) провести кривую, для которой касательная в любой точке совпадает с направлением радиус-вектора, проведенного из начала координат в ту же точку. *Отв.* $y=x/2$.

30. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла между радиус-вектором и касательной равен обратной величине радиус-вектора, взятой с обратным знаком. *Отв.* $r(\theta+C)=1$.

31. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла, образуемого радиус-вектором с касательной, равен квадрату радиус-вектора. *Отв.* $r^2=2(\theta+C)$.

32. Доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку, есть окружность.

33. Найти такую кривую, чтобы в каждой ее точке длина подкасательной равнялась удвоенной абсциссе. *Отв.* $y=C\sqrt{x}$.

34. Найти кривую, для которой радиус-вектор равен длине касательной между точкой касания и осью $x$.

Р е ш е н и е. По условиям задачи $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем два семейства кривых $y=Cx$ и $y=\frac{C}{x}$.

35. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20° С и тело в течение 20 мин охлаждается со 100° до 60° С, то через сколько времени его температура понизится до 30° С?

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение задачи $\frac{dT}{dt}=k(T-20)$. Интегрируя, находим $T-20=Ce^{kt}$; $T=100$ при $t=0$, $T=60$ при $t=20$, поэтому $C=80$, $40=Ce^{20k}$, $e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, следовательно, $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Полагая $T=30$, найдем $t=60$ мин.

36. В какое время $T$ вода вытечет через отверстие 0,5 см² на дне конической воронки высотой 10 см с углом при вершине $d=60°$?

Р е ш е н и е. Подсчитаем двумя способами объем воды, вытекшей за время между моментами $t$ и $t+\Delta t$. При постоянной скорости $v$ за 1 с через отверстие вытекает цилиндр воды с основанием 0,5 см² и высотой $v$, а за время $\Delta t$ вытекает объем воды $dv$, равный $-dv=-0{,}5v\,dt=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt$ *).

С другой стороны, вследствие утечки высота воды получает отрицательное «приращение» $dh$, и дифференциал объема вытекшей воды равен

$$-dv=\pi r^2\,dh=\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh=-0{,}3\sqrt{2gh}\,dt,$$

---

*) Скорость $v$ истечения воды из отверстия, находящегося на расстоянии $h$ от свободной поверхности, дается формулой $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g$ — ускорение силы тяжести.

отсюда

$$t=0{,}0315\left(10^{5/2}-h^{5/2}\right)+0{,}0732\left(10^{3/2}-h^{3/2}\right)+0{,}078\left(\sqrt{10}-\sqrt{h}\right).$$

Полагая $h=0$, получаем время истечения $T=12{,}5$ с.

37. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения $\omega$. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 60 об/мин. *Отв.* $\omega=100\ (^3/_5)^t$ об/мин.

38. Допустим, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря это давление равно 10 Н на 1 см$^2$, а на высоте 500 м оно равно 9,2 Н на 1 см$^2$.

Указание. Воспользоваться законом Бойля—Мариотта, в силу которого плотность газа пропорциональна давлению. Дифференциальное уравнение задачи $dp=-kp\,dh$, откуда $p=10e^{-0{,}00017h}$. *Отв.* $p=10e^{-0{,}00017h}$.

Проинтегрировать следующие однородные дифференциальные уравнения:

39. $(y-x)\,dx+(y+x)\,dy=0$. *Отв.* $y^2+2xy-x^2=C$. 40. $(x+y)\,dx+x\,dy=0$. *Отв.* $x^2+2xy=C$. 41. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(x^2+y^2)^{1/2}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C$. 42. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Отв.* $1+2Cy-C^2x^2=0$.

43. $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$. *Отв.* $(x+y)^2\,(2x+y)^3=C$. 44. $(2\sqrt{st}-s)\,dt+t\,ds=0$. *Отв.* $te^{\sqrt{s/t}}=C$, или $s=t\ln^2\dfrac{C}{t}$. 45. $(t-s)\,dt+t\,ds=0$. *Отв.* $te^{s/t}=C$, или $s=t\ln\dfrac{C}{t}$. 46. $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$. *Отв.* $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$.

47. $x\cos\dfrac{y}{x}\,(y\,dx+x\,dy)=y\sin\dfrac{y}{x}\,(x\,dy-y\,dx)$. *Отв.* $xy\cos\dfrac{y}{x}=C$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным:

48. $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$. *Отв.* $(x+y-1)^5\,(x-y-1)^2=C$.

49. $(x+2y+1)\,dx-(2x+4y+3)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=C$.

50. $(x+2y+1)\,dx-(2x-3)\,dy=0$. *Отв.* $\ln(2x-3)-\dfrac{4y+5}{2x-3}=C$.

51. Определить кривую, поднормаль которой есть среднее арифметическое между абсциссой и ординатой. *Отв.* $(x-y)^2\,(x+2y)=C$.

52. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси $Oy$, к радиус-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условиям задачи $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, откуда $\left(\dfrac{x}{C}\right)^m-\left(\dfrac{C}{x}\right)^m=\dfrac{2y}{x}$.

53. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси $Ox$, к радиус-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условию задачи $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, откуда $x^2+y^2=m^2\,(x-C)^2$.

54. Определить кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси $Oy$, равен $a\sec\theta$, где $\theta$—угол между радиус-вектором и осью $x$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ и по условию задачи $y-x\frac{dy}{dx}=a\sec\theta$, то получаем $y-x\frac{dy}{dx}=a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, откуда $y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right]$.

55. Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

Решение. Отрезок, отсекаемый нормалью на оси $Oy$, равен $y+\frac{x}{y'}$; поэтому по условию задачи имеем $y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $x^2=C(2y+C)$.

56. Найти форму зеркала, которое все лучи, выходящие из одной и той же точки $O$, отражало бы параллельно данному направлению.

Решение. За ось $x$ принимаем данное направление, точку $O$ — за начало координат. Пусть $OM$ — падающий луч, $MP$ — отраженный, $MQ$ — нормаль к искомой кривой: $\alpha=\beta$, $OM=OQ$, $NM=y$, $NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\operatorname{ctg}\beta=y\frac{dy}{dx}$, откуда $y\,dy=(-x+\sqrt{x^2+y^2})\,dx$; интегрируя, имеем $y^2=C^2+2Cx$.

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения:

57. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. *Отв.* $2y=(x+1)^4+C(x+1)^2$. 58. $y'-a\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$. *Отв.* $y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$. 59. $(x-x^3)y'+(2x^2-1)y-ax^3=0$. *Отв.* $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$. 60. $\frac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1$. *Отв.* $s=\sin t+C\cos t$. 61. $\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$. *Отв.* $s=\sin t-1+Ce^{-\sin t}$. 62. $y'-\frac{n}{x}y=e^xx^n$. *Отв.* $y=x^n(e^x+C)$. 63. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$. *Отв.* $x^ny=ax+C$. 64. $y'+y=e^{-x}$. *Отв.* $e^xy=x+C$. 65. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$. *Отв.* $y=x^2(1+Ce^{1/x})$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

66. $y'+xy=x^3y^3$. *Отв.* $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$. 67. $(1-y^2)y'-xy-axy^2=0$. *Отв.* $(C\sqrt{1-x^2}-a)y=1$. 68. $3y^2y'-ay^3-x-1=0$. *Отв.* $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$. 69. $y'(x^2y^3+xy)=1$. *Отв.* $x\left[(2-y^2)e^{y^2/2}+C\right]=e^{y^2/2}$. 70. $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$. *Отв.* $y(Cx^2+\ln x^2+1)=4$. 71. $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\sin x)$. *Отв.* $y=\frac{\operatorname{tg}x+\sec x}{\sin x+C}$.

Проинтегрировать следующие уравнения в полных дифференциалах:

72. $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$. *Отв.* $\frac{x^3}{3}+yx-y^2=C$. 73. $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$. *Отв.* $2y^2-xy+x^3=C$. 74. $(y^3-x)y'=y$. *Отв.* $y^4=4xy+C$. 75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$. *Отв.* $\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C$. 76. $2(3xy^2+2x^3)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$. *Отв.* $x^4+3x^2y^2+y^3=C$. 77. $\frac{x\,dx+(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$. *Отв.* $\ln(x+y)-\frac{x}{x+y}=C$. 78. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx=\frac{2y\,dy}{x^3}$. *Отв.* $x^2+y^2=Cx^3$. 79. $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(y-x)^2}=0$. *Отв.* $\frac{xy}{x-y}=C$. 80. $x\,dx+y\,dy=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$. *Отв.* $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$.

**81.** Определить кривую, обладающую тем свойством, что произведение квадрата расстояния любой ее точки от начала координат на отрезок, отсекаемый на оси абсцисс нормалью в этой точке, равно кубу абсциссы этой точки. *Отв.* $y^2(2x^2+y^2)=C$.

**82.** Найти огибающую следующих семейств линий: a) $y=Cx+C^2$. *Отв.* $x^2+4y=0$. b) $y=\frac{x}{C}+C^2$. *Отв.* $27x^2=4y^3$. c) $\frac{x}{C}-\frac{y}{C^3}=2$. *Отв.* $27y=x^3$. d) $C^2x+Cy-1=0$. *Отв.* $y^2+4x=0$. e) $(x-C)^3+(y-C)^2=C^2$. *Отв.* $x=0$; $y=0$. f) $(x-C)^2+y^2=4C$. *Отв.* $y^2=4x+4$. g) $(x-C)^2+(y-C)^2=4$. *Отв.* $(x-y)^2=8$. h) $Cx^2+C^2y=1$. *Отв.* $x^4+4y=0$.

**83.** Прямая перемещается так, что сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, сохраняет постоянную величину $a$. Составить уравнение огибающей всех положений прямой. *Отв.* $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ (парабола).

**84.** Найти огибающую семейства прямых, на которых оси координат отсекают отрезок постоянной длины $a$. *Отв.* $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**85.** Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат удвоенные ординаты параболы $y^2=2px$. *Отв.* $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$.

**86.** Найти огибающую семейства окружностей, центры которых лежат на параболе $y^2=2px$, причем все окружности семейства проходят через вершину этой параболы. *Отв.* Циссоида $x^3+y^2(x+p)=0$.

**87.** Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат перпендикулярные к оси $x$ хорды эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. *Отв.* $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**88.** Найти эволюту эллипса $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ как огибающую его нормалей. *Отв.* $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$.

Проинтегрировать следующие уравнения (уравнения Лагранжа):

**89.** $y=2xy'+y'^2$. *Отв.* $x=\frac{C}{3p^2}-\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2C-p^3}{3p}$. **90.** $y=xy'^2+y'^2$. *Отв.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Особое решение: $y=0$. **91.** $y=x(1+y')+(y')^2$. *Отв.* $x=Ce^{-p}-2p+2$, $y=C(p+1)e^{-p}-p^2+2$. **92.** $y=yy'^2+2xy'$. *Отв.* $4Cx=4C^2-y^2$. **93.** Найти кривую, имеющую постоянную нормаль. *Отв.* $(x-C)^2+y^2=a^2$. Особое решение: $y=\pm a$.

Проинтегрировать данные уравнения Клеро:

**94.** $y=xy'+y'-y'^2$. *Отв.* $y=Cx+C-C^2$. Особое решение: $4y=(x+1)^2$. **95.** $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$. *Отв.* $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$. Особое решение: $y^2-x^2=1$. **96.** $y=xy'+y'$. *Отв.* $y=Cx+C$. **97.** $y=xy'+\frac{1}{y'}$. *Отв.* $y=Cx+\frac{1}{C}$. Особое решение: $y^2=4x$. **98.** $y=xy'-\frac{1}{y'^2}$. *Отв.* $y=Cx-\frac{1}{C^2}$. Особое решение: $y^3=-\frac{27}{4}x^2$.

**99.** Площадь треугольника, образованного касательной к искомой кривой и осями координат, есть величина постоянная. Найти кривую. *Отв.* Равнобокая гипербола $4xy=\pm a^2$. Кроме того, любая прямая семейства $y=Cx\pm a\sqrt{C}$.

**100.** Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину $a$. *Отв.* $y=Cx\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Особое решение: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**101.** Найти кривую, касательные к которой образуют на осях отрезки, сумма которых равна $2a$. *Отв.* $y=Cx-\frac{2aC}{1-C}$. Особое решение: $(y-x-2a)^2=8ax$.

**102.** Найти кривые, для которых произведение расстояния любой касательной до двух данных точек постоянно. *Отв.* Эллипсы и гиперболы. (Ортогональные и изогональные траектории.)

**103.** Найти ортогональные траектории семейства кривых $y=ax^n$. *Отв.* $x^2+ny^2=C$.

**104.** Найти ортогональные траектории семейства парабол $y^2=2p(x-\alpha)$ ($\alpha$ — параметр семейства). *Отв.* $y=Ce^{-x/p}$.

**105.** Найти ортогональные траектории семейства кривых $x^2-y^2=\alpha$ ($\alpha$ — параметр). *Отв.* $y=C/x$.

**106.** Найти ортогональные траектории семейства окружностей $x^2+y^2=2ax$. *Отв.* Окружности: $y=C(x^2+y^2)$.

**107.** Найти ортогональные траектории равных парабол, касающихся в вершине данной прямой. *Отв.* Если $2p$ — параметр парабол и данная прямая взята за ось $Oy$, то уравнение траектории будет $y+C=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2}$.

**108.** Найти ортогональные траектории циссоид $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. *Отв.* $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$.

**109.** Найти ортогональные траектории лемнискат $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)a^2$. *Отв.* $(x^2+y^2)^2=Cxy$.

**110.** Найти изогональные траектории семейства кривых $x^2=2a(y-x\sqrt{3})$, где $a$ — переменный параметр, если постоянный угол, который образуют траектории с линиями семейства, равен $\omega=60°$.

Р е ш е н и е. Находим дифференциальное уравнение семейства $y'=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}$ и заменяем $y'$ выражением $q=\frac{y'-\operatorname{tg}\omega}{1+y'\operatorname{tg}\omega}$. Если $\omega=60°$, то $q=\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}y'}$, и мы получаем дифференциальное уравнение $\frac{y'-\sqrt{3}}{1+y'\sqrt{3}}=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}$. Общий интеграл $y^2=C(x-y\sqrt{3})$ дает искомое семейство траекторий.

**111.** Найти изогональные траектории семейства парабол $y^2=4Cx$, когда $\omega=45°$. *Отв.* $y^2-xy+2x^2=Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$.

**112.** Найти изогональные траектории семейства прямых $y=Cx$ для случая $\omega=30°$, $45°$. *Отв.* Логарифмические спирали $x^2+y^2=e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; $x^2+y^2=e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

**113.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Исключить $C_1$ и $C_2$. *Отв.* $y''-y=0$.

**114.** Написать дифференциальное уравнение всех окружностей, лежащих в одной плоскости. *Отв.* $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.

**115.** Написать дифференциальное уравнение всех центральных кривых второго порядка, главные оси которых совпадают с осями $Ox$, $Oy$. *Отв.* $x(yy''+y'^2)-y'y=0$.

**116.** Даны дифференциальное уравнение $y'''-2y''-y'+2y=0$ и его общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти частное решение, если при $x=0$ имеем $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$. *Отв.* $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

**117.** Даны дифференциальное уравнение $y''=\frac{1}{2y'}$ и его общее решение $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$.

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти интегральную кривую, проходящую через точку (1; 2), если касательная в этой точке составляет с положительным направлением оси $Ox$ угол 45°. *Отв.* $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Проинтегрировать некоторые простейшие типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка.

**118.** $xy'''=2$. *Отв.* $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=1$, $y=1$, $y'=1$, $y''=3$. *Отв.* $y=x^2\ln x+1$. **119.** $y^{(n)}=x^m$. *Отв.* $y=\frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.

**120.** $y''=a^2y$. *Отв.* $ax=\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1}\right)+C_2$ или $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$. **121.** $y''=a/y^3$. *Отв.* $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

В примерах 122—125 выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=0$, $y=-1$, $y'=0$.

**122.** $xy''-y'=x^2e^x$. *Отв.* $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Частное решение: $y=e^x(x-1)$. **123.** $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. *Отв.* $y+C_1\ln y=x+C_2$. Частное решение: $y=-1$. **124.** $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. *Отв.* $y=C_2+C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Частное решение: $y=2\sin x-\sin x\cos x-x-1$. **125.** $(y'')^2+(y')^2=a^2$. *Отв.* $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Частные решения: $y=a-1-a\cos x$, $y=a\cos x-(a+1)$. (Указание. Параметрическая форма $y''=a\cos t$, $y'=a\sin t$.) **126.** $y''=\frac{1}{2y'}$. *Отв.* $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. **127.** $y'''=y''^2$. *Отв.* $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. **128.** $y'y'''-3y''^2=0$. *Отв.* $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

**129.** $y''=9y$. *Отв.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **130.** $y''+y=0$. *Отв.* $y=A\cos x+B\sin x$. **131.** $y''-y'=0$. *Отв.* $y=C_1+C_2e^x$. **132.** $y''+12y=7y'$. *Отв.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. **133.** $y''-4y'+4y=0$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **134.** $y''+2y'+10y=0$. *Отв.* $y=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$. **135.** $y''+3y'-2y=0$. *Отв.* $y=C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$. **136.** $4y''-12y'+9y=0$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)e^{3x/2}$.

**137.** $y''+y'+y=0$. *Отв.* $y=e^{-x/2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

**138.** Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти движение, которое получит один груз, если другой оборвется. *Отв.* $x=a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$, где $a$ есть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя.

**139.** Материальная точка массы $m$ притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Множитель пропорциональности равен $k$. Расстояние между центрами равно $2c$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии $a$ от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точки. *Отв.* $x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$.

**140.** $y^{IV}-5y''+4y=0$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **141.** $y'''-2y''-y'+2y=0$. *Отв.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+C_3e^{-x}$. **142.** $y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^{ax}$. **143.** $y^V-4y'''=0$. *Отв.* $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{2x}+C_5e^{-2x}$. **144.** $y^{IV}+2y''+9y=0$. *Отв.* $y=(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)\,e^{-x}+(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x)\,e^x$. **145.** $y^{IV}-8y''+16y=0$. *Отв.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3xe^{2x}+C_4xe^{-2x}$. **146.** $y^{IV}+y=0$. *Отв.* $y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

**147.** $y^{IV}-a^4y=0$. Найти общее решение и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=0$, $y''=-a^2$, $y'''=0$ при $x_0=0$. *Отв.* Общее решение: $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. Частное решение: $y_0=\cos ax$.

Проинтегрировать следующие неоднородные линейные дифференциальные уравнения (найти общее решение):

**148.** $y''-7y'+12y=x$. *Отв.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{12x+7}{144}$. **149.** $s''-a^2s=t+1$. *Отв.* $s=C_1e^{at}+C_2e^{-at}-\frac{t+1}{a^2}$. **150.** $y''+y'-2y=8\sin 2x$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{5}(6\sin 2x+2\cos 2x)$. **151.** $y''-y=5x+2$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-5x-2$. **152.** $s''-2as'+a^2s=e^t$ $(a\neq 1)$. *Отв.* $s=C_1e^{at}+C_2te^{at}+\frac{e^t}{(a-1)^2}$. **153.** $y''+6y'+5y=e^{2x}$. *Отв.* $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{21}e^{2x}$. **154.** $y''+9y=6e^{3x}$. *Отв.* $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{3}e^{3x}$. **155.** $y''-3y'=2-6x$. *Отв.* $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. **156.** $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$. *Отв.* $y=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{e^{-x}}{41}(5\cos x-4\sin x)$. **157.** $y''+4y=2\sin 2x$. *Отв.* $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x-\frac{x}{2}\cos 2x$. **158.** $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)\,e^x+C_3e^{2x}-x-4$. **159.** $y^{IV}-a^4y=5a^4e^{ax}\sin ax$. *Отв.* $y=(C_1-\sin ax)\,e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **160.** $y^{IV}+2a^2y''+a^4y=8\cos ax$. *Отв.* $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\frac{x^2}{a^2}\cos ax$.

**161.** Найти интегральную кривую уравнения $y''+k^2y=0$, проходящую через точку $M(x_0;\ y_0)$ и касающуюся в точке $M$ прямой $y=ax$. *Отв.* $y=y_0\cos k(x-x_0)+\frac{a}{k}\sin k(x-x_0)$.

**162.** Найти решение уравнения $y''+2hy'+n^2y=0$, удовлетворяющее условиям $y=a$, $y'=C$ при $x=0$. *Отв.* $y=e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x+\frac{C+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\times\sin\sqrt{n^2-h^2}\,x\right)$ при $h<n$; $y=e^{-hx}[(C+ah)x+a]$ при $h=n$; $y=\frac{C+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h-\sqrt{h^2-n^2})x}-\frac{C+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}$ при $h>n$.

**163.** Найти решение уравнения $y''+n^2y=h\sin px$ $(p\neq n)$, удовлетворяющее условиям $y=a$, $y'=C$ при $x=0$. *Отв.* $y=a\cos nx+\dfrac{C(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\sin nx+\dfrac{h}{n^2-p^2}\sin px$.

**164.** Груз массой 4 кг привешен к пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения этого груза, полагая, что верхний конец пружины совершает гармоническое колебание, закон которого $y=\sin\sqrt{100g}t$, где $y$ измеряется по вертикали.

Р е ш е н и е. Обозначая через $x$ вертикальную координату груза, считаемую от положения покоя, имеем

$$\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y-l),$$

где $l$ — длина пружины в свободном состоянии и $k=400$, как легко видеть из начальных условий. Отсюда $\dfrac{d^2x}{dt^2}+100gx=100g\sin\sqrt{100g}t+100lg$. Частный интеграл этого уравнения мы должны искать в виде

$$t(C_1\cos\sqrt{100g}t+C_2\sin\sqrt{100g}t)+l,$$

так как первый член правой части уравнения входит в решение однородного уравнения.

**165.** В условиях задачи 139 начальная скорость равна $v_0$ и направление перпендикулярно к прямой, соединяющей центры. Найти траектории.

Р е ш е н и е. Если начало координат взять в середине расстояния между центрами, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=k(C-x)-k(C+x)=-2kx$, $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2ky$. Начальные данные при $t=0$:

$$x=a,\ \frac{dx}{dt}=0,\ y=0,\ \frac{dy}{dt}=v_0.$$

Интегрируя, находим

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right),\quad y=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

Отсюда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2 2k}{mv_0^2}=1$ (эллипс).

**166.** Горизонтальная трубка вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Шар, помещенный внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость $v_0$ (вдоль трубки).

У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение движения есть $\dfrac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r$. Начальные данные: $r=0$, $\dfrac{dr}{dt}=v_0$ при $t=0$. Интегрируя, находим $r=\dfrac{v_0}{2\omega}[e^{\omega t}-e^{-\omega t}]$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

**167.** $y''-7y'+6y=\sin x$. *Отв.* $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\dfrac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

**168.** $y''+y=\sec x$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$.

**169.** $y''+y=\dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$.

Проинтегрировать следующие уравнения различных типов:

170. $yy''=y'^2+1$. *Отв.* $y=\frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1(x-C_2)}+e^{-C_1(x-C_2)}\right]$. 171. $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Отв.* $\frac{xy}{x-y}=C$. 172. $y=xy'^2+y'^2$. *Отв.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Особые решения: $y=0$, $x+1=0$. 173. $y''+y=\sec x$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$. 174. $(1+x^2)\,y'-xy-a=0$. *Отв.* $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$.

175. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x$. *Отв.* $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$. 176. $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$. *Отв.* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$. 177. $xy'+y-y^2\ln x=0$. *Отв.* $(\ln x+1+Cx)\,y=1$. 178. $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dy=0$. *Отв.* $2x+y-3\ln(x+y+1)=C$. 179. $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$. *Отв.* $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$.

Проинтегрировать следующие системы уравнений:

180. $\frac{dx}{dt}=y+1$, $\frac{dy}{dt}=x+1$. Выделить частные решения, удовлетворяющие начальным условиям $x=-2$, $y=0$ при $t=0$. *Отв.* $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$, $x=C_1e^t-C_2e^{-t}-1$. Частное решение: $x^*=-e^{-t}-1$, $y^*=e^{-t}-1$.

181. $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=x-y$. Выделить частные решения, удовлетворяющие начальным условиям $x=1$, $y=1$ при $t=0$. *Отв.* $y=C_1\cos t+C_2\sin t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t$. Частное решение: $x^*=\cos t-\sin t$, $y^*=\cos t$.

182. $\begin{cases}4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t,\\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t.\end{cases}$ *Отв.* $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-2t}+\cos t$.

183. $\begin{cases}\frac{d^2y}{dt^2}=x,\\ \frac{d^2x}{dt^2}=y.\end{cases}$ *Отв.* $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$.

184. $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=e^t,\\ \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=1.\end{cases}$ *Отв.* $x=C_1+C_2t+C_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t$, $y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-\frac{1}{2}(C_2-1)\,t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+\frac{1}{24}t^4-e^t$.

185. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=z-y,\\ \frac{dz}{dx}=-y-3z.\end{cases}$ *Отв.* $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$, $z=(C_2-C_1-C_2x)\,e^{-2x}$.

186. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+z=0,\\ \frac{dz}{dx}+4y=0.\end{cases}$ *Отв.* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $z=-2(C_1e^{2x}-C_2e^{-2x})$.

187. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+2y+z=\sin x,\\ \frac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x.\end{cases}$ *Отв.* $y=C_1+C_2x+2\sin x$, $z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x$.

188. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z, \\ \frac{dy}{dt}=x+z, \\ \frac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$ *Отв.* $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$, $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$, $z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$.

189. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}. \end{cases}$ *Отв.* $z=C_2e^{C_1x}$, $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$.

190. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx}=\frac{x}{y^2}. \end{cases}$ *Отв.* $\frac{z}{y}=C_1$, $zy^2-\frac{3}{2}x^2=C_2$.

Исследовать, является ли решение $x=0$, $y=0$ устойчивым для следующих систем дифференциальных уравнений:

191. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-3y, \\ \frac{dy}{dt}=5x+6y. \end{cases}$ *Отв.* Неустойчиво.

192. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-4x-10y, \\ \frac{dy}{dt}=x-2y. \end{cases}$ *Отв.* Устойчиво.

193. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=12x+18y, \\ \frac{dy}{dt}=-8x-12y. \end{cases}$ *Отв.* Неустойчиво.

194. Найти приближенные значения решения уравнения $y'=y^2+x$, удовлетворяющего начальному условию $y=1$ при $x=0$. Значения решения найти при значениях $x=0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$. *Отв.* $y(0{,}5)=2{,}235$.

195. Найти приближенное значение $y|_{x=1{,}4}$ решения уравнения

$$y'+\frac{1}{x}y=e^x,$$

удовлетворяющего начальному условию $y=1$ при $x=1$. Сравнить полученный результат с точным решением.

196. Найти приближенные значения $x|_{t=1{,}4}$ и $y|_{t=1{,}4}$ решений системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y-x, \qquad \frac{dy}{dt}=-x-3y,$$

удовлетворяющих начальным условиям $x=0$, $y=1$ при $t=1$. Сравнить полученные значения с точными.

ГЛАВА XIV

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Двойной интеграл

Рассмотрим в плоскости $Oxy$ замкнутую*) область $D$, ограниченную линией $L$.

Пусть в области $D$ задана непрерывная функция

$$z = f(x, y).$$

Разобьем область $D$ какими-нибудь линиями на $n$ частей $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, $\Delta S_3$, ..., $\Delta S_n$ (рис. 292), которые будем называть площадками. Чтобы не вводить новых символов, будем обозначать через $\Delta S_1$, ..., $\Delta S_n$ не только названия соответствующих площадок, но и их площади. В каждой из площадок $\Delta S_i$ (внутри или на границе — безразлично) возьмем точку $P_i$; тогда будем иметь $n$ точек $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$, ..., $f(P_n)$ значения функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i)\,\Delta S_i$:



Рис. 292.

$$V_n = f(P_1)\,\Delta S_1 + f(P_2)\,\Delta S_2 + \ldots$$

$$\ldots + f(P_n)\,\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i. \qquad (1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области $D$.

Если $f \geqslant 0$ в области $D$, то каждое слагаемое $f(P_i)\,\Delta S_i$ можно представить геометрически как объем малого цилиндра, основание которого есть $\Delta S_i$, а высота $f(P_i)$.

Сумма $V_n$ есть сумма объемов указанных элементарных цилиндров, т. е. объем некоторого «ступенчатого» тела (рис. 293).

*) Область $D$ называется *замкнутой*, если она ограничена замкнутой линией, и точки, лежащие на границе, считаются принадлежащими области $D$.



Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, составленных с помощью функции $f(x, y)$ для данной области $D$:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_k}, \ldots \qquad (2)$$

при различных способах разбиения области $D$ на части $\Delta S_i$. Будем предполагать, что максимальный диаметр площадок $\Delta S_i$ стремится к нулю при $n_k \to \infty$. При этом оказывается справедливым следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

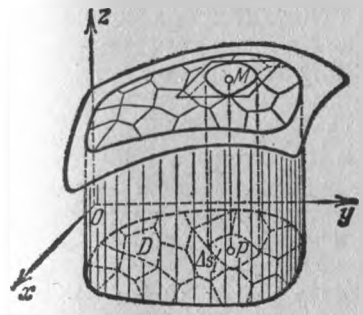


Рис. 293.

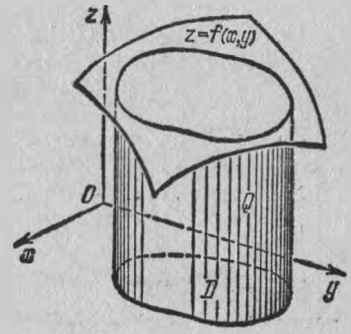


Рис. 294.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D$, то существует предел последовательности (2) интегральных сумм (1), если максимальный диаметр площадок $\Delta S_i$ стремится к нулю, а $n \to \infty$. Этот предел один и тот же для любой последовательности вида (2), т. е. он не зависит ни от способов разбиения области $D$ на площадки $\Delta S_i$, ни от выбора точки $P_i$ внутри площадки $\Delta S_i$.*

Этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области $D$ и обозначается так: $\iint\limits_D f(P)\,dS$ или $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, т. е.

$$\lim_{\operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Здесь область $D$ называется *областью интегрирования*.

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области $D$ равен объему тела $Q$, ограниченного поверхностью, образующие которой параллельны оси $Oz$, а направляющей служит граница области $D$ (рис. 294).

Рассмотрим, далее, следующие теоремы о двойном интеграле.

Теорема 2. *Двойной интеграл от суммы двух функций $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$ по области $D$ равен сумме двух двойных интег-*

*ралов по области D от каждой из функций в отдельности:*

$$\iint\limits_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\, dS = \iint\limits_D \varphi(x, y)\, ds + \iint\limits_D \psi(x, y)\, dS.$$

Теорема 3. *Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла: если* $a = \text{const}$, *то*

$$\iint\limits_D a\varphi(x, y)\, dS = a \iint\limits_D \varphi(x, y)\, dS.$$

Доказательство обеих этих теорем приводится совершенно так же, как доказательство соответствующих теорем для определенного интеграла (см. т. I, гл. XI, § 3).

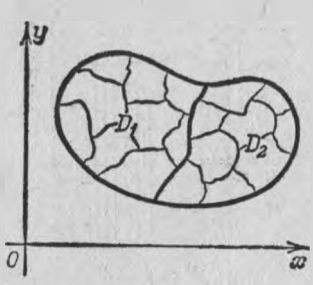


Рис. 295.

Теорема 4. *Если область D разбита на две области* $D_1$ *и* $D_2$ *без общих внутренних точек и функция* $f(x, y)$ *непрерывна во всех точках области D, то*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Доказательство. Интегральную сумму по области $D$ можно представить в виде (рис. 295)

$$\sum_D f(P_i)\, \Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\, \Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\, \Delta S_i, \qquad (4)$$

где первая сумма содержит слагаемые, соответствующие площадкам области $D_1$, вторая — слагаемые, соответствующие площадкам области $D_2$. В самом деле, так как двойной интеграл не зависит от способа разбиения, то мы производим разбиение области $D$ так, что общая граница областей $D_1$ и $D_2$ является границей площадок $\Delta S_i$. Переходя в равенстве (4) к пределу при $\Delta S_i \to 0$, получим равенство (3). Очевидно, что эта теорема справедлива для любого числа слагаемых.

## § 2. Вычисление двойного интеграла

Пусть область $D$, лежащая в плоскости $Oxy$, такова, что всякая прямая, параллельная одной из координатных осей, например оси $Oy$, и проходящая через внутреннюю*) точку

*) Под *внутренней* точкой области мы подразумеваем точку, не лежащую на границе области.

области, пересекает границу области в двух точках $N_1$ и $N_2$ (рис. 296).

Мы предположим, что в рассматриваемом случае область $D$ ограничена линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, причем $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$, $a<b$, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Такую область мы будем называть *правильной в направлении оси Oy*. Аналогично определяется область, *правильная в направлении оси Ox*.

Область, правильную как в направлении оси $Ox$, так и в направлении оси $Oy$, мы будем называть просто *правильной областью*. На рис. 296 показана именно правильная область $D$.

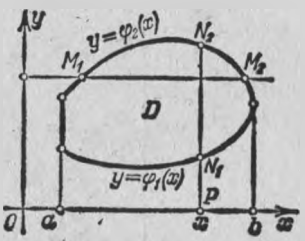


Рис. 296.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D$.

Рассмотрим выражение

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx,$$

которое мы будем называть *двукратным* интегралом от функции $f(x, y)$ по области $D$. В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причем интегрирование производится по $y$, а $x$ считается постоянным. В результате интегрирования получится непрерывная *) функция от $x$:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Эту функцию мы интегрируем по $x$ в пределах от $a$ до $b$:

$$I_D=\int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

В результате получается некоторое постоянное число.

Пример. Требуется вычислить двукратный интеграл

$$I_D=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\right)dx.$$

Решение. Вычисляем сначала внутренний интеграл (стоящий в скобках):

$$\Phi(x)=\int_0^{x^2}(x^2+y^2)\,dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2}=x^2x^2+\frac{(x^2)^3}{3}=x^4+\frac{x^3}{3}.$$

*) Мы здесь не доказываем того, что функция $\Phi(x)$ непрерывна.

Интегрируя полученную функцию в пределах от 0 до 1, находим

$$\int_0^1 \left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{3\cdot 7}\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

Определим область $D$. В данном случае в качестве $D$ рассматривается область, ограниченная линиями (рис. 297) $y=0$, $y=x^2$, $x=0$, $x=1$.

Может случиться, что область $D$ такова, что одна из функций $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ не может быть задана одним аналитическим выражением на всем участке изменения $x$ (от $x=a$ до $x=b$).

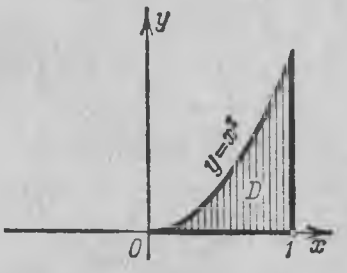



Рис. 297.

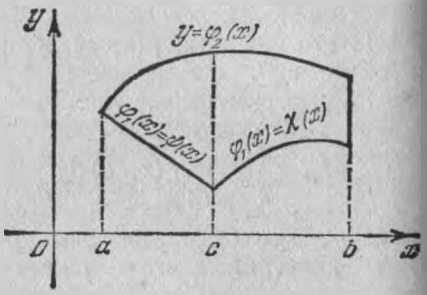



Рис. 298.

Пусть, например, $a<c<b$, причем $\varphi_1(x)=\psi(x)$ на отрезке $[a, c]$, $\varphi_1(x)=\chi(x)$ на отрезке $[c, b]$, где $\psi(x)$ и $\chi(x)$ — функции, заданные аналитически (рис. 298). Тогда двукратный интеграл запишется следующим образом:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx=\int_a^c\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_a^c\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Первое из этих равенств написано на основании известного свойства определенного интеграла, а второе — в силу того, что на участке $[a, c]$ имеем $\varphi_1(x)\equiv\psi(x)$, а на участке $[c, b]$ имеем $\varphi_1(x)\equiv\chi(x)$.

Аналогичная запись для двукратного интеграла имела бы место и в том случае, если бы функция $\varphi_2(x)$ задавалась различными аналитическими выражениями на различных участках отрезка $[a, b]$.

Установим некоторые свойства двукратного интеграла.

Свойство 1. *Если правильную в направлении оси Oy область $D$ разбить на две области $D_1$ и $D_2$ прямой, параллельной оси Oy или оси Ox, то двукратный интеграл $I_D$ по области $D$ будет равен*

*сумме таких же интегралов по областям $D_1$ и $D_2$, т. е.*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{1}$$

Доказательство. а) Пусть прямая $x = c\,(a < c < b)$ разбивает область $D$ на две правильные в направлении оси $Oy$ области *) $D_1$ и $D_2$. Тогда

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^c \Phi(x)\,dx + \int_c^b \Phi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^c \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx + \int_c^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

б) Пусть прямая $y = h$ разбивает область $D$ на две правильные в направлении оси $Oy$ области $D_1$ и $D_2$ так, как изображено на рис. 299. Обозначим через $M_1$ и $M_2$ точки пересечения прямой $y = h$ с границей $L$ области $D$. Абсциссы этих точек обозначим через $a_1$ и $b_1$.

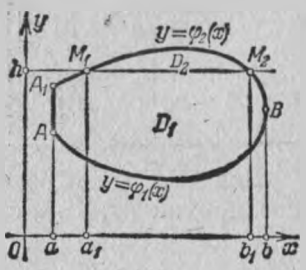


Рис. 299.

Область $D_1$ ограничена непрерывными линиями:

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) кривой $A_1M_1M_2B$, уравнение которой условно запишем в форме

$$y = \varphi_1^*(x),$$

имея при этом в виду, что $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant a_1$ и при $b_1 \leqslant x \leqslant b$ и что

$$\varphi_1^*(x) = h \quad \text{при} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1;$$

3) прямыми $x = a$, $x = b$.

Область $D_2$ ограничена линиями $y = \varphi_1^*(x)$, $y = \varphi_2(x)$, где $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$.

Напишем тождество, применяя к внутреннему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\,dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\,dy \right) dx + \int_a^b \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

*) Тот факт, что часть границы области $D_1$ (и области $D_2$) является куском вертикальной прямой, не мешает этой области быть правильной в направлении оси $Oy$: ведь для того, чтобы область была правильной, необходимо только, чтобы всякая вертикальная прямая, проходящая через внутреннюю точку области, имела с границей не более двух общих точек.

Последний интеграл разобьем на три интеграла, применяя к внешнему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_{b_1}^{b} \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx;$$

так как $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ на отрезке $[a, a_1]$ и на отрезке $[b_1, b]$, то первый и третий интегралы тождественно равны нулю. Поэтому

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Здесь первый интеграл есть двукратный интеграл по области $D_1$, второй — по области $D_2$. Следовательно,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Доказательство будет аналогично при любом положении секущей прямой $M_1M_2$. Если прямая $M_1M_2$ разобьет область $D$ на три или большее число областей, то получим соотношение, аналогичное соотношению (1), в правой части которого будет стоять соответствующее число слагаемых.

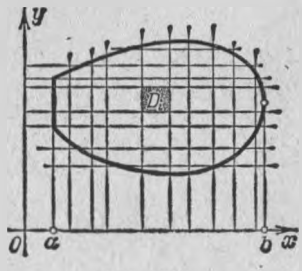


Рис. 300.

Следствие. Каждую из полученных областей мы можем прямой, параллельной оси $Oy$ или оси $Ox$, снова разбить на правильные в направлении оси $Oy$ области и к ним применить равенство (1). Таким образом, область $D$ можно разбить прямыми, параллельными осям координат, на любое число правильных областей $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_i$, и при этом будет справедливо утверждение, что *двукратный интеграл по области D равен сумме двукратных интегралов по частичным областям, т. е.* (рис. 300)

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_i}. \qquad (1)$$

Свойство 2 (оценка двукратного интеграла). *Пусть m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D. Обозначим через S площадь области D. Тогда имеет место соотношение*

$$mS \leqslant \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant MS. \qquad (3)$$

Доказательство. Произведем оценку внутреннего интеграла, обозначив его через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\leqslant\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\,dy=M[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)].$$

Тогда

$$I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx\leqslant\int\limits_a^b M[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx=MS,$$

т. е.

$$I_D\leqslant MS. \tag{3'}$$

Аналогично,

$$\Phi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\geqslant\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\,dy=m[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)],$$

$$I_D=\int\limits_a^b\Phi(x)\,dx\geqslant\int\limits_a^b m[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx=mS,$$

т. е.

$$I_D\geqslant mS. \tag{3''}$$

Из неравенств (3') и (3'') и следует соотношение (3):

$$mS\leqslant I_D\leqslant MS.$$

В следующем параграфе мы выясним геометрический смысл этой теоремы.

Свойство 3 (теорема о среднем). *Двукратный интеграл $I_D$ от непрерывной функции $f(x,\ y)$ по области $D$ с площадью $S$ равен произведению площади $S$ на значение функции в некоторой точке $P$ области $D$*, т. е.

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx=f(P)\,S. \tag{4}$$

Доказательство. Из соотношения (3) получаем

$$m\leqslant\frac{1}{S}I_D\leqslant M.$$

Число $\frac{1}{S}I_D$ заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x,\ y)$ в области $D$. В силу непрерывности функции $f(x,\ y)$ она принимает в некоторой точке $P$ области $D$ значение, равное числу $\frac{1}{S}I_D$, т. е.

$$\frac{1}{S}I_D=f(P),$$

откуда

$$I_D=f(P)\,S. \tag{5}$$

## § 3. Вычисление двойного интеграла (продолжение)

Теорема. *Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области $D$ равен двукратному интегралу от этой функции по области $D$, т. е.**)

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. Разобьем область $D$ прямыми, параллельными осями координат, на $n$ правильных (прямоугольных) областей $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

На основании свойства 1 (формула (2)) предыдущего параграфа имеем

$$I_D = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \ldots + I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta S_i}. \qquad (1)$$

Каждое из слагаемых, стоящих справа, преобразуем по теореме о среднем для двукратного интеграла:

$$I_{\Delta S_i} = f(P_i)\,\Delta S_i.$$

Тогда равенство (1) примет вид

$$I_D = f(P_1)\,\Delta S_1 + f(P_2)\,\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i, \qquad (2)$$

где $P_i$ — некоторая точка области $\Delta S_i$. Справа стоит интегральная сумма для функции $f(x, y)$ по области $D$. По теореме о существовании двойного интеграла следует, что предел этой суммы при $n \to \infty$ и стремлении наибольшего диаметра площадок $\Delta S_i$ к нулю существует и равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области $D$. Величина двукратного интеграла $I_D$, стоящего в левой части равенства (2), не зависит от $n$. Таким образом, переходя к пределу в равенстве (2), получим

$$I_D = \lim_{\operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta S_i = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

или

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = I_D. \qquad (3)$$

Выписывая подробно выражение двукратного интеграла $I_D$, окончательно получим

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \qquad (4)$$

---

*) При этом мы снова полагаем, что область $D$ правильная в направлении оси $Oy$ и ограничена линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$.

Замечание 1. Для случая, когда $f(x, y) \geqslant 0$, формула (4) имеет наглядное геометрическое толкование. Рассмотрим тело, ограниченное поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $Oz$, а направляющей служит граница области $D$ (рис. 301). Вычислим объем этого тела $V$. Выше было показано, что объем этого тела равняется двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области $D$:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (5)$$

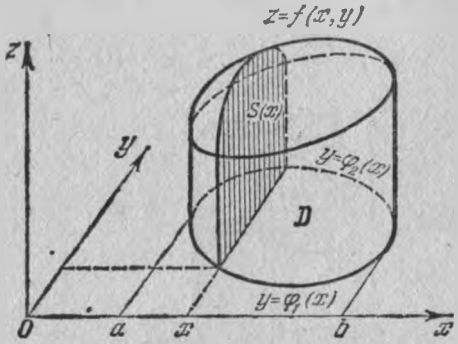


Рис. 301.

Вычислим теперь объем этого тела, пользуясь результатами § 4 гл. XII т. I о вычислении объема тела по площадям параллельных сечений. Проведем плоскость $x = \text{const}$ $(a < x < b)$, рассекающую рассматриваемое тело. Вычислим площадь $S(x)$ фигуры, получающейся в сечении $x = \text{const}$. Эта фигура есть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $z = f(x, y)$ $(x = \text{const})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = (\varphi_2)\, x$. Следовательно, эта площадь выразится интегралом

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Зная площади параллельных сечений, легко найти объем тела

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx$$

или, подставляя выражение (6) для площади $S(x)$, получаем

$$V = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \qquad (7)$$

В формулах (5) и (7) левые части равны, следовательно, равны и правые:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Теперь нетрудно выяснить и геометрический смысл теоремы об оценке двукратного интеграла (свойство 2 предыдущего параграфа): объем тела $V$, ограниченного поверхностью $z=f(x,\ y)$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области $D$, превосходит объем цилиндра с основанием $S$ и высотой $m$, но меньше объема цилиндра с основанием $S$ и высотой $M$ (где $m$ и $M$ — наименьшее и наибольшее

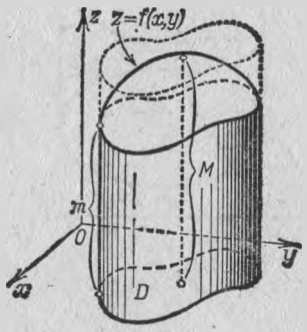



Рис. 302.

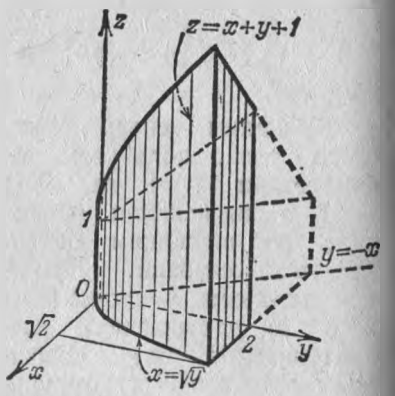



Рис. 303.

значения функции $z=f(x,\ y)$ в области $D$ (рис. 302)). Это следует из того, что двукратный интеграл $I_D$ равен объему этого тела $V$.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$, если область $D$ ограничена прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=3/2$.

Решение. На основании формулы (4)

$$V=\int\limits_0^{3/2}\left[\int\limits_0^1 (4-x^2-y^2)\,dx\right]dy=\int\limits_0^{3/2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_0^1 dy=$$

$$=\int\limits_0^{3/2}\left(4-\frac{1}{3}-y^2\right)dy=\left(4y-\frac{1}{3}y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3/2}=\frac{35}{8}.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,\ y)=1+x+y$ по области, ограниченной линиями $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$, $z=0$ (рис. 303).



Решение.

$$V=\int\limits_0^2\left[\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)\,dx\right]dy=\int\limits_0^2\left[x+\frac{x^2}{2}+xy\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)-\left(-y+\frac{y^2}{2}-y^2\right)\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^2}{2}\right]dy=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{y^3}{6}\right]_0^2=\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{13}{3}.$$

Замечание 2. Пусть правильная в направлении оси $Ox$ область $D$ ограничена линиями $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, причем $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$ (рис. 304).

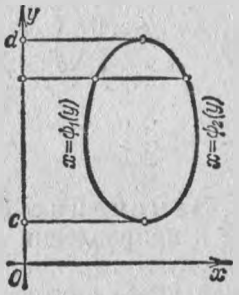



Рис. 304.

Очевидно, что в этом случае

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx\right)dy. \quad (8)$$

Для вычисления двойного интеграла его надо представить в виде двукратного. Как мы видели выше, это можно сделать двумя различными способами: или по формуле (4) или по формуле (8). В каждом конкретном случае в зависимости от вида области $D$ или подынтегральной функции мы выбираем ту или иную формулу для вычисления двойного интеграла.

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^{\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Решение. Область интегрирования ограничена прямой $y=x$ и параболой $y=\sqrt{x}$ (рис. 305).

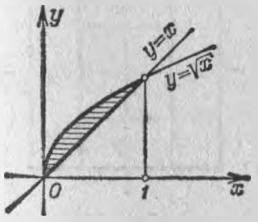



Рис. 305.

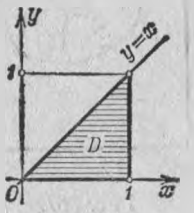



Рис. 306.

Всякая прямая, параллельная оси $Ox$, пересекает границу области не более чем в двух точках; следовательно, можно вычислять интеграл по

формуле (8), полагая

$$\psi_1(y)=y^2,\ \psi_2(y)=y,\ 0\leqslant y\leqslant 1;$$

тогда

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} f(x,\ y)\,dx\right)dy.$$

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_D e^{y/x}\,dS$, если область $D$ представляет треугольник, ограниченный прямыми $y=x$, $y=0$, $x=1$ (рис. 306).

Решение. Заменим данный двойной интеграл двукратным. При этом воспользуемся формулой (4). (Если бы мы применили формулу (8), то нам пришлось бы интегрировать функцию $e^{y/x}$ по $x$; но этот интеграл не берется в элементарных функциях.)

$$\iint\limits_D e^{y/x}\,dS=\int_0^1\left(\int_0^x e^{y/x}\,dy\right)dx=\int_0^1 (xe^{y/x})\Big|_0^x\,dx=$$

$$=\int_0^1 x\,(e-1)\,dx=(e-1)\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}=0{,}859\ldots$$

Замечание 3. Если область $D$ не является правильной ни в направлении оси $Ox$, ни в направлении оси $Oy$ (т. е. существуют вертикальные и горизонтальные прямые, которые, проходя через внутренние точки области, пересекают границу области более чем в двух точках), то двойной интеграл по этой области мы не можем представить в виде двукратного. Если удается разбить неправильную область $D$ на конечное число правильных или в направлении оси $Ox$, или в направлении оси $Oy$ областей $D_1$, $D_2$, ..., $D_n$, то, вычисляя двойной интеграл по каждой из этих областей с помощью двукратного и складывая получившиеся результаты, мы получим искомый интеграл по области $D$.

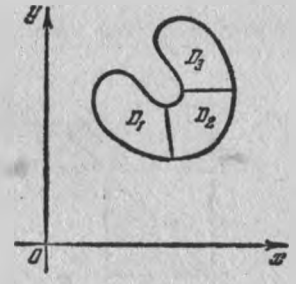



Рис. 307.

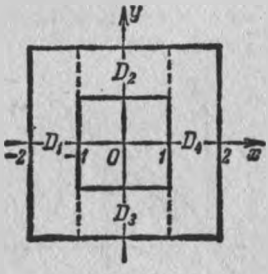



Рис. 308.

На рис. 307 показан пример того, как неправильную область $D$ можно разбить на три правильные области $D_1$, $D_2$ и $D_3$.

Пример 5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,dS$$

по области $D$, заключенной между двумя квадратами с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат, если каждая сторона внутреннего квадрата равна 2, а внешнего 4 (рис. 308).

Решение. Область $D$ является неправильной. Однако прямые $x=-1$ и $x=1$ разбивают ее на четыре правильные области $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$. Поэтому

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,dS=\iint\limits_{D_1} e^{x+y}\,dS+\iint\limits_{D_2} e^{x+y}\,dS+\iint\limits_{D_3} e^{x+y}\,dS+\iint\limits_{D_4} e^{x+y}\,dS.$$

Представляя каждый из этих интегралов в виде двукратного, найдем:

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,dS=\int\limits_{-2}^{-1}\left(\int\limits_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{1}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-2}^{-1} e^{x+y}\,dy\right)dx+\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx=$$

$$=(e^2-e^{-2})(e^{-1}-e^{-2})+(e^2-e)(e-e^{-1})+(e^{-1}-e^{-2})(e-e^{-1})+$$

$$+(e^2-e^{-2})(e^2-e)=(e^3-e^{-3})(e-e^{-1})=4\operatorname{sh}3\operatorname{sh}1.$$

Замечание 4. В дальнейшем, записывая двукратный интеграл

$$I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx,$$

мы будем опускать скобки, в которые заключен внутренний интеграл, т. е. будем писать

$$I_D=\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx.$$

При этом, так же как и при наличии скобок, мы будем считать, что первое интегрирование совершается по той переменной, дифференциал которой написан первым, а затем по той переменной, дифференциал которой написан вторым. (Заметим, однако, что это не является общепринятым; в некоторых книгах принято противоположное условие: интегрировать сначала по той переменной, дифференциал которой занимает последнее место *).)

*) Очень часто употребляется также такой вид записи:

$$I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(x,\ y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(x,\ y)\,dy.$$

## § 4. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов

1. Объем. Как мы видели в § 1, объем $V$ тела, ограниченного поверхностью $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ — неотрицательная функция, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области $D$, а образующие параллельны оси $Oz$, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области $D$:

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\,dS.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ (рис. 309).

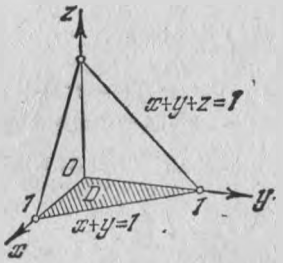



Рис. 309.

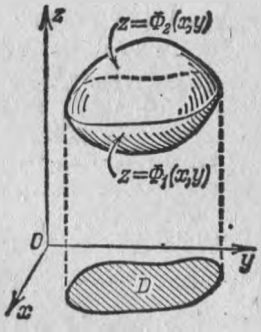



Рис. 310.

Решение. $V=\iint\limits_D (1-x-y)\,dy\,dx$, где $D$ — заштрихованная на рис. 309 треугольная область в плоскости $Oxy$, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Расставляя пределы в двойном интеграле, вычислим объем:

$$V=\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx=\int\limits_0^1 \left[(1-x)\,y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx=\int\limits_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\,dx=\frac{1}{6}.$$

Итак, $V=\frac{1}{6}$ куб. единиц.

Замечание 1. Если тело, объем которого ищется, ограничено сверху поверхностью $z=\Phi_2(x, y)\geqslant 0$, а снизу — поверхостью $z=\Phi_1(x, y)\geqslant 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость $Oxy$ является область $D$, то объем $V$ этого тела равен разности объемов двух «цилиндрических» тел; первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область $D$, а верхним — поверхность $z=\Phi_2(x, y)$; второе тело имеет нижним основанием также область $D$, а верхним — поверхность $z=\Phi_1(x, y)$ (рис. 310).

Поэтому объем $V$ равен разности двух двойных интегралов:

$$V=\iint_D \Phi_2(x,\ y)\,dS-\iint_D \Phi_1(x,\ y)\,dS,$$

или

$$V=\iint_D [\Phi_2(x,\ y)-\Phi_1(x,\ y)]\,dS. \qquad (1)$$

Легко, далее, доказать, что формула (1) верна не только в том случае, когда $\Phi_1(x,\ y)$ и $\Phi_2(x,\ y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $\Phi_1(x,\ y)$ и $\Phi_2(x,\ y)$ — любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению

$$\Phi_2(x,\ y)\geqslant\Phi_1(x,\ y).$$

Замечание 2. Если в области $D$ функция $f(x,\ y)$ меняет знак, то разбиваем область на две части: 1) область $D_1$, где $f(x,\ y)\geqslant 0$; 2) область $D_2$, где $f(x,\ y)\leqslant 0$. Предположим, что области $D_1$ и $D_2$ таковы, что двойные интегралы по этим областям существуют. Тогда интеграл по области $D_1$ будет положителен и будет равен объему тела, лежащего выше плоскости $Oxy$. Интеграл по $D_2$ будет отрицателен и по абсолютной величине равен объему тела, лежащего ниже плоскости $Oxy$. Следовательно, интеграл по $D$ будет выражать разность соответствующих объемов.

2. Вычисление площади плоской области. Если мы составим интегральную сумму для функции $f(x,\ y)\equiv 1$ по области $D$, то эта сумма будет равна площади $S$,

$$S=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta S_i,$$

при любом способе разбиения. Переходя к пределу в правой части равенства, получим

$$S=\iint_D dx\,dy.$$

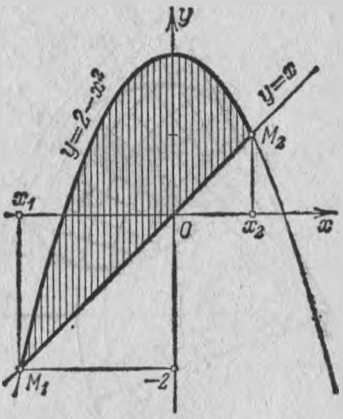


Рис. 311.

Если область $D$ правильная (см., например, рис. 296), то площадь выразится двукратным интегралом

$$S=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\right)dx.$$

Производя интегрирование в скобках, имеем, очевидно,

$$S=\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx$$

(ср. § 1 гл. XII т. I).

Пример 2. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми

$$y=2-x^2, \quad y=x.$$

Решение. Определим точки пересечения данных кривых (рис. 311). В точке пересечения ординаты равны, т. е. $x=2-x^2$, отсюда $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$. Мы получили две точки пересечения

$$M_1(-2;\ -2),\ M_2(1;\ 1).$$

Следовательно, искомая площадь

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\int_x^{2-x^2} dy\right)dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

## § 5. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат $\theta$, $\rho$ задана такая область $D$, что каждый луч *), проходящий через внутреннюю точку области, пересекает границу области $D$ не более чем в двух точках. Предположим, что область $D$ ограничена кривыми

$$\rho=\Phi_1(\theta), \quad \rho=\Phi_2(\theta)$$

и лучами

$$\theta=\alpha \quad \text{и} \quad \theta=\beta,$$

причем

$$\Phi_1(\theta)\leqslant\Phi_2(\theta) \quad \text{и} \quad \alpha<\beta$$

(рис. 312). Такую область снова будем называть *правильной*.

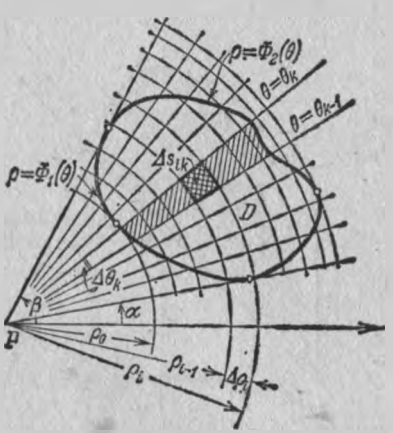



Рис. 312.

Пусть в области $D$ задана непрерывная функция от координат $\theta$ и $\rho$:

$$z=F(\theta,\ \rho).$$

Разобьем область $D$ каким-нибудь способом на площадки $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, ..., $\Delta S_n$.

*) *Лучом* мы будем называть каждую полупрямую, исходящую из начала координат, т. е. из полюса $P$.

Составим интегральную сумму:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta S_k, \tag{1}$$

где $P_k$ — некоторая точка площадки $\Delta S_k$.

Из теоремы существования двойного интеграла следует, что при стремлении наибольшего диаметра площадки $\Delta S_k$ к нулю существует предел $V$ интегральной суммы (1). Этот предел $V$ есть, по определению, двойной интеграл от функции $F(\theta, \rho)$ по области $D$:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\,dS. \tag{2}$$

Займемся вычислением двойного интеграла в этом случае.

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области $D$ на площадки $\Delta S_k$, то мы можем разбить область наиболее удобным способом. Таким наиболее удобным для вычисления способом будет разбиение области с помощью лучей $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \ldots, \theta = \theta_n$ (где $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta, \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$) и концентрических окружностей $\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \ldots, \rho = \rho_m$ (где $\rho_0$ равно наименьшему значению функции $\Phi_1(\theta)$, а $\rho_m$ — наибольшему значению функции $\Phi_2(\theta)$ в промежутке $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$; $\rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m$).

Обозначим через $\Delta S_{ik}$ площадку, ограниченную линиями

$$\rho = \rho_{i-1}, \quad \rho = \rho_i, \quad \theta = \theta_{k-1}, \quad \theta = \theta_k.$$

Площадки $\Delta S_{ik}$ будут трех видов: 1) не пересекаемые границей, лежащие в области $D$; 2) не пересекаемые границей, лежащие вне области $D$; 3) пересекаемые границей области $D$.

Сумма слагаемых, соответствующих пересекаемым границей площадкам, имеет пределом нуль при $\Delta\theta_k \to 0$ и $\Delta\rho_i \to 0$, и потому эти слагаемые мы не будем принимать в расчет. Площадки $\Delta S_{ik}$, которые лежат вне области $D$, вообще не входят в интегральную сумму и поэтому нас не интересуют. Следовательно, интегральную сумму можно записать следующим образом:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[ \sum_{i} F(P_{ik})\,\Delta S_{ik} \right],$$

где $P_{ik}$ — произвольная точка площадки $\Delta S_{ik}$.

Двойной знак суммирования здесь следует понимать в том смысле, что мы сначала производим суммирование по индексу $i$, считая $k$ постоянным (т. е. отбираем все слагаемые, соответствующие площадкам, заключенным между двумя соседними лучами *)).

*) Заметим, что при суммировании по индексу $i$ этот индекс будет пробегать не все значения от 1 до $m$, так как не все площадки, лежащие между лучами $\theta = \theta_k$ и $\theta = \theta_{k+1}$, принадлежат области $D$.

Внешний знак суммирования означает, что мы собираем вместе все суммы, получившиеся при первом суммировании (т. е. суммируем по индексу $k$).

Найдем выражение площади площадки $\Delta S_{ik}$, не пересекаемой границей области. Она будет равна разности площадей двух секторов:

$$\Delta S_{ik}=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_k-\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_k=\left(\rho_i+\frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\,\Delta\theta_k,$$

или $\Delta S_{ik}=\rho_i^*\Delta\rho_i\Delta\theta_k$, где $\rho_i<\rho_i^*<\rho_i+\Delta\rho_i$.

Таким образом, интегральная сумма будет иметь вид *)

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_i F(\theta_k^*,\ \rho_i^*)\,\rho_i^*\,\Delta\rho_i\,\Delta\theta_k\right],$$

где $P(\theta_k^*;\ \rho_i^*)$ — точка площадки $\Delta S_{ik}$. Вынесем теперь множитель $\Delta\theta_k$ за знак внутренней суммы (это можно сделать, так как он является общим множителем для всех слагаемых этой суммы):

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_i F(\theta_k^*,\ \rho_i^*)\,\rho_i^*\,\Delta\rho_i\right]\Delta\theta_k.$$

Предположим, что $\Delta\rho_i\to 0$, а $\Delta\theta_k$ остается постоянным. Тогда выражение, стоящее в скобках, будет стремиться к интегралу

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*,\ \rho)\,\rho\,d\rho.$$

Теперь, полагая, что $\Delta\theta_k\to 0$, окончательно получим **)

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta,\ \rho)\,\rho\,d\rho\right)d\theta. \qquad (3)$$

**Формула (3) служит для вычисления двойного интеграла в полярных координатах.**

*) Рассматривать интегральную сумму в таком виде мы можем потому, что предел суммы не зависит от положения точки внутри площадки.

**) Наш вывод формулы (3) не является строгим; при выводе этой формулы мы стремили к нулю сначала $\Delta\rho_i$, оставляя $\Delta\theta_k$ неизменным, и только затем стремили $\Delta\theta_k$ к нулю. Это не вполне соответствует определению двойного интеграла, который мы рассматриваем как предел интегральной суммы при стремлении диаметров площадок к нулю (т. е. при одновременном стремлении к нулю $\Delta\theta_k$ и $\Delta\rho_i$). Однако, несмотря на допущенную нестрогость доказательства, результат верен (т. е. формула (3) справедлива). Строгий вывод этой формулы можно было бы получить тем же методом, который был применен при рассмотрении двойного интеграла в прямоугольных координатах. Заметим также, что эта формула будет выведена еще раз в § 6 из других соображений (как частный случай более общей формулы преобразования координат в данном интеграле).



Если первое интегрирование производить по $\theta$, а второе по $\rho$, то получим формулу (рис. 313)

$$V=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta,\ \rho)\,d\theta\right)\rho\,d\rho. \qquad (3')$$

Пусть требуется вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области $D$, заданной в прямоугольных координатах:

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Если область $D$ является правильной в полярных координатах $\theta$, $\rho$,

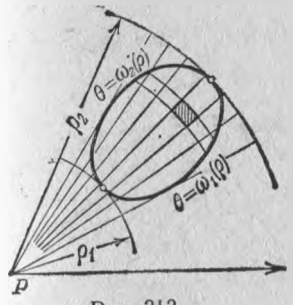



Рис. 313.

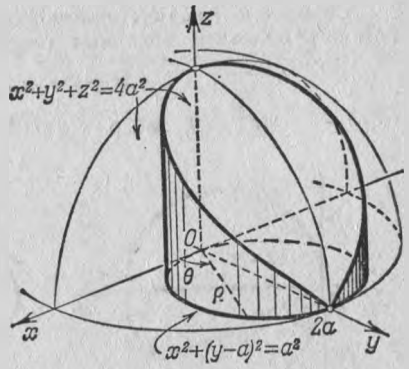



Рис. 314.

то вычисление данного интеграла можно свести к вычислению двукратного интеграла в полярных координатах.

Действительно, так как

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,$$
$$f(x,\ y)=f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)=F(\theta,\ \rho),$$

то, следовательно,

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\right)d\theta. \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислить объем $V$ тела, ограниченного сферической поверхностью

$$x^2+y^2+z^2=4a^2$$

и цилиндром

$$x^2+y^2-2ay=0.$$

Решение. За область интегрирования здесь можно взять основание цилиндра $x^2+y^2-2ay=0$, т. е. круг с центром в точке $(0,\ a)$ и радиусом $a$. Уравнение границы этого круга можно записать в виде $x^2+(y-a)^2=a^2$ (рис. 314). Вычислим 1/4 искомого объема $V$, а именно ту его часть, которая расположена в первом октанте. Тогда в качестве интегрирования придется взять

полукруг, границы которого определяются уравнениями

$$x=\varphi_1(y)=0, \quad x=\varphi_2(y)=\sqrt{2ay-y^2}, \quad y=0, \quad y=2a.$$

Подынтегральная функция

$$z=f(x,\ y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy.$$

Преобразуем полученный интеграл к полярным координатам $\theta$, $\rho$:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta.$$

Определим границы интегрирования. Для этого напишем уравнение данной окружности в полярных координатах: так как

$$x^2+y^2=\rho^2, \qquad y=\rho\sin\theta,$$

то $\rho^2-2a\rho\sin\theta=0$, или $\rho=2a\sin\theta$. Следовательно, в полярных координатах

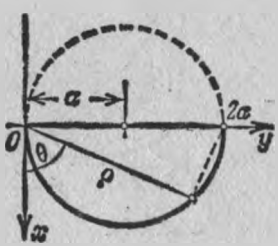



Рис. 315.

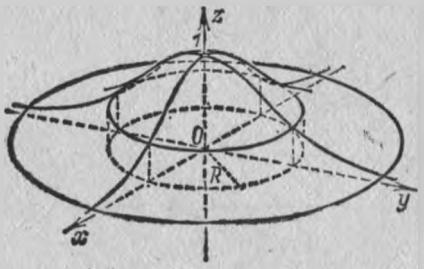



Рис. 316.

(рис. 315) границы области определяются уравнениями

$$\rho=\Phi_1(\theta)=0, \quad \rho=\Phi_2(\theta)=2a\sin\theta, \quad \alpha=0, \quad \beta=\pi/2,$$

а подынтегральная функция имеет вид

$$F(\theta,\ \rho)=\sqrt{4a^2-\rho^2}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a\sin\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(4a^2-4a^2\sin^2\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}\right]d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{9}a^3(3\pi-4).$$

Пример 2. Вычислим интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Вычислим сначала интеграл $I_R=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, где область интегрирования $D$ есть круг $x^2+y^2=R^2$ (рис. 316).

Перейдя в приведенном интеграле к полярным координатам $\theta$, $\rho$, получаем:

$$I_R=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}e^{-\rho^2}\Big|_0^R d\theta=\pi\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Если теперь мы будем неограниченно увеличивать радиус $R$, т. е. неограниченно расширять область интегрирования, то получим так называемый *несобственный кратный интеграл*:

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to+\infty}\pi\left(1-e^{-R^2}\right)=\pi.$$

Покажем, что интеграл $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ стремится к пределу $\pi$, если область $D'$ произвольной формы расширяется так, что в конце концов любая точка плоскости попадает в область $D'$ и остается в ней (такое расширение области $D'$ мы будем условно записывать соотношением $D'\to+\infty$).

Пусть $R_1$ и $R_2$ — наименьшее и наибольшее расстояния границы области $D'$ от начала координат (рис. 317).

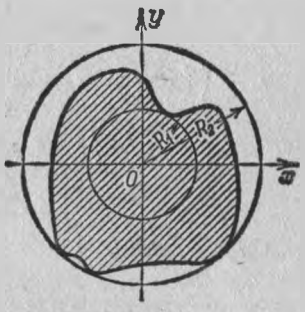


Рис. 317.

Так как функция $e^{-x^2-y^2}>0$ всюду, то справедливы неравенства

$$I_{R_1}\leqslant\iint\limits_{D'}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant I_{R_2},$$

или

$$\pi\left(1-e^{-R_1^2}\right)\leqslant\iint\limits_{D'}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\pi\left(1-e^{-R_2^2}\right).$$

Так как при $D'\to+\infty$, очевидно, $R_1\to+\infty$ и $R_2\to+\infty$, то крайние части неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\pi$. Следовательно, к этому пределу стремится и средний член, т. е.

$$\lim_{D'\to+\infty}\iint\limits_{D'}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi. \tag{5}$$

Пусть, в частности, область $D'$ — квадрат со стороной $2a$ с центром в начале координат; тогда

$$\iint\limits_{D'}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-a}^{a}e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy.$$

Вынесем теперь за знак внутреннего интеграла сомножитель $e^{-y^2}$ (это можно сделать, так как $e^{-y^2}$ не зависит от переменной интегрирования $x$). Тогда

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)dy.$$

Положим $\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx=B_a$. Это — постоянное число (зависящее только от $a$); поэтому

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}B_a\,dy=B_a\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy.$$

Но последний интеграл также равен $B_a$ $\left(\text{потому что } \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy\right)$; следовательно,

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=B_aB_a=B_a^2.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, заставляя стремиться $a$ к бесконечности (при этом $D'$ безгранично расширяется):

$$\lim_{D'\to+\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\lim_{a\to+\infty}B_a^2=\lim_{a\to+\infty}\left[\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right]^2=\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2.$$

Но, как было доказано (см. (5)),

$$\lim_{D'\to+\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi.$$

Следовательно,

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2=\pi,$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

Этот интеграл часто встречается в теории вероятностей и в статистике. Заметим, что непосредственно вычислить этот интеграл (с помощью неопределенного интеграла) мы бы не смогли, так как первообразная от $e^{-x^2}$ не выражается в элементарных функциях.

## § 6. Замена переменных в двойном интеграле (общий случай)

Пусть в плоскости $Oxy$ дана область $D$, ограниченная линией $L$. Предположим, что координаты $x$ и $y$ являются функциями новых переменных $u$ и $v$:

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v),\qquad (1)$$

причем функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области $D'$, которая будет определена ниже. Тогда по формулам (1) каждой паре значений $u$ и $v$ соответствует единственная пара значений $x$ и $y$. Предположим далее, что функции $\varphi$ и $\psi$ таковы, что если мы дадим $x$ и $y$ определенные значения из области $D$, то по формулам (1) найдем определенные значения $u$ и $v$.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $Ouv$ (рис. 318). На основании сказанного следует, что каждой точке $P(x; y)$ на плоскости $Oxy$ (рис. 319) однозначно соответствует точка $P'(u; v)$

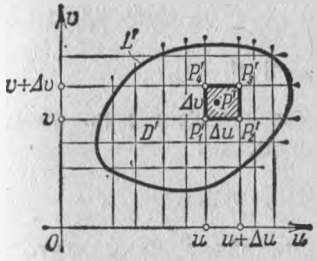



Рис. 318.

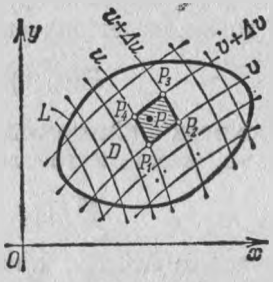



Рис. 319.

на плоскости $Ouv$ с координатами $u$, $v$, которые определяются по формулам (1). Числа $u$ и $v$ называются *криволинейными* координатами точки $P$.

Если в плоскости $Oxy$ точка опишет замкнутую линию $L$, ограничивающую область $D$, то в плоскости $Ouv$ соответствующая точка опишет замкнутую линию $L'$, ограничивающую некоторую область $D'$; при этом каждой точке области $D'$ соответствует точка области $D$.

Таким образом, формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками областей $D$ и $D'$ или, как говорят, взаимно однозначно отображают область $D$ на область $D'$.

Рассмотрим в области $D'$ линию $u = \text{const}$. По формулам (1) найдем, что в плоскости $Oxy$ ей будет соответствовать, вообще говоря, некоторая кривая. Точно так же каждой прямой $v = \text{const}$ плоскости $Ouv$ будет соответствовать некоторая линия в плоскости $Oxy$.

Разобьем область $D'$ прямыми $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на прямоугольные площадки (при этом площадки, задевающие границу области $D'$, мы не будем принимать в расчет). Соответствующими кривыми линиями область $D$ разобьется на некоторые криволинейные четырехугольники (рис. 319).

Рассмотрим в плоскости $Ouv$ прямоугольную площадку $\Delta S'$, ограниченную прямыми $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v +$

$+\Delta v = \text{const}$, и соответствующую ей криволинейную площадку $\Delta S$ в плоскости $Oxy$. Площади этих площадок тоже обозначим соответственно через $\Delta S'$ и $\Delta S$. Тогда, очевидно,

$$\Delta S' = \Delta u\, \Delta v.$$

Вообще говоря, площади $\Delta S$ и $\Delta S'$ различны.

Пусть в области $D$ задана непрерывная функция

$$z = f(x,\ y).$$

Каждому значению функции $z = f(x,\ y)$ в области $D$ соответствует то же самое значение функции $z = F(u,\ v)$ в области $D'$, где

$$F(u,\ v) = f[\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v)].$$

Рассмотрим интегральные суммы от функции $z$ по области $D$. Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$\sum f(x,\ y)\,\Delta S = \sum F(u,\ v)\,\Delta S. \tag{2}$$

Вычислим $\Delta S$, т. е. площадь криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ в плоскости $Oxy$ (см. рис. 319).

Определим координаты его вершин:

$$\begin{array}{llll} P_1(x_1;\ y_1), & x_1 = \varphi(u,\ v), & y_1 = \psi(u,\ v), \\ P_2(x_2;\ y_2), & x_2 = \varphi(u+\Delta u,\ v), & y_2 = \psi(u+\Delta u,\ v), \\ P_3(x_3;\ y_3), & x_3 = \varphi(u+\Delta u,\ v+\Delta v), & y_3 = \psi(u+\Delta u,\ v+\Delta v), \\ P_4(x_4;\ y_4), & x_4 = \varphi(u,\ v+\Delta v), & y_4 = \psi(u,\ v+\Delta v). \end{array} \tag{3}$$

При вычислении площади криволинейного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ будем считать линии $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, $P_4P_1$ попарно параллельными прямыми; кроме того, приращения функций будем заменять соответствующими дифференциалами. Таким образом, мы будем пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с бесконечно малыми $\Delta u$, $\Delta v$. Тогда формулы (3) будут иметь вид

$$\begin{array}{ll} x_1 = \varphi(u,\ v), & y_1 = \psi(u,\ v), \\ x_2 = \varphi(u,\ v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 = \psi(u,\ v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u, \\ x_3 = \varphi(u,\ v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 = \psi(u,\ v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta v, \\ x_4 = \varphi(u,\ v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 = \psi(u,\ v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v. \end{array} \tag{3'}$$

При сделанных допущениях криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ можно рассматривать как параллелограмм. Его площадь $\Delta S$ приближенно равна удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$



и находится по формуле аналитической геометрии:

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| = \\ &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\,\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\,\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\,\Delta v = \\ &= \left\|\begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{array}\right\|\Delta u\,\Delta v: \end{aligned}$$

здесь вторые (внешние) вертикальные линейки означают, что этот определитель берется по абсолютной величине. Введем обозначение

$$\left\|\begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{array}\right\| = I.$$

Таким образом,

$$\Delta S \approx |I|\,\Delta S'. \tag{4}$$

Определитель $I$ называется *функциональным определителем* функций $\varphi(u,\ v)$ и $\psi(u,\ v)$. Его называют также *якобианом* по имени немецкого математика Якоби.

Равенство (4) является только приближенным, так как в процессе вычисления площади $\Delta S$ мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка. Однако чем меньшими будут размеры площадок $\Delta S$ и $\Delta S'$, тем это равенство будет точнее. Оно становится совершенно точным в пределе, когда диаметры площадок $\Delta S$ и $\Delta S'$ стремятся к нулю:

$$|I| = \lim_{\operatorname{diam}\Delta S' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}.$$

Применим теперь полученное равенство к вычислению двойного интеграла. На основании равенства (2) можем написать

$$\sum f(x,\ y)\,\Delta S \approx \sum F(u,\ v)\,|I|\,\Delta S'$$

(интегральная сумма справа распространена на область $D'$). Переходя к пределу при $\operatorname{diam}\Delta S' \to 0$, получим точное равенство:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} F(u,\ v)\,|I|\,du\,dv. \tag{5}$$

Это и есть формула преобразования координат в двойном интеграле. Она дает возможность свести вычисление двойного интеграла по области $D$ к вычислению двой-

ного интеграла по области $D'$, что может упростить задачу. Впервые строгое доказательство этой формулы было дано выдающимся русским математиком М. В. Остроградским.

Замечание. Переход от прямоугольных координат к полярным, рассмотренный в предыдущем параграфе, является частным

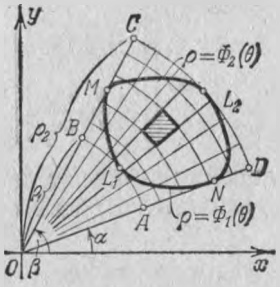



Рис. 320.

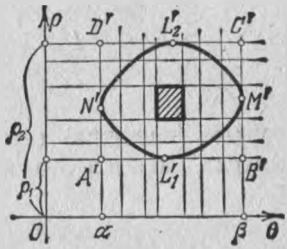



Рис. 321.

случаем замены переменных в двойном интеграле. В этом случае $u=\theta$, $v=\rho$:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta.$$

Кривая $AB\,(\rho=\rho_1)$ на плоскости $Oxy$ (рис. 320) переходит в прямую $A'B'$ на плоскости $O\theta\rho$ (рис. 321). Кривая $DC\,(\rho=\rho_2)$ на плоскости $Oxy$ переходит в прямую $D'C'$ на плоскости $O\theta\rho$.

Прямые $AD$ и $BC$ плоскости $Oxy$ переходят в прямые $A'D'$ и $B'C'$ плоскости $O\theta\rho$. Кривые $L_1$ и $L_2$ переходят в кривые $L_1'$ и $L_2'$.

Вычислим якобиан преобразования декартовых координат $x$ и $y$ в полярные $\theta$ и $\rho$:

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=-\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta=-\rho.$$

Следовательно, $|I|=\rho$, и поэтому

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)}F(\theta,\ \rho)\,\rho\,d\rho\right)d\theta.$$

Эта формула и была установлена в предыдущем параграфе.

Пример. Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy$$

по области $D$ в плоскости $Oxy$, ограниченной прямыми

$$y=x+1, \quad y=x-3, \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}, \quad y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Непосредственное вычисление этого двойного интеграла было бы затруднительным; однако простая замена переменных позволяет свести этот интеграл к интегралу по прямоугольнику, стороны которого параллельны осям координат.

Положим

$$u=y-x, \quad v=y+\frac{1}{3}x. \tag{6}$$

Тогда прямые $y=x+1$, $y=x-3$ перейдут соответственно в прямые $u=1$, $u=-3$ на плоскости $Ouv$; прямые же $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$ перейдут в прямые $v=7/3$, $v=5$.

Следовательно, заданная область $D$ преобразуется в прямоугольную область $D'$, изображенную на рис. 322. Остается вычислить якобиан преобразования. Для этого выразим $x$ и $y$ через $u$ и $v$. Решая систему уравнений (6), получим

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v, \quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

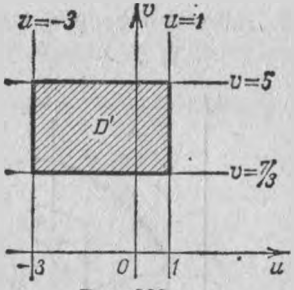


Рис. 322.

Следовательно,

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},$$

и абсолютная величина якобиана равна $|I|=3/4$. Поэтому

$$\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D'}\frac{3}{4}u\,du\,dv=\int\limits_{\frac{7}{3}}^{5}\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du\,dv=-8.$$

## § 7. Вычисление площади поверхности

Пусть требуется вычислить площадь поверхности, ограниченной линией Г (рис. 323); поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Обозначим проекцию линии Г на плоскость $Oxy$ через $L$. Область на плоскости $Oxy$, ограниченную линией $L$, обозначим через $D$,

Разобьем произвольным образом область $D$ на $n$ элементарных площадок $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, ..., $\Delta S_n$. В каждой площадке $\Delta S_i$ возьмем точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$. Точке $P_i$ будет соответствовать на поверхности точка $M_i[\xi_i; \eta_i; f(\xi_i, \eta_i)]$. Через точку $M_i$ проведем касательную плоскость к поверхности. Уравнение ее имеет вид

$$z-z_i=f'_x(\xi_i, \eta_i)(x-\xi_i)+f'_y(\xi_i, \eta_i)(y-\eta_i) \tag{1}$$

(см. § 6, гл. IX, т. I). На этой плоскости выделим такую площадку $\Delta\sigma_i$, которая проектируется на плоскость $Oxy$ в виде площадки $\Delta S_i$. Рассмотрим сумму всех площадок $\Delta\sigma_i$: $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$.

Предел $\sigma$ этой суммы, когда наибольший из диаметров площадок $\Delta\sigma_i$ стремится к нулю, мы будем называть *площадью поверхности*, т. е. по определению положим

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam} \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{2}$$

Займемся теперь вычислением площади поверхности. Обозначим через $\gamma_i$ угол между касательной плоскостью и плоскостью $Oxy$.

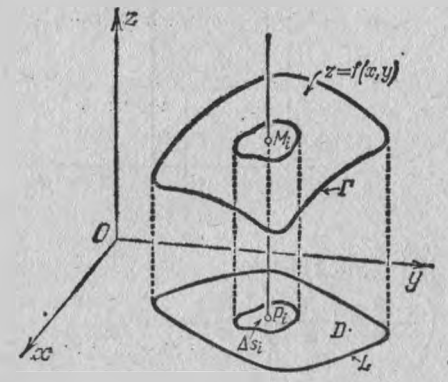



Рис. 323.

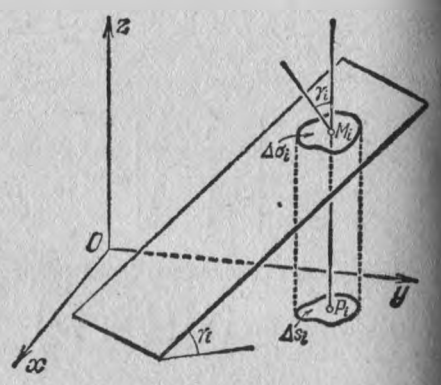



Рис. 324.

На основании известной формулы аналитической геометрии можно написать (рис. 324)

$$\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i,$$

или

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}. \tag{3}$$

Угол $\gamma_i$ есть в то же время угол между осью $Oz$ и перпендикуляром к плоскости (1). Поэтому на основании уравнения (1) и формулы аналитической геометрии имеем

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(\xi_i, \eta_i)+f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1+f'^2_x(\xi_i, \eta_i)+f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta S_i.$$



Подставляя это выражение в формулу (2), получим

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1+f'^2_x(\xi_i, \eta_i)+f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta S_i.$$

Так как предел интегральной суммы, стоящей в правой части последнего равенства, по определению представляет собой двойной интеграл $\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dx\,dy$, то окончательно получаем

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

Это и есть формула, по которой вычисляется площадь поверхности $z=f(x, y)$.

Если уравнение поверхности дано в виде $x=\mu(y, z)$ или в виде $y=\chi(x, z)$, то соответствующие формулы для вычисления поверхности имеют вид

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz, \tag{3'}$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz, \tag{3''}$$

где $D'$ и $D''$ — области на плоскостях $Oyz$ и $Oxz$, в которые проектируется данная поверхность.

Пример 1. Вычислить поверхность $\sigma$ сферы

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Решение. Вычислим поверхность верхней половины сферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (рис. 325). В этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно, подынтегральная функция примет вид

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Область интегрирования определяется условием $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Таким образом, на основании формулы (4) будем иметь

$$\frac{1}{2}\sigma = \int_{-R}^{R} \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy \right) dx.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам. В полярных координатах граница области интегрирования

определяется уравнением $\rho = R$. Следовательно,

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\, d\rho\right)d\theta = 2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R d\theta = 2R\int_0^{2\pi} R\, d\theta = 4\pi R^2.$$

Пример 2. Найти площадь той части поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, которая вырезается цилиндром $x^2+z^2=a^2$.

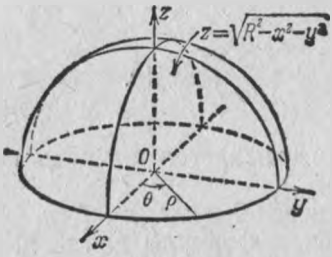



Рис. 325.

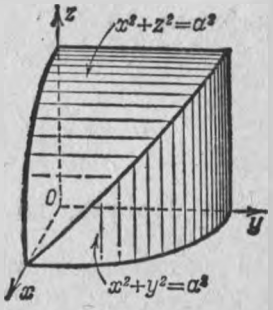



Рис. 326.

Решение. На рис. 326 изображена $^1/_8$ часть искомой поверхности. Уравнение поверхности имеет вид $y=\sqrt{a^2-x^2}$; поэтому

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Область интегрирования представляет собой четверть круга, т. е. определяется условиями

$$x^2+z^2 \leqslant a^2, \quad x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{8}\sigma = \int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dz\right)dx = a\int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a\int_0^a dx = a^2,$$

$$\sigma = 8a^2.$$

## § 8. Плотность распределения вещества и двойной интеграл

Пусть в области $D$ распределено некоторое вещество, так что на каждую единицу площади области $D$ приходится определенное количество этого вещества. Мы будем говорить в дальнейшем о распределении массы, хотя наши рассуждения сохранятся и в том случае, когда идет речь о распределении электрического заряда, количества тепла и т. п.

Рассмотрим произвольную площадку $\Delta S$ области $D$. Пусть масса вещества, приходящаяся на данную площадку, есть $\Delta m$.

Тогда отношение $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ называется средней поверхностной плотностью вещества в области $\Delta S$.

Пусть теперь площадка $\Delta S$ уменьшается, стягиваясь к точке $P(x;\ y)$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$. Если этот предел существует, то, вообще говоря, он будет зависеть от положения точки $P$, т. е. от ее координат $x$ и $y$, и будет представлять собой некоторую функцию $f(P)$ точки $P$. Будем называть этот предел *поверхностной плотностью* вещества в точке $P$:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = f(P) = f(x,\ y). \tag{1}$$

Таким образом, поверхностная плотность есть функция $f(x, y)$ координат точки области.

Пусть теперь, обратно, в области $D$ задана поверхностная плотность некоторого вещества как некоторая непрерывная функция $f(P) = f(x,\ y)$ и требуется определить общее количество вещества $M$, содержащегося в области $D$. Разобьем область $D$ на площадки $\Delta S_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и в каждой площадке возьмем точку $P_i$; тогда $f(P_i)$ есть поверхностная плотность в точке $P_i$.

Произведение $f(P_i)\Delta S_i$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка, дает нам количество вещества, содержащегося на площадке $\Delta S_i$, а сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ приближенно выражает общее количество вещества, распределенного в области $D$. Но это — интегральная сумма для функции $f(P)$ в области $D$. Точное значение мы получим в пределе при $\Delta S_i \to 0$.

Таким образом *),

$$M = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(P)\,dS = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

т. е. общее количество вещества в области $D$ равно двойному интегралу по области $D$ от плотности $f(P) = f(x, y)$ этого вещества.

Пример. Определить массу круглой пластинки радиуса $R$, если поверхностная плотность $f(x, y)$ материала пластинки в каждой точке $P(x; y)$ пропорциональна расстоянию точки $(x; y)$ от центра круга, т. е. если

$$f(x,\ y) = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. По формуле (2) имеем

$$M = \iint\limits_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования $D$ есть круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

*) Соотношение $\Delta S_i \to 0$ мы понимаем в том смысле, что диаметр области $\Delta S_i$ стремится к нулю.

Переходя к полярным координатам, получаем

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\, d\rho\right)d\theta = k\cdot 2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3.$$

## § 9. Момент инерции площади плоской фигуры

*Моментом инерции $I$ материальной точки $M$* с массой $m$ относительно некоторой точки $O$ называется произведение массы $m$ на квадрат ее расстояния $r$ от точки $O$:

$$I = mr^2.$$

*Момент инерции системы материальных точек* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно точки $O$ есть сумма моментов инерции отдельных точек системы:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

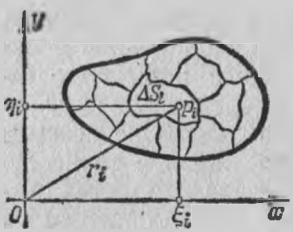


Рис. 327.

Определим теперь момент инерции материальной плоской фигуры $D$.

Пусть фигура $D$ расположена в координатной плоскости $Oxy$. Определим момент инерции этой фигуры относительно начала координат, предполагая, что поверхностная плотность всюду равна единице.

Разобьем область $D$ на элементарные площадки $\Delta S_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (рис. 327). На каждой площадке возьмем точку $P_i$ с координатами $\xi_i$, $\eta_i$. Назовем элементарным моментом инерции $\Delta I_i$ площадки $\Delta S_i$ произведение массы площадки $\Delta S_i$ на квадрат расстояния $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$:

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i,$$

и составим сумму таких моментов

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Она представляет собой интегральную сумму для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ по области $D$.

*Момент инерции фигуры $D$* определим как предел этой интегральной суммы, когда диаметр каждой элементарной площадки $\Delta S_i$ стремится к нулю:

$$I_0 = \lim_{\operatorname{diam}\Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i.$$

Пределом этой суммы является двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

Следовательно, момент инерции фигуры $D$ относительно начала координат равен

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \tag{1}$$

где $D$ — область, совпадающая с данной плоской фигурой.

Интегралы

$$I_{xx} = \iint\limits_D y^2\, dx\, dy, \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint\limits_D x^2\, dx\, dy \tag{3}$$

называются соответственно *моментами инерции фигуры D относительно осей Ox и Oy.*

Пример 1. Вычислить момент инерции площади круга $D$ радиуса $R$ относительно центра $O$.

Решение. По формуле (1) имеем $I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$. Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам $\theta$, $\rho$. Уравнение окружности в полярных координатах есть $\rho = R$. Поэтому

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi} \left( \int\limits_0^R \rho^2 \rho\, d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Замечание. Если поверхностная плотность $\gamma$ не равна единице, а является некоторой функцией от $x$ и $y$, т. е. $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса площадки $\Delta S_i$ будет с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $\gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, и поэтому момент инерции плоской фигуры относительно начала координат будет

$$I_0 = \iint\limits_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)\, dx\, dy. \tag{1'}$$

Пример 2. Вычислить момент инерции плоской материальной фигуры $D$, ограниченной линиями $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$, относительно оси $Oy$, если поверхностная плотность в каждой точке равна $y$ (рис. 328).

Решение.

$$I_{yy} = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^{\sqrt{1-x}} yx^2\, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^2 (1-x)\, dx = \frac{1}{24}.$$

Эллипс инерции. Определим момент инерции площади плоской фигуры $D$ относительно некоторой оси $OL$, проходящей через точку $O$, которую мы примем за начало координат. Обозначим через $\varphi$ угол, образованный прямой $OL$ с положительным направлением оси $Ox$ (рис. 329).

Нормальное уравнение прямой $OL$ есть

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.$$

Расстояние $r$ какой-либо точки $M(x;\ y)$ от этой прямой равно

$$r = |x\sin\varphi - y\cos\varphi|.$$

Момент инерции $I$ площади области $D$ относительно прямой $OL$

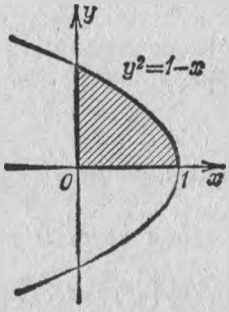



Рис. 328.

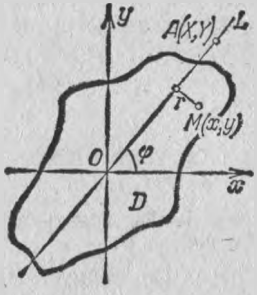



Рис. 329.

по определению выражается интегралом

$$I = \iint\limits_D r^2\,dx\,dy = \iint\limits_D (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2\,dx\,dy = \sin^2\varphi \iint\limits_D x^2\,dx\,dy -$$

$$-2\sin\varphi\cos\varphi \iint\limits_D xy\,dx\,dy + \cos^2\varphi \iint\limits_D y^2\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$I = I_{yy}\sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + I_{xx}\cos^2\varphi, \qquad (4)$$

здесь $I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy$ — момент инерции фигуры относительно оси $y$, $I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ — момент инерции относительно оси $x$, а $I_{xy} = \iint\limits_D xy\,dx\,dy$. Разделив все члены последнего равенства на $I$, получим

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2. \qquad (5)$$

Возьмем на прямой $OL$ точку $A(X;\ Y)$ так, чтобы $OA = 1/\sqrt{I}$. Различным направлениям оси $OL$, т. е. различным значениям угла $\varphi$, соответствуют различные значения $I$ и различные точки $A$. Найдем геометрическое место точек $A$. Очевидно,

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\varphi, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I}}\sin\varphi.$$

В силу равенства (5) величины $X$ и $Y$ связаны между собой соотношением

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2. \qquad (6)$$

Таким образом, геометрическое место точек $A(X; Y)$ есть кривая второго порядка (6). Докажем, что эта кривая есть эллипс.

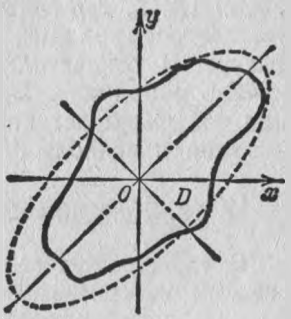


Рис. 330.

Справедливо следующее очень важное в приложениях неравенство, установленное русским математиком В. Я. Буняковским*):

$$\left(\iint\limits_D xy\,dx\,dy\right)^2 < \left(\iint\limits_D x^2\,dx\,dy\right)\left(\iint\limits_D y^2\,dx\,dy\right),$$

или

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Таким образом, дискриминант кривой (6) положителен и, следовательно, эта кривая есть эллипс (рис. 330). Этот эллипс назы-

---

*) Для доказательства неравенства Буняковского рассмотрим следующее очевидное неравенство:

$$\iint\limits_D [f(x,\ y) - \lambda\varphi(x,\ y)]^2\,dx\,dy \geqslant 0,$$

где $\lambda$ — постоянная. Знак равенства возможен только тогда, когда $f(x,\ y) - \lambda\varphi(x,\ y) \equiv 0$, т. е. если $f(x,\ y) = \lambda\varphi(x,\ y)$. Если предположим, что $f(x, y)/\varphi(x, y) \neq \text{const} = \lambda$, то всегда будет иметь место знак неравенства. Таким образом, раскрывая скобки под знаком интеграла, получим

$$\iint\limits_D f^2(x,\ y)\,dx\,dy - 2\lambda\iint\limits_D f(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy + \lambda^2\iint\limits_D \varphi^2(x,\ y)\,dx\,dy > 0.$$

Рассмотрим выражение, стоящее слева, как функцию от $\lambda$. Это — многочлен второй степени, никогда не обращающийся в нуль; следовательно, его корни комплексны, а это будет тогда, когда дискриминант, составленный из коэффициентов квадратного многочлена, отрицателен, т. е.

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 - \iint\limits_D f^2\,dx\,dy\iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dy < 0,$$

или

$$\left(\iint\limits_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 < \iint\limits_D f^2\,dx\,dy\iint\limits_D \varphi^2\,dx\,dg.$$

Это и есть *неравенство Буняковского.*

В нашем случае $f(x,\ y) = x$, $\varphi(x,\ y) = y$, $x/y \neq \text{const}$.

Замечательное неравенство Буняковского постоянно применяется в различных областях математики. Это неравенство во многих учебниках неправильно называют неравенством Шварца. В. Я. Буняковский опубликовал его (среди других важных неравенств) в 1859 г., а Шварц лишь в 1875 г.

вается эллипсом инерции. Понятие эллипса инерции имеет существенное значение в механике.

Заметим, что длины осей эллипса инерции и его положение на плоскости зависят от формы данной плоской фигуры. Так как расстояние от начала координат до какой-либо точки $A$ эллипса равно $1/\sqrt{I}$, где $I$ — момент инерции фигуры относительно оси $OA$, то, построив эллипс, можно легко подсчитать момент инерции фигуры $D$ относительно какой-либо прямой, проходящей через начало координат. В частности, легко видеть, что момент инерции фигуры будет наименьшим относительно большой оси эллипса инерции и наибольшим относительно малой оси этого эллипса.

## § 10. Координаты центра масс площади плоской фигуры

В § 8 гл. XII (т. I) указывалось, что координаты центра масс системы материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \tag{1}$$

Определим теперь координаты центра масс плоской фигуры $D$. Разобьем эту фигуру на очень малые элементарные площадки $\Delta S_i$. Если поверхностную плотность принять равной единице, то масса площадки будет равна ее площади. Если приближенно считать, что вся масса элементарной площадки $\Delta S_i$ сосредоточена в какой-либо ее точке $P_i(\xi_i; \eta_i)$, то можно рассматривать фигуру $D$ как систему материальных точек. Тогда по формулам (1) координаты центра масс этой фигуры будут приближенно определяться равенствами

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}.$$

В пределе при $\operatorname{diam} \Delta S_i \to 0$ интегральные суммы, стоящие в числителях и знаменателях дробей, перейдут в двойные интегралы, и мы получим точные формулы для вычисления координат центра масс плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{2}$$

Эти формулы, выведенные для плоской фигуры с поверхностной

плотностью 1, остаются, очевидно, в силе и для фигуры, имеющей любую другую постоянную во всех точках плотность $\gamma$.

Если же поверхностная плотность переменна:

$$\gamma = \gamma(x,\ y),$$

то соответствующие формулы будут иметь вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, x\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, dx\, dy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, dx\, dy}.$$

Выражения

$$M_y = \iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, x\, dx\, dy \quad \text{и} \quad M_x = \iint\limits_D \gamma(x,\ y)\, y\, dx\, dy$$

называются *статическими моментами* плоской фигуры $D$ относительно осей $Oy$ и $Ox$.

Интеграл $\iint \gamma(x,\ y)\, dx\, dy$ выражает величину массы рассматриваемой фигуры.

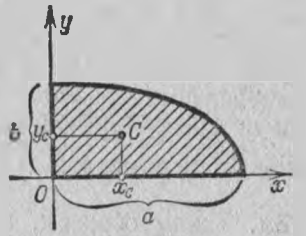


Рис. 331.

Пример. Определить координаты центра масс четверти эллипса (рис. 331)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

полагая, что поверхностная плотность во всех точках равна 1.

Решение. По формулам (2) получаем

$$x_c = \frac{\int\limits_0^a \left( \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy \right) dx}{\int\limits_0^a \left( \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int\limits_0^a \left( \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\, dy \right) dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

## § 11. Тройной интеграл

Пусть в пространстве задана некоторая область $V$, ограниченная замкнутой поверхностью $S$. Пусть в области $V$ и на ее границе определена некоторая непрерывная функция $f(x, y, z)$, где $x$, $y$, $z$ — прямоугольные координаты точки области. Для ясности в случае, если $f(x, y, z) \geqslant 0$, мы можем считать эту функцию плотностью распределения некоторого вещества в области $V$.

Разобьем область $V$ произвольным образом на области $\Delta v_i$, обозначая символом $\Delta v_i$ не только саму область, но и ее объем. В пределах каждой частичной области $\Delta v_i$ выберем произвольную точку $P_i$ и обозначим через $f(P_i)$ значение функции $f$ в этой точке. Составим интегральную сумму вида

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i \tag{1}$$

и будем неограниченно увеличивать число малых областей $\Delta v_i$ так, чтобы наибольший диаметр $\Delta v_i$ стремился к нулю *). Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна, то при этом будет существовать предел интегральных сумм вида (1), где предел интегральных сумм понимается в таком же смысле, как это было указано при определении двойного интеграла **). Этот предел, не зависящий ни от способа разбиения области $V$, ни от выбора точек $P_i$, обозначается символом $\iiint\limits_V f(P)\,dv$ и называется *тройным интегралом*. Таким образом, по определению

$$\lim_{\operatorname{diam} \Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)\,dv,$$

или

$$\iiint\limits_V f(P)\,dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Если $f(x, y, z)$ считать объемной плотностью распределения вещества в области $V$, то интеграл (2) даст массу всего вещества, заключенного в объеме $V$.

---

*) Диаметром области $\Delta v_i$ называется максимальное расстояние между точками, лежащими на границе области.

**) Эта теорема о существовании предела интегральных сумм (т. е. о существовании тройного интеграла) для всякой функции, непрерывной в замкнутой области $V$ (включая границу), принимается нами без доказательства.

## § 12. Вычисление тройного интеграла

Предположим, что пространственная (трехмерная) область $V$, ограниченная замкнутой поверхностью $S$, обладает следующими свойствами:

1) всякая прямая, параллельная оси $Oz$, проведенная через внутреннюю (т. е. не лежащую на границе $S$) точку области $V$, пересекает поверхность $S$ в двух точках;

2) вся область $V$ проектируется на плоскость $Oxy$ в правильную (двумерную) область $D$;

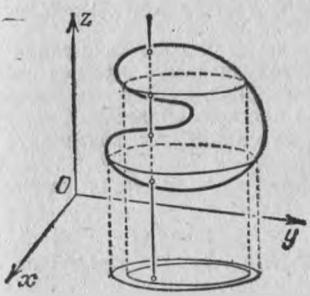



Рис. 332.

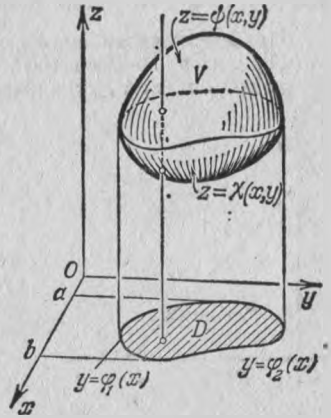



Рис. 333.

3) всякая часть области $V$, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей ($Oxy$, $Oxz$, $Oyz$), также обладает свойствами 1) и 2).

Область $V$, обладающую указанными свойствами, мы будем называть *правильной* трехмерной областью.

Правильными трехмерными областями являются, например, эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т. д. Пример неправильной трехмерной области дан на рис. 332. В настоящем параграфе мы будем рассматривать только правильные области.

Пусть поверхность, ограничивающая область $V$ снизу, имеет уравнение $z=\chi(x, y)$, а поверхность, ограничивающая эту область сверху, имеет уравнение $z=\psi(x, y)$ (рис. 333).

Введем понятие трехкратного интеграла $I_V$ по области $V$ от функции трех переменных $f(x, y, z)$, определенной и непрерывной в области $V$. Предположим, что область $D$ — проекция области $V$ на плоскость $Oxy$ — ограничена линиями

$$y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x),\ x=a,\ x=b.$$

Тогда *трехкратный интеграл* от функции $f(x, y, z)$ по области $V$

определяется так:

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] dy \right\} dx. \qquad (1)$$

Заметим, что в результате интегрирования по $z$ и подстановки пределов в фигурных скобках получится функция от $x$ и $y$. Далее, вычисляется двойной интеграл от этой функции по области $D$, как это было рассмотрено выше.

Приведем пример вычисления трехкратного интеграла по области $V$.

Пример 1. Вычислить трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z) = xyz$ по области $V$, ограниченной плоскостями

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1,$$

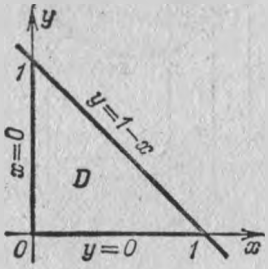


Рис. 334.

Решение. Эта область правильная, она ограничена сверху и снизу плоскостями $z=0$ и $z=1-x-y$ и проектируется на плоскость $Oxy$ в правильную плоскую область $D$, представляющую собой треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$ (рис. 334). Поэтому трехкратный интеграл $I_V$ вычислится следующим образом:

$$I_V = \iint_D \left[ \int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] d\sigma.$$

Расставляя пределы в этом двукратном интеграле по области $D$, получим

$$I_V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[ \int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2\,dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4\,dx = \frac{1}{720}.$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства трехкратного интеграла.

Свойство 1. *Если область $V$ разбить на две области $V_1$ и $V_2$ плоскостью, параллельной какой-либо из плоскостей координат, то трехкратный интеграл по области $V$ равен сумме трехкратных интегралов по областям $V_1$ и $V_2$.*

Доказательство этого свойства проводится совершенно так же, как и доказательство соответствующего свойства для двукратных интегралов. Поэтому нет необходимости повторять его снова.

Следствие. *При любом разбиении области $V$ на конечное число областей $V_1, \ldots, V_n$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям, имеет место равенство*

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}.$$

Свойство 2 (теорема об оценке трехкратного интеграла). *Если $m$ и $M$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ в области $V$, то имеет место неравенство*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV,$$

*где $V$ есть объем данной области, а $I_V$ — трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области $V$.*

Доказательство. Оценим сначала внутренний интеграл в трехкратном интеграле $I_V = \iint\limits_D \left[ \int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] d\sigma$:

$$\int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \leqslant \int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} M\, dz = M \int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} dz = Mz \Big|_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} =$$
$$= M[\psi(x, y) - \chi(x, y)].$$

Итак, внутренний интеграл не превосходит выражения $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$. Поэтому в силу теоремы § 1 о двойных интегралах получим (обозначая через $D$ проекцию области $V$ на плоскость $Oxy$)

$$I_V = \iint\limits_D \left[ \int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] d\sigma \leqslant \iint\limits_D M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]\, d\sigma =$$
$$= M \iint\limits_D [\psi(x, y) - \chi(x, y)]\, d\sigma.$$

Но последний двукратный интеграл равен двойному интегралу от функции $\psi(x, y) - \chi(x, y)$ и, следовательно, равен объему той области, которая заключена между поверхностями $z = \chi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, т. е. объему области $V$. Поэтому

$$I_V \leqslant MV.$$

Аналогично доказывается, что $I_V \geqslant mV$. Таким образом, свойство 2 доказано.

Свойство 3 (теорема о среднем). *Трехкратный интеграл $I_V$ от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по области $V$ равен произведению его объема $V$ на значение функции в некоторой точке $P$ области $V$, т. е.*

$$I_V = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int\limits_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx = f(P)\, V. \qquad (2)$$

Доказательство этого свойства проводится так же, как и доказательство аналогичного свойства для двукратного интеграла (см. § 2, свойство 3, формула (4)). Теперь мы можем доказать теорему о вычислении тройного интеграла.

Теорема. *Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по правильной области $V$ равен трехкратному интегралу по той же области, т. е.*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Доказательство. Разобьем область $V$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на $n$ правильных областей: $\Delta v_1$, $\Delta v_2$, ..., $\Delta v_n$. Как и выше, обозначим через $I_V$ трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области $V$, а через $I_{\Delta v_i}$ трехкратный интеграл от этой функции по области $\Delta v_i$. Тогда на основании следствия из свойства 1 можем написать равенство

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \ldots + I_{\Delta v_n}. \tag{3}$$

Каждое из слагаемых, стоящих в правой части этого равенства, преобразуем по формуле (2):

$$I_V = f(P_1)\,\Delta v_1 + f(P_2)\,\Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta v_n, \tag{4}$$

где $P_i$ — некоторая точка области $\Delta v_i$.

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма. По предположению функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области $V$ и потому предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего диаметра $\Delta v_i$ существует и равняется тройному интегралу от функции $f(x, y, z)$ по области $V$. Таким образом, переходя к пределу в равенстве (4) при $\operatorname{diam} \Delta v_i \to 0$, получим

$$I_V = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

или окончательно, меняя местами стоящие справа и слева выражения,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Теорема доказана.

Здесь $z = \chi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих правильную область $V$ снизу и сверху. Линии $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ ограничивают область $D$, являющуюся проекцией области $V$ на плоскость $Oxy$.

Замечание. Аналогично тому, как это было в случае двукратного интеграла, можно составить трехкратный интеграл с другим порядком интегрирования по переменным и другими пределами, если, конечно, это позволяет форма области $V$.

Вычисление объема тела с помощью трехкратного интеграла. Если подынтегральная функция $f(x, y, z) = 1$,

то тройной интеграл по области $V$ выражает объем области $V$:

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz. \qquad (5)$$

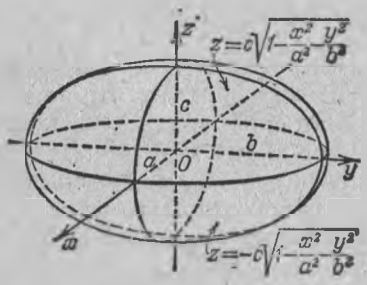



Рис. 335.

Пример 2. Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Эллипсоид (рис. 335) ограничен снизу поверхностью $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, а сверху — поверхностью $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. Проекцией этого эллипсоида на плоскость $Oxy$ (область $D$) является эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Следовательно, сводя вычисление объема к вычислению трехкратного интеграла, получим

$$V=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\right)dy\right]dx=$$

$$=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx.$$

При вычислении внутреннего интеграла $x$ считается постоянным. Сделаем подстановку

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t,\quad dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt.$$

Переменная $y$ изменяется от $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ до $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, поэтому $t$ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Подставляя в интеграл новые пределы, получим

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\;b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt\right]dx=$$

$$=2cb\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt\right]dx=\frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Итак,

$$V=4\pi abc/3.$$

Если $a=b=c$, то получаем объем шара:

$$V=4\pi a^3/3.$$

## § 13. Замена переменных в тройном интеграле

1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. В случае так называемых цилиндрических координат положение точки $P$ в пространстве определяется тремя числами $\theta$, $\rho$, $z$, где $\theta$ и $\rho$ — полярные координаты проекции точки $P$ на плоскость $Oxy$ и $z$ — аппликата точки $P$, т. е. расстояние точки до плоскости $Oxy$, взятое со знаком плюс, если точка лежит выше плоскости $Oxy$, и со знаком минус — если ниже (рис. 336).

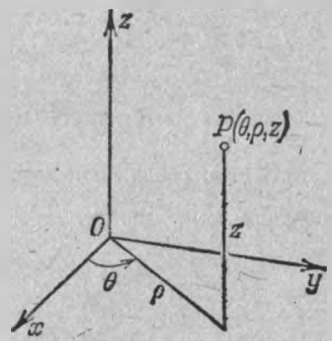



Рис. 336.

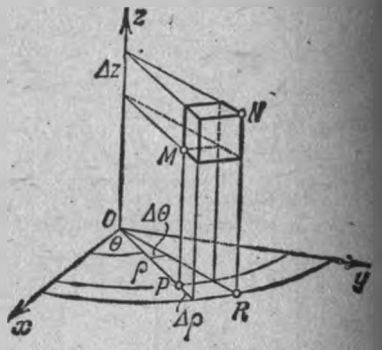



Рис. 337.

В этом случае данную пространственную область $V$ разбиваем на элементарные объемы координатными поверхностями $\theta=\theta_i$, $\rho=\rho_j$, $z=z_k$ (полуплоскости, примыкающие к оси $Oz$, круговые цилиндры, ось которых совпадает с осью $Oz$, плоскости, перпендикулярные к оси $Oz$). Элементарным объемом будет криволинейная «призма» (изображенная на рис. 337). Площадь основания этой призмы с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $\rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho$, высота равна $\Delta z$ (индексы $i$, $j$, $k$ для простоты записи опускаем). Следовательно, $\Delta v=\rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta z$. Поэтому тройной интеграл от функции $F(\theta, \rho, z)$ по области $V$ имеет вид

$$I=\iiint\limits_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz. \qquad (1)$$

Пределы интегрирования определяются формой области $V$.

Если дан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ в прямоугольных координатах, то его легко преобразовать в тройной интеграл в цилиндрических координатах. В самом деле, заметив, что

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z,$$

получим

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz,$$

где

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)=F(\theta,\rho,z).$$

Пример. Определить массу $M$ полушара радиуса $R$ с центром в начале координат, если плотность $F$ его вещества в каждой точке $(x; y; z)$ пропорциональна аппликате этой точки, т. е. $F=kz$.

Решение. Уравнение сферы имеет вид

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

в цилиндрических координатах имеет вид

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Следовательно,

$$M=\iiint_V kz\rho\,d\theta\,d\rho\,dz=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}kz\,dz\right)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\theta=\frac{k}{2}\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{k\pi R^4}{4}.$$

2. Тройной интеграл в сферических координатах. В сферических координатах положение точки $P$ в пространстве определяется тремя числами $\theta$, $r$, $\varphi$, где $r$ — расстояние точки от начала координат, так называемый радиус-вектор точки, $\varphi$ — угол между радиус-вектором и осью $Oz$, $\theta$ — угол между проекцией радиус-вектора на плоскость $Oxy$ и осью $Ox$, отсчитываемый от этой оси в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) (рис. 338). Для любой точки пространства имеем

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

Разобьем данную область $V$ на элементарные части $\Delta v$ координатными поверхностями $r=\text{const}$ (сферы), $\varphi=\text{const}$ (конические поверхности с вершинами в начале координат), $\theta=\text{const}$ (полуплоскости, проходящие через ось $Oz$). С точностью до бесконечно малых высшего порядка элементарный объем $\Delta v$ можно считать параллелепипедом с ребрами длины $\Delta r$, $r\,\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\,\Delta\theta$. Тогда элементарный объем равен (рис. 339)

$$\Delta v=r^2\sin\varphi\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi.$$

Тройной интеграл от функции $F(\theta, r, \varphi)$ по области $V$ имеет вид

$$I=\iiint_V F(\theta,r,\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi. \qquad (1')$$

Границы интегрирования определяются формой области $V$. Из рис. 338 легко устанавливаются выражения декартовых

координат через сферические:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi.$$

Поэтому формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат к сферическим имеет вид

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

3. Общая замена переменных в тройном интеграле. Переходы от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим в тройном интеграле — это частные случаи общего преобразования координат в пространстве.

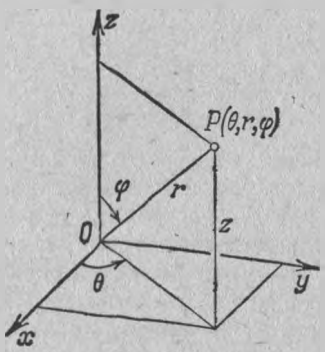



Рис. 338.

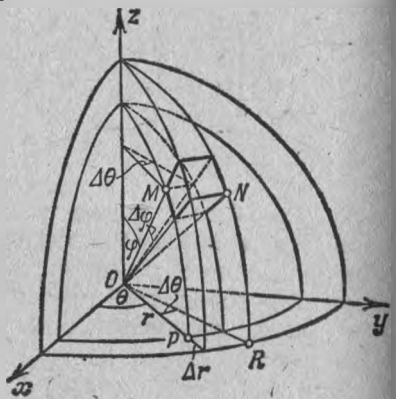



Рис. 339.

Пусть функции

$$x = \varphi(u, t, w), \quad y = \psi(u, t, w), \quad z = \chi(u, t, w)$$

взаимно однозначно отображают область $V$ в декартовых координатах $x$, $y$, $z$ на область $V'$ в криволинейных координатах $u$, $t$, $w$. Пусть элемент объема $\Delta v$ области $V$ переходит в элемент $\Delta v'$ области $V'$ и пусть

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|.$$

Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{V'} f[\varphi(u, t, w),\ \psi(u, t, w),\ \chi(u, t, w)]\,|I|\,du\,dt\,dw.$$

Аналогично тому, как это имело место в двойном интеграле, $I$ называется *якобианом*; подобно тому как это делалось для

двойных интегралов, можно доказать, что якобиан численно равен определителю третьего порядка:

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Так, в случае цилиндрических координат имеем

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z\ (\rho=u,\ \theta=t,\ z=w);$$

$$I=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho.$$

В случае сферических координат

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi\ (r=u,\ \varphi=t,\ \theta=w);$$

$$I=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi.$$

## § 14. Момент инерции и координаты центра масс тела

1. Момент инерции тела. Моменты инерции точки $M(x;\ y;\ z)$ массы $m$ относительно координатных осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ (рис. 340) выражаются соответственно формулами

$$I_{xx}=(y^2+z^2)\,m,\quad I_{yy}=(x^2+z^2)\,m,$$
$$I_{zz}=(x^2+y^2)\,m.$$

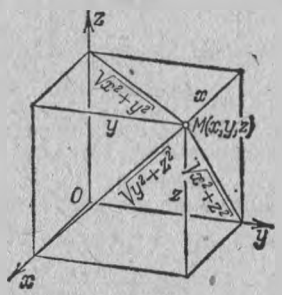


Рис. 340.

Моменты инерции тела выражаются соответствующими интегралами. Так, например, момент инерции тела относительно оси $Oz$ выражается интегралом $I_{zz}=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$, где $\gamma(x,\ y,\ z)$ — плотность вещества.

Пример 1. Вычислить момент инерции прямого кругового цилиндра высоты $2h$ и радиуса $R$ относительно диаметра его среднего сечения, считая плотность постоянной и равной $\gamma_0$.

Решение. Выберем систему координат следующим образом: направим ось $Oz$ вдоль оси цилиндра, а начало координат поместим в его центре симметрии (рис. 341).

Тогда задача сведется к вычислению момента инерции цилиндра относительно оси $Ox$: $I_{xx}=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\gamma_0\,dx\,dy\,dz$. Переходя в этом интеграле к

Меняя порядок интегрирования в первом интеграле, перепишем это равенство в следующем виде:

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha\right]dx=\ln\frac{b}{a},$$

откуда, вычисляя внутренний интеграл, получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}.$$

## Упражнения к главе XIV

Вычислить интегралы*):

1. $\int_0^1\int_1^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Отв.* $\frac{8}{3}$. 2. $\int_3^4\int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$. *Отв.* $\ln\frac{25}{24}$.

3. $\int_1^2\int_x^{x\sqrt{3}} xy\,dx\,dy$. *Отв.* $\frac{15}{4}$. 4. $\int_0^{2\pi}\int_a^{a\sin\theta} r\,dr\,d\theta$. *Отв.* $\frac{1}{2}\pi a^2$.

5. $\int_0^a\int_{x/a}^{x}\frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$. *Отв.* $\frac{\pi a}{4}-a\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$. 6. $\int_0^a\int_{y-a}^{2y} xy\,dx\,dy$. *Отв.* $\frac{11a^4}{24}$.

7. $\int_{b/2}^{b}\int_1^{\pi/2}\rho\,d\theta\,d\rho$. *Отв.* $\frac{3}{16}\pi b^2$.

Определить пределы интегрирования для интеграла $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, где область интегрирования ограничена линиями:

8. $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$. *Отв.* $\int_2^3\int_{-1}^5 f(x,y)\,dy\,dx$.

9. $y=0$, $y=1-x^2$. *Отв.* $\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$.

10. $x^2+y^2=a^2$. *Отв.* $\int_{-a}^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$.

---

*) Если интеграл написан так: $\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy$, то, как было указано выше, мы будем считать, что первое интегрирование совершается по той переменной, дифференциал которой занимает первое место, т. е.

$$\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy=\int_M^N\left(\int_K^L f(x,y)\,dx\right)dy.$$

11. $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$. *Отв.* $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$.

12. $y=0$, $y=a$, $y=x$, $y=x-2a$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{y}^{y+2a} f(x, y)\,dx\,dy$.

Изменить порядок интегрирования в интегралах:

13. $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{3}^{4} f(x, y)\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{3}^{4}\int\limits_{1}^{2} f(x, y)\,dx\,dy$.

14. $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx\,dy$.

15. $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x, y)\,dy\,dx$.

16. $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$.

17. $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy$. *Отв.* $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx+\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x} f(x, y)\,dy\,dx$.

Вычислить следующие интегралы путем перехода к полярным координатам:

18. $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{6}a^3$.

19. $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{a} \rho^3\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi a^4}{8}$.

20. $\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{4}$.

21. $\int\limits_{0}^{2a}\int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi a^2}{2}$.

Преобразовать двойные интегралы, введя новые переменные $u$ и $v$, связанные с $x$ и $y$ формулами $x=u-uv$, $y=uv$:

22. $\int\limits_{0}^{e}\int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy\,dx$. *Отв.* $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}}\int\limits_{0}^{\frac{e}{1-v}} f(u-uv, uv)\,u\,du\,dv$.

**23.** $\int\limits_0^c \int\limits_0^b f(x, y)\, dy\, dx$.

*Отв.* $\int\limits_0^{\frac{b}{b+c}} \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)\, u\, du\, dv + \int\limits_{\frac{b}{b+c}}^{b} \int\limits_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv, uv)\, u\, du\, dv$.

## Вычисление площадей посредством двойного интеграла

**24.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$ и прямой $y=x$. *Отв.* $2/3$.

**25.** Вычислить площадь фигуры, сграниченной линиями $y^2=4ax$, $x+y=3a$, $y=0$. *Отв.* $10a^2/3$.

**26.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$, $x+y=a$. *Отв.* $a^2/3$.

**27.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$. *Отв.* $\sqrt{2}-1$.

**28.** Вычислить площадь петли кривой $\rho=a\sin 2\theta$. *Отв.* $\pi a^2/8$.

**29.** Вычислить всю площадь, ограниченную лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. *Отв.* $a^2$.

**30.** Вычислить площадь петли кривой $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$.

Указание. Перейти к новым переменным $x=\rho a\cos\theta$ и $y=\rho b\sin\theta$. *Отв.* $a^2b^2/c^2$.

## Вычисление объемов

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

**31.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. *Отв.* $\frac{abc}{6}$.

**32.** $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. *Отв.* $3\pi$.

**33.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$, $z=0$. *Отв.* $\pi$.

**34.** $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. *Отв.* $\frac{32}{9}a^3$.

**35.** $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$. *Отв.* $549/144$.

**36.** Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $2x+3y-12=0$ и цилиндром $z=y^2/2$. *Отв.* $16$.

**37.** Вычислить объем тела, ограниченного круговым цилиндром радиуса $a$, ось которого совпадает с осью $Oz$, плоскостями координат и плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$. *Отв.* $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

**38.** Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. *Отв.* $\frac{16}{3}a^3$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

**39.** $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$. *Отв.* $\frac{\pi}{64}$.

**40.** $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^2$, $a>R$. *Отв.* $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-(\sqrt{a^2-R^2})^3\right]$.

**41.** $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$. *Отв.* $\frac{3}{2}\pi a^3$.

42. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Вычислить объем, внутренний по отношению к цилиндру.) *Отв.* $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

### Вычисление площади поверхности

43. Вычислить площадь той части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, которая высекается цилиндром $x^2+y^2=2ax$. *Отв.* $2\pi a^2\sqrt{2}$.

44. Вычислить площадь той части плоскости $x+y+z=2a$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2+y^2=a^2$. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.

45. Вычислить площадь поверхности сферического сегмента (меньшего), если радиус сферы $a$, а радиус основания сегмента $b$. *Отв.* $2\pi(a^2-a\sqrt{a^2-b^2})$.

46. Найти площадь той части поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, которая вырезана поверхностью цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$. *Отв.* $4\pi a^2-8a^2\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

47. Найти площадь поверхности тела, являющегося общей частью двух цилиндров $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$. *Отв.* $16a^2$.

48. Вычислить площадь той части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2ax$, которая содержится между плоскостью $z=0$ и конусом $x^2+y^2=z^2$. *Отв.* $8a^2$.

49. Вычислить площадь той части поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, которая содержится между плоскостью $z=mx$ и плоскостью $z=0$. *Отв.* $2ma^2$.

50. Вычислить площадь той части поверхности параболоида $y^2+z^2=2ax$, которая содержится между параболическим цилиндром $y^2=ax$ и плоскостью $x=a$. *Отв.* $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$.

### Вычисление массы, координат центра масс, момента инерции плоских фигур

(Всюду в задачах 51—62 и 64 считаем поверхностную плотность постоянной и равной единице.)

51. Определить массу пластинки, имеющей форму круга с радиусом $a$, если плотность в любой точке $P$ обратно пропорциональна расстоянию точки $P$ от оси цилиндра (множитель пропорциональности равняется $K$). *Отв.* $2\pi aK$.

52. Вычислить координаты центра масс равностороннего треугольника, принимая его высоту за ось $Ox$, а вершину треугольника за начало координат. *Отв.* $x=a\sqrt{3}/3$, $y=0$.

53. Найти координаты центра масс кругового сектора радиуса $a$, принимая биссектрису его угла за ось $Ox$. Угол раствора сектора равен $2\alpha$. *Отв.* $x_c=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$, $y_c=0$.

54. Найти координаты центра масс верхней половины круга $x^2+y^2=a^2$. *Отв.* $x_c=0$, $y_c=4a/3\pi$.

55. Найти координаты центра масс площади одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. *Отв.* $x_c=a\pi$, $y_c=5a/6$.

56. Найти координаты центра масс площади, ограниченной петлей кривой $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. *Отв.* $x_c=\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c=0$.

57. Найти координаты центра масс площади кардиоиды $\rho=a(1+\cos\theta)$. *Отв.* $x_c=5a/6$, $y_c=0$.

**58.** Вычислить момент инерции площади прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, относительно начала координат. *Отв.* $\frac{ab\,(a^2+b^2)}{3}$.

**59.** Вычислить момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: а) относительно оси $Oy$; б) относительно начала координат. *Отв.* а) $\pi a^3 b/4$; б) $\pi ab\,(a^2+b^2)/4$.

**60.** Вычислить момент инерции площади круга $\rho=2a\cos\theta$ относительно полюса. *Отв.* $3\pi a^4/2$.

**61.** Вычислить момент инерции площади кардиоиды $\rho=a\,(1-\cos\theta)$ относительно полюса. *Отв.* $35\pi a^4/16$.

**62.** Вычислить момент инерции площади круга $(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$ относительно оси $Oy$. *Отв.* $3\pi a^4$.

**63.** Плотность в любой точке квадратной пластинки со стороной $a$ пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата. Вычислить момент инерции пластинки относительно стороны, проходящей через эту вершину. *Отв.* $\frac{1}{40}ka^5\left[7\sqrt{2}+3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$, где $k$ — множитель пропорциональности.

**64.** Вычислить момент инерции площади фигуры, ограниченной параболой $y^2=ax$ и прямой $x=a$, относительно прямой $y=-a$. *Отв.* $8a^4/5$.

## Тройные интегралы

**65.** Вычислить $\iiint\limits_{(x+y+z+1)^3}\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$. *Отв.* $\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$.

**66.** Вычислить $\int\limits_0^a\left\{\int\limits_0^x\left[\int\limits_0^y xyz\,dz\right]dy\right\}dx$. *Отв.* $\frac{a^6}{48}$.

**67.** Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и поверхностью параболоида $x^2+y^2=3z$. *Отв.* $\frac{19}{6}\pi$.

**68 *).** Вычислить координаты центра масс и моменты инерции пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. *Отв.* $x_c=a/4$, $y_c=b/4$, $z_c=c/4$; $I_x=a^3bc/60$, $I_y=b^3ac/60$, $I_z=c^3ab/60$, $I_0=\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

**69.** Вычислить момент инерции кругового прямого конуса относительно его оси. *Отв.* $\frac{1}{10}\pi hr^4$, где $h$ — высота, $r$ — радиус основания конуса.

**70.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью с уравнением $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. *Отв.* $\pi a^3/3$.

**71.** Вычислить момент инерции круглого конуса относительно диаметра основания. *Отв.* $\frac{\pi hr^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

**72.** Вычислить координаты центра масс тела, содержащегося между сферой радиуса $a$ и конической поверхностью с углом при вершине $2\alpha$, если вершина конуса совпадает с центром сферы. *Отв.* $x_c=0$, $y_c=0$, $z_c=\frac{3}{8}a\,(1+\cos\alpha)$ (ось конуса принята за ось $Oz$, вершина помещена в начале координат).

---

*) В задачах 68—69, 71—73 считаем плотность постоянной и равной единице.

73. Вычислить координаты центра масс тела, ограниченного сферой радиуса $a$ и двумя плоскостями, проходящими через центр сферы и образующими угол 60°. *Отв.* $\rho = \frac{9}{16}a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (линия пересечения плоскостей принята за ось $Oz$, центр сферы — за начало координат; $\rho$, $\theta$, $\varphi$ — сферические координаты).

74. Пользуясь равенством $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$ $(\alpha > 0)$, вычислить интегралы $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

ГЛАВА XV

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

## § 1. Криволинейный интеграл

Пусть точка $P(x;\ y)$ движется вдоль некоторой плоской линии $L$ от точки $M$ к точке $N$. К точке $P$ приложена сила $\boldsymbol{F}$, которая меняется по величине и направлению при перемещении точки $P$, т. е. представляет собой некоторую функцию координат точки $P$:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(P).$$

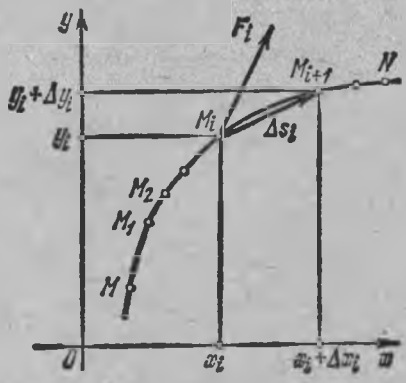



Рис. 342.

Вычислим работу $A$ силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении точки $P$ из положения $M$ в положение $N$ (рис. 342). Для этого разобьем кривую $MN$ на $n$ произвольных частей точками $M=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n=N$ в направлении от $M$ к $N$ и обозначим через $\Delta\boldsymbol{s}_i$ вектор $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$. Величину силы $\boldsymbol{F}$ в точке $M_i$ обозначим через $\boldsymbol{F}_i$. Тогда скалярное произведение $\boldsymbol{F}_i\Delta\boldsymbol{s}_i$ можно рассматривать как приближенное выражение работы силы $\boldsymbol{F}$ вдоль дуги $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$.

$$A_i\approx\boldsymbol{F}_i\,\Delta\boldsymbol{s}_i.$$

Пусть

$$\boldsymbol{F}=X(x,\ y)\,\boldsymbol{i}+Y(x,\ y)\,\boldsymbol{j},$$

где $X(x,\ y)$ и $Y(x,\ y)$ — проекции вектора $\boldsymbol{F}$ на оси $Ox$ и $Oy$. Обозначив через $\Delta x_i$ и $\Delta y_i$ приращения координат $x_i$ и $y_i$ при переходе от точки $M_i$ к точке $M_{i+1}$, получаем

$$\Delta\boldsymbol{s}_i=\Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i,\ y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,\ y_i)\,\Delta y_i.$$

Приближенное значение работы $A$ силы $\boldsymbol{F}$ на всей кривой $MN$ будет

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i,\ y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,\ y_i)\,\Delta y_i]. \qquad (1)$$

Не делая точных формулировок, укажем пока, что если существует предел выражения, стоящего в правой части равенства при $\Delta \boldsymbol{s}_i \to 0$ (при этом, очевидно, $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$), то этот предел выражает работу силы $F$ по кривой $L$ от точки $M$ до точки $N$:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i,\ y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,\ y_i)\,\Delta y_i]. \qquad (2)$$

Справа стоящий предел *) называют *криволинейным интегралом* от $X(x,\ y)$ и $Y(x,\ y)$ по кривой $L$ и обозначают так:

$$A = \int_L X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy \qquad (3)$$

или

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy. \qquad (3')$$

Пределы сумм вида (2) часто встречаются в математике и механике, при этом $X(x,\ y)$ и $Y(x,\ y)$ рассматриваются как функции двух переменных в некоторой области $D$.

Буквы $M$ и $N$, стоящие вместо пределов интегрирования, заключены в скобки в знак того, что это не числа, а обозначения концов линии, по которой берется криволинейный интеграл. Направление по кривой $L$ от точки $M$ к точке $N$ называется *направлением интегрирования*.

Если кривая $L$ пространственная, то криволинейный интеграл от трех функций $X(x,\ y,\ z)$, $Y(x,\ y,\ z)$, $Z(x,\ y,\ z)$ определяется аналогично:

$$\int_L X(x,\ y,\ z)\,dx + Y(x,\ y,\ z)\,dy + Z(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k,\ y_k,\ z_k)\,\Delta x_k + Y(x_k,\ y_k,\ z_k)\,\Delta y_k + Z(x_k,\ y_k,\ z_k)\,\Delta z_k.$$

*) Здесь предел интегральной суммы понимается в том же смысле, как это было в случае определенного интеграла, см. § 2 гл. XI т. I.

Буква $L$, стоящая под знаком интеграла, указывает на то, что интегрирование совершается вдоль кривой $L$.

Отметим два свойства криволинейного интеграла.

Свойство 1. *Криволинейный интеграл определяется подынтегральным выражением, формой кривой интегрирования и указанием направления интегрирования.*

При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл меняет знак, так как при этом вектор $\Delta \boldsymbol{s}$, а следовательно, и его проекции $\Delta x$ и $\Delta y$ меняют знаки.

Свойство 2. Разобьем кривую $L$ точкой $K$ на части $L_1$ и $L_2$ так, что $\overline{MN} = \overline{MK} + \overline{KN}$ (рис. 343). Тогда из формулы (1) непосредственно следует

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(K)} X\,dx + Y\,dy + \int\limits_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy.$$

Это соотношение справедливо для любого числа слагаемых.

Отметим еще, что определение криволинейного интеграла остается в силе и в том случае, когда кривая $L$ замкнута.

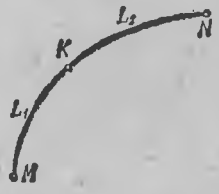


Рис. 343.

В этом случае начальная и конечная точки на кривой совпадают. Поэтому в случае замкнутой кривой мы не можем писать $\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$, а только $\int\limits_{L} X\,dx + Y\,dy$, указывая при этом обязательно направление обхода по замкнутой кривой $L$. Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутому контуру $L$ очень часто употребляется также символ

$$\oint\limits_{L} X\,dx + Y\,dy.$$

Замечание. Мы пришли к понятию криволинейного интеграла, рассматривая задачу о работе силы $\boldsymbol{F}$ на криволинейном пути $L$.

В этом случае во всех точках кривой $L$ была задана сила $\boldsymbol{F}$ как векторная функция $\boldsymbol{F}$ от координат точки приложения $(x; y)$; проекции переменного вектора $\boldsymbol{F}$ на оси координат равны скалярным (т. е. числовым) функциям $X(x, y)$ и $Y(x, y)$. Поэтому криволинейный интеграл вида $\int\limits_{L} X\,dx + Y\,dy$ можно рассматривать как интеграл от векторной функции $\boldsymbol{F}$, заданной проекциями $X$ и $Y$. Интеграл от векторной функции $\boldsymbol{F}$ го кривой $L$ обозначается символом

$$\int\limits_{L} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s}.$$

Если вектор $\boldsymbol{F}$ определяется своими проекциями $X$, $Y$, $Z$, то этот интеграл равен криволинейному интегралу $\int\limits_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. В частности, если вектор $\boldsymbol{F}$ лежит на плоскости $Oxy$, то интеграл от этого вектора равен $\int\limits_L X\,dx + Y\,dy$.

В тех случаях, когда криволинейный интеграл от векторной функции $\boldsymbol{F}$ берется по замкнутой кривой $L$, этот криволинейный интеграл называют также *циркуляцией* вектора $\boldsymbol{F}$ по замкнутому контуру $L$.

## § 2. Вычисление криволинейного интеграла

В этом параграфе мы уточним понятие предела суммы (1) § 1 и в связи с этим уточним понятие криволинейного интеграла и укажем способ его вычисления.

Пусть кривая $L$ задана уравнениями в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Рассмотрим дугу $MN$ этой кривой (рис. 344). Пусть точкам $M$ и $N$ соответствуют значения параметра $\alpha$ и $\beta$. Разделим дугу $MN$ на части $\Delta s_i$ точками $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, ..., $M_n(x_n;\ y_n)$, при этом положим $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$.

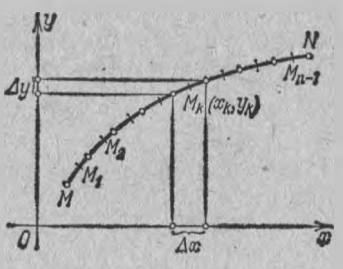


Рис. 344.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_L X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy, \qquad (1)$$

определенный в предыдущем параграфе. Приведем без доказательства теорему существования криволинейного интеграла. *Если функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *непрерывны и имеют непрерывные производные* $\varphi'(t)$ *и* $\psi'(t)$, *а также непрерывны функции* $X[\varphi(t),\ \psi(t)]$ *и* $Y[\varphi(t),\ \psi(t)]$ *как функции* $t$ *на отрезке* $[\alpha,\ \beta]$, *то существуют пределы*

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\,\Delta x_i = A, \quad \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\,\Delta y_i = B, \qquad (2)$$

*где* $\bar{x}_i$ *и* $\bar{y}_i$ *— координаты некоторой точки, лежащей на дуге* $\Delta s_i$. *Эти пределы не зависят от способа деления дуги* $L$ *на частичные дуги* $\Delta s_i$ *при условии, что* $\Delta s_i \to 0$, *не зависят от выбора точки* $\bar{M}_i(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)$ *на дуге* $\Delta s_i$; они называются *криволинейными*

*интегралами* и обозначаются так:

$$A = \int_L X(x, y)\,dx, \quad B = \int_L Y(x, y)\,dy. \tag{2'}$$

Замечание. Из теоремы следует, что к тому же пределу — криволинейному интегралу — стремятся суммы, определенные в предыдущем параграфе, где точки $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ являются концами дуги $\Delta s_i$, а система разбиения дуги $L$ на части $\Delta s_i$ любая.

Сформулированная теорема дает возможность получить способ вычисления криволинейного интеграла.

Итак, по определению имеем

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \tag{3}$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Преобразуем последнюю разность по формуле Лагранжа:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

где $\tau_i$ — некоторое значение $t$, заключенное между значениями $t_{i-1}$ и $t_i$. Так как точку $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ на дуге $\Delta s_i$ можно выбирать произвольно, то выберем ее так, чтобы ее координаты соответствовали значению параметра $\tau_i$:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Подставляя найденные значения $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ и $\Delta x_i$ в формулу (3), получим

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Справа стоит предел интегральной суммы для непрерывной функции одной переменной $X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Следовательно, этот предел равняется определенному интегралу от этой функции:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Аналогично получается формула

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt.$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\,dt. \quad (4)$$

Это и есть искомая формула для вычисления криволинейного интеграла.

Аналогичным образом вычисляется криволинейный интеграл

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

по пространственной кривой, заданной уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл от тройки функций $x^3$; $3zy^2$; $-x^2y$ (или, что то же, от векторной функции $x^3\boldsymbol{i} + 3zy^2\boldsymbol{j} - x^2y\boldsymbol{k}$) вдоль отрезка прямой, идущего от точки $M$ (3; 2; 1) до точки $N$ (0; 0; 0) (рис. 345).

Решение. Для того чтобы найти параметрические уравнения линии $MN$, вдоль которой надлежит интегрировать, напишем уравнение прямой, проходящей через две точки:

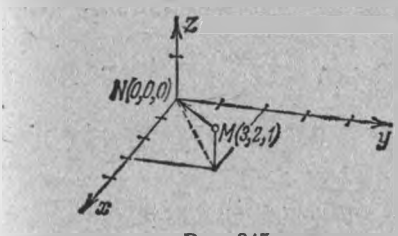



Рис. 345.

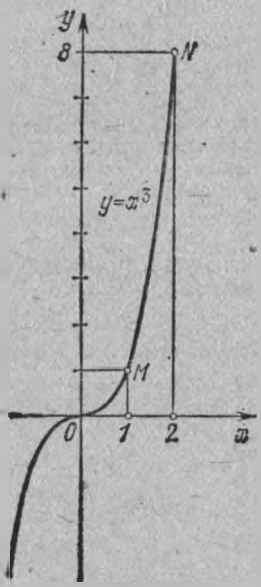



Рис. 346.

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

обозначив все эти отношения одной буквой $t$, получим уравнения прямой в параметрическом виде:

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

При этом началу отрезка $MN$ соответствует, очевидно, значение параметра $t = 1$, а концу отрезка — значение $t = 0$. Производные от $x$, $y$, $z$ по параметру $t$ (которые понадобятся при вычислении криволинейного интеграла) находятся легко:

$$x_t' = 3, \quad y_t' = 2, \quad z_t' = 1.$$

Теперь искомый криволинейный интеграл можно вычислить с помощью формулы (4):

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} x^3\,dx+3zy^2\,dy-x^2y\,dz=\int\limits_1^0 [(3t)^3\cdot 3+3t\cdot(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t\cdot 1]\,dt=\int\limits_1^0 87t^3\,dt=$$

$$=-\frac{87}{4}.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл от пары функций $6x^2y$, $10xy^2$ вдоль плоской кривой $y=x^3$ от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;8)$ (рис. 346).

Решение. Для вычисления искомого интеграла

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dg$$

надо иметь параметрические уравнения данной кривой. Однако заданное явно уравнение кривой $y=x^3$ является частным случаем параметрического: здесь параметром служит абсцисса $x$ точки кривой, и параметрические уравнения кривой таковы:

$$x=x,\quad y=x^3.$$

Параметр $x$ меняется от $x_1=1$ до $x_2=2$. Производные по параметру легко вычислить:

$$x'_x=1,\quad y'_x=3x^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy=$$

$$=\int\limits_1^2 (6x^2x^3\cdot 1+10xx^6\cdot 3x^2)\,dx=\int\limits_1^2 (6x^5+30x^9)\,dx=[x^6+3x^{10}]_1^2=3132.$$

Укажем теперь на некоторые приложения криволинейного интеграла.

1. Выражение площади области, ограниченной кривой, через криволинейный интеграл. Пусть в плоскости $Oxy$ дана такая ограниченная контуром $L$ область $D$, что всякая прямая, параллельная той или иной из координатных осей и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу $L$ области не более чем в двух точках (т. е. область $D$ правильная) (рис. 347).

Предположим, что на ось $Ox$ область $D$ проектируется в отрезок $[a, b]$, причем снизу она ограничивается кривой $(l_1)$:

$$y=y_1(x),$$

а сверху — кривой $(l_2)$:

$$y=y_2(x),$$
$$(y_1(x)\leqslant y_2(x)).$$

Тогда площадь области $D$ равна

$$S=\int_a^b y_2(x)\,dx-\int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Но первый интеграл есть криволинейный интеграл по кривой $l_2(\overset{\frown}{MPN})$, так как $y=y_2(x)$ есть уравнение этой кривой; следовательно,

$$\int_a^b y_2(x)\,dx=\int_{MPN} y\,dx.$$

Второй интеграл есть криволинейный интеграл по кривой $l_1(\overset{\frown}{MQN})$, т. е.

$$\int_a^b y_1(x)\,dx=\int_{MQN} y\,dx.$$

На основании свойства 1 криволинейного интеграла имеем

$$\int_{MPN} y\,dx=-\int_{NPM} y\,dx.$$

Следовательно,

$$S=-\int_{NPM} y\,dx-\int_{MQN} y\,dx=-\oint_L y\,dx. \qquad (5)$$

При этом кривая $L$ обходится в направлении п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и.

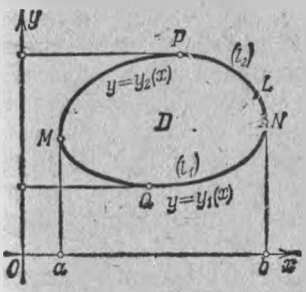



Рис. 347.

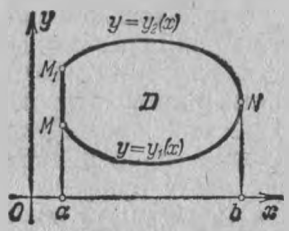



Рис. 348.

Если часть границы $L$ составляет отрезок $M_1M$, параллельный оси $Oy$, то $\int_{(M_1)}^{(M)} y\,dx=0$, и равенство (5) остается справедливым и в этом случае (рис. 348).

Аналогично можно показать, что

$$S=\oint_L x\,dy. \qquad (6)$$

Складывая почленно равенства (5) и (6) и деля на 2, получим еще одну формулу для вычисления площади $S$:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx. \tag{7}$$

Пример 3. Вычислить площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.
Решение. По формуле (7) находим:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\,(b\cos t)-b\sin t\,(-a\sin t)]\,dt=\pi ab.$$

Отметим, что формула (7), а также формулы (5) и (6) справедливы и для площадей, границы которых пересекаются линиями,

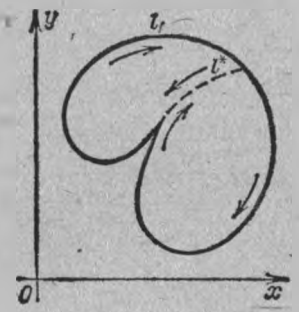



Рис. 349.

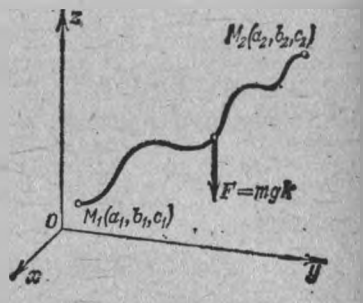



Рис. 350.

параллельными координатным осям, более чем в двух точках (рис. 349). Для доказательства этого разобьем данную область (рис. 349) с помощью линии $l^*$ на две правильные области. Для каждой из них справедлива формула (7). Складывая левые и правые части, получим слева площадь данной области, справа — криволинейный интеграл (с коэффициентом $^1/_2$), взятый по всей границе, так как криволинейный интеграл по линии раздела $l^*$ берется дважды — в прямом и обратном направлениях и, следовательно, равен нулю.

2. Задача о вычислении работы переменной силы $\boldsymbol{F}$ на некотором криволинейном пути $L$. Как было показано в начале § 1, работа, совершенная силой $\boldsymbol{F}=X(x,\,y,\,z)\,\boldsymbol{i}+Y(x,\,y,\,z)\,\boldsymbol{j}+Z(x,\,y,\,z)\,\boldsymbol{k}$ вдоль линии $L=MN$, равна криволинейному интегралу:

$$A=\int_{(M)}^{(N)}X(x,\,y,\,z)\,dx+Y(x,\,y,\,z)\,dy+Z(x,\,y,\,z)\,dz.$$

Рассмотрим пример, показывающий, как производится вычисление работы силы в конкретных случаях.

Пример 4. Определить работу $A$ силы тяжести $F$ при перемещении массы $m$ из точки $M_1(a_1, b_1, c_1)$ в точку $M_2(a_2, b_2, c_2)$ по произвольному пути $L$ (рис. 350).

Решение. Проекции силы тяжести $F$ на оси координат равны

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-mg.$$

Следовательно, искомая работа

$$A=\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\int\limits_{c_1}^{c_2}(-mg)\,dz=mg\,(c_1-c_2).$$

Следовательно, в этом случае криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек. Точнее, работа силы тяжести зависит только от разности высот конечной и начальной точек пути.

## § 3. Формула Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой плоской области $D$ и криволинейным интегралом по границе $L$ этой области.

Пусть в плоскости $Oxy$ дана ограниченная замкнутым контуром $L$ область $D$, правильная как в направлении оси $Ox$, так и в направлении оси $Oy$. Пусть эта область ограничена снизу кривой $y=y_1(x)$, а сверху кривой $y=y_2(x)$, $y_1(x)\leqslant y_2(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ (рис. 347).

В совокупности обе эти кривые составляют замкнутый контур $L$. Пусть в области $D$ заданы непрерывные функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Представляя его в виде двукратного, получим:

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial X}{\partial y}\,dy\right)dx=\int\limits_a^b X(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=$$

$$=\int\limits_a^b [X(x, y_2(x))-X(x, y_1(x))]\,dx. \qquad (1)$$

Заметим, что интеграл

$$\int\limits_a^b X(x, y_2(x))\,dx$$

численно равен криволинейному интегралу

$$\int\limits_{MPN} X(x, y)\,dx,$$

взятому по кривой $MPN$, уравнения которой в параметрической форме суть

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

где $x$ — параметр.

Таким образом,

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\,dx = \int_{MPN} X(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Аналогично интеграл

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx$$

численно равен криволинейному интегралу по дуге $MQN$:

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx = \int_{MQN} X(x, y)\,dx. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), получим:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x, y)\,dx - \int_{MQN} X(x, y)\,dx. \tag{4}$$

Но

$$\int_{MQN} X(x, y)\,dx = -\int_{NQM} X(x, y)\,dx$$

(см. § 1, свойство 1). Следовательно, формулу (4) можно написать так:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x, y)\,dx + \int_{NQM} X(x, y)\,dx.$$

Но сумма криволинейных интегралов, стоящих в правой части, равна криволинейному интегралу, взятому по всей замкнутой кривой $L$ в направлении по часовой стрелке. Следовательно, последнее равенство можно привести к такому виду:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_L X(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Если часть границы составляет отрезок $l_3$, параллельный оси $Oy$, то

$$\int_{l_3} X(x, y)\,dx = 0,$$

и равенство (5) остается справедливым и в этом случае.

Аналогично найдем

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = -\oint_L Y(x, y)\,dy. \tag{6}$$



Вычитая (5) из (6), получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \oint_L X\,dx + Y\,dy.$$

Если обход контура $L$ совершается против часовой стрелки, то *)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L X\,dx + Y\,dy.$$

Это и есть *формула Грина*, названная так по имени английского физика и математика Д. Грина (1793—1841) **).

Мы предполагали, что область $D$ правильная. Но, как и в задаче о площади (см. § 2), можно показать, что эта формула справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

## § 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + X\,dy,$$

взятый по некоторой плоской кривой $L$, соединяющей точки $M$ и $N$. Будем предполагать, что функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в рассматриваемой области $D$. Выясним, при каких условиях написанный криволинейный интеграл не зависит от формы кривой $L$, а зависит только от положения начальной и конечной точек $M$ и $N$.

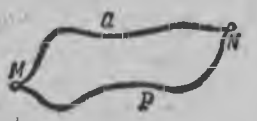


Рис. 351.

Рассмотрим две произвольные кривые $MPN$ и $MQN$, лежащие в рассматриваемой области $D$ и соединяющие точки $M$ и $N$ (рис. 351). Пусть

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy = \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

т. е.

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy - \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

*) Если в криволинейном интеграле по замкнутому контуру не указано направление обхода контура, то предполагается, что этот обход производится против часовой стрелки. Если же обход производится по часовой стрелке, то это должно быть специально оговорено.

**) Эта формула является частным случаем более общей формулы, открытой русским математиком М. В. Остроградским.

Тогда на основании свойств 1 и 2 криволинейных интегралов (§ 1) имеем

$$\int\limits_{MPN} X\,dx+Y\,dy+\int\limits_{NQM} X\,dx+Y\,dy=0,$$

т. е. криволинейный интеграл по замкнутому контуру $L$

$$\oint\limits_L X\,dx+Y\,dy=0. \tag{2}$$

В последней формуле криволинейный интеграл взят по замкнутому контуру $L$, составленному из кривых $MPN$ и $NQM$. Этот контур $L$ можно, очевидно, считать произвольным.

Таким образом, из условия, что для любых двух точек $M$ и $N$ криволинейный интеграл не зависит от формы соединяющей их кривой, а зависит только от положения этих точек, следует, что криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Справедливо и обратное заключение: если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то этот криволинейный интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей две любые точки, а зависит только от положения этих точек. Действительно, из равенства (2) следует равенство (1).

В примере 4 § 2 криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, в примере 3 криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования, так как в этом примере интеграл по замкнутому контуру не равняется нулю, а дает площадь, ограниченную рассматриваемым контуром; в примерах 1 и 2 криволинейные интегралы также зависят от пути интегрирования.

Естественно возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ для того, чтобы криволинейный интеграл $\int X\,dx+Y\,dy$ по любому замкнутому контуру был равен нулю. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема. *Пусть во всех точках некоторой области $D$ функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$ непрерывны. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру $L$, лежащему в области $D$, был равен нулю, т. е. чтобы*

$$\oint\limits_L X(x, y)\,dx+Y(x, y)\,dy=0, \tag{2'}$$

*необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

*во всех точках области $D$.*



Доказательство. Рассмотрим произвольный замкнутый контур $L$ в области $D$ и для него напишем формулу Грина:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_L X\,dx+Y\,dy.$$

Если выполняется условие (3), то двойной интеграл, стоящий слева, тождественно равен нулю и, следовательно,

$$\oint\limits_L X\,dx+Y\,dy=0.$$

Таким образом, достаточность условия (3) доказана.

Докажем теперь необходимость этого условия, т. е. докажем, что если равенство (2) выполняется для любой замкнутой кривой $L$ в области $D$, то в каждой точке этой области выполняется и условие (3).

Допустим, напротив, что равенство (2) выполняется, т. е.

$$\oint\limits_L X\,dx+Y\,dy=0,$$

а условие (3) не выполняется, т. е.

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\neq 0$$

хотя бы в одной точке. Пусть, например, в некоторой точке $P(x_0;\ y_0)$ имеем неравенство

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}>0.$$

Так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, то она будет положительна и больше некоторого числа $\delta>0$ во всех точках некоторой достаточно малой области $D'$, содержащей точку $P(x_0;\ y_0)$. Возьмем двойной интеграл по этой области от разности $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$. Он будет иметь положительное значение. Действительно,

$$\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy>\iint\limits_{D'}\delta\,dx\,dy=\delta\iint\limits_{D'}dx\,dy=\delta D'>0.$$

Но по формуле Грина левая часть последнего неравенства равна криволинейному интегралу по границе $L'$ области $D'$, который равен нулю. Следовательно, последнее неравенство противоречит условию (2) и, значит, предположение, что $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$ отлично от нуля хотя бы в одной точке, неверно. Отсюда

вытекает, что

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

во всех точках данной области $D$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

В § 9 гл. XIII было доказано, что выполнение условия

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

равносильно тому, что выражение $X\,dx + Y\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$X\,dx + Y\,dy = du(x, y),$$

причем

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Но в этом случае вектор

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

есть градиент функции $u(x, y)$; функция $u(x, y)$, градиент которой равен вектору $X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$, называется *потенциалом* этого вектора.

Докажем, что *в этом случае криволинейный интеграл* $I = \int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ *по любой кривой* $L$, *соединяющей точки* $M$ *и* $N$, *равняется разности значений функции и в этих точках*:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

Доказательство. Если $X\,dx + Y\,dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, то $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ и криволинейный интеграл примет вид

$$I = \int\limits_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Для вычисления этого интеграла напишем параметрические уравнения кривой $L$, соединяющей точки $M$ и $N$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Будем считать, что значению параметра $t = t_0$ соответствует точка $M$, а значению $t = T$ — точка $N$. Тогда криволинейный

интеграл сведется к следующему определенному интегралу:

$$I=\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]dt.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть функция от $t$, являющаяся полной производной от функции $u[\varphi(t),\ \psi(t)]$ по $t$. Поэтому

$$I=\int_{t_0}^{T}\frac{du}{dt}\,dt=u[\varphi(t),\ \psi(t)]\,|\,_{t_0}^{T}=u[\varphi(T),\ \psi(T)]-u[\varphi(t_0),\ \psi(t_0)]=$$
$$=u(N)-u(M).$$

Как мы видим, криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от формы кривой, по которой производится интегрирование.

Аналогичное утверждение имеет место и для криволинейного интеграла по пространственной кривой (см. ниже § 7).

Замечание. Иногда приходится рассматривать криволинейные интегралы по длине дуги $L$ от некоторой функции $X(x, y)$:

$$\int_L X(x, y)\,ds=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}X(x_i, y_i)\,\Delta s_i, \tag{4}$$

где $ds$ — дифференциал дуги. Вычисляются такие интегралы аналогично вычислению рассмотренных выше криволинейных интегралов. Пусть кривая $L$ задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ — непрерывные функции от $t$.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — значения параметра $t$, соответствующие началу и концу дуги $L$.

Так как

$$ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt,$$

то мы получаем формулу для вычисления интеграла (4):

$$\int_L X(x, y)\,ds=\int_\alpha^\beta X[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Можно рассматривать криволинейный интеграл по дуге пространственной кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$:

$$\int_L X(x, y, z)\,ds=\int_\alpha^\beta X[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt.$$

С помощью криволинейных интегралов по дуге определяются, например, координаты центра масс линий.

Рассуждая так же, как в § 8 гл. XII (т. I), получим формулу для вычисления координат центра масс пространственной кривой:

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\,ds}{\int\limits_L ds},\quad y_c=\frac{\int\limits_L y\,ds}{\int\limits_L ds},\quad z_c=\frac{\int\limits_L z\,ds}{\int\limits_L ds}. \tag{5}$$

Пример. Найти координаты центра масс одного витка винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt\quad (0\leqslant t<2\pi),$$

если ее линейная плотность постоянна.

Решение. Применяя формулу (5), найдем

$$x_c=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt}=\frac{a\cdot 0}{2\pi}=0.$$

Аналогично $y_c=0$,

$$z_c=\frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2}=\pi b.$$

Итак, координаты центра масс одного витка винтовой линии равны

$$x_c=0,\quad y_c=0,\quad z_c=\pi b.$$

## § 5. Поверхностный интеграл

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задана некоторая область $V$. Пусть в области $V$ задана поверхность $\sigma$, ограниченная некоторой пространственной линией $\lambda$.

Относительно поверхности $\sigma$ мы будем предполагать, что в каждой ее точке $P$ определяется положительное направление нормали единичным вектором $\boldsymbol{n}(P)$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности.

Пусть в каждой точке поверхности определен вектор

$$\boldsymbol{F}=X(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i}+Y(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j}+Z(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k},$$

где $X$, $Y$, $Z$ — непрерывные функции координат.

Разобьем поверхность каким-либо способом на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$. На каждой площадке возьмем произвольную точку $P_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_i (\boldsymbol{F}(P_i)\,\boldsymbol{n}(P_i))\,\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}(P_i)$ — значение вектора $\boldsymbol{F}$ в точке $P_i$ площадки $\Delta\sigma_i$, $\boldsymbol{n}(P_i)$ — единичный вектор нормали в этой точке, $\boldsymbol{Fn}$ — скалярное произведение этих векторов.



Предел суммы (1), распространенный на все площадки $\Delta\sigma_i$ при стремлении к нулю диаметров всех таких площадок, называется *поверхностным интегралом* и обозначается символом

$$\iint\limits_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma.$$

Таким образом, по определению *)

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\to 0}\sum \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i=\iint\limits_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma. \tag{2}$$

Каждое слагаемое суммы (1)

$$\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i=F_i\,\Delta\sigma_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i) \tag{3}$$

может быть истолковано механически следующим образом: это произведение равно объему цилиндра с основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой $F_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i)$. Если вектор $\boldsymbol{F}$ есть скорость жидкости, протекающей через поверхность $\sigma$, то произведение (3) равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_i$ за единицу времени в направлении вектора $\boldsymbol{n}_i$ (рис. 352).

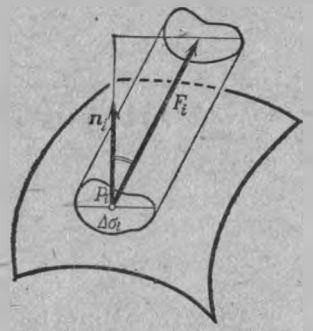


Рис. 352.

Выражение $\iint\limits_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma$ представляет собой общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность $\sigma$ в положительном направлении, если под вектором $\boldsymbol{F}$ подразумевать вектор скорости течения жидкости в данной точке. Поэтому поверхностный интеграл (2) называется *потоком векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность* $\sigma$.

*) Если поверхность $\sigma$ такова, что в каждой ее точке существует касательная плоскость, которая непрерывно меняется с перемещением точки $P$ по поверхности, и если векторная функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна на этой поверхности, то этот предел существует (эту теорему существования интеграла по поверхности мы принимаем без доказательства).

С помощью криволинейных интегралов по дуге определяются, например, координаты центра масс линий.

Рассуждая так же, как в § 8 гл. XII (т. I), получим формулу для вычисления координат центра масс пространственной кривой:

$$x_c=\frac{\int\limits_L x\,ds}{\int\limits_L ds},\quad y_c=\frac{\int\limits_L y\,ds}{\int\limits_L ds},\quad z_c=\frac{\int\limits_L z\,ds}{\int\limits_L ds}. \tag{5}$$

Пример. Найти координаты центра масс одного витка винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt\quad (0\leqslant t<2\pi),$$

если ее линейная плотность постоянна.

Решение. Применяя формулу (5), найдем

$$x_c=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt}=\frac{a\cdot 0}{2\pi}=0.$$

Аналогично $y_c=0$,

$$z_c=\frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2}=\pi b.$$

Итак, координаты центра масс одного витка винтовой линии равны

$$x_c=0,\quad y_c=0,\quad z_c=\pi b.$$

## § 5. Поверхностный интеграл

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задана некоторая область $V$. Пусть в области $V$ задана поверхность $\sigma$, ограниченная некоторой пространственной линией $\lambda$.

Относительно поверхности $\sigma$ мы будем предполагать, что в каждой ее точке $P$ определяется положительное направление нормали единичным вектором $\boldsymbol{n}(P)$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности.

Пусть в каждой точке поверхности определен вектор

$$\boldsymbol{F}=X(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i}+Y(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j}+Z(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k},$$

где $X$, $Y$, $Z$ — непрерывные функции координат.

Разобьем поверхность каким-либо способом на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$. На каждой площадке возьмем произвольную точку

$P_i$ и рассмотрим сумму

$$\sum_i (\boldsymbol{F}(P_i)\,\boldsymbol{n}(P_i))\,\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}(P_i)$ — значение вектора $\boldsymbol{F}$ в точке $P_i$ площадки $\Delta\sigma_i$, $\boldsymbol{n}(P_i)$ — единичный вектор нормали в этой точке, $\boldsymbol{Fn}$ — скалярное произведение этих векторов.

Предел суммы (1), распространенный на все площадки $\Delta\sigma_i$ при стремлении к нулю диаметров всех таких площадок, называется *поверхностным интегралом* и обозначается символом

$$\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma.$$

Таким образом, по определению *)

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i \to 0} \sum \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i = \iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma. \tag{2}$$

Каждое слагаемое суммы (1)

$$\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i = F_i\,\Delta\sigma_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i) \tag{3}$$

может быть истолковано механически следующим образом: это произведение равно объему цилиндра с основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой $F_i\cos(\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{F}_i)$. Если вектор $\boldsymbol{F}$ есть скорость жидкости, протекающей через поверхность $\sigma$, то произведение (3) равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_i$ за единицу времени в направлении вектора $\boldsymbol{n}_i$ (рис. 352).

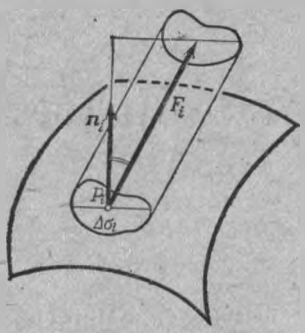


Рис. 352.

Выражение $\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma$ представляет собой общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность $\sigma$ в положительном направлении, если под вектором $\boldsymbol{F}$ подразумевать вектор скорости течения жидкости в данной точке. Поэтому поверхностный интеграл (2) называется *потоком векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *через поверхность* $\sigma$.

*) Если поверхность $\sigma$ такова, что в каждой ее точке существует касательная плоскость, которая непрерывно меняется с перемещением точки $P$ по поверхности, и если векторная функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна на этой поверхности, то этот предел существует (эту теорему существования интеграла по поверхности мы принимаем без доказательства).

Из определения поверхностного интеграла следует, что если поверхность $\sigma$ разбить на части $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, то

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_k} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma.$$

Выразим единичный вектор $\boldsymbol{n}$ через его проекции на оси координат: $\boldsymbol{n} = \cos(\boldsymbol{n}, x)\,\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}, y)\,\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{n}, z)\,\boldsymbol{k}$ *).

Подставляя в интеграл (2) выражения векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{n}$ через их проекции, получим

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} [X\cos(\boldsymbol{n}, x) + Y\cos(\boldsymbol{n}, y) + Z\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma. \quad (2')$$

Произведение $\Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, z)$ есть проекция площадки $\Delta\sigma$ на плоскость $Oxy$ (рис. 353); аналогичное утверждение справедливо и для произведений $\Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, x)$ и $\Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, y)$:

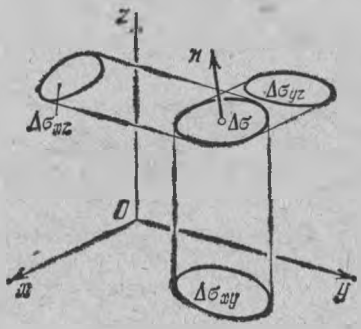


Рис. 353.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, x) &= \Delta\sigma_{yz}, \\ \Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ \Delta\sigma\cos(\boldsymbol{n}, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ — проекции площадки $\Delta\sigma$ на соответствующие координатные плоскости.

На основании этого интеграл (2′) записывают также в другой форме:

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{Fn}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} [X\cos(\boldsymbol{n}, x) + Y\cos(\boldsymbol{n}, y) + Z\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy. \quad (2'')$$

## § 6. Вычисление поверхностного интеграла

Вычисление интеграла по кривой поверхности сводится к вычислению двойного интеграла по плоской области.

Укажем, например, способ вычисления интеграла

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(\boldsymbol{n}, z)\, d\sigma.$$

Пусть поверхность $\sigma$ такова, что всякая прямая, параллельная оси $Oz$, пересекает ее в одной точке. Тогда уравнение поверх-

*) В упражнениях встречаются обозначения
$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \cos\alpha$, $\cos(\boldsymbol{n}, y) = \cos\beta$, $\cos(\boldsymbol{n}, z) = \cos\gamma$.

ности можно написать в виде

$$z = f(x,\ y).$$

Обозначая через $D$ проекцию поверхности $\sigma$ на плоскость $Oxy$, получим (на основании определения поверхностного интеграла)

$$\iint\limits_{\sigma} Z(x,\ y,\ z)\cos(\boldsymbol{n},\ z)\,d\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i)\cos(\boldsymbol{n}_i, z)\,\Delta\sigma_i.$$

Учитывая, далее, последнюю из формул (4) § 5, получим

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(\boldsymbol{n},\ z)\,d\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i,\ y_i,\ f(x_i,\ y_i))\,(\Delta\sigma_{xy})_i =$$

$$= \pm \lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i,\ y_i,\ f(x_i,\ y_i))\,|\Delta\sigma_{xy}|_i,$$

а последнее выражение есть интегральная сумма для двойного интеграла от функции $Z(x,\ y,\ f(x,\ y))$ по области $D$. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(\boldsymbol{n},\ z)\,d\sigma = \pm \iint\limits_{D} Z(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx\,dy.$$

При этом перед двойным интегралом берется знак плюс, если $\cos(\boldsymbol{n},\ z) \geqslant 0$, и знак минус, если $\cos(\boldsymbol{n},\ z) \leqslant 0$.

Если поверхность $\sigma$ не удовлетворяет условию, указанному в начале этого параграфа, то ее разбивают на части, удовлетворяющие этому условию, и вычисляют интеграл по каждой части отдельно.

Аналогично вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{\sigma} X\cos(\boldsymbol{n},\ x)\,d\sigma,\quad \iint\limits_{\sigma} Y\cos(\boldsymbol{n},\ y)\,d\sigma.$$

Доказанное оправдывает запись поверхностного интеграла в форме (2″) из § 5.

При этом правую часть равенства (2″) можно рассматривать как сумму двойных интегралов по соответствующим проекциям области $\sigma$, причем знаки этих двойных интегралов (или, как говорят иначе, знаки произведений $dy\,dz$, $dx\,dz$, $dx\,dy$) берутся в соответствии с указанным выше правилом.

Пример 1. Пусть замкнутая поверхность $\sigma$ такова, что всякая прямая, параллельная оси $Oz$, пересекает ее не более чем в двух точках.

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} z\cos(\boldsymbol{n},\ z)\,d\sigma.$$

Положительным направлением нормали будем считать внешнюю нормаль. В данном случае поверхность можно разбить на две части: нижнюю и верхнюю; их уравнения будут соответственно $z = f_1(x,\ y)$ и $z = f_2(x,\ y)$.

Обозначим через $D$ проекцию $\sigma$ на плоскость $Oxy$ (рис. 354); тогда

$$\iint\limits_{\sigma} z\cos(n,\ z)\,d\sigma=\iint\limits_{D} f_2(x,\ y)\,dx\,dy-\iint\limits_{D} f_1(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Знак минус у второго интеграла взят потому, что в поверхностном интеграле знак $dx\,dy$ на поверхности $z=f_1(x,\ y)$ нужно взять отрицательным, так как для нее $\cos(n,\ z)$ отрицателен.

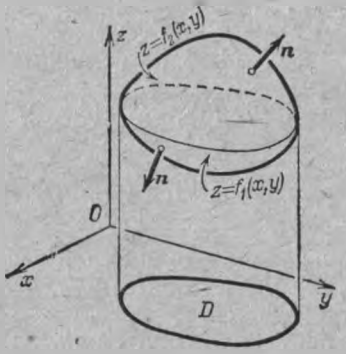



Рис. 354.

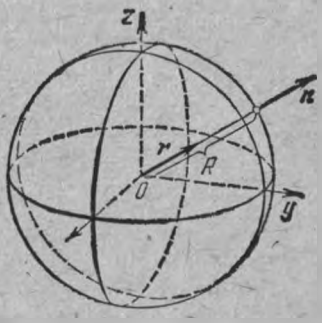



Рис. 355.

Но разность интегралов, стоящих справа в последней формуле, дает объем, ограниченный поверхностью $\sigma$. Значит, объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\sigma$, равен следующему интегралу по поверхности:

$$V=\iint\limits_{\sigma} z\cos(n,\ z)\,d\sigma.$$

Пример 2. Положительный электрический заряд $e$, помещенный в начале координат, создает векторное поле, так что в каждой точке пространства определяется вектор $\boldsymbol{F}$ по закону Кулона:

$$\boldsymbol{F}=k\frac{e}{r^2}\boldsymbol{r},$$

где $r$ — расстояние рассматриваемой точки от начала координат; $\boldsymbol{r}$ — единичный вектор, направленный по радиус-вектору данной точки (рис. 355); $k$ — постоянный коэффициент. Определить поток векторного поля через сферу радиуса $R$ с центром в начале координат.

Решение. Принимая во внимание, что $r=R=\text{const}$, будем иметь

$$\iint\limits_{\sigma} k\frac{e}{r^2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}\,d\sigma=\frac{ke}{R^2}\iint\limits_{\sigma}\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

Но последний интеграл равен площади поверхности $\sigma$. Действительно, по определению интеграла (учитывая, что $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}=1$) получим

$$\iint\limits_{\sigma}\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}\,d\sigma=\lim_{\Delta\sigma_k\to 0}\sum\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{n}_k\Delta\sigma_k=\lim_{\Delta\sigma_k\to 0}\sum\Delta\sigma_k=\sigma.$$

Следовательно, поток равняется $\dfrac{ke}{R^2}\sigma=\dfrac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi ke$.

## § 7. Формула Стокса

Пусть имеем поверхность $\sigma$ такую, что всякая прямая, параллельная оси $Oz$, пересекает ее в одной точке. Границу поверхности $\sigma$ обозначим через $\lambda$. Положительное направление нормали $n$ возьмем так, чтобы она образовывала с положительным направлением оси $Oz$ острый угол (рис. 356).

Пусть уравнение поверхности есть $z=f(x,\ y)$. Направляющие косинусы нормали выражаются формулами (см. § 6 гл. IX т. I):

$$\cos(n,\ x)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos(n,\ y)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \qquad (1)$$

$$\cos(n,\ z)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Будем предполагать, что поверхность $\sigma$ всеми своими точками лежит в некоторой области $V$. Пусть в области $V$ задана функция $X(x,\ y,\ z)$, непрерывная вместе с частными производными первого порядка. Рассмотрим криволинейный интеграл по кривой $\lambda$

$$\oint_{\lambda} X(x,\ y,\ z)\,dx.$$

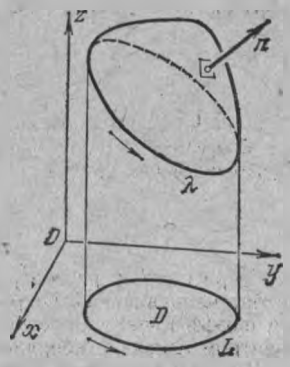



Рис. 356.

На линии $\lambda$ имеем $z=f(x,\ y)$, где $x$, $y$ — координаты точек линии $L$, являющейся проекцией линии $\lambda$ на плоскость $Oxy$ (рис. 356). Следовательно, мы можем написать равенство

$$\oint_{\lambda} X(x,\ y,\ z)\,dx=\oint_{L} X(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx. \qquad (2)$$

Последний интеграл есть криволинейный интеграл по линии $L$. Преобразуем этот интеграл по формуле Грина, положив

$$X(x,\ y,\ f(x,\ y))=\overline{X}(x,\ y),\quad 0=\overline{Y}(x,\ y).$$

Подставляя в формулу Грина вместо $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ их выражения, получим

$$-\iint_{D}\frac{\partial X(x,\ y,\ f(x,\ y))}{\partial y}\,dx\,dy=\oint_{L} X(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx, \qquad (3)$$

где область $D$ ограничена линией $L$. На основании производной сложной функции $X(x, y, f(x, y))$, где $y$ входит и непосредственно, и через функцию $z=f(x, y)$, найдем

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y}=\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y}+\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в левую часть равенства (3), получим

$$-\iint_D\left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y}+\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_L X(x, y, f(x, y))\,dx.$$

Последнее равенство с учетом равенства (2) можно переписать так:

$$\oint_L X(x, y, z)\,dx=-\iint_D\frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy-\iint_D\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Последние два интеграла преобразуются в интегралы по поверхности. Действительно, на основании формулы (2″) из § 5 следует, что если имеем некоторую функцию $A(x, y, z)$, то справедливо равенство

$$\iint_\sigma A(x, y, z)\cos(\boldsymbol{n}, z)\,d\sigma=\iint_\sigma A\,dx\,dy.$$

На основании этого равенства интегралы, стоящие в правой части равенства (5), преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy&=\iint_\sigma\frac{\partial X}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z)\,d\sigma,\\ \iint_D\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy&=\iint_\sigma\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z)\,d\sigma.\end{aligned} \qquad (6)$$

Последний интеграл преобразуем с помощью формул (1) настоящего параграфа: деля почленно второе из этих равенств на третье, находим

$$\frac{\cos(\boldsymbol{n}, y)}{\cos(\boldsymbol{n}, z)}=-\frac{\partial f}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z)=-\cos(\boldsymbol{n}, y).$$

Следовательно,

$$\iint_D\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy=-\iint_\sigma\frac{\partial X}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n}, y)\,d\sigma. \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в равенство (5), получаем

$$\oint_L X(x, y, z)\,dx=-\iint_\sigma\frac{\partial X}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z)\,d\sigma+\iint_\sigma\frac{\partial X}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n}, y)\,d\sigma. \qquad (8)$$

Направление обхода контура $\lambda$ должно быть согласно с выбранным направлением положительной нормали $\boldsymbol{n}$. Именно, если наблюдатель смотрит с конца нормали, то он видит обход вдоль кривой $\lambda$ против часовой стрелки.

Формула (8) справедлива для любой поверхности, если эту поверхность можно разбить на части, уравнения которых имеют вид $z=f(x,\ y)$.

Аналогично можно написать формулы

$$\oint_{\lambda} Y(x,\ y,\ z)\,dy=\iint_{\sigma}\left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n},\ x)+\frac{\partial Y}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},\ z)\right]d\sigma, \qquad (8')$$

$$\oint_{\lambda} Z(x,\ y,\ z)\,dz=\iint_{\sigma}\left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},\ y)+\frac{\partial Z}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},\ x)\right]d\sigma. \qquad (8'')$$

Складывая левые и правые части равенств (8), (8′) и (8″), получим формулу

$$\oint_{\lambda} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ y)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\ z)\right]d\sigma. \qquad (9)$$

Эта формула называется *формулой Стокса* по имени английского физика и математика Д. Стокса (1819—1903). Она устанавливает зависимость между интегралом по поверхности $\sigma$ и криволинейным интегралом по границе $\lambda$ этой поверхности, причем обход по кривой $\lambda$ совершается по тому же правилу, которое было указано выше.

Вектор $\boldsymbol{B}$, определяемый проекциями

$$B_x=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad B_y=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\quad B_z=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},$$

называется *вихрем* или *ротором* векторной функции $\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$ и обозначается *) символом $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$.

Следовательно, в векторной форме формула (9) будет иметь вид

$$\oint_{\lambda}\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s}=\iint_{\sigma}\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\,d\sigma, \qquad (9')$$

и теорема Стокса формулируется так:

*Циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря через эту поверхность.*

Замечание. Если поверхность $\sigma$ есть кусок плоскости, параллельной плоскости $Oxy$, то $\Delta z=0$, и мы получаем формулу Грина как частный случай формулы Стокса.

---

*) rot — три буквы французского слова rotation, что значит «вращение».

Из формулы (9) следует, что если

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0, \tag{10}$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой $\lambda$ равен нулю:

$$\oint_{\lambda} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что в этом случае криволинейный интеграл не зависит от формы кривой интегрирования.

Как и в случае плоской кривой, можно показать, что для выполнения равенства (11) условия (10) являются не только достаточными, но и необходимыми.

При выполнении этих условий подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=du(x, y, z)$$

и, следовательно,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\int_{(M)}^{(N)} du=u(N)-u(M).$$

Это доказывается так же, как соответствующая формула для функции двух переменных (см. § 4).

Пример 1. Напишем основные уравнения динамики материальной точки

$$m\frac{dv_x}{dt}=X,\quad m\frac{dv_y}{dt}=Y,\quad m\frac{dv_z}{dt}=Z.$$

Здесь $m$ — масса точки; $X, Y, Z$ — проекции на оси координат силы, действующей на точку; $v_x=\frac{dx}{dt}$, $v_y=\frac{dy}{dt}$, $v_z=\frac{dz}{dt}$ — проекции скорости $v$ на оси координат. Умножим левые и правые части написанных уравнений на выражения

$$v_x\,dt=dx,\quad v_y\,dt=dy,\quad v_z\,dt=dz.$$

Сложив почленно данные равенства, получим

$$m(v_x\,dv_x+v_y\,dv_y+v_z\,dv_z)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

$$m\cdot\frac{1}{2}d(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Так как $v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2$, то мы можем написать

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Возьмем интеграл вдоль траектории, соединяющей точки $M_1$ и $M_2$:

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

где $v_1$ и $v_2$ — скорости в точках $M_1$ и $M_2$.



Последнее равенство выражает теорему живых сил: приращение кинетической энергии при переходе из одной точки в другую равно работе силы, действующей на массу $m$.

Пример 2. Определить работу силы ньютонова притяжения к неподвижному центру массы $m$ при перемещении единичной массы из положения $M_1(a_1; b_1; c_1)$ в положение $M_2(a_2; b_2; c_2)$.

Решение. Пусть начало координат помещено в неподвижный центр притяжения. Обозначим через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор точки $M$ (рис. 357), соответствующий произвольному положению единичной массы, а через $\boldsymbol{r}^0$ — единичный вектор, направленный по вектору $\boldsymbol{r}$. Тогда $\boldsymbol{F}=-\frac{km}{r^2}\boldsymbol{r}^0$, где $k$ — гравитационная постоянная. Проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси координат будут

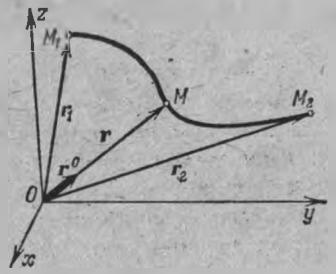



Рис. 357.

$$X=-km\frac{1}{r^2}\frac{x}{r},\quad Y=-km\frac{1}{r^2}\frac{y}{r},$$

$$Z=-km\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}.$$

Тогда работа силы $\boldsymbol{F}$ на пути $M_1M_2$ равна

$$A=-km\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r^3}=-km\int_{(M_1)}^{(M_2)}\frac{r\,dr}{r^3}=km\int_{(M_1)}^{(M_2)}d\left(\frac{1}{r}\right)$$

(так как $r^2=x^2+y^2+z^2$, $r\,dr=x\,dx+y\,dy+z\,dz$). Если обозначить через $r_1$ и $r_2$ длины радиус-векторов точек $M_1$ и $M_2$, то

$$A=km\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Таким образом, здесь криволинейный интеграл также не зависит от формы кривой интегрирования, а зависит только от положения начальной и конечной точек. Функция $u=\frac{km}{r}$ называется *потенциалом* поля тяготения, создаваемого массой $m$. В данном случае

$$X=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial u}{\partial z},\quad A=u(M_2)-u(M_1),$$

т. е. работа при перенесении единичной массы равняется разности значений потенциала в конечной и начальной точках.

## § 8. Формула Остроградского

Пусть в пространстве задана правильная трехмерная область $V$, ограниченная замкнутой поверхностью $\sigma$ и проектирующаяся на плоскость $Oxy$ в правильную двухмерную область $D$. Мы предположим, что поверхность $\sigma$ можно разбить на три части $\sigma_1$, $\sigma_2$ и $\sigma_3$ так, что уравнения первых двух имеют вид $z=f_1(x, y)$ и $z=f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — функции, непрерывные в области $D$, а третья часть $\sigma_3$ есть цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $Oz$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Произведем сначала интегрирование по $z$:

$$I = \iint\limits_D \left( \int\limits_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy. \quad (1)$$

Выберем на нормали к поверхности определенное направление, а именно то, которое совпадает с направлением внешней нормали к поверхности $\sigma$. Тогда $\cos(n, z)$ будет на поверхности $\sigma_2$ положительным, а на поверхности $\sigma_1$ отрицательным; на поверхности $\sigma_3$ он равен нулю.

Двойные интегралы, стоящие в правой части равенства (1), равны соответствующим интегралам по поверхности:

$$\begin{aligned} \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy &= \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma, \\ \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy &= \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z)\, (-\cos(n, z))\, d\sigma. \end{aligned} \quad (2')$$

В последнем интеграле мы написали $(-\cos(n, z))$ потому, что элемент поверхности $\sigma_1$ и элемент площади $\Delta s$ области $D$ связаны соотношением $\Delta s = \Delta\sigma\,[-\cos(n, z)]$, так как угол $(n, z)$ тупой.

Итак,

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = -\iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z)\, d\sigma. \quad (2'')$$

Подставляя (2′) и (2″) в равенство (1), получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Для удобства дальнейших формул последнее равенство перепишем так (прибавив $\iint\limits_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma = 0$, так как на поверхности $\sigma_3$ выполняется равенство $\cos(n, z) = 0$):

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z \cos(n, z)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z \cos(n, z)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} Z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Но сумма интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, есть интеграл по всей замкнутой поверхности σ; поэтому

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma Z(x,\ y,\ z)\cos(\boldsymbol{n},\ z)\,d\sigma.$$

Аналогично можно получить соотношения,

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma Y(x,\ y,\ z)\cos(\boldsymbol{n},\ y)\,d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma X(x,\ y,\ z)\cos(\boldsymbol{n},\ x)\,d\sigma.$$

Складывая почленно три последних равенства, получим *формулу Остроградского* *)

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_\sigma (X\cos(\boldsymbol{n},\ x)+Y\cos(\boldsymbol{n},\ y)+Z\cos(\boldsymbol{n},\ z))\,d\sigma. \quad (2)$$

Выражение $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ называется *дивергенцией* вектора (или дивергенцией векторной функции)

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

и обозначается **) символом $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Отметим, что эта формула справедлива для любой области, которая может быть разбита на области, удовлетворяющие условиям, указанным в начале этого параграфа.

Дадим гидромеханическую интерпретацию полученной формулы.

Пусть вектор $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$ есть вектор скорости жидкости, протекающей через область $V$. Тогда интеграл по поверхности, стоящей в формуле (2), есть интеграл от проекции вектора $\boldsymbol{F}$ на внешнюю нормаль $\boldsymbol{n}$; он дает количество жидкости, вытекающей из области $V$ через поверхность σ в единицу времени (или втекающей в область $V$, если этот интеграл отрицателен). Это количество выражается через тройной интеграл от $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$.

*) Эта формула (называемая иногда формулой Остроградского—Гаусса) была открыта знаменитым русским математиком М. В. Остроградским (1801—1861) и опубликована им в 1828 г. в статье «Заметка по теории теплоты».

**) div—три первые буквы французского слова divergence, что значит «расходимость».

Если $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$, то двойной интеграл по любой замкнутой поверхности равен нулю, т. е. количество вытекающей (или втекающей) через любую замкнутую поверхность $\sigma$ жидкости будет равно нулю (отсутствуют источники). Точнее говоря, количество жидкости, втекающей внутрь области, равно количеству жидкости, вытекающей из этой области.

В векторной форме формула Остроградского имеет вид

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dv = \iint_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, d\sigma \qquad (1')$$

и читается так: *интеграл от дивергенции векторного поля* $\boldsymbol{F}$, *распространенный по некоторому объему, равен потоку вектора через поверхность, ограничивающую данный объем.*

## § 9. Оператор Гамильтона. Некоторые его применения

Пусть мы имеем функцию $u = u(x, y, z)$. В каждой точке области, где определена и дифференцируема функция $u(x, y, z)$, определяется градиент

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (1)$$

Градиент функции $u(x, y, z)$ иногда обозначают так:

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \qquad (2)$$

знак $\nabla$ читается «набла».

1) Равенство (2) удобно символически записать так:

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u \qquad (2')$$

и рассматривать символ

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3)$$

как «символический вектор». Этот символический вектор называется *оператором Гамильтона* или *набла-оператором* ($\nabla$-*оператором*). Из формул (2) и (2′) следует, что при «умножении» символического вектора $\nabla$ на скалярную функцию $u$ получается градиент этой функции:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \qquad (4)$$

2) Можно составить скалярное произведение символического вектора $\nabla$ на вектор $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$$

(см. § 8). Итак,

$$\nabla \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

3) Составим векторное произведение символического вектора $\nabla$ на вектор $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$$

(см. § 7). Итак,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

Из сказанного следует, что употребление символического вектора $\nabla$ позволяет очень коротко выражать векторные операции. Рассмотрим еще несколько формул.

4) Векторное поле $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ называется *потенциальным векторным полем*, если вектор $\boldsymbol{F}$ есть градиент некоторой скалярной функции $u(x, y, z)$: $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$, или

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

В этом случае проекции вектора $\boldsymbol{F}$ будут

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Из этих равенств следует (см. т. I, гл. VIII, § 12)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого вектора $\boldsymbol{F}$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

Применяя оператор $\nabla$, равенство (7) на основании формул (4) и (6) можно записать так:

$$\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}. \tag{7'}$$

Пользуясь тем свойством, что для умножения векторного произведения на скаляр достаточно умножить на этот скаляр один из сомножителей, запишем:

$$(\nabla \times \nabla)\, u = \mathbf{0}. \tag{7''}$$

Здесь оператор $\nabla$ снова обладает свойствами обыкновенного вектора: векторное произведение вектора на себя равно нулю.

Векторное поле $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, для которого $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, называется *безвихревым*. Из равенства (7) следует, что всякое потенциальное поле является безвихревым.

Справедливо и обратное заключение, т. е. если некоторое векторное поле $\boldsymbol{F}$ является безвихревым, то оно потенциально. Справедливость этого утверждения следует из рассуждений, проведенных в конце § 7.

5) Векторное поле $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, для которого $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$, т. е. векторное поле, в котором отсутствуют источники (см. § 8), называется *соленоидальным* или *трубчатым*. Докажем, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0, \tag{8}$$

т. е. что поле вихрей свободно от источников.

Действительно, если $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$, то

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

и поэтому

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

С помощью оператора $\nabla$ равенство (8) запишется так:

$$\nabla (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0. \tag{8'}$$

Левую часть этого равенства можно рассматривать как векторно-скалярное (смешанное) произведение трех векторов: $\nabla$, $\nabla$, $\boldsymbol{F}$, из которых два одинаковых. Это произведение, очевидно, равно нулю.

6) Пусть имеем скалярное поле $u = u(x, y, z)$. Определим поле градиентов:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Найдем далее $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial y}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, или

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Правая часть этого выражения обозначается

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{10}$$

или символически

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u.$$

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа.*

Следовательно, равенство (9) можно записать так:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \tag{11}$$

С помощью оператора $\nabla$ равенство (11) записываем в виде

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u, \quad \text{т. е.} \quad \Delta = \nabla^2. \tag{11'}$$

Заметим, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{12}$$

или

$$\Delta u = 0 \tag{12'}$$

называется *уравнением Лапласа.* Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией.*

### Упражнения к главе XV

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

1. $\int y^2\,dx + 2xy\,dy$ по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. *Отв.* 0.

2. $\int y\,dx - x\,dy$ по дуге эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. *Отв.* $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ по окружности с центром в начале координат. *Отв.* 0.

4. $\int \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ по отрезку прямой $y = x$ от $x = 1$ до $x = 2$. *Отв.* $\ln 2$.

5. $\int yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ по дуге винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$ при изменении $t$ от 0 до $2\pi$. *Отв.* 0.

6. $\int x\,dy - y\,dx$ по дуге астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. *Отв.* $\frac{3}{4}\pi a^2$ (удвоенная площадь астроиды).

7. $\int x\,dy - y\,dx$ по петле декартова листа $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. *Отв.* $3a^2$ (удвоенная площадь области, ограниченной указанной петлей).

8. $\int x\,dy - y\,dx$ по кривой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. *Отв.* $-6\pi a^2$ (удвоенная площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды и осью $Ox$).

Доказать, что:

9. $\operatorname{grad}(c\varphi) = c \operatorname{grad}\varphi$, где $c$ — постоянная.

10. $\operatorname{grad}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 \operatorname{grad}\varphi + c_2 \operatorname{grad}\psi$, где $c_1$ и $c_2$ — постоянные.

11. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$.

12. Найти $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad} 1/r$, $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Отв.* $\boldsymbol{r}/r$; $2\boldsymbol{r}$; $-\boldsymbol{r}/r^3$; $f'(r)\,\boldsymbol{r}/r$.

13. Доказать, что $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

14. Вычислить $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. *Отв.* 3.

15. Вычислить $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\varphi)$, где $\boldsymbol{A}$ — векторная функция, а $\varphi$ — скалярная функция. *Отв.* $\varphi \operatorname{div}\boldsymbol{A} + (\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{A})$.

16. Вычислить $\operatorname{div}(\boldsymbol{rc})$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. *Отв.* $\boldsymbol{cr}/r$.

17. Вычислить $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{rA})$. *Отв.* $\boldsymbol{AB}$.

Доказать, что:

18. $\operatorname{rot}(c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2) = c_1 \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1 + c_2 \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_2$, где $c_1$ и $c_2$ — постоянные.

19. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{Ac}) = \operatorname{grad}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

20. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$.

21. $\boldsymbol{A} \times \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})$.

## Интегралы по поверхности

22. Доказать, что $\iint \cos(\boldsymbol{n}, z)\,d\sigma = 0$, если $\sigma$ — замкнутая поверхность, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к ней.

23. Найти момент инерции поверхности сегмента сферы с уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$, отсекаемого плоскостью $z=H$, относительно оси $Oz$. *Отв.* $\dfrac{2\pi R}{3}(2R^3 - 3R^2H + H^3)$.

24. Найти момент инерции поверхности параболоида вращения $x^2+y^2=2cz$, отсеченной плоскостью $z=c$, относительно оси $Oz$. *Отв.* $4\pi c^4 \dfrac{6\sqrt{3}+1}{15}$.

25. Вычислить координаты центра масс части поверхности конуса $x^2+y^2=R^2z^2/H^2$, отсеченной плоскостью $z=H$. *Отв.* $(0;\ 0;\ 2H/3)$.

26. Вычислить координаты центра масс сегмента поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, отсекаемого плоскостью $z=H$. *Отв.* $(0;\ 0;\ (R+H)/2)$.

27. Найти $\iint\limits_\sigma [x\cos(\boldsymbol{n}, x) + y\cos(\boldsymbol{n}, y) + z\cos(\boldsymbol{n}, z)]\,d\sigma$, где $\sigma$ — замкнутая поверхность. *Отв.* $3V$, где $V$ — объем тела, ограниченного поверхностью $\sigma$.

28. Найти $\iint\limits_\sigma z\,dx\,dy$, где $\sigma$ — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Отв.* $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

29. Найти $\iint\limits_\sigma x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где $\sigma$ — внешняя сторона поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Отв.* 0.

30. Найти $\iint\limits_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, где $\sigma$ — боковая поверхность конуса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leqslant z \leqslant b$. *Отв.* $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

**31.** По формуле Стокса преобразовать интеграл $\oint\limits_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

*Отв.* $-\iint\limits_\sigma (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,d\sigma$.

Найти криволинейные интегралы, применяя формулу Стокса и непосредственно:

**32.** $\oint\limits_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, где $L$ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. *Отв.* 0.

**33.** $\oint\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, где $L$ — окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. *Отв.* $-\pi R^6/8$.

Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностные интегралы в интегралы по объему:

**34.** $\iint\limits_\sigma (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,d\sigma$. *Отв.* $\iiint\limits_V 3\,dx\,dy\,dz=3V$.

**35.** $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2+z^2)\,(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy)$. *Отв.* $2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

**36.** $\iint\limits_\sigma xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$. *Отв.* 0.

**37.** $\iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$. *Отв.* $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$.

С помощью формулы Остроградского вычислить следующие интегралы:

**38.** $\iint\limits_\sigma (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,d\sigma$, где $\sigma$ — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *Отв.* $4\pi abc$.

**39.** $\iint\limits_\sigma (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,d\sigma$, где $\sigma$ — поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Отв.* $12\pi R^5/5$.

**40.** $\iint\limits_\sigma x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где $\sigma$ — поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$. *Отв.* $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

**41.** $\iint\limits_\sigma x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, где $\sigma$ — поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$. *Отв.* $3\pi a^2H$.

**42.** Доказать тождество $\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, где $C$ — контур, ограничивающий область $D$, а $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали.

Р е ш е н и е.

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_C -Y\,dx+X\,dy=\oint\limits_C [-Y\cos(s,\ x)+X\sin(s,\ x)]\,ds,$$

где $(s, x)$ — угол между касательной к контуру $C$ и осью $Ox$. Если через $(n, x)$ обозначим угол между нормалью и осью $Ox$, то $\sin(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\sin(n, x)$. Следовательно,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_C [X\cos(n, x) + Y\sin(n, x)]\,ds.$$

Полагая $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, получим

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = \int\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(n, x)\right) ds,$$

или

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = \oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

**43.** Доказать тождество (так называемую *формулу Грина*)

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

где $u$ и $v$ — функции, непрерывные и имеющие непрерывные производные до второго порядка в области $D$.

Символы $\Delta u$ и $\Delta v$ обозначают следующее:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Решение. В формуле

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma [X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z)]\,d\sigma$$

положим $X = vu'_x - uv'_x$; $Y = vu'_y - uv'_y$, $Z = vu'_z - uv'_z$. Тогда

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = v(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u(v''_{xx} + v''_{yy} + u''_{zz}) = v\,\Delta u - u\,\Delta v,$$

$$X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z) =$$

$$= v(u'_x\cos(n, x) + u'_y\cos(n, y) + u'_z\cos(n, z)) -$$

$$- u(v'_x\cos(n, x) + v'_y\cos(n, y) + v'_z\cos(n, z)) = v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma.$$

**44.** Доказать тождество

$$\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma,$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Р е ш е н и е. Положим в формуле Грина, выведенной в предыдущем примере, $v=1$. Тогда $\Delta v=0$, и мы получаем указанное тождество.

45. Если $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в некоторой области, т. е. такая функция, которая в любой точке этой области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

то

$$\iint_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

где $\sigma$ — замкнутая поверхность.

Р е ш е н и е. Это непосредственно следует из формулы задачи 44.

46. Пусть $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в некоторой области $V$ и пусть в области $V$ находится сфера $\bar{\sigma}$ с центром в точке $M(x_1; y_1; z_1)$ и радиусом $R$. Доказать, что

$$u(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим область $\Omega$, ограниченную двумя сферами $\sigma$, $\bar{\sigma}$ радиусов $R$ и $\rho$ ($\rho<R$) с центрами в точке $M(x_1; y_1; z_1)$. Применим к этой области формулу Грина, установленную в задаче 43, приняв за $u$ указанную выше функцию, а за функцию $v$

$$v=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Непосредственным дифференцированием и подстановкой убеждаемся, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$. Следовательно,

$$\iint_{\sigma+\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma=0,$$

или

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma-\iint_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma=0.$$

На поверхностях $\bar{\sigma}$ и $\sigma$ величина $1/r$ постоянна ($1/R$ и $1/\rho$) и потому может быть вынесена за знак интеграла. В силу результата, установленного в задаче 45, имеем

$$\frac{1}{R}\iint_{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0,\quad \frac{1}{\rho}\iint_{\bar{\sigma}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Следовательно,

$$-\iint_{\sigma}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma+\iint_{\bar{\sigma}}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

но

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}=-\frac{1}{r^2}.$$

Поэтому

$$+\iint\limits_{\underline{\sigma}} u\frac{1}{r^2}\,d\sigma-\iint\limits_{\bar{\sigma}} u\frac{1}{r^2}\,d\sigma=0,$$

или

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma. \tag{1}$$

Применим к интегралу, стоящему слева, теорему о среднем:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{u(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}} d\sigma, \tag{2}$$

где $u(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ — точка на поверхности сферы радиуса $\rho$ с центром в точке $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Заставим $\rho$ стремиться к нулю; тогда $u(\xi,\ \eta,\ \zeta)\longrightarrow u(x_1,\ y_1,\ z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}} d\sigma=\frac{4\pi\rho^2}{\rho^2}=4\pi.$$

Следовательно, при $\rho\longrightarrow 0$ получаем

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma\longrightarrow u(x_1,\ y_1,\ z_1)\cdot 4\pi.$$

Далее, так как правая часть равенства (1) не зависит от $\rho$, то при $\rho\longrightarrow 0$ окончательно получим

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma=4\pi u(x_1,\ y_1,\ z_1),$$

или

$$u(x_1,\ y_1,\ z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$

ГЛАВА XVI

# РЯДЫ

## § 1. Ряд. Сумма ряда

Определение 1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел *)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Выражение

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

называется *числовым рядом*. При этом числа $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ называются *членами ряда*.

Определение 2. Сумма конечного числа $n$ первых членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*:

$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n.$$

Рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} s_1&=u_1,\\ s_2&=u_1+u_2,\\ s_3&=u_1+u_2+u_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ s_n&=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n. \end{aligned}$$

Если существует конечный предел

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n,$$

то его называют *суммой ряда* (1) и говорят, что *ряд сходится*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует (например, $s_n\longrightarrow\infty$ при $n\longrightarrow\infty$), то говорят, что *ряд* (1) *расходится и суммы не имеет*.

Пример. Рассмотрим ряд

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (2)$$

*) Последовательность считается заданной, если известен закон, по которому можно вычислить любой ее член $u_n$ при данном $n$.

Это — *геометрическая прогрессия* с первым членом $a$ и знаменателем $q$ ($a \neq 0$). Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии равна (при $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q},$$

или

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Значит, в случае $|q| < 1$ ряд (2) сходится и его сумма

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

2) Если $|q| > 1$, то $|q^n| \to \infty$ при $n \to \infty$ и тогда $\frac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует. Таким образом, в случае $|q| > 1$ ряд (2) расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (2) имеет вид

$$a + a + a + \ldots$$

В этом случае

$$s_n = na, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

т. е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (2) имеет вид

$$a - a + a - a + \ldots$$

В этом случае

$$s = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном,} \\ a \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, $s_n$ предела не имеет — ряд расходится.

Таким образом, геометрическая прогрессия (с первым членом, отличным от нуля) сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине меньше единицы.

Теорема 1. *Если сходится ряд, получившийся из данного ряда* (1) *отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких членов.*

Иными словами, *на сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов.*

Доказательство. Пусть $s_n$ — сумма $n$ первых членов ряда (1), $c_k$ — сумма $k$ отброшенных членов (заметим, что при достаточно большом $n$ все отброшенные члены содержатся в сумме $s_n$), $\sigma_{n-k}$ — сумма членов ряда, входящих в сумму $s_n$ и не

входящих в $c_k$. Тогда имеем:

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

где $c_k$ — постоянное число, не зависящее от $n$.

Из последнего соотношения следует, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$; если существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, а это и доказывает справедливость теоремы.

В заключение параграфа укажем два простых свойства рядов.

Теорема 2. *Если ряд*

$$a_1 + a_2 + \dots \tag{3}$$

*сходится и его сумма равна* $s$, *то ряд*

$$ca_1 + ca_2 + \dots, \tag{4}$$

*где* $c$ — *какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна* $cs$.

Доказательство. Обозначим $n$-ю частичную сумму ряда (3) через $s_n$, а ряда (4) — через $\sigma_n$. Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cs_n.$$

Отсюда ясно, что предел $n$-й частичной суммы ряда (4) существует, так как

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Итак, ряд (4) сходится и его сумма равна $cs$.

Теорема 3. *Если ряды*

$$a_1 + a_2 + \dots \tag{5}$$

*и*

$$b_1 + b_2 + \dots \tag{6}$$

*сходятся и их суммы соответственно равны* $\bar{s}$ *и* $\bar{\bar{s}}$, *то ряды*

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots \tag{7}$$

*и*

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots \tag{8}$$

*также сходятся и их суммы соответственно равны* $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ *и* $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Доказательство. Докажем сходимость ряда (7). Обозначая его $n$-ю частичную сумму через $\sigma_n$, а $n$-е частичные суммы рядов (5) и (6) соответственно через $\bar{s}_n$ и $\bar{\bar{s}}_n$, получим

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}.$$

Таким образом, ряд (7) сходится и его сумма равна $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

Аналогично доказывается, что ряд (8) также сходится и его сумма равна $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Про ряды (7) и (8) говорят, что они получены в результате почленного сложения или соответственно почленного вычитания рядов (5) и (6).

## § 2. Необходимый признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о том, сходится ли данный ряд или расходится. Ниже будут установлены достаточные признаки, на основании которых можно решить этот вопрос. Здесь же мы рассмотрим необходимый признак сходимости ряда, т. е. установим условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Теорема. *Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.*

Доказательство. Пусть ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, т. е. имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

где $s$ — сумма ряда (т. е. конечное фиксированное число); но тогда имеет место также равенство

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s,$$

так как при $n \to \infty$ и $n - 1 \to \infty$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Но

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если n-й член ряда не стремится к нулю при* $n \to \infty$, *то ряд расходится.*

Пример. Ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Подчеркнем, что рассмотренный признак является только необходимым, но не является достаточным, т. е. *из того, что n-й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится,* — ряд может и расходиться.

Например, так называемый *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходится, хотя

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Чтобы доказать это, напишем подробнее гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots \quad (1)$$

Напишем, далее, вспомогательный ряд

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\overbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}^{16\text{ слагаемых}}+\ldots \quad (2)$$

Ряд (2) строится следующим образом: его первый член равен 1, второй равен 1/2, третий и четвертый равны 1/4, члены с пятого по восьмой равны 1/8, члены с девятого по 16-й равны 1/16, члены с 17-го по 32-й равны 1/32 и т. д.

Обозначим через $s_n^{(1)}$ сумму $n$ первых членов гармонического ряда (1) и через $s_n^{(2)}$ сумму $n$ первых членов ряда (2).

Так как каждый член ряда (1) больше соответствующего члена ряда (2) или равен ему, то для $n>2$

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \quad (3)$$

Подсчитаем частичные суммы ряда (2) для значений $n$, равных $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8 слагаемых}} =$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8 слагаемых}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{\text{16 слагаемых}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

точно так же подсчитывается, что $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ и, вообще, $s_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$.

Таким образом, частичные суммы ряда (2) при достаточно большом $k$ могут быть сделаны больше любого положительного числа, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

но тогда из соотношения (3) следует, что и

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

т. е. гармонический ряд (1) расходится.

## § 3. Сравнение рядов с положительными членами

Пусть имеем два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2)$$

Для них справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если члены ряда* (1) *не больше соответствующих членов ряда* (2), *т. е.*

$$u_n \leqslant v_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3)$$

*и ряд* (2) *сходится, то сходится и ряд* (1).

Доказательство. Обозначим через $s_n$ и $\sigma_n$ соответственно частичную сумму первого и второго рядов:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Из условия (3) следует, что

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

Так как ряд (2) сходится, то существует предел $\sigma$ его частичной суммы

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Из того, что члены рядов (1) и (2) положительны, следует, что $\sigma_n < \sigma$, и тогда в силу неравенства (4)

$$s_n < \sigma.$$

Итак, мы доказали, что частичные суммы $s_n$ ограничены. Заметим, что при увеличении $n$ частичная сумма $s_n$ возрастает, а из того, что последовательность частичных сумм возрастает и ограничена, следует, что она имеет предел *)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

причем очевидно, что

$$s \leqslant \sigma.$$

На основании теоремы 1 можно судить о сходимости некоторых рядов.

Пример 1. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

сходится, так как его члены не больше соответствующих членов ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Но последний ряд сходится, так как его члены, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 1/2. Сумма этого ряда равна 3/2. Следовательно, в силу теоремы 1 данный ряд тоже сходится, причем его сумма не превосходит 3/2.

---

*) Для того чтобы убедиться, что переменная $s_n$ имеет предел, вспомним один признак существования предела последовательности (см. теорему 7 § 5 гл. II т. I): если переменная возрастает и ограничена, то она имеет предел. В данном случае последовательность сумм $s_n$ возрастает и ограничена, следовательно, имеет предел, т. е. ряд сходится.

Теорема 2. *Если члены ряда* (1) *не меньше соответствующих членов ряда* (2), *т. е.*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

*и ряд* (2) *расходится, то и ряд* (1) *расходится.*

Доказательство. Из условия (5) следует, что

$$s_n \geqslant \sigma_n. \tag{6}$$

Так как члены ряда (2) положительны, то его частичная сумма $\sigma_n$ возрастает при возрастании $n$, а так как он расходится, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Но тогда в силу неравенства (6)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

т. е. ряд (1) расходится.

Пример 2. Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

расходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который, как известно, расходится.

Замечание 1. Оба доказанных признака (теоремы 1 и 2) справедливы только для рядов с положительными членами. Они остаются в силе и для того случая, если некоторые члены 1-го или 2-го ряда — нули. Однако эти признаки перестают быть верными, если среди членов ряда имеются отрицательные числа.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 справедливы и в случае, если неравенства (3) или (6) начинают выполняться лишь для $n \geqslant N$, а не для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

## § 4. Признак Даламбера

Теорема (признак Даламбера). *Если в ряде с положительными членами*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

*отношение* $(n+1)$*-го члена к* $n$*-му при* $n\to\infty$ *имеет* (*конечный*) *предел* $l$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{2}$$

*то:*

1) *ряд сходится в случае* $l<1$,

2) *ряд расходится в случае* $l>1$.

(В случае $l=1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.)

Доказательство. 1) Пусть $l<1$. Рассмотрим число $q$, удовлетворяющее соотношению $l<q<1$ (рис. 358).

Из определения предела и соотношения (2) следует, что для всех значений $n$, начиная с некоторого номера $N$, т. е. для $n\geqslant N$, будет иметь место неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q. \tag{2'}$$

Действительно, так как величина $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу $l$, то разность между величиной $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и числом $l$ может быть сделана (начиная с некоторого номера $N$) по абсолютному значению меньше любого положительного числа, в частности, меньше $q-l$, т. е.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<q-l.$$

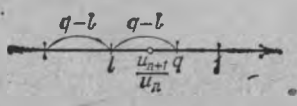



Рис. 358.

Из последнего неравенства и следует неравенство (2'). Записывая неравенство (2') для различных значений $n$, начиная с номера $N$, получим

$$\begin{aligned} &u_{N+1}<qu_N,\\ &u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N,\\ &u_{N+3}<qu_{N+2}<q^3u_N,\\ &\quad\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь два ряда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots, \tag{1}$$

$$u_N+qu_N+q^2u_N+\ldots \tag{1'}$$

Ряд (1') есть геометрическая прогрессия с положительным знаменателем $q<1$. Следовательно, этот ряд сходится. Члены ряда (1), начиная с $u_{N+1}$, меньше членов ряда (1'). На основании теоремы 1 § 3 и теоремы 1 § 1 следует, что ряд (1) сходится.

2) Пусть $l>1$. Тогда из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ (где $l>1$) следует, что, начиная с некоторого номера $N$, т. е. для $n\geqslant N$, будет иметь место неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$$

(рис. 359), или $u_{n+1} > u_n$ для всех $n \geqslant N$. Но это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N+1$, и поэтому общий член ряда не стремится к нулю. Следовательно, ряд расходится.

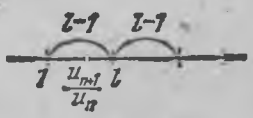



Рис. 359.

Замечание 1. Ряд будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Это следует из того, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то, начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Решение. Здесь

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\,(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

Решение. Здесь

$$u_n=\frac{2^n}{n},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=2\frac{n}{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1.$$

Ряд расходится, причем его общий член $u_n$ стремится к бесконечности.

Замечание 2. Признак Даламбера дает ответ на вопрос о том, сходится ли данный положительный ряд, только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ существует и отличен от 1. Если же этот предел не существует или существует, но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то признак Даламбера не дает возможности установить, сходится ряд или расходится, так как в этом случае ряд может оказаться и сходящимся и расходящимся. Для решения вопроса о сходимости таких рядов надо применить какой-либо другой признак.

Замечание 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, но отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ для всех номеров $n$, начиная с некоторого, больше единицы, то ряд

расходится. Это следует из того, что если $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то $u_{n+1} > u_n$ и общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

Решение. Здесь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

В данном случае ряд расходится, так как $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ для всех $n$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Пример 4. Применяя признак Даламбера к гармоническому ряду $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, замечаем, что $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Значит, на основании признака Даламбера нельзя установить сходимость или расходимость данного ряда. Но ранее мы установили другим путем, что гармонический ряд расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Решение. Здесь

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

На основании признака Даламбера сделать заключения о сходимости ряда нельзя, однако, исходя из других соображений, можно установить, что этот ряд сходится. Заметив, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, мы можем записать данный ряд в виде

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Частичная сумма $n$ первых членов после раскрытия скобок и сокращения будет равна

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т. е. ряд сходится и его сумма равна 1.

## § 5. Признак Коши

Теорема (признак Коши). *Если для ряда с положительными членами*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

*величина* $\sqrt[n]{u_n}$ *имеет конечный предел* $l$ *при* $n\to\infty$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

*то:*

1) *в случае* $l<1$ *ряд сходится;*

2) *в случае* $l>1$ *ряд расходится.*

Доказательство. 1) Пусть $l<1$. Рассмотрим число $q$, удовлетворяющее соотношению $l<q<1$.

Начиная с некоторого номера $n=N$, будет иметь место соотношение

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<q-l;$$

отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{u_n}<q$$

или

$$u_n<q^n$$

для всех $n\geqslant N$.

Рассмотрим теперь два ряда:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots, \qquad (1)$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots \qquad (1')$$

Ряд (1′) сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда (1), начиная с $u_N$, меньше членов ряда (1′). Следовательно, ряд (1) сходится.

2) Пусть $l>1$. Тогда, начиная с некоторого номера $n=N$, будем иметь

$$\sqrt[n]{u_n}>1$$

или

$$u_n>1.$$

Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с $u_N$, больше 1, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд сходится.

Замечание. Как и в признаке Даламбера, случай

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

требует дополнительного исследования. Среди рядов, удовлетворяющих этому условию, могут встретиться как сходящиеся, так и расходящиеся ряды. Так, для гармонического ряда (который, как известно, расходится)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1.$$

Для того чтобы убедиться в этом, докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{1/n} = 0$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n}.$$

Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0.$$

Итак, $\ln \sqrt[n]{1/n} \to 0$, но тогда $\sqrt[n]{1/n} \to 1$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1.$$

Для ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

также имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n}\,\sqrt[n]{1/n} = 1,$$

но этот ряд сходится, так как если отбросим первый член, то члены оставшегося ряда будут меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(см. пример 5 § 4).

## § 6. Интегральный признак сходимости ряда

Теорема. *Пусть члены ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

*положительны и не возрастают, т. е.*

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots, \tag{1'}$$

*и пусть* $f(x)$ — *такая непрерывная невозрастающая функция, что*

$$f(1)=u_1,\quad f(2)=u_2,\ \ldots,\ f(n)=u_n. \tag{2}$$

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится* (см. § 7 гл. XI т. I), *то сходится и ряд* (1);

2) *если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд* (1).

Доказательство. Изобразим члены ряда геометрически, откладывая по оси абсцисс номера 1, 2, 3, ..., $n$, $n+1$, ... членов ряда, а по оси ординат — соответствующие значения членов ряда $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$, ... (рис. 360).

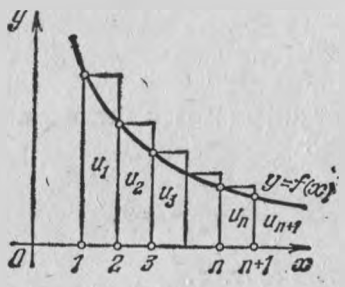



Рис. 360.

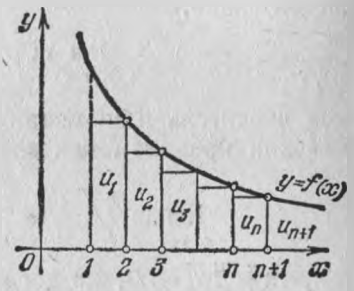



Рис. 361.

Построим на том же чертеже график непрерывной невозрастающей функции

$$y=f(x),$$

удовлетворяющей условию (2).

Рассматривая рис. 360, замечаем, что первый из построенных прямоугольников имеет основание, равное 1, и высоту $f(1)=u_1$. Следовательно, площадь этого прямоугольника равна $u_1$. Площадь второго прямоугольника равна $u_2$ и т. д.; наконец, площадь последнего ($n$-го) из построенных прямоугольников равна $u_n$. Сумма площадей построенных прямоугольников равна сумме $s_n$ первых $n$ членов ряда. С другой стороны, ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками, заключает область, ограниченную кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=1$, $x=n+1$, $y=0$; площадь этой области равна $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Следовательно,

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь рис. 361. Здесь первый (слева) из построенных прямоугольников имеет высоту $u_2$; следовательно, его площадь также равна $u_2$. Площадь второго прямоугольника равна $u_3$ и т. д. Площадь последнего из построенных прямоугольников равна $u_{n+1}$. Следовательно, сумма площадей всех построенных прямоугольников равна сумме всех членов ряда, начиная от второго до $(n+1)$-го, т. е. равна $s_{n+1}-u_1$. С другой стороны, как легко видеть, ступенчатая фигура, образованная этими прямоугольниками, содержится внутри криволинейной фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=1$, $x=n+1$, $y=0$. Площадь этой криволинейной фигуры равна $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Следовательно,

$$s_{n+1}-u_1<\int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

откуда

$$s_{n+1}<\int_1^{n+1} f(x)\,dx+u_1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь оба случая.

1) Предположим, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. имеет конечное значение.

Так как

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx<\int_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

то в силу неравенства (4)

$$s_n<s_{n+1}<\int_1^{+\infty} f(x)\,dx+u_1,$$

т. е. частичная сумма $s_n$ остается ограниченной при всех значениях $n$. Но при увеличении $n$ она возрастает, так как все члены $u_n$ положительны. Следовательно, $s_n$ при $n\to\infty$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, т. е. ряд сходится.

2) Предположим далее, что $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx=\infty$. Это значит, что $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ неограниченно возрастает при возрастании $n$. Но тогда

в силу неравенства (3) $s_n$ также неограниченно возрастает при возрастании $n$, т. е. ряд расходится.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема остается справедливой, если неравенства (1′) выполняются, лишь начиная с некоторого $N$.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

Решение. Применим интегральный признак, положив $f(x)=1/x^p$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^N=\dfrac{1}{1-p}\,(N^{1-p}-1) & \text{при } p\neq 1,\\ \ln x\Big|_1^N=\ln N & \text{при } p=1.\end{cases}$$

Устремляя $N$ к бесконечности, выясним, сходится ли несобственный интеграл в различных случаях.

На основе этого можно будет судить о сходимости или расходимости ряда при различных значениях $p$.

В случае $p>1$ будет $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, т. е. интеграл конечен и, следовательно, ряд сходится;

в случае $p<1$ будет $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty$ — интеграл бесконечен, ряд расходится;

в случае $p=1$ будет $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$ — интеграл бесконечен, ряд расходится.

Заметим, что ни признак Даламбера, ни признак Коши, рассмотренные ранее, не решают вопроса о сходимости этого ряда, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p=1^p=1.$$

## § 7. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

До сих пор мы рассматривали ряды, члены которых положительны. В этом параграфе будем рассматривать ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т. е. ряды вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительны.



Теорема Лейбница. *Если в знакочередующемся ряде*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots \quad (u_n>0) \tag{1}$$

*члены таковы, что*

$$u_1>u_2>u_3>\ldots \tag{2}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0, \tag{3}$$

*то ряд* (1) *сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $n=2m$ первых членов ряда (1):

$$s_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Из условия (2) следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма $s_{2m}$ положительна,

$$s_{2m}>0,$$

и возрастает с возрастанием $m$. Запишем теперь эту же сумму так:

$$s_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}.$$

В силу условия (2) каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из $u_1$ мы получим число, меньшее $u_1$, т. е.

$$s_{2m}<u_1.$$

Таким образом, мы установили, что $s_{2m}$ при возрастании $m$ возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что $s_{2m}$ имеет предел $s$:

$$\lim_{m\to\infty}s_{2m}=s,$$

причем

$$0<s<u_1.$$

Однако сходимость ряда еще не доказана; мы доказали только, что последовательность «четных» частичных сумм имеет пределом число $s$. Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу $s$.

Рассмотрим для этого сумму $n=2m+1$ первых членов ряда (1):

$$s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1}.$$

Так как по условию (3) $\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=0$, то, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}s_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}s_{2m}+\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}s_{2m}=s.$$

Тем самым мы доказали, что $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ как при четном $n$, так и при нечетном $n$. Следовательно, ряд (1) сходится.

Замечание 1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (2) выполняются, начиная с некоторого $N$.

Замечание 2. Теорема Лейбница иллюстрируется геометрически следующим образом. Будем на числовой прямой откладывать частичные суммы (рис. 362)

$$s_1 = u_1,\quad s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2,\quad s_3 = s_2 + u_3,\quad s_4 = s_3 - u_4,\quad s_5 = s_4 + u_5$$

и т. д.

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке $s$, которая изображает сумму ряда. При этом точки, соответствующие четным частичным суммам, располагаются слева от $s$, а точки, соответствующие нечетным частичным суммам,— справа от $s$.

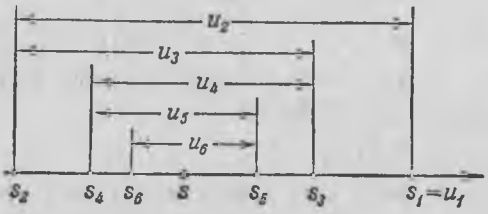


Рис. 362.

Замечание 3. Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница, то нетрудно оценить погрешность, которая получится, если заменить его сумму $s$ частичной суммой $s_n$. При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с $u_{n+1}$. Но эти числа сами образуют знакочередующийся ряд, сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (т. е. меньше $u_{n+1}$). Значит, погрешность, получающаяся при замене $s$ на $s_n$, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример 1. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится, так как

1) $1 > 1/2 > 1/3 > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Сумма $n$ первых членов этого ряда

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

отличается от суммы ряда $s$ на величину, меньшую $1/(n+1)$.

Пример 2. Ряд

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

сходится в силу теоремы Лейбница.

## § 8. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Рассмотренные в предыдущем параграфе знакочередующиеся ряды являются, очевидно, частным случаем знакопеременных рядов.

Мы рассмотрим здесь некоторые свойства знакопеременных рядов. При этом в отличие от соглашения, принятого в предыдущем параграфе, мы будем теперь полагать, что числа $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$, ... могут быть как положительными, так и отрицательными.

Прежде всего, дадим один важный достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Теорема 1. *Если знакопеременный ряд*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

*таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов,*

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{2}$$

*сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.*

Доказательство. Пусть $s_n$ и $\sigma_n$ — суммы $n$ первых членов рядов (1) и (2).

Пусть далее $s_n'$ — сумма всех положительных, а $s_n''$ — сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых $n$ членов данного ряда; тогда

$$s_n=s_n'-s_n'', \quad \sigma_n=s_n'+s_n''.$$

По условию, $\sigma_n$ имеет предел $\sigma$; $s_n'$ и $s_n''$ — положительные возрастающие величины, меньшие $\sigma$. Следовательно, они имеют пределы $s'$ и $s''$. Из соотношения $s_n=s_n'-s_n''$ следует, что и $s_n$ имеет предел и этот предел равен $s'-s''$, т. е. знакопеременный ряд (1) сходится.

Доказанная теорема дает возможность судить о сходимости некоторых знакопеременных рядов. Исследование вопроса о сходимости знакопеременного ряда сводится в этом случае к исследованию ряда с положительными членами.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots, \tag{3}$$

где $\alpha$ — любое число.

Решение. Наряду с данным рядом, рассмотрим ряды

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\ldots \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (5)$$

Ряд (5) сходится (см. § 6). Члены ряда (4) не больше соответственных членов ряда (5); следовательно, ряд (4) тоже сходится. Но тогда в силу доказанной теоремы данный знакопеременный ряд (3) тоже сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\cos(\pi/4)}{3}+\frac{\cos(3\pi/4)}{3^2}+\frac{\cos(5\pi/4)}{3^3}+\ldots+\frac{\cos((2n-1)\pi/4)}{3^n}+\ldots \qquad (6)$$

Решение. Наряду с данным рядом, рассмотрим ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots \qquad (7)$$

Этот ряд сходится, так как он является убывающей геометрической прогрессией со знаменателем 1/3. Но тогда сходится и заданный ряд (6), так как абсолютные величины его членов меньше соответствующих членов ряда (7).

Заметим, что признак сходимости, доказанной выше, является только достаточным признаком сходимости знакочередующегося ряда, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. В связи с этим полезно ввести понятия об абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда и на основе этих понятий классифицировать знакопеременные ряды.

Определение. Знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (2)$$

Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2), составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд (1) называется *условно* или *неабсолютно сходящимся рядом*.

Пример 3. Знакопеременный ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ является условно сходящимся, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, который расходится. Сам же ряд сходится, что легко проверить с помощью признака Лейбница.

Пример 4. Знакопеременный ряд $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$ есть ряд абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$ сходится, как это было установлено в § 4.

С помощью понятия абсолютной сходимости теорему 1 часто формулируют следующим образом: *всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.*

В заключение отметим (без доказательства) следующие свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.

Теорема 2. *Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.*

Это свойство не сохраняется для условно сходящихся рядов.

Теорема 3. *Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число A, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы ряд, полученный после перестановки, оказался расходящимся.*

Доказательство этих теорем выходит за рамки данного курса. Его можно найти в более подробных учебниках (см., например, Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II.— М.: Физматгиз, 1962, с. 319—320).

Для иллюстрации того, что сумма условно сходящегося ряда может меняться при перестановке его членов, рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{8}$$

сходится неабсолютно. Обозначим его сумму через $s$. Очевидно, что $s>0$. Сделаем перестановку членов ряда (8) так, чтобы за одним положительным членом следовали два отрицательных:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\dots \tag{9}$$

Докажем, что полученный ряд сходится, но что его сумма $s'$ в два раза меньше суммы ряда (8), т. е. равна $\frac{1}{2}s$. Обозначим через $s_n$ и $s'_n$ частичные суммы рядов (8) и (9). Рассмотрим сумму $3k$ членов ряда (9):

$$\begin{aligned}
s'_{3k}&=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Далее,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\,s,$$

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2}\,s.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s' = \frac{1}{2}\,s.$$

Итак, в данном случае сумма ряда изменилась после перестановки его членов (уменьшилась вдвое).

## § 9. Функциональные ряды

Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется *функциональным*, если его члены являются функциями от $x$.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Давая $x$ определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Совокупность тех значений $x$, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* этого ряда.

Очевидно, что в области сходимости ряда его сумма является некоторой функцией от $x$. Поэтому сумму функционального ряда обозначают через $s(x)$.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Этот ряд сходится при всех значениях $x$ в интервале $(-1, 1)$, т. е. при всех $x$, удовлетворяющих условию $|x| < 1$. Для каждого значения $x$ в интервале $(-1, 1)$ сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$ (сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x$). Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ данный ряд определяет функцию

$$s(x) = \frac{1}{1-x},$$

которая является суммой ряда, т. е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Обозначим через $s_n(x)$ сумму первых $n$ членов ряда (1). Если этот ряд сходится и сумма его равна $s(x)$, то

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ есть сумма ряда $u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$, т. е.

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

В этом случае величина $r_n(x)$ называется *остатком ряда* (1). Для всех значений $x$ в области сходимости ряда имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[s(x)-s_n(x)]=0,$$

т. е. остаток $r_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

## § 10. Мажорируемые ряды

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

называется *мажорируемым* в некоторой области изменения $x$, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\ldots \qquad (2)$$

с положительными членами, что для всех значений $x$ из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)|\leqslant\alpha_1,\ |u_2(x)|\leqslant\alpha_2,\ \ldots,\ |u_n(x)|\leqslant\alpha_n,\ \ldots \qquad (3)$$

Иначе говоря, ряд называется *мажорируемым*, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Например, ряд

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$$

есть ряд, мажорируемый на всей оси $Ox$. Действительно, для всех значений $x$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

а ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots,$$

как известно, сходится.

Непосредственно из определения следует, что ряд, мажорируемый в некоторой области, абсолютно сходится во всех точках этой области (см. § 8). Кроме того, мажорируемый ряд обладает еще следующим важным свойством.

Теорема. *Пусть функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

*мажорируем на отрезке* $[a, b]$. *Пусть* $s(x)$—*сумма этого ряда,* $s_n(x)$—*сумма* $n$ *первых членов этого ряда. Тогда для каждого как угодно малого числа* $\varepsilon>0$ *найдется положительное число* $N$ *такое, что при всех* $n\geqslant N$ *будет выполняться неравенство*

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon,$$

*какова бы ни было* $x$ *из отрезка* $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим через $\sigma$ сумму ряда (2):

$$\sigma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots,$$

тогда

$$\sigma=\sigma_n+\varepsilon_n,$$

где $\sigma_n$—сумма $n$ первых членов ряда (2), а $\varepsilon_n$—сумма всех остальных членов этого ряда, т. е.

$$\varepsilon_n=\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots$$

Так как этот ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Представим теперь сумму функционального ряда (1) в виде

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x),$$

где

$$s_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x),$$
$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\ldots$$

Из условия (3) следует, что

$$|u_{n+1}(x)|\leqslant\alpha_{n+1},\quad |u_{n+2}(x)|\leqslant\alpha_{n+2},\quad \ldots,$$

и поэтому

$$|r_n(x)|\leqslant\varepsilon_n$$

для всех $x$ из рассматриваемой области.

Таким образом,

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon_n$$

для всех $x$ из отрезка $[a, b]$, причем $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Замечание 1. Полученный результат можно геометрически иллюстрировать следующим образом.

Рассмотрим график функции $y=s(x)$. Построим около этой кривой полосу шириной $2\varepsilon_n$, т. е. построим кривые $y=s(x)+\varepsilon_n$

и $y=s(x)-\varepsilon_n$ (рис. 363). Тогда при любом $\varepsilon_n$ график функции $s_n(x)$ будет лежать целиком в рассматриваемой полосе. В этой же полосе будут лежать графики всех последующих частичных сумм.

Замечание 2. Не всякий функциональный ряд, сходящийся на отрезке $[a, b]$, обладает свойством, указанным в доказанной теореме. Но существуют и немажорируемые ряды, которые обладают указанным свойством. Всякий ряд, обладающий указанным свойством, называется *равномерно сходящимся рядом на отрезке* $[a, b]$.

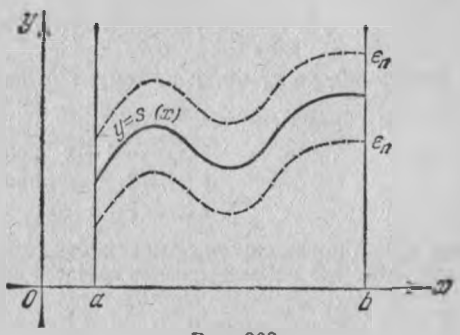


Рис. 363.

Итак, *функциональный ряд* $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ *называется равномерно сходящимся на отрезке* $[a, b]$, *если для любого как угодно малого* $\varepsilon>0$ *найдется такой номер* $N$, *что при всех* $n\geqslant N$ *будет выполняться неравенство*

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

*для любого* $x$ *из отрезка* $[a, b]$.

На основании доказанной теоремы следует, что мажорируемый ряд является рядом, равномерно сходящимся.

## § 11. Непрерывность суммы ряда

Пусть имеем ряд из непрерывных функций

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

сходящийся на некотором отрезке $[a, b]$.

В главе II (т. I) мы доказали теорему о том, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Для суммы ряда (состоящего из бесконечного числа слагаемых) это свойство не сохраняется. Некоторые функциональные ряды с непрерывными членами имеют в качестве суммы непрерывную функцию, у других функциональных рядов с непрерывными членами сумма является разрывной функцией.

Пример. Рассмотрим ряд

$$(x^{1/3}-x)+(x^{1/5}-x^{1/3})+(x^{1/7}-x^{1/5})+\ldots+(x^{1/(2n+1)}-x^{1/(2n-1)})+\ldots$$

Члены этого ряда (каждый из них заключен в скобки) суть непрерывные функции при всех значениях $x$. Докажем, что этот ряд сходится и его сумма есть разрывная функция.

Найдем сумму $n$ первых членов этого ряда: $s_n=x^{1/(2n+1)}-x$. Найдем сумму ряда:

если $x > 0$, то

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^{1/(2n+1)} - x\right) = 1 - x,$$

если $x < 0$, то

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-|x|^{1/(2n+1)} - x\right) = -1 - x,$$

если $x = 0$, то $s_n = 0$, и поэтому $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} s(x) &= -1 - x \quad \text{при} \quad x < 0, \\ s(x) &= 0 \quad\quad\;\; \text{при} \quad x = 0, \\ s(x) &= 1 - x \quad \text{при} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Итак, сумма приведенного ряда есть функция разрывная. Ее график изображен на рис. 364, где показаны также графики частичных сумм $s_1(x)$, $s_2(x)$ и $s_3(x)$.

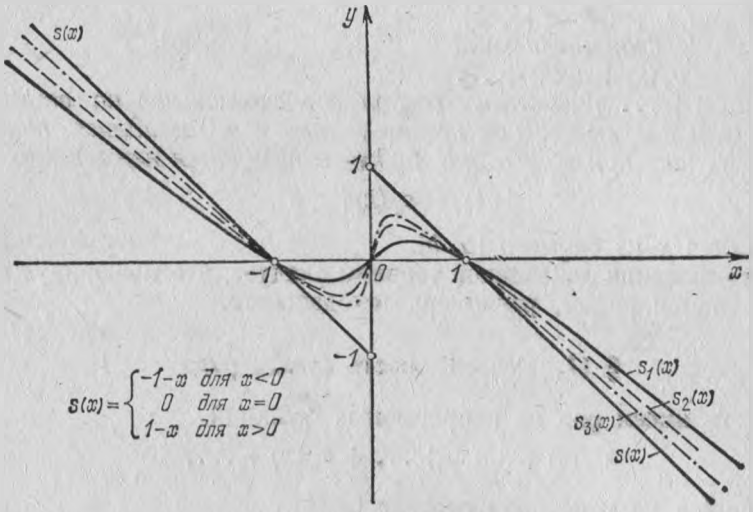



Рис. 364.

Для мажорируемых рядов справедлива следующая теорема.

Теорема. *Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на некотором отрезке* $[a, b]$, *есть функция, непрерывная на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть имеем мажорируемый на отрезке $[a, b]$ ряд непрерывных функций

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \tag{1}$$

Представим его сумму в виде

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

где

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

а

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Возьмем на отрезке $[a, b]$ произвольное значение аргумента $x$ и придадим ему такое приращение $\Delta x$, чтобы точка $x + \Delta x$ лежала тоже на отрезке $[a, b]$.

Введем обозначения

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x), \qquad \Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x),$$

тогда

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

откуда

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \tag{2}$$

Это неравенство справедливо для любого номера $n$.

Чтобы доказать непрерывность $s(x)$, нужно показать, что при любом наперед заданном и как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при всех $|\Delta x| < \delta$ будет $|\Delta s| < \varepsilon$.

Так как данный ряд (1) мажорируемый, то при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N$, что при всех $n \geqslant N$, и в частности при $n = N$, будет выполняться неравенство

$$|r_N(x)| < \varepsilon/3 \tag{3}$$

при любом $x$ из отрезка $[a, b]$. Значение $x + \Delta x$ лежит на отрезке $[a, b]$ и потому выполняется неравенство

$$|r_N(x + \Delta x)| < \varepsilon/3. \tag{3'}$$

Далее, при выбранном $N$ частичная сумма $s_N(x)$ есть функция непрерывная (сумма конечного числа непрерывных функций) и, следовательно, можно подобрать такое положительное число $\delta$, что для всякого $\Delta x$, удовлетворяющего условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\Delta s_N| < \varepsilon/3. \tag{4}$$

На основании неравенств (2), (3), (3') и (4) получаем

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т. е.

$$|\Delta s| < \varepsilon \text{ при } |\Delta x| < \delta,$$

а это и означает, что $s(x)$ является непрерывной функцией в точке $x$ (и, следовательно, в любой точке отрезка $[a, b]$).

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что если сумма ряда на каком-либо отрезке $[a, b]$ разрывна, то ряд не мажорируем на этом отрезке. В частности, не мажорируемым (на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$, т. е. точку разрыва суммы ряда) является ряд, приведенный в примере.

Отметим, наконец, что обратное предложение неверно: существуют ряды, не мажорируемые на отрезке и, однако, сходящиеся на этом отрезке к непрерывной функции. В частности, всякий равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$ ряд (даже если он не мажорируем) имеет в качестве суммы непрерывную функцию (конечно, если все члены ряда непрерывны).

## § 12. Интегрирование и дифференцирование рядов

Теорема 1. *Пусть имеем ряд непрерывных функций*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

*мажорируемый на отрезке* $[a, b]$, *и пусть* $s(x)$ *есть сумма этого ряда. Тогда интеграл от* $s(x)$ *в пределах от* $\alpha$ *до* $x$, *принадлежащих отрезку* $[a, b]$, *равняется сумме таких же интегралов от членов данного ряда, т. е.*

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt=\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\int_\alpha^x u_2(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt+\ldots$$

Доказательство. Функцию $s(x)$ можно представить в виде

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x),$$

или

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+r_n(x).$$

Тогда

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt=\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\int_\alpha^x u_2(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt)+\int_\alpha^x r_n(t)\,dt \qquad (2)$$

(интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от этих слагаемых).

Так как исходный ряд (1) мажорируем, то при любом $x$ имеем $|r_n(x)|<\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому *)

$$\left|\int_\alpha^x r_n(t)\,dt\right|\leqslant\pm\int_\alpha^x|r_n(t)|\,dt<\pm\int_\alpha^x\varepsilon_n\,dt=\pm\varepsilon_n(x-\alpha)\leqslant\varepsilon_n(b-a).$$

Так как $\varepsilon_n\to 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x r_n(t)\,dt=0.$$

Но из равенства (2) получаем:

$$\int_\alpha^x r_n(t)\,dt=\int_\alpha^x s(t)\,dt-\left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right].$$

*) В приводимых ниже оценках при $\alpha<x$ берется знак $+$, а при $x<\alpha$ — знак $-$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_\alpha^x s(t)\,dt-\left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right]\right\}=0,$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt\right]=\int_\alpha^x s(t)\,dt. \tag{3}$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, есть частичная сумма ряда

$$\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt+\ldots \tag{4}$$

Поскольку частичные суммы этого ряда имеют предел, этот ряд сходится и его сумма в силу равенства (3) равна $\int_\alpha^x s(t)\,dt$, т. е.

$$\int_\alpha^x s(t)\,dt=\int_\alpha^x u_1(t)\,dt+\int_\alpha^x u_2(t)\,dt+\ldots+\int_\alpha^x u_n(t)\,dt+\ldots,$$

а это и есть равенство, которое требовалось доказать.

Замечание 1. Если ряд не мажорируем, то почленное интегрирование ряда не всегда возможно. Это надо понимать в том смысле, что интеграл $\int_\alpha^x s(t)\,dt$ от суммы ряда (1) не всегда равен сумме интегралов от его членов (т. е. сумме ряда (4)).

Теорема 2. *Если ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{5}$$

*составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$, *сходится на этом отрезке к сумме* $s(x)$ *и ряд*

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots, \tag{6}$$

*составленный из производных его членов, мажорируем на том же отрезке, то сумма ряда производных равна производной от суммы первоначального ряда, т. е.*

$$s'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

Доказательство. Обозначим через $F(x)$ сумму ряда (6):

$$F(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots,$$

и докажем, что

$$F(x)=s'(x).$$

Так как ряд (6) мажорируем, то на основании предыдущей теоремы

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt = \int_\alpha^x u_1'(t)\,dt + \int_\alpha^x u_2'(t)\,dt + \ldots + \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt + \ldots$$

Производя интегрирование, будем иметь

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt =$$

$$= [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots + [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots$$

Но по условию

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$
$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots,$$

каковы бы ни были числа $x$ и $\alpha$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$\int_\alpha^x F(t)\,dt = s(x) - s(\alpha).$$

Дифференцируя по $x$ обе части последнего равенства, получим

$$F(x) = s'(x).$$

Таким образом, мы доказали, что при выполнении условий теоремы производная от суммы ряда равна сумме производных от членов ряда.

Замечание 2. Требование мажорируемости ряда производных является весьма существенным, и его невыполнение может привести к невозможности почленного дифференцирования ряда. В подтверждение этого приведем пример мажорируемого ряда, не допускающего почленного дифференцирования.

Рассмотрим ряд

$$\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Этот ряд сходится к непрерывной функции, так как он мажорируем. Действительно, при любом $x$ его члены по абсолютной величине меньше членов числового сходящегося ряда с положительными членами

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Напишем ряд, составленный из производных членов исходного ряда:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \ldots + n^2 \cos n^4 x + \ldots$$

Этот ряд расходится. Так, например, при $x=0$ он превращается в ряд

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2+\ldots$$

(Можно показать, что он расходится не только при $x=0$.)

## § 13. Степенные ряды. Интервал сходимости

Определение 1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (1)$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, $\ldots$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда.*

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку. Для того, чтобы убедиться в этом, докажем сначала следующую теорему, очень важную для всей теории степенных рядов.

Теорема 1 (теорема Абеля). 1) *Если степенной ряд сходится при некотором значении $x_0$, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении $x$, для которого $|x|<|x_0|$;*

2) *если ряд расходится при некотором значении $x_0'$, то он расходится при всяком $x$, для которого $|x|>|x_0'|$.*

Доказательство. 1) Так как по предположению числовой ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots \qquad (2)$$

сходится, то его общий член $a_nx_0^n\to 0$ при $n\to\infty$, а это значит, что существует такое положительное число $M$, что все члены ряда по абсолютной величине меньше $M$.

Перепишем ряд (1) в виде

$$a_0+a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right)+a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\ldots+a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n+\ldots \qquad (3)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0|+|a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right|+|a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots \qquad (4)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots \qquad (5)$$

При $|x|<|x_0|$ последний ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (4) меньше соответствующих членов ряда (5), то ряд (4) тоже сходится, а это и значит, что ряд (3) или (1) сходится абсолютно.

2) Теперь нетрудно доказать и вторую часть теоремы: пусть в некоторой точке $x_0'$ ряд (1) расходится. Тогда он будет расходиться в любой точке $x$, удовлетворяющей условию $|x|>|x_0'|$. Действительно, если бы в какой-либо точке $x$, удовлетворяющей этому условию, ряд сходился, то в силу только что доказанной первой части теоремы он должен был бы сходиться и в точке $x_0'$, так как $|x_0'|<|x|$. Но это противоречит условию, что в точке $x_0'$ ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке $x$. Таким образом, теорема полностью доказана.

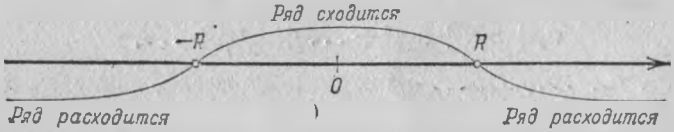



Рис. 365.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Действительно, если $x_0$ есть точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости. Если $x_0'$ — точка расходимости, то вся бесконечная полупрямая вправо от точки $|x_0'|$ и вся полупрямая влево от точки $-|x_0'|$ состоят из точек расходимости.

Из этого можно заключить, что существует такое число $R$, что при $|x|<R$ мы имеем точки абсолютной сходимости и при $|x|>R$ — точки расходимости. Таким образом, имеет место следующая теорема о строении области сходимости степенного ряда:

Теорема 2. *Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.*

Определение 2. *Интервалом сходимости* степенного ряда называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки $x$, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек $x$, лежащих вне его, ряд расходится (рис. 365). Число $R$ называют *радиусом сходимости* степенного ряда.

На концах интервала (т. е. при $x=R$ и при $x=-R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Отметим, что у некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R=0$), у других охватывает всю ось $Ox$ ($R=\infty$).

Укажем способ определения радиуса сходимости степенного ряда.

Пусть имеем ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+|a_3||x|^3+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots \qquad (6)$$

Для определения сходимости последнего ряда (с положительными членами!) применим признак Даламбера.

Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=L|x|.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (6) сходится, если $L|x|<1$, т. е. если $|x|<1/L$, и расходится, если $L|x|>1$, т. е. если $|x|>1/L$.

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $|x|<1/L$. Если же $|x|>1/L$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|x|L>1$, и ряд (6) расходится, причем его общий член не стремится к нулю *). Но тогда и общий член данного степенного ряда (1) не стремится к нулю, а это значит на основании необходимого признака сходимости, что этот степенной ряд расходится (при $|x|>1/L$).

Из предыдущего следует, что интервал $(-1/L,\ 1/L)$ есть интервал сходимости степенного ряда (1), т. е.

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогичным образом для определения интервала сходимости можно пользоваться признаком Коши, и тогда

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пример 1. Определить интервал сходимости ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

Решение. Применяя непосредственно признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. На границах же интервала $(-1,\ 1)$ исследование ряда с помощью признака Даламбера невозможно. Однако непосредственно видно, что при $x=-1$ и при $x=1$ ряд расходится.

Пример 2. Определить интервал сходимости ряда

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots$$

---

*) Напомним, что при доказательстве признака Даламбера (см. § 4) мы обнаружили, что если $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то общий член ряда возрастает и, следовательно, не стремится к нулю.

Решение. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x| = |2x|.$$

Ряд сходится, если $|2x|<1$, т. е. если $|x|<1/2$; при $x=1/2$ ряд сходится; при $x=-1/2$ ряд расходится.

Пример 3. Определить интервал сходимости ряда

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Решение. Применяя признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0<1.$$

Так как предел не зависит от $x$ и меньше единицы, то, значит, ряд сходится при всех значениях $x$.

Пример 4. Ряд

$$1+x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots$$

расходится при всех значениях $x$, кроме $x=0$, так как $(nx)^n\longrightarrow\infty$ при $n\longrightarrow\infty$, каково бы ни было $x$, отличное от нуля.

Теорема 3. *Степенной ряд*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

*мажорируем на любом отрезке* $[-\rho, \rho]$, *целиком лежащем внутри интервала сходимости.*

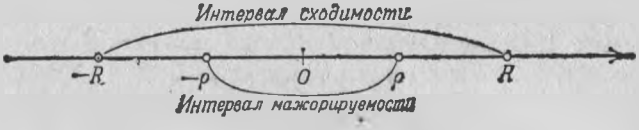



Рис. 366.

Доказательство. По условию $\rho<R$ (рис. 366), а потому числовой ряд (с положительными членами)

$$|a_0|+|a_1|\rho+|a_2|\rho^2+\ldots+|a_n|\rho^n+\ldots \qquad (7)$$

сходится. Но при $|x|<\rho$ члены ряда (1) по абсолютной величине не больше соответствующих членов ряда (7). Следовательно, ряд (1) мажорируем на отрезке $[-\rho, \rho]$.

Следствие 1. *На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.*

Действительно, на этом отрезке ряд мажорируем, а члены его являются непрерывными функциями от $x$. Следовательно, на основании теоремы 1 § 11 сумма этого ряда есть непрерывная функция.

Следствие 2. *Если пределы интегрирования* $\alpha$, $\beta$ *лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда*, так как

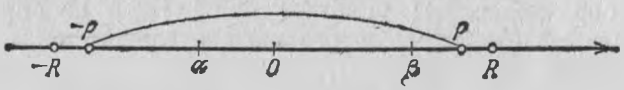



Рис. 367.

область интегрирования можно заключить в отрезок $[-\rho, \rho]$, где ряд мажорируем (рис. 367) (см. теорему 1 § 12 о возможности почленного интегрирования мажорируемого ряда).

## § 14. Дифференцирование степенных рядов

Теорема 1. *Если степенной ряд*

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

*имеет интервал сходимости* $(-R, R)$, *то ряд*

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \qquad (2)$$

*полученный почленным дифференцированием ряда* (1), *имеет тот же интервал сходимости* $(-R, R)$; *при этом*

$$\varphi(x)=s'(x), \quad \text{если} \quad |x|<R,$$

*т. е. внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда* (1) *равна сумме ряда, полученного почленным дифференцированием ряда* (1).




Рис. 368

Доказательство. Докажем, что ряд (2) мажорируем на любом отрезке $[-\rho, \rho]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Возьмем точку $\xi$ такую, что $\rho<\xi<R$ (рис. 368). В этой точке ряд (1) сходится, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi^n=0$, поэтому можно указать такое постоянное число $M$, что

$$|a_n\xi^n|<M \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Если $|x|\leqslant\rho$, то

$$|na_nx^{n-1}|\leqslant|na_n\rho^{n-1}|=n|a_n\xi^{n-1}|\left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1}<n\frac{M}{\xi}q^{n-1},$$

где

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

Таким образом, члены ряда (2) при $|x| \leqslant \rho$ по абсолютной величине меньше членов числового положительного ряда с постоянными членами

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots).$$

Но последний ряд сходится, в чем можно убедиться, применяя признак Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Следовательно, ряд (2) мажорируем на отрезке $[-\rho, \rho]$, и на основании теоремы 2 § 12 его сумма есть производная от суммы данного ряда на отрезке $[-\rho, \rho]$, т. е.

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Так как всякую внутреннюю точку интервала $(-R, R)$ можно заключить в некоторый отрезок $[-\rho, \rho]$, то отсюда следует, что ряд (2) сходится в любой внутренней точке интервала $(-R, R)$.

Докажем, что вне интервала $(-R, R)$ ряд (2) расходится. Допустим, что ряд (2) сходится при $x_1 > R$. Интегрируя его почленно в интервале $(0, x_2)$, где $R < x_2 < x_1$, мы получили бы, что ряд (1) сходится в точке $x_2$, а это противоречит условиям теоремы. Таким образом, интервал $(-R, R)$ есть интервал сходимости ряда (2). Теорема полностью доказана.

Ряд (2) снова можно почленно дифференцировать и продолжать так сколь угодно раз. Таким образом, получаем вывод:

Теорема 2. *Если степенной ряд сходится в интервале* $(-R, R)$, *то его сумма представляет собой функцию, имеющую внутри интервала сходимости производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, получающегося в результате почленного дифференцирования данного ряда соответствующее число раз; при этом интервал сходимости каждого ряда, получившегося в результате дифференцирования, есть тот же интервал* $(-R, R)$.

## § 15. Ряды по степеням $x - a$

*Степенным рядом* также называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (1)$$

где постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ также называются *коэффициентами ряда*. Это — степенной ряд, расположенный по степеням двучлена $x - a$.

При $a=0$ получаем степенной ряд, расположенный по степеням $x$, который, следовательно, является частным случаем ряда (1).

Для определения области сходимости ряда (1) произведем в нем замену переменной

$$x-a=X.$$

После этой замены ряд (1) примет вид

$$a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n+\ldots, \qquad (2)$$

т. е. получили степенной ряд, расположенный по степеням $X$.

Пусть интервал $-R<X<R$ есть интервал сходимости ряда (2) (рис. 369, $\alpha$). Отсюда следует, что ряд (1) будет сходиться при

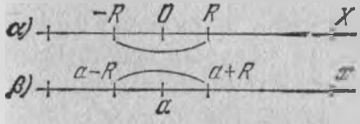



Рис. 369.

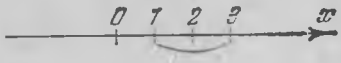



Рис. 370.

значениях $x$, удовлетворяющих неравенству $-R<x-a<R$ или $a-R<x<a+R$. Так как ряд (2) расходится при $|X|>R$, то ряд (1) будет расходиться при $|x-a|>R$, т. е. будет расходиться вне интервала $a-R<x<a+R$ (рис. 369, $\beta$).

Следовательно, интервалом сходимости ряда (1) будет интервал $(a-R,\ a+R)$ с центром в точке $a$. Все свойства степенного ряда, расположенного по степеням $x$, внутри интервала сходимости $(-R,\ +R)$ полностью сохраняются для степенного ряда, расположенного по степеням $x-a$, внутри интервала сходимости $(a-R,\ a+R)$. Так, например, после почленного интегрирования степенного ряда (1), если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости $(a-R,\ a+R)$, получается ряд, сумма которого равняется соответствующему интегралу от суммы данного ряда (1). При почленном дифференцировании степенного ряда (1) при всех $x$, лежащих внутри интервала сходимости $(a-R,\ a+R)$, получается ряд, сумма которого равняется производной от суммы данного ряда (1).

Пример. Найти область сходимости ряда

$$(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\ldots+(x-2)^n+\ldots$$

Решение. Положив $x-2=X$, получим ряд

$$X+X^2+X^3+\ldots+X^n+\ldots$$

Этот ряд сходится при $-1<X<+1$. Следовательно, данный ряд сходится при всех $x$, для которых $-1<x-2<1$, т. е. при $1<x<3$ (рис. 370).

## § 16. Ряды Тейлора и Маклорена

В § 6 главы IV (т. I) было показано, что для функции $f(x)$, имеющей все производные до $(n+1)$-го порядка включительно, в окрестности точки $x=a$ (т. е. на некотором интервале, содержащем точку $x=a$) справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+ \\ +\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x), \quad (1)$$

где так называемый остаточный член $R_n(x)$ вычисляется по формуле

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \quad 0<\theta<1.$$

Если функция $f(x)$ имеет производные в с е х порядков в окрестности точки $x=a$, то в формуле Тейлора число $n$ можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный член $R_n$ стремится к нулю при $n\longrightarrow\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Тогда, переходя в формуле (1) к пределу при $n\longrightarrow\infty$, получим справа бесконечный ряд, который называется *рядом Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \quad (2)$$

Последнее равенство справедливо лишь в том случае, если $R_n(x)\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. В этом случае написанный справа ряд сходится и его сумма равна данной функции $f(x)$. Докажем, что это действительно так:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

где

$$P_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, то

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x).$$

Но $P_n(x)$ есть $n$-я частичная сумма ряда (2); ее предел равен сумме ряда, стоящего в правой части равенства (2). Следовательно, равенство (2) справедливо:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Из предыдущего следует, что ряд Тейлора представляет данную функцию $f(x)$ только тогда, когда

$\lim R_n(x)=0$. Если $\lim R_n(x)\neq 0$, то ряд не представляет данной функции, хотя может и сходиться (к другой функции).

Если в ряде Тейлора положим $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \qquad (3)$$

Если для какой-нибудь функции формально написан ряд Тейлора, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

Отметим, что для каждой из элементарных функций, определенных в § 8 главы I (т. I) существует такое $a$ и такое $R$, что в интервале $(a-R,\ a+R)$ она разлагается в ряд Тейлора или (если $a=0$) в ряд Маклорена.

## § 17. Примеры разложения функций в ряды

1. Разложение функции $f(x)=\sin x$ в ряд Маклорена.

В § 7 главы IV (т. I) мы получили формулу

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x).$$

Так как было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x)=0$, то на основании сказанного в предыдущем параграфе получаем разложение $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (1)$$

Так как остаточный член стремится к нулю при любом $x$, то данный ряд сходится и имеет в качестве суммы функцию $\sin x$ при любом $x$.

На рис. 371 показаны графики функции $\sin x$ и первых трех частичных сумм ряда (1).

Этим рядом пользуются для вычисления значений $\sin x$ при различных значениях $x$.

Вычислим, например, $\sin 10°$ с точностью до $10^{-5}$. Так как $10°$ или, в радианах, $\frac{\pi}{18}\approx 0{,}174533$, то

$$\sin 10°=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7+\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, получим следующее приближенное равенство:

$$\sin\frac{\pi}{18}\approx\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3.$$

при этом возникает погрешность $\delta$, которая по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов, т. е.

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}\cdot 0{,}2^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Если каждое слагаемое в выражении для $\sin\frac{\pi}{18}$ будем вычислять с шестью знаками, то получим:

$$\sin(\pi/18) = 0{,}173647.$$

За первые четыре знака можно ручаться.

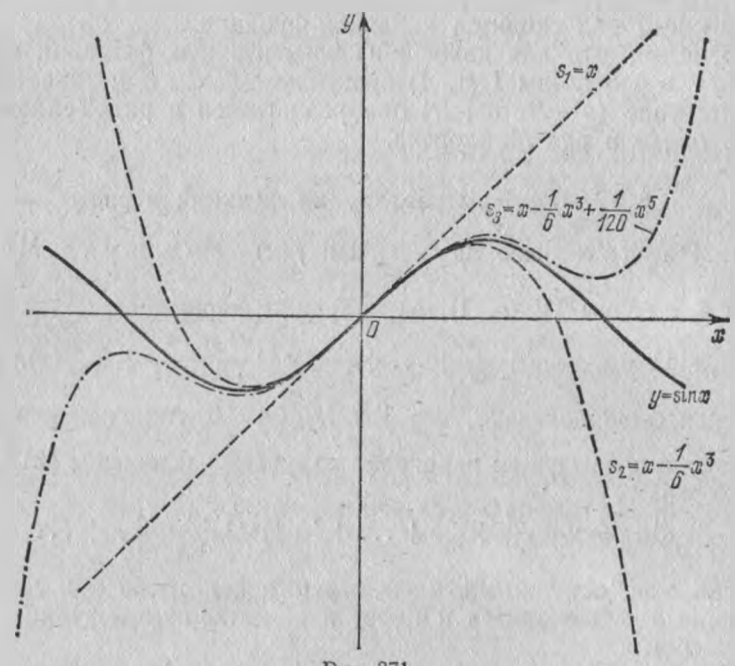



Рис. 371.

2. Разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена. На основании § 7 главы IV (т. I) имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (2)$$

так как было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x$. Следовательно, для всех значений $x$ ряд сходится и представляет функцию $e^x$.

Если в разложении (2) заменить $x$ на $(-x)$, то получаем

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (3)$$

3. Разложение функции $f(x)=\cos x$ в ряд Маклорена.

На основании § 7 главы IV (т. I) имеем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots; \tag{4}$$

при всех значениях $x$ ряд сходится и представляет функцию $\cos x$.

4. Разложение функций

$$f(x)=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad f(x)=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

в ряд Маклорена.

Разложение этих функций легко получается путем вычитания и сложения рядов (2) и (3) и деления на два.

Итак,

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots, \tag{5}$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{6}$$

## § 18. Формула Эйлера

До сих пор мы рассматривали только ряды с действительными членами, не затрагивая рядов с комплексными членами. Не приводя полной теории рядов с комплексными членами, которая выходит за рамки данного учебника, рассмотрим только один важный пример из этой области.

В главе VII (т. I) была определена функция $e^{x+iy}$ равенством

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

При $x=0$ получаем *формулу Эйлера*:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

Если определить показательную функцию $e^{iy}$ с мнимым показателем с помощью формулы (2) § 17, дающей представление функции $e^x$ в виде степенного ряда, то мы получим то же равенство Эйлера. Действительно, определим $e^{iy}$, положив в равенстве (2) § 17 вместо $x$ выражение $iy$:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\ldots+\frac{(iy)^n}{n!}+\ldots \tag{1}$$

Принимая во внимание, что $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$ и т. д., преобразуем формулу (1) к виду

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\ldots$$

Отделяя в этом ряде действительную и мнимую части, найдем

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ldots\right).$$

В скобках стоят степенные ряды, суммы которых равны соответственно $\cos y$ и $\sin y$ (см. формулы (3) и (1) предыдущего параграфа). Следовательно,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{2}$$

Таким образом, мы пришли снова к *формуле Эйлера*.

## § 19. Биномиальный ряд

1. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=(1+x)^m,$$

где $m$ — произвольное постоянное число.

Здесь оценка остаточного члена представляет некоторые трудности и потому к разложению данной функции мы подойдем несколько иначе.

Заметив, что функция $f(x)=(1+x)^m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+x)f'(x)=mf(x) \tag{1}$$

и условию

$$f(0)=1,$$

найдем степенной ряд, сумма которого $s(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию $s(0)=1$:

$$s(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\ *). \tag{2}$$

Подставляя его в уравнение (1), получим

$$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)=$$
$$=m(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в разных частях равенства, находим

$$a_1=m,\ a_1+2a_2=ma_1,\ \ldots,\ na_n+(n+1)a_{n+1}=ma_n,\ \ldots$$

Отсюда для коэффициентов ряда получаем выражения:

$$a_0=1,\ a_1=m,\ a_2=\frac{a_1(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2},$$
$$a_3=\frac{a_2(m-2)}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*) Мы приняли свободный член равным единице в силу начального условия $s(0)=1$.

Это — биномиальные коэффициенты.

Подставляя их в формулу (2), получим

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots \tag{3}$$

Если $m$ — целое положительное число, то, начиная с члена, содержащего $x^{m+1}$, все коэффициенты равны нулю, и ряд превращается в многочлен. При $m$ дробном или при $m$ целом отрицательном имеем бесконечный ряд. Определим радиус сходимости ряда (3):

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \quad u_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)\,n!}x\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| = |x|.$$

Таким образом, ряд (3) сходится при $|x| < 1$.

В интервале $(-1, 1)$ ряд (3) представляет функцию $s(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1) и условию $s(0) = 1$.

Так как дифференциальному уравнению (1) и условию $s(0) = 1$ удовлетворяет единственная функция, то, следовательно, сумма ряда (3) тождественно равна функции $(1+x)^m$, и мы получаем разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{3'}$$

В частности, при $m = -1$ получаем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{4}$$

При $m = \frac{1}{2}$ будет

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \tag{5}$$

При $m = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \tag{6}$$

2. Применим разложение бинома к разложению других функций. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \arcsin x.$$

Подставляя в равенство (6) вместо $x$ выражение $-x^2$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}x^{2n} + \ldots$$

На основании теоремы об интегрировании степенных рядов получаем при $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Этот ряд сходится в интервале $(-1, 1)$. Можно было бы доказать, что ряд сходится и для $x = \pm 1$ и что для этих значений сумма ряда также равна $\arcsin x$. Тогда, полагая $x = 1$, мы получим формулу для вычисления $\pi$:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

## § 20. Разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Вычисление логарифмов

Интегрируя равенство (4) § 19 в пределах от 0 до $x$ (при $|x| < 1$), получим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)\,dt,$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (1)$$

Это равенство справедливо в интервале $(-1, 1)$.

Если в этой формуле заменить $x$ на $-x$, то получается ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \qquad (2)$$

который сходится в интервале $(-1, 1)$.

С помощью рядов (1) и (2) можно вычислять логарифмы чисел, заключенных между нулем и двумя. Отметим, без доказательства, что при $x = 1$ разложение (1) также справедливо.

Выведем формулу для вычисления натуральных логарифмов любых целых чисел.

Так как при почленном вычитании двух сходящихся рядов получается ряд сходящийся (см. § 1, теорему 3), то, вычитая

почленно равенство (2) из равенства (1), находим

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right].$$

Положим далее, $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$; тогда $x=\frac{1}{2n+1}$. При любом $n>0$ имеем $0<x<1$, поэтому

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right],$$

откуда

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]. \quad (3)$$

При $n=1$ отсюда получаем

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\dots\right].$$

Для вычисления $\ln 2$ с заданной степенью точности $\delta$ надо подсчитать частичную сумму $s_p$, выбрав число $p$ ее членов так, чтобы сумма отброшенных членов (т. е. погрешность $R_p$, совершаемая при замене $s$ на $s_p$) была меньше допустимой погрешности $\delta$. Для этого оценим погрешность $R_p$:

$$R_p=2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}}+\dots\right].$$

Так как числа $2p+3$, $2p+5$, ... больше $2p+1$, то, заменяя их на $2p+1$, мы увеличим каждую дробь. Поэтому

$$R_p<2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}}+\dots\right],$$

или

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{3^{2p+3}}+\frac{1}{3^{2p+5}}+\dots\right].$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках, есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{9}$. Подсчитывая сумму этой прогрессии, найдем

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4(2p+1)\,3^{2p-1}}. \quad (4)$$

Если мы хотим теперь подсчитать $\ln 2$, например, с точностью до 0,000000001, то надо выбрать $p$ так, чтобы было $R_p<0{,}000000001$. Этого можно добиться, подобрав $p$ так, чтобы правая часть неравенства была меньше 0,000000001. Непосредственным подбором находим, что достаточно взять $p=8$. Итак,

с точностью до 0,000000001 имеем

$$\ln 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right] = 0{,}693147180.$$

Итак, $\ln 2 = 0{,}693147180$. При этом эти девять знаков верные.

Полагая в формуле (3) $n = 2$, получаем

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ldots\right] = 1{,}098612288 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, мы можем получить натуральные логарифмы любых целых чисел.

Чтобы получить десятичные логарифмы чисел, нужно воспользоваться (см. § 8 гл. II т. I) соотношением

$$\lg N = M \ln N,$$

где $M = 0{,}434294$. Тогда, например, получим

$$\lg 2 = 0{,}434294 \cdot 0{,}693147 = 0{,}301030.$$

## § 21. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

В главах X и XI (т. I) было указано, что существуют определенные интегралы, которые как функции верхнего предела не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Такие интегралы иногда бывает удобно вычислять с помощью рядов.

Рассмотрим здесь несколько примеров.

1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

Здесь первообразная от $e^{-x^2}$ не является элементарной функцией. Для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя в разложении $e^x$ (см. формулу (2) § 17) $x$ на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до $a$, получим

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}+\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots\right)\Big|_0^a =$$
$$= \frac{a}{1}-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\ldots$$

С помощью этого равенства мы можем при любом $a$ вычислить данный интеграл с любой степенью точности.

2. Требуется вычислить интеграл

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд: из равенства

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

получаем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots,$$

причем последний ряд сходится при всех значениях $x$. Интегрируя почленно, получим

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \dots$$

Сумма ряда легко вычисляется с любой степенью точности при любом $a$.

3. Вычислить эллиптический интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\,d\varphi \qquad (k < 1).$$

Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд, положив $m = \frac{1}{2}$, $x = -k^2 \sin^2 \varphi$ (см. формулу (5) § 19):

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} k^4 \sin^4 \varphi - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 \sin^6 \varphi - \dots$$

Этот ряд сходится при всех значениях $\varphi$ и допускает почленное интегрирование, так как он мажорируем на любом интервале. Поэтому

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt =$$

$$= \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\varphi} \sin^2 t\,dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} k^4 \int_0^{\varphi} \sin^4 t\,dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 \int_0^{\varphi} \sin^6 t\,dt - \dots$$

С помощью признака Даламбера можно проверить, что этот ряд сходится при всех значениях $x$; следовательно, он является решением уравнения.

Если уравнение линейное, то удобнее искать коэффициенты разложения частного решения по методу неопределенных коэффициентов. Для этого непосредственно «подставляем» ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

в дифференциальное уравнение и приравниваем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях $x$ в разных частях уравнения.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y'' = 2xy' + 4y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0} = 0, \qquad y'|_{x=0} = 1.$$

Решение. Полагаем

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

На основании начальных условий находим $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Следовательно,

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставляя написанные выражения в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем

$$2a_2 = 0, \qquad \text{откуда } a_2 = 0,$$
$$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4, \qquad \text{откуда } a_3 = 1,$$
$$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2, \qquad \text{откуда } a_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(n-1) a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \text{ откуда } a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Следовательно,

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, \quad a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}, \quad a_9 = \frac{1}{4!}, \ \ldots, \quad a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \ \ldots,$$
$$a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \ \ldots, \quad a_{2k} = 0, \ \ldots$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем искомое решение

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

Полученный ряд сходится при всех значениях $x$.

Заметим, что найденное частное решение можно выразить через элементарные функции: вынося $x$ за скобку, получим в скобках разложение функции $e^{x^2}$. Следовательно,

$$y = xe^{x^2}.$$

## § 23. Уравнение Бесселя

*Уравнением Бесселя* называется дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0 \qquad (p = \mathrm{const}). \tag{1}$$

Решение этого уравнения, как и некоторых других уравнений с переменными коэффициентами, следует искать не в форме степенного ряда, а в виде произведения некоторой степени $x$ на степенной ряд:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2}$$

Коэффициент $a_0$ мы можем считать отличным от нуля ввиду неопределенности показателя $r$.

Перепишем выражение (2) в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

и найдем его производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\,a_k x^{r+k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\,a_k x^{r+k-2}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\,a_k x^{r+k-2} + \\ + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\,a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $x$ в степени $r$, $r+1$, $r+2$, ..., $r+k$, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{rlr}
[r(r-1) + r - p^2]\,a_0 = 0, & \text{или} & (r^2 - p^2)\,a_0 = 0, \\
[(r+1)\,r + (r+1) - p^2]\,a_1 = 0, & \text{или} & [(r+1)^2 - p^2]\,a_1 = 0, \\
[(r+2)(r+1) + (r+2) - p^2]\,a_2 + a_0 = 0, & \text{или} & [(r+2)^2 - p^2]\,a_2 + a_0 = 0, \\
\dots\dots\dots & & \\
[(r+k)(r+k-1) + (r+k) - p^2]\,a_k + a_{k-2} = 0, & \text{или} & [(r+k)^2 - p^2]\,a_k + a_{k-2} = 0, \\
\dots\dots\dots & &
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим равенство

$$[(r+k)^2 - p^2]\,a_k + a_{k-2} = 0. \tag{3'}$$

Его можно переписать так:

$$[(r+k-p)(r+k+p)]\,a_k + a_{k-2} = 0.$$

По условию $a_0 \neq 0$; следовательно,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

поэтому $r_1 = p$ или $r_2 = -p$.

Рассмотрим сначала решение в случае $r_1 = p > 0$.

Из системы уравнений (3) последовательно определяются все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$; $a_0$ остается произвольным. Положим, например, $a_0 = 1$. Тогда

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

Придавая различные значения $k$, найдем

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \text{ и вообще } a_{2m+1} = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2(2p+2)}, \quad a_4 = \frac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}, \ldots, \tag{4}$$

$$a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1}\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2\nu(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2\nu)}, \ldots$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (2), получим

$$y_1 = x^p\left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots\right]. \tag{5}$$

Все коэффициенты $a_{2\nu}$ определятся, так как при всяком $k$ коэффициент при $a_k$ в уравнении (3)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

будет отличен от нуля.

Таким образом, $y_1$ является частным решением уравнения (1).

Установим далее условия, при которых и при втором корне $r_2 = -p$ определятся все коэффициенты $a_k$. Это будет, если при любом целом четном положительном $k$ выполняются неравенства

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0, \tag{6}$$

или

$$r_2 + k \neq p.$$

Но $p = r_1$, следовательно,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Таким образом, условие (6) в этом случае эквивалентно следующему:

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

где $k$ — целое четное положительное число. Но

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

следовательно,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Таким образом, если $p$ не равно целому числу, то можно написать второе частное решение, которое получается из выражения (5) заменой $p$ на $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \dots\right]. \qquad (5')$$

Степенные ряды (5) и (5′) сходятся при всех значениях $x$, что легко обнаружить на основании признака Даламбера. Также очевидно, что $y_1$ и $y_2$ линейно независимы *).

Решение $y_1$, умноженное на некоторую постоянную, называется *функцией Бесселя первого рода p-го порядка* и обозначается символом $J_p$. Решение $y_2$ обозначают символом $J_{-p}$.

Таким образом, при $p$, не равном целому числу, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}.$$

Так, например, при $p = 1/2$ ряд (5) будет иметь вид

$$x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \dots\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right].$$

Это решение, умноженное на постоянный множитель $\sqrt{2/\pi}$, называется бесселевой функцией $J_{1/2}$; заметим, что в скобках стоит ряд, сумма которого равна $\sin x$. Следовательно,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Точно так же, пользуясь формулой (5′), получим

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Общий интеграл уравнения (1) при $p = 1/2$ будет

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x).$$

---

*) Линейная независимость функций проверяется следующим образом. Рассмотрим отношение

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\,\frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots}.$$

Это соотношение не является постоянным, так как при $x \to 0$ оно стремится к бесконечности. Следовательно, функции $y_1$ и $y_2$ линейно независимы.

Пусть, далее, $p$ есть целое число, которое обозначим через $n$ ($n \geqslant 0$). Решение (5) в этом случае будет иметь смысл и является первым частным решением уравнения (1).

Но решение (5′) не будет иметь смысла, так как один из множителей знаменателя в разложении обратится в нуль.

При целом положительном $p = n$ бесселева функция $J_n$ определяется рядом (5), умноженным на постоянный множитель $\frac{1}{2^n n!}$ (а при $n = 0$ умноженным на 1):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots\right],$$

или

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}. \tag{7}$$

Можно показать, что второе частное решение в этом случае нужно искать в форме

$$K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), мы определим коэффициенты $b_k$.

Функция $K_n(x)$ с определенными таким образом коэффициентами, умноженная на некоторую постоянную, называется *функцией Бесселя второго рода n-го порядка.*

Это есть второе решение уравнения (1), образующее с первым линейно независимую систему.

Общий интеграл будет иметь вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Отметим, что

$$\lim_{x \to 0} K_n(x) = \infty.$$

Следовательно, если мы хотим рассматривать конечные решения при $x = 0$, то в формуле (8) мы должны положить $C_2 = 0$.

Пример. Найти решение уравнения Бесселя при $p = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: при $x = 0$

$$y = 2, \quad y' = 0.$$

Решение. На основании формулы (7) находим одно частное решение:

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Пользуясь этим решением, можно написать решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, а именно:

$$y = 2J_0(x).$$

Замечание. Если бы нам нужно было найти общий интеграл данного уравнения, то мы стали бы искать второе частное решение в форме

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Не приводя всех вычислений, укажем, что второе частное решение, которое мы обозначим $K_0(x)$, имеет вид

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \ldots$$

Эта функция, умноженная на некоторый постоянный множитель, называется *функцией Бесселя второго рода нулевого порядка*.

## § 24. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, где $z_n = a_n + ib_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Определение 1. Комплексное число $z_0 = a + ib$ называется *пределом последовательности* комплексных чисел $z_n = a_n + ib_n$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{1}$$

Напишем условие (1) в развернутом виде:

$$z_n - z_0 = (a_n + ib_n) - (a + ib) = (a_n - a) + i(b_n - b),$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0. \tag{2}$$

На основании равенства (2) следует, что условие (1) будет выполняться только тогда, когда будут выполняться условия

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b. \tag{3}$$

Составим ряд из комплексных чисел

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots, \tag{4}$$

где

$$w_n = u_n + iv_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим сумму $n$ членов ряда (4), которую обозначим через $s_n$:

$$s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n. \tag{5}$$

$s_n$ есть комплексное число:

$$s_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right). \tag{6}$$

Определение 2. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = A + iB,$$

то ряд (4) называется *сходящимся рядом* и $s$ называется его *суммой*:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = A + iB. \tag{7}$$

На основании равенств (3) из условия (6) следуют равенства

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{8}$$

Если не существует $\lim s_n$, то ряд (4) называется *расходящимся*.

Для исследования сходимости ряда (4) эффективной является следующая теорема.

Теорема 1. *Если сходится ряд, составленный из модулей членов ряда* (4),

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots, \text{ где } |w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}, \tag{9}$$

*то сходится ряд* (4).

Доказательство. Из сходимости ряда (9) и условий

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|, \quad |v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|$$

следуют равенства (8) (на основании соответствующей теоремы об абсолютной сходимости рядов с действительными членами), а следовательно, равенство (7).

Доказанная теорема позволяет применять для исследования сходимости рядов с комплексными членами все достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

## § 25. Степенные ряды с комплексной переменной

Перейдем теперь к рассмотрению степенных рядов с комплексными членами.

Определение 1. Ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, $x$ и $y$ — действительные числа, $c_n$ — постоянные комплексные или действительные числа, называется *степенным рядом с комплексной переменной*.

Для таких степенных рядов существует теория, аналогичная теории степенных рядов с действительными членами.

Определение 2. Совокупность значений $z$ на плоскости комплексной переменной, при которых ряд (1) сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда (1) (при каждом

конкретном значении $z$ ряд (1) превращается в числовой ряд с комплексными членами типа (4) § 24).

Определение 3. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов,

$$|c_0|+|c_1z|+|c_2z^2|+\ldots+|c_nz^n|+\ldots \qquad (2)$$

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1. *Область сходимости степенного ряда с комплексными членами* (1) *есть круг на плоскости комплексной переменной $z$ с центром в начале координат. Его называют кругом сходимости. В точках, лежащих внутри круга сходимости, ряд* (1) *сходится абсолютно.*

Радиус круга сходимости $R$ называют *радиусом сходимости* степенного ряда. Если $R$ — радиус сходимости степенного ряда (1), то пишут, что ряд сходится в области

$$|z|<R.$$

(Аналогично вопросу о сходимости степенного ряда с действительной переменной на концах интервала вопрос о сходимости ряда в точках границы $|z|=R$ решается дополнительным исследованием.) Заметим, что в зависимости от характера коэффициентов $c_n$ радиус сходимости $R$ может иметь любое значение от $R=0$ до $R=\infty$. В первом случае ряд сходится только в точке $z=0$, в последнем случае ряд сходится при любом значении $z$.

Напишем равенство

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \qquad (3)$$

Если $z$ будет принимать различные значения внутри круга сходимости, то функция $f(z)$ будет принимать различные значения. Таким образом, каждый степенной ряд с комплексной переменной определяет внутри круга сходимости соответствующую функцию комплексной переменной. Это *аналитическая функция* комплексной переменной. Приведем примеры функций комплексной переменной, определенных степенными рядами с комплексной переменной.

1) $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \qquad (4)$$

Это *показательная функция комплексной переменной*. Если $y=0$, то формула (4) превращается в формулу (2) § 17. Если $x=0$, то получаем равенство (1) § 18.

2) $$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots \qquad (5)$$

Это *синус комплексной переменной*. При $y=0$ формула (5) превращается в формулу (1) § 17.

3) $$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \qquad (6)$$

Это *косинус комплексной переменной*. Если в формуле (4) справа и слева вместо $z$ подставить $iz$, то аналогично тому, как это делалось в § 18, получим

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{7}$$

Это *формула Эйлера для комплексного z*. Если $z$ — действительное число, то эта формула совпадает с формулой (2) § 18.

4) $$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \tag{8}$$

5) $$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \tag{9}$$

Последние две формулы аналогичны формулам (5) и (6) § 17 и с ними совпадают, если $z = x$ — действительное число.

На основании (4), (5), (6), (8) и (9) путем сложения, вычитания рядов, замены $z$ на $iz$ получаются следующие равенства:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \tag{10}$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{12}$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2}, \qquad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}. \tag{13}$$

Отметим, что ряды (4), (5), (6), (8), (9) сходятся при всех значениях $z$, в чем легко убедиться на основании теоремы 1 данного параграфа и теоремы 1 § 24. Аналогично тому, как это делалось в случае степенных рядов с действительной переменной, рассматриваются ряды с комплексной переменной по степеням $z - z_0$, где $z_0$ — некоторое комплексное число:

$$c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots, \tag{14}$$

$c_n$ — комплексные или действительные постоянные. Ряд (14) приводится к виду (1) подстановкой $z - z_0 = z^*$. Все свойства и теоремы, справедливые для ряда вида (1), переносятся на ряд вида (14), только центр круга сходимости ряда (14) находится не в начале координат, а в точке $z_0$.

Если $R$ — радиус сходимости ряда (14), то пишут: ряд сходится в области

$$|z - z_0| < R.$$

## § 26. Решение дифференциального уравнения первого порядка методом последовательных приближений (метод итераций)

В §§ 32—34 гл. XIII были рассмотрены приближенное интегрирование дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений разностными методами. Здесь мы изложим другой метод приближенного интегрирования дифференциального урав-

нения. Отметим, что данное рассмотрение одновременно явится доказательством теоремы о существовании решения дифференциального уравнения (см. § 2 гл. XIII). Нам потребуется использовать теорию рядов.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{2}$$

Интегрируя члены уравнения (1) в пределах от $x_0$ до $x$ и учитывая, что $y|_{x=x_0} = y_0$, получаем

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx + y_0. \tag{3}$$

В последнем уравнении искомая функция $y$ находится под знаком интеграла, и потому это уравнение называется *интегральным уравнением*.

Функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям (2), удовлетворяет уравнению (3). Очевидно, что функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (3), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2).

Рассмотрим сначала метод получения приближенных решений уравнения (1) при начальных условиях (2).

Будем считать $y_0$ *нулевым* приближением решения. Подставляя в подынтегральную функцию в правой части равенства (3) вместо $y$ значение $y_0$, получим

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx + y_0. \tag{4}$$

Это есть *первое* приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Подставляя первое приближение $y_1(x)$ в подынтегральную функцию в равенства (3), получаем

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\,dx + y_0. \tag{5}$$

Это *второе* приближение. Продолжаем этот процесс:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_{x_0}^{x} f[x, y_2(x)]\,dx + y_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx + y_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

О том, какое приближение нужно взять, чтобы оно удовлетворяло требованиям нужной нам точности, будет указано ниже.

Пример. Найти приближенное решение уравнения $y'=x+y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y_0=1$ при $x=0$.

Решение. По формуле (4) получаем

$$y_1=\int_0^x (x+1)\,dx+1=\frac{x^2}{2}+x+1,$$

$$y_2=\int_0^x \left[x+\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)^2\right]dx+1=\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x+1,$$

и т. д.

## § 27. Доказательство существования решения дифференциального уравнения. Оценка погрешности при приближенном решении

Докажем далее следующую теорему.

Теорема. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1}$$

*и начальное условие*

$$y=y_0 \quad при \quad x=x_0. \tag{2}$$

*Пусть* $f(x, y)$ *и* $f'_y(x, y)$ *непрерывны в замкнутой области* $D$,

$$D\{x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}\ \text{(рис. 372)}. \tag{3}$$

*Тогда в некотором интервале*

$$x_0-l<x<x_0+l \tag{4}$$

*существует решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* (2); *при этом решение единственно. Число* $l$ *будет определено ниже.*

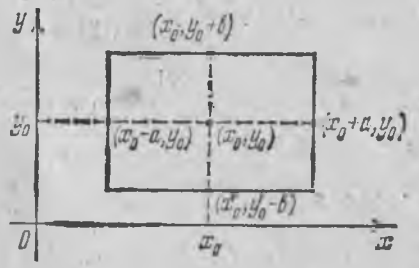



Рис. 372.

Доказательство. Заметим, что из того, что $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D$, следует, что существуют такие постоянные $M>0$ и $N>0$, что для всех точек области выполняются соотношения

$$|f(x,\ y)|\leqslant M, \tag{5}$$

$$|f'_y(x,\ y)|\leqslant N. \tag{6}$$

(Это свойство аналогично свойству, указанному в § 10 гл. II.) Число $l$ в равенстве (4) — наименьшее из чисел $a$ и $\frac{b}{M}$, т. е.

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{7}$$

Применим теорему Лагранжа к функции $f(x, y)$ для двух произвольных точек $A_1(x;\ y_1)$ и $A_2(x;\ y_2)$, принадлежащих области $D$:

$$f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1) = f'_y(x,\ \eta)(y_2 - y_1),$$

где $y_1 < \eta < y_2$, следовательно, $|f'_y(x, \eta)| \leqslant N$. Поэтому для любых двух точек справедливо неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant N|y_2 - y_1|\ ^*). \tag{8}$$

Вернемся к равенству (4) § 26. Из него получаем с учетом равенств (5), (4), (7)

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_0)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} M\,dx\right| = M|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \tag{9}$$

Итак, функция $y = y_1(x)$, определенная равенством (4) § 26 на отрезке (4), не выходит из области $D$.

Перейдем теперь к равенству (5) § 26. Аргументы функции $f[x, y_1(x)]$ не выходят из области $D$. Следовательно, можем написать

$$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[x,\ y_1(x)]\,dx\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \tag{10}$$

Методом полной индукции можно доказать, что для любого $n$

$$|y_n - y_0| \leqslant b, \tag{11}$$

если $x$ принадлежит интервалу (4).

Докажем теперь, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x), \tag{12}$$

и функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2). Для доказательства рассмотрим ряд

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{13}$$

*) Заметим, что если для некоторой функции $F(y)$ удовлетворяется условие

$$|F(y_2) - F(y_1)| < K|y_2 - y_1|,$$

где $y_2$ и $y_1$ — любые точки некоторой области, $K$ — постоянное число, то это условие называется *условием Липшица*. Таким образом, установив соотношение (8), мы показали, что если функция $f(x, y)$ имеет производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, ограниченную в некоторой области, то она в этой области удовлетворяет условию Липшица. Обратное утверждение может оказаться неверным.

с общим членом $u_n = y_n - y_{n-1}$, при этом $u_0 = y_0$. Очевидно, что сумма $n+1$ членов этого ряда равна

$$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i = y_n. \tag{14}$$

Оценим члены ряда (13) по абсолютной величине:

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \right| \leqslant M |x - x_0|. \tag{15}$$

На основании (4), (5) § 26 и (6) находим

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\, dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f'_y(x, \eta_1)(y_2 - y_1)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pm N \int_{x_0}^{x} M |x - x_0|\, dx = N \frac{M}{2} |x - x_0|^2$$

(берется знак $+$, если $x_0 < x$, и знак $-$, если $x_0 > x$). Итак,

$$|y_2 - y_1| \leqslant M \frac{N}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2. \tag{16}$$

Аналогично с учетом (16)

$$|y_3 - y_2| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_2) - f(x, y_1)]\, dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f'_y(x, \eta_2)(y_2 - y_1)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \pm N \int_{x_0}^{x} \frac{NM}{2} |x - x_0|^2\, dx = M \frac{N^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x - x_0|^3. \tag{17}$$

Продолжая так и далее, найдем

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant M \frac{N^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n. \tag{18}$$

Таким образом, для интервала $|x - x_0| < l$ функциональный ряд (13) мажорируем. Соответствующий числовой ряд с положительными членами, которые больше абсолютных величин соответствующих членов ряда (13), будет

$$y_0 + Ml + M \frac{Nl^2}{2!} + M \frac{N^2 l^3}{3!} + \ldots + M \frac{N^{n-1} l^n}{n!} + \ldots \tag{19}$$

с общим членом $v_n = M \frac{N^{n-1} l^n}{n!}$. Этот ряд сходится, что легко обнаруживается по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{M \frac{N^{n-1} l^n}{n!}}{M \frac{N^{n-2} l^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{Nl}{n} = 0 < 1.$$

Итак, ряд (13) мажорируем, следовательно, он сходится. Так как члены его являются непрерывными функциями, то он сходится к непрерывной функции $y(x)$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n = y(x), \tag{20}$$

где $y(x)$ — непрерывная функция. Эта функция удовлетворяет начальному условию, так как для всех $n$

$$y_n(x_0) = y_0.$$

Докажем, что полученная функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Снова напишем последнее из равенств (6) § 26:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \tag{21}$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx, \tag{22}$$

где $y(x)$ определена равенством (20).

Предварительно заметим следующее. Так как ряд (13) мажорируем, то из (20) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n$, что будет

$$|y - y_n| < \varepsilon. \tag{23}$$

С учетом (23) на всем интервале (4) можем написать

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx\right| \leqslant \pm \int_{x_0}^{x} |f(x, y) - f(x, y_n)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \pm \int_{x_0}^{x} N|y - y_n|\,dx \leqslant N\varepsilon|x - x_0|.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx\right| = 0.$$

Из последнего равенства следует равенство (22).

Теперь, переходя в обоих частях равенства (21) к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получим, что $y(x)$, определенная равенством (20), удовлетворяет уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{24}$$

Как указывалось выше, отсюда следует, что найденная функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2).

Замечание 1. Пользуясь другими методами доказательства, можно утверждать, что существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), если функция $f(x, y)$ непрерывная в области $D$ (теорема Пеано) *).

Замечание 2. Приемом, аналогичным тому, которым было получено соотношение (18), можно показать, что погрешность при замене решения $y(x)$ его $n$-м приближением $y_n$ дается формулой

$$|y-y_n| \leqslant \frac{N^n M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant \frac{MN^n l^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (25)$$

Пример. Применим эту оценку для пятого приближения $y_5$ решения уравнения

$$y' = x + y^2$$

при начальном условии $y_0 = 1$ при $x = 0$.

Пусть область $D$ такова:

$$D\{-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1\},$$

т. е. $a = 1/2$, $b = 1$. Тогда $M = 3/2$, $N = 2$. Определяем, далее,

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

По формуле (25) получаем

$$|y-y_5| \leqslant \frac{2^5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} = \frac{1}{960}.$$

Заметим, что оценка (25) довольно грубая. В рассмотренном примере другими методами можно показать, что погрешность в десятки раз меньше.

## § 28. Теорема единственности решения дифференциального уравнения

Докажем далее следующую теорему.

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области $D$, определенную в* § 27, *то решение дифференциального уравнения,*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

*при начальном условии*

$$y = y_0 \quad при \quad x = x_0 \qquad (2)$$

---

*) См., например, книгу: Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.

*единственно, т. е. через точку* $(x_0; y_0)$ *проходит единственная интегральная кривая уравнения* (1).

Доказательство. Допустим, что существует два решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), т. е. две кривые, выходящие из точки $A(x_0; y_0)$: $y(x)$ и $z(x)$. Следовательно, обе эти функции удовлетворяют уравнению (24) § 27:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx, \quad z = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, z)\,dx.$$

Рассмотрим разность

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, z)]\,dx. \tag{3}$$

Преобразуем подынтегральную разность по формуле Лагранжа с учетом неравенства (6) § 27:

$$f(x, y) - f(x, z) = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y}(y - z). \tag{4}$$

Из этого равенства получаем

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant N\,|y - z|. \tag{5}$$

На основании (3) с учетом (5) можем написать неравенство

$$|y - z| = \left|\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y - z)\,dx\right| \leqslant \pm \int_{x_0}^{x} N\,|y - z|\,dx. \tag{6}$$

Рассмотрим такое значение $x$, чтобы $|x - x_0| < \frac{1}{N}$. Для определенности будем считать, что $x_0 < x$, для случая $x < x_0$ доказательство аналогично.

Пусть наибольшее значение $|y - z|$ на интервале $x - x_0 < \frac{1}{N}$ принимается при $x = x^*$ и равно $\lambda$. Тогда неравенство (6) для точки $x^*$ принимает вид

$$\lambda \leqslant N \int_{x_0}^{x_0^*} \lambda\,dx = N\lambda(x^* - x_0) < N\lambda\frac{1}{N} < \lambda,$$

или

$$\lambda < \lambda.$$

При допущении существования двух различных решений пришли к противоречию. Следовательно, решение единственно.

Замечание 1. Можно показать, что решение будет единственным при меньших требованиях на функцию $f(x, y)$. См., например, книгу: Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.

Замечание 2. Если функция $f(x, y)$ имеет неограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области, то могут существовать несколько решений, удовлетворяющих уравнению (1) и начальным условиям (2).

Действительно, рассмотрим уравнение

$$y' = 3x\sqrt[3]{y} \tag{7}$$

с начальным условием

$$y = 0 \text{ при } x = 0. \tag{8}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial y} = xy^{-2/3} \to \infty$ при $y \to 0$.

В этом случае существуют два решения уравнения (7), удовлетворяющие начальному условию (8):

$$y = 0, \quad y = x^3.$$

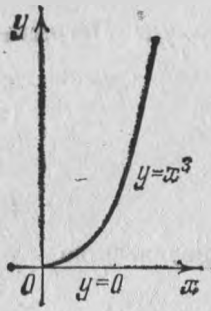


Рис. 373.

В том, что эти функции суть решения уравнения (7), убеждаемся непосредственной подстановкой их в уравнение. Через начало координат проходят две интегральные кривые (рис. 373).

### Упражнения к главе XVI

Написать несколько первых членов ряда по данному общему члену:

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$. 3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

4. $u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^k}$. 5. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$.

Исследовать сходимость следующих рядов:

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ *Отв.* Сходится.

7. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10n}} + \ldots$ *Отв.* Расходится.

8. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots$ *Отв.* Расходится.

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \ldots$ *Отв.* Расходится.

10. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \ldots$ *Отв.* Сходится.

11. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} + \ldots$ *Отв.* Расходится.

12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$ *Отв.* Сходится.

Исследовать сходимость рядов с заданными общими членами:

13. $u_n=\frac{1}{n^3}$. *Отв.* Сходится. 14. $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. *Отв.* Расходится. 15. $u_n=\frac{2}{5n+1}$. *Отв.* Расходится. 16. $u_n=\frac{1+n}{3+n^2}$. *Отв.* Расходится. 17. $u_n=\frac{1}{n^2+2n+3}$. *Отв.* Сходится. 18. $u_{n-1}=\frac{1}{n\ln n}$. *Отв.* Расходится. 19. Доказать неравенство $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}$.

20. Применима ли теорема Лейбница к ряду

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots?$$

*Отв.* Неприменима, так как члены ряда не убывают монотонно по абсолютной величине. Ряд расходится.

Сколько первых членов надо взять в рядах, чтобы сумма их отличалась не более чем на $\frac{1}{10^6}$ от суммы соответствующего ряда:

21. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\ldots$ *Отв.* $n=20$.

22. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ *Отв.* $n=10^6$.

23. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$ *Отв.* $n=10^3$.

24. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots$ *Отв.* $n=10$.

Выяснить, какие из нижеследующих рядов сходятся абсолютно:

25. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$ *Отв.* Сходится абсолютно.

26. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ *Отв.* Сходится абсолютно.

27. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\ln n}+\ldots$ *Отв.* Сходится условно.

28. $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}-\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$ *Отв.* Сходится условно.

Найти сумму ряда

29. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$ *Отв.* $\frac{1}{4}$.

При каких значениях $x$ сходятся ряды:

30. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ *Отв.* $-2<x<2$.

31. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ *Отв.* $-1\leqslant x\leqslant 1$.

32. $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ *Отв.* $|x|<1/3$.

33. $1+\frac{100x}{1\cdot3}+\frac{10000x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1000000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots$ *Отв.* $-\infty<x<\infty$.

34. $\sin x+2\sin\frac{x}{3}+4\sin\frac{x}{9}+\ldots+2^n\sin\frac{x}{3^n}+\ldots$ *Отв.* $-\infty<x<\infty$.

35. $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$ *Отв.* $-1\leqslant x<1$.

36. $x+\frac{2^k}{2!}x^2+\frac{3^k}{3!}x^3+\ldots+\frac{n^k}{n!}x^n+\ldots$ *Отв.* $-\infty<x<\infty$.

37. $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n!}{n^n}x^n+\ldots$ *Отв.* $-e<x<e$.

38. $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(1\cdot 2\cdot 3)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$ *Отв.* $-4<x<4$.

39. Найти сумму ряда $x+2x^2+\ldots+nx^n+\ldots$ ($|x|<1$). *Отв.* $x/(1-x)^2$

Определить, какие из нижеследующих рядов мажорируемы на указанных отрезках:

40. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ ($0\leqslant x\leqslant 1$). *Отв.* Мажорируем.

41. $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ ($0\leqslant x\leqslant 1$). *Отв.* Не мажорируем.

42. $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$ $[0, 2\pi]$. *Отв.* Мажорируем.

## Разложение функций в ряды

43. Разложить $\frac{1}{10+x}$ по степеням $x$ и определить интервал сходимости. *Отв.* Сходится при $-10<x<10$.

44. Разложить $\cos x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$

45. Разложить $e^{-x}$ по степеням $x$. *Отв.* $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$

46. Разложить $e^x$ по степеням $x-2$. *Отв.* $e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\ldots$

47. Разложить $x^3-2x^2+5x-7$ по степеням $x-1$. *Отв.* $-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

48. Разложить многочлен $x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$; убедиться, что этот многочлен имеет число 1 трехкратным корнем. *Отв.* $f(x)=81(x-1)^3+270(x-1)^4+405(x-1)^5+351(x-1)^6+189(x-1)^7+63(x-1)^8+12(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

49. Разложить $\cos(x+a)$ по степеням $x$. *Отв.* $\cos a-x\sin a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a-\ldots$

50. Разложить $\ln x$ по степеням $x-1$. *Отв.* $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$

51. Разложить $e^x$ в ряд по степеням $x+2$. *Отв.* $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$.

**52.** Разложить $\cos^2 x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. *Отв.* $\frac{1}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

**53.** Разложить $\frac{1}{x^2}$ в ряд по степеням $x+1$. *Отв.* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$ $(-2<x<0)$.

**54.** Разложить $\operatorname{tg} x$ в ряд по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. *Отв.* $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+$ $+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$

Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x$ функций:

**55.** $\operatorname{tg} x$. *Отв.* $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$ **56.** $e^{\cos x}$. *Отв.* $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\right.$ $\left.+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$. **57.** $e^{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$ **58.** $\ln(1+e^x)$. *Отв.* $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$ **59.** $e^{\sin x}$. *Отв.* $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$ **60.** $(1+x)^x$. *Отв.* $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4-\ldots$ **61.** $\sec x$. *Отв.* $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ **62.** $\ln\cos x$. *Отв.* $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$

**63.** Разложить $\sin kx$ по степеням $x$. *Отв.* $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$

**64.** Разложить $\sin^2 x$ по степеням $x$ и определить интервал сходимости. *Отв.* $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ Ряд сходится при всех значениях $x$.

**65.** Разложить $\frac{1}{1+x^2}$ в ряд по степеням $x$. *Отв.* $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$

**66.** Разложить $\operatorname{arctg} x$ в ряд по степеням $x$. Указание. Воспользоваться формулой $\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}$. *Отв.* $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

**67.** Разложить $\frac{1}{(1+x)^2}$ в ряд по степеням $x$. *Отв.* $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ $(-1<x<1)$.

Пользуясь формулами разложения в степенной ряд функций $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ и применяя различные приемы, разложить в степенные ряды функции и определить интервалы сходимости:

**68.** $\operatorname{sh} x$. *Отв.* $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **69.** $\operatorname{ch} x$. *Отв.* $1+\frac{x^2}{2!}+$ $+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **70.** $\cos^2 x$. *Отв.* $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$.

**71.** $(1+x)\ln(1+x)$. *Отв.* $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x|\leqslant 1)$. **72.** $(1+x)e^{-x}$.

*Отв.* $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$. **73.** $\frac{1}{4-x^4}$. *Отв.* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x|<\sqrt{2})$. **74.** $\frac{e^x-1}{x}$. *Отв.* $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **75.** $\frac{1}{(1-x)^2}$. *Отв.* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$. **76.** $e^x\sin x$. *Отв.* $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **77.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. *Отв.* $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$. **78.** $\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dx$. *Отв.* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|\leqslant1)$. **79.** $\int_0^x\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$. *Отв.* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$. **80.** $\int\frac{\cos x}{x}dx$. *Отв.* $C+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!}$ $(-\infty<x<0$ и $0<x<\infty)$. **81.** $\int_0^x\frac{dx}{1-x^9}$. *Отв.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

**82.** Доказать равенства

$$\sin(a+x)=\sin a\cos x+\cos a\sin x,$$
$$\cos(a+x)=\cos a\cos x-\sin a\sin x,$$

разложив левые части по степеням $x$.

Пользуясь соответствующими рядами, вычислить:

**83.** $\cos10^\circ$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,9848. **84.** $\sin1^\circ$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,0175. **85.** $\sin18^\circ$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,3090. **86.** $\sin\frac{\pi}{4}$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,7071. **87.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,1973. **88.** $\ln5$ с точностью до 0,001. *Отв.* 1,609. **89.** $\lg5$ с точностью до 0,001. *Отв.* 0,699. **90.** $\arcsin1$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 1,5708. **91.** $\sqrt{e}$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 1,6487. **92.** $\lg e$ с точностью до 0,00001. *Отв.* 0,43429. **93.** $\cos1$ с точностью до 0,00001. *Отв.* 0,54030.

Пользуясь разложением в ряд Маклорена функции $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}$, вычислить с точностью до 0,001:

**94.** $\sqrt[3]{30}$. *Отв.* 3,107. **95.** $\sqrt{70}$. *Отв.* 4,121. **96.** $\sqrt[3]{500}$. *Отв.* 8,367. **97.** $\sqrt[5]{250}$. *Отв.* 3,017. **98.** $\sqrt{84}$. *Отв.* 9,165. **99.** $\sqrt[3]{2}$. *Отв.* 1,2598.

Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интегралы:

**100.** $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $10^{-5}$. *Отв.* 0,94608. **101.** $\int_0^1e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,7468. **102.** $\int_0^{\pi/4}\sin(x^2)\,dx$ с точностью до 0,0001.

*Отв.* 0,1571. **103.** $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$ с точностью до 0,01. *Отв.* 0,81. **104.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001. *Отв.* 0,487. **105.** $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001. *Отв.* 0,764. **106.** $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$ с точностью до 0,001. *Отв.* 0,071. **107.** $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,9226. **108.** $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ с точностью до 0,0001. *Отв.* 0,0214. **109.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью до 0,001. *Отв.* 0,494.

**110.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi^2}{12}$.

Указание. При решении этого примера и двух следующих полезно иметь в виду равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

которые будут установлены в § 2 гл. XVII.

**111.** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$. *Отв.* $\frac{\pi^2}{6}$. **112.** $\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x}$. *Отв.* $\frac{\pi^2}{4}$.

### Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

**113.** Найти решение уравнения $y''=xy$, удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Указание. Искать решение в виде ряда. *Отв.* $1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots$ $\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k}+\ldots$

**114.** Найти решение уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $y'=1$ при $x=0$. *Отв.* $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

**115.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

Указание. Искать решение в форме $y=x^p(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots)$. *Отв.* $C_1x^{1/2}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]+C_2x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+$ $+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

**116.** Найти решение уравнения $xy''+y'+xy=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=0$ при $x=0$. *Отв.* $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(1\cdot 2)^2\cdot 2^4}-\frac{x^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2\cdot 2^6}+\ldots$ $\ldots(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}+\ldots$

Замечание. Два последних дифференциальных уравнения являются частными случаями уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)\,y=0$$

при $p=\frac{1}{2}$ и $p=0$.

**117.** Найти общее решение уравнения $4xy''+2y'+y=0$.

Указание. Искать решение в виде ряда $x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$. *Отв.* $C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$.

**118.** Найти решение уравнения $(1-x^2)\,y''-xy'=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=0$, $y'=1$ при $x=0$. *Отв.* $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+$ $+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

**119.** Найти решение уравнения $(1+x^2)\,y''+2xy'=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $y'=1$ при $x=0$. *Отв.* $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

**120.** Найти решение уравнения $y''=xyy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=1$ при $x=0$. *Отв.* $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

**121.** Найти решение уравнения $(1-x)\,y'=1+x-y$, удовлетворяющее начальному условию: $y=0$ при $x=0$, и указать интервал сходимости полученного ряда. *Отв.* $x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

**122.** Найти решения уравнения $xy''+y=0$, удовлетворяющее начальному условию: $y=0$, $y'=1$ при $x=0$, и указать интервал сходимости. *Отв.* $x-\frac{x^2}{(1!)^2\cdot 2}+\frac{x^3}{(2!)^2\cdot 3}-\frac{x^4}{(3!)^2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{[(n-1)!]^2n}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

**123.** Найти решение уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, удовлетворяющее начальному условию: $y=1$, $y'=0$ при $x=0$. *Отв.* $\frac{\sin x}{x}$.

**124.** Найти решение уравнения $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=0$ при $x=0$, и указать интервал сходимости полученного ряда. *Отв.* $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\ldots$ $(|x|<\infty)$.

Найти первые три члена разложения в степенной ряд решений нижеследующих дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

**125.** $y'=x^2+y^2$, $y=1$ при $x=0$. *Отв.* $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$

**126.** $y''=e^y+x$, $y=1$, $y'=0$ при $x=0$. *Отв.* $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

**127.** $y'=\sin y-\sin x$, $y=0$ при $x=0$. *Отв.* $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Найти несколько членов разложения в степенной ряд решений дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

128. $y''=yy'-x^2$, $y=1$, $y'=1$ при $x=0$. *Отв.* $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\dots$

129. $y'=y^2+x^3$, $y=\frac{1}{2}$ при $x=0$. *Отв.* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\dots$

130. $y'=x^2-y^2$, $y=0$ при $x=0$. *Отв.* $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\dots$

131. $y'=x^2y^2-1$, $y=1$ при $x=0$. *Отв.* $1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}-\dots$

132. $y'=e^y+xy$, $y=0$ при $x=0$. *Отв.* $x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots$

ГЛАВА XVII

# РЯДЫ ФУРЬЕ

## § 1. Определение. Постановка задачи

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots,$$

или, более сжато, ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

называется *тригонометрическим рядом*. Постоянные числа $a_0$, $a_n$ и $b_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда*.

Если ряд (1) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi$, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом $2\pi$.

Таким образом,

$$f(x)=f(x+2\pi).$$

Поставим следующую задачу.

Дана функция $f(x)$, периодическая с периодом $2\pi$. При каких условиях для $f(x)$ можно найти тригонометрический ряд, сходящийся к данной функции?

Эта задача и будет решаться в настоящей главе.

Определение коэффициентов ряда по формулам Фурье. Пусть периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(x)$ такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т. е. является суммой этого ряда:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (2)$$

Предположим, что интеграл от функции, стоящей в левой части этого равенства, равняется сумме интегралов от членов ряда (2). Это, например, будет выполняться, если предположить,

что числовой ряд, составленный из коэффициентов данного тригонометрического ряда, абсолютно сходится, т. е. сходится положительный числовой ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots+|a_n|+|b_n|+\ldots \qquad (3)$$

Тогда ряд (1) мажорируем и, следовательно, его можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до $\pi$. Используем это для вычисления коэффициента $a_0$.

Проинтегрируем обе части равенства (2) в пределах от $-\pi$ до $\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,dx\right).$$

Вычислим отдельно каждый интеграл, встречающийся в правой части:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx=\pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{a_n\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,dx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-b_n\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\pi a_0,$$

откуда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Для вычисления остальных коэффициентов ряда нам потребуются некоторые определенные интегралы, которые мы и рассмотрели предварительно.

Если $n$ и $k$ — целые числа, то имеют место следующие равенства: если $n\neq k$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx=0, \qquad (I)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx=0;$$

если же $n=k$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\,dx = 0, \qquad (II)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi.$$

Вычислим, например, первый интеграл из группы (I). Так как

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x],$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x\,dx = 0.$$

Подобным образом можно получить и остальные формулы (I)*). Интегралы группы (II) вычисляются непосредственно (см. гл. X т. I).

Теперь мы можем вычислить коэффициенты $a_k$ и $b_k$ ряда (2).

Для разыскания коэффициента $a_k$ при каком-либо определенном значении $k \neq 0$ умножим обе части равенства (2) на $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \qquad (2')$$

Ряд, получившийся в правой части равенства, мажорируем, так как его члены не превосходят по абсолютной величине членов сходящегося положительного ряда (3). Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке.

Проинтегрируем равенство (2′) в пределах от $-\pi$ до $\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right).$$

---

*) С помощью формул

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x - \sin(n-k)x],$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2}[-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x].$$

Принимая во внимание формулы (II) и (I), видим, что все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом $a_k$.

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{5}$$

Умножая обе части равенства (2) на $\sin kx$ и снова интегрируя от $-\pi$ до $\pi$, найдем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = b_k\pi, \tag{6}$$

откуда

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{7}$$

Коэффициенты, определенные по формулам (4)—(6), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (1) с такими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Возвратимся теперь к вопросу, поставленному нами в начале параграфа: какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Мы сформулируем здесь теорему, которая даст достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно монотонной* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots$ $\ldots, (x_{n-1}, b)$ так, что на каждом из интервалов функция монотонна, т. е. либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из определения следует, что если функция $f(x)$ кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[a, b]$, то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x = c$ есть точка разрыва функции $f(x)$, то в силу монотонности функции существуют пределы

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0),$$

т. е. точка $c$ есть точка разрыва первого рода (рис. 374).

Сформулируем теперь следующую теорему.

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi$ кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $s(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, т. е. если $x=c$ — точка разрыва функции $f(x)$, то*

$$s(x)\big|_{x=c}=\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$

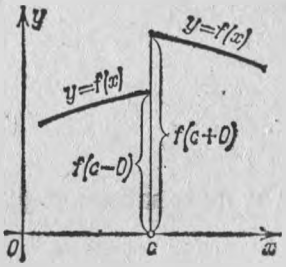


Рис. 374.

Из этой теоремы следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных отделах математики. Особенно успешно ряды Фурье применяются в математической физике и ее приложениях к конкретным задачам механики и физики (см. гл. XVIII).

Данную теорему мы приводим без доказательства. В § 8—10 будет дано доказательство другого достаточного признака разложимости функции в ряд Фурье, который относится в некотором смысле к более узкому классу функций.

## § 2. Примеры разложения функций в ряды Фурье

Приведем примеры разложения функций в ряды Фурье.

Пример 1. Периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi$ определена следующим образом: $f(x)=x$, $-\pi<x\leqslant\pi$.

Эта функция кусочно монотонная и ограниченная (рис. 375). Следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

По формуле (4) § 1 находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Применяя формулу (5) § 1 и интегрируя по частям, найдем

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=0.$$

По формуле (6) § 1 находим

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

Таким образом, получаем ряд

$$l(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}+\ldots\right].$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т. е. нулю.

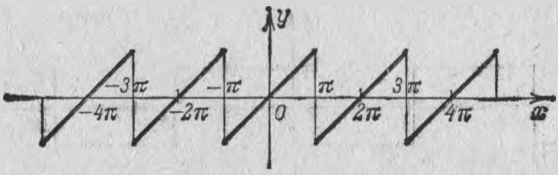



Рис. 375.

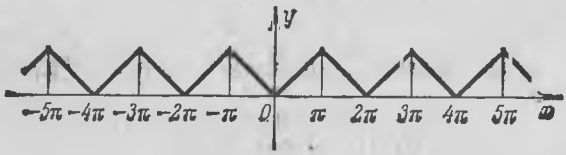



Рис. 376.

Пример 2. Периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi$ определена следующим образом:

$$f(x)=-x \text{ при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \text{ при } 0<x\leqslant\pi$$

(т. е. $f(x)=|x|$) (рис. 376). Эта функция тоже кусочно монотонна и ограничена на отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Определим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\pi$$

и

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx+\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left[-\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}+\cos kx\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0 & \text{при } k \text{ четном},\\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при } k \text{ нечетном},\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin kx\,dx\right]=0.$$

Таким образом, получаем ряд

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}+\ldots\right].$$

Этот ряд сходится во всех точках, и его сумма равна данной функции.

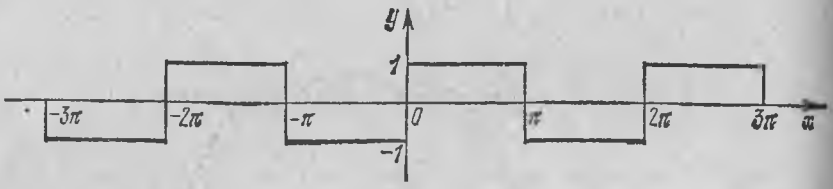



Рис. 377.

Пример 3. Периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=-1 \text{ при } -\pi<x<0,$$
$$f(x)=1 \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Эта функция (рис. 377) кусочно монотонна и ограничена на отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}dx\right]=0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=-1\cdot\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{0}^{\pi}=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)=\begin{cases}0 & \text{при } k \text{ четном},\\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{при } k \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}+\ldots\right].$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

На рис. 378 наглядно показано, как частичные суммы $s_n$ ряда все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ с увеличением $n$.

Пример 4. Периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=x^2,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi \text{ (рис. 379)}.$$

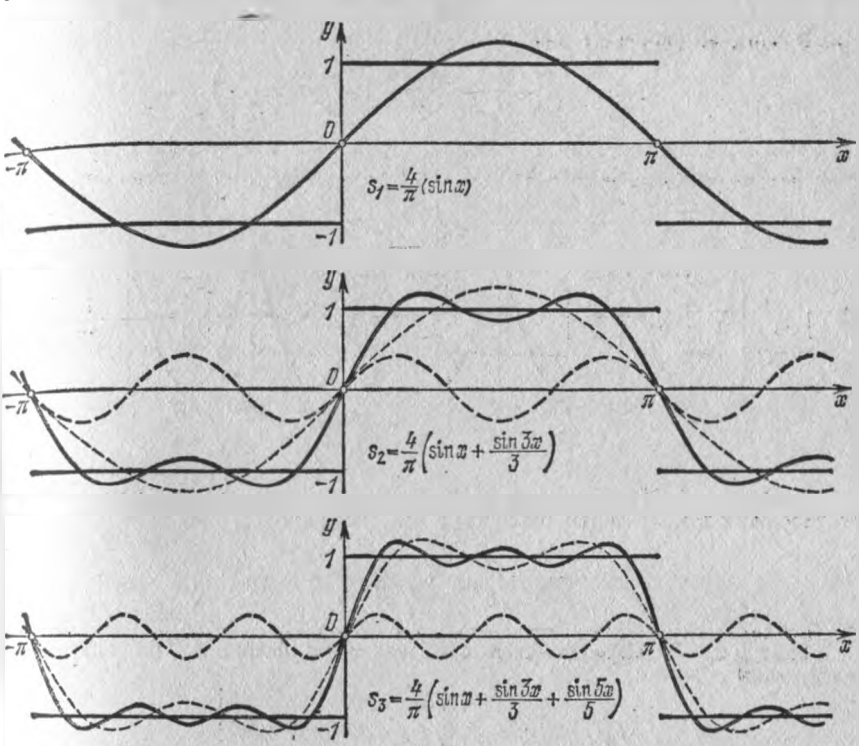



Рис. 378.

Определим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=\frac{4}{\pi k^2}\left[\pi\cos k\pi\right]=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{k^2} & \text{при } k \text{ четном},\\ -\frac{4}{k^2} & \text{при } k \text{ нечетном};\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=0.$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right).$$

Так как функция кусочно монотонна, ограничена и непрерывна, то это равенство выполняется во всех точках.

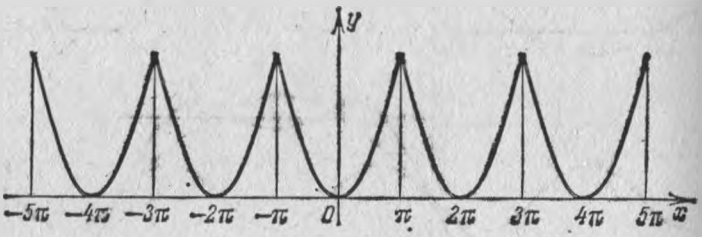



Рис. 379.

Полагая в полученном равенстве $x=\pi$, получим

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Пример 5. Периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=0 \text{ при } -\pi<x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \text{ при } 0<x\leqslant\pi \text{ (рис. 380).}$$

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{при } k \text{ нечетном,}\\ 0 & \text{при } k \text{ четном;}\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi=\begin{cases}1/k \text{ при } k \text{ нечетном,}\\ -1/k \text{ при } k \text{ четном.}\end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$$

В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева (т. е. в данном случае числу $\pi/2$).

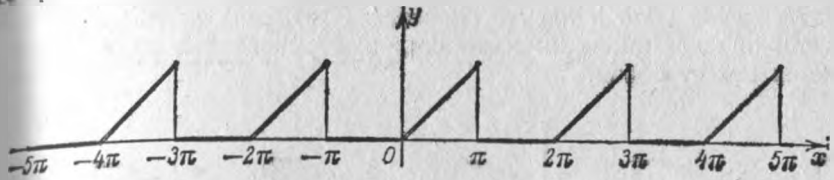



Рис. 380.

Полагая в полученном равенстве $x=0$, получаем

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

## § 3. Одно замечание о разложении периодической функции в ряд Фурье

Отметим следующее свойство периодической функции $\psi(x)$ с периодом $2\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

каково бы ни было число $\lambda$.

Действительно, так как

$$\psi(\xi-2\pi)=\psi(\xi),$$

то, полагая $x=\xi-2\pi$, можем написать при любых $c$ и $d$

$$\int_{c}^{d}\psi(x)\,dx=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi-2\pi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(x)\,dx.$$

В частности, принимая $c=-\pi$, $d=\lambda$, получим

$$\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

поэтому

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=$$

$$=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx.$$

Указанное свойство означает, что *интеграл от периодической функции $\psi(x)$ по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет всегда одно и то же значение.* Этот факт легко иллюстрируется и геометрически: площади, заштрихованные на рис. 381, равны между собой.

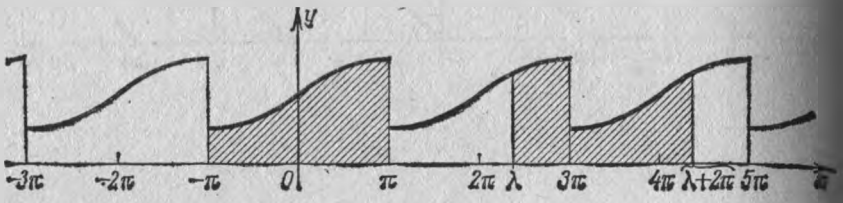



Рис. 381.

Из доказанного свойства вытекает, что при вычислении коэффициентов Фурье мы можем заменить промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ промежутком интегрирования $(\lambda, \lambda+2\pi)$, т. е. можем положить

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (1)$$

где $\lambda$ — любое число.

Это следует из того, что по условию функция $f(x)$ является периодической с периодом $2\pi$; следовательно, и функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ являются периодическими функциями с периодом $2\pi$. Покажем на примере, как доказанное свойство упрощает процесс нахождения коэффициентов в некоторых случаях.

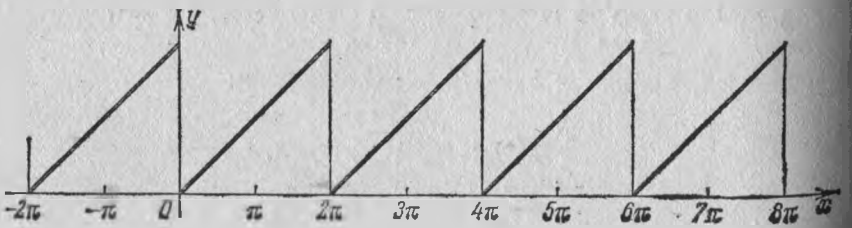



Рис. 382.

Пример. Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $2\pi$, которая на отрезке $0 < x \leqslant 2\pi$ задана равенством

$$f(x) = x.$$

График функции $f(x)$ изображен на рис. 382. Эта функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ задается двумя формулами: $f(x) = x + 2\pi$ на отрезке $[-\pi, 0]$ и

$f(x)=x$ на отрезке $[0, \pi]$. В то же время на отрезке $[0, 2\pi]$ гораздо проще она задается одной формулой $f(x)=x$. Поэтому для разложения этой функции в ряд Фурье выгоднее воспользоваться формулами (1), приняв $\lambda=0$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2}{n}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\pi-2\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x-\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x-\frac{2}{5}\sin 5x-\ldots$$

Этот ряд дает заданную функцию во всех точках, кроме точек разрыва (т. е. кроме точек $x=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$). В этих точках сумма ряда равна полусумме предельных значений функции $f(x)$ справа и слева (т. е. в данном случае числу $\pi$).

## § 4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Из определения четной и нечетной функции следует, что если $\psi(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx=2\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx.$$

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\,dx+\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx=\int_0^{\pi}\psi(-x)\,dx+\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx=2\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx,$$

так как по определению четной функции $\psi(-x)=\psi(x)$.

Аналогично можно доказать, что если $\varphi(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=\int_0^{\pi}\varphi(-x)\,dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx=-\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx=0.$$

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos kx$ есть функция также нечетная, а

$f(x)\sin kx$ — четная; следовательно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=0, \qquad (1)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,$$

т. е. ряд Фурье нечетной функции содержит «только синусы» (см. пример 1 § 2).

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin kx$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos kx$ — четная и, следовательно,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx, \qquad (2)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=0,$$

т. е. ряд Фурье четной функции содержит «только косинусы» (см. пример 2 § 2).

Полученные формулы позволяют упрощать вычисления при разыскании коэффициентов Фурье в тех случаях, когда заданная функция является четной или нечетной. Очевидно, что не всякая периодическая функция является четной или нечетной (см. пример 5 § 2).

Пример. Пусть требуется разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$, которая имеет период $2\pi$ и на отрезке $[0, \pi]$ задана равенством

$$y=x.$$

Эту функцию мы уже разлагали в ряд Фурье в примере 2 § 2 (см. рис. 376). Вычислим снова коэффициенты Фурье этой функции, используя тот факт, что заданная функция является четной.

В силу формул (2) $b_k=0$ при любом $k$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\pi,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0 & \text{при } k \text{ четном},\\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при } k \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Мы получили те же коэффициенты, что и в примере 2 § 2, но более коротким путем.

## § 5. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от $2\pi$. Разложим ее в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле

$$x = lt/\pi.$$

Тогда функция $f(lt/\pi)$ будет периодической функцией от $t$ с периодом $2\pi$. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt.$$

Возвратимся теперь к старой переменной $x$:

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = x\frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx.$$

Тогда будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx. \tag{2}$$

Формула (1) примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

где коэффициенты $a_0$, $a_k$, $b_k$ вычисляются по формулам (2). Это и есть ряд Фурье для периодической функции с периодом $2l$.

Заметим, что все теоремы, которые имели место для рядов Фурье от периодических функций с периодом $2\pi$, сохраняются и для рядов Фурье от периодических функций с каким-либо другим периодом $2l$. В частности, сохраняет свою силу достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье (см. конец § 1), замечание о возможности вычислять коэффициенты ряда, интегрируя по любому отрезку, длина которого равна периоду (см. § 3),

$f(x)\sin kx$ — четная; следовательно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=0, \qquad (1)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,$$

т. е. ряд Фурье нечетной функции содержит «только синусы» (см. пример 1 § 2).

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin kx$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos kx$ — четная и, следовательно,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx, \qquad (2)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=0,$$

т. е. ряд Фурье четной функции содержит «только косинусы» (см. пример 2 § 2).

Полученные формулы позволяют упрощать вычисления при разыскании коэффициентов Фурье в тех случаях, когда заданная функция является четной или нечетной. Очевидно, что не всякая периодическая функция является четной или нечетной (см. пример 5 § 2).

Пример. Пусть требуется разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$, которая имеет период $2\pi$ и на отрезке $[0, \pi]$ задана равенством

$$y=x.$$

Эту функцию мы уже разлагали в ряд Фурье в примере 2 § 2 (см. рис. 376). Вычислим снова коэффициенты Фурье этой функции, используя тот факт, что заданная функция является четной.

В силу формул (2) $b_k=0$ при любом $k$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\pi,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0 & \text{при } k \text{ четном},\\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при } k \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Мы получили те же коэффициенты, что и в примере 2 § 2, но более коротким путем.

## § 5. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от $2\pi$. Разложим ее в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле

$$x = lt/\pi.$$

Тогда функция $f(lt/\pi)$ будет периодической функцией от $t$ с периодом $2\pi$. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt.$$

Возвратимся теперь к старой переменной $x$:

$$x = \frac{l}{\pi}t, \quad t = x\frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx.$$

Тогда будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx. \tag{2}$$

Формула (1) примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

где коэффициенты $a_0$, $a_k$, $b_k$ вычисляются по формулам (2). Это и есть ряд Фурье для периодической функции с периодом $2l$.

Заметим, что все теоремы, которые имели место для рядов Фурье от периодических функций с периодом $2\pi$, сохраняются и для рядов Фурье от периодических функций с каким-либо другим периодом $2l$. В частности, сохраняет свою силу достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье (см. конец § 1), замечание о возможности вычислять коэффициенты ряда, интегрируя по любому отрезку, длина которого равна периоду (см. § 3),

а также замечание о возможности упростить вычисление коэффициентов ряда, если функция является четной или нечетной (§ 4).

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[-l, l]$ задается равенством $f(x)=|x|$ (рис. 383).

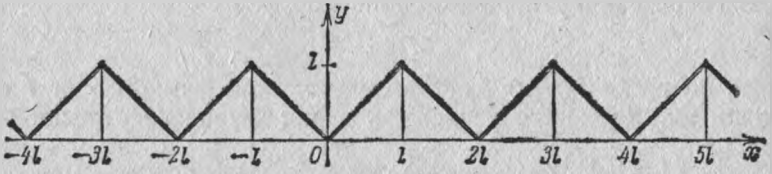



Рис. 383.

Решение. Так как рассматриваемая функция четная, то

$$b_k=0, \quad a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=l,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2l}{\pi^2}\int_0^\pi x\cos kx\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } k \text{ четном},\\ -\dfrac{4l}{\pi^2k^2} & \text{при } k \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Следовательно, разложение имеет вид

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1}+\frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2}+\ldots\right].$$

## § 6. О разложении непериодической функции в ряд Фурье

Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана кусочно монотонная функция $f(x)$ (рис. 384). Покажем, что данную функцию $f(x)$ в точках ее непрерывности можно представить в виде суммы ряда

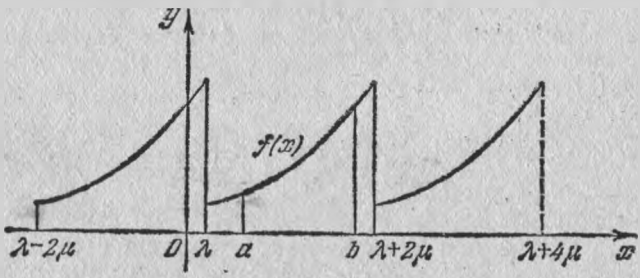



Рис. 384.

Фурье. Для этого рассмотрим произвольную периодическую кусочно монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2\mu \geqslant b-a$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. (Мы дополнили определение функции $f(x)$.)

Разложим функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a, b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$, т. е. мы разложили функцию $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим, далее, следующий важный случай. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, l]$. Дополняя определение этой функции произвольным образом на отрезке $[-l, 0]$ (сохраняя кусочную монотонность), мы можем разложить эту функцию в ряд Фурье. В частности, если мы дополним определение данной функции так, чтобы при $-l \leqslant x < 0$ было $f(x) = f(-x)$, в результате получится четная функция (рис. 385). (В этом случае говорят, что функция $f(x)$ «продолжена четным образом».) Эту функцию разлагают в ряд Фурье, который содержит только косинусы. Таким образом, заданную на отрезке $[0, l]$ функцию $f(x)$ мы разложили по косинусам.

Если же мы продолжим определение функции $f(x)$ при $-l \leqslant x < 0$ так: $f(x) = -f(-x)$, то получим нечетную функцию, которая разлагается по синусам (рис. 386). (Функция $f(x)$ «продолжена нечетным образом».) Таким образом, если на отрезке $[0, l]$ задана некоторая кусочно монотонная функция $f(x)$, то ее можно разложить в ряд Фурье как по косинусам, так и по синусам.

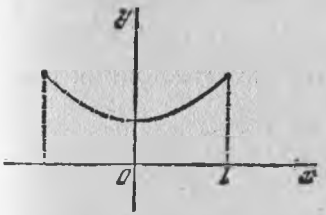



Рис. 385.

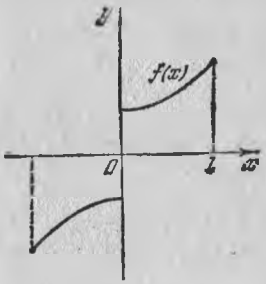



Рис. 386.

Пример 1. Пусть требуется разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ в ряд по синусам.

Решение. Продолжая эту функцию нечетным образом (рис. 375), получим ряд

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right]$$

(см. пример 1 § 2).

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ в ряд по косинусам.

Решение. Продолжая эту функцию четным образом, мы получим

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

(рис. 376). Разлагая ее в ряд, найдем

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

(см. пример 2 § 2). Итак, на отрезке $[0, \pi]$ имеет место равенство

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right].$$

## § 7. Приближение в среднем заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Представление функции бесконечным рядом (Фурье, Тейлора и т. д.) имеет на практике тот смысл, что конечная сумма, получающаяся при обрывании ряда на $n$-м члене, является приближенным выражением разлагаемой функции; это приближенное выражение можно довести до какой угодно степени точности путем выбора достаточно большого значения $n$. Однако характер приближенного представления может быть различным.

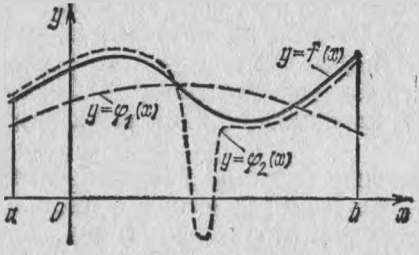


Рис. 387.

Так, например, сумма $n$ первых членов ряда Тейлора $s_n$ совпадает с рассматриваемой функцией в одной точке и в этой точке имеет производные до $n$-го порядка, совпадающие с производными рассматриваемой функции. Многочлен Лагранжа $n$-й степени (см. § 9 гл. VII, т. I) совпадает с рассматриваемой функцией в $n+1$ точках.

Посмотрим, какой характер имеет приближенное представление периодической функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами вида

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

где $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, ..., $a_n$, $b_n$ — коэффициенты Фурье, т. е. суммой $n$ первых членов ряда Фурье. Сделаем сначала несколько замечаний.

Допустим, что мы рассматриваем некоторую функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и хотим оценить погрешность при замене этой функции другой функцией $\varphi(x)$. Можно за меру погрешности взять $\max|f(x)-\varphi(x)|$ на отрезке $[a, b]$, т. е. так называемое *наибольшее уклонение* функции $\varphi(x)$ от $f(x)$. Но иногда естественнее за меру погрешности брать так называемое *среднеквадратичное уклонение* $\delta$, которое определяется равенством

$$\delta^2=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx.$$

Поясним на рис. 387 различие между среднеквадратичным уклонением и наибольшим уклонением.

Пусть сплошная линия изображает функцию $y=f(x)$, пунктирные линии изображают приближения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Наибольшее уклонение кривой $y=\varphi_1(x)$ меньше, чем кривой $y=\varphi_2(x)$, но среднеквадратичное уклонение первой кривой больше, чем второй, так как кривая $y=\varphi_2(x)$ значительно отличается от кривой $y=f(x)$ только на узком участке и поэтому лучше характеризует кривую $y=f(x)$, чем первая.

Вернемся теперь к нашей задаче.

*Пусть дана периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(x)$. Среди всех тригонометрических многочленов $n$-го порядка*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

*требуется найти путем выбора коэффициентов $\alpha_k$ и $\beta_k$ тот многочлен, для которого среднеквадратичное уклонение, определяемое равенством*

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx,$$

*имеет наименьшее значение.*

Задача сводится к нахождению минимума функции $2n+1$ переменных $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n$.

Развернув квадрат, стоящий под знаком интеграла, и интегрируя почленно, получим

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f^2(x)-2f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2\right\}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2kx\,dx+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jx\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Далее, на основании формул (I) и (II) § 1 имеем: при $k = j$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = \pi,$$

при любых $k$ и $j$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos jx\,dx = 0$$

и при $k \neq j$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\delta_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Прибавляя и вычитая сумму

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2),$$

будем иметь

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]. \qquad (1)$$

Первые три слагаемых этой суммы не зависят от выбора коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Остальные слагаемые

$$\frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

неотрицательны. Их сумма достигает наименьшего значения (равного нулю), если положить $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = a_1$, ..., $\alpha_n = a_n$, $\beta_1 = b_1$, ..., $\beta_n = b_n$. При таком выборе коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ тригонометрический многочлен

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

будет меньше всего отличаться от функции $f(x)$ в том смысле, что среднеквадратичное уклонение $\delta_n^2$ будет наименьшим.

Таким образом, мы доказали теорему:

*Среди всех тригонометрических многочленов порядка n наименьшее среднеквадратичное уклонение от функции $f(x)$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.*

Величина наименьшего среднеквадратичного уклонения равна

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2). \qquad (2)$$

Так как $\delta_n^2 \geqslant 0$, то при любом $n$ имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Следовательно, ряд, стоящий справа, при $n \to \infty$ сходится, и мы можем написать

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \qquad (3)$$

Это соотношение называется *неравенством Бесселя.*

Отметим без доказательства, что для всякой ограниченной и кусочно монотонной функции среднеквадратичное уклонение, получающееся при замене данной функции $n$-й частичной суммой ряда Фурье, стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\delta_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда из формулы (2) вытекает равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \qquad (3')$$

которое называется *равенством Ляпунова — Парсеваля.* Заметим, что равенство Ляпунова — Парсеваля доказано для более широкого класса функций, чем тот, который мы здесь рассматриваем.

Из доказанного следует, что для функции, удовлетворяющей равенству Ляпунова (в частности, для всякой ограниченной

кусочно монотонной функции), соответствующий ряд Фурье дает среднеквадратичное уклонение, равное нулю.

Замечание. Установим одно свойство коэффициентов Фурье, нужное для дальнейшего. Введем сначала определение.

Функция $f(x)$ называется *кусочно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она имеет конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке (или всюду непрерывна).

Докажем следующее утверждение.

*Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то и функция $f^2(x)$ также является кусочно непрерывной на этом отрезке. Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ существует и является конечным числом *). В этом случае из неравенства Бесселя (3) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится. Но если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. в данном случае $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$. Отсюда непосредственно получаются равенства (4). Итак, для кусочно непрерывной и ограниченной функции справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Если функция $f(x)$ периодична с периодом $2\pi$, то последние равенства можно переписать следующим образом (для любого $a$):

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Заметим, что эти равенства остаются в силе, если в интегралах взять какой угодно промежуток интегрирования $[a, b]$, т. е. интегралы $\int\limits_a^b f(x)\cos nx\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании $n$, если $f(x)$ — ограниченная и кусочно непрерывная функция.

Действительно, считая для определенности $b - a < 2\pi$, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)$ с периодом $2\pi$, опреде-

*) Этот интеграл можно представить как сумму определенных интегралов от непрерывных функций по отрезкам, на которые разбивается отрезок $[-\pi, \pi]$.

ленную следующим образом:

$$\varphi(x)=f(x) \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$
$$\varphi(x)=0 \quad \text{при} \quad b<x\leqslant a+2\pi.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx.$$

Так как $\varphi(x)$ есть ограниченная и кусочно непрерывная функция, то интегралы, стоящие справа, стремятся к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, стремятся к нулю и интегралы, стоящие слева. Таким образом, утверждение доказано, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0 \tag{5}$$

для любых чисел $a$ и $b$ и любой кусочно непрерывной и ограниченной на $[a, b]$ функции $f(x)$.

## § 8. Интеграл Дирихле

В этом параграфе мы выведем формулу, выражающую $n$-ю частичную сумму ряда Фурье через некоторый интеграл. Эта формула будет нам нужна в следующих параграфах.

Рассмотрим $n$-ю частичную сумму ряда Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $2\pi$:

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt, \qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $s_n(x)$, получим

$$s_n(x)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt+\frac{\sin kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\right],$$

или, подводя $\cos kx$ и $\sin kx$ под знак интеграла (что возможно, так как $\cos kx$ и $\sin kx$ не зависят от переменной интегрирования

и, следовательно, могут рассматриваться как постоянные), получим

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kx\cos kt\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kx\sin kt\,dt\right].$$

Вынося теперь $1/\pi$ за скобки и заменяя сумму интегралов интегралом от суммы, получим

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{f(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n}[f(t)\cos kx\cos kt+f(t)\sin kx\sin kt]\right\}dt,$$

или

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \quad (1)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках. Пусть

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz;$$

тогда

$$2\sigma_n(z)\cos z=\cos z+2\cos z\cos z+2\cos z\cos 2z+\ldots+2\cos z\cos nz=$$
$$=\cos z+(1+\cos 2z)+(\cos z+\cos 3z)+$$
$$+(\cos 2z+\cos 4z)+\ldots+[\cos(n-1)z+\cos(n+1)z]=$$
$$=1+2\cos z+2\cos 2z+\ldots+2\cos(n-1)z+\cos nz+\cos(n+1)z,$$

или

$$2\sigma_n(z)\cos z=2\sigma_n(z)-\cos nz+\cos(n+1)z,$$
$$\sigma_n(z)=\frac{\cos nz-\cos(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

Но

$$\cos nz-\cos(n+1)z=2\sin(2n+1)\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$1-\cos z=2\sin^2\frac{z}{2}.$$

Следовательно,

$$\sigma_n(z)=\frac{\sin(2n+1)\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Таким образом, равенство (1) можно переписать так:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Так как подынтегральная функция является периодической (с периодом $2\pi$), то интеграл сохраняет свое значение на любом отрезке интегрирования длины $2\pi$. Поэтому мы можем написать:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Введем новую переменную $\alpha$, положив $t-x=\alpha$, $t=x+\alpha$. Тогда мы получим формулу

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \qquad (2)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется *интегралом Дирихле*.

Положим в этой формуле $f(x)\equiv 1$; тогда $a_0=2$, $a_k=0$, $b_k=0$ при $k>0$; следовательно, $s_n(x)=1$ при любом $n$, и мы получаем тождество

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha, \qquad (3)$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

## § 9. Сходимость ряда Фурье в данной точке

Предположим, что функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Умножая обе части тождества (3) предыдущего § 8 на $f(x)$ и подводя $f(x)$ под знак интеграла, получим равенство

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Вычтем члены последнего равенства из соответствующих членов равенства (2) § 8, получим

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Таким образом, сходимость ряда Фурье к значению функции $f(x)$ в данной точке зависит от того, будет ли интеграл, стоящий справа, стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Разобьем последний интеграл на два интеграла:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \cdot \frac{1}{2} \cos n\alpha \, d\alpha,$$

воспользовавшись тем, что $\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2} = \sin n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \cos n\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$.

Разобьем первый из интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, на три интеграла:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \cdot \frac{1}{2} \cos n\alpha \, d\alpha.$$

Положим $\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}$. Так как $f(x)$ — ограниченная кусочно непрерывная функция, то $\Phi_1(\alpha)$ — также ограниченная и кусочно непрерывная периодическая функция от $\alpha$. Следовательно, последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$, так как он является коэффициентом Фурье от этой функции. Функция

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ограничена при $-\pi \leqslant \alpha < -\delta$ и при $\delta \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и

$$|\Phi_2(\alpha)| \leqslant [M + M] \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}},$$

где $M$ — верхняя граница величины $|f(x)|$. Кроме того, функция $\Phi_2(\alpha)$ является также кусочно непрерывной. Следовательно, на основании формул (5) из § 7 второй и третий интегралы стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, можно написать

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-f(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha. \quad (1)$$

В выражении, стоящем справа, интегрирование производится по промежутку $-\delta \leqslant \alpha \leqslant \delta$; следовательно, интеграл зависит от значений функции $f(x)$ только на промежутке от $x-\delta$ до $x+\delta$. Таким образом, из последнего равенства следует важное предложение: *сходимость рядов Фурье в данной точке $x$ зависит лишь от поведения функции $f(x)$ в как угодно малой окрестности этой точки.*

В этом заключается так называемый *принцип локализации при исследовании рядов Фурье. Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают в окрестности некоторой точки $x$, то их ряды Фурье одновременно либо сходятся, либо расходятся в данной точке.*

## § 10. Некоторые достаточные условия сходимости ряда Фурье

В предыдущем параграфе было показано, что если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то сходимость ряда Фурье в данной точке $x_0$ к значению функции $f(x_0)$ зависит от поведения функции в некоторой произвольно малой окрестности $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ с центром в точке $x_0$.

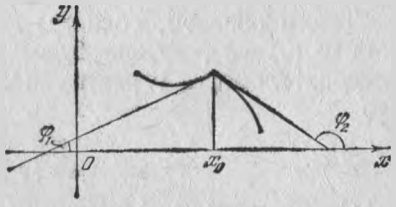


Рис. 388.

Докажем, далее, что *если в окрестности $x_0$ функция $f(x)$ такова, что существуют конечные пределы*

$$\lim_{\alpha\to-0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_1, \qquad \lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_2, \quad (2)$$

*а в самой точке $x_0$ функция непрерывна* (рис. 388), *то**) *в этой точке ряд Фурье сходится к соответствующему значению функции $f(x)$.*

*) Если выполняются условия (1) и (2), то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x$ производную справа и производную слева. На рис. 388 изображена функция, где $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, $k_1 \neq k_2$. Если $k_1 = k_2$, т. е. если производные справа и слева равны, то функция будет дифференцируемой в данной точке.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi_2(\alpha)$, определенную в предыдущем параграфе:

$$\Phi_2(\alpha)=[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

так как функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывна в точке $x_0$, то, следовательно, она непрерывна в некоторой окрестности $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ точки $x_0$. Поэтому функция $\Phi_2(\alpha)$ непрерывна во всех точках, где $\alpha\neq 0$ и $|\alpha|\leqslant\delta$. При $\alpha=0$ функция $\Phi_2(\alpha)$ не определена.

Найдем пределы $\lim\limits_{\alpha\to-0}\Phi_2(\alpha)$ и $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Phi_2(\alpha)$, используя условия (1) и (2):

$$\lim_{\alpha\to-0}\Phi_2(\alpha)=\lim_{\alpha\to-0}[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}\lim_{\alpha\to-0}\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\lim_{\alpha\to-0}\cos\frac{\alpha}{2}=k_1\cdot 1\cdot 1=k_1.$$

Таким образом, если мы доопределим функцию $\Phi_2(\alpha)$, положив $\Phi_2(0)=k_1$, то она будет непрерывной на отрезке $[-\delta, 0]$, и следовательно, и ограниченной. Аналогичным образом докажем, что

$$\lim_{\alpha\to+0}\Phi_2(\alpha)=k_2.$$

Следовательно, функция $\Phi_2(\alpha)$ ограничена и непрерывна в промежутке $(0, \delta]$. Таким образом, на отрезке $[-\delta, \delta]$ функция $\Phi_2(\alpha)$ ограничена и кусочно непрерывна. Вернемся теперь к равенству (1) § 9 (обозначив $x$ через $x_0$):

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\,d\alpha,$$

или

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_2(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha.$$

На основании формул (5) из § 7 заключаем, что стоящий справа предел равен нулю, а поэтому

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=0,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0)=f(x_0).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема отличается от теоремы, сформулированной в § 1, тем, что если там для сходимости ряда Фурье в точке $x_0$ к значению функции $f(x_0)$ требовалось, чтобы точка $x_0$ была точкой непрерывности на отрезке $[-\pi, \pi]$, а функция была кусочно монотонной, то здесь требуется, чтобы точка $x_0$ была точкой непрерывности функции и чтобы выполнялись условия (1) и (2), а на всем интервале $[-\pi, \pi]$ функция была кусочно непрерывной и ограниченной. Очевидно, что эти условия различны.

Замечание 1. Если кусочно непрерывная функция дифференцируема в точке $x_0$, то очевидно, что условия (1) и (2) выполняются. При этом $k_1=k_2$. Следовательно, в точках, где функция $f(x)$ дифференцируема, ряд Фурье сходится к значению функции в соответствующей точке.

Замечание 2. 1°. Функция, рассмотренная в примере 2 § 2 (рис. 376), в точках $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Во всех остальных точках она дифференцируема. Следовательно, построенный для нее ряд Фурье сходится в каждой точке к значению этой функции.

2°. Функция, рассмотренная в примере 4 § 2 (рис. 379), в точках $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Во всех остальных точках она дифференцируема. Она представляется рядом Фурье в каждой точке.

3°. Функция, рассмотренная в примере 1 § 2 (рис. 375), в точках $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ разрывна. Во всех остальных точках она дифференцируема. Следовательно, во всех точках, кроме точек разрыва, соответствующий ей ряд Фурье сходится к значению функции в соответствующих точках. В точках разрыва сумма ряда Фурье равняется среднему арифметическому пределов функции справа и слева, в данном случае она равна нулю.

## § 11. Практический гармонический анализ

Теория разложения функций в ряды Фурье называется *гармоническим анализом*. Мы сейчас сделаем несколько замечаний о приближенном вычислении коэффициентов ряда Фурье, т. е. о практическом гармоническом анализе.

Как известно, коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, имеющей период $2\pi$, определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

Во многих случаях, встречающихся на практике, функция $f(x)$ задается или в виде таблицы (когда функциональная зависимость получается в результате эксперимента) или в виде кривой, которая вычерчивается каким-либо прибором. В этих случаях коэффициенты Фурье вычисляются при помощи приближенных методов интегрирования (см. § 8 гл. XI т. I).

Будем рассматривать промежуток $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ длины $2\pi$. Этого можно всегда добиться соответствующим выбором масштаба по оси $Ox$.

Разделим промежуток $[-\pi, \pi]$ на $n$ равных частей точками

$$-\pi=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=\pi.$$

Тогда шаг деления будет равен

$$\Delta x=2\pi/n.$$

Значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначим соответственно через

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Эти значения мы определяем или по таблице или графику данной функции — измерением соответствующих ординат.

Тогда, пользуясь, например, формулой прямоугольников (см. формулу (1′) § 8 гл. XI т. 1), определяем коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad a_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\cos kx_i,\quad b_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\sin kx_i.$$

Разработаны схемы, упрощающие вычисление коэффициентов Фурье (см., например, Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II.— М.: Наука, 1974; Лопшиц А. М. Шаблоны для гармонического анализа и синтеза.— М.: Гостехиздат, 1948). Мы не можем здесь останавливаться на подробностях, но отметим, что существуют приборы (так называемые гармонические анализаторы), которые по графику данной функции позволяют вычислить приближенные значения коэффициентов Фурье.

## § 12. Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть имеем ряд Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $2\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\qquad(1)$$

Выразим $\cos nx$ и $\sin nx$ через показательные функции. Для этого воспользуемся известными формулами (см. формулы (3) § 5 гл. VII т. I):

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Итак,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

Подставляем эти значения $\cos nx$ и $\sin nx$ в формулу (1) и производим соответствующие преобразования:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right). \qquad (2)$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}. \qquad (3)$$

При этих обозначениях формула (2) примет вид

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}).$$

Последнее равенство записывают более компактно:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (4)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье.*

Выразим коэффициенты $c_n$ и $c_{-n}$ через интегралы. Пользуясь формулами (4), (5) и (6) § 1, можем формулы (3) переписать так:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Итак,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx. \qquad (5')$$

Аналогично

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx. \qquad (5'')$$

Формулы (5′) и (5″) и выражение $c_0$ можно объединить в одну формулу

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots). \qquad (6)$$

$c_n$ и $c_{-n}$ называются комплексными коэффициентами Фурье для функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом $2l$, то ряд Фурье для $f(x)$ будет

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (7)$$

(см. формулу (3) § 5).

Очевидно, что в этом случае ряд Фурье в комплексной форме вместо формулы (4) выразится формулой

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}. \qquad (8)$$

Коэффициенты ряда $c_n$ выразятся формулами

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \qquad (9)$$

Принята, особенно в электротехнике и радиотехнике, следующая терминология. Выражения $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ называются *гармониками*, числа $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ называются *волновыми числами* функции

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}. \qquad (10)$$

Совокупность волновых чисел называется *спектром*. Если откладывать эти числа на числовой оси, то получим совокупность отдельных точек. Такую совокупность точек называют дискретной, а соответствующий спектр — *дискретным*. Коэффициенты $c_n$, определяемые формулами (9), называют *комплексной амплитудой*. Отметим, что в некоторых трудах по электротехнике и радиотехнике совокупность модулей амплитуд $|c_n|$ также называют *спектром* функции $f(x)$.

## § 13. Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ и абсолютно интегрируема на нем, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = Q. \tag{1}$$

Пусть, далее, функция $f(x)$ такова, что она разлагается в любом интервале $(-l, +l)$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right), \tag{2}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}\,dt. \tag{3}$$

Подставляя в ряд (2) выражения коэффициентов $a_k$ и $b_k$ из формул (3), можно написать

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t\,dt \right) \cos \frac{k\pi}{l} x +$$

$$+ \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t\,dt \right) \sin \frac{k\pi}{l} x =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left[ \cos \frac{k\pi}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \right] dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi (t-x)}{l}\,dt. \tag{4}$$

Исследуем вопрос о том, какой вид примет разложение (4) при переходе к пределу при $l \to \infty$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \ldots, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \ldots \text{ и } \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l}. \tag{5}$$

Подставляя в (4), получаем

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_k (t-x)\,dt \right) \Delta\alpha_k. \tag{6}$$

При $l \to \infty$ первый член в правой части стремится к нулю. Действительно,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt = \frac{1}{2l}\,Q \to 0.$$

При любом фиксированном $l$ выражение, стоящее в скобках, есть функция от $\alpha_k$ (см. формулы (5)), принимающего значения от $\pi/l$ до $\infty$. Без доказательства укажем, что если функция $f(x)$ кусочно монотонна на каждом конечном интервале, ограничена на бесконечном интервале и удовлетворяет условию (1), то при $l \to +\infty$ формула (6) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \qquad (7)$$

Стоящее справа выражение называется *интегралом Фурье* для функции $f(x)$. Равенство (7) имеет место для всех точек, где функция непрерывна. В точках разрыва выполняется равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)dx = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (7')$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства (7), раскрывая $\cos\alpha(t-x)$:

$$\cos\alpha(t-x) = \cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x.$$

Подставляя это выражение в формулу (7) и вынося $\cos\alpha x$ и $\sin\alpha x$ за знаки интегралов, где интегрирование совершается по переменной $t$, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (8)$$

Каждый из интегралов по $t$, стоящих в скобках, существует, так как функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, +\infty)$, а следовательно, абсолютно интегрируемы и функции $f(t)\cos\alpha t$ и $f(t)\sin\alpha t$.

Рассмотрим частные случаи формулы (8).

1. Пусть $f(x)$ — четная функция. В этом случае $f(t)\cos\alpha t$ — функция четная, а $f(t)\sin\alpha t$ — нечетная и мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt = 0.$$

формула (8) в этом случае примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{9}$$

2. Пусть $f(x)$ — нечетная функция. Анализируя характер интегралов в формуле (8) в этом случае, получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{10}$$

Если функция $f(x)$ определена только в интервале $(0, +\infty)$, то ее можно представить при $x>0$ как формулой (9), так и формулой (10). В первом случае мы ее доопределяем в интервале $(-\infty, 0)$ четным образом, а во втором — нечетным.

Отметим еще раз, что в точках разрыва вместо выражения $f(x)$ в левых частях равенств (9) и (10) следует писать выражение

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Вернемся к формуле (8). Интегралы, стоящие в скобках, являются функциями от $\alpha$. Введем обозначения

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Тогда формулу (8) можно переписать так:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha. \tag{11}$$

Говорят, что формула (11) дает разложение функции $f(x)$ на гармоники с непрерывно меняющейся от 0 до $\infty$ частотой $\alpha$. Закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты $\alpha$ выражается через функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$.

Вернемся к формуле (9). Положим

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt, \tag{12}$$

тогда формула (9) примет вид

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{13}$$

Функция $F(\alpha)$ называется *косинус-преобразованием Фурье* для функции $f(x)$.

Если в равенстве (12) считать $F(\alpha)$ заданной, а $f(t)$ искомой функцией, то оно является *интегральным уравнением* для функции $f(t)$. Формула (13) дает решение этого уравнения.

На основании формулы (10) можем написать следующие равенства:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt, \tag{14}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{15}$$

Функция $\Phi(\alpha)$ называется *синус-преобразованием Фурье.*

Пример. Пусть

$$f(x)=e^{-\beta x} \qquad (\beta>0,\ x\geqslant 0).$$

По формуле (12) определяем косинус-преобразование Фурье:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}.$$

По формуле (14) определяем синус-пресбразование Фурье:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

По формулам (13) и (15) находим взаимные соотношения:

$$\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \qquad (x\geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \qquad (x>0).$$

## § 14. Интеграл Фурье в комплексной форме

В интеграле Фурье (формула (7) § 13) в скобках стоит четная функция от $\alpha$, следовательно, она определена и при отрицательных значениях $\alpha$. На основании сказанного формулу (7) можно переписать так:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \tag{1}$$

Рассмотрим, далее, следующее выражение, тождественно равное нулю:

$$\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0.$$

Выражение, стоящее слева, тождественно равно нулю потому, что функция от $\alpha$, стоящая в скобках, есть нечетная функция, а интеграл от нечетной функции в пределах от $-M$ до $+M$ равен нулю. Очевидно, что

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0. \tag{2}$$

Замечание. Здесь необходимо указать на следующее обстоятельство. Сходящийся интеграл с бесконечными пределами определяется так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\int_{c}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\lim_{M\to+\infty}\int_{c}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha \qquad (*)$$

при условии, что каждый из стоящих справа пределов существует (см. § 7 гл. XI т. I). Мы же в равенстве (2) написали так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \qquad (**)$$

Очевидно, может случиться, что предел (**) существует, а пределы, стоящие в правой части равенства (*), не существуют. Выражение, стоящее справа в равенстве (**), называется *главным значением интеграла*. Итак, в равенстве (2) рассматривается главное значение несобственного (внешнего) интеграла. В этом же смысле будут писаться и последующие интегралы этого параграфа.

Умножим члены равенства (2) на $-\frac{i}{2\pi}$ и сложим с соответствующими частями равенства (1), тогда получим:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\alpha(t-x)-i\sin\alpha(t-x)\right)dt\right]d\alpha,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha(t-x)}\,dt\right]d\alpha. \tag{3}$$

Правая часть в формуле (3) называется *интегралом Фурье в комплексной форме для функции* $f(x)$.

Перепишем формулу (3) так:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt\right]e^{i\alpha x}\,d\alpha, \tag{4}$$

или коротко

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha, \tag{5}$$

где

$$C(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt. \tag{6}$$

Формула (5) аналогична формуле (10) § 12; $\alpha$ также называется *волновым числом*, но здесь оно принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, и спектр волновых чисел называется *непрерывным спектром*. Аналогию формулы (5) и формулы (10) § 12 можно проводить и дальше. Если в формуле (10) § 12 волновому числу $\alpha_n$ соответствует комплексная амплитуда $c_n$, то говорят, что в формуле (5) волновым числам, заключенным в интеграле $(\alpha_i, \alpha_i+\Delta\alpha)$, соответствует комплексная амплитуда $C(\alpha_i)$. Функцию $C(\alpha)$ называют *спектральной плотностью* или *спектральной функцией*. (Здесь термин плотность употребляется в том же смысле, как и в § 8 гл. XIV, где говорилось о плотности распределения по двумерной области.)

Равенство (4) переписывают в виде двух равенств:

$$F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt, \tag{7}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F^*(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha. \tag{8}$$

Функция $F^*(\alpha)$, определенная формулой (7), называется *преобразованием Фурье* для функции $f(x)$. Функция $f(x)$, определенная формулой (8), называется *обратным преобразованием Фурье* для функции $F^*(\alpha)$ (преобразования отличаются знаком при $i$). Функция $F^*(\alpha)$ отличается от функции $C(\alpha)$ постоянным множителем $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Из преобразований (7) и (8) следуют преобразования (12), (14), (13) и (15) § 13 (с точностью до постоянного множителя 1/2). Преобразования (12) и (14) получатся, если подставить в (7)

$$e^{-i\alpha t} = \cos \alpha t - i \sin \alpha t, \qquad F^*(\alpha) = F(\alpha) - i\Phi(\alpha)$$

и приравнять действительные и мнимые части. Аналогичным образом получаются преобразования (13) и (15) из преобразования (8).

Отметим, что преобразованиями, аналогичными преобразованиям Фурье, мы будем пользоваться в гл. XIX «Операционное исчисление и некоторые его приложения».

## § 15. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Определение 1. Бесконечная система функций

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots \tag{1}$$

называется *ортогональной на отрезке* $[a, b]$, если при любых $n \neq k$ выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

При этом предполагается, что

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\, dx \neq 0.$$

Пример 1. Система функций

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots \tag{3}$$

ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это следует из равенств (I) и (II) § 1.

Пример 2. Система функций

$$1, \ \cos \frac{\pi}{l} x, \ \sin \frac{\pi}{l} x, \ \cos 2\frac{\pi}{l} x, \ \sin 2\frac{\pi}{l} x, \ \ldots, \ \cos \frac{n\pi x}{l}, \ \sin \frac{n\pi x}{l}, \ \ldots \tag{3'}$$

ортогональна на отрезке $[-l, l]$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Пример 3. Система функции

$$1, \ \cos x, \ \cos 2x, \ \cos 3x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \ldots \tag{4}$$

ортогональна на отрезке $[0, \pi]$.

Пример 4. Система функций

$$\sin x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \sin nx, \ \ldots \tag{5}$$

ортогональна на отрезке $[0, \pi]$.

Ниже будут указаны другие системы ортогональных функций. Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, такова, что она представляется рядом по функциям ортогональной

системы (1), который сходится к данной функции на $[a, b]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{6}$$

Определим коэффициенты $c_n$. Допустим, что ряд, полученный после умножения ряда (6) на любую $\varphi_k(x)$, допускает почленное интегрирование.

Умножим обе части равенства (6) на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем в пределах от $a$ до $b$. Учитывая равенства (2), получим

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = c_k \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx,$$

откуда

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx}. \tag{7}$$

Коэффициенты $c_k$, вычисленные по формулам (7), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе ортогональных функций (1). Ряд (6) называется *рядом Фурье* по системе функций (1).

Определение 2. Ортогональная система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

называется *полной*, если для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т. е. такой, что

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty,$$

выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)\right]^2 dx = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) в силу определений § 7 можно истолковать и так. Среднеквадратичное уклонение суммы $\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$ от функции $f(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если выполняется равенство (8), то говорят, что ряд Фурье (6) сходится к функции $f(x)$ *в среднем*.

Очевидно, что из сходимости в среднем не следует сходимость в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Отметим без доказательства, что тригонометрические системы, указанные в примерах 1—4, полны на соответствующих отрезках.

Очень широко используется в приложениях *система функций Бесселя*

$$J_n(\lambda_1 x),\ J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ J_n(\lambda_i x),\ \ldots, \tag{9}$$

которые были рассмотрены в § 23 гл. XVI. Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ — *корни функции Бесселя*, т. е. числа, удовлетворяющие соотношению

$$J_n(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Без доказательства укажем, что система функций

$$\sqrt{x}J_n(\lambda_1 x),\ \sqrt{x}J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ \sqrt{x}J_n(\lambda_i x),\ \ldots \tag{10}$$

ортогональна на отрезке $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_k x)\, J_n(\lambda_j x)\, dx = 0\ ^*) \quad (k \neq j). \tag{11}$$

Так же в приложениях используются *системы ортогональных многочленов Лежандра*, которые определяются так:

$$P_0(x) = 1,\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$(x^2-1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,y = 0.$$

Используются и другие системы ортогональных многочленов.

## § 16. Понятие о линейном функциональном пространстве. Аналогия между разложением функций в ряд Фурье и разложением векторов

В аналитической геометрии был определен вектор в трехмерном пространстве

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k},$$

---

*) Если для функций $\varphi_k(x)$, $\varphi_j(x)$ выполняется соотношение

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0 \quad (j \neq k),$$

то говорят, что функции $\varphi_i(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$. Следовательно, функции $J_n(\lambda_i x)$ (при $k \neq j$) ортогональны с весом $x$.

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, направленные по осям координат. Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будем в дальнейшем обозначать $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Аналогичным образом можно определить вектор в $n$-мерном пространстве

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n} A_i \boldsymbol{e}_i.$$

Совокупность векторов вида $\boldsymbol{A}$ будем называть *$n$-мерным евклидовым пространством* и обозначать $E_n$. Векторы $\boldsymbol{A}$ будем называть *элементами* или *точками* $n$-мерного евклидова пространства *). Укажем свойства пространства $E_n$.

Пусть даны два вектора пространства $E_n$:

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n} A_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{n} B_i \boldsymbol{e}_i.$$

Если $C_1$ и $C_2$ — действительные числа, то по аналогии с трехмерным пространством

$$C_1\boldsymbol{A}+C_2\boldsymbol{B} \tag{1}$$

есть вектор пространства $E_n$.

*Скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется выражение

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \ **). \tag{2}$$

Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ принадлежат пространству $E_n$, к ним также применима формула (2).

Следовательно, получаем при $i \neq j$

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=0, \tag{2'}$$

при $i=j$

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i)=1.$$

Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*. Следовательно, векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ ортогональны.

Как и в трехмерном пространстве, легко устанавливаются следующие свойства скалярного произведения:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}),\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})=(\boldsymbol{AC})+(\boldsymbol{BC}),\\ (\lambda\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB}).\end{gathered} \tag{3}$$

---

*) Рассматривают и векторы в бесконечномерном пространстве.

**) Вместо $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ иногда будем писать просто $\boldsymbol{AB}$. — *Прим. ред.*

*Длина* или *модуль вектора* $A$ определяется, как и в трехмерном пространстве:

$$|A| = \sqrt{(A, A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}. \tag{4}$$

Длину разности двух векторов естественно определяют так:

$$|A-B| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i - B_i)^2}. \tag{5}$$

В частности,

$$|A-A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i - A_i)^2} = 0.$$

*Угол* $\varphi$ между двумя векторами определяется так:

$$\cos\varphi = \frac{(A, B)}{|A| \cdot |B|}. \tag{6}$$

Рассмотрим совокупность всех кусочно монотонных ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций *). Обозначим эту совокупность через $\Phi$ и будем называть *пространством функций* $\Phi$. Функции, принадлежащие этому пространству, будем называть *элементами* или *точками* пространства $\Phi$. Можно установить операции над функциями пространства $\Phi$, аналогичные операциям, которые мы производили над векторами пространства $E_n$.

Если $C_1$ и $C_2$ — любые действительные числа и $f_1(x)$, $f_2(x)$ — элементы пространства $\Phi$, то

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \tag{7}$$

есть элемент пространства $\Phi$.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции пространства $\Phi$, то *скалярным произведением функций* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ называется выражение

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\, dx. \tag{8}$$

Это выражение аналогично выражению (2). Легко проверить, что скалярное произведение (8) обладает свойствами, аналогичными свойствам (3) для векторов:

$$\begin{gathered} (f, \varphi) = (\varphi, f), \\ (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \\ (\lambda f, \varphi) = \lambda (f, \varphi). \end{gathered} \tag{9}$$

*) Такой класс функций рассматривался в теореме § 1. Можно было бы рассмотреть более широкий класс функций, для которого все утверждения § 1 сохраняются.

Аналогично определению модуля вектора по формуле (4) определяется так называемая *норма* элемента $f(x)$ пространства Ф:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}. \tag{10}$$

*Расстояние между элементами* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ пространства Ф аналогично формуле (5) будем называть выражение

$$\|f-\varphi\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx}. \tag{11}$$

Выражение (11) расстояния между элементами пространства называется *метрикой* пространства. Оно с точностью до множителя $\sqrt{b-a}$ совпадает со среднеквадратичным уклонением $\delta$, определенным в § 7.

Очевидно, что если $f(x) \equiv \varphi(x)$, т. е. $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают во всех точках отрезка $[a, b]$, то $\|f-\varphi\| = 0$. Но если $\|f-\varphi\| = 0$, то $f(x) = \varphi(x)$ во всех точках отрезка $[a, b]$, кроме конечного числа точек *). Но в этом случае также говорят, что элементы пространства Ф тождественны.

Пространство кусочно монотонных ограниченных функций, в котором определены операции (7), (8) и метрика определяется равенством (11), называется *линейным функциональным пространством с квадратичной метрикой*. Элементы пространства Ф называются *точками* пространства или *векторами*.

Рассмотрим, далее, последовательность функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x),\ \ldots, \tag{12}$$

принадлежащих пространству Ф.

Последовательность функций (12) называется *ортогональной на отрезке* $[a, b]$, если при любых $i$, $j$ $(i \neq j)$ выполняются равенства

$$(\varphi_i,\ \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0. \tag{13}$$

На основании равенств (I) § 1 следует, что, например, система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x,\ \ldots,$$

ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Покажем, далее, что разложение функции в ряд Фурье по ортогональным функциям аналогично разложению вектора по

*) Может быть и бесконечное число точек, где $f(x) \neq \varphi(x)$.

ортогональным векторам. Пусть дан вектор

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \ldots + A_k e_k + \ldots + A_n e_n. \tag{14}$$

Мы предполагаем, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортогональны, т. е. если $i \neq j$, то

$$(e_i, e_j) = 0. \tag{15}$$

Чтобы определить проекцию $A_k$, умножаем скалярно правую и левую части равенства (14) на вектор $e_k$. На основании свойств (2), (3) получаем:

$$(A, e_k) = A_1 (e_1, e_k) + A_2 (e_2, e_k) + \ldots + A_k (e_k, e_k) + \ldots + A_n (e_n, e_k).$$

Учитывая (15), получаем

$$(A, e_k) = A_k (e_k, e_k),$$

откуда

$$A_k = \frac{(A, e_k)}{(e_k, e_k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Допустим, далее, что функция $f(x)$ разложена по системе ортогональных функций:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k (x). \tag{17}$$

Умножая скалярно обе части равенства (17) на $\varphi_k (x)$ и учитывая равенства (9) и (13), получим *)

$$(f, \varphi_k) = a_k (\varphi_k, \varphi_k),$$

откуда

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx}{\int_a^b [\varphi_k (x)]^2\, dx}. \tag{18}$$

Формула (18) аналогична формуле (16).

Обозначим, далее,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k (x), \tag{19}$$

$$\delta_n = \| f - s_n \| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0,$$

то система ортогональных функций (12) является *полной* на отрезке $[a, b]$.

Ряд Фурье (17) сходится к функции $f(x)$ *в среднем*.

*) Мы предполагаем, что получающиеся в процессе рассмотрения ряды сходятся и почленное интегрирование законно.

## Упражнения к главе XVII

**1.** Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x)=x \quad \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x)=2x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

*Отв.* $\frac{1}{4}\pi-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$
$+3\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$.

**2.** Пользуясь разложением функции $f(x)=1$ в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг, вычислить сумму ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ *Отв.* $\frac{\pi}{4}$.

**3.** Пользуясь разложением в ряд Фурье функции $f(x)=x^2$, вычислить сумму ряда $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ *Отв.* $\frac{\pi^2}{12}$.

**4.** Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$.

*Отв.* $\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$

**5.** Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x)=-\frac{\pi+x}{2} \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0,$$

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < \pi.$$

*Отв.* $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots$

**6.** Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x)=-x \quad \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

*Отв.* $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$.

**7.** Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x)=1 \quad \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x)=-2 \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

*Отв.* $-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

**8.** Разложить функцию $f(x)=x^2$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд только синусов.

*Отв.* $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx$.

**9.** Разложить функцию $y=\cos 2x$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд только синусов.

*Отв.* $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$.

**10.** Разложить функцию $y=\sin x$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд только косинусов. *Отв.* $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\ldots\right]$.



**11.** Разложить в ряд Фурье функцию $y=e^x$ в интервале $(-l, l)$.

*Отв.* $\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}$.

**12.** Разложить функцию $f(x)=2x$ в интервале $(0, 1)$ в ряд только синусов.

*Отв.* $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n^2}$.

**13.** Разложить функцию $f(x)=x$ в интервале $(0, l)$ в ряд только синусов.

*Отв.* $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$.

**14.** Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$$

в интервале $(0, 2)$: а) в ряд только синусов; б) в ряд только косинусов.

*Отв.* а) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; б) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

ГЛАВА XVIII

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## § 1. Основные типы уравнений математической физики

Основными уравнениями математической физики называют (для случая функций двух независимых переменных) следующие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

I. Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д. Это уравнение является простейшим уравнением *гиперболического типа*.

II. Уравнение теплопроводности, или уравнение Фурье:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде (например, фильтрации нефти и газа в подземных песчаниках), некоторые вопросы теории вероятностей и т. д. Это уравнение является простейшим уравнением *параболического типа*.

III. Уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д. Это уравнение является простейшим уравнением *эллиптического типа*.

В уравнениях (1), (2) и (3) искомая функция $u$ зависит от двух переменных. Рассматриваются также соответствующие урав-

ления и для функций с бо́льшим числом переменных. Так, волновое уравнение с тремя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1'}$$

уравнение теплопроводности с тремя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2'}$$

уравнение Лапласа с тремя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3'}$$

## § 2. Вывод уравнения колебаний струны. Формулировка краевой задачи. Вывод уравнений электрических колебаний в проводах

В математической физике под струной понимают гибкую упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины $l$ в начальный момент направлена по отрезку оси $Ox$ от 0 до $l$. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе, или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения — говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и в определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

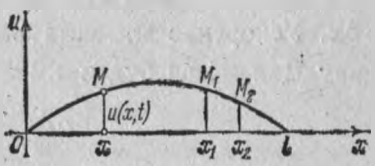


Рис. 389.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси $Ox$ и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x, t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой $x$ в момент $t$ (рис. 389).

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости $(x, u)$, то будем предполагать, что длина элемента струны

$\widetilde{M_1M_2}$ равняется ее проекции на ось $Ox$, т. е. *) $\widetilde{M_1M_2} = x_2 - x_1$. Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое; обозначим его через $T$.

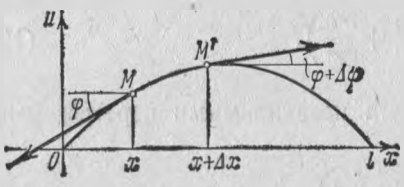


Рис. 390.

Рассмотрим элемент струны $MM'$ (рис. 390). На концах этого элемента по касательным к струне действуют силы $\boldsymbol{T}$. Пусть касательные образуют с осью $Ox$ углы $\varphi$ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция на ось $Ou$ сил, действующих на элемент $MM'$, будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол $\varphi$ мал, то можно положить $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, и мы будем иметь

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx$$

$$\approx T\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - T\operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\theta\,\Delta x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

(здесь мы применили теорему Лагранжа к выражению, стоящему в квадратных скобках).

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть $\rho$ — линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho\,\Delta x$. Ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь

$$\rho\,\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Сокращая на $\Delta x$ и обозначая $T/\rho = a^2$, получаем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Это и есть *волновое уравнение* — уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения (1) недостаточно. Искомая функция $u(x,\ t)$ должна удовлетворять еще *граничным условиям*, указывающим, что делается на концах струны ($x=0$ и $x=l$), и *начальным условиям*, описывающим состоя-

*) Это предположение эквивалентно тому, что мы пренебрегаем величиной $u_x'^2$ по сравнению с 1. Действительно,

$$\widetilde{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x'^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(1+\frac{1}{2}u_x'^2 - \ldots\right)dx \approx \int_{x_1}^{x_2}dx = x_2 - x_1.$$

ние струны в начальный момент ($t=0$). Совокупность граничных и начальных условий называется *краевыми условиями*.

Пусть, например, как мы предполагали, концы струны при $x=0$ и $x=l$ неподвижны. Тогда при любом $t$ должны выполняться равенства

$$u(0,\ t)=0, \tag{2'}$$
$$u(l,\ t)=0. \tag{2''}$$

Эти равенства являются *граничными условиями* для нашей задачи.

В начальный момент $t=0$ струна имеет определенную форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$. Таким образом, должно быть

$$u(x,\ 0)=u\,|_{t=0}=f(x). \tag{3'}$$

Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $\varphi(x)$. Таким образом, должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x). \tag{3''}$$

Условия (3′) и (3″) являются *начальными условиями*.

Замечание. В частности, может быть $f(x)\equiv 0$ или $\varphi(x)\equiv 0$. Если же $f(x)\equiv 0$ и $\varphi(x)\equiv 0$, то струна будет находиться в покое, следовательно, $u(x,\ t)\equiv 0$.

Как указывалось выше, к уравнению (1) приводит и задача об электрических колебаниях в проводах. Покажем это. Электрический ток в проводе характеризуется величиной $i(x,\ t)$ и напряжением $v(x,\ t)$, которые зависят от координаты $x$ точки провода и от времени $t$. Рассматривая элемент провода $\Delta x$, можем написать, что падение напряжения на элементе $\Delta x$ равно $v(x,\ t)-$ $-v(x+\Delta x,\ t)\approx-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Это падение напряжения складывается из омического, равного $iR\,\Delta x$, и индуктивного, равного $\frac{\partial i}{\partial t}L\,\Delta x$. Итак,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x=R\,\Delta x+\frac{\partial i}{\partial t}L\,\Delta x, \tag{4}$$

где $R$ и $L$—сопротивление и коэффициент индуктивности, рассчитанные на единицу длины провода. Знак минус взят потому, что ток течет в направлении, обратном возрастанию $v$. Сокращая на $\Delta x$, получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial x}+iR+L\frac{\partial i}{\partial t}=0. \tag{5}$$

Далее, разность тока, выходящего из элемента $\Delta x$, и тока, входящего в него за время $\Delta t$, будет

$$[i(x,\ t)-i(x+\Delta x,\ t)]\,\Delta t\approx-\frac{\partial i}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta t.$$

Она расходуется на зарядку элемента, равную $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$, и на утечку через боковую поверхность провода вследствие несовершенства изоляции, равную $Av\,\Delta x\,\Delta t$ (здесь $A$ — коэффициент утечки). Приравнивая эти выражения и сокращая на $\Delta x\,\Delta t$, получим уравнение

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) принято называть *телеграфными уравнениями*.

Из системы уравнений (5) и (6) можно получить уравнение, содержащее только искомую функцию $i(x,\ t)$, и уравнение, содержащее только искомую функцию $v(x,\ t)$. Продифференцируем члены уравнения (6) по $x$; члены уравнения (5) продифференцируем по $t$ и умножим их на $C$. Производя вычитание, получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial x}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение $\frac{\partial v}{\partial x}$ из уравнения (5), получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\left(-iR-L\frac{\partial i}{\partial t}\right)-CR\frac{\partial i}{\partial x}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARi. \tag{7}$$

Аналогичным образом получается уравнение для определения $v(x,\ t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial v}{\partial t}+ARv. \tag{8}$$

Если можно пренебречь утечкой через изоляцию ($A=0$) и сопротивлением ($R=0$), то уравнения (7) и (8) переходят в волновые уравнения

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 i}{\partial t^2},\quad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где обозначено $a^2=1/CL$. Исходя из физических условий, формулируются граничные и начальные условия задачи.

### § 3. Решение уравнения колебаний струны методом разделения переменных (методом Фурье)

Метод разделения переменных (или метод Фурье), который мы сейчас рассмотрим, является типичным для решения многих задач математической физики. Пусть требуется найти решение

уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$
$$u(l, t) = 0, \tag{3}$$
$$u(x, 0) = f(x), \tag{4}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, из которых первая зависит только от $x$, а вторая только от $t$:

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

Подставляя в уравнение (1), получаем $X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t)$ и, разделив члены равенства на $a^2XT$,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{7}$$

В левой части этого равенства стоит функция, которая не зависит от $x$, а в правой — функция, не зависящая от $t$. Равенство (7) возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от $x$, ни от $t$, т. е. равны постоянному числу. Обозначим его через $-\lambda$, где $\lambda > 0$ (позднее будет рассмотрен и случай $\lambda < 0$). Итак,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этих равенств получаем два уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$
$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \tag{9}$$

Общие решения этих уравнений будут (см. гл. XIII, § 21)

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \sin \sqrt{\lambda}\, x, \tag{10}$$
$$T(t) = C \cos a\sqrt{\lambda}\, t + D \sin a\sqrt{\lambda}\, t, \tag{11}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

Подставляя выражения $X(x)$ и $T(t)$ в равенство (6), получим

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \sin \sqrt{\lambda}\, x)(C \cos a\sqrt{\lambda}\, t + D \sin a\sqrt{\lambda}\, t).$$

Подберем теперь постоянные $A$ и $B$ так, чтобы удовлетворялись условия (2) и (3). Так как $T(t) \not\equiv 0$ (в противном случае будет

$u(x, t) \equiv 0$, что противоречит поставленному условию), то функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям (2) и (3), т. е. должно быть $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Подставляя значения $x = 0$ и $x = l$ в равенство (10), на основании (2) и (3) получаем

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \sqrt{\lambda}\, l + B \sin \sqrt{\lambda}\, l.$$

Из первого уравнения находим $A = 0$. Из второго уравнения следует

$$B \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

$B \neq 0$, так как в противном случае было бы $X \equiv 0$ и $u \equiv 0$, что противоречит условию. Следовательно, должно быть

$$\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

(мы не берем значение $n = 0$, так как в этом случае было бы $X \equiv 0$ и $u \equiv 0$). Итак, мы получили

$$X = B \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{13}$$

Найденные значения $\lambda$ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи. Соответствующие им функции $X(x)$ называются *собственными функциями*.

Замечание. Если бы мы взяли вместо $-\lambda$ выражение $\lambda = k^2$, то уравнение (8) приняло бы вид

$$X'' - k^2 X = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять граничным условиям (2) и (3).

Зная $\sqrt{\lambda}$, мы, пользуясь равенством (11), можем написать

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Для каждого значения $n$, следовательно, для каждого $\lambda$, выражения (13) и (14) подставляем в равенство (6) и получаем решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3). Это решение обозначим $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \tag{15}$$

Для каждого значения $n$ мы можем брать свои постоянные $C$ и $D$ и потому пишем $C_n$ и $D_n$ (постоянная $B$ включена в $C_n$ и $D_n$).

Так как уравнение (1) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, и потому функция, представленная рядом

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t),$$

или

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad (16)$$

также будет решением дифференциального уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям (2) и (3). Очевидно, ряд (16) будет решением уравнения (1) только в том случае, если коэффициенты $C_n$ и $D_n$ таковы, что этот ряд сходится и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по $x$ и по $t$.

Решение (16) должно еще удовлетворять начальным условиям (4) и (5). Этого мы будем добиваться путем подбора постоянных $C_n$ и $D_n$. Подставляя в равенство (16) $t=0$, получим (см. условие (4))

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (17)$$

Если функция $f(x)$ такова, что в интервале $(0,\ l)$ ее можно разложить в ряд Фурье (см. § 1 гл. XVII), то условие (17) будет выполняться, если положить

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad (18)$$

Далее, дифференцируем члены равенства (16) по $t$ и подставляем $t=0$. Из условия (5) получается равенство

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда:

$$D_n\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

или

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad (19)$$

Итак, мы доказали, что ряд (16), где коэффициенты $C_n$ и $D_n$ определены по формулам (18) и (19), если он допускает двукратное

почленное дифференцирование, представляет функцию $u(x, t)$, которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным и начальным условиям (2)—(5).

Замечание. Решая рассмотренную задачу для волнового уравнения другим методом, можно доказать, что ряд (16) представляет решение и в том случае, когда он не допускает почленного дифференцирования. При этом функция $f(x)$ должна быть дважды дифференцируемой, а $\varphi(x)$ — один раз дифференцируемой *).

## § 4. Уравнение распространения тепла в стержне. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим однородный стержень длины $l$. Будем предполагать, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и что во всех точках поперечного сечения стержня температура одинакова. Изучим процесс распространения тепла в стержне.

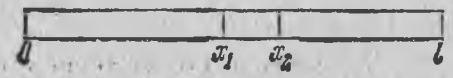


Рис. 391.

Расположим ось $Ox$ так, что один конец стержня будет совпадать с точкой $x=0$, а другой — с точкой $x=l$ (рис. 391). Пусть $u(x, t)$ — температура в сечении стержня с абсциссой $x$ в момент $t$. Опытным путем установлено, что скорость распространения тепла, т. е. количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой $x$ за единицу времени, определяется формулой

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}S, \qquad (1)$$

где $S$ — площадь сечения рассматриваемого стержня, $k$ — коэффициент теплопроводности **).

Рассмотрим элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами $x_1$ и $x_2$ ($x_2 - x_1 = \Delta x$). Количество тепла, прошедшего через сечение с абсциссой $x_1$ за время $\Delta t$, будет равно

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S\,\Delta t, \qquad (2)$$

то же самое для сечения с абсциссой $x_2$:

$$\Delta Q_2 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\,\Delta t. \qquad (3)$$

*) Подробно об этих условиях см., например, в книге: Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

**) Скорость распространения тепла, или скорость теплового потока, определяется так:

$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

где $\Delta Q$ — количество тепла, прошедшего через сечение $S$ за время $\Delta t$.

Приток тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в элемент стержня за время $\Delta t$ будет равняться

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S\,\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S\,\Delta t\right] \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\, S\,\Delta t \qquad (4)$$

(мы применили теорему Лагранжа к разности $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}$).

Этот приток тепла за время $\Delta t$ затратился на повышение температуры элемента стержня на величину $\Delta u$:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\,\Delta x\, S\,\Delta u,$$

или

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\,\Delta x\, S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \qquad (5)$$

где $c$ — теплоемкость вещества стержня, $\rho$ — плотность вещества стержня ($\rho\,\Delta x\, S$ — масса элемента стержня).

Приравнивая выражения (4) и (5) одного и того же количества тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, получим

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\,\Delta t = c\rho\,\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначая $k/c\rho = a^2$, окончательно получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение распространения тепла (*уравнение теплопроводности*) в однородном стержне.

Чтобы решение уравнения (6) было вполне определенно, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим физическим условиям задачи. Краевые условия для решения уравнения (6) могут быть различные. Условия, которые соответствуют так называемой *первой краевой задаче* для $0 \leqslant t \leqslant T$, следующие:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad (7)$$
$$u(0, t) = \psi_1(t), \qquad (8)$$
$$u(l, t) = \psi_2(t). \qquad (9)$$

Физически условие (7) (*начальное условие*) соответствует тому, что при $t = 0$ в различных сечениях стержня задана температура, равная $\varphi(x)$. Условия (8) и (9) (*граничные условия*) соответствуют тому, что на концах стержня при $x = 0$ и при $x = l$ поддерживается температура, равная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно.

В § 6 доказывается, что уравнение (6) имеет единственное решение в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющее условиям (7)—(9).

### § 5. Распространение тепла в пространстве

Рассмотрим процесс распространения тепла в трехмерном пространстве. Пусть $u(x, y, z, t)$ — температура в точке с координатами $(x; y; z)$ в момент $t$. Опытным путем установлено, что скорость прохождения тепла через площадку $\Delta S$, т. е. количество тепла, протекающего за единицу времени, определяется формулой (аналогичной формуле (1) предыдущего параграфа)

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S, \tag{1}$$

где $k$ — коэффициент теплопроводности рассматриваемой среды, которую мы считаем однородной и изотропной, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к площадке $\Delta S$ в направлении движения тепла. На основании § 14 гл. VIII т. I можем написать

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$, или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \operatorname{grad} u.$$

Подставляя выражение $\frac{\partial u}{\partial n}$ в формулу (1), получаем

$$\Delta Q = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta S.$$

Количество тепла, протекающего за время $\Delta t$ через площадку $\Delta S$, будет равно

$$\Delta Q \, \Delta t = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta t \, \Delta S.$$

Вернемся к поставленной в начале параграфа задаче. В рассматриваемой среде выделим малый объем $V$, ограниченный поверхностью $S$. Количество тепла, протекающего через поверхность $S$, будет равно

$$Q = -\Delta t \iint\limits_S k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, dS, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности $S$. Очевидно, что формула (2) дает количество тепла, поступающего в объем $V$ (или уходящего из объема $V$) за время $\Delta t$. Количество тепла, поступившего в объем $V$, идет на повышение температуры вещества этого объема.

Рассмотрим элементарный объем $\Delta v$. Пусть за время $\Delta t$ его температура поднялась на $\Delta u$. Очевидно, что количество тепла, затраченное на это повышение температуры элемента $\Delta v$, будет равно

$$c\Delta v\rho\,\Delta u \approx c\Delta v\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

где $c$ — теплоемкость вещества, $\rho$ — плотность. Общее количество тепла, затраченное на повышение температуры в объеме $V$ за время $\Delta t$, будет

$$\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Но это есть тепло, поступившее в объем $V$ за время $\Delta t$; оно определено формулой (2). Таким образом, имеет место равенство

$$-\Delta t\iint\limits_S k\boldsymbol{n}\operatorname{grad}u\,dS=\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Сокращая на $\Delta t$, получаем

$$-\iint\limits_S k\boldsymbol{n}\operatorname{grad}u\,dS=\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv. \tag{3}$$

Поверхностный интеграл, стоящий в левой части этого равенства, преобразуем по формуле Остроградского (см. § 8 гл. XV), полагая $\boldsymbol{F}=k\operatorname{grad}u$:

$$\iint\limits_S(k\operatorname{grad}u)\,\boldsymbol{n}\,dS=\iiint\limits_V\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\,dv.$$

Заменяя двойной интеграл, стоящий в левой части равенства (3), тройным интегралом, получим

$$-\iiint\limits_V\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\,dv=\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv,$$

или

$$\iiint\limits_V\left[\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]dv=0. \tag{4}$$

Применив теорему о среднем к тройному интегралу, стоящему слева (см. § 12 гл. XIV), получим

$$\left[\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1}=0, \tag{5}$$

где $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — некоторая точка объема $V$.

Так как мы можем выделить произвольный объем $V$ в трехмерном пространстве, где происходит распространение тепла, и так как мы предполагаем, что подынтегральная функция в равенстве

(4) непрерывна, то равенство (5) будет выполняться в каждой точке пространства. Итак,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Но

$$k \operatorname{grad} u = k\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

и

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(см. § 8 гл. XV). Подставляя в уравнение (6), получаем

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Если $k$ — постоянная, то

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

и уравнение (6) в этом случае дает

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

или, положив $-\frac{k}{c\rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{8}$$

Коротко уравнение (8) записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение (8) и есть *уравнение теплопроводности в пространстве*. Для того чтобы найти его единственное решение, отвечающее поставленной задаче, нужно задать краевые условия.

Пусть имеем тело $\Omega$, поверхность которого $\sigma$. В этом теле рассматривается процесс распространения тепла. В начальный момент температура тела задана. Это соответствует тому, что известно значение решения при $t = 0$ — *начальное условие*:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{9}$$

Кроме того, должна быть известна температура в любой точке $M$ поверхности $\sigma$ тела в любой момент времени $t$ — *граничное условие*:

$$u(M, t) = \psi(M, t). \tag{10}$$

(Возможны и другие граничные условия.)

Если искомая функция $u(x, y, z, t)$ не зависит от $z$, что соответствует тому, что температура не зависит от $z$, то получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{11}$$

*— уравнение распространения тепла на плоскости.* Если рассматривается распространение тепла в плоской области $D$ с границей $C$, то краевые условия, аналогично (9) и (10), формулируются так:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u(M, t) = \psi(M, t),$$

где $\varphi$ и $\psi$ — заданные функции, $M$ — точка границы $C$.

Если же функция $u$ не зависит ни от $z$, ни от $y$, то получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*— уравнение распространения тепла в стержне.*

## § 6. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении уравнений с частными производными методом конечных разностей производные заменяются соответствующими разностями (рис. 392):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left[ \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} \right],$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}; \tag{2}$$

аналогично

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u(x, t+l) - u(x, t)}{l}. \tag{3}$$

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности формулируется (см. § 4) следующим образом. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{5}$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(l, t) = \psi_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

т. е. требуется найти решение $u(x, t)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $t=0$, $x=0$, $x=L$, $t=T$, если заданы значения искомой функции на трех его сторонах $t=0$, $x=0$, $x=L$ (рис. 393). Покроем нашу область сеткой, образованной прямыми

$$x=ih, \quad i=1, 2, \ldots,$$
$$t=kl, \quad k=1, 2, \ldots;$$

и будем определять приближенные значения решения в узлах сетки, т. е. в точках пересечения этих прямых. Введем обозначения: $u(ih, kl)=u_{i,k}$. Напишем вместо уравнения (4) соответствующее ему уравнение в конечных разностях для точки $(ih; kl)$.

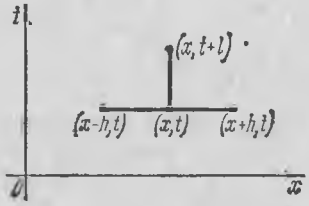



Рис. 392.

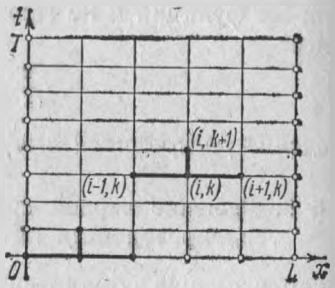



Рис. 393.

В соответствии с формулами (3) и (2) получим

$$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k}}{l}=a^2\,\frac{u_{i+1,\,k}-2u_{i,\,k}+u_{i-1,\,k}}{h^2}. \tag{8}$$

Определим $u_{i,\,k+1}$:

$$u_{i,\,k+1}=\left(1-\frac{2a^2l}{h^2}\right)u_{i,\,k}+a^2\frac{l}{h^2}\,(u_{i+1,\,k}+u_{i-1,\,k}). \tag{9}$$

Из формулы (9) следует, что если известны три значения в $k$-м ряду: $u_{i,\,k}$, $u_{i+1,\,k}$, $u_{i-1,\,k}$, то определяется значение $u_{i,\,k+1}$ в $(k+1)$-м ряду. Нам известны все значения на прямой $t=0$ (см. формулу (5)). По формуле (9) мы определим значения во всех внутренних точках отрезка $t=l$. Значения в крайних точках этого отрезка нам известны в силу формул (6) и (7). Так ряд за рядом мы определим значения искомого решения во всех узлах сетки.

Можно доказать, что по формуле (9) можно получить приближенное значение решения не при произвольном соотношении шагов $h$ и $l$, а только в том случае, если $l\leqslant h^2/2a^2$. Формула (9) особенно упрощается, если шаг $l$ по оси $t$ выбрать так, чтобы было

$$1-\frac{2a^2l}{h^2}=0, \quad \text{или} \quad l=\frac{h^2}{2a^2}.$$

В этом случае уравнение (9) принимает вид

$$u_{i,\ k+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,\ k}+u_{i-1,\ k}). \tag{10}$$

Эта формула особенно удобна для вычислений (рис. 394). Указанным методом определяется решение в узлах сетки. Значение решения между узлами сетки можно получить, например, экстраполированием, проводя плоскость через каждые три точки в пространстве $(x,\ t,\ u)$. Обозначим полученное по формуле (10) и экстраполированное таким образом решение через $u_h(x,\ t)$. Можно доказать, что

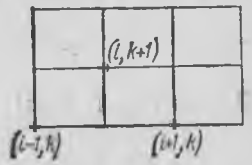


Рис. 394.

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,\ t)=u(x,\ t),$$

где $u(x,\ t)$ — решение нашей задачи. Можно доказать *) также, что

$$|u_h(x,\ t)-u(x,\ t)|<Mh^2,$$

где $M$ — постоянная, не зависящая от $h$.

## § 7. Распространение тепла в неограниченном стержне

Пусть в начальный момент задана температура в различных сечениях неограниченного стержня. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени. (К задаче распространения тепла в неограниченном стержне сводятся физические задачи в том случае, когда стержень столь длинный, что температура во внутренних точках стержня в рассматриваемые моменты времени мало зависит от условий на концах стержня.)

Если стержень совпадает с осью $Ox$, то математически задача формулируется следующим образом. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

в области $-\infty<x<+\infty$, $t>0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,\ 0)=\varphi(x). \tag{2}$$

Применим для нахождения решения метод разделения переменных (см. § 3), т. е. будем искать частное решение уравнения (1) в виде произведения двух функций:

$$u(x,\ t)=X(x)\,T(t). \tag{3}$$

*) Более подробное изложение этого вопроса см., например, в книгах: Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных.—М.: Гостехиздат, 1951; Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений.—М.: ИЛ, 1953.

Подставляя в уравнение (1), будем иметь $X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$, или

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Каждое из этих отношений не может зависеть ни от $x$, ни от $t$, и потому их приравниваем постоянной *) $-\lambda^2$. Из (4) получаем два уравнения

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{6}$$

Решая их, найдем

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Подставляя в (3), получаем

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{7}$$

(постоянная $C$ включена в $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$).

Для каждого значения $\lambda$ мы получаем решение вида (7). Произвольные постоянные $A$ и $B$ для каждого значения $\lambda$ имеют определенные значения. Поэтому можно считать $A$ и $B$ функциями от $\lambda$. В силу линейности уравнения (1) решением является также сумма решений вида (7):

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x].$$

Интегрируя выражение (7) по параметру $\lambda$ в пределах от 0 до $+\infty$, также получим решение

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{8}$$

если $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ таковы, что этот интеграл, его производная по $t$ и вторая производная по $x$ существуют и получаются путем дифференцирования интеграла по $t$ и $x$. Подберем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы решение $u(x, t)$ удовлетворяло условию (2). Полагая в равенстве (8) $t = 0$, на основании условия (2) получаем

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{9}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ такова, что она представима

*) Так как по смыслу задачи $T(t)$ должно быть ограниченным при любом $t$, если $\varphi(x)$ ограничена, то $T'/T$ должно быть отрицательным. Поэтому мы и пишем $-\lambda^2$.

интегралом Фурье (см. § 13 гл. XVII):

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,d\alpha\right)d\lambda,$$

или

$$\varphi(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda. \tag{10}$$

Сравнивая правые части (9) и (10), получаем

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha,$$
$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha. \tag{11}$$

Подставляя найденные выражения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в формулу (8), получим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x)\,d\alpha\right]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,d\alpha\right)d\lambda$$

или, переставляя порядок интегрирования, окончательно получим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda\right)\right]d\alpha. \tag{12}$$

Это и есть решение поставленной задачи.

Преобразуем формулу (12). Вычислим интеграл, стоящий в круглых скобках:

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos\beta z\,dz. \tag{13}$$

Это преобразование интеграла сделано путем подстановок

$$a\lambda\sqrt{t}=z, \qquad \frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\beta. \tag{14}$$

Обозначим

$$K(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz. \tag{15}$$

Дифференцируя *), получаем

$$K'(\beta)=-\int_0^{+\infty} e^{-z^2}z\sin\beta z\,dz.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$K'(\beta)=\frac{1}{2}\left[e^{-z^2}\sin\beta z\right]_0^{+\infty}-\frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz,$$

или

$$K'(\beta)=-\frac{\beta}{2}K(\beta).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$K(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{16}$$

Определим постоянную $C$. Из (15) следует

$$K(0)=\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. § 5 гл. XIV). Следовательно, в равенстве (16) должно быть

$$C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак,

$$K(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

Значение (17) интеграла (15) подставляем в (13):

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Подставляя вместо $\beta$ его выражение (14), окончательно получаем

*) Возможность дифференцирования легко обосновывается.

значение интеграла (13):

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(a-x)\,d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}. \tag{18}$$

Подставив это выражение интеграла в решение (12), окончательно получим:

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha. \tag{19}$$

Эта формула, называемая *интегралом Пуассона*, представляет собой решение поставленной задачи о распространении тепла в неограниченном стержне.

Замечание. Можно доказать, что функция $u(x,\ t)$, определенная интегралом (19), является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (2), если функция $\varphi(x)$ ограничена на бесконечном интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

Установим физический смысл формулы (19). Рассмотрим функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < x_0, \\ \varphi(x) & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x, \\ 0 & \text{при } x_0 + \Delta x < x < +\infty. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда функция

$$u^*(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha \tag{21}$$

есть решение уравнения (1), принимающее при $t=0$ значение $\varphi^*(x)$. Принимая во внимание (20), можем написать

$$u^*(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Применив теорему о среднем к последнему интегралу, получим

$$u^*(x,\ t) = \frac{\varphi(\xi)\,\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x. \tag{22}$$

Формула (22) дает значение температуры в точке стержня в любой момент времени, если при $t=0$ всюду в стержне температура $u^*=0$, кроме отрезка $[x_0,\ x_0+\Delta x]$, где она равна $\varphi(x)$. Сумма температур вида (22) и дает решение (19). Заметим, что если $\rho$ — линейная плотность стержня, $c$ — теплоемкость материала, то количество тепла в элементе $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ при $t=0$ будет

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\,\Delta x\,\rho c. \tag{23}$$

Рассмотрим далее функцию

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}. \tag{24}$$

Сравнивая ее с правой частью формулы (22) с учетом (23), говорят, что она дает значение температуры в любой точке стержня в любой момент времени $t$, если при $t=0$ в сечении $\xi$ (предельный случай при $\Delta x \to 0$) был мгновенный источник тепла с количеством тепла $Q=c\rho$.

## § 8. Задачи, приводящие к исследованию решений уравнения Лапласа. Формулировка краевых задач

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые задачи, приводящие к решению *уравнения Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Как уже указывалось, левая часть уравнения (1) обозначается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv \Delta u,$$

где $\Delta$ называется *оператором Лапласа*. Функции $u$, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими функциями*.

1. Стационарное (установившееся) распределение температуры в однородном теле. Пусть имеется однородное тело $\Omega$, ограниченное поверхностью $\sigma$. В § 5 было показано, что температура в различных точках тела удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Если процесс установившийся, т. е. если температура не зависит от времени, а зависит только от координат точек тела, то $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и, следовательно, температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Чтобы температура в теле определялась однозначно из этого уравнения, нужно знать температуру на поверхности $\sigma$. Таким образом, для уравнения (1) краевая задача формулируется следующим образом.

Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (1) внутри объема $\Omega$ и принимающую в каждой точке $M$ поверхно-

сти σ заданные значения:

$$u|_\sigma = \psi(M). \tag{2}$$

Эта задача называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей* для уравнения (1).

Если на поверхности тела температура неизвестна, а известен тепловой поток в каждой точке поверхности, который пропорционален $\frac{\partial u}{\partial n}$ (см. § 5), то на поверхности σ вместо краевого условия (2) будем иметь условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = \psi^*(M). \tag{3}$$

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего краевому условию (3), называется *задачей Неймана* или *второй краевой задачей*.

Если рассматривается распределение температур в плоской области $D$, ограниченной контуром $C$, то функция $u$ будет зависеть от двух переменных $x$ и $y$ и удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

которое называется уравнением Лапласа на плоскости. Краевые условия (2) или (3) должны выполняться на контуре $C$.

II. Потенциальное течение жидкости или газа. Уравнение неразрывности. Пусть внутри объема Ω, ограниченного поверхностью σ (в частности, Ω может быть и неограниченным), происходит течение жидкости. Пусть ρ — плотность жидкости. Скорость жидкости обозначим

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

где $v_x$, $v_y$, $v_z$ — проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси координат. Выделим в теле Ω малый объем ω, ограниченный поверхностью $S$. Через каждый элемент $\Delta s$ поверхности $S$ за время $\Delta t$ пройдет количество жидкости

$$\Delta Q = \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, \Delta S\, \Delta t,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности $S$. Общее количество жидкости $Q$, поступившее в объем ω (или вытекшее из объема ω), выразится интегралом

$$Q = \Delta t \iint\limits_S \rho\, \boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, dS \tag{6}$$

(см. §§ 5 и 6 гл. XV). Количество жидкости в объеме ω в момент $t$ было

$$\iiint\limits_\omega \rho\, d\omega.$$

За время $\Delta t$ количество жидкости в силу изменения плотности изменится на величину

$$Q = \iiint_S \Delta\rho \, d\omega \approx \Delta t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega. \tag{7}$$

Предполагая, что в объеме $\omega$ нет источников, заключаем, что это изменение вызвано притоком жидкости, количество которой определено равенством (6). Приравнивая правые части равенств (6) и (7) и сокращая на $\Delta t$, получим

$$\iint_S \rho \, \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} \, dS = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega. \tag{8}$$

Преобразуем поверхностный интеграл, стоящий слева, по формуле Остроградского (§ 8 гл. XV). Тогда равенство (8) примет вид

$$\iiint_\omega \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \, d\omega = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega,$$

или

$$\iiint_\omega \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \right) d\omega = 0.$$

В силу произвольности объема $\omega$ и непрерывности подынтегральной функции получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{9}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \tag{9'}$$

Это и есть *уравнение неразрывности течения сжимаемой жидкости*.

Замечание. В некоторых задачах, например при рассмотрении процесса движения нефти или газа в подземной пористой среде к скважине, можно принять

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

где $p$ — давление, $k$ — коэффициент проницаемости, и

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda = \text{const}$. Подставляя в уравнение неразрывности (9), получим

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0,$$

или

$$-\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Если $k$ — постоянная, то это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

и мы приходим к уравнению теплопроводности.

Вернемся к уравнению (9). Если жидкость несжимаемая, то $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и уравнение (9) принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{12}$$

Если движение потенциальное, т. е. вектор $\boldsymbol{v}$ есть градиент некоторой функции $\varphi$:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то уравнение (12) принимает вид

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

т. е. потенциальная функция скорости $\varphi$ должна удовлетворять уравнению Лапласа. Во многих задачах, как, например, в задачах фильтрации, можно принять

$$\boldsymbol{v} = -k_1 \operatorname{grad} p,$$

где $p$ — давление, $k_1$ — постоянная; тогда получаем уравнение Лапласа для определения давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{13'}$$

Краевые условия для уравнения (13) или (13') могут быть следующими:

1. На поверхности $\sigma$ задаются значения искомой функции $p$ — давления (условие (2)). Это задача Дирихле.

2. На поверхности $\sigma$ задаются значения нормальной производной $\frac{\partial p}{\partial n}$ — задается поток через поверхность (условие (3)). Это задача Неймана.

3. На части поверхности $\sigma$ задаются значения искомой функции $p$ — давления, а на части поверхности задаются значения нормальной производной $\frac{\partial p}{\partial n}$ — потока через поверхность. Это задача Дирихле — Неймана.

Если движение плоско-параллельное, т. е. функция $\varphi$ (или $p$) не зависит от $z$, то получается уравнение Лапласа в двумерной области $D$ с границей $C$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Краевые условия типа (2) — задача Дирихле,— или типа (3) — задача Неймана,— задаются на контуре $C$.

III. Потенциал стационарного электрического тока. Пусть в однородной среде, заполняющей некоторый объем $V$, проходит электрический ток, плотность которого в каждой точке дается вектором $\boldsymbol{J}(x, y, z) = J_x\boldsymbol{i} + J_y\boldsymbol{j} + J_z\boldsymbol{k}$. Предположим, что плотность тока не зависит от времени $t$. Предположим далее, что в рассматриваемом объеме нет источников тока. Следовательно, поток вектора $\boldsymbol{J}$ через любую замкнутую поверхность $S$, лежащую внутри объема $V$, будет равен нулю:

$$\iint_S \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\, ds = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности. Из формулы Остроградского заключаем, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0. \tag{15}$$

На основании обобщенного закона Ома определяются в рассматриваемой проводящей среде электрическая сила $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\lambda \tag{16}$$

или

$$\boldsymbol{J} = \lambda \boldsymbol{E},$$

где $\lambda$ — проводимость среды, которую мы будем считать постоянной.

Из общих уравнений электромагнитного поля следует, что если процесс стационарный, то векторное поле $\boldsymbol{E}$ безвихревое, т. е. $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$. Тогда аналогично тому, что мы имели при рассмотрении поля скоростей жидкости, векторное поле является потенциальным (см. § 9 гл. XV). Существует функция $\varphi$ такая, что

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{17}$$

На основании (16) получаем:

$$\boldsymbol{J} = \lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{18}$$

Из (15) и (18) следует:

$$\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Получили уравнение Лапласа.

Решая это уравнение при соответствующих краевых условиях, найдем функцию $\varphi$, а по формулам (18) и (17) найдем ток $\boldsymbol{J}$ и электрическую силу $\boldsymbol{E}$.

## § 9. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях

Пусть $u(x, y, z)$ — гармоническая функция трех переменных. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение цилиндрические координаты $(r, \varphi, z)$:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z,$$

откуда

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ z=z. \tag{2}$$

Заменяя независимые переменные $x$, $y$ и $z$ на $r$, $\varphi$ и $z$, придем к функции $u^*$:

$$u(x, y, z)=u^*(r, \varphi, z).$$

Найдем уравнение, которому будет удовлетворять $u^*(r, \varphi, z)$ как функция аргументов $r$, $\varphi$ и $z$.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \tag{4}$$

кроме того,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Выражения для $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ находим из равенств (2). Складывая правые части равенств (3)—(5) и приравнивая сумму нулю (так как сумма левых частей этих равенств равна нулю в силу (1)), получаем

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}=0. \tag{6}$$

Это и есть *уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.*

Если функция $u$ не зависит от $z$ и зависит от $x$ и $y$, то функция $u^*$, зависящая только от $r$ и $\varphi$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}=0, \tag{7}$$

где $r$ и $\varphi$ — полярные координаты на плоскости.

Найдем теперь решение уравнения Лапласа в области $D$ (кольце), ограниченной окружностями $K_1$: $x^2+y^2=R_1^2$ и $K_2$: $x^2+y^2=R_2^2$, принимающее следующие граничные значения:

$$u|_{K_1}=u_1, \tag{8}$$

$$u|_{K_2}=u_2, \tag{9}$$

где $u_1$ и $u_2$ — постоянные.

Будем решать задачу в полярных координатах. Очевидно, что целесообразно искать решение, не зависящее от $\varphi$. Уравнение (7) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$u=C_1\ln r+C_2. \tag{10}$$

Определим $C_1$ и $C_2$ из условий (8) и (9):

$$u_1=C_1\ln R_1+C_2,\quad u_2=C_1\ln R_2+C_2.$$

Отсюда находим

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\quad C_2=u_1-(u_2-u_1)\frac{\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{u_1\ln R_2-u_2\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Подставляя найденные значения $C_1$ и $C_2$ в формулу (10), окончательно получаем

$$u=u_1+\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(u_2-u_1)=\frac{u_2\ln\frac{r}{R_1}-u_1\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \tag{11}$$

Замечание. Фактически мы решили следующую задачу: найти функцию $u$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах): $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$, $z=H$, и следующим граничным условиям:

$$u|_{r=R_1}=u_1,\qquad u|_{r=R_2}=u_2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H}=0$$

(задача Дирихле—Неймана). Очевидно, что искомое решение не зависит ни от $z$, ни от $\varphi$ и дается формулой (11).

## § 10. Решение задачи Дирихле для круга

Пусть в плоскости $Oxy$ имеется круг радиуса $R$ с центром в начале координат и на его окружности задана некоторая функция $f(\varphi)$, где $\varphi$ — полярный угол. Требуется найти функцию $u(r, \varphi)$,

непрерывную в круге, включая границу, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

и на окружности круга принимающую заданные значения

$$u|_{r=R}=f(\varphi). \tag{2}$$

Будем решать задачу в полярных координатах. Перепишем уравнение (1) в этих координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,$$

или

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{1'}$$

Будем искать решение методом разделения переменных, полагая

$$u=\Phi(\varphi)R(r). \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (1'), получим

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r)+r\Phi(\varphi)R'(r)+\Phi''(\varphi)R(r)=0,$$

или

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{4}$$

Левая часть этого равенства не зависит от $r$, а правая от $\varphi$, следовательно, они равны постоянному числу, которое мы обозначаем через $-k^2$. Таким образом, равенство (4) дает два уравнения

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0. \tag{5'}$$

Общее решение уравнения (5) будет

$$\Phi=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi. \tag{6}$$

Решение уравнения (5') будем искать в форме $R(r)=r^m$. Подставляя $R(r)=r^m$ в (5'), получим

$$r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0,$$

или

$$m^2-k^2=0.$$

Итак, имеются два частных линейно независимых решения $r^k$ и $r^{-k}$. Общее решение уравнения (5') будет

$$R=Cr^k+Dr^{-k}. \tag{7}$$

Выражения (6) и (7) подставляем в (3):

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}). \tag{8}$$

Функция (8) будет решением уравнения (1′) при любом значении $k$, отличном от нуля. Если $k = 0$, то уравнения (5) и (5′) принимают вид

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0$$

и, следовательно,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r). \tag{8′}$$

Решение должно быть периодической функцией от $\varphi$, так как при одном и том же значении $r$ при $\varphi$ и $\varphi + 2\pi$ мы должны иметь одно и то же значение решения, потому что рассматривается одна и та же точка круга. Поэтому очевидно, что в формуле (8′) должно быть $B_0 = 0$. Далее, мы ищем решение, непрерывное и конечное в круге. Следовательно, в центре круга при $r = 0$ решение должно быть конечным, и потому в формуле (8′) должно быть $D_0 = 0$, а в формуле (8) $D_k = 0$.

Таким образом, правая часть (8′) обращается в произведение $A_0C_0$, которое мы обозначим через $A_0/2$. Итак,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8″}$$

Мы будем составлять решение нашей задачи в виде суммы решений вида (8), так как сумма решений есть решение. Сумма должна быть периодической функцией от $\varphi$. Это будет так, если каждое слагаемое будет периодической функцией от $\varphi$. Для этого $k$ должно принимать целые значения. (Заметим, что если бы мы приравняли части равенства (4) числу $+k^2$, то не получили бы периодического решения.) Мы можем ограничиться только положительными значениями

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

так как в силу произвольности постоянных $A$, $B$, $C$, $D$ отрицательные значения $k$ новых частных решений не дают. Итак,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \tag{9}$$

(постоянная $C_n$ включена в $A_n$ и $B_n$). Подберем теперь произвольные постоянные $A_n$ и $B_n$ так, чтобы удовлетворялось краевое условие (2). Подставляя в равенство (9) $r = R$, на основании условия (2) получаем

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n. \tag{10}$$

Чтобы имело место равенство (10), нужно, чтобы функция $f(\varphi)$ разлагалась в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ и чтобы $A_nR^n$ и $B_nR^n$ были ее коэффициентами Фурье. Следовательно, $A_n$ и $B_n$ должны определяться по формулам

$$A_n = \frac{1}{\pi R_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \qquad (11)$$

Итак, ряд (9) с коэффициентами, определенными по формулам (11), будет решением нашей задачи, если он допускает почленное двукратное дифференцирование по $r$ и по $\varphi$ (но это нами не доказано). Преобразуем формулу (9). Подставляя вместо $A_n$ и $B_n$ их выражения (11) и производя тригонометрические преобразования, получим

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-\varphi)\,dt\left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right]dt. \qquad (12)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках *):

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right] =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n+\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right] =$$

$$= 1+\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \qquad (13)$$

Заменяя выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (12), выражением (13), получим

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (14)$$

*) В процессе вывода мы определяем сумму бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой есть комплексное число, модуль которого меньше единицы. Эта формула суммы геометрической прогрессии выводится так же, как и в случае действительных чисел. При этом следует учесть определение предела комплексной функции действительного аргумента. Здесь аргументом является $n$ (см. § 4 гл. VII т. I).

Формула (14) называется *интегралом Пуассона*. Путем анализа этой формулы доказывается, что если функция $f(\varphi)$ непрерывная, то функция $u(r, \varphi)$, определенная интегралом (14), удовлетворяет уравнению (1′) и при $r \to R$ будет $u(r, \varphi) \to f(\varphi)$, т. е. $u(r, \varphi)$ является решением поставленной задачи Дирихле для круга.

## § 11. Решение задачи Дирихле методом конечных разностей

Пусть в плоскости $Oxy$ дана область $D$, ограниченная контуром $C$. Пусть на контуре $C$ задана непрерывная функция $f$. Требуется найти приближенное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_C = f. \qquad (2)$$

Проведем два семейства прямых

$$x = ih \quad \text{и} \quad y = kh, \qquad (3)$$

где $h$ — заданное число, $i$ и $k$ принимают последовательные целочисленные значения. Будем говорить, что область $D$ покрыта *сеткой*. Точки пересечения прямых будем называть *узлами сетки*.

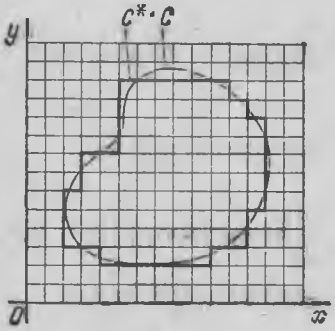


Рис. 395.

Приближенное значение искомой функции в точке

$$x = ih, \quad y = kh$$

будем обозначать $u_{i,k}$, т. е. $u(ih, kh) = u_{i,k}$. Аппроксимируем область $D$ сетчатой областью $D^*$, состоящей из всех квадратов, целиком лежащих в области $D$, и некоторых пересекаемых границей $C$ (последние можно и не учитывать). При этом контур $C$ аппроксимируется контуром $C^*$, состоящим из отрезков прямых типа (3). В каждом узле, лежащем на контуре $C^*$, зададим значение $f^*$, равное значению функции $f$ в ближайшей точке контура $C$ (рис. 395).

Значения искомой функции будем рассматривать только в узлах сетки. Как уже было сказано в § 6, в рассматриваемом приближенном методе производные заменяются конечными разностями:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{h^2}.$$

Дифференциальное уравнение (1) заменяется *разностным уравнением* или *уравнением в конечных разностях* (после сокращения

на $h^2$):

$$u_{i+1,\,k}-2u_{i,\,k}+u_{i-1,\,k}+u_{i,\,k+1}-2u_{i,\,k}+u_{i,\,k-1}=0,$$

или (рис. 396)

$$u_{i,\,k}=\frac{1}{4}(u_{i+1,\,k}+u_{i,\,k+1}+u_{i-1,\,k}+u_{i,\,k-1}). \qquad (4)$$

Для каждого узла сетки, лежащего внутри области $D^*$ (и не лежащего на границе $C^*$), составляем уравнение (4). Если точка ($x=ih$, $y=kh$) соседняя с точкой контура $C^*$, то в правой части равенства (4) некоторые слагаемые суть известные значения $f^*$. Таким образом, получаем неоднородную систему $N$ уравнений с $N$ неизвестными ($N$ — число узлов сетки, лежащих внутри области $D^*$).

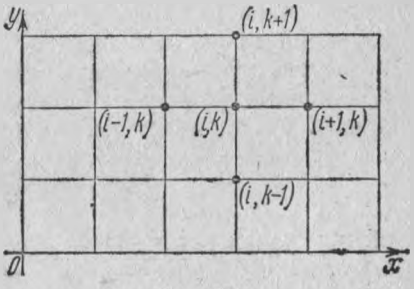


Рис. 396.

Докажем, что система (4) имеет решение, и притом единственное. Это есть система $N$ линейных уравнений с $N$ неизвестными. Она имеет единственное решение в том случае, если определитель системы отличен от нуля. Определитель системы отличен от нуля, если однородная система имеет только тривиальное (нулевое) решение. Система будет однородной, если $f^*=0$ в узлах сетки на границе контура $C^*$. Мы докажем, что в этом случае все значения $u_{i,\,k}$ во всех внутренних узлах сетки равны нулю. Пусть внутри области есть $u_{i,\,k}$, отличные от нуля. Для определенности предположим, что наибольшее из них положительно. Обозначим его через $\bar{u}_{i,\,k}>0$.

На основании формулы (4) напишем

$$\bar{u}_{i,\,k}=\frac{1}{4}(u_{i+1,\,k}+u_{i,\,k+1}+u_{i-1,\,k}+u_{i,\,k-1}). \qquad (4')$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если все значения $u$, стоящие справа, равны наибольшему $\bar{u}_{i,\,k}$. Теперь имеем пять точек, в которых значения искомой функции суть $\bar{u}_{i,\,k}$. Если ни одна из этих точек не есть граничная, то, беря одну из них и написав для нее равенство (4), докажем, что в нескольких других точках значение искомой функции будет равно $\bar{u}_{i,\,k}$. Продолжая так, дойдем до границы и докажем, что в граничной точке значение функции будет равно $\bar{u}_{i,\,k}$. Это противоречит тому, что в граничных точках $f^*=0$.

Предполагая, что внутри области имеется отрицательное наименьшее значение, мы докажем, что на границе значение функции отрицательно. Это противоречит данному условию.

Итак, система (4) имеет решение, и притом единственное.

Определенные из системы (4) значения $u_{i,k}$ и являются приближенными значениями решения сформулированной выше задачи Дирихле. Доказано, что если решение задачи Дирихле для данной области $D$ и данной функции $f$ существует (обозначим его через $u(x, y)$) и если $u_{i,k}$ есть решение системы (4), то имеет место соотношение

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2, \tag{5}$$

где $A$ — постоянная, не зависящая от $h$.

Замечание. Бывает оправдан, хотя строго и не доказан, следующий прием для оценки погрешности приближенного решения. Пусть $u_{i,k}^{(2h)}$ — приближенное решение при шаге $2h$, $u_{i,k}^{(h)}$ — приближенное решение при шаге $h$, $E_h(x, y)$ — погрешность решения $u_{i,k}^{(h)}$. Тогда имеет место приближенное равенство

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}(u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)})$$

в общих узлах сеток. Итак, для того чтобы определить погрешность приближенного решения при шаге $h$, нужно найти решение при шаге $2h$. Одна треть разности этих приближенных решений и является оценкой погрешности решения при шаге $h$. Это замечание можно отнести и к решению уравнения теплопроводности методом конечных разностей.

### Упражнения к главе XVIII

**1.** Вывести уравнение крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня.

Указание. Закручивающий момент в сечении стержня с абсциссой $x$ определяется формулой $M = GI\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, где $\theta(x, t)$ — угол закручивания сечения с абсциссой $x$ в момент $t$, $G$ — модуль сдвига, $I$ — полярный момент инерции поперечного сечения стержня.

*Отв.* $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, где $a^2 = \dfrac{GI}{k}$, $k$ — момент инерции единицы длины стержня.

**2.** Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $\theta(0, t) = 0$, $\theta(l, t) = 0$, $\theta(x, 0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t} = 0$, где

$$\varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2},$$

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0 \quad \text{при} \quad \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l.$$

Дать механическую интерпретацию задачи.

*Отв.* $\theta(x, t) = \dfrac{8\theta_0}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\dfrac{(2k+1)\pi at}{l}$.

3. Вывести уравнение продольных колебаний однородного цилиндрического стержня.

Указание. Если $u(x, t)$ — перемещение сечения стержня с абсциссой $x$ в момент $t$, то растягивающее напряжение $T$ в сечении $x$ определяется формулой $T = ES\dfrac{\partial u}{\partial x}$, где $E$ — модуль упругости материала, $S$ — площадь поперечного сечения стержня.

*Отв.* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $\rho$ — плотность материала стержня.

4. Однородный стержень длины $2l$ под действием сил, приложенных к его концам, укоротился на величину $2\lambda$. При $t = 0$ он освобожден от действующих внешних сил. Определить смещение $u(x, t)$ сечения стержня с абсциссой $x$ в момент $t$ (средняя точка оси стержня имеет абсциссу $x = 0$).

*Отв.* $u(x, t) = \dfrac{8\lambda}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \dfrac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \dfrac{(2k+1)\pi at}{2l}$.

5. Один конец стержня длины $l$ закреплен, а на другой действует растягивающая сила $P$. Найти продольные колебания стержня, если при $t = 0$ сила $P$ не действует.

*Отв.* $\dfrac{8Pl}{ES\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \dfrac{(2n+1)\pi at}{2l}$ (смысл $E$ и $S$ см. в задаче 3).

6. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Дать механическое истолкование задачи.

*Отв.* $u(x, t) = \dfrac{A \sin \dfrac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \dfrac{\omega}{a} l} + \dfrac{2A\omega a}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \dfrac{n\pi at}{l} \sin \dfrac{n\pi x}{l}$.

Указание. Решение искать в виде суммы двух решений:

$$u = v + w, \quad \text{где} \quad w = \frac{A \sin \dfrac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \dfrac{\omega}{a} l}$$

— решение, удовлетворяющее условиям:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}.$$

$\left(\text{Предполагается, что } \sin \dfrac{\omega}{a} l \neq 0.\right)$

7. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l/2, \\ l - x & \text{при } l/2 < x < l. \end{cases}$$

*Отв.* $u(x, t)=\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Указание. Решить задачу методом разделения переменных.

**8.** Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, t)=u(l, t)=0, \quad u(x, 0)=\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

*Отв.* $u(x, t)=\dfrac{8}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$.

**9.** Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(l, t)=u_0, \quad u(x, 0)=\varphi(x).$$

Указать физический смысл задачи.

*Отв.* $u(x, t)=u_0+\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$, где

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx-\frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}.$$

Указание. Искать решение в форме $u=u_0+v(x, t)$.

**10.** Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(0, t)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-Hu|_{x=l}, \quad u(x, 0)=\varphi(x).$$

Указать физический смысл задачи.

*Отв.* $u(x, t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}e^{-\frac{\mu_n^2a^2t^2}{l^2}}\sin\dfrac{\mu_n x}{l}$, где $A_n=$

$=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{\mu_n x}{l}\,dx$, $p=Hl$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu=-\mu/p$.

Указание. На конце стержня при $x=l$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю.

**11.** Найти (по формуле (10) § 6, полагая $h=0{,}2$) приближенное решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0)=x\left(\frac{3}{2}-x\right), \quad u(0, t)=0, \quad u(1, t)=\frac{1}{2}, \quad 0\leqslant t\leqslant 4l.$$

**12.** Найти решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в полосе $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y < +\infty$, удовлетворяющее условиям

$$u(0,\ y)=0, \quad u(a,\ y)=0, \quad u(x,\ 0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad u(x,\ +\infty)=0.$$

*Отв.* $u(x,\ t)=\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi x}{a}$.

Указание. Искать решение методом разделения переменных.

**13.** Найти решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,\ 0)=0, \quad u(x,\ b)=0, \quad u(0,\ y)=Ay(b-y), \quad u(a,\ y)=0.$$

*Отв.* $u(x,\ t)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}$.

**14.** Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ внутри кольца, ограниченного окружностями $x^2+y^2=R_1^2$, $x^2+y^2=R_2^2$, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=\frac{Q}{2\lambda\pi R_1}, \quad u|_{r=R_2}=u_2.$$

Дать гидродинамическое истолкование задачи.

Указание. Решить задачу в полярных координатах.

*Отв.* $u=u_2-\frac{Q}{2\lambda\pi}\ln\frac{R_2}{r}$.

**15.** Доказать, что функция $u(x,\ y)=e^{-y}\sin x$ есть решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, удовлетворяющее условиям

$$u(0,\ y)=0, \quad u(1,\ y)=e^{-y}\sin 1, \quad u(x,\ 0)=\sin x, \quad u(x,\ 1)=e^{-1}\sin x.$$

**16.** В задачах 12—15 решить уравнения Лапласа при данных граничных условиях методом конечных разностей при $h=0{,}25$. Сравнить приближенное решение с точным.

ГЛАВА XIX

# ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Операционное исчисление в настоящее время является одной из важных областей математического анализа. В физике, механике, электротехнике и других науках при решении различных вопросов используются методы операционного исчисления. Особенно широкое применение операционное исчисление находит в современной автоматике и телемеханике. В этой главе (на базе материала предыдущих глав учебника) будут даны основные понятия операционного исчисления *) и изложены операционные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

## § 1. Начальная функция и ее изображение

Пусть задана функция действительной переменной $t$, определенная при $t \geqslant 0$ (иногда мы будем считать, что функция $f(t)$ определена на бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$, но $f(t) = 0$ при $t < 0$). Будем предполагать, что функция $f(t)$ кусочно непрерывная, т. е. такая, что в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва 1-го рода (см. § 9 гл. II т. I). Для обеспечения существования некоторых интегралов в бесконечном интервале $0 \leqslant t < +\infty$ мы наложим на функцию $f(t)$ дополнительное ограничение. Именно, будем предполагать, что существуют постоянные положительные числа $M$ и $s_0$ такие, что

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

при любом значении $t$ из интервала $0 \leqslant t < +\infty$.

---

*) Для дальнейшего изучения операционного исчисления и его приложений можно указать следующие книги: Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики.—М.; Л.: Гостехиздат, 1950; Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению.—М.; Л.: Гостехиздат, 1951; Диткин В. А. и Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.—М.: Физматгиз, 1961; Микусинский Я. Операционное исчисление.—М.: ИЛ, 1956.

Рассмотрим произведение функции $f(t)$ на комплексную функцию $e^{-pt}$ действительной переменной *) $t$, где $p=a+ib\,(a>0)$ — некоторое комплексное число:

$$e^{-pt}f(t). \tag{2}$$

Функция (2) — тоже комплексная функция действительной переменной $t$:

$$e^{-pt}f(t)=e^{-(a+ib)t}f(t)=e^{-at}f(t)e^{-ibt}=e^{-at}f(t)\cos bt-ie^{-at}f(t)\sin bt.$$

Рассмотрим, далее, несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\cos bt\,dt-i\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\sin bt\,dt. \tag{3}$$

Покажем, что если функция $f(t)$ удовлетворяет условию (1) и $a>s_0$, то интегралы, стоящие в правой части равенства (3), существуют и сходимость интегралов абсолютная. Оценим сначала первый из этих интегралов:

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\cos bt\,dt\right|\leqslant\int_0^{+\infty}|e^{-at}f(t)\cos bt|\,dt<$$

$$<M\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{s_0t}\,dt=M\int_0^{+\infty} e^{-(a-s_0)t}\,dt=\frac{M}{a-s_0}.$$

Аналогичным образом оценивается и второй интеграл. Итак, интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$ существует. Он определяет некоторую функцию от $p$, которую мы обозначим **) $F(p)$:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{4}$$

Функция $F(p)$ называется *лапласовым изображением*, или *L-изображением*, или просто *изображением* функции $f(t)$. Функцию $f(t)$ называют *начальной функцией*, или *оригиналом*. Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, то пишут так:

$$F(p)\div f(t), \tag{5}$$

или

$$f(t)\leftarrow\!\div F(p), \tag{6}$$

*) О комплексных функциях действительной переменной см. § 4 гл. VII.

**) Функция $F(p)$ при $p\neq 0$ есть функция комплексной переменной (см., например, книгу: Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. II. — М.: Наука, 1974). Преобразование (4) аналогично преобразованию Фурье, рассмотренному в § 14 гл. XVII.

или

$$L\{f(t)\}=F(p). \tag{7}$$

Как мы увидим в дальнейшем, смысл введений изображений заключается в том, что с их помощью удастся упростить решение многих задач, в частности, свести решение дифференциальных уравнений к проведению простейших алгебраических операций для нахождения изображения. Зная изображение, можно найти оригинал или по заранее составленным таблицам «оригинал — изображение», или методами, которые изложены ниже. Возникают следующие естественные вопросы.

Пусть дана некоторая функция $F(p)$. Существует ли функция $f(t)$, для которой $F(p)$ является изображением? Если существует, то единственна ли такая функция? На оба вопроса при определенных предположениях относительно $F(p)$ и $f(t)$ дается положительный ответ. В частности, единственность изображения устанавливается следующей теоремой, которую мы приведем без доказательства:

Теорема единственности. *Если две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же L-изображение $F(p)$, то эти функции тождественно равны.*

Эта теорема во всем дальнейшем играет очень важную роль. Действительно, если при решении практической задачи мы каким-то образом определили изображение искомой функции, а потом по изображению нашли начальную функцию, то на основании сформулированной теоремы мы заключаем, что найденная функция есть решение поставленной задачи, и других решений не существует.

## § 2. Изображение функций $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$

I. Функция $f(t)$, определенная так:

$$f(t)=1 \quad \text{при} \quad t\geqslant 0,$$
$$f(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0,$$

называется *единичной функцией Хевисайда* и обозначается через $\sigma_0(t)$. График этой функции изображен на рис. 397. Найдем $L$-изображение функции Хевисайда:

$$L\{\sigma_0(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}\text{*)}.$$

---

*) При вычислении интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$ можно было бы его представить как сумму интегралов от действительных функций; мы получили бы тот же результат. Это замечание относится и к последующим двум интегралам.

Итак

$$1 \leftarrow\div \frac{1}{p} \tag{8}$$

или, точнее,

$$\sigma_0(t) \leftarrow\div \frac{1}{p}.$$

В некоторых руководствах по операционному исчислению изображением функции $f(t)$ называют выражение

$$F^*(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

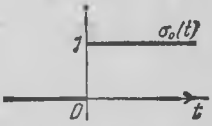


Рис. 397.

При таком определении будем иметь $\sigma_0(t) \leftarrow\div 1$, а следовательно, $C \leftarrow\div C$, точнее, $C\sigma_0(t) \leftarrow\div C$.

II. Пусть $f(t) = \sin t$; тогда

$$L\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t\, dt = \frac{e^{-pt}(-p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Итак,

$$\sin t \leftarrow\div \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III. Пусть $f(t) = \cos t$; тогда

$$L\{\cos t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t\, dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2+1}.$$

Итак,

$$\cos t \leftarrow\div \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

## § 3. Изображение функции с измененным масштабом независимой переменной. Изображение функций $\sin at$, $\cos at$

Рассмотрим изображение функции $f(at)$, где $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\, dt.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле, полагая $z = at$; следовательно, $dz = a\, dt$; тогда получаем

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\, dz,$$

или

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Таким образом, *если*

$$F(p)\doteq f(t),$$

*то*

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)\doteq f(at). \tag{11}$$

Пример 1. Из формулы (9) на основании (11) непосредственно получаем

$$\sin at\doteq\frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1},$$

или

$$\sin at\doteq\frac{a}{p^2+a^2}. \tag{12}$$

Пример 2. Из формулы (10) на основании формулы (11) получаем

$$\cos at\doteq\frac{1}{a}\,\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1},$$

или

$$\cos at\doteq\frac{p}{p^2+a^2}. \tag{13}$$

## § 4. Свойство линейности изображения

Теорема. *Изображение суммы нескольких функций, умноженных на постоянные, равняется сумме изображений этих функций, умноженных на соответствующие постоянные, т. е. если*

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}C_if_i(t) \tag{14}$$

($C_i$ — *постоянные*) *и*

$$F(p)\doteq f(t),\quad F_i(p)\doteq f_i(t),$$

*то*

$$F(p)=\sum_{i=1}^{n}C_iF_i(p). \tag{14'}$$

Доказательство. Умножая все члены равенства (14) на $e^{-pt}$ и интегрируя по $t$ в пределах от 0 до $+\infty$ (вынося множители $C_i$ за знак интеграла), получаем равенство (14').

Пример 1. Найти изображение функции

$$f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t.$$

Решение. На основании формул (12), (13) и (14′) получаем

$$L\{f(t)\}=3\frac{4}{p^2+16}-2\frac{p}{p^2+25}=\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}.$$

Пример 2. Найти начальную функцию, изображение которой выражается формулой

$$F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}.$$

Решение. Представим $F(p)$ так:

$$F(p)=\frac{5}{2}\frac{2}{p^2+2^2}+20\frac{p}{p^2+3^2}.$$

Следовательно, на основании формул (12), (13) и (14′) получаем

$$f(t)=\frac{5}{2}\sin 2t+20\cos 3t.$$

Из теоремы единственности в § 1 следует, что это единственная начальная функция, соответствующая данной $F(p)$.

## § 5. Теорема смещения

Теорема. *Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, то $F(p+\alpha)$ есть изображение функции $e^{-\alpha t}f(t)$, т. е.*

$$\text{если } F(p)\doteq f(t), \quad \text{то} \quad F(p+\alpha)\doteq e^{-\alpha t}f(t). \tag{15}$$

(Здесь предполагается, что $\operatorname{Re}(p+\alpha)>s_0$.)

Доказательство. Найдем изображение функции $e^{-\alpha t}f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt-\alpha t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}f(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=F(p+\alpha).$$

Доказанная теорема позволяет значительно расширить класс изображений, для которых легко находятся начальные функции.

## § 6. Изображение функций $e^{-\alpha t}$, sh $at$, ch $at$, $e^{-\alpha t}\sin at$, $e^{-\alpha t}\cos at$

Из формулы (8) на основании формул (15) непосредственно следует

$$\frac{1}{p+\alpha}\doteq e^{-\alpha t}. \tag{16}$$

Аналогично

$$\frac{1}{p-\alpha}\doteq e^{\alpha t}. \tag{16′}$$

Вычитая из членов соотношения (16′) соответствующие члены соотношения (16) и деля результаты вычитания на два, получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)\doteq\frac{1}{2}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}),$$

или (записывая $a$ вместо $\alpha$)

$$\frac{a}{p^2-a^2} \doteq \operatorname{sh} at. \tag{17}$$

Аналогично, путем сложения (16) и (16′) получаем

$$\frac{p}{p^2-a^2} \doteq \operatorname{ch} at. \tag{18}$$

Из формулы (12) на основании формул (15) следует

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq e^{-\alpha t} \sin at. \tag{19}$$

Из формулы (13) на основании формул (15) следует

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq e^{-\alpha t} \cos at. \tag{20}$$

Пример 1. Найти начальную функцию, изображение которой задается формулой

$$F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}.$$

Решение. Преобразуем $F(p)$ к виду выражения, стоящего в левой части соотношения (19):

$$\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Итак,

$$F(p)=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Следовательно, на основании формулы (19) будем иметь

$$F(p) \doteq \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t.$$

Пример 2. Найти начальную функцию, изображение которой задается формулой

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Решение. Произведем преобразование функции $F(p)$:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{(p+1)^2+3^2}=$$
$$=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)^2+3^2},$$

на основании формул (19) и (20) находим начальную функцию:

$$F(p) \doteq e^{-t} \cos 3t+\frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t.$$

## § 7. Дифференцирование изображения

Теорема. *Если* $F(p) \doteq f(t)$, *то*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \doteq t^n f(t). \tag{21}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $f(t)$ удовлетворяет условию (1), то интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t)\, dt \tag{22}$$

существует.

По условию $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $p = a + ib$, $a > s_0$; при этом $a > 0$, $s_0 > 0$. Очевидно, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что будет выполняться неравенство $a > s_0 + \varepsilon$. Так же, как и в § 1, доказывается, что существует интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt.$$

Оценим, далее, интеграл (22):

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)|\, dt.$$

Так как функция $e^{-\varepsilon t} t^n$ ограничена и по абсолютной величине меньше некоторого числа $N$ при любом значении $t > 0$, то можно написать

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt < N \int_0^{+\infty} |e^{-(p-\varepsilon)t} f(t)|\, dt = N \int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Таким образом, доказано, что интеграл (22) существует. Но этот интеграл можно рассматривать как производную $n$-го порядка по параметру *) $p$ от интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Итак, из формулы

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

*) Мы ранее установили формулу дифференцирования определенного интеграла по действительному параметру (см. § 10 гл. XI т. I). Здесь параметр $p$ — комплексное число, но формула дифференцирования остается справедливой.

получаем формулу

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^n f(t)\,dt = \frac{d^n}{dp^n}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Из этих двух неравенств получаем

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n f(t),$$

т. е. формулу (21).

Используем формулу (22) для нахождения изображения степенной функции. Напишем формулу (8):

$$\frac{1}{p} \doteq 1.$$

Из этой формулы на основании формулы (21) получаем

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \doteq t,$$

или

$$\frac{1}{p^2} \doteq t.$$

Аналогично

$$\frac{2}{p^3} \doteq t^2.$$

При любом $n$ получаем

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n. \tag{23}$$

Пример 1. Из формулы (см. (12)) $\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin at\,dt$ путем дифференцирования левой и правой частей по параметру $p$ получаем

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \doteq t \sin at. \tag{24}$$

Пример 2. Из формулы (13) на основании формулы (21) получаем

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \doteq t\cos at. \tag{25}$$

Пример 3. Из формулы (16) на основании формулы (21) получаем

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \doteq te^{-\alpha t}. \tag{26}$$

## § 8. Изображение производных

Теорема. *Если* $F(p) \doteq f(t)$, *то*

$$pF(p) - f(0) \doteq f'(t). \tag{27}$$

Доказательство. На основании определения изображения можем написать

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt. \tag{28}$$

Будем предполагать, что все производные $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$, которые нам встретятся, удовлетворяют условию (1) и, следовательно, интеграл (28) и аналогичные интегралы для последующих производных существуют. Вычисляя по частям интеграл, стоящий в правой части равенства (28), найдем

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Но по условию (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}(t) = 0,$$

а

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = F(p).$$

Поэтому

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

Теорема доказана. Рассмотрим далее изображение производных любого порядка. Подставляя в формулу (27) вместо $F(p)$ выражение $pF(p) - f(0)$, а вместо $f(t)$ — выражение $f'(t)$, получим

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \doteq f''(t),$$

или, раскрывая скобки,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \doteq f''(t). \tag{29}$$

Изображение для производной $n$-го порядка будет

$$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \doteq f^{(n)}(t). \tag{30}$$

Замечание. Формулы (27), (29), (30) упрощаются, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае получаем

$$F(p) \doteq f(t),$$
$$pF(p) \doteq f'(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$p^nF(p) \doteq f^{(n)}(t).$$

## § 9. Таблица некоторых изображений

Для удобства пользования полученными изображениями поместим их в одну таблицу.

Таблица 1

| Номер по пор. | $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ | $f(t)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{p}$ | $1$ |
| 2 | $\frac{a}{p^2+a^2}$ | $\sin at$ |
| 3 | $\frac{p}{p^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| 4 | $\frac{1}{p+\alpha}$ | $e^{-\alpha t}$ |
| 5 | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ | $\operatorname{sh}\alpha t$ |
| 6 | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ | $\operatorname{ch}\alpha t$ |
| 7 | $\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$ | $e^{-\alpha t}\sin at$ |
| 8 | $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$ | $e^{-\alpha t}\cos at$ |
| 9 | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $t^n$ |
| 10 | $\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$ | $t\sin at$ |
| 11 | $\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ | $t\cos at$ |
| 12 | $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$ | $te^{-\alpha t}$ |
| 13 | $\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$ |
| 14 | $(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$ | $t^n f(t)$ |
| 15 | $F_1(p)\,F_2(p)$ | $\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$ |

Примечание. Формулы 13 и 15 этой таблицы будут выведены позднее.

Замечание. Если за изображение функции $f(t)$ мы возьмем

$$F^*(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt,$$

то в формулах 1—13 таблицы выражения, стоящие в первом столбце, следует умножить на $p$. Формулы же 14 и 15 изменятся значительнее. Так как $F^*(p) = pF(p)$, то, подставляя в левой части формулы 14 вместо $F(p)$ выражение $\frac{F^*(p)}{p}$ и умножая на $p$, получим

14′. $$(-1)^n p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \doteq t^n f(t).$$

Подставляя в левой части формулы 15

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \quad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

и умножая это произведение на $p$, получим

15′. $$\frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

## § 10. Вспомогательное уравнение для данного дифференциального уравнения

Пусть мы имеем линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами $a_0$, $a_1$, ..., $a_{n-1}$, $a_n$:

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \tag{31}$$

Требуется найти решение этого уравнения $x = x(t)$ при $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{32}$$

Поставленную задачу ранее мы решали так: находили общее решение уравнения (31), содержащее $n$ произвольных постоянных; потом постоянные определяли так, чтобы удовлетворялись начальные условия (32).

Здесь мы изложим более простой метод решения этой задачи — метод операционного исчисления. Будем находить $L$-изображение решения $x(t)$ уравнения (31), удовлетворяющего условиям (32). Это $L$-изображение обозначим через $\bar{x}(p)$; таким образом, $\bar{x}(p) \doteq x(t)$.

Предположим, что существуют изображения решения уравнения (31) и его производных до порядка $n$ (после разыскания решения мы можем проверить справедливость этого предположе-

ния). Умножим все члены равенства (31) на $e^{-pt}$, где $p=a+ib$, и проинтегрируем по $t$ в пределах от 0 до $+\infty$

$$a_0\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{d^nx}{dt^n}\,dt+a_1\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\,dt+\ldots+a_n\int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t)\,dt=$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt. \qquad (33)$$

В левой части равенства стоят $L$-изображения функции $x(t)$ и ее производных, справа $L$-изображение функции $f(t)$, которое обозначим через $F(p)$. Следовательно, равенство (33) можно переписать так:

$$a_0L\left\{\frac{d^nx}{dt^n}\right\}+a_1L\left\{\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\}+\ldots+a_nL\{x(t)\}=L\{f(t)\}.$$

Подставляя в это равенство вместо изображений функции и ее производных выражения (27), (29), (30), получаем

$$a_0\{p^n\bar{x}(p)-(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+p^{n-3}x_0''+\ldots+x_0^{(n-1)})\}+$$
$$+a_1\{p^{n-1}\bar{x}(p)-(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)})\}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a_{n-1}\{p\bar{x}(p)-x_0\}+a_n\bar{x}(p)=F(p). \qquad (34)$$

Уравнение (34) называется *вспомогательным уравнением*, или *изображающим уравнением*. В этом уравнении неизвестным является изображение $\bar{x}(p)$, которое из него и определяется. Преобразуем его, оставив в левой части члены, содержащие $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)=$$
$$=a_0(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)})+$$
$$+a_1(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)})+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a_{n-2}(px_0+x_0')+a_{n-1}x_0+F(p). \qquad (34')$$

Коэффициент при $\bar{x}(p)$ в левой части равенства (34′) есть многочлен $n$-й степени от $p$, который получается, если в левую часть уравнения (31) вместо производных поставить соответствующие степени $p$. Обозначим его через $\varphi_n(p)$:

$$\varphi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n. \qquad (35)$$

Правая часть уравнения (34′) составляется следующим образом:

коэффициент $a_{n-1}$ умножается на $x_0$,

коэффициент $a_{n-2}$ умножается на $px_0+x_0'$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

коэффициент $a_1$ умножается на $p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)}$,

коэффициент $a_0$ умножается на $p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)}$.

Все эти произведения складываются. Прибавляется еще изображение правой части дифференциального уравнения $F(p)$. Все члены правой части равенства (34′), кроме $F(p)$, после приведения подобных членов образуют многочлен от $p$ степени $n-1$ с известными коэффициентами. Обозначим его через $\psi_{n-1}(p)$. Таким образом, уравнение (34′) можно переписать так:

$$\bar{x}(p)\varphi_n(p)=\psi_{n-1}(p)+F(p).$$

Из этого уравнения и определяем $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)=\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}+\frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \tag{36}$$

Такое определенное $\bar{x}(p)$ есть изображение решения $x(t)$ уравнения (31), удовлетворяющего начальным условиям (32). Если теперь мы найдем функцию $x^*(t)$, изображение которой — функция $\bar{x}(p)$, определенная равенством (36), то на основании теоремы единственности, сформулированной в § 1, будет следовать, что $x^*(t)$ есть решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям (32), т. е.

$$x^*(t)=x(t).$$

Если мы будем находить решение уравнения (31) при нулевых начальных условиях: $x_0=x_0'=x_0''=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$, то в равенстве (36) будет $\psi_{n-1}(p)=0$ и оно примет вид

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{\varphi_n(p)},$$

или

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}. \tag{36′}$$

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+x=1,$$

удовлетворяющее начальному условию: $x=0$ при $t=0$.

Решение. Составляем вспомогательное уравнение $\bar{x}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p}$, или $\bar{x}(p)=\frac{1}{(p+1)p}$. Разлагая стоящую справа дробь на элементарные, получим $\bar{x}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$. Пользуясь формулами 1 и 4 таблицы 1, находим решение: $x(t)=1-e^{-t}$.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=x_0'=0$ при $t=0$.

Р е ш е н и е. Напишем вспомогательное уравнение (34′): $\bar{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p}$, или $\bar{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}$. Разлагая эту дробь на элементарные, получим $\bar{x}(p)=\frac{-p/9}{p^2+9}+\frac{1/9}{p}$. На основании формул 1 и 3 таблицы 1 находим решение:

$$x(t)=-\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}.$$

П р и м е р 3. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=x_0'=0$ при $t=0$.

Р е ш е н и е. Напишем вспомогательное уравнение (34′):

$$\bar{x}(p)(p^2+3p+2)=\frac{1}{p^2},$$

или

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов, получим

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}.$$

По формулам 9, 1 и 4 таблицы 1 находим решение:

$$x(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

П р и м е р 4. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=\sin t,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=1$, $x_0'=2$ при $t=0$.

Р е ш е н и е. Пишем вспомогательное уравнение (34′):

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\sin t\},$$

или

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p+4+\frac{1}{p^2+1},$$

откуда находим $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Разлагая последнюю дробь правой части на элементарные, можно написать

$$\bar{x}(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1},$$

или

$$\bar{x}(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

На основании формул 8, 7, 3 и 2 таблицы 1 получаем решение:

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t,$$

или окончательно

$$x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\sin 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t.$$

## § 11. Теорема разложения

Из формулы (36) предыдущего параграфа следует, что изображение решения линейного дифференциального уравнения состоит из двух членов: первый член есть правильная рациональная дробь от $p$, второй член — дробь, числителем которой является изображение правой части уравнения $F(p)$, а знаменатель — многочлен $\varphi_n(p)$. Если $F(p)$ — рациональная дробь, то второй член будет рациональной дробью. Таким образом, нужно уметь находить начальную функцию, изображением которой является правильная рациональная дробь. Этим вопросом мы и займемся в настоящем параграфе. Пусть $L$-изображение некоторой функции есть правильная рациональная дробь от $p$:

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

Требуется найти начальную функцию (оригинал). В § 7 гл. X т. I было показано, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы элементарных дробей четырех видов:

I. $\dfrac{A}{p-a}$;

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$,

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}$, где корни знаменателя комплексные, т. е. $\dfrac{a_1^2}{4}-a_2<0$,

IV. $\dfrac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, где $k\geqslant 2$, корни знаменателя комплексные.

Найдем начальные функции для выписанных элементарных дробей. Для дроби I вида на основании формулы 4 таблицы 1 получаем

$$\frac{A}{(p-a)}\doteq Ae^{at}.$$

Для дроби II вида на основании формул 9 и 4 таблицы 1 получаем

$$\frac{A}{(p-a)^k}\doteq A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \qquad (37)$$

Рассмотрим теперь дробь III вида. Произведем тождественные преобразования:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=$$

$$=\frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=\frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a^2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}+$$

$$+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Обозначая здесь первое и второе слагаемые через $M$ и $N$ соответственно, получим на основании формул 8 и 7 таблицы 1

$$M\doteq Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right),$$

$$N\doteq\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right).$$

Таким образом, окончательно

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\doteq$$

$$\doteq e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)\right]. \quad (38)$$

Рассматривать случай элементарной дроби IV вида мы здесь не будем, так как это сопряжено с большими вычислениями. Для некоторых частных случаев мы этот вопрос рассмотрим ниже. В случае необходимости читатель может обратиться к одному из указанных в начале главы курсов.

## § 12. Примеры решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=0$, $x_0'=0$ при $t=0$.

Решение. Составляем вспомогательное уравнение (34′):

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9},\quad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)},$$

или

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

откуда получается решение

$$x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=1$, $x_0'=3$, $x_0''=8$ при $t=0$.

Решение. Составляем вспомогательное уравнение (34′):

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

находим

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}$$

и разлагаем полученную рациональную дробь на элементарные:

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Пользуясь таблицей 1, пишем решение

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x=0$, $x_0'=0$ при $t=0$.

Решение. Пишем вспомогательное уравнение (34′):

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

откуда после некоторых преобразований получим

$$\overline{x}(p)=-\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Следовательно,

$$x(t)=-\frac{5}{9}\sin t+\frac{5}{18}\sin 2t+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-t\cos 2t\right).$$

Очевидно, что операционным методом можно решать и системы линейных дифференциальных уравнений. Покажем это на примере.

Пример 4. Найти решение системы уравнений

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1,\quad \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x=0$, $y=0$ при $t=0$.

Решение. Обозначим $x(t)\doteqdot\overline{x}(p)$, $y(t)\doteqdot\overline{y}(p)$ и напишем систему вспомогательных уравнений

$$(3p+2)\overline{x}(p)+p\overline{y}(p)=\frac{1}{p},\quad p\overline{x}(p)+(4p+3)\overline{y}(p)=0.$$

Решая эту систему, находим

$$\overline{x}(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{33}{10(11p+6)},$$

$$\overline{y}(p)=-\frac{1}{(11p+6)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

По изображениям находим начальные функции, т. е. искомые решения системы,

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\quad y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

Аналогично решаются и линейные системы высших порядков.

## § 13. Теорема свертывания

При решении дифференциальных уравнений операционным методом бывает полезна следующая

Теорема свертывания. *Если $F_1(p)$ и $F_2(p)$ суть изображения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т. е. $F_1(p)\doteqdot f_1(t)$ и $F_2(p)\doteqdot f_2(t)$, то $F_1(p)F_2(p)$ есть изображение функции*

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

*т. е.*

$$F_1(p)F_2(p)\doteqdot\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (39)$$

Доказательство. Найдем изображение функции

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

исходя из определения изображения:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt.$$

Стоящий справа интеграл есть двукратный интеграл, который берется по области, ограниченной прямыми $\tau = 0$, $\tau = t$ (рис. 398). Изменим порядок интегрирования в этом интеграле, тогда получим

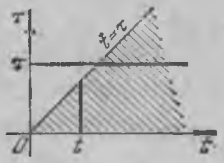


Рис. 398.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^{+\infty}\left[f_1(\tau)\int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.$$

Произведя замену переменной $t-\tau = z$ во внутреннем интеграле, получим

$$\int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pz} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau} F_2(p).$$

Следовательно,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\, e^{-p\tau} F_2(p)\, d\tau = F_2(p)\int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau =$$

$$= F_2(p)\, F_1(p).$$

Итак,

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau \doteq F_1(p)\, F_2(p).$$

Это есть формула 15 таблицы 1.

Замечание 1. Выражение $\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$ называется *сверткой* (*складкой*) двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Операция получения свертки называется *свертыванием* двух функций, при этом

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau.$$

Справедливость последнего равенства устанавливается путем замены переменной $t-\tau=z$ в правом интеграле.

Пример. Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0=x_0'=0$ при $t=0$.

Решение. Пишем вспомогательное уравнение (34′):

$$\overline{x}(p)(p^2+1)=F(p),$$

где $F(p)$ — изображение функции $f(t)$. Следовательно, $\overline{x}(p)=\frac{1}{p^2+1}F(p)$, но $\frac{1}{p^2+1}\doteq\sin t$ и $F(p)\doteq f(t)$. Применяя формулу свертывания (39), обозначив $\frac{1}{p^2+1}=F_2(p)$, $F(p)=F_1(p)$, получим

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau. \tag{40}$$

Замечание 2. На основании теоремы свертывания легко находится изображение интеграла от данной функции, если известно изображение этой функции; а именно, если $F(p)\doteq f(t)$, то

$$\frac{1}{p}F(p)\doteq\int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

Действительно, если мы обозначим

$$f_1(t)=f(t),\quad f_2(t)=1,\quad \text{то}\quad F_1(p)=F(p),\quad F_2(p)=\frac{1}{p}.$$

Подставляя эти функции в формулу (39), получим формулу (41).

## § 14. Дифференциальные уравнения механических колебаний. Дифференциальные уравнения теории электрических цепей

Из механики известно, что колебания материальной точки массы $m$ описываются уравнением *)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t); \tag{42}$$

здесь $x$ — отклонение точки от некоторого положения, $k$ — жесткость упругой системы, например пружины (рессоры), сила сопротивления движению пропорциональна (с коэффициентом пропор-

*) См., например, гл. XIII, § 26, где такое уравнение получено при рассмотрении колебания груза на рессоре.

циональности $\lambda$) первой степени скорости, $f_1(t)$ — внешняя, или возмущающая, сила.

Решением уравнения типа (42) описываются малые колебания и других механических систем с одной степенью свободы, например крутильные колебания маховика на упругом валу, если $x$ — угол поворота маховика, $m$ — момент инерции маховика, $k$ — крутильная жесткость вала, а $mf_1(t)$ — момент внешних сил относительно оси вращения. Уравнения типа (42) описывают не только механические колебания, но и явления в электрических цепях.

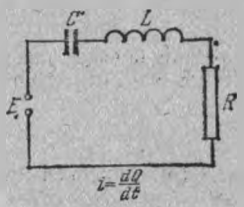


Рис. 399.

Пусть имеем электрическую цепь, состоящую из индуктивности $L$, сопротивления $R$ и емкости $C$, к которой приложена э. д. с. $E$ (рис. 399). Обозначим через $i$ ток в цепи, а через $Q$ заряд конденсатора, тогда, как известно из электротехники, $i$ и $Q$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E, \tag{43}$$

$$\frac{dQ}{dt}=i. \tag{44}$$

Из уравнения (44) получаем

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{di}{dt}. \tag{44'}$$

Подставляя (44) и (44′) в уравнение (43), получаем для $Q$ уравнение типа (42):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \tag{45}$$

Дифференцируя обе части уравнения (43) и используя уравнение (44), получаем уравнение для определения тока $i$:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt}. \tag{46}$$

Уравнения (45) и (46) являются уравнениями типа (42).

## § 15. Решение дифференциального уравнения колебаний

Уравнение колебаний запишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t), \tag{47}$$

где механический или физический смысл искомой функции $x$, коэффициентов $a_1$, $a_2$ и функции $f(t)$ легко устанавливается

сравнением этого уравнения с уравнениями (42), (45), (46). Найдем решение уравнения (47), удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $x' = x_0'$ при $t = 0$.

Составим вспомогательное уравнение для уравнения (47):

$$\bar{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x_0' + a_1 x_0 + F(p), \tag{48}$$

где $F(p)$ — изображение функции $f(t)$. Из равенства (48) находим

$$\bar{x}(p) = \frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{49}$$

Итак, для решения $Q(t)$ уравнения (45), удовлетворяющего начальным условиям $Q = Q_0$, $Q' = Q_0'$ при $t = 0$, изображение будет иметь вид

$$\bar{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q_0') + RQ_0}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Характер решения существенно зависит от того, будут ли корни трехчлена $p^2 + a_1 p + a_2$ комплексные, или действительные различные, или действительные равные. Подробно рассмотрим случай, когда корни трехчлена комплексные, т. е. когда $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Так как изображение суммы двух функций равно сумме их изображений, то на основании формулы (38) начальная функция для первой дроби, стоящей в правой части (49), будет иметь вид

$$\frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \div$$

$$\div e^{-\frac{a_1}{2} t}\left[x_0 \cos\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right) + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)\right]. \tag{50}$$

Найдем далее начальную функцию, соответствующую дроби

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Здесь воспользуемся теоремой свертывания, заметив, что

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \div \frac{e^{-\frac{a_1}{2} t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right), \quad F(p) \div f(t).$$

Следовательно, по формуле (39) получаем

$$\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2} \div \frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin\left((t-\tau)\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right) d\tau. \tag{51}$$

Итак, из (49), учитывая (50) и (51), получаем:

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0\cos\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right) + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} \sin\left(t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin\left((t-\tau)\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right) d\tau. \tag{52}$$

Если внешняя сила $f(t) \equiv 0$, т. е. если мы имеем свободные механические или электрические колебания, то решение дается первым слагаемым правой части выражения (52). Если начальные условия равны нулю: $x_0 = x_0' = 0$, то решение дается вторым слагаемым правой части равенства (52). Рассмотрим эти случаи подробнее.

## § 16. Исследование свободных колебаний

Пусть уравнение (47) описывает *свободные колебания*, т. е. $f(t) \equiv 0$. Введем для удобства написания формул обозначения $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$. Тогда уравнение (47) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \tag{53}$$

Решение этого уравнения $x_{св}$, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $x' = x_0'$ при $t = 0$, дается формулой (50) или первым слагаемым формулы (52):

$$x_{св}(t) = e^{-nt}\left[x_0\cos k_1 t + \frac{x_0' + x_0 n}{k_1}\sin k_1 t\right]. \tag{54}$$

Обозначим $x_0 = a$, $\frac{x_0' + x_0 n}{k_1} = b$. Очевидно, при любых $a$ и $b$ можно подобрать такие $M$ и $\delta$, что будет $a = M\sin\delta$, $b = M\cos\delta$, при этом $M^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tg}\delta = a/b$. Формулу (54) перепишем так:

$$x_{св} = e^{-nt}[M\cos k_1 t\sin\delta + M\sin k_1 t\cos\delta],$$

или окончательно решение можно переписать так:

$$x_{\text{св}} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta). \qquad (55)$$

Решение (55) соответствует *затухающим колебаниям*.

Если $2n = a_1 = 0$, т. е. если отсутствует внутреннее трение, то решение будет иметь вид

$$x_{\text{св}} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(kt + \delta).$$

В этом случае имеют место *гармонические колебания*. (В гл. XIII, § 27, на рис. 276 и 278 даны графики гармонических и затухающих колебаний.)

## § 17. Исследование механических и электрических колебаний в случае периодической внешней силы

При изучении упругих колебаний механических систем и особенно при изучении электрических колебаний приходится рассматривать различные виды внешней силы $f(t)$. Рассмотрим подробно случай периодической внешней силы. Пусть уравнение (47) имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \omega t. \qquad (56)$$

Для выяснения характера движения достаточно рассмотреть случай, когда $x_0 = x_0' = 0$. Можно было бы получить решение уравнения по формуле (52), но здесь с методической точки зрения удобнее получить решение, проделав все промежуточные вычисления.

Напишем изображающее уравнение

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A\frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

откуда получаем

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)}. \qquad (57)$$

Рассмотрим случай, когда $2n \neq 0$ $(n^2 < k^2)$. Стоящую справа дробь разлагаем на элементарные дроби:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \qquad (58)$$

Постоянные $N$, $B$, $C$, $D$ определяем методом неопределенных коэффициентов. Пользуясь формулой (38), из (57) найдем начальную функцию

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\left\{(k^2 - \omega^2)\sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t + \right.$$

$$\left. + e^{-nt}\left[(2n^2 - k^2 + \omega^2)\frac{\omega}{k_1}\sin k_1 t + 2n\omega \cos k_1 t\right]\right\}; \qquad (59)$$

здесь снова $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Это и есть решение уравнения (56), удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = x_0' = 0$ при $t = 0$.

Рассмотрим частный случай, когда $2n = 0$. Это соответствует тому, что в механической, например, системе нет внутреннего сопротивления, нет амортизатора. В случае электрического контура это соответствует тому, что $R = 0$, т. е. отсутствует внутреннее сопротивление цепи. Уравнение (56) в этом случае принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = A \sin \omega t, \tag{60}$$

а решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $x_0 = x_0' = 0$ при $t = 0$, получится, если в формуле (59) положить $n = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)\, k} [-\omega \sin kt + k \sin \omega t]. \tag{61}$$

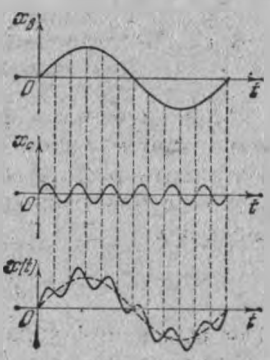


Рис. 400.

Здесь имеем сумму двух гармонических колебаний: собственных с частотой $k$,

$$x_c(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt,$$

и вынужденных с частотой $\omega$,

$$x_в(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Для случая, когда $k \gg \omega$, характер колебаний изображен на рис. 400.

Вернемся снова к формуле (59). Если $2n > 0$, что и имеет место в рассмотренных механических и электрических системах, то член, содержащий множитель $e^{-nt}$, представляющий затухающие собственные колебания, при $t$ возрастающем быстро убывает. При достаточно большом $t$ характер колебаний будет определяться членом, не содержащим множителя $e^{-nt}$, т. е. членом

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \{(k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t\}. \tag{62}$$

Введем обозначения

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta, \quad -\frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \sin \delta, \tag{63}$$

где

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Решение (62) можно переписать так:

$$x(t)=\frac{A}{k^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}\right)^2+4n^2\frac{\omega^2}{k^4}}}\sin(\omega t+\delta). \tag{64}$$

Из формулы (64) следует, что частота $k$ вынужденных колебаний не совпадает с частотой $\omega$ внешней силы. Если внутреннее сопротивление, характеризующееся числом $n$, мало, а частота $\omega$ близка к частоте $k$, то амплитуда колебаний может быть сделана как угодно большой, так как знаменатель может быть как угодно малым. При $n=0$, $\omega^2=k^2$ решение не выражается формулой (64).

## § 18. Решение уравнения колебаний в случае резонанса

Рассмотрим частный случай, когда $a_1=2n=0$, т. е. когда сопротивление отсутствует, а частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний $k=\omega$. В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=A\sin kt. \tag{65}$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=0$, $x_0'=0$ при $t=0$. Вспомогательное уравнение будет

$$\overline{x}(p)(p^2+k^2)=A\frac{k}{p^2+k^2};$$

откуда

$$\overline{x}(p)=\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}. \tag{66}$$

Мы получили правильную рациональную дробь IV вида, которую в общем виде мы не рассматривали. Чтобы найти начальную функцию для изображения (66), воспользуемся следующим приемом. Напишем тождество (формула 2 таблицы 1)

$$\frac{k}{p^2+k^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\sin kt\,dt. \tag{67}$$

Продифференцируем *) обе части этого равенства по $k$:

$$\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}t\cos kt\,dt.$$

Пользуясь тождеством (67), это равенство можно переписать так:

$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[t\cos kt-\frac{1}{k}\sin kt\right]dt.$$

*) Интеграл, стоящий справа, можно представить в виде суммы двух интегралов действительной переменной, каждый из которых зависит от параметра $k$.

Отсюда непосредственно следует

$$\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2} \doteq \frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right)$$

(из этой формулы получается формула 13 таблицы 1). Итак, искомое решение уравнения (65) будет

$$x(t) = \frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right). \tag{68}$$

Изучим второе слагаемое этого решения

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k}t\cos kt; \tag{68'}$$

при увеличении $t$ эта величина не является ограниченной. Амплитуда колебаний, соответствующих формуле (68'), неограниченно возрастает при неограниченном возрастании $t$. Следовательно, и амплитуда колебаний, соответствующих формуле (68), неограниченно возрастает. Это явление, имеющее место при совпадении частоты собственных колебаний с частотой внешней силы, называется *резонансом* (см. также гл. XIII, § 28, рис. 280).

## § 19. Теорема запаздывания

Пусть функция $f(t)$ при $t<0$ тождественно равна нулю (рис. 401, *а*). Тогда функция $f(t-t_0)$ будет тождественно равна нулю при $t<t_0$ (рис. 401, *б*).

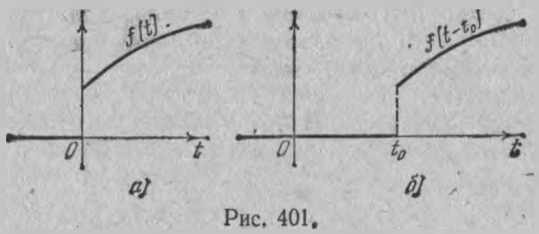



Рис. 401.

Докажем следующую теорему запаздывания:

Теорема. *Если $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, то $e^{-pt_0}F(p)$ есть изображение функции $f(t-t_0)$, т. е. если $f(t) \doteq F(p)$, то*

$$f(t-t_0) \doteq e^{-pt_0}F(p). \tag{69}$$

Доказательство. По определению изображения имеем

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t-t_0)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-pt}f(t-t_0)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt}f(t-t_0)\,dt.$$

Первый интеграл, стоящий в правой части равенства, равен нулю, так как $f(t-t_0)=0$ при $t<t_0$. В последнем интеграле сделаем замену переменной, полагая $t-t_0=z$:

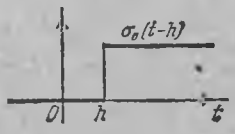



Рис. 402.

$$L\{f(t-t_0)\}=\int_0^\infty e^{-p(z+t_0)}f(z)\,dz=$$

$$=e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-pz}f(z)\,dz=e^{-pt_0}F(p).$$

Таким образом, $f(t-t_0)\doteq e^{-pt_0}F(p)$.

Пример. В § 2 было установлено для единичной функции Хевисайда, что $\sigma_0(t)\doteq\frac{1}{p}$. На основании доказанной теоремы следует, что для функции $\sigma_0(t-h)$, изображенной на рис. 402, $L$-изображением будет $\frac{1}{p}e^{-ph}$, т. е.

$$\sigma_0(t-h)\doteq\frac{1}{p}e^{-ph}. \tag{70}$$

## § 20. Дельта-функция и ее изображение

Рассмотрим функцию

$$\sigma_1(t,\ h)=\frac{1}{h}[\sigma_0(t)-\sigma_0(t-h)]=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ \frac{1}{h} & \text{при } 0\leqslant t<h,\\ 0 & \text{при } h\leqslant t,\end{cases} \tag{71}$$

изображенную на рис. 403.

Если эту функцию трактовать как силу, действующую за промежуток времени от 0 до $h$, а в остальное время равную нулю, то, очевидно, импульс этой силы будет равен единице.

На основании формул (8) и (70) изображение этой функции будет

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ph}\right),$$

т. е.

$$\sigma_1(t,\ h)\doteq\frac{1}{p}\left(\frac{1-e^{-ph}}{h}\right). \tag{72}$$

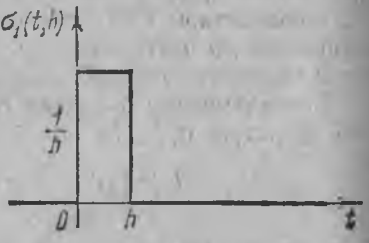



Рис. 403.

В механике бывает удобно рассматривать силы, действующие очень короткий промежуток времени, как силы, действующие мгновенно, но имеющие конечный импульс. Поэтому вводят функцию $\delta(t)$ как предел функции $\sigma_1(t,\ h)$ при $h\to 0$:

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\sigma_1(t,\ h)\ ^*). \tag{73}$$

*) Следует иметь в виду, что $\delta(t)$ не есть функция в обычном понимании. (Многие авторы-физики функцию $\delta(t)$ называют функцией Дирака.)

Эту функцию называют *единичной импульсной функцией*, или *дельта-функцией*.

Естественно положить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1. \tag{74}$$

Также пишут

$$\int_{0}^{0} \delta(t)\,dt = 1. \tag{75}$$

Отметим, что функция $\delta(x)$ применяется не только в механике, а во многих разделах математики, в частности при решении многих задач уравнений математической физики.

Рассмотрим действие $\delta(t)$, если ее представлять как силу. Найдем решение уравнения

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \delta(t), \tag{76}$$

удовлетворяющее условиям

$$s = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Из уравнения (76) находим, учитывая (75),

$$v = \frac{ds}{dt} = \int_0^t \delta(\tau)\,d\tau = 1 \tag{77}$$

при любом $t$, в частности и при $t = 0$. Следовательно, определяя $\delta(x)$ равенством (73), можно трактовать эту функцию как силу, сообщающую материальной точке с массой единица в момент $t = 0$ скорость, равную единице.

$L$-изображение функции $\delta(t)$ определим как предел изображения функции $\sigma_1(t, h)$ при $h \to 0$:

$$L\{\delta(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{h} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

(здесь воспользовались правилом Лопиталя для нахождения предела). Итак,

$$\delta(t) \doteq 1. \tag{78}$$

Далее определяется функция $\delta(t - t_0)$, которую трактуют как силу, мгновенно, в момент $t = t_0$, сообщающую единичной массе скорость, равную единице. Очевидно, что на основании теоремы запаздывания будем иметь

$$\delta(t - t_0) \doteq e^{-pt}. \tag{79}$$

Аналогично (75) можем написать

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t-t_0)\,dt = 1. \tag{80}$$

На основании механического толкования дельта-функции следует, что присутствие дельта-функции в правой части уравнения может быть заменено соответствующим изменением начальных условий. Покажем это на простом примере. Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \tag{81}$$

с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_0' = 0$ при $t = 0$. Вспомогательное уравнение будет

$$p^2\bar{x}(p) = F(p) + 1, \tag{82}$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Пользуясь формулами 9 и 15 таблицы, получаем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau + t. \tag{83}$$

К этому же результату мы бы пришли, если бы находили решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_0' = 1$ при $t = 0$. В этом случае вспомогательное уравнение имело бы вид

$$p^2\bar{x}(p) - 1 = F(p). \tag{84}$$

Оно эквивалентно вспомогательному уравнению (82), а следовательно, решение будет совпадать с решением (83).

В заключение отметим следующее важное свойство дельта-функции. На основании равенств (74) и (75) можем написать

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t < +\infty, \end{cases} \tag{85}$$

т. е. этот интеграл равняется единичной функции Хевисайда $\sigma_0(t)$. Итак,

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau. \tag{86}$$

Дифференцируя правую и левую части равенства по $t$, получаем условное равенство

$$\sigma_0'(t) = \delta(t). \qquad (87)$$

Для пояснения смысла условного равенства (87) рассмотрим функцию $\bar{\sigma}_0(t, h)$, изображенную на рис. 404. Очевидно,

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) = \sigma_1(t, h) \qquad (88)$$

(кроме точек $t=0$ и $t=h$). Переходя к пределу при $h \to 0$ в равенстве (88), видим, что $\bar{\sigma}_0(t, h) \to \sigma_0(t)$, и будем писать

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) \to \sigma_0'(t) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

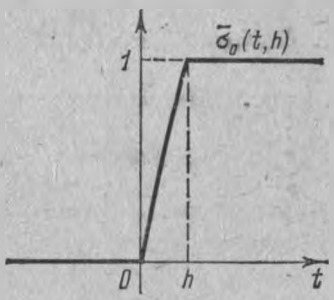


Рис. 404.

Правая часть равенства (88) $\sigma_1(t, h) \to \delta(t)$ при $h \to 0$. Таким образом, равенство (88) переходит в условное равенство (87).

## Упражнения к главе XIX

Найти решения следующих уравнений при указанных начальных условиях:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, $x=1$, $x'=2$ при $t=0$. *Отв.* $x = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $x=2$, $x'=0$, $x''=1$ при $t=0$. *Отв.* $x = 1 - t + e^t$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2+b^2)\,x = 0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{e^{at}}{b}[x_0 b \cos bt + (x_0' - x_0 a)\sin bt]$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}$, $x=1$, $x'=2$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = a\cos nt$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{a}{m^2-n^2}(\cos nt - \cos mt) + x_0 \cos mt + \frac{x_0'}{m}\sin mt$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2$, $x=0$, $x'=0$ при $t=0$. *Отв.* $x = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t$, $x=x'=x''=0$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{t/2}$.

Аналогично (75) можем написать

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t-t_0)\,dt = 1. \tag{80}$$

На основании механического толкования дельта-функции следует, что присутствие дельта-функции в правой части уравнения может быть заменено соответствующим изменением начальных условий. Покажем это на простом примере. Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \tag{81}$$

с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_0' = 0$ при $t = 0$. Вспомогательное уравнение будет

$$p^2\bar{x}(p) = F(p) + 1, \tag{82}$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Пользуясь формулами 9 и 15 таблицы, получаем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau + t. \tag{83}$$

К этому же результату мы бы пришли, если бы находили решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_0' = 1$ при $t = 0$. В этом случае вспомогательное уравнение имело бы вид

$$p^2\bar{x}(p) - 1 = F(p). \tag{84}$$

Оно эквивалентно вспомогательному уравнению (82), а следовательно, решение будет совпадать с решением (83).

В заключение отметим следующее важное свойство дельта-функции. На основании равенств (74) и (75) можем написать

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t < +\infty, \end{cases} \tag{85}$$

т. е. этот интеграл равняется единичной функции Хевисайда $\sigma_0(t)$. Итак,

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau. \tag{86}$$

Дифференцируя правую и левую части равенства по $t$, получаем условное равенство

$$\sigma_0'(t) = \delta(t). \tag{87}$$

Для пояснения смысла условного равенства (87) рассмотрим функцию $\bar{\sigma}_0(t, h)$, изображенную на рис. 404. Очевидно,

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) = \sigma_1(t, h) \tag{88}$$

(кроме точек $t=0$ и $t=h$). Переходя к пределу при $h \to 0$ в равенстве (88), видим, что $\bar{\sigma}_0(t, h) \to \sigma_0(t)$, и будем писать

$$\bar{\sigma}_0'(t, h) \to \sigma_0'(t) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

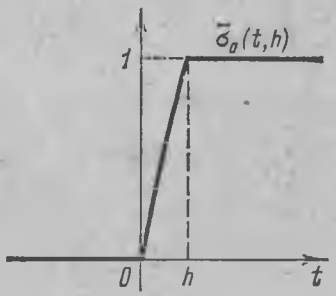


Рис. 404.

Правая часть равенства (88) $\sigma_1(t, h) \to \delta(t)$ при $h \to 0$. Таким образом, равенство (88) переходит в условное равенство (87).

## Упражнения к главе XIX

Найти решения следующих уравнений при указанных начальных условиях:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, $x=1$, $x'=2$ при $t=0$. *Отв.* $x = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $x=2$, $x'=0$, $x''=1$ при $t=0$. *Отв.* $x = 1 - t + e^t$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2+b^2)\,x = 0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{e^{at}}{b}[x_0 b \cos bt + (x_0' - x_0 a)\sin bt]$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}$, $x=1$, $x'=2$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = a\cos nt$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{a}{m^2-n^2}(\cos nt - \cos mt) + x_0 \cos mt + \frac{x_0'}{m}\sin mt$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2$, $x=0$, $x'=0$ при $t=0$. *Отв.* $x = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t$, $x=x'=x''=0$ при $t=0$. *Отв.* $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{t/2}$.

8. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=1$, $x_0=x_0'=x_0''=0$ при $t=0$. *Ответ.* $x=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t/2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t$, $x_0=x_0'=x_0''=x_0'''=0$ при $t=0$. *Ответ.* $x=\frac{1}{8}[e^t(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\sin t]$.

10. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\frac{d^2x}{dt^2}+y=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}+x=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=y_0=x_0'=y_0'=0$ при $t=0$. *Ответ.* $x(t)=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+1$.

ГЛАВА XX

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Каждодневный опыт убеждает нас в том, что в обыденной жизни, практических ситуациях, а также в научных исследованиях постоянно приходится сталкиваться с положениями, когда привычные нам закономерности строгого детерминизма уже не имеют места. Приведем несколько примеров. Представим, что нас интересует число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи в течение суток.

Длительные наблюдения показывают, что нет возможности точно прогнозировать, как много вызовов поступит на станцию в течение ближайших суток. Это число подвержено значительным и притом случайным колебаниям. Точно так же случайно то время, которое придется затратить врачу, прибывшему по вызову больного.

Если поставить на испытания некоторое число $N$ каких-нибудь изделий, изготовленных, казалось бы, в одних и тех же условиях и из тех же самых материалов, то время от начала испытаний до приведения изделий в неработоспособное состояние оказывается случайным, подвержено весьма сильному разбросу.

При стрельбе из орудия по цели наблюдается так называемое рассеивание снарядов. Уклонение точки попадания снаряда от центра цели заранее указать нет возможности — оно случайно.

Одной констатации факта наличия случайности для уверенного использования явлений природы или управления технологическими процессами совершенно недостаточно, необходимо научиться количественно оценивать случайные события, прогнозировать их течение. Этого теперь настойчиво требуют как теоретические, так и практические задачи. Решением возникающих при этом вопросов и созданием общей математической теории занимаются две математические дисциплины — теория вероятностей и математическая статистика.

В последние годы, благодаря в первую очередь работам советских ученых, происходит развитие теоретических основ теории вероятностей, ее проникновение в другие, особенно во вновь развивающиеся науки. Здесь в первую очередь следует указать работы А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнова и др.

## § 1. Случайное событие. Относительная частота случайного события. Вероятность события. Предмет теории вероятностей

Основным понятием теории вероятностей является понятие *случайного события*. Случайным событием называется такое событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Пример 1. Появление герба при бросании монеты есть случайное событие.

Пример 2. Попадание в данный объект или в данную площадь при стрельбе по этому объекту из данного орудия есть случайное событие.

Пример 3. При изготовлении цилиндра с заданной величиной диаметра 20 см получать ошибки меньше, чем 0,2 мм, при данных средствах производства есть случайное событие.

Определение 1. *Относительной частотой* (или просто частотой) $p^*$ случайного события $A$ называется отношение числа $m^*$ появления данного события к общему числу $n^*$ проведенных одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие. Будем писать так:

$$P^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n^*}. \qquad (1)$$

Пример 4. Пусть по данному объекту из данного орудия при одинаковых условиях произведено 6 серий выстрелов:

в 1-й серии было 5 выстрелов, число попаданий 2,
во 2-й серии было 10 выстрелов, число попаданий 6,
в 3-й серии было 12 выстрелов, число попаданий 7,
в 4-й серии было 50 выстрелов, число попаданий 27,
в 5-й серии было 100 выстрелов, число попаданий 49,
в 6-й серии 200 выстрелов, число попаданий 102.

Событие $A$ — попадание в цель. Относительная частота попадания в сериях будет

в 1-й серии $\frac{2}{5} = 0{,}40$,

во 2-й серии $\frac{6}{10} = 0{,}60$,

в 3-й серии $\frac{7}{12} = 0{,}58$,

в 4-й серии $\frac{27}{50} = 0{,}54$,

в 5-й серии $\frac{49}{100} = 0{,}49$,

в 6-й серии $\frac{102}{200} = 0{,}51$.

Из наблюдений различных явлений следует, что если число испытаний в каждой серии практически невелико, то относительные частоты появления события $A$ в каждой серии могут суще-

ственно отличаться одна от другой. Если же число опытов в сериях велико, то, как правило, относительные частоты появления события $A$ в различных сериях отличаются друг от друга мало и это отличие тем меньше, чем больше испытаний в сериях. Говорят, что относительная частота при большом числе испытаний все более перестает носить случайный характер. Однако отметим, что существуют такие события, у которых относительная частота не носит устойчивый характер и ее величины в различных сериях, даже очень больших, могут сильно отличаться друг от друга.

Опыт показывает, что в подавляющем большинстве случаев существует постоянное число $p$ такое, что относительные частоты появления события $A$ при большом числе испытаний, кроме редких случаев, мало отличаются от этого числа $p$.

Этот опытный факт символически записывают так:

$$\frac{m^*}{n^*} \xrightarrow[n^* \to \infty]{} p. \tag{2}$$

Число $p$ называется *вероятностью* появления случайного события $A$. Последнюю фразу символически записывают так:

$$\mathrm{P}(A) = p. \tag{3}$$

Вероятность $p$ является объективной характеристикой возможности появления события $A$ при данных испытаниях, определяющейся характером события $A$.

Относительная частота при большом числе испытаний мало отличается от вероятности, «кроме редких случаев», существованием которых часто можно пренебречь.

Коротко словами соотношение (2) формулируют так:

*При неограниченном увеличении числа опытов $n^*$ относительная частота события $A$ сходится к вероятности $p$ появления этого события.*

Замечание. В приведенных рассуждениях мы на основании опытов постулировали соотношение (2). Но постулируют и другие естественные условия, следующие из опыта. Из них выводится соотношение (2), которое тогда уже будет теоремой. Это известная в теории вероятностей теорема Я. Бернулли (1654—1705).

Так как вероятность является объективной характеристикой возможности появления некоторого события, то для предсказания характера протекания многих процессов, которые приходится рассматривать и в военном деле, и в организации производства, и в экономике и т. д., нужно уметь определять вероятность появления некоторых сложных событий. Определение вероятности появления события по вероятностям элементарных событий, определяющих данное сложное событие, изучение вероятностных закономерностей различных случайных событий и является предметом *теории вероятностей*.

## § 2. Классическое определение вероятности и непосредственный подсчет вероятностей

Во многих случаях вероятность рассматриваемого случайного события может быть подсчитана, исходя из анализа рассматриваемого испытания.

Для понимания дальнейшего изложения рассмотрим пример.

Пример 1. Однородный куб, на гранях которого нанесены различные числа от 1 до 6, будем называть игральной костью. Рассматриваем случайное событие — появление числа $l$ ($1 \leqslant l \leqslant 6$) на верхней грани при бросании игральной кости. Так как в силу симметрии кости события — появление любого числа от 1 до 6 — одинаково возможны, то их называют *равновозможными*. При большом числе $n$ бросаний кости можно ожидать, что число $l$, как и каждое другое число от 1 до 6, появится на верхней грани примерно в $\frac{n}{6}$ случаях. Это подтверждается опытом.

Относительная частота будет близка к числу $p^* = \frac{1}{6}$. Поэтому считают, что вероятность появления на верхней грани числа $l$, как и всякого другого числа от 1 до 6, равна $\frac{1}{6}$.

Анализом случайных событий, вероятность которых подсчитывается непосредственно, мы и займемся ниже.

Определение 1. Случайные события называются *несовместными* в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Определение 2. Будем говорить, что случайные события образуют *полную группу*, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть *случаями* (или *шансами*).

Событие (случай) такой группы называется *благоприятствующим* появлению события $A$, если появление этого случая влечет появление события $A$.

Пример 2. В урне находится 8 шаров, на каждом из которых поставлено по одной цифре от 1 до 8. Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные шары черные. Появление шара с цифрой 1 (так же как и появление шара с цифрой 2 или 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара.

Для рассматриваемого случая можно дать иное, чем в § 1, определение вероятности.

Определение 3. *Вероятностью* $p$ события $A$ называется отношение числа $m$ благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев $n$, образующих полную группу равновозможных несовместных событий, или символически

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Определение 4. Если какому-либо событию благоприятствуют все $n$ случаев, образующих полную группу равновозможных несовместных событий, то такое событие называется *достоверным*; его вероятность $p=1$.

Событие, которому не благоприятствует ни один из $n$ случаев, образующих полную группу равновозможных несовместных событий, называется *невозможным*; его вероятность $p=0$.

Замечание 1. Противоположные утверждения в данном случае также верны. Однако в других случаях, например в случае непрерывной случайной величины (§ 12), противоположные утверждения могут быть и неверны, т. е. из того, что вероятность какого-либо события равна 1 или 0, еще не следует, что это событие достоверно или невозможно.

Из определения вероятности следует, что она удовлетворяет соотношению

$$0 \leqslant p \leqslant 1.$$

Пример 3. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты пиковой масти?

Решение. Здесь всего случаев $n=36$. Событие $A$ — появление карты пиковой масти. Число случаев, благоприятствующих событию $A$, $m=9$.

Следовательно, $p=9/36=1/4$.

Пример 4. Бросаются одновременно две монеты. Какова вероятность выпадения герба на обеих монетах (т. е. двух гербов)?

Решение. Составим схему возможных случаев.

| | Первая монета | Вторая монета |
|---|---|---|
| 1-й случай | герб | герб |
| 2-й случай | герб | не герб |
| 3-й случай | не герб | герб |
| 4-й случай | не герб | не герб |

Всего случаев 4. Благоприятствующих случаев 1.

Следовательно, вероятность выпадения герба на обеих монетах будет

$$p=1/4.$$

Пример 5. Вероятность попадания в некоторую цель при стрельбе из первого орудия равна 8/10, при стрельбе из другого орудия — 7/10. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих орудий. Цель будет поражена, если будет хотя бы одно попадание из какого-либо орудия.

Решение. Эта задача моделируется следующим образом. В двух урнах находится по 10 шаров, пронумерованных от 1 до 10. В первой урне 8 красных и 2 черных, во второй 7 красных и 3 черных. Вынимается по одному шару из каждой урны. Какова вероятность, что среди вынутых двух шаров имеется хотя бы один красный?

Так как каждый шар первой урны может быть вынут с любым шаром второй, то всего случаев 100: $n=100$.

Подсчитаем благоприятствующие случаи.

При вынимании каждого из 8 красных шаров первой урны одновременно с любым шаром второй урны в числе вынутых будет находиться по крайней мере один красный шар. Таких случаев будет $10\times 8=80$. При вынимании каждого из 2 черных шаров первой урны одновременно с любым из 7 красных шаров второй урны в числе вынутых будет один красный. Таких случаев будет $2\times 7=14$. Таким образом, всего благоприятствующих случаев будет $m=80+14=94$.

Вероятность того, что среди вынутых будет по крайней мере один красный шар, равна

$$p=\frac{m}{n}=\frac{94}{100}.$$

Такова будет и вероятность поражения цели.

Замечание 2. В этом примере задачу о вероятности при стрельбе мы свели к задаче о вероятности появления того или иного шара при вынимании шаров из урны. Многие задачи теории вероятности можно свести к «схеме урн». Поэтому на задачи о вынимании шаров из урн следует смотреть как на *задачи обобщенные*.

Пример 6. В партии из 100 изделий 10 изделий бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых 4 изделий 3 будут не бракованные?

Решение. Взять 4 изделия из 100 можно следующим числом способов: $n=C_{100}^{4}$. Число случаев, когда среди этих 4 изделий будут 3 не бракованные, равно $m=C_{90}^{3}\cdot C_{10}^{1}$.

Искомая вероятность будет

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_{90}^{3}\cdot C_{10}^{1}}{C_{100}^{4}}=\frac{1424}{4753}\approx 0{,}3.$$

## § 3. Сложение вероятностей. Противоположные случайные события

Определение 1. *Суммой двух* событий $A_1$ и $A_2$ называется событие $C$, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Ниже будет рассматриваться вероятность суммы двух несовместных событий $A_1$ и $A_2$. Сумма этих событий обозначается

$$A_1+A_2,$$

или

$$A_1 \text{ или } A_2\ ^{*}).$$

Справедлива следующая теорема, которая называется *теоремой о сложении вероятностей*.

Теорема 1. *Пусть при данном испытании (явлении, опыте) могут иметь место случайное событие $A_1$ с вероятностью $\mathrm{P}(A_1)$ и событие $A_2$ с вероятностью $\mathrm{P}(A_2)$. События $A_1$ и $A_2$ несовмест-*

*) Заметим, что в этом выражении слово «или» не носит характера исключения, а означает, что появится хотя бы одно из этих событий в соответствии с определением 1.

*ны. Тогда вероятность суммы событий, т. е. того, что произойдет или событие $A_1$ или событие $A_2$, вычисляется по формуле*

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ или } A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{m_1}{n}, \quad \mathrm{P}(A_2) = \frac{m_2}{n}.$$

Так как события $A_1$ и $A_2$ несовместны, то при общем числе случаев $n$ число случаев, благоприятствующих появлению событий $A_1$ и $A_2$ одновременно, равно 0, а число случаев, благоприятствующих появлению или события $A_1$ или события $A_2$, равно $m_1 + m_2$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ или } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно доказать эту теорему для любого числа слагаемых:

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n). \qquad (1')$$

Последнее равенство записывается и так:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i). \qquad (1'')$$

Замечание. Мы доказали теорему сложения для схемы случаев, когда вероятность определяется непосредственным подсчетом. В дальнейшем будем считать, что теорема сложения вероятностей справедлива и тогда, когда непосредственный подсчет вероятностей осуществить невозможно. Это утверждение основано на следующих соображениях. Вероятности событий при большом числе испытаний близки (за редкими исключениями) к относительным частотам, а для относительных частот доказательство проводится так же, как и выше. Это замечание будет относиться и к доказательству последующих теорем, которые мы будем доказывать, пользуясь схемой урн.

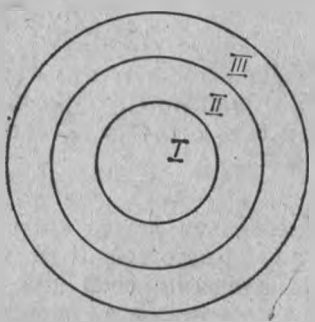


Рис. 405.

Пример 1. Производится стрельба по некоторой области, состоящей из трех непересекающихся зон (рис. 405). Вероятность попадания в зону I: $\mathrm{P}(A_1) = \frac{5}{100}$, в зону II: $\mathrm{P}(A_2) = \frac{10}{100}$, в зону III: $\mathrm{P}(A_3) = \frac{17}{100}$. Какова вероятность попасть в область $D$? Событие $A$ — попадание в область $D$. По

формуле (1′) имеем

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{17}{100}=\frac{32}{100}.$$

Определение 2. Два события называются *противоположными*, если они несовместны и образуют полную группу.

Если одно событие обозначим через $A$, то противоположное событие обозначают через $\overline{A}$.

Пусть вероятность появления события $A$ есть $p$, вероятность непоявления события $A$, т. е. вероятность появления события $\overline{A}$, обозначим через $P(\overline{A})=q$.

Так как при испытании обязательно произойдет или событие $A$ или событие $\overline{A}$, то на основании теоремы (1) получаем:

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

*т. е. сумма вероятностей противоположных событий равняется единице*:

$$p+q=1. \tag{2}$$

Пример 2. Производится один выстрел по мишени. Попадание — событие $A$. Вероятность попадания $p$: $P(A)=p$. Определить вероятность промаха.

Промах есть событие $\overline{A}$, противоположное событию $A$, поэтому вероятность промаха $q=1-p$.

Пример 3. Производится некоторое измерение. Получение ошибки при измерении, меньшей $\lambda$, есть событие $A$. Пусть $P(A)=p$. Противоположное событие — получение ошибки, большей $\lambda$ или равной $\lambda$, есть событие $\overline{A}$. Вероятность этого события $P(\overline{A})=q=1-p$.

Следствие 1. *Если случайные события $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то имеет место равенство*

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{3}$$

Доказательство. Так как события $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ образуют полную группу событий, то появление одного из этих событий есть событие достоверное. Следовательно,

$$P(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } A_n)=1.$$

Преобразуя левую часть по формуле (1′), получим равенство (3).

Определение 3. Случайные события $A$ и $B$ называются *совместными*, если при данном испытании могут произойти оба эти события, т. е. произойдет *совмещение* событий $A$ и $B$.

Событие, заключающееся в совмещении событий $A$ и $B$, будем обозначать ($A$ и $B$) или ($AB$). Вероятность совмещения событий $A$ и $B$ будем обозначать $P(A \text{ и } B)$.

Теорема 2. *Вероятность суммы совместных событий вычисляется по формуле*

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ и } B). \tag{4}$$

Справедливость формулы (4) мы проиллюстрируем геометрически. Предварительно введем следующее определение.

Определение 4. Пусть дана некоторая область $D$, площадь которой равна $S$. Рассмотрим область $d$, входящую в $D$. Пусть ее площадь $\bar{S}$. Тогда вероятность попадания точки в область $d$, считая достоверным попадание точки в область $D$, по определению, равна $\bar{S}/S$, т. е. $p=\bar{S}/S$. Эту вероятность называют *геометрической вероятностью*.

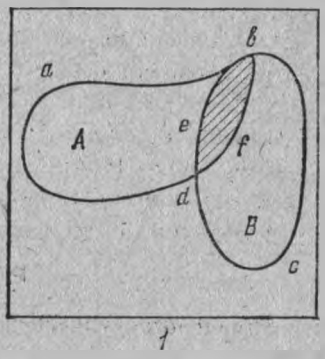



Рис. 406.

Тогда, считая достоверным попадание точки в квадрат со стороной, равной 1, имеем (рис. 406)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \text{ или } B) &= \text{пл. } abcda, \\ \mathrm{P}(A) &= \text{пл. } abfda, \\ \mathrm{P}(B) &= \text{пл. } bcdeb, \\ \mathrm{P}(A \text{ и } B) &= \text{пл. } debfd. \end{aligned} \qquad (5)$$

Очевидно, что имеет место следующее равенство:

$$\text{пл. } abcda = \text{пл. } abfda + \text{пл. } bcdeb - \text{пл. } debfd.$$

Подставляя в это равенство левые части равенств (5), получим равенство (4).

Аналогичным образом можно вычислить вероятность суммы любого числа совместных случайных событий.

Отметим, что теорему 2 можно доказать, исходя из сделанных выше определений и правил операций.

## § 4. Умножение вероятностей независимых событий

Определение 1. Событие $A$ называется *независимым* от события $B$, если вероятность появления события $A$ не зависит от того, произошло событие $B$ или не произошло.

Теорема 1. *Если случайные события $A$ и $B$ независимы, то вероятность совмещения событий $A$ и $B$ равна произведению вероятностей появления событий $A$ и $B$:*

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Проведем доказательство этой теоремы для схемы урн. В каждой из двух урн соответственно находятся $n_1$ и $n_2$ шаров. В 1-й урне $m_1$ красных шаров, остальные черные. Во 2-й урне $m_2$ красных, остальные черные. Из каждой урны вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что оба вынутых шара окажутся красными?

Теорема 1. *Вероятность совмещения двух событий равняется произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т. е.*

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B) = \mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A/B). \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство приведем для событий, которые сводятся к схеме урн (т. е. в случае, когда применимо классическое определение вероятности).

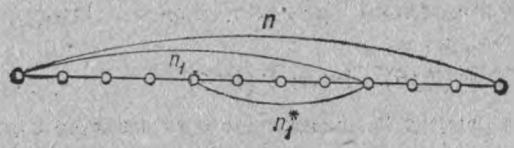


Рис. 408.

Пусть в урне $n$ шаров, при этом $n_1$ белых, $n_2$ черных. Пусть среди $n_1$ белых шаров $n_1^*$ шаров с отметкой «звездочка», остальные чисто белые (рис. 408).

Из урны вынимается один шар. Какова вероятность события вынуть белый шар с отметкой «звездочка»?

Пусть $B$ — событие, состоящее в появлении белого шара, $A$ — событие, состоящее в появлении шара с отметкой «звездочка». Очевидно,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{n_1}{n}. \tag{2}$$

Вероятность появления белого шара со «звездочкой» при условии, что появился белый шар, будет

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{n_1^*}{n_1}. \tag{3}$$

Вероятность появления белого шара со «звездочкой» есть $\mathrm{P}(A \text{ и } B)$. Очевидно,

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B) = \frac{n_1^*}{n}. \tag{4}$$

Но

$$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}. \tag{5}$$

Подставляя в (5) левые части выражений (2), (3) и (4), получаем

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B) = \mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A/B).$$

Равенство (1) доказано.

Если рассматриваемые события не укладываются в классическую схему, то формула (1) служит для определения условной вероятности. А именно, *условная вероятность события A при условии осуществления события B определяется с помощью*

*формулы*

$$\mathrm{P}(A/B)=\frac{\mathrm{P}(A \text{ и } B)}{\mathrm{P}(B)} \quad (\text{при } \mathrm{P}(B)\neq 0).$$

Замечание 1. Применим последнюю формулу к выражению $\mathrm{P}(B \text{ и } A)$:

$$\mathrm{P}(B \text{ и } A)=\mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B/A). \tag{6}$$

В равенствах (1) и (6) левые части равны, так как это одна и та же вероятность, следовательно, равны и правые. Поэтому можем написать равенство

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B)=\mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A/B)=\mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B/A). \tag{7}$$

Пример 2. Для случая примера 1, приведенного в начале этого параграфа, имеем $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A/B)=\frac{1}{2}$. По формуле (1) получаем $\mathrm{P}(A \text{ и } B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$. Вероятность $\mathrm{P}(A \text{ и } B)$ легко вычисляется и непосредственно.

Пример 3. Вероятность изготовления годного изделия данным станком равна 0,9. Вероятность появления изделия 1-го сорта среди годных изделий есть 0,8. Определить вероятность изготовления изделия 1-го сорта данным станком.

Решение. Событие $B$ — изготовление годного изделия данным станком, событие $A$ — появление изделия 1-го сорта. Здесь $\mathrm{P}(B)=0{,}9$, $\mathrm{P}(A/B)=0{,}8$. Подставляя в формулу (1), получаем искомую вероятность $\mathrm{P}(A \text{ и } B)=0{,}9\times 0{,}8=0{,}72$.

Теорема 2. *Если событие $A$ может осуществиться только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события $A$ вычисляется по формуле*

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A/B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A/B_2)+\ldots+\mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}(A/B_n). \tag{8}$$

Формула (8) называется *формулой полной вероятности*.

Доказательство. Событие $A$ может произойти при выполнении любого из совмещенных событий

$$(B_1 \text{ и } A),\ (B_2 \text{ и } A),\ \ldots,\ (B_n \text{ и } A).$$

Следовательно, по теореме о сложении вероятностей получаем

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B_1 \text{ и } A)+\mathrm{P}(B_2 \text{ и } A)+\ldots+\mathrm{P}(B_n \text{ и } A).$$

Заменяя слагаемые правой части по формуле (1), получим равенство (8).

Пример 4. По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле $p_1=0{,}3$, при втором $p_2=0{,}6$, при третьем $p_3=0{,}8$. При одном попадании вероятность поражения цели $\lambda_1=0{,}4$, при двух попаданиях $\lambda_2=0{,}7$, при трех попаданиях $\lambda_3=1{,}0$. Определить вероятность поражения цели при трех выстрелах (событие $A$).

Решение. Рассмотрим полную группу несовместных событий:

$B_1$ — было одно попадание;

$B_2$ — было два попадания;

$B_3$ — было три попадания;
$B_4$ — не было ни одного попадания.

Определим вероятность каждого события. Одно попадание произойдет, если или первый выстрел даст попадание, второй и третий — промах; или первый выстрел — промах, второй попадание, третий промах; или первый выстрел — промах, второй промах, третий — попадание. Поэтому по теореме умножения и сложения вероятностей будем иметь для вероятности одного попадания выражение

$$\mathrm{P}(B_1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)\,p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)\,p_3 = 0{,}332.$$

Аналогично рассуждая, получим

$$\mathrm{P}(B_2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)\,p_3 + (1-p_1)\,p_2p_3 = 0{,}468,$$
$$\mathrm{P}(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}144,$$
$$\mathrm{P}(B_4) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}056.$$

Напишем условные вероятности поражения цели при осуществлении каждого из этих событий:

$$\mathrm{P}(A/B_1) = 0{,}4, \quad \mathrm{P}(A/B_2) = 0{,}7, \quad \mathrm{P}(A/B_3) = 1{,}0, \quad \mathrm{P}(A/B_4) = 0.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (8), получим вероятность поражения цели

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(A/B_1) + \mathrm{P}(B_2)\,\mathrm{P}(A/B_2) + \mathrm{P}(B_3)\,\mathrm{P}(A/B_3) + \mathrm{P}(B_4)\,\mathrm{P}(A/B_4) =$$
$$= 0{,}332 \cdot 0{,}4 + 0{,}468 \cdot 0{,}7 + 0{,}144 \cdot 1{,}0 + 0{,}056 \cdot 0 = 0{,}6044.$$

Замечание 2. Если событие $A$ не зависит от события $B$, то

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A),$$

и формула (1) принимает вид:

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A),$$

т. е. получаем формулу (1) § 4.

## § 6. Вероятность гипотез. Формула Байеса

Формулировка задачи. Как и в теореме 2 § 5, будем рассматривать полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности появления которых суть $\mathrm{P}(B_1), \mathrm{P}(B_2), \ldots, \mathrm{P}(B_n)$. Событие $A$ может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть *гипотезами*.

Вероятность появления события $A$ в соответствии с формулой (8) § 5 будет

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(A/B_1) + \mathrm{P}(B_2)\,\mathrm{P}(A/B_2) + \ldots + \mathrm{P}(B_n)\,\mathrm{P}(A/B_n). \qquad (1)$$

Допустим, что событие $A$ произошло. То, что событие $A$ произошло, изменит вероятности гипотез $\mathrm{P}(B_1), \ldots, \mathrm{P}(B_n)$. Требуется определить условные вероятности осуществления этих гипотез в предположении, что событие $A$ произошло, т. е. определить

$$\mathrm{P}(B_1/A), \ \mathrm{P}(B_2/A), \ \ldots, \ \mathrm{P}(B_n/A).$$

Решение задачи. По формуле (7) § 5 найдем вероятность $\mathrm{P}(A \text{ и } B_1)$:

$$\mathrm{P}(A \text{ и } B_1) = \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(A/B_1) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B_1/A),$$

откуда

$$\mathrm{P}(B_1/A) = \frac{\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(A/B_1)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Подставляя вместо $\mathrm{P}(A)$ его выражение (1), получим

$$\mathrm{P}(B_1/A) = \frac{\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\,\mathrm{P}(A/B_i)}. \tag{2}$$

Аналогичным образом определяются

$$\mathrm{P}(B_2/A), \quad \mathrm{P}(B_3/A), \quad \ldots, \quad \mathrm{P}(B_n/A).$$

Итак,

$$\mathrm{P}(B_k/A) = \frac{\mathrm{P}(B_k)\,\mathrm{P}(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\,\mathrm{P}(A/B_i)}. \tag{3}$$

Формула (2) называется *формулой Байеса* или *теоремой гипотез*.

Замечание. Из формулы (3) следует, что в выражении вероятности $\mathrm{P}(B_k/A)$ — вероятности осуществления гипотезы $B_k$ при условии, что событие $A$ произошло, — знаменатель не зависит от номера $k$.

Пример 1. Пусть до опыта было четыре равновероятные гипотезы

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4: \mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(B_3) = \mathrm{P}(B_4) = 0{,}25.$$

Условные вероятности появления события $A$ соответственно равны

$$\mathrm{P}(A/B_1) = 0{,}7, \quad \mathrm{P}(A/B_2) = 0{,}1,$$
$$\mathrm{P}(A/B_3) = 0{,}1, \quad \mathrm{P}(A/B_4) = 0{,}02.$$

Пусть в результате испытания событие $A$ произошло. Тогда по формулам (3) получаем

$$\mathrm{P}(B_1/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}7}{0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}175}{0{,}23} \approx 0{,}76,$$

$$\mathrm{P}(B_2/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$\mathrm{P}(B_3/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$\mathrm{P}(B_4/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02}{0{,}23} = 0{,}02.$$

Здесь было $\mathrm{P}(B_1) = 0{,}25$, $\mathrm{P}(B_1/A) = 0{,}76$ стало больше, потому что событие $A$ произошло. При этом вероятность $\mathrm{P}(A/B_1) = 0{,}7$ бо́льшая сравнительно с другими условными вероятностями.

Пример 2. Каждый из танков независимо сделал выстрел по некоторому объекту. Вероятность поражения цели первым танком $p_1=0{,}8$, вторым $p_2=0{,}4$. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым танком.

Решение. Событие $A$ — поражение объекта одним попаданием. До стрельбы возможны следующие гипотезы:

$B_1$ — оба танка не попали,

$B_2$ — оба танка попали,

$B_3$ — первый танк попал, второй не попал,

$B_4$ — первый не попал, второй попал.

Определим вероятности этих гипотез по теореме умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(B_1)=(1-p_1)(1-p_2)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12,$$
$$\mathrm{P}(B_2)=p_1p_2=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32,$$
$$\mathrm{P}(B_3)=p_1(1-p_2)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48,$$
$$\mathrm{P}(B_4)=(1-p_1)p_2=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$$

Определим условные вероятности наступления события $A$:

$$\mathrm{P}(A/B_1)=0,\quad \mathrm{P}(A/B_2)=0,\quad \mathrm{P}(A/B_3)=1,\quad \mathrm{P}(A/B_4)=1.$$

По формуле (2) находим условную вероятность гипотез:

$$\mathrm{P}(B_1/A)=\frac{0{,}12\cdot 0}{0{,}12\cdot 0+0{,}32\cdot 0+0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{0}{0{,}56}=0,$$

$$\mathrm{P}(B_2/A)=\frac{0{,}32\cdot 0}{0{,}56}=0,$$

$$\mathrm{P}(B_3/A)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}56}=\frac{6}{7},$$

$$\mathrm{P}(B_4/A)=\frac{0{,}08\cdot 1}{0{,}56}=\frac{1}{7}.$$

Пример 3. 30% приборов собирает специалист высокой квалификации и 70% — специалист средней квалификации. Надежность работы прибора, собранного специалистом высокой квалификации, 0,90, надежность прибора, собранного специалистом средней квалификации, 0,80. Взятый прибор оказался надежным. Определить вероятность того, что он собран специалистом высокой квалификации.

Решение. Событие $A$ — безотказная работа прибора. Для проверки прибора возможны гипотезы

$B_1$ — прибор собран специалистом высокой квалификации,

$B_2$ — прибор собран специалистом средней квалификации.

Выпишем вероятности этих гипотез:

$$\mathrm{P}(B_1)=0{,}3,\quad \mathrm{P}(B_2)=0{,}7.$$

Условные вероятности события $A$:

$$\mathrm{P}(A/B_1)=0{,}9,\quad \mathrm{P}(A/B_2)=0{,}8.$$

Определим вероятности гипотез $B_1$ и $B_2$ при условии, что событие $A$ произошло.

По формуле (2) имеем

$$\mathrm{P}(B_1/A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}27}{0{,}83}=0{,}325,$$

$$\mathrm{P}(B_2/A)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}56}{0{,}83}=0{,}675.$$

## § 7. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение 1. Переменная величина $x$, принимающая в результате испытания одно из конечной или бесконечной последовательности значений $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, называется *дискретной случайной величиной*, если каждому значению $x_k$ соответствует определенная вероятность $p_k$ того, что переменная величина $x$ примет значение $x_k$.

Из определения следует, что каждому значению $x_k$ соответствует вероятность $p_k$.

Функциональная зависимость вероятности $p_k$ от $x_k$ называется *законом распределения вероятностей дискретной случайной величины* $x$ *).

| Возможные значения случайной величины | $x_1$ | $x_2$ | ... | ... | ... | $x_k$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятности этих значений | $p_1$ | $p_2$ | ... | ... | ... | $p_k$ | ... |

Так же закон распределения может быть задан графически в виде *многоугольника распределения вероятностей*, когда в прямоугольной системе координат строятся точки с координатами $(x_k, p_k)$ и соединяются ломаной (рис. 409).

Закон распределения может быть задан и аналитически:

$$p_k = f(x_k).$$

То, что случайная величина $x$ примет одно из значений последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, есть событие достоверное, и потому должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \qquad (1)$$

в случае конечной последовательности $N$ значений, или

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad (1')$$

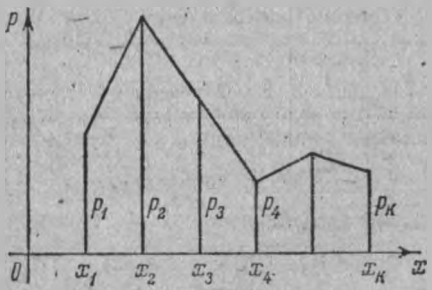


Рис. 409.

в случае бесконечной последовательности. Заметим, что значение случайной величины $x_i$, имеющее наибольшую вероятность,

*) Иногда коротко говорят «закон распределения случайной величины».

называется *модой*. Случайная величина $x$, изображенная на рис. 409, имеет моду $x_2$.

Пример 1. Переменная величина $x$ есть число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости при ее однократном бросании. Переменная $x$ может принять одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность выпадения каждого значения есть 1/6. Следовательно, таблица распределения этой случайной величины будет иметь вид

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Пример 2. Вероятность появления события $A$ при каждом из бесконечной последовательности испытаний равна $p$. Случайная величина $x$ — номер испытания, при котором произошло первый раз событие $A$. Найти закон распределения случайной величины $x$.

Решение. Случайная величина $x$ может принимать любое целое положительное значение 1, 2, 3, ... Вероятность $p_1$ того, что событие $A$ произойдет при первом испытании, будет

$$p_1 = \mathrm{P}(A) = p.$$

Вероятность $p_2$ того, что событие не произойдет при первом испытании, а произойдет при втором, будет

$$p_2 = \mathrm{P}(\overline{A} \text{ и } A) = (1-p)\,p.$$

Вероятность $p_3$ того, что событие $A$ не произойдет ни при первом, ни при втором испытании, а произойдет при третьем, будет

$$p_3 = \mathrm{P}(\overline{A} \text{ и } \overline{A} \text{ и } A) = (1-p)(1-p)\,p = (1-p)^2 p$$

и т. д.,

$$p_k = (1-p)^{k-1} p. \tag{2}$$

Таблица распределения вероятностей будет

| $x$ | 1 | 2 | 3 | ... | ... | $k$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p$ | $(1-p)\,p$ | $(1-p)^2 p$ | ... | ... | $(1-p)^{k-1} p$ | ... |

Здесь также имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Задача о стрельбе до первого попадания. Рассмотренная задача имеет приложение, в частности, к вопросам стрельбы.

Пусть производится стрельба до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле есть $p$.

Случайная величина $x$ — номер выстрела, при котором произошло первое попадание. Таблица распределения вероятностей этой случайной величины будет та же, что и в примере 2.

Пример 3. Вероятность попадания при каждом выстреле $p=0{,}8$. Имеется три снаряда. Определить вероятность того, что будет израсходован один снаряд, два снаряда, три снаряда, если стрельба ведется до первого попадания или промаха всеми тремя снарядами: составить таблицу распределения случайной величины $x$ — числа израсходованных снарядов.

Решение. Пусть $x$ — случайная величина: число израсходованных снарядов; $\mathrm{P}(x=x_1)$ — вероятность того, что будет израсходовано $x_1$ снарядов. Тогда $\mathrm{P}(x=1)=p=0{,}8$ равна вероятности попадания при одном (первом) выстреле.

$$\mathrm{P}(x=2)=(1-p)\,p=(1-0{,}8)\cdot 0{,}8=0{,}16$$

— вероятность того, что при первом выстреле был промах, при втором выстреле — попадание.

$$\mathrm{P}(x=3)=(1-p)^2=(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04,$$

так как всего три снаряда и стрельбу прекращают независимо от того, будет ли при третьем выстреле попадание или промах. Последнюю вероятность можно было вычислить и как разность

$$1-\mathrm{P}(x=1)-\mathrm{P}(x=2)=1-0{,}8-0{,}16=0{,}04.$$

Таблица распределения будет иметь вид

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(x=x_k)$ | 0,8 | 0,16 | 0,04 |

Замечание. Данную задачу можно сформулировать в терминах «схемы урн», следовательно, она может иметь значение и при рассмотрении других вопросов. Это замечание относится и к некоторым другим задачам.

## § 8. Относительная частота и вероятность относительной частоты при повторных испытаниях

Пусть производится серия из $n$ испытаний. В каждом из испытаний может осуществляться событие $A$ с вероятностью $p$. Пусть $x$ — случайная величина, означающая относительную частоту появления события $A$ в серии из $n$ испытаний. Требуется определить закон распределения случайной величины $x$ в серии из $n$ испытаний.

Очевидно, что случайная величина $x$ при $n$ испытаниях примет одно из следующих значений: $0/n$, $1/n$, $2/n$, ..., $n/n$.

Теорема 1. *Вероятность* $\mathrm{P}(x=m/n)$ *того, что переменная величина* $x$ *примет значение* $m/n$, *т. е. что при* $n$ *испытаниях событие* $A$ *появится* $m$ *раз, а событие* $\overline{A}$ (*не появится событие* $A$) $n-m$ *раз, равняется* $C_n^m p^m q^{n-m}$, *где* $C_n^m$ — *число сочетаний из* $n$ *эле-*

*ментов по* $m$; $p$*—вероятность появления события* $A$, $p=\mathrm{P}(A)$; $q$*—вероятность непоявления события* $A$, *т. е.* $q=1-p=\mathrm{P}(\bar{A})$.

Доказательство. Событие $A$ появится $m$ раз при $n$ испытаниях, например, если чередование событий $A$ и $\bar{A}$ будет таким:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m},$$

т. е. в первых $m$ испытаниях появляется событие $A$, а в последующих $n-m$ испытаниях событие $A$ не появляется (появляется событие $\bar{A}$). Так как

$$\mathrm{P}(A)=p,\ \mathrm{P}(\bar{A})=1-p=q,$$

то по теореме умножения вероятность такого чередования событий $A$ и $\bar{A}$ будет

$$p^m q^{n-m}.$$

Но событие $A$ может появиться $m$ раз при $n$ испытаниях и при другой последовательности чередования событий $\bar{A}$ и $A$, например, при таком чередовании: $\underbrace{AA\ldots A}_{m-1}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m}\underbrace{\bar{A}}_{1}A$. Но обязательно событие $A$ должно произойти $m$ раз, а событие $\bar{A}$ $n-m$ раз. Вероятность появления такого чередования событий $A$ и $\bar{A}$ будет

$$p^{m-1}q^{n-m}p=p^m q^{n-m}.$$

Сколько же различных чередований событий $A$ и $\bar{A}$ может быть при $n$ испытаниях, в которых событие $A$ появится $m$ раз? Очевидно, что оно равно числу сочетаний из $n$ элементов по $m$:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}.$$

Таким образом, по теореме сложения получаем

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)=\underbrace{p^m q^{n-m}+p^m q^{n-m}+\ldots+p^m q^{n-m}}_{C_n^m},$$

или

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Теорема доказана.

Доказав теорему, мы тем самым определили закон распределения случайной величины $x$, который мы выразим и в виде таблицы

| $x$ | $\frac{0}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{2}{n}$ | ... | $\frac{m}{n}$ | ... | ... | $\frac{n}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathsf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)$ | $1\cdot q^n$ | $C_n^1 pq^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | ... | ... | $1\cdot p^n$ |

Полученный закон распределения называется *биномиальным законом*, потому что вероятности $\mathsf{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)$ равняются соответствующим членам разложения выражения $(q+p)^n$ по формуле бинома:

$$(q+p)^m=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

Как и следовало ожидать, сумма вероятностей всех возможных значений переменной величины равна 1, так как $(p+q)^n=1^n=1$.

Замечание. При исследовании многих вопросов бывает нужно определить вероятность того, что событие $A$ осуществится «хотя бы один раз», т. е. относительная частота этого события $x\geqslant\frac{1}{n}$. Очевидно, что эта вероятность $\mathsf{P}\left(x\geqslant\frac{1}{n}\right)$ определится из равенства

$$\mathsf{P}\left(x\geqslant\frac{1}{n}\right)=1-\mathsf{P}\left(x=\frac{0}{n}\right)=1-q^n. \tag{3}$$

Из таблицы распределения также следует, что вероятность $\mathsf{P}\left(x\geqslant\frac{k}{n}\right)$ того, что событие произойдет не менее чем $k$ раз, определится по формуле

$$\mathsf{P}\left(x\geqslant\frac{k}{n}\right)=\sum_{m=k}^{n} C_m^n p^m q^{n-m}, \tag{4}$$

или

$$\mathsf{P}\left(x\geqslant\frac{k}{n}\right)=1-\sum_{m=0}^{k-1} C_m^n p^m q^{n-m}.$$

Пример 1. Изобразить графически биномиальный закон распределения случайной величины $x$ при $n=8$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$.

Решение. Определим все значения вероятностей, входящие в таблицу:

$$\mathsf{P}(x=0)=C_8^0 q^8=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256},$$

$$\mathsf{P}\left(x=\frac{1}{8}\right)=C_8^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{256}=\frac{1}{32},$$

$$\mathsf{P}\left(x=\frac{2}{8}\right)=C_8^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{64},$$

$$\mathsf{P}\left(x=\frac{3}{8}\right)=C_8^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32},$$

$$P\left(x=\frac{4}{8}\right)=C_8^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{35}{128},$$

$$P\left(x=\frac{5}{8}\right)=C_8^5\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32},$$

$$P\left(x=\frac{6}{8}\right)=C_8^6\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{64},$$

$$P\left(x=\frac{7}{8}\right)=C_8^7\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{32},$$

$$P\left(x=\frac{8}{8}\right)=C_8^8\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}.$$

Построим многоугольник распределения (рис. 410).

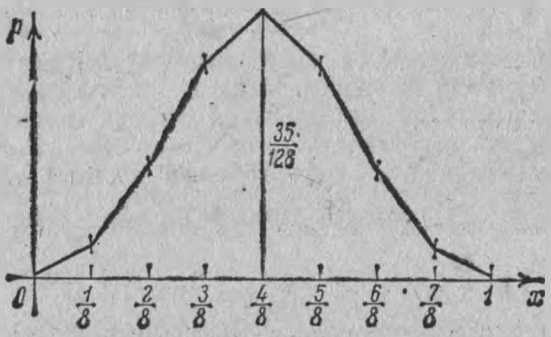



Рис. 410.

Пример 2. Какова вероятность того, что событие $A$ произойдет два раза а) при 2 испытаниях; б) при 3 испытаниях; в) при 10 испытаниях, если вероятность появления события при каждом испытании равняется 0,4?

Решение. а) Здесь $n=2$, $p=0,4$, $q=0,6$:

$$P\left(x=\frac{2}{2}\right)=C_2^2p^2q^0=\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot0,4^2=0,16;$$

б) здесь $n=3$, $p=0,4$, $q=0,6$:

$$P\left(x=\frac{2}{3}\right)=C_3^2p^2q^1=\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot0,4^2\cdot0,6=0,288;$$

в) здесь $n=10$, $p=0,4$, $q=0,6$:

$$P\left(x=\frac{2}{10}\right)=C_{10}^2p^2q^8=\frac{10\cdot9}{1\cdot2}\cdot0,4^2\cdot0,6^8=0,121.$$

Пример 3. По цели производится 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Для поражения цели достаточно трех попаданий. Определить вероятность поражения цели.

Решение. Здесь $n=5$, $p=0,2$, $q=0,8$. Очевидно, что вероятность поражения следует вычислять по формуле

$$p_{\text{пор}}=P\left(x=\frac{3}{5}\right)+P\left(x=\frac{4}{5}\right)+P\left(x=\frac{5}{5}\right)$$

или по формуле

$$p_{\text{пор}} = 1 - \left[ P\left(x = \frac{0}{5}\right) + P\left(x = \frac{1}{5}\right) + P\left(x = \frac{2}{5}\right) \right].$$

По первой формуле имеем

$$p_{\text{пор}} = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 =$$
$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}05792 \approx 0{,}06.$$

Пример 4. Производится четыре независимых испытания. Вероятность появления события $A$ при каждом испытании 0,5. Определить вероятность того, что событие $A$ появится не менее двух раз.

Решение. Здесь $n = 4$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$:

$$P\left(x \geqslant \frac{2}{4}\right) = P\left(x = \frac{2}{4}\right) + P\left(x = \frac{3}{4}\right) + P\left(x = \frac{4}{4}\right),$$

или

$$P\left(x \geqslant \frac{2}{4}\right) = 1 - \left[ P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right) \right].$$

Вычислим вероятность

$$P\left(x < \frac{2}{4}\right) = P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right) = q^4 + 4q^3 p^1 = 0{,}5^4 + 4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}3125.$$

Следовательно, по второй из формул получаем

$$P\left(x \geqslant \frac{2}{4}\right) = 1 - [0{,}5^4 + 4 \cdot 0{,}5^4] = 0{,}6875 \approx 0{,}69.$$

Пример 5. Вероятность брака в данной партии деталей $p = 0{,}1$. Какова вероятность того, что в партии из трех деталей будет $m = 0, 1, 2, 3$ бракованных деталей?

Решение.

$$P\left(x = \frac{0}{3}\right) = C_3^0 q^3 = 1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}729,$$

$$P\left(x = \frac{1}{3}\right) = C_3^1 p q^2 = \frac{3}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243,$$

$$P\left(x = \frac{2}{3}\right) = C_3^2 p^2 q = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027,$$

$$P\left(x = \frac{3}{3}\right) = C_3^3 p^3 = 1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

## § 9. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть имеем дискретную случайную величину $x$ с соответствующим законом распределения

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x = x_k)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ | ... | $p_n$ |

Определение 1. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины $x$ (будем его обозначать $M[x]$ или $m_x$) называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n,$$

или коротко

$$M[x] = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k. \tag{1}$$

При этом, как ранее указывалось, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Если значения случайной величины образуют бесконечную последовательность значений, то

$$m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k. \tag{1'}$$

Будем рассматривать только такие случайные величины, для которых этот ряд сходится.

Установим связь математического ожидания случайной величины со средним арифметическим значением случайной величины при большом числе испытаний, а именно покажем, что *при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений близко к ее математическому ожиданию*, или в терминах, установленных в § 1, можно сказать, что *среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при неограниченном возрастании числа испытаний стремится к ее математическому ожиданию*.

Пусть производится $N$ независимых опытов. Предположим, что

значение $x_1$ появилось $n_1$ раз,
значение $x_2$ появилось $n_2$ раз,
. . . . . .
значение $x_v$ появилось $n_v$ раз.

Случайная величина $x$ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_v$.

Вычислим среднее арифметическое полученных значений величины $x$ (будем его обозначать через $\overline{M}[x]$ или $\overline{m}_x$):

$$\overline{m}_x = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_vn_v}{N} = x_1\frac{n_1}{N} + x_2\frac{n_2}{N} + \ldots + x_v\frac{n_v}{N}. \tag{2}$$

Но так как при большом числе испытаний $N$ относительная частота $\frac{n_k}{N}$ стремится к вероятности появления значения $x_k$, то

$$\sum_{k=1}^{v} x_k\frac{n_k}{N} \approx \sum_{k=1}^{v} x_kp_k.$$

При довольно естественных предположениях получается

$$\overline{\mathbf{M}}[x] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{M}[x]. \qquad (3)$$

Замечание 1. Если бы мы рассмотрели схему урн с $N$ шарами, где $n_1$ шаров с числовой отметкой $x_1$, $n_2$ шаров с числом $x_2$ и т. д., то «ожидаемое число» при вынимании одного шара будет выражаться формулой (2), т. е. равно $\overline{m}_x$.

Пример 1. Определить математическое ожидание случайной величины $x$ числа попаданий при трех выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле $p=0{,}4$.

Решение. Случайная величина $x$ может принять значения

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=2, \quad x_4=3.$$

Составим таблицу распределения данной случайной величины.

Вероятность этих значений находим по теореме о повторных испытаниях ($n=3$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$):

$$\mathbf{P}(x=0)=C_3^0 \cdot 0{,}6^3=0{,}216,$$
$$\mathbf{P}(x=1)=C_3^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2=0{,}432,$$
$$\mathbf{P}(x=2)=C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6=0{,}288,$$
$$\mathbf{P}(x=3)=C_3^3 \cdot 0{,}4^3=0{,}064.$$

Таблица распределения случайной величины будет

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(x=x_k)$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

Математическое ожидание вычисляем по формуле (1):

$$m_x=0 \cdot 0{,}216+1 \cdot 0{,}432+2 \cdot 0{,}288+3 \cdot 0{,}064=1{,}2 \text{ попаданий.}$$

Пример 2. Производится один выстрел по объекту. Вероятность попадания равна $p$. Определить математическое ожидание случайной величины $x$ числа попаданий.

Составляем таблицу распределения случайной величины

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_k$ | $1-p$ | $p$ |

Следовательно, $m_x=0 \cdot (1-p)+1 \cdot p=p$.

Замечание 2. В дальнейшем будет установлено, что математическое ожидание $\mathbf{M}[x]$ числа появления события $A$ при $n$ независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность $p$ появления события $A$ при каждом испытании:

$$\mathbf{M}[x]=np. \qquad (4)$$

Если в формуле (4) $n$ — число выстрелов, $p$ — вероятность попадания, то решение задачи примера 1 будет следующее:

$$\mathbf{M}[x]=np=3 \cdot 0{,}4=1{,}2 \text{ попаданий.}$$

Если в формуле (4) известны $M[x]$ и $p$, то находится $n$ — число испытаний, дающих заданное математическое ожидание числа наступления события:

$$n = \frac{M[x]}{p}.$$

Пример 3. Вероятность попадания при одном выстреле $p = 0{,}2$. Определить расход снарядов, обеспечивающих математическое ожидание числа попаданий, равное 5:

$$n = \frac{5}{0{,}2} = 25 \text{ снарядов.}$$

(Отметим еще раз, что подобные задачи имеют место в различных исследованиях. Там слово «попадание» заменяется словами «появление события», слово «выстрел» — словом «испытание».)

Пример 4. Определить математическое ожидание случайной величины $x$, со следующей таблицей распределения:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | ... | $k$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p$ | $(1-p)\,p$ | $(1-p)^2\,p$ | ... | $(1-p)^{k-1}\,p$ | ... |

Смотри пример 2 § 7.

Решение: По формуле (1) имеем (обозначая $1-p=q$)

$$m_x = 1\cdot p + 2qp + 3q^2p + \ldots + kq^{k-1}p + \ldots =$$
$$= p\,(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots) = p\,(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k + \ldots)' =$$
$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\cdot\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Итак,

$$m_x = \frac{1}{p}.$$

Заметим, что

$$m_x \to 1 \quad \text{при } p \to 1,$$
$$m_x \to \infty \quad \text{при } p \to 0.$$

Эти соотношения можно объяснить, исходя из смысла задачи. Действительно, если вероятность появления события $A$ при каждом испытании близка к 1 ($p \approx 1$), то можно ожидать, что событие $A$ произойдет при одном (первом) испытании ($m_x \approx 1$). Если же вероятность $p$ мала ($p \approx 0$), то можно ожидать, что для того, чтобы произошло событие $A$, потребуется произвести очень много испытаний ($m_x \approx \infty$).

Математическое ожидание случайной величины $x$ называется *центром распределения вероятностей случайной величины $x$.*

Замечание 3. Название «центр распределения вероятностей» введен по аналогии с названием «центр масс». Если на оси $Ox$ в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ помещены массы $p_1, p_2, \ldots$

$\ldots, p_n$, то из аналитической геометрии известно, что абсцисса центра этих масс определяется по формуле

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

Если $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, то

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (5)$$

Формула (5) по виду совпадает с формулой (1) для математического ожидания.

Итак, установлено, что центр масс и математическое ожидание вычисляются по аналогичным формулам. Отсюда и название «центр распределения вероятностей».

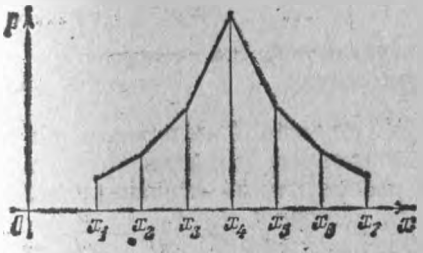



Рис. 411.

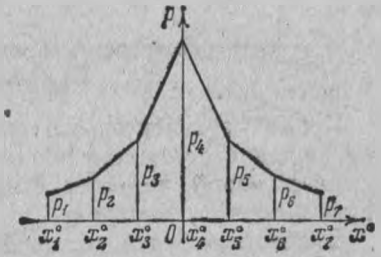



Рис. 412.

Пусть дана случайная величина $x$ с соответствующим законом распределения (рис. 411); пусть ее математическое ожидание $m_x$. Рассмотрим далее разность случайной величины $x$ и ее математического ожидания $x - m_x$.

Эту случайную величину будем называть *центрированной случайной величиной* или *отклонением* и обозначать $x^0$.

Очевидно, что закон распределения этой случайной величины $x^0$ будет

| $x^0$ | $x_1^0 = x_1 - m_x$ | $x_2^0 = x_2 - m_x$ | $\ldots$ | $x_k^0 = x_k - m_x$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | $\ldots$ | $p_k$ |

(рис. 412).

Найдем математическое ожидание центрированной случайной величины:

$$\mathsf{M}[x-m_x]=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)\,p_k=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k-\sum_{k=1}^{n}m_xp_k=$$

$$=m_x-m_x\sum_{k=1}^{n}p_k=m_x-m_x\cdot 1=0.$$

Итак, *математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.*

Замечание 4. Иногда бывает целесообразно неслучайную (достоверную) постоянную величину $c$ рассматривать как случайную величину, которая с вероятностью 1 принимает значение $c$, а другие значения принимает с вероятностью 0.

Тогда имеет смысл говорить о математическом ожидании постоянной:

$$\mathsf{M}[c]=c\cdot 1=c, \tag{6}$$

т. е. *математическое ожидание постоянной равно самой постоянной.*

## § 10. Дисперсия. Среднеквадратичное отклонение. Понятие о моментах

Кроме математического ожидания случайной величины $x$, которое определяет положение центра распределения вероятностей, количественной характеристикой распределения случайной величины является *дисперсия* случайной величины $x$.

Дисперсию будем обозначать $\mathsf{D}[x]$ или $\sigma_x^2$.

Слово «дисперсия» означает рассеивание. Дисперсия является числовой характеристикой рассеивания, разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Определение 1. *Дисперсией* случайной величины $x$ называется математическое ожидание квадрата разности случайной величины $x$ и ее математического ожидания (т. е. математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины):

$$\mathsf{D}[x]=\mathsf{M}[(x-m_x)^2], \tag{1}$$

или

$$\mathsf{D}[x]=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)^2\,p_k. \tag{2}$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Иногда, для характеристики рассеивания, удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такая величина—*среднеквадратичное отклонение.*

Определение 2. *Среднеквадратичным отклонением* случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma[x]=\sqrt{\mathrm{D}[x]},$$

или в развернутом виде

$$\sigma[x]=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)^2 p_k}. \tag{3}$$

Среднеквадратичное отклонение обозначают также $\sigma_x$.

Замечание 1. При вычислении дисперсии формулу (1) бывает удобно преобразовать так:

$$\mathrm{D}[x]=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)^2 p_k=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k-2\sum_{k=1}^{n}x_k m_x p_k+\sum_{k=1}^{n}m_x^2 p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k-2m_x\sum_{k=1}^{n}x_k p_k+m_x^2\sum_{k=1}^{n}p_k=$$

$$=\mathrm{M}[x^2]-2m_x\cdot m_x+m_x^2\cdot 1=\mathrm{M}[x^2]-m_x^2.$$

Итак,

$$\mathrm{D}[x]=\mathrm{M}[x^2]-m_x^2, \tag{4}$$

т. е. дисперсия равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания случайной величины.

Пример 1. Производится один выстрел по объекту. Вероятность попадания $p$. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Решение. Строим таблицу значений числа попаданий

| $x$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $p_k$ | $p$ | $q$ |

$q=1-p$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{M}[x]&=1\cdot p+0\cdot q=p,\\ \mathrm{D}[x]&=(1-p)^2 p+(0-p)^2 q=q^2p+p^2q=pq,\\ \sigma[x]&=\sqrt{pq}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Чтобы представить смысл понятия дисперсии и среднеквадратичного отклонения как характеристики рассеивания случайной величины, рассмотрим примеры.

Пример 2. Случайная величина $x$ задана следующим законом распределения (см. таблицу и рис. 413):

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,3 | 0,4 | 0,3 |

Определить: 1) математическое ожидание, 2) дисперсию, 3) среднеквадратичное отклонение.

Решение

1. $M[x]=2\cdot0,3+3\cdot0,4+4\cdot0,3=3$,
2. $D[x]=(2-3)^2\cdot0,3+(3-3)^2\cdot0,4+(4-3)^2\cdot0,3=0,6$,
3. $\sigma[x]=\sqrt{D[x]}=\sqrt{0,6}=0,77$.

Пример 3. Случайная величина $x$ задана следующим законом распределения (см. таблицу и рис. 414):

| $x$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,3 | 0,4 | 0,3 |

Определить: 1) математическое ожидание, 2) дисперсию, 3) среднеквадратичное отклонение.

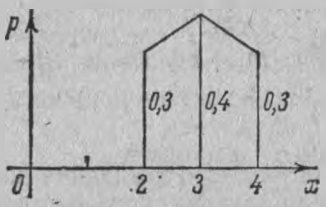



Рис. 413.

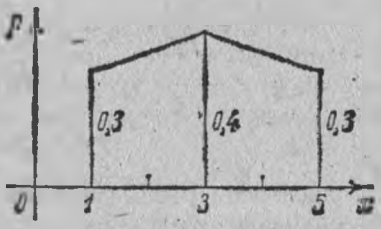



Рис. 414.

Решение.

1. $M[x]=1\cdot0,3+3\cdot0,4+5\cdot0,3=3$,
2. $D[x]=(1-3)^2\cdot0,3+(3-3)^2\cdot0,4+(5-3)^2\cdot0,3=2,4$,
3. $\sigma[x]=\sqrt{2,4}=1,55$.

Рассеивание, разброс случайной величины в первом примере меньше рассеивания случайной величины во втором примере (см. рис. 414 и 415). Дисперсии этих величин соответственно равны 0,6 и 2,4.

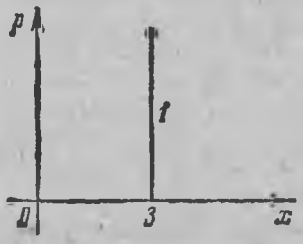



Рис. 415.

Пример 4. Случайная величина $x$ задана следующим законом распределения (см. таблицу и рис. 415):

| $x$ | 3 |
|---|---|
| $p$ | 1 |

Определить: 1) математическое ожидание, 2) дисперсию, 3) среднеквадратичное отклонение.

Решение.

1. $M[x]=3\cdot1=3$,
2. $D[x]=(3-3)^2\cdot1=0$,
3. $\sigma[x]=0$.

Рассеивание значений этой случайной величины отсутствует.

Замечание 2. Если рассматривать постоянное число как случайную величину, которая принимает значение $c$ с вероятностью 1, то легко показать, что $\mathsf{D}[c]=0$.

Доказательство. Было показано, что $\mathsf{M}[c]=c$ (см. (5) § 9). По формуле (1) получаем $\mathsf{D}[c]=\mathsf{M}[(c-c)^2]=\mathsf{M}[0]=0$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. По аналогии с механической терминологией математическое ожидание величин $x-m_x$, $(x-m_x)^2$ называют *центральным моментом первого* и *второго порядка* случайной величины $x$. Рассматривают и центральный момент третьего порядка

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)^3 p_k.$$

Если случайная величина распределена симметрично относительно центра распределения вероятностей (рис. 411), то очевидно, что ее центральный момент третьего порядка будет равен нулю. Если центральный момент третьего порядка отличен от нуля, то случайная величина не может быть распределена симметрично.

## § 11. Функции от случайных величин

Пусть случайная величина $x$ задана законом распределения в виде таблицы

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ | ... | $p_n$ |

Рассмотрим функцию от случайной величины $x$:

$$y=f(x).$$

Значения функции $y_k=f(x_k)$ будут значениями случайной величины $y$.

Если все значения $y_k=f(x_k)$ различны, то закон распределения случайной величины $y$ задается таблицей

| $y=f(y)$ | $y_1=f(x_1)$ | $y_2=f(x_2)$ | ... | $y_k=f(x_k)$ | ... | $y_n=f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_k$ | ... | $p_n$ |

Если среди значений $y_k=f(x_k)$ есть равные, то соответствующие столбцы следует объединить в один, сложив соответствующие вероятности.

Математическое ожидание функции $y=f(x)$ случайной величины $x$ будет определяться по формуле, аналогичной формуле (1) § 10:

$$M[f(x)]=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,p_k. \qquad (1)$$

Аналогичным образом определяется и дисперсия функции:

$$D[f(x)]=M[(f(x)-M[f(x)])^2]=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-m_{f(x)})^2\,p_k.$$

Пример. Случайная величина $\varphi$ задана следующим законом распределения:

| $\varphi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 |

Рассматривается функция этой случайной величины

$$y=A\sin\varphi.$$

Составим таблицу распределения для случайной величины $y$:

| $y$ | $-A$ | $-\frac{A\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{A\sqrt{2}}{2}$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 |

Найдем математическое ожидание функции:

$$M[A\sin\varphi]=-A\cdot 0{,}1-\frac{A\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+\frac{A\sqrt{2}}{2}\,0{,}3+A\,0{,}3=$$

$$=A\left(0{,}2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0{,}2\right)=A\,(0{,}2+0{,}14)=0{,}34A.$$

Задачи подобного типа могут возникнуть при рассмотрении колебательных процессов.

## § 12. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Для понимания данного вопроса рассмотрим пример.

Пример. Измеряется величина износа цилиндра после некоторого периода эксплуатации. Эта величина определяется значением увеличения диаметра цилиндра. Обозначим ее $x$. Из существа задачи следует, что величина $x$ может принимать любое значение из некоторого интервала $(a, b)$ возможных ее значений.

Такую величину называют *непрерывной случайной величиной.*

Итак, рассмотрим непрерывную случайную величину $\bar{x}$, заданную на некотором интервале $(a, b)$, который может быть и бесконечным интервалом $(-\infty, +\infty)$. Разделим этот интервал произвольными точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ на малые интервалы длины $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$.

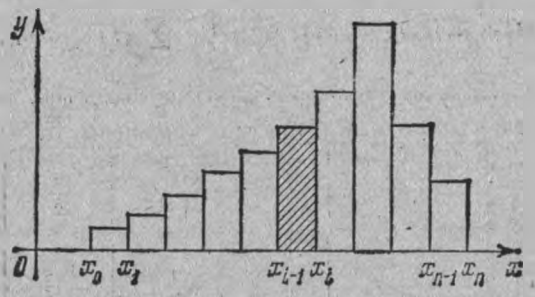



Рис. 416.

Допустим, что нам известна вероятность того, что случайная величина $\bar{x}$ попала в интервал $(x_{i-1}, x_i)$. Эту вероятность мы обозначим так: $\mathrm{P}(x_{i-1} < \bar{x} < x_i)$ и изобразим в виде площади прямоугольника с основанием $\Delta x_{i-1}$ (рис. 416).

Для каждого интервала $(x_{i-1}, x_i)$ определяется вероятность попадания случайной величины $\bar{x}$ в этот интервал и, следовательно, может быть построен соответствующий прямоугольник. Таким образом, получаем ступенчатую ломаную.

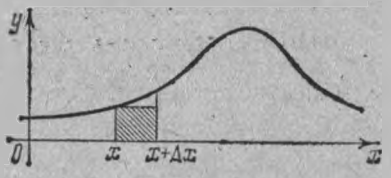



Рис. 417.

Определение 1. Если существует такая функция $y = f(x)$, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{P}(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x), \qquad (1)$$

то эта функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей случайной величины* $\bar{x}$ или законом распределения. (Также говорят «плотность распределения» или «плотность вероятности».) Через $\bar{x}$ будем обозначать случайную непрерывную величину, через $x$ или $x_k$ значения этой случайной величины. Но иногда, если это не мешает пониманию, и в первом случае черту будем опускать. Кривая $y = f(x)$ называется *кривой распределения вероятностей* или *кривой распределения* (рис. 417). Пользуясь определением предела, из равенства (1) с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta x$ следует приближенное равенство

$$\mathrm{P}(x < \bar{x} < x + \Delta x) \cong f(x)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Докажем далее следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ есть плотность распределения случайной величины $\bar{x}$. Тогда вероятность того, что значение случайной величины $\bar{x}$ попадет в некоторый интервал $(\alpha, \beta)$, равна определенному интегралу от функции $f(x)$ в пределах от $\alpha$ до $\beta$, т. е. справедливо равенство*

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Разобьем интервал $(\alpha, \beta)$ точками $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = \beta$ на $n$ малых интервалов (рис. 418). К каждому

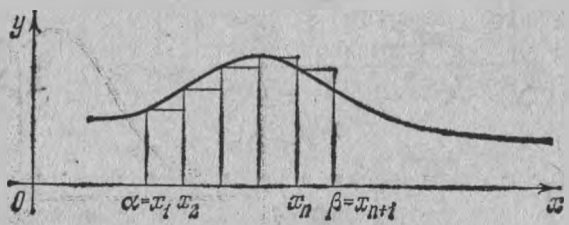



Рис. 418.

из этих интервалов применим формулу (2):

$$\mathbf{P}(x_1 < \bar{x} < x_2) \cong f(x_1)\,\Delta x_1,$$
$$\mathbf{P}(x_2 < \bar{x} < x_3) \cong f(x_2)\,\Delta x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{P}(x_n < \bar{x} < x_{n+1}) \cong f(x_n)\,\Delta x_n.$$

Складываем левые и правые части равенства. Очевидно, что слева получим $\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta)$. Итак,

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Получили приближенное равенство. Переходя к пределу в правой части при $\max \Delta x_i \to 0$, на основании свойств интегральных сумм получим точное равенство

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

(Мы предполагаем, что $f(x)$ такова, что справа стоящий предел существует.) Но справа стоящий предел есть определенный инте-

грал от функции $f(x)$ в пределах от $\alpha$ до $\beta$. Итак,

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Таким образом, зная плотность распределения случайной величины, мы можем определить вероятность того, что значение случайной величины попало в данный интервал. Геометрически эта вероятность равняется площади соответствующей криволинейной трапеции (рис. 419).

Замечание. В случае непрерывной случайной величины вероятность события, состоящего в том, что $\bar{x} = x_0$, будет равна нулю.

Действительно, положив в равенстве (2) $x = x_0$, получим

$$\mathrm{P}(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)\,\Delta x,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{P}(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) = 0,$$

или

$$\mathrm{P}(\bar{x} = x_0) = 0.$$

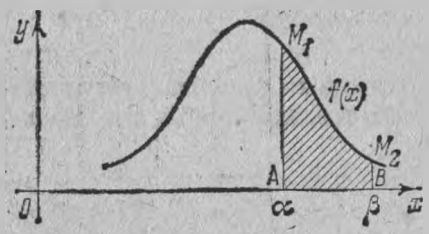


Рис. 419.

(См. также замечание 1 на с. 437.) Поэтому в равенстве (3) и предыдущих мы можем писать не только $\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta)$, но и $\mathrm{P}(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta)$, так как

$$\mathrm{P}(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta) = \mathrm{P}(\bar{x} = \alpha) + \mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) + \mathrm{P}(\bar{x} = \beta) = \mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta).$$

Если все возможные значения случайной величины $\bar{x}$ находятся в интервале $(a, b)$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1, \tag{4}$$

так как достоверно, что значение случайной величины попадет в интервал $(a, b)$.

Если интервал возможных значений $(-\infty, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{5}$$

Заметим, что если из существа рассматриваемой задачи следует, что функция $f(x)$ определена на конечном интервале $(a, b)$, то можно считать, что она определена на всем бесконечном

интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$f(x)=0$$

вне интервала $(a, b)$. В этом случае выполняется и равенство (4), и равенство (5). Плотность распределения случайной величины полностью определяет случайную величину.

## § 13. Функция распределения, или интегральный закон распределения. Закон равномерного распределения вероятностей

Определение 1. Пусть $f(x)$ есть плотность распределения некоторой случайной величины $\bar{x}$ $(-\infty < x < +\infty)$, тогда функция

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (1)$$

называется *функцией распределения вероятностей*, или *интегральным законом распределения*.

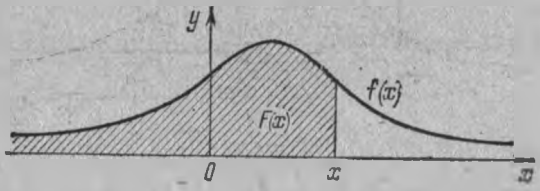



Рис. 420.

Для дискретной случайной величины функция распределения равна сумме вероятностей тех ее значений $x_k$, которые меньше $x$:

$$F(x)=\sum_{x_k<x} p_k.$$

На основании равенства (3) § 12 следует, что функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина $\bar{x}$ примет значение, меньшее $x$ (рис. 420):

$$F(x)=\mathrm{P}(-\infty < \bar{x} < x). \qquad (2)$$

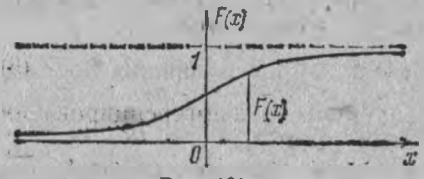



Рис. 421.

Из рис. 420 следует, что при данном значении $x$ значение функции распределения численно равняется площади ограниченной кривой распределения, лежащей левее ординаты, проведенной через точку $x$.

График функции $F(x)$ называется *интегральной кривой распределения* (рис. 421).

Переходя к пределу при $x \to +\infty$ в равенстве (1), с учетом (5) § 12 получаем

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Докажем далее следующую теорему.

Теорема 1. *Вероятность попадания случайной величины* $\bar{x}$ *в заданный интервал* $(\alpha, \beta)$ *равняется приращению функции распределения на этом интервале*:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Доказательство. Выразим вероятность попадания случайной величины $\bar{x}$ в заданный интервал $(\alpha, \beta)$. Формулу (3) § 12

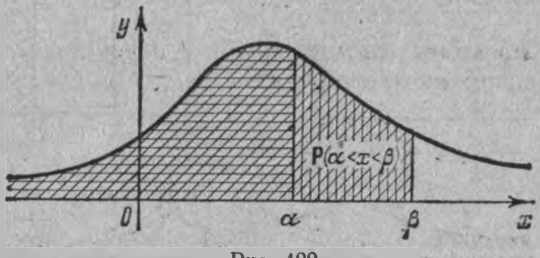



Рис. 422.

перепишем так:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(рис. 422). Пользуясь равенством (1), можем написать

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

что и требовалось доказать (рис. 423).

Заметим, что плотность распределения $f(x)$ и соответствующая функция распределения $F(x)$ связаны соотношением

$$F'(x) = f(x). \tag{3}$$

Это следует из равенства (1) и теоремы о дифференцировании определенного интеграла по верхнему пределу.

Рассмотрим далее случайную величину *с законом равномерного распределения вероятностей*. Закон распределения или плотность распределения $f(x)$ такой случайной величины задается следующим образом: $f(x) = 0$ при $x < a$, $f(x) = c$ при $a < x < b$, $f(x) = 0$ при $b < x$. На интервале $(a, b)$ плотность $f(x)$ имеет постоянное значение $c$ (рис. 424), а вне этого интервала равна нулю. Такое распределение также называют *законом равномерной плотности*.

Из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ находим значение $c$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} c\,dx = c(b-a) = 1,$$

следовательно,

$$c = \frac{1}{b-a}, \quad b-a = \frac{1}{c}.$$

Из последнего равенства следует, что интервал $(a, b)$, на котором имеет место равномерное распределение, обязательно конечен.

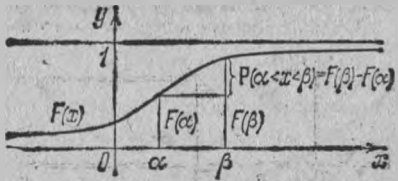



Рис. 423.

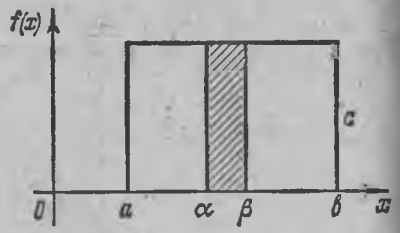



Рис. 424.

Определим вероятность того, что случайная величина $\bar{x}$ примет значение, заключенное в интервале $(\alpha, \beta)$:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Итак, искомая вероятность

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

(это соотношение аналогично определению геометрической вероятности для двумерного случая, приведенному на с. 441).

Определим интегральный закон распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Если $x < a$, то $f(x) = 0$ и, следовательно,

$$F(x) = 0.$$

Если $a < x < b$, то $f(x) = \frac{1}{b-a}$ и, следовательно,

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Если $b < x$, то

$$f(x) = 0, \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx = 0,$$

следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

(рис. 425).

Приведем несколько конкретных случайных величин с законом равномерной плотности.

Пример 1. При измерении некоторой величины производится округление до ближайшего деления шкалы. Погрешность при округлении есть случайная величина с равномерным распределением вероятностей. Если $2l$ — число некоторых единиц в одном делении шкалы, то плотность распределения этой случайной величины будет

$f(x) = 0$ при $x < -l$,
$f(x) = 1/2l$ при $-l < x < l$,
$f(x) = 0$ при $l < x$.

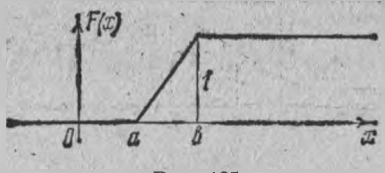



Рис. 425.

Здесь $a = -l$, $b = l$, $c = 1/2l$.

Пример 2. Вращающееся симметричное колесо останавливается вследствие трения. Угол $\theta$, образованный некоторым фиксированным подвижным радиусом колеса с неподвижным радиусом после остановки колеса, есть случайная величина с плотностью распределения $f(\theta) = 0$ при $\theta < 0$, $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ при $0 < \theta < 2\pi$, $f(\theta) = 0$ при $2\pi < \theta$.

## § 14. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Аналогично тому, как это было сделано ранее для дискретной случайной величины, рассмотрим числовые характеристики непрерывной случайной величины $x$ с плотностью распределения $f(x)$.

Определение 1. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины $x$ с плотностью распределения $f(x)$ называется выражение

$$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если случайная величина $x$ может принимать значения только на конечном отрезке $[a, b]$, то математическое ожидание $M[x]$ выразится формулой

$$M[x] = \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (1')$$

Формулу (1′) можно рассматривать как обобщение формулы (1) § 9.

Действительно, разобьем отрезок $[a, b]$ на интервалы $(x_{k-1}, x_k)$. В каждом из интервалов возьмем точку $\xi_k$. Рассмотрим вспомогательную *дискретную* случайную величину $\xi$, которая может принять значения

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n.$$

Пусть вероятности соответствующих значений дискретной случайной величины будут $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$:

$p_1 = f(\xi_1)\Delta x_1$, $p_2 = f(\xi_2)\Delta x_2$, $\ldots$, $p_k = f(\xi_k)\Delta x_k$, $\ldots$, $p_n = f(\xi_n)\Delta x_n$ *).

Математическое ожидание данной дискретной величины $\xi$ будет

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k p_k,$$

или

$$M[\xi] = \xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots$$

$$\ldots + \xi_n f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$, получаем

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Выражение, стоящее справа, есть математическое ожидание *непрерывной* случайной величины $x$, которая может принимать любое значение $x$, принадлежащее отрезку $[a, b]$. Аналогичное рассуждение можно провести и для бесконечного интервала, т. е. для выражения (1). Формулы (1) и (1′) аналогичны формуле (1) § 9 для дискретной случайной величины. Математическое ожидание также будем обозначать $m_x$.

Математическое ожидание называют *центром распределения* вероятностей случайной величины $x$ (рис. 426). Если кривая распределения симметрична относительно оси $Oy$, т. е. $f(x)$ — функция четная, то очевидно, что

$$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 0.$$

В этом случае центр распределения вероятностей совпадает с началом координат (рис. 427). Рассмотрим центрированную слу-

---

*) В то же время $f(\xi_k)\Delta x_k$ есть вероятность того, что непрерывная случайная величина $x$ примет значение из интервала $(x_{k-1}, x_k)$.

чайную величину $\bar{x}-m_x$. Найдем ее математическое ожидание:

$$M[\bar{x}-m_x]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx-m_x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=$$
$$=m_x-m_x\cdot 1=0.$$

*Математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.*

Определение 2. *Дисперсией* случайной величины $\bar{x}$ называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[\bar{x}]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Формула (2) аналогична формуле (2) § 10.

Определение 3. *Среднеквадратичным отклонением* случайной величины $\bar{x}$ называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma[\bar{x}]=\sqrt{D[\bar{x}]}=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx}. \qquad (3)$$

Эта формула аналогична формуле (3) § 10. При рассмотрении конкретных примеров мы увидим, что, как и в случае дискретной

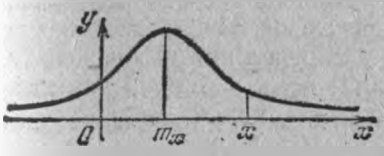



Рис. 426.

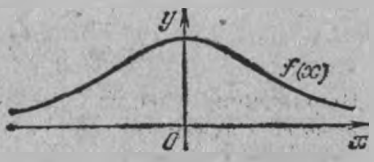



Рис. 427.

случайной величины, дисперсия и среднеквадратичное отклонение характеризуют рассеивание значений случайной величины.

Определение 4. Значение случайной величины $\bar{x}$, при котором плотность распределения имеет наибольшее значение, называется *модой* (будем ее обозначать $M_0$). Для случайной величины $\bar{x}$, кривая распределения которой изображена на рис. 426 и 427, мода совпадает с математическим ожиданием.

Определение 5. Число, которое мы обозначим $M_e$, называется *медианой*, если оно удовлетворяет равенству

$$\int_{-\infty}^{M_e}f(x)\,dx=\int_{M_e}^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2} \qquad (4)$$

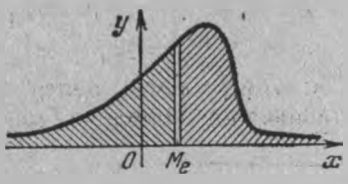



Рис. 428.

(рис. 428). Последнее равенство можно переписать так:

$$P(\bar{x} < M_e) = P(M_e < \bar{x}) = \frac{1}{2},$$

т. е. равновероятно, что случайная величина $\bar{x}$ примет значение, меньшее $M_e$ и большее $M_e$.

Заметим, что сама случайная величина $\bar{x}$ может значения $M_e$ и не принимать.

## § 15. Нормальный закон распределения. Математическое ожидание нормального распределения

Изучение различных явлений показывает, что многие случайные величины, например, такие, как погрешности при измерениях, боковое отклонение и отклонение по дальности точки попадания от некоторого центра при стрельбе, величина износа деталей во многих механизмах и т. д., имеют плотность распределения вероятности, выражающуюся формулой

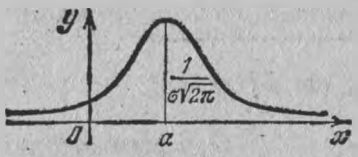


Рис. 429.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

В этом случае говорят, что случайная величина подчинена *нормальному закону распределения* (это распределение также называют *законом Гаусса*). Кривая нормального распределения изображена на рис. 429. Таблица значений функции (1) при $a = 0$, $\sigma = 1$ помещена в конце книги (см. табл. 2). Аналогичная кривая подробно исследована в § 9 гл. V т. I.

Покажем сначала, что плотность распределения (1) удовлетворяет основному соотношению (5) § 12:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Действительно, вводя обозначение

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t, \quad dx = \sqrt{2}\,\sigma\,dt,$$

можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

(см. § 5 гл. XV).

Определим математическое ожидание случайной величины с нормальным законом распределения (1). По формуле (1) § 14 имеем

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (2)$$

Сделав замену переменной

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t,$$

получаем

$$x = a + \sqrt{2}\sigma t, \quad dx = \sqrt{2}\sigma\, dt.$$

Следовательно,

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt.$$

Первый интеграл справа равен $\sqrt{\pi}$. Вычислим второй интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Итак,

$$m_x = a. \qquad (3)$$

Значение параметра $a$ в формуле (1) равно математическому ожиданию рассматриваемой случайной величины. Точка $x = a$ является центром распределения вероятностей, или центром рассеивания. При $x = a$ функция $f(x)$ имеет наибольшее значение, поэтому значение $x = a$ является *модой* случайной величины. Так как кривая (1) симметрична относительно прямой $x = a$, то

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

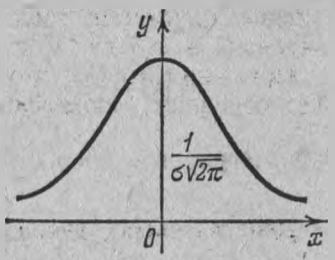


Рис. 430.

т. е. значение $x = a$ является *медианой* нормального распределения. Если в формуле (1) положим $a = 0$, то получим

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4)$$

Соответствующая кривая симметрична относительно оси $Oy$. Функция $f(x)$ есть плотность нормального распределения случайной величины с центром распределения вероятностей, совпадающим с началом координат (рис. 430). Числовые характеристики

случайных величин с законами распределения (1) и (4), определяющие характер рассеивания значений случайной величины относительно центра рассеивания, определяются формой кривой, которая не зависит от величины $a$, и поэтому совпадают. Величина $a$ определяет величину сдвига кривой (1) вправо (при $a>0$) или влево (при $a<0$). Для некоторого сокращения письма мы будем проводить многие дальнейшие рассуждения применительно к плотности распределения, определяемой формулой (4).

## § 16. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение случайной величины, подчиненной нормальному закону распределения

Пусть плотность распределения случайной величины $\bar{x}$ дается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется по формуле (2) § 14.

В нашем случае

$$m_x=a=0.$$

Имеем

$$\mathrm{D}[\bar{x}]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделаем замену переменной $\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}=t$, тогда

$$\mathrm{D}[\bar{x}]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot 2t\cdot e^{-t^2}dt.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\mathrm{D}[\bar{x}]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right].$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}te^{-t^2}=0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},$$

то окончательно получаем

$$\mathrm{D}[\bar{x}]=\sigma^2. \tag{2}$$

Среднеквадратичное отклонение в соответствии с формулой (3) § 14 будет

$$\sigma[\bar{x}]=\sqrt{\mathrm{D}[\bar{x}]}=\sigma. \tag{3}$$

Итак, дисперсия равняется параметру $\sigma^2$ в формуле плотности распределения (1). Мы уже говорили выше, что дисперсия характеризует рассеивание значений случайной величины относительно центра рассеивания. Посмотрим, как значение параметра $\sigma^2$ влияет на форму кривой распределения. На рис. 431 изображены кривые распределения для значений $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$, $\sigma = 2$. Рассматривая эти кривые, видим, что чем меньше $\sigma$, тем максимум функции $f(x)$ больше, вероятность значений, близких к центру рассеивания ($x = 0$), больше, вероятность значений, удаленных от начала, меньше. Это обстоятельство выражают словами: чем меньше дисперсия $\sigma^2$, тем меньше рассеивание значений случайной величины.

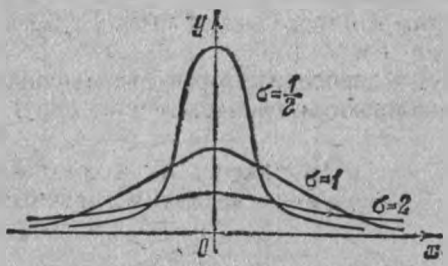


Рис. 431.

## § 17. Вероятность попадания значения случайной величины в заданный интервал. Функция Лапласа. Интегральная функция распределения для нормального закона

В соответствии с формулой (3) § 12 определим вероятность того, что значение случайной величины $\bar{x}$ с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

попадает в интервал $(\alpha, \beta)$:

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

или

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1)$$

(рис. 432). Сделаем замену переменной

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t.$$

Получаем

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \qquad (1')$$

Справа стоящий интеграл не выражается через элементарные функции. Значения этого интеграла выражаются через значения *интеграла вероятностей*

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt. \qquad (2)$$

Укажем некоторые свойства функции $\Phi(x)$, которыми мы будем пользоваться ниже.

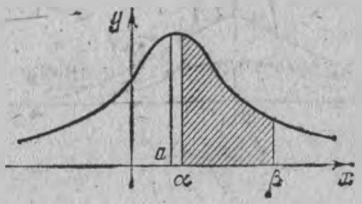



Рис. 432.

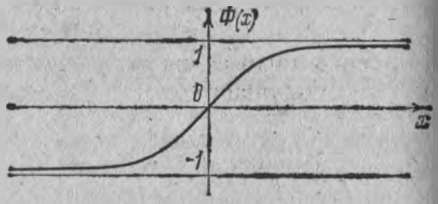



Рис. 433.

1. $\Phi(x)$ определена при всех значениях $x$.
2. $\Phi(0)=0$.
3. $\Phi(+\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$.
4. $\Phi(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0, +\infty)$.
5. $\Phi(x)$ — функция нечетная, так как

$$\Phi(-x)=-\Phi(x). \qquad (3)$$

6. График функции $\Phi(x)$ изображен на рис. 433.

Составлены подробные таблицы значений этой функции. Краткая таблица приведена в конце книги (см. табл. 1).

Перепишим равенство (1′), пользуясь теоремой о разбиении промежутка интегрирования:

$$\mathrm{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{0} e^{-t^2}\,dt+\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt+\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt\right].$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\mathrm{P}(\alpha<\bar{x}<\beta)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt\right].$$

Пользуясь функцией $\Phi(x)$ (см. (2)), окончательно выразим вероятность попадания случайной величины $\bar{x}$, подчиненной нормальному закону, в интервал $(\alpha, \beta)$:

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (4)$$

При $a = 0$ получаем

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (5)$$

Приравняв правые части равенств (1) для случая $a = 0$ и равенства (5), получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (5')$$

Часто приходится вычислять вероятность того, что значение случайной величины попадает в интервал $(a - l,\ a + l)$, симметричный

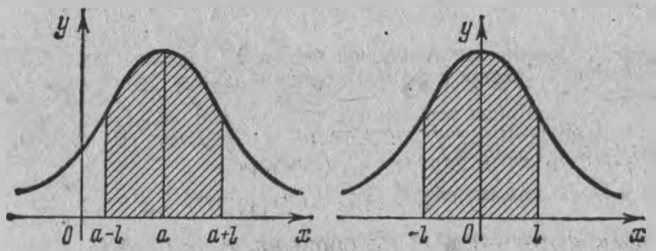



Рис. 434.

относительно точки $x = a$ (рис. 434). В этом случае формула (4) принимает вид

$$\mathrm{P}(a - l < \bar{x} < a + l) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Учитывая, что $\Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) = -\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ (см. формулу (3)), окончательно получаем

$$\mathrm{P}(a - l < \bar{x} < a + l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad (6)$$

Правая часть не зависит от положения центра рассеивания, следовательно, и при $a = 0$ получаем

$$\mathrm{P}(-l < \bar{x} < l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right). \qquad (7)$$

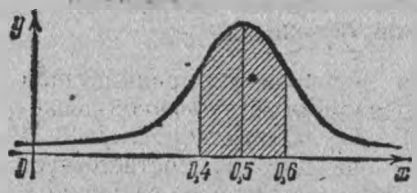



Рис. 435.

Пример 1. Случайная величина $\bar{x}$ подчинена нормальному закону распределения с центром рассеивания $a=0,5$ и дисперсией $\sigma^2=\frac{1}{8}$. Определить вероятность того, что значение случайной величины $\bar{x}$ попадет в интервал (0,4; 0,6) (рис. 435).

Решение. Здесь $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}=2$.

По формуле (4) получаем

$$P(0,4<\bar{x}<0,6)=$$

$$=\frac{1}{2}\{\Phi[2\cdot(0,6-0,5)]-\Phi[2\cdot(0,4-0,5)]\}=\frac{1}{2}\{\Phi(0,2)-\Phi(-0,2)\}.$$

Но $\Phi(-0,2)=-\Phi(0,2)$ (см. формулу (3)), поэтому можем написать

$$P(0,4<\bar{x}<0,6)=\frac{1}{2}[\Phi(0,2)+\Phi(0,2)]=\Phi(0,2).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ (см. табл. 1 в конце книги) находим

$$P(0,4<\bar{x}<0,6)=0,223.$$

Пример 2. Длина изготовляемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $M[\bar{x}]=10$, $\sigma^2=\frac{1}{200}$. Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть $10\pm0,05$.

Решение. В нашем случае $a=10$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}=10$, $\sigma=\frac{1}{10\sqrt{2}}$. Вероятность брака $p_{бр}$ в соответствии с формулой (4) выразится так:

$$p_{бр}=1-P(9,95<\bar{x}<10,05)=1-\frac{1}{2}\{\Phi[10\cdot(10,05-10)]-\Phi[10\cdot(9,95-10)]\}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\{\Phi(0,5)-\Phi(-0,5)\}=1-\Phi(0,5)=1-0,52=0,48.$$

Пример 3. Определить вероятность попадания в полосу шириной $2l=3,5$ м, если ошибки стрельбы подчиняются нормальному закону распределения с параметрами $a=0$, $\sigma=1,9$.

Решение. В нашем случае $\alpha=-1,75$, $\beta=1,75$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}=0,372$. По формуле (7) получаем

$$P(-1,75<\bar{x}<1,75)=\Phi(1,75\cdot0,372)=\Phi(0,651)=0,643.$$

Замечание. Вместо функции $\Phi(x)$ ((2)) часто пользуются *функцией Лапласа*

$$\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (8)$$

Эта функция Лапласа связана с функцией $\Phi(x)$ простым соотно-

шением. Сделав в интеграле (8) замену $\frac{t}{\sqrt{2}} = z$, получаем

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Итак,

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{9}$$

и, очевидно,

$$\overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \Phi(x). \tag{10}$$

Формула (5) с использованием функции $\overline{\Phi}(x)$ и соотношения (9) запишется так:

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \tag{11}$$

при $\sigma = 1$

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}(\beta) - \overline{\Phi}(\alpha).$$

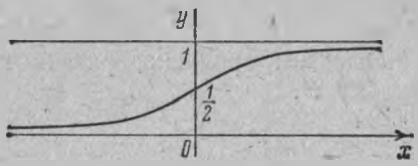


Рис. 436.

Таблица значений функции Лапласа $\overline{\Phi}(x)$ помещена в конце книги (см. табл. 3).

Определим далее *интегральную функцию* нормального закона распределения. По формуле (1) § 13 имеем:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = P(-\infty < \overline{x} < x).$$

Пользуясь формулой (4) для случая $\alpha = -\infty$, $\beta = x$, получаем

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi(-\infty)\right],$$

но $\Phi(-\infty) = -1$ (см. формулу (3)). Следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) + 1\right]. \tag{12}$$

График функции $F(x)$ при $a = 0$ изображен на рис. 436.

## § 18. Вероятное (срединное) отклонение или срединная ошибка

Во многих вопросах прикладной теории вероятностей, в частности в теории стрельбы, а также в теории ошибок, пользуются характеристикой рассеивания, которую называют *вероятным*, или *срединным отклонением*. В теории стрельбы ее называют *срединной ошибкой*.

Выразим правую часть равенства (2) через приведенную функцию Лапласа:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E}\right)\right]. \quad (6$$

В частности, вероятность попадания значения случайной величины в симметричный относительно центра рассеивания интервал $(-l, l)$ в соответствии с формулой (3) выразится так:

$$P(-l < \bar{x} < l) = \hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \quad (7$$

и

$$P(0 < \bar{x} < l) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right). \quad (8$$

Заметим, что вероятность попадания случайной величины $\bar{x}$ в интервал $(\alpha, \beta)$, если математическое ожидание $a \neq 0$ выразится через срединную ошибку $E$ так (см. формулу (4) § 17):

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta - a}{E}\right) - \Phi\left(\rho\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]. \quad (9$$

Через приведенную функцию Лапласа последнее равенство выразится так:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - a}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]. \quad (10)$$

## § 20. Правило трех сигм. Шкала вероятностей распределения ошибок

При проведении практических вычислений за единицу измерения отклонения случайной величины, подчиненной нормальному закону от ее центра рассеивания (математического ожидания), принимают среднеквадратичное отклонение $\sigma$. Тогда на основании формулы (7) § 17 получаются полезные при различных вычислениях равенства

$$P(-\sigma < \bar{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683,$$

$$P(-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}954,$$

$$P(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997.$$

Эти результаты геометрически изображены на рис. 439.

Почти достоверно, что случайная величина (ошибка) не отклонится от математического ожидания по абсолютной величине больше чем на $3\sigma$. Это предположение называют *правилом трех сигм*.

В теории стрельбы и при обработке различных статистических материалов бывает полезно знать вероятность попадания случайной величины $\bar{x}$ в интервалы $(0, E)$, $(E, 2E)$, $(2E, 3E)$,

$(3E, 4E)$, $(4E, 5E)$ при плотности распределения, определяемой по формуле (1) § 19. Знание этих вероятностей во многих случаях сокращает вычисления и помогает при анализе явлений.

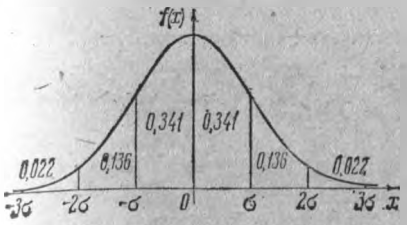



Рис. 439.

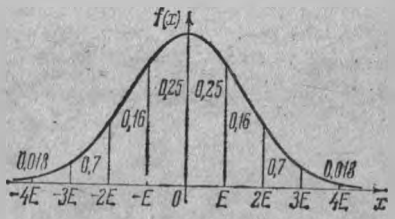



Рис. 440.

При вычислении этих вероятностей будем пользоваться формулой (8) § 19 и таблицей функции $\Phi(x)$:

$$P(0 < \bar{x} < E) = \frac{1}{2}\Phi(1) = 0{,}2500,$$

$$P(E < \bar{x} < 2E) = \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(1)] = 0{,}1613,$$

$$P(2E < \bar{x} < 3E) = \frac{1}{2}[\Phi(3) - \Phi(2)] = 0{,}0672,$$

$$P(3E < \bar{x} < 4E) = \frac{1}{2}[\Phi(4) - \Phi(3)] = 0{,}0180,$$

$$P(4E < \bar{x} < \infty) = \frac{1}{2}[\Phi(\infty) - \Phi(4)] = \frac{1}{2}(1 - 0{,}9930) = 0{,}0035.$$

Результаты вычислений геометрически изображены на рис. 440, который называется *шкалой рассеивания ошибок*. Из этих расчетов следует, что практически достоверно, что значение случайной величины попадает в интервал $(-4E, 4E)$. Вероятность того, что значение случайной величины попадает вне этого интервала, меньше 0,01.

Пример 1. Производится один выстрел по полосе шириной 100 м. Прицеливание рассчитывалось на среднюю линию полосы, которая перпендикулярна к плоскости полета снаряда. Рассеивание подчиняется нормальному закону с вероятным отклонением по дальности $E = 20$ м. Определить вероятность попадания в полосу (рис. 441). Срединное отклонение по дальности в теории стрельбы обозначают $B\partial$, боковое $Bб$.

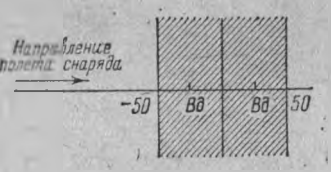



Рис. 441.

Решение. Воспользуемся формулой (7) § 19. В нашем случае $l = 50$ м, $E = B\partial = 20$ м. Следовательно,

$$P(-50 < \bar{x} < 50) = \Phi\left(\frac{50}{20}\right) = \Phi(2{,}5) = 0{,}9082 \approx 0{,}91.$$

Замечание. Приближенно можно было бы решить задачу, не пользуясь таблицами функции $\Phi(x)$, а воспользоваться шкалой рассеивания (рис. 440).

В нашем случае $l=2{,}5E$. Следовательно,

$$P(-50<\overline{x}<50)=2\cdot(0{,}25+0{,}16+0{,}04)=0{,}90.$$

Пример 2. Опытом установлено, что ошибка прибора для измерения дальности подчиняется нормальному закону со срединной ошибкой $E=10$ м. Определить вероятность того, что определенная этим прибором дальность будет отклоняться от истинной не более чем на 15 м.

Решение. В данном случае $t=15$ м, $E=10$ м. По формуле (7) § 19 получаем:

$$P(-15<\overline{x}<15)=\Phi\left(\frac{15}{10}\right)=\Phi(1{,}5)=0{,}6883\approx 0{,}69.$$

## § 21. Среднеарифметическая ошибка

Для характеристики ошибок вводят понятие *среднеарифметической ошибки*, равной математическому ожиданию абсолютной величины ошибок. Будем обозначать среднеарифметическую ошибку через $d$. Определим среднеарифметическую ошибку, если ошибки $x$ подчиняются нормальному закону (4) § 15. По формуле, аналогичной (2) § 15, получаем ($a=0$)

$$d=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Итак, среднеарифметическая ошибка выражается через среднеквадратичное отклонение $\sigma$ так:

$$d=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \qquad (1)$$

## § 22. Мера точности. Соотношение между характеристиками распределения ошибок

При рассмотрении многих процессов, особенно в теории стрельбы, плотность распределения нормального закона записывают в форме

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}. \qquad (1)$$

Сравнивая формулы (4) § 15 и (1), видим, что введенный параметр $h$ выражается через параметр $\sigma$ так:

$$h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Величина $h$ обратно пропорциональна $\sigma$, т. е. среднеквадратичной ошибке или среднеквадратичному отклонению. Чем меньше дисперсия $\sigma^2$, т. е. чем меньше рассеивание, тем больше значение $h$. Поэтому $h$ называют *мерой точности*.

Из (2) и (1) § 21 получаем

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{3}$$

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Срединная ошибка $E$ выражается через меру точности $h$ на основании формулы (7) § 18 и (3):

$$E = \frac{\rho}{h}. \tag{5}$$

Иногда бывает нужно одну характеристику распределения ошибок выразить через другую. Поэтому бывают полезны следующие равенства:

$$\frac{E}{\sigma} = \rho\sqrt{2} = 0{,}6745, \quad \frac{E}{d} = \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8453, \quad \frac{\sigma}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533, \tag{6}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} = 1{,}4826, \qquad \frac{d}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = 1{,}1829.$$

## § 23. Двумерная случайная величина

*С двумерными случайными величинами* приходится иметь дело, например, при рассмотрении процесса поражения объекта, находящегося на плоскости $xOy$. Значение двумерной случайной величины определяется двумя числами $x$ и $y$; саму двумерную случайную величину будем обозначать $(x, y)$. Пусть $x$ и $y$ принимают дискретные значения $x_i$ и $y_j$. Пусть каждой паре значений $(x_i, y_j)$ из некоторой совокупности соответствует определенная вероятность $p_{ij}$. Мы можем составить таблицу распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

| $y$ \ $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | ... | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | | | | $p_{n1}$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | | | | $p_{n2}$ |
| ⋮ | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| $y_m$ | $p_{1m}$ | $p_{2m}$ | | | | $p_{nm}$ |

Очевидно, что должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1. \qquad (1)$$

Определим, далее, непрерывную двумерную случайную величину. Вероятность того, что значение двумерной случайной величины $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет неравенствам $x<\bar{x}<x+\Delta x$, $y<\bar{y}<y+\Delta y$, будем обозначать так: $\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ y<\bar{y}<y+\Delta y)$.

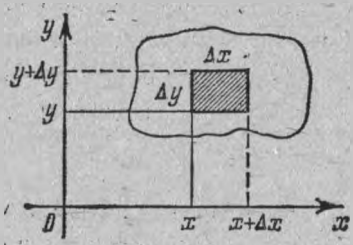


Рис. 442.

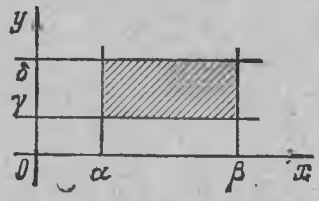


Рис. 443.

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется *плотностью распределения* двумерной случайной величины $(\bar{x}, \bar{y})$, если с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ выполняется равенство

$$\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ y<\bar{y}<y+\Delta y)\cong f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (2)$$

Формула (2) вполне аналогична формуле (2) § 12.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $xOy$. Если значения случайной величины $(\bar{x}, \bar{y})$ будем обозначать точками плоскости с соответствующими координатами $x$ и $y$, то выражение $\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ y<\bar{y}<y+\Delta y)$ обозначает вероятность того, что двумерная случайная величина $(\bar{x}, y)$ примет значение, обозначенное точкой, находящейся в заштрихованном прямоугольнике $\Delta s$ (рис. 442). Будем говорить, что «значение случайной величины попало в область $\Delta s$» *).

Вероятность $\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ y<\bar{y}<y+\Delta y)$ также будем обозначать $\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y})\subset\Delta s]$. В этих обозначениях равенство (2) можно переписать так:

$$\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y})\subset\Delta s]\approx f(x, y)\,\Delta s. \qquad (3)$$

Докажем далее следующую теорему, аналогичную теореме 1 § 12.

*) Площадку в равенстве (3) можно было бы брать и произвольной формы.

Теорема 1. *Вероятность* $\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D]$ *того, что двумерная случайная величина* $(\bar{x}, \bar{y})$ *с плотностью распределения* $f(x, y)$ *попадет в область* $D$, *выражается двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* $D$, *т. е.*

$$\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Доказательство. Разбиваем область $D$, как это делалось в теории двойных интегралов, на площадки $\Delta s$. Для каждой площадки пишем равенство (3) и складываем левые и правые части полученных равенств. Так как $\sum \Delta s = D$ и $\sum \mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Delta s] = \mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D]$, то с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta s$ получаем приближенное равенство

$$\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] \approx \sum f(x, y)\, \Delta s.$$

Переходя к пределу в правой части последнего равенства при $\Delta s \to 0$, справа получим двойной интеграл и на основании свойств интегральной суммы точное равенство

$$\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если область $D$ есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$ (рис. 443), то

$$\mathrm{P}[\alpha < \bar{x} < \beta,\ \gamma < \bar{y} < \delta] = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x, y)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Замечание 2. Аналогично равенству (1) выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1, \tag{6}$$

так как достоверно, что двумерная величина примет какое-то значение. Там, где функция $f(x, y)$ не определена по смыслу задачи, полагаем $f(x, y) = 0$.

Если область $D$ является суммой прямоугольников вида, изображенного на рис. 444, то вероятность попадания случайной величины в такую область определяется как сумма вероятностей для отдельных прямоуголь-

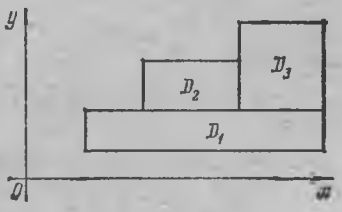



Рис. 444.

ников, т. е. как сумма определенных интегралов по каждому прямоугольнику:

$$\mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_1] + \mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_2] + \mathrm{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_3].$$

Пример. Плотность распределения двумерной случайной величины задается формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)}.$$

Определить вероятность того, что значение случайной величины попадет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}$.

Решение. По формуле (5) получаем

$$\mathrm{P}\left[0 < \bar{x} < 1, \frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{y} < \sqrt{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 \operatorname{arctg} y \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{24}.$$

Определение 2. Функция

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du\, dv \qquad (7)$$

называется *интегральной функцией распределения* вероятностей двумерной случайной величины $(\bar{x}, \bar{y})$.

Очевидно, что интегральная функция распределения выражает вероятность того, что $\bar{x} < x$, $\bar{y} < y$, т. е.

$$F(x, y) = \mathrm{P}(\bar{x} < x, \bar{y} < y).$$

Геометрически функция распределения выражает вероятность того, что двумерная случайная величина попала в бесконечный четырехугольник, заштрихованный на рис. 445.

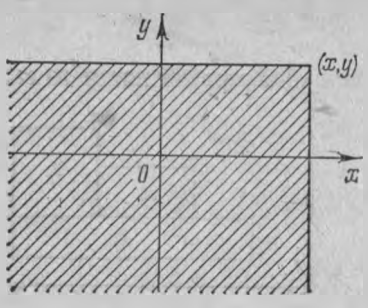



Рис. 445.

На основании теоремы о дифференцировании определенного интеграла по параметру устанавливается связь между плотностью распределения и интегральной функцией распределения:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = f(x, y). \qquad (8)$$

Плотность вероятности двумерной случайной величины является смешанной производной второго порядка от интегральной функции распределения.

## § 24. Нормальный закон распределения на плоскости

Определение 1. Распределение двумерной случайной величины называется *нормальным*, если плотность распределения этой величины выражается формулой

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{1}$$

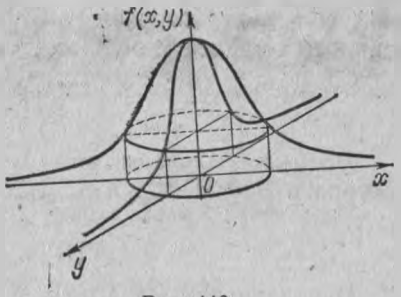


Рис. 446.

График этой функции есть поверхность, изображенная на рис. 446.

*Центром рассеивания* случайной величины с законом распределения (1) является точка (0; 0)*). $\sigma_x$ и $\sigma_y$ называются *главными среднеквадратичными отклонениями*.

Перепишем формулу (1) так:

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{2}$$

Таким образом, $f(x,\ y)$ можно рассматривать как произведение двух плотностей нормальных распределений случайных величин $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Как и в случае одномерной случайной величины, определим *главные вероятные* отклонения двумерной случайной величины $E_x$ и $E_y$ (см. формулу (7) § 18):

$$E_x=\rho\sqrt{2}\,\sigma_x,\quad E_y=\rho\sqrt{2}\,\sigma_y. \tag{3}$$

Подставляя $\sigma_x$ и $\sigma_y$, выраженные через $E_x$ и $E_y$, в формулу (1), получим

$$f(x,\ y)=\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}\,e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}. \tag{4}$$

---

*) Если центр рассеивания находится в точке $(a;\ b)$, то закон распределения дается формулой

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{1'}$$

Рассмотрим линии уровня поверхности (4)

$$\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}=k^2=\text{const} \tag{5}$$

(при этом будет $f(x, y)=\text{const}$). Линиями уровня являются эллипсы с полуосями, равными $kE_x$ и $kE_y$. Центры эллипсов совпадают с центром рассеивания. Эти эллипсы называются *эллипсами рассеивания*. Их оси называются *осями рассеивания*. *Единичным эллипсом рассеивания* называется эллипс, у которого полуоси равны вероятным отклонениям $E_x$ и $E_y$. Уравнение единичного эллипса получится, если в уравнении (5) положить $k=1$:

$$\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}=1. \tag{6}$$

*Полным эллипсом рассеивания* называется эллипс, полуоси которого равны $4E_x$ и $4E_y$. Уравнение этого эллипса

$$\frac{x^2}{(4E_x)^2}+\frac{y^2}{(4Ey)^2}=1. \tag{7}$$

В следующем параграфе мы установим, что вероятность попадания двумерной случайной величины в полный эллипс рассеивания равна 0,97, т. е. практически попадание достоверно.

## § 25. Вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, при нормальном законе распределения

Пусть

$$f(x, y)=\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}.$$

По формуле (5) § 23 (см. рис. 443) вероятность попадания случайной величины в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$, выражается так:

$$\mathrm{P}(\alpha<\bar{x}<\beta,\ \gamma<\bar{y}<\delta)=\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}dx\,dy. \tag{1}$$

Представляя подынтегральную функцию в виде произведения двух функций, можем написать

$$\mathrm{P}(\alpha<\bar{x}<\beta,\ \gamma<\bar{y}<\delta)=\int_\alpha^\beta \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}}dx\int_\gamma^\delta \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_y}e^{-\rho^2\frac{y^2}{E_y^2}}dy, \tag{2}$$

и на основании формулы (6) § 19 окончательно получаем

$$\mathrm{P}(\alpha<\bar{x}<\beta,\ \gamma<\bar{y}<\delta)=\frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{E_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{E_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta}{E_y}\right)-\Phi\left(\frac{\gamma}{E_y}\right)\right]. \tag{3}$$

Если в последней формуле положить $\alpha=-l_1$, $\beta=l_1$, $\gamma=-l_2$, $\delta=l_2$, т. е. рассматривать прямоугольник с центром в начале координат, то на основании формулы (7) § 19 формула (3) примет вид

$$\mathbf{P}(-l_1<\bar{x}<l_1,\ -l_2<\bar{y}<l_2)=\hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right). \qquad (4)$$

Замечание. Задачу о вероятности попадания случайной величины в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, можно было бы решать и так. Попадание в прямоугольник есть сложное событие, состоящее в совпадении двух независимых событий — попадания в полосу $-l_1<\bar{x}<l_1$ и попадания в полосу $-l_2<\bar{y}<l_2$. (Для краткости рассматриваем прямоугольник с центром в начале координат.) Пусть плотность распределения случайной величины $\bar{x}$ есть

$$f_1(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}}.$$

Плотность распределения случайной величины $\bar{y}$ есть

$$f_2(y)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_y}e^{-\rho^2\frac{y^2}{E_y^2}}.$$

Вычисляем вероятности попадания случайной величины в полосу $-l_1<\bar{x}<l_1$ и в полосу $-l_2<\bar{y}<l_2$. По формуле (7) § 19 получаем

$$\mathbf{P}(-l_1<\bar{x}<l_1)=\hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right),$$

$$\mathbf{P}(-l_2<\bar{y}<l_2)=\hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right).$$

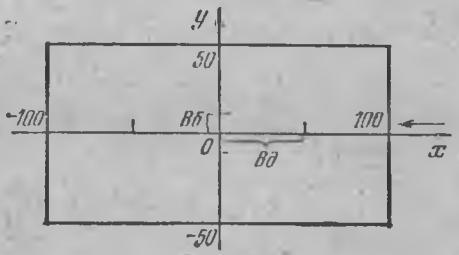


Рис. 447.

Вероятность сложного события — попадания в прямоугольник — будет равна произведению вероятностей:

$$\mathbf{P}(\alpha<\bar{x}<\beta,\ \gamma<\bar{y}<\delta)=$$

$$=\mathbf{P}(-l_1<\bar{x}<l_1)\,\mathbf{P}(-l_2<\bar{y}<l_2)=\hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right).$$

Получили формулу (4).

Пример. Производится стрельба по площади прямоугольника со сторонами 200 м и 100 м, ограниченного линиями

$$x=-100,\quad x=100,$$
$$y=-50,\quad y=50.$$

Главные срединные отклонения соответственно равны $E_x=Вд=50$ м, $E_y=Вб=10$ м. Найти вероятность попадания в прямоугольник при одном выстреле (рис. 447).

Р е ш е н и е. В нашем случае $l_1=100$, $l_2=50$, $E_x=50$, $E_y=10$. Подставляем эти значения в формулу (4) и, пользуясь таблицей значения функции $\Phi(x)$ (см. табл. 1 в конце книги), находим

$$P=\Phi\left(\frac{100}{50}\right)\Phi\left(\frac{50}{10}\right)=\Phi(2)\ \Phi(5)=0{,}8227\cdot 0{,}9993=0{,}8221.$$

## § 26. Вероятность попадания двумерной случайной величины в эллипс рассеивания

В теории ошибок бывает нужно рассматривать следующую задачу. Вычислить вероятность того, что случайная величина, например ошибка на плоскости, попадет в эллипс рассеивания

$$\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}=k^2, \tag{1}$$

если плотность распределения дается формулой (4) § 24. По формуле (4) § 23 получаем:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D]=\iint\limits_{D_э}\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right]}dxdy, \tag{2}$$

где область $D_э$ ограничена эллипсом (1). Сделаем замену переменных, полагая

$$x=E_x u,\quad y=E_y v,$$

при этом преобразовании эллипс $D_э$ перейдет в круг

$$u^2+v^2=k^2. \tag{3}$$

Так как якобиан преобразования равен $I=E_x E_y$, то равенство (2) примет вид

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_э]=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_k}\rho^2 e^{-\rho^2(u^2+v^2)}\,du\,dv. \tag{4}$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам

$$u=r\cos\varphi,\quad v=r\sin\varphi.$$

Тогда правая часть равенства (4) принимает вид

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_э]=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{k}\rho^2 e^{-\rho^2 r^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

Производя вычисления в правой части, получим выражение вероятности попадания в эллипс рассеивания:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_э]=1-e^{-\rho^2 k^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим частные случаи. Вероятность попадания в единичный эллипс рассеивания получится, если положить в формуле (5) $k=1$:

$$\mathbf{P}\left[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_{\text{э}}\right]|_{k=1} = 1 - e^{-\rho^2} = 0{,}203. \tag{6}$$

Вероятность попадания в полный эллипс рассеивания (7) § 24 получится, если в формуле (5) положить $k=4$:

$$\mathbf{P}\left[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_{\text{э}}\right]|_{k=4} = 1 - e^{-16\rho^2} = 0{,}974. \tag{7}$$

Рассмотрим частный случай, когда в формуле (4) § 24 $E_x = E_y = E$. Эллипс рассеивания (5) § 24 превращается в круг

$$x^2 + y^2 = k^2E^2 \tag{8}$$

с радиусом $R = kE$. Вероятность попадания двумерной случайной величины в круг радиуса $R$ в соответствии с формулой (5) будет

$$\mathbf{P}\left[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D_R\right] = 1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}}. \tag{9}$$

Определение 1. *Радиальным вероятным отклонением* называется такое число $E_R$, что вероятность попадания двумерной случайной величины в круг радиуса $R = E_R$ равняется 1/2.

Из определения следует, что величина $R = E_R$ определяется из соотношения

$$1 - e^{-\rho^2 \frac{E_R^2}{E^2}} = \frac{1}{2}.$$

По таблице значений показательной функции находим

$$E_R = 1{,}75E.$$

## § 27. Задачи математической статистики. Статистический материал

В результате наблюдений и регистрации массовых случайных явлений получаются статистические данные или статистический материал. В частности, статистическим материалом являются ошибки различных измерений.

Если наблюдаемая величина есть случайная величина, то она изучается методами теории вероятностей. Для понимания характера этой случайной величины нужно знать ее закон распределения. Определение законов распределения рассматриваемых величин и оценка значений параметров распределения на основании наблюденных значений — задача математической статистики.

Еще одной задачей математической статистики является создание методов обработки и анализа статистического материала с целью получения определенных выводов, нужных для организации оптимального процесса, где участвуют рассматриваемые величины.

Приведем примеры различных наблюдений явлений, в результате которых получается статистический материал.

Пример 1. При многократном измерении некоторого объекта с помощью измерительного инструмента, в частности при определении дальности до некоторого объекта, получаются различные значения наблюдаемой величины. Эти значения будем называть *наблюденными значениями* (так мы будем называть всякое значение, полученное при изучении любого явления).

Полученные таким образом значения требуют систематизации и обработки, прежде чем на их основании можно было бы сделать какие-либо выводы.

Как уже указывалось, разность $\delta$ между наблюденным значением $x$ и истинным значением наблюдаемой величины $a (x - a = \delta)$ называется *ошибкой измерения*. Сказанное выше можно выразить в терминах ошибок. Ошибки измерения требуют математической обработки с целью получения определенных выводов.

Пример 2. При массовом производстве приходится рассматривать величину отклонения некоторого размера полученного изделия (например, длины) от заданного размера для полученных изделий (ошибка изготовления).

Пример 3. Разность между координатой точки попадания при стрельбе и координатой точки прицеливания есть ошибка стрельбы (рассеивание). Эти ошибки требуют математического исследования.

Пример 4. Результаты измерений величины отклонения размера детали после эксплуатации от ее размеров до эксплуатации (проектных) требуют математического анализа. Эти отклонения также можно рассматривать как «ошибки.

Из приведенных примеров следует, что рассматриваемые величины суть случайные величины, а каждое наблюденное значение следует рассматривать как частное значение случайной величины.

Так, например, ошибка по дальности (рассеивание) при стрельбе определяется ошибкой при отвешивании заряда, ошибкой в массе при изготовлении снаряда, ошибкой наводки, ошибкой при определении дальности, изменением метеорологических условий и т. д. Все это случайные величины, и рассеивание как результат их совместного влияния является случайной величиной.

## § 28. Статистический ряд. Гистограмма

Статистический материал, получающийся в результате наблюдений (измерений), помещается в таблице, состоящей из двух строк. В первой строке отмечается номер измерения $i$, во второй — полученное значение $x_i$ измеряемой величины $x$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | ... | $i$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_i$ | ... | $x_n$ |



Такая таблица называется *простым статистическим рядом*. При большом числе измерений статистический материал, помещенный в такую таблицу, трудно обозрим и, следовательно, анализ его затруднен. Поэтому на основании полученного простого статистического ряда составляется *группировка*. Это делается следующим образом.

Весь интервал полученных значений величины $x$ разобьем на частичные равные интервалы $(a_0, a_1)$, $(a_1, a_2)$, ..., $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ и подсчитаем число значений $m_k$ величины $x$, попадающих в интервал $(a_{k-1}, a_k)$. Значения, попадающие на конец интервала, относят или к левому, или к правому интервалам (иногда их относят и к левому и к правому интервалам по половине их числа). Число

$$\frac{m_k}{n} = p_k^* \tag{1}$$

есть относительная частота, соответствующая интервалу $(a_{k-1}, a_k)$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* = 1. \tag{2}$$

На основании результатов такой обработки строим таблицу, состоящую из трех строк. В первой строке указываем интервалы в порядке возрастания $a_k$, во второй строке соответствующие им числа $m_k$, в третьей строке — частоты $p_k = \frac{m_k}{n}$:

| Интервалы | $(a_0, a_1)$ | $(a_1, a_2)$ | ... | $(a_{k-1}, a_k)$ | ... | $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | $m_1$ | $m_2$ | ... | $m_k$ | ... | $m_\lambda$ |
| $p_k^*$ | $p_1^*$ | $p_2^*$ | ... | $p_k^*$ | ... | $p_\lambda^*$ |

Это и есть *группировка*. Группировку оформляют и геометрически. Это делается следующим образом. На оси $Ox$ отмечаем точки $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_\lambda$. На отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ как на основании строим прямоугольник, площадь которого равна $p_k^*$. Полученная фигура называется *гистограммой* (рис. 448).

На основании группировки и гистограммы строится приближенно статистическая функция распределения.

Дальнейшая обработка материала производится следующим образом. Середины интервалов $(a_{k-1}, a_k)$ обозначают $\bar{x}_k$ и считают это значение значением результата измерения, которое

повторяется $m_k$ раз. После этого вместо таблицы, задающей группировку, строится следующая таблица:

| $\tilde{x}_k$ | $\tilde{x}_1$ | $\tilde{x}_2$ | ... | $\tilde{x}_k$ | ... | $\tilde{x}_\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | $m_1$ | $m_2$ | ... | $m_k$ | ... | $m_\lambda$ |
| $p_k^*$ | $p_1^*$ | $p_2^*$ | ... | $p_k^*$ | ... | $p_\lambda^*$ |

Данная обработка сделана на основании того, что все значения в интервале $(a_{k-1}, a_k)$ близки друг к другу и потому их считают равными абсциссе середины интервала $x_k^*$.

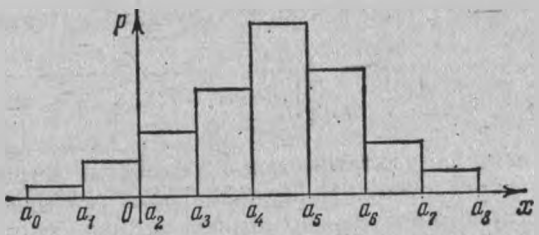



Рис. 448.

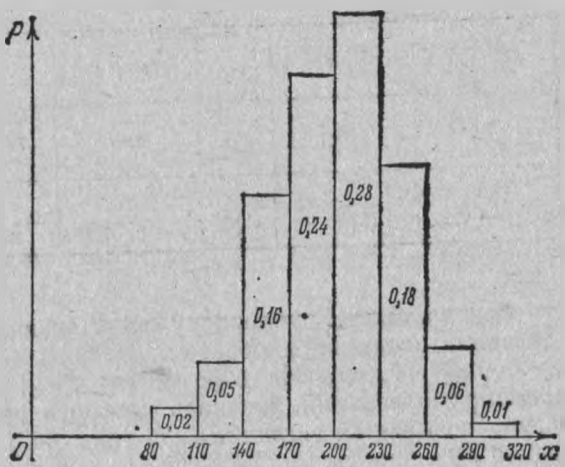



Рис. 449.

Пример. При 100 определениях дальности получены результаты, на основании которых построена группировка:

| Интервалы | 80–110 | 110–140 | 140–170 | 170–200 | 200–230 | 230–260 | 260–290 | 290–320 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | 2 | 5 | 16 | 24 | 28 | 18 | 6 | 1 |
| $p_k^*$ | 0,02 | 0,05 | 0,16 | 0,24 | 0,28 | 0,18 | 0,06 | 0,01 |

На основании группировки строим графическое изображение статистического ряда (гистограмму) (рис. 449).

Построим, далее следующую таблицу:

| $\tilde{x}_k$ | 95 | 125 | 155 | 185 | 215 | 245 | 275 | 305 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | 2 | 5 | 16 | 24 | 28 | 18 | 6 | 1 |
| $p_k^*$ | 0,02 | 0,05 | 0,16 | 0,24 | 0,28 | 0,18 | 0,06 | 0,01 |

## § 29. Определение подходящего значения измеряемой величины

Пусть при измерений некоторой величины получили результаты измерения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти значения можно рассматривать как частные значения случайной величины $x$. За подходящее значение определяемой величины принимают среднее арифметическое полученных значений

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (1)$$

Величину $m_x^*$ называют *статистическим средним*.

Если число изменений $n$ велико, то пользуются материалом таблицы, рассмотренной в § 28, и $m_x^*$ вычисляют так:

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k + \ldots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{n},$$

или, пользуясь обозначениями (1) § 28,

$$m_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k p_k^*; \qquad (2)$$

полученное значение называют *средним взвешенным*.

Замечание. В дальнейшем результаты вычислений по формулам (1) и (2) будем обозначать одной и той же буквой. Это замечание будет относиться и к формулам (3) и (4).

Можно доказать, что статистическое среднее при некоторых ограничениях стремится по вероятности при $n \to \infty$ к математическому ожиданию случайной величины $x$. Это утверждение следует из теоремы Чебышева.

Определим, далее, *статистическую дисперсию*. Она определяется так *):

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2}{n}. \tag{3}$$

Эта величина характеризует рассеивание значений наблюдаемой величины.

Если пользоваться материалом таблицы § 28, то статистическая дисперсия определится по формуле

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\bar{x}_k - m_x^*)^2 p_k^*. \tag{4}$$

Эта формула аналогична формуле (2) § 10.

Пример. Определить статистическое среднее и статистическую дисперсию на основании статистических материалов примера § 28.

Решение. По формуле (2) получаем

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i p_i^* = 95 \cdot 0{,}02 + 125 \cdot 0{,}05 + 155 \cdot 0{,}16 + 185 \cdot 0{,}24 + 215 \cdot 0{,}28 + 245 \cdot 0{,}18 + 275 \cdot 0{,}06 + 305 \cdot 0{,}01 = 201{,}20.$$

По формуле (4) получаем

$$D^*[\bar{x}] = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x^*)^2}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda} (x_k - m_x^*)^2 p_k^* = \sum_{k=1}^{\lambda} x_k^2 p_k^* - m_x^{*2} =$$
$$= 95^2 \cdot 0{,}02 + 125^2 \cdot 0{,}05 + 155^2 \cdot 0{,}16 + 185^2 \cdot 0{,}24 + 215^2 \cdot 0{,}28 + 245^2 \cdot 0{,}18 + 275^2 \cdot 0{,}06 + 305^2 \cdot 0{,}01 - 201{,}20^2 = 1753{,}56.$$

## § 30. Определение параметров закона распределения. Теорема Ляпунова. Теорема Лапласа

Пусть $\bar{x}$ — случайная величина, например результат измерения, $a$ — измеряемая величина, $\delta$ — ошибка измерения. Тогда эти величины связаны соотношением

$$\delta = \bar{x} - a, \quad \bar{x} = a + \delta. \tag{1}$$

*) На самом деле статистическую дисперсию лучше вычислять по другой формуле, приведенной на с. 502.

Многочисленные опыты и наблюдения показывают, что ошибки измерений после исключения систематической ошибки, т. е. такой ошибки, которая постоянна при всех измерениях (например, ошибка прибора), или такой, которая изменяется по известному закону от измерения к измерению, и после исключения грубых ошибок подчиняются нормальному закону распределения с центром распределения в начале координат. Это подтверждается и теоретическими обоснованиями.

Если случайная величина является суммой большого числа случайных величин, то при некоторых ограничениях эта сумма подчиняется нормальному закону распределения. Это утверждение формулируется в виде так называемой центральной предельной теоремы, принадлежащей А. М. Ляпунову (1857—1918). Мы здесь сформулируем эту теорему в несколько упрощенном виде.

Теорема 1. *Если независимые случайные величины* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ *имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием* $a$ *(не нарушая общности, можно предполагать, что* $a=0$*) и дисперсией* $\sigma^2$*, то при неограниченном увеличении* $n$ *закон распределения суммы* $\bar{y}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i}{\sigma\sqrt{n}}$ *как угодно мало отличается от нормального (*$\bar{y}_n$ *нормирована так, что* $M[\bar{y}_n]=0$, $D[\bar{y}_n]=1$*).*

Практическая значимость теоремы Ляпунова заключается в следующем. Рассматривается случайная величина, например, отклонение некоторой величины от заданной. Это отклонение вызвано действием многих факторов, каждый из которых дает некоторую составляющую отклонения, например, в случае стрельбы отклонение точки попадания от точки прицеливания происходит из-за ошибки наводки, ошибки определения дальности, ошибки изготовления снаряда и т. д. Все составляющие нам даже не известны, также как могут оказаться неизвестными законы распределения составляющих случайных величин. Но из теоремы Ляпунова следует, что случайная величина — общее отклонение — подчиняется нормальному закону.

Из теоремы Ляпунова следует, что если $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ — результаты измерений некоторой величины (каждая из $\bar{x}_i$ — случайная величина), то случайная величина — среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n}{n}$$

— при достаточно большом $n$ подчиняется закону распределения, как угодно близкому к нормальному, если случайные величины $\bar{x}_i$ подчиняются одному и тому же закону распределения.

Теорема остается справедливой и для суммы случайных величин с неодинаковыми законами распределения при некоторых дополнительных условиях, которые, как правило, для рассматриваемых на практике случайных величин выполняются. Как показывает опыт, при числе слагаемых порядка 10 уже можно считать их сумму нормально распределенной.

Обозначим через $\bar{a}$ и $\bar{\sigma}^2$ приближенные значения математического ожидания и дисперсии. Тогда можем написать приближенно законы распределения случайных величин $\bar{\delta}$ и $\bar{x}$:

$$f(\delta)=\frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\sigma}^2}}, \tag{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{a})^2}{2\bar{\sigma}^2}}. \tag{3}$$

Параметр $\bar{a}$ на основании экспериментальных данных определяется по формуле (1) § 29:

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}. \tag{4}$$

Это следует из так называемой теоремы Чебышева (1821—1894). Не останавливаясь на доказательстве, укажем, что параметр $\sigma$ естественнее определять не по формуле (3) § 29, а по формуле

$$\bar{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{a})^2}{n-1}. \tag{5}$$

Отметим, что правая часть в формуле (5) и правая часть в формуле (3) § 29 отличаются множителем $\frac{n}{n-1}$, который в практических задачах близок к 1.

Пример 1. Написать выражение закона распределения случайной величины на основании результатов измерений, приведенных в примере § 28, и результатов вычислений, приведенных в примере § 29.

Решение. На основании вычислений, приведенных в примере § 29, получаем

$$\bar{a}=m_x^*=201,\quad \bar{\sigma}^2=\frac{n}{n-1}D^*=\frac{100}{99}\cdot 1754=1771,\quad \bar{\sigma}=\sqrt{1771}\approx 42.$$

Подставляя в формулу (3), получаем

$$f(x)=\frac{1}{42\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-201)^2}{2\cdot 1771}}.$$

Замечание. Если получена статистическая функция распределения для некоторой случайной величины $x$, то вопрос о том, следует ли считать данную случайную величину подчиняющейся нормальному закону распределения или нет, иногда решают так.

Пусть имеем значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Определяем среднее арифметическое значение $\bar{a}$ по формуле (4). Определяем значения центрированной случайной величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Абсолютные величины значений $y_i$ располагают в ряд в возрастающем порядке. Если $n$ нечетное, то за срединное отклонение или срединную ошибку $E_{\text{ср}}$ принимают ту абсолютную величину $|y_{\text{ср}}|$ в составленном ряде абсолютных величин, которая занимает $\frac{n-1}{2}+1$-е место, а если $n$ — четное, то за $E_{\text{ср}}$ принимают среднее арифметическое абсолютных величин, стоящих на местах с номерами $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$.

Составим, далее, среднеарифметическую ошибку по формуле

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|}{n}. \tag{6}$$

По формуле (5) определяем среднеквадратичное отклонение

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n-1}}. \tag{7}$$

Далее определяем отношения $\frac{E_{\text{ср}}}{d}$ и $\frac{E_{\text{ср}}}{\bar{\sigma}}$.

Для случайной величины, подчиненной нормальному закону, отношения $\frac{E_{\text{ср}}}{d}$ и $\frac{E_{\text{ср}}}{\sigma}$ соответственно равны 0,8453 и 0,6745 (см. формулу (6) § 22). Если отношения $\frac{E_{\text{ср}}}{d}$ и $\frac{E_{\text{ср}}}{\bar{\sigma}}$ отличаются от 0,8453 и 0,6745 на величину порядка 10%, то условно принимают, что случайная величина $y$ подчиняется нормальному закону.

Следствием центральной предельной теоремы является важная теорема Лапласа о вероятности того, что событие появится не менее $\alpha$-раз и не более $\beta$ раз. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 2 (Лапласа). *Если производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления собы-*

*тия $A$ есть $p$, то справедливо соотношение*

$$P(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right)\right], \qquad (8)$$

*где $m$ — число появлений события $A$, $q = 1 - p$, $P(\alpha < m < \beta)$ — вероятность того, что число появлений события $A$ заключено между $\alpha$ и $\beta$.*

Функция $\Phi(x)$ определена на с. 478.

Покажем применение теоремы Лапласа для решения задач.

Пример 2. Вероятность брака при производстве некоторых деталей $p = 0{,}01$. Определить вероятность того, что в 1000 деталях окажется не более 20 бракованных.

Решение. В данном случае

$$n = 1000, \quad p = 0{,}01, \quad q = 0{,}99, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 20.$$

Далее находим

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9{,}9}} = -2{,}25,$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{20 - 10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9{,}9}} = 2{,}25,$$

По формуле (8) получаем:

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = \frac{1}{2}\left[\Phi(2{,}25) - \Phi(-2{,}25)\right] = \Phi(2{,}25).$$

По таблицам функции $\Phi(x)$ находим

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = 0{,}9985.$$

Отметим, что теоремы Бернулли, Ляпунова, Чебышева, Лапласа, о которых говорилось выше, составляют так называемый *закон больших чисел* теории вероятностей.

### Упражнения к главе XX

1. Одновременно бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что выпадет сумма очков, равная 5. *Отв.* 1/9.

2. В лотерее имеется 10 билетов: 5 выигрышей и 5 проигрышей. Берем два билета. Какова вероятность выигрыша? *Отв.* 7/9.

3. Игральная кость бросается 5 раз. Какова вероятность того, что хоть 1 раз не появится 4 очка? *Отв.* 0,99987.

4. Вероятность попадания в самолет из винтовки равна 0,004. Сколько стрелков должно стрелять одновременно, чтобы вероятность попадания стала $> 70\%$? *Отв.* $n > 300$.

5. Из двух орудий по одной цели произведено по выстрелу. Вероятность попадания из первого орудия 0,7, из второго 0,6. Определить вероятность хотя бы одного попадания. *Отв.* 0,88.

6. На 100 карточках написаны числа от 1 до 100. Определить вероятность того, что на случайно взятой карточке содержится цифра 5. *Отв.* 0,19.

7. Имеется 4 машины. Вероятность того, что машина работает в произвольный момент $t$, равна 0,9. Определить вероятность того, что в момент $t$ работает хотя бы одна машина. *Отв.* 0,9999.

8. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}9$. Определить вероятность того, что при трех выстрелах будет три попадания. *Отв.* $\approx 0{,}73$.

9. В первом ящике деталей первого сорта 30%, во втором 40%. Вынимаются по одной детали из каждого ящика. Определить вероятность того, что обе вынутые детали первого сорта. *Отв.* 0,12.

10. Механизм состоит из трех деталей. Вероятность брака 1-й детали $p_1=0{,}008$, вероятность брака 2-й детали $p_2=0{,}012$, вероятность брака 3-й детали $p_3=0{,}01$. Определить вероятность брака при изготовлении всего механизма. *Отв.* 0,03.

11. Вероятность попадания при одном выстреле $p=0{,}6$. Определить вероятность того, что при трех выстрелах будет иметь место хотя бы одно попадание. *Отв.* 0,936.

12. Среди 350 механизмов 160 первого сорта, 110 — второго сорта и 80 — третьего сорта. Вероятность брака среди механизмов первого сорта 0,01, среди второго сорта 0,02, среди третьего сорта 0,04. Берется один механизм. Определить вероятность того, что механизм исправный. *Отв.* 0,98.

13. Пусть известно, что вследствие ошибок, допускаемых при подготовке стрельбы, центр рассеивания снарядов (ЦРС) при первом выстреле может находиться по дальности в одной из пяти точек. Вероятность того, что ЦРС будет находиться в этих точках, соответственно равны $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}2$, $p_5=0{,}1$. Известно также, что если ЦРС будет находиться в первой точке, то вероятность попадания в цель по дальности будет равна $\overline{p}_1=0{,}15$ и для остальных точек соответственно $\overline{p}_2=0{,}25$, $\overline{p}_3=0{,}60$, $\overline{p}_4=0{,}25$, $\overline{p}_5=0{,}15$.

На исходной установке прицела произведен выстрел, в результате которого получен по дальности промах. Определить, чему равна вероятность того, что выстрел произведен на установке прицела, соответствующей каждой из указанных пяти точек ЦРС, т. е. определить вероятности гипотез о различных ошибках в положении ЦРС после испытания (выстрела). *Отв.* 0,85; 0,75; 0,40; 0,75; 0,85.

14. Игральная кость бросается 5 раз. Какова вероятность, что 2 раза выпадет шестерка и 3 раза не шестерка? *Отв.* 625/3888.

15. Производится 6 выстрелов. Определить вероятность того, что не все выстрелы дадут перелеты, если вероятность перелета $p=1/2$, вероятность недолета $q=1/2$ (стрельба по «узкой» цели). *Отв.* 31/32.

16. Для условий предыдущей задачи определить вероятность того, что будет 3 перелета и 3 недолета. *Отв.* 5/16.

17. Найти математическое ожидание числа очков при одном бросании игральной кости. *Отв.* 7/2.

18. Найти дисперсию случайной величины $x$, заданной таблицей распределения

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

*Отв.* 1,05.

19. Вероятность появления события $A$ при одном испытании равна 0,4. Производится 5 независимых испытаний. Найти дисперсию числа появлений события $A$. *Отв.* 1,2.

20. Производится стрельба по мишени. Вероятность попадания 0,8. Стрельба идет до первого попадания. Имеется 4 снаряда. Определить математическое ожидание числа израсходованных снарядов. *Отв.* 1,242.

21. При стрельбе по некоторой «тонкой» цели вероятность перелета $p=1/4$, вероятность недолета $q=3/4$. Определить вероятность комбинации из 2 перелетов и 4 недолетов при шести выстрелах. *Отв.* 0,297.

22. Вероятность того, что деталь имеет брак, $p=0{,}01$. Какова вероятность того, что в партии из 10 деталей будет бракованных 0, 1, 2, 3 деталей? *Отв.* 0,9045; 0,0904; 0,0041; 0,0011.

**23.** Найти вероятности получения хотя бы одного попадания в цель при 10 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле $p=0{,}15$. *Отв.* $1-0{,}85^{10}\approx 0{,}803$.

**24.** Случайная величина $x$ задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } 1<x.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, $\mathsf{M}[x]$, $\mathsf{D}[x]$.

*Отв.* $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } 1<x.\end{cases}$ $\mathsf{M}[x]=\frac{1}{2}$, $\mathsf{D}[x]=\frac{1}{12}$.

**25.** Случайная величина $x$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и дисперсией 100. Найти вероятность того, что значение случайной величины заключено в интервале (10, 50). *Отв.* 0,954.

**26.** Случайная величина подчинена нормальному закону распределения с дисперсией $\sigma^2=0{,}16$. Найти вероятность того, что значение случайной величины будет отличаться по абсолютной величине от математического ожидания меньше, чем на 0,3. *Отв.* 0,5468.

**27.** Случайная величина $x$ подчинена нормальному закону распределения с центром рассеивания $a=0{,}3$ и мерой точности $h=2$. Найти вероятность попадания в интервал (0,5; 2,0). *Отв.* 0,262.

**28.** Стрельба ведется по полосе шириной 4 м. Систематическая ошибка наводки 1 м (с занижением). Вероятное отклонение 5 м. Найти вероятность попадания в полосу при нормальном законе рассеивания. *Отв.* 0,211.

**29.** Стрельба ведется по прямоугольнику, ограниченному прямыми $x_1=10$ м, $x_2=20$ м, $y_1=15$ м, $y_2=35$ м, в направлении прямой, делящей короткую сторону пополам. Вероятные отклонения нормального распределения на плоскости $E_x=5$ м, $E_y=10$ м. Найти вероятность попадания при одном выстреле. *Отв.* 0,25.

**30.** Ошибка при изготовлении детали с заданной длиной 20 см есть случайная величина, подчиненная нормальному закону; $\sigma=0{,}2$ см. Определить вероятность того, что длина изготовленной детали будет отличаться от заданной меньше, чем на 0,3 см. *Отв.* 0,866.

**31.** В условиях примера 30 определить ошибку при изготовлении изделия, которая не будет превзойдена с вероятностью 0,95. *Отв.* 0,392.

**32.** Случайная величина $x$ распределена по нормальному закону с параметрами $\mathsf{M}[x]=5$ и $\sigma=2$. Определить вероятность того, что случайная величина окажется в интервале (1, 10). Сделать чертеж. *Отв.* 0,971.

**33.** Длина изготовляемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $\mathsf{M}[x]=15$, $\sigma=0{,}2$. Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть $15\pm 0{,}3$. Какую точность длины изготовляемой детали можно гарантировать с вероятностью 0,97? Сделать чертеж.

**34.** При измерении некоторой величины получен следующий статистический ряд:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Относительная частота | 20 | 15 | 10 | 5 |

Определить статистическое среднее и статистическую дисперсию. *Отв.* 2; 1.

**35.** Результаты измерения даются таблицей

| $x$ | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Относительная частота | 4 | 18 | 33 | 35 | 9 | 1 |

Определить статистическое среднее $\overline{a}$, статистическую дисперсию $\overline{\sigma}$. *Отв.* 0,226; 0,004.

**36.** Вероятность брака при производстве деталей $p=0{,}02$. Найти вероятность того, что в партии из 400 деталей окажется от 7 до 10 бракованных деталей. *Отв.* 0,414.

**37.** Вероятность попадания в цель $p=1/2$. Какова вероятность того, что при 250 выстрелах число попаданий будет заключено между 100 и 150? *Отв.* 0,998.

**38.** Вероятность брака при изготовлении некоторых деталей $p=0{,}02$. Определить вероятность того, что среди взятых 1000 штук деталей окажется бракованных не более 25. *Отв.* 0,87.

ГЛАВА XXI

# МАТРИЦЫ. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ СИСТЕМ И РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Линейные преобразования. Матрица

Рассмотрим две плоскости $P$ и $Q$. Пусть в плоскости $P$ задана прямоугольная система координат $x_1Ox_2$ и в плоскости $Q$ — система координат $y_1Oy_2$.

Плоскости $P$ и $Q$ могут совмещаться. Также могут совмещаться и системы координат. Рассмотрим систему уравнений

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \tag{1}$$

На основании равенств (1) каждой точке $M(x_1; x_2)$ плоскости $x_1Ox_2$ соответствует точка $\overline{M}(y_1; y_2)$ плоскости $y_1Oy_2$.

Говорят, что уравнения (1) определяют линейные преобразования координат, отображающие плоскость $x_1Ox_2$ на плоскость $y_1Oy_2$ (не обязательно на всю плоскость). Так как уравнения (1) линейные, то отображение называется *линейным отображением*.

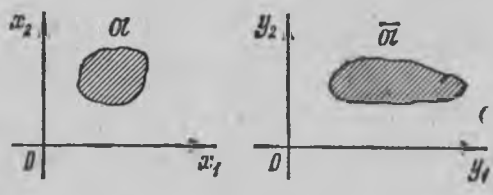


Рис. 450.

Если в плоскости $x_1Ox_2$ мы рассмотрим некоторую область $\mathfrak{A}$, то с помощью равенств (1) определяется некоторая совокупность точек $\overline{\mathfrak{A}}$ плоскости $y_1Oy_2$ (рис. 450).

Замечание. Отметим, что рассматривают и нелинейные отображения $y_1 = \varphi(x_1, x_2)$, $y_2 = \psi(x_1, x_2)$.

Мы ограничимся здесь рассмотрением только линейных отображений.

Отображение (1) полностью определяется совокупностью коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$.

Прямоугольная таблица, составленная из этих коэффициентов, записанная так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется *матрицей* отображения (1). Символы $\| \ \|$ или $( \ )$ суть символы матрицы.

Матрицы обозначают и одной буквой, например $A$ или $\|a_{ij}\|$,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Определитель, составленный из элементов матрицы без их перестановки (обозначим его $\Delta(A)$),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

называется *определителем матрицы.*

Пример 1. Отображение

$$y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \quad y_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

есть *поворот на угол* $\alpha$. При этом отображении каждая точка $M$ с полярными координатами $(\rho; \theta)$ переходит в точку $\overline{M}$ с полярными координатами $(\rho; \theta+\alpha)$, если системы координат $x_1Ox_2$ и $y_1Oy_2$ совмещены (рис. 451).

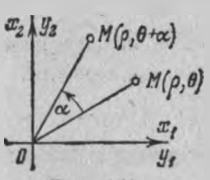



Рис. 451.

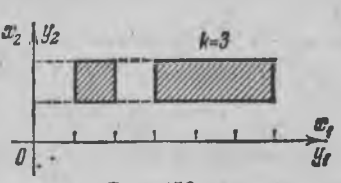



Рис. 452.

Матрица этого отображения

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Отображение

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = x_2$$

есть *растяжение вдоль оси* $Ox_1$ с коэффициентом растяжения $k$ (рис. 452).

Матрица этого отображения

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пример 3. Отображение

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2$$

есть *растяжение* в $k$ раз как в направлении оси $Ox_1$, так в направлении оси $Ox_2$ (рис. 453).

Матрица этого отображения

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}.$$

Пример 4. Преобразование

$$y_1 = -x_1, \quad y_2 = x_2$$

называется *зеркальным отражением от оси* $Ox_2$ (рис. 454).

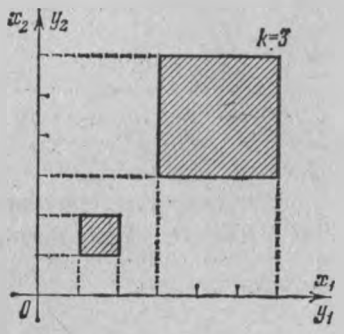



Рис. 453.

Матрица рассматриваемого преобразования имеет следующий вид:

$$A=\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Пример 5. Преобразование

$$y_1=x_1+\lambda x_2,\quad y_2=x_2$$

называется *сдвигом вдоль оси* $Ox_1$ (рис. 455).

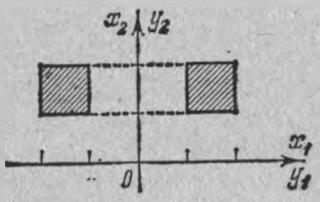



Рис. 454.

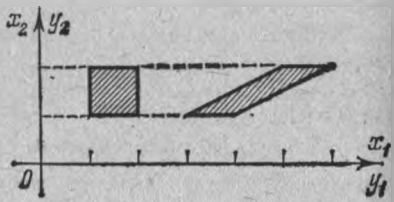



Рис. 455.

Матрица этого преобразования

$$A=\begin{Vmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Можно рассматривать линейное преобразование с любым числом переменных.

Так, преобразование

$$\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ y_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

есть отображение трехмерного пространства $(x_1, x_2, x_3)$ в трехмерное пространство $(y_1, y_2, y_3)$. Матрицей этого преобразования будет

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Можно рассматривать линейные преобразования с неквадратной матрицей, т. е. такой матрицей, где число строк не равняется числу столбцов. Так, преобразование

$$\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\\ y_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2 \end{aligned} \qquad (6)$$

является отображением плоскости $x_1Ox_2$ в некоторую совокупность точек в пространстве $(y_1, y_2, y_3)$.

Матрицей этого преобразования будет

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Рассматривают матрицы с любым числом строк и любым числом столбцов. Матрицы используются не только при линейных преобразованиях, но и в других разделах. Поэтому матрица является самостоятельным математическим понятием, аналогичным понятию определителя. Ниже сформулируем несколько определений, связанных с понятием матрицы.

## § 2. Общие определения, связанные с понятием матрицы

Определение 1. Прямоугольная таблица из $mn$ чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов,

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

называется *матрицей*. Коротко матрицу обозначают так:

$$A=\|a_{ij}\| \ (i=1, 2, \dots, m;\ j=1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

где $a_{ij}$ — члены матрицы.

Если в матрице число строк равняется числу столбцов $m=n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Определение 2. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок), называется *определителем матрицы*, будем его обозначать $\Delta(A)$:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Заметим, что неквадратная матрица определителя не имеет.

Определитель матрицы, полученной из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$, называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{ij}$ и обозначается $A_{ij}$.

Определение 3. Матрица $A^*$ называется *транспонированной* по отношению к матрице $A$, если столбцы матрицы $A$ являются строками матрицы $A^*$.

Пример. Пусть

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

Транспонированной матрицей $A^*$ будет

$$A^*=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

Определение 4. Квадратная матрица $A$ называется *симметричной относительно главной диагонали*, если $a_{ij}=a_{ji}$. Очевидно, что симметричная матрица совпадает со своей транспонированной.

Определение 5. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Если элементы диагональной матрицы, стоящие на главной диагонали, равны единице, то матрица называется *единичной*. Будем ее обозначать буквой $E$:

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Определение 6. Рассматривают матрицы, состоящие из одного столбца или из одной строки:

$$X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Vmatrix}, \quad Y=\|y_1 y_2 \dots y_m\|. \tag{6}$$

Первая матрица называется *столбцевой*, вторая *строчной*.

Определение 7. Две матрицы $A$ и $B$ считаются *равными*, если они имеют одинаковое количество строк и столбцов и соответствующие их элементы равны, т. е.

$$A=B, \tag{7}$$

или

$$\|a_{ij}\|=\|b_{ij}\| \quad (i=1, 2, \dots, m;\ j=1, 2, \dots, n), \tag{8}$$

если

$$a_{ij}=b_{ij} \tag{9}$$

Бывает удобно иногда отождествлять столбцевую матрицу с вектором в пространстве соответствующего числа измерений,

где элементы матрицы являются проекциями вектора на соответствующие оси координат. Так, можем написать

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = x_1 i + x_2 j + x_3 k. \tag{10}$$

Иногда и строчную матрицу удобно отождествлять с вектором.

## § 3. Обратное преобразование

Из уравнений (1) § 1

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{1}$$

следует, что отображение плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $y_1Oy_2$ является *однозначным*, так как каждой точке плоскости $x_1Ox_2$ соответствует единственная точка плоскости $y_1Oy_2$.

Если определитель матрицы преобразования отличен от нуля:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{или} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0, \tag{2}$$

то, как известно, система уравнений (1) имеет единственное решение относительно $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

или в развернутом виде

$$x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} y_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta} y_2, \quad x_2 = \frac{-a_{21}}{\Delta} y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} y_2. \tag{3}$$

Каждой точке $M(y_1; y_2)$ плоскости $y_1Oy_2$ соответствует определенная точка $M(x_1; x_2)$ плоскости $x_1Ox_2$. В этом случае отображение (1) называется взаимно однозначным (*невырожденным*). Преобразование (3) координат $(y_1; y_2)$ в координаты $(x_1; x_2)$ называется *обратным*. В этом случае обратное отображение является линейным. Заметим, что линейное невырожденное отображение называется *аффинным*. Матрицей обратного преобразования является матрица (обозначим ее через $A^{-1}$):

$$A^{-1} = \left\|\begin{matrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{matrix}\right\|. \tag{4}$$

Если определитель матрицы $A$ равен нулю:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \tag{5}$$

то матрица $A$ и преобразование (1) называются *вырожденными*. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, то при любых $x_1$ и $x_2$ будут $y_1=0$, $y_2=0$. В этом случае любая точка $(x_1; x_2)$ плоскости $x_1Ox_2$ переходит в начало координат плоскости $y_1Oy_2$.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11}\neq 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на $a_{21}$, второе на $a_{11}$ и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

$$\begin{array}{l|l} a_{21} & y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ a_{11} & y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \\ \hline & a_{21}y_1-a_{11}y_2=0. \end{array} \qquad (6)$$

Итак, при любых $x_1$, $x_2$ для значений $y_1$ и $y_2$ получаем равенство (6), т. е. соответствующая точка плоскости $x_1Ox_2$ попадает на прямую (6) плоскости $y_1Oy_2$. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости $y_1Oy_2$ соответствует совокупность точек плоскости $x_1Ox_2$, лежащих на прямой $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$.

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

Пример 1. Преобразование

$$y_1=2x_1+x_2, \quad y_2=x_1-x_2$$

является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования $A$ отличен от нуля:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Обратное преобразование будет

$$x_1=\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2, \quad x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2.$$

Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Линейное преобразование

$$y_1=x_1+2x_2, \quad y_2=2x_1+4x_2$$

является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Это преобразование переводит все точки плоскости $(x_1, x_2)$ в прямую $y_2-2y_1=0$ плоскости $(y_1, y_2)$.

## § 4. Действия над матрицами. Сложение матриц

Определение 1. *Суммой* двух матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица $\|c_{ij}\|$, у которой элементом $c_{ij}$ является сумма $a_{ij}+b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$, т. е.

$$\|a_{ij}\|+\|b_{ij}\|=\|c_{ij}\|, \tag{1}$$

если

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Пример 1. $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{Vmatrix}$.

Аналогичным образом определяется *разность* двух матриц.

Целесообразность такого определения суммы двух матриц, в частности, следует из представления вектора как столбцевой матрицы.

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число $\lambda$, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\lambda\|a_{ij}\|=\|\lambda a_{ij}\|. \tag{3}$$

Если $\lambda$ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

Пример 2. $\lambda\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}$.

Произведение двух матриц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $y_1Oy_2$:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \quad y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \tag{4}$$

с матрицей преобразования

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости $y_1Oy_2$ на плоскость $z_1Oz_2$:

$$z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2, \quad z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2 \tag{6}$$

с матрицей преобразования

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Требуется определить матрицу преобразования плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $z_1Oz_2$. Подставляя выражения (4) в равенства (6), получаем

$$z_1=b_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2),$$
$$z_2=b_{21}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{22}(a_{21}x_1+a_{22}x_2),$$

или

$$z_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\,x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\,x_2,$$
$$z_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\,x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\,x_2. \tag{8}$$

Матрица полученного преобразования будет

$$C = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

или коротко

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Матрицу (9) называют *произведением* матриц (7), (5) и пишут

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix}; \tag{11}$$

или коротко

$$B \cdot A = C. \tag{12}$$

Сформулируем далее правило умножения двух матриц $B$ и $A$, если первая содержит $m$ строк и $k$ столбцов, а вторая $k$ строк и $n$ столбцов.

Схематически оно показано в равенстве

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Элемент $c_{ij}$ матрицы $C$, являющейся произведением матрицы $B$ на матрицу $A$, равен сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $B$ на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы $A$, т. е.

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k} b_{i\lambda}a_{\lambda j} \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Пример 3. Пусть

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

тогда

1) $$BA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

2) $$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В данном примере

$$BA \neq AB.$$

Мы пришли к следующему выводу. *При умножении матриц не справедлив переместительный закон.*

Пример 4. Даны матрицы

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&1&0\\2&0&1\\1&0&1\end{Vmatrix}.$$

Найти $AB$ и $BA$.

Решение. По формуле (13) находим

$$AB=\begin{Vmatrix}1\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot1\\ 0\cdot0+2\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot1+2\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot1+1\cdot1\\ 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot1+0\cdot1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\5&0&3\\0&3&0\end{Vmatrix},$$

$$BA=\begin{Vmatrix}0\cdot1+1\cdot0+0\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot2+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\\ 2\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 1\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&2&1\\5&0&0\\4&0&0\end{Vmatrix}.$$

Пример 5. Найдем произведение матриц:

$$\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\end{Vmatrix}.$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться в справедливости следующих соотношений для матриц ($k$ — число, $A$, $B$, $C$ — матрицы):

$$(kA)\cdot B=A\cdot(kB), \tag{14}$$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C, \tag{15}$$

$$C\cdot(A+B)=CA+CB, \tag{16}$$

$$A(BC)=(AB)C. \tag{17}$$

На основании правил умножения квадратной матрицы $A$ на число $k$ и правила вынесения общего множителя элементов столбцов определителя для матрицы $n$-го порядка следует

$$\Delta(kA)=k^n\Delta(A). \tag{18}$$

Так как при умножении двух квадратных матриц $A$ и $B$ получается квадратная матрица, элементы которой образуются по правилу умножения определителей, то очевидно, что справедливо следующее равенство:

$$\Delta(AB)=\Delta(A)\cdot\Delta(B). \tag{19}$$

Умножение на единичную матрицу. Квадратная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю (как указывалось выше), называется *единичной матрицей*.

Так, единичной матрицей 2-го порядка будет

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

На основании правила умножения матриц получаем:

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

т. е.

$$AE = A, \tag{21}$$

а также

$$EA = A. \tag{22}$$

Легко видеть, что произведение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу равняется первоначальной матрице, т. е. справедливы равенства (21) и (22). Таким образом, при умножении матриц единичная матрица играет роль единицы, поэтому и называется единичной.

Единичной матрице (20) соответствует преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2.$$

Такое преобразование называется *тождественным*. Обратно, тождественному преобразованию соответствует единичная матрица. Аналогичным образом определяется тождественное преобразование любого числа переменных.

## § 5. Преобразование вектора в другой вектор с помощью матрицы

Пусть дан вектор

$$\mathbf{X} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$

который запишем в виде столбцевой матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Произведем преобразование проекций этого вектора с помощью матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Получим новый вектор

$$\mathbf{Y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k},$$

который в виде столбцевой матрицы можно записать так:

$$Y=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Пользуясь правилом умножения матриц, эту операцию преобразования можно записать так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

т. е.

$$Y=AX. \tag{6}$$

*При умножении квадратной матрицы на столбцевую получается столбцевая матрица той же высоты.*

Очевидно, что преобразование трехмерного вектора $X$ в вектор $Y$—это другая формулировка преобразования трехмерного пространства в трехмерное.

Отметим, что система равенств (3) вытекает из матричного равенства (4) путем приравнивания элементов матриц, стоящих слева и справа.

Равенство (4) дает преобразование вектора $X$ в вектор $Y$ с помощью матрицы $A$.

Все проведенные рассуждения для вектора в трехмерном пространстве переносятся на преобразование векторов в пространстве любого числа измерений.

## § 6. Обратная матрица

Пусть дан вектор $X$. Произведем над ним преобразование с помощью квадратной матрицы $A$, получим вектор $Y$:

$$Y=AX. \tag{1}$$

Пусть определитель матрицы $A$ отличен от нуля: $\Delta(A)\neq 0$. Тогда существует обратное преобразование вектора $Y$ в вектор $X$. Это преобразование находится путем решения системы уравнений (3) § 5 относительно $x_1$, $x_2$, $x_3$. Матрица обратного преобразования называется *обратной матрицей* к $A$ и обозначается $A^{-1}$. Таким образом, можем написать

$$X=A^{-1}Y. \tag{2}$$

Здесь $X$—столбцевая матрица, $Y$—столбцевая матрица, $AX$—столбцевая матрица, $A^{-1}$—квадратная матрица. Подставляя вместо $Y$ в правой части равенства (2) правую часть равенства (1), получаем

$$X=A^{-1}AX. \tag{3}$$

Над вектором $\boldsymbol{X}$ последовательно произвели преобразование с матрицами $A$ и $A^{-1}$, т. е. произвели преобразование с матрицей, равной произведению матриц $(A^{-1}A)$. В результате получилось тождественное преобразование. Следовательно, матрица $A^{-1}A$ есть единичная матрица:

$$A^{-1}A = E. \tag{4}$$

Равенство (3) имеет вид

$$\boldsymbol{X} = E\boldsymbol{X}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если матрица $A^{-1}$—обратная к матрице $A$, то и матрица $A$—обратная к матрице $A^{-1}$, т. е. справедливы равенства*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{6}$$

Доказательство. К обеим частям равенства (3) применим преобразование с помощью матрицы $A$:

$$A\boldsymbol{X} = A(A^{-1}A)\boldsymbol{X}.$$

Пользуясь свойством сочетательности при умножении матриц, последнее равенство можно переписать так:

$$A\boldsymbol{X} = (AA^{-1})A\boldsymbol{X}.$$

Отсюда следует, что

$$AA^{-1} = E. \tag{7}$$

Утверждение доказано.

Из равенств (4) и (7) следует, что матрицы $A$ и $A^{-1}$ взаимно обратные. Из указанных равенств также следует

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{8}$$

Действительно, из равенств (7) следует

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (4), получаем равенство (8).

## § 7. Нахождение матрицы, обратной данной

Пусть дана невырожденная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Докажем, что *обратной матрицей* $A^{-1}$ *будет матрица*

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ (см. § 2).

Найдем матрицу $C$, равную произведению матриц $A$, $A^{-1}$:

$$C=AA^{-1}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Действительно, на основании правила умножения матриц диагональный член матрицы $C$ равен сумме произведений элементов строки определителя $\Delta$ на соответствующие им алгебраические дополнения, деленной на определитель $\Delta$, т. е. равен единице. Например, элемент $c_{11}$ определяется так:

$$c_{11}=a_{11}\frac{A_{11}}{\Delta}+a_{12}\frac{A_{12}}{\Delta}+a_{13}\frac{A_{13}}{\Delta}=\frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{\Delta}=1.$$

Каждый недиагональный член равен сумме произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения другой строки, деленной на определитель $\Delta$; например, элемент $c_{23}$ определяется так:

$$c_{23}=a_{21}\frac{A_{31}}{\Delta}+a_{22}\frac{A_{32}}{\Delta}+a_{23}\frac{A_{33}}{\Delta}=\frac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{\Delta}=\frac{0}{\Delta}=0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Матрица

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

называется матрицей, *присоединенной* к $A$. Обратная матрица $A^{-1}$ через присоединенную $\tilde{A}$ выражается так:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\tilde{A}. \tag{5}$$

Справедливость этого равенства следует из равенства (3).

Пример. Дана матрица

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Найти обратную матрицу $A^{-1}$ и присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

Р е ш е н и е. Находим определитель матрицы $A$:

$$\Delta(A)=5.$$

Находим алгебраические дополнения

$$\begin{array}{lll} A_{11}=5, & A_{12}=0, & A_{13}=0, \\ A_{21}=-4, & A_{22}=2, & A_{23}=-1, \\ A_{31}=2, & A_{32}=-1, & A_{33}=3. \end{array}$$

Следовательно, по формуле (3)

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

По формуле (4) находим присоединенную матрицу

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

## § 8. Матричная запись системы линейных уравнений

Рассуждения будем проводить для случая трехмерного пространства. Пусть имеем систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=d_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=d_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=d_3. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Рассмотрим три матрицы:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad (2)$$

$$X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad (3)$$

$$D=\begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \quad (4)$$

Тогда, пользуясь правилом умножения матриц, систему (1) можно записать в матричной форме так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Действительно, в последнем равенстве в левой части стоит произведение двух матриц, которое равно столбцевой матрице,

элементы которой определяются равенством (5). Справа стоит также столбцевая матрица. Две матрицы равны, если равны их элементы. Приравнивая соответствующие элементы, получим систему уравнений (1). Матричное равенство (5) коротко записывают так:

$$AX = D. \tag{6}$$

Пример. Записать в матричной форме систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Решение. Напишем матрицу $A$ системы, матрицу решений $X$ и матрицу свободных членов $D$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Данная система линейных уравнений в матричной форме запишется так:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

## § 9. Решение системы линейных уравнений матричным методом

Пусть определитель матрицы $A$ отличен от нуля: $\Delta(A) \neq 0$. Умножив левую и правую части равенства (6) § 8 слева на матрицу $A^{-1}$, обратную матрице $A$, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}D. \tag{1}$$

Но

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X,$$

поэтому из (1) следует

$$X = A^{-1}D. \tag{2}$$

Последнее равенство с учетом равенства (5) § 7 можно записать так:

$$X = \frac{1}{\Delta(A)} \tilde{A}D, \tag{3}$$

или в развернутом виде

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Производя умножение матриц, стоящих справа, получим

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{Vmatrix} d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31} \\ d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32} \\ d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Приравнивая члены матриц, стоящих слева и справа, получаем

$$x_1=\frac{d_1A_{11}+d_2A_{21}+d_3A_{31}}{\Delta},$$
$$x_2=\frac{d_1A_{12}+d_2A_{22}+d_3A_{32}}{\Delta}, \qquad (6)$$
$$x_3=\frac{d_1A_{13}+d_2A_{23}+d_3A_{33}}{\Delta}.$$

Решение (6) можно записать в форме определителей:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13}\\ d_2 & a_{22} & a_{23}\\ d_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13}\\ a_{21} & d_2 & a_{23}\\ a_{31} & d_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}, \quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1\\ a_{21} & a_{22} & d_2\\ a_{31} & a_{32} & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}. \qquad (7)$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$x_1+2x_2=5, \quad 3x_2+x_3=9, \quad x_2+2x_3=8$$

матричным методом.

Решение. Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta(A)=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{Vmatrix}=5.$$

Определим обратную матрицу по формуле (3) § 7:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{Vmatrix}.$$

Матрица $D$ такова:

$$D=\begin{Vmatrix} 5\\ 9\\ 8\end{Vmatrix}.$$

Решение в матричной форме по формуле (2) запишется так:

$$\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 5\\ 9\\ 8\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1\cdot5-\frac{4}{5}\cdot9+\frac{2}{5}\cdot8\\ 0\cdot5+\frac{2}{5}\cdot9-\frac{1}{5}\cdot8\\ 0\cdot5-\frac{1}{5}\cdot9+\frac{3}{5}\cdot8\end{Vmatrix}.$$

Приравнивая строки матриц, стоящих слева и справа, получаем

$$x_1 = 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 = 1,$$

$$x_2 = 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 = 2,$$

$$x_3 = 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 = 3.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

матричным методом.

Решение. Находим определитель матрицы системы

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Пишем решение системы в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{Vmatrix}.$$

Приравнивая строки матриц, стоящих справа и слева, получаем

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -7.$$

## § 10. Ортогональные отображения. Ортогональные матрицы

Пусть в трехмерном пространстве имеем две прямоугольные системы координат $(x_1, x_2, x_3)$ и $(x_1', x_2', x_3')$, имеющие общее начало $O$. Пусть точка $M$ имеет координаты $(x_1; x_2; x_3)$ и $(x_1'; x_2'; x_3')$ в первой и второй системах координат (можно начала координат и не совмещать).

Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные векторы на осях координат в первой системе координат, через $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ единичные векторы во второй системе координат. Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ являются базисными векторами в системе $(x_1, x_2, x_3)$, векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ базисные в системе $(x_1', x_2', x_3')$.

Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ в первой системе координат запишется так:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3; \tag{1}$$

во второй системе:

$$\overrightarrow{OM} = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + x_3'\boldsymbol{e}_3'. \tag{2}$$

Рассмотрим преобразование координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ произвольной точки $M$ в координаты $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ этой же точки. Можно сказать,

что будем рассматривать преобразование пространства $(x_1, x_2, x_3)$ в пространство $(x_1', x_2', x_3')$.

Это преобразование обладает тем свойством, что отрезок длины $l$ переходит в отрезок той же длины $l$. Треугольник переходит в равный треугольник, следовательно, два вектора, выходящие из одной точки с углом $\psi$ между ними, переходят в два вектора той же длины с тем же углом между ними.

Преобразование, обладающее указанным свойством, называется *ортогональным*.

Можно сказать, что при ортогональном преобразовании происходит перемещение всего пространства как твердого тела или перемещение и зеркальное отображение. Определим матрицу этого преобразования.

Выразим единичные векторы $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$ через единичные векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$:

$$\begin{aligned} e_1' &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3, \\ e_2' &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{32}e_3, \\ e_3' &= \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \cos(e_1, e_1'), \quad \alpha_{12} = \cos(e_1, e_2'), \quad \alpha_{13} = \cos(e_1, e_3'), \\ &\alpha_{21} = \cos(e_2, e_1'), \quad \alpha_{22} = \cos(e_2, e_2'), \quad \alpha_{23} = \cos(e_2, e_3'), \\ &\alpha_{31} = \cos(e_3, e_1'), \quad \alpha_{32} = \cos(e_3, e_2'), \quad \alpha_{33} = \cos(e_3, e_3'). \end{aligned} \tag{4}$$

Девять направляющих косинусов запишем в виде матрицы

$$S = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пользуясь соотношениями (4), можем также написать

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}e_1' + \alpha_{12}e_2' + \alpha_{13}e_3', \\ e_2 &= \alpha_{21}e_1' + \alpha_{22}e_2' + \alpha_{23}e_3', \\ e_3 &= \alpha_{31}e_1' + \alpha_{32}e_2' + \alpha_{33}e_3'. \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что матрица

$$S^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

является транспонированной матрицей по отношению к матрице $S$. Так как $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, то их векторно-скалярное произведение равно $\pm 1$. Следовательно,

$$(e_1'e_2'e_3') = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{8}$$

Аналогично

$$(e_1e_2e_3) = \Delta(S^*) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{9}$$

Вычислим произведение матриц

$$SS^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E. \tag{10}$$

Действительно, если обозначить через $c_{ij}$ элементы матрицы произведения, то получаем

$$\begin{aligned} c_{11} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1, \\ c_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, \\ c_{33} &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \\ c_{12} &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = e_1'e_2' = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично

$$c_{ij} = e_i'e_j' = 0 \text{ при } i \neq j \ (i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Итак,

$$SS^* = E. \tag{13}$$

Таким образом, транспонированная матрица $S^*$ совпадает с обратной матрицей $S^{-1}$:

$$S^* = S^{-1}. \tag{14}$$

Матрица, удовлетворяющая условиям (13) или (14), т. е. обратная своей транспонированной, называется *ортогональной*. Найдем далее формулы преобразования координат $(x_1, x_2, x_3)$ в координаты $(x_1', x_2', x_3')$ и обратно. В силу формул (3) и (6) правые части равенств (1) и (2) можно выразить как через базис $(e_1, e_2, e_3)$, так и через базис $(e_1', e_2', e_3')$. Следовательно, можно написать равенство

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3'. \tag{15}$$

Умножая последовательно все члены равенства (15) на вектор $e_1'$, на вектор $e_2'$, на вектор $e_3'$ и учитывая, что

$$\begin{aligned} e_i'e_j' &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ e_i'e_j' &= 1 \quad \text{при } i = j, \\ e_ie_j' &= \alpha_{ij}, \end{aligned} \tag{16}$$

получим

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ x_2' &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ x_3' &= \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Умножая члены равенства (15) последовательно на $e_1$, $e_2$, $e_3$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3', \\ x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3'. \end{aligned} \tag{18}$$

Итак, матрицей ортогональных преобразований (17) является матрица $S$, а матрицей обратного преобразования (18) — матрица $S^*$.

Таким образом, доказано, что в декартовой системе координат *ортогональному преобразованию* соответствует *ортогональная матрица*. Можно доказать, что если матрицы прямого и обратного преобразования (17) и (18) удовлетворяют соотношению (13) или (14), т. е. являются ортогональными, то и преобразование будет ортогональным.

Если введем столбцевые матрицы

$$\boldsymbol{X}' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

то системы (17) и (18) можно записать так:

$$\boldsymbol{X}' = S\boldsymbol{X}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{X} = S^{-1}\boldsymbol{X}'. \tag{21}$$

Если введем матрицы, транспонированные к матрицам (19):

$$\boldsymbol{X}'^* = \| x_1' \; x_2' \; x_3' \|, \quad \boldsymbol{X}^* = \| x_1 \; x_2 \; x_3 \|, \tag{22}$$

то можем написать

$$\boldsymbol{X}'^* = \boldsymbol{X}^* S^{-1}, \quad \boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}'^* S. \tag{23}$$

## § 11. Собственный вектор линейного преобразования

Определение 1. Пусть дан вектор $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0.$$

Если после преобразования вектора $\boldsymbol{X}$ с помощью матрицы (см. (2) § 5) получается вектор $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

параллельный вектору $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{Y} = \lambda\boldsymbol{X}, \tag{3}$$

де $\lambda$ — число, то вектор $\boldsymbol{X}$ называется *собственным вектором матрицы* $A$ или *собственным вектором данного линейного преобразования*; число $\lambda$ называется *собственным значением*.

Найдем собственный вектор

$$\boldsymbol{X}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

для данного линейного преобразования или для данной матрицы $A$. Чтобы вектор $\boldsymbol{X}$ был собственным вектором матрицы $A$, необходимо, чтобы выполнялись равенства (2) и (3). Приравнивая правые части этих равенств, получаем:

$$A\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X} \tag{4}$$

или

$$A\boldsymbol{X}=\lambda E\boldsymbol{X},$$

т. е.

$$(A-\lambda E)\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

Из этого равенства следует, что вектор $\boldsymbol{X}$ определяется с точностью до постоянного множителя.

В развернутом виде равенство (4) записывается, очевидно, так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=\lambda x_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=\lambda x_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=\lambda x_3, \end{aligned} \tag{6}$$

а равенство (5) запишется так:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1+\quad a_{12}x_2+\quad a_{13}x_3&=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)\,x_2+\quad a_{23}x_3&=0,\\ a_{31}x_1+\quad a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)\,x_3&=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Получили систему однородных линейных уравнений для определения координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ вектора $\boldsymbol{X}$. Чтобы система (7) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{8}$$

или

$$\Delta(A-\lambda E)=0. \tag{9}$$

Это есть уравнение третьей степени относительно $\lambda$. Оно называется *характеристическим уравнением матрицы* $A$. Из этого уравнения находятся собственные значения $\lambda$.

Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения действительные и различные. Обозначим их через $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.

Каждому собственному значению $\lambda$ соответствует собственный вектор, координаты которого определяются из системы (7) при соответствующем значении $\lambda$. Обозначим собственные векторы через $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$. Можно показать, что эти векторы линейно независимы, т. е. ни один из них не выражается через остальные. Следовательно, любой вектор можно выразить через векторы $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, т. е. их можно принять за базисные векторы.

Отметим без доказательства, что все корни характеристического уравнения симметрической матрицы действительны.

Пример 1. Найти собственные векторы и соответствующие им собственные значения матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 5.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -1$, из соответствующей системы уравнений (7):

$$\begin{matrix} (1-\lambda_1)\,x_1 + & x_2 = 0, \\ 8x_1 + (3-\lambda_1)\,x_2 = 0, \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} 2x_1 + & x_2 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 = 0. \end{matrix}$$

Решая эту систему, находим $x_1 = m$, $x_2 = -2m$, где $m$ — произвольное число. Собственный вектор будет

$$\tau_1 = m\boldsymbol{i} - 2m\boldsymbol{j}.$$

Для собственного значения $\lambda_2 = 5$ пишем систему уравнений

$$-4x_1 + x_2 = 0, \quad 8x_1 - 2x_2 = 0.$$

Собственный вектор будет

$$\tau_2 = m\boldsymbol{i} + 4m\boldsymbol{j}.$$

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{Vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.$$

Корни этого уравнения суть $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Для $\lambda_1 = 3$ собственный вектор определяется из системы уравнений

$$4x_1 - 2x_2 = 0, \ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \ -2x_2 + 2x_3 = 0.$$

Полагая $x_1 = m$, получаем $x_2 = 2m$, $x_3 = 2m$. Собственный вектор

$$\tau_1 = m\boldsymbol{i} + 2m\boldsymbol{j} + 2m\boldsymbol{k}.$$

Аналогично находим

$$\tau_2 = m\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{j} - m\boldsymbol{k}, \quad \tau_3 = -m\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{k}.$$

## § 12. Матрица линейного преобразования, при котором базисные векторы являются собственными векторами

Определим, далее, матрицу линейного преобразования, когда базисом являются собственные векторы $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$. При этом преобразовании должны выполняться соотношения

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1, \quad \tau_2^* = \lambda_2\tau_2, \quad \tau_3^* = \lambda_3\tau_3, \tag{1}$$

где $\tau_1^*$, $\tau_2^*$, $\tau_3^*$ — образы векторов $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$.

Пусть матрица преобразования будет

$$A' = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Определим члены этой матрицы. В базисе $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ можем написать

$$\tau_1 = 1\cdot\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Так как вектор $\tau_1$ после преобразования с помощью матрицы $A'$ переходит в вектор $\tau_1^* = \lambda_1\tau_1$:

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3,$$

то можем написать

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 = A'\tau_1.$$

Следовательно,

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{3}$$

или в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a'_{11}\cdot 1 + a'_{12}\cdot 0 + a'_{13}\cdot 0, \\ 0 &= a'_{21}\cdot 1 + a'_{22}\cdot 0 + a'_{23}\cdot 0, \\ 0 &= a'_{31}\cdot 1 + a'_{32}\cdot 0 + a'_{33}\cdot 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из этой системы находим:

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{21} = 0, \quad a'_{31} = 0.$$

На основании соотношений

$$\tau_2^* = \lambda_2\tau_2, \quad \tau_3^* = \lambda_3\tau_3$$

аналогично найдем

$$\begin{aligned} a'_{12} &= 0, \quad a'_{22} = \lambda_2, \quad a'_{32} = 0, \\ a'_{13} &= 0, \quad a'_{23} = 0, \quad a'_{33} = \lambda_3. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица преобразования имеет вид

$$A' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Линейное преобразование будет

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 x_1', \\ y_2' &= \lambda_2 x_2', \\ y_3' &= \lambda_3 x_3'. \end{aligned} \tag{6}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^*$, то линейное преобразование имеет вид

$$y_1' = \lambda^* x_1', \quad y_2' = \lambda^* x_2', \quad y_3' = \lambda^* x_3'.$$

Такое преобразование называется преобразованием *подобия* с коэффициентом $\lambda^*$. При этом преобразовании каждый вектор пространства является собственным вектором с собственным значением $\lambda^*$.

## § 13. Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе от одного базиса к другому

Пусть $X$ — произвольный вектор:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \tag{1}$$

заданный в базисе $(e_1, e_2, e_3)$. Вектор $X$ преобразуется с помощью матрицы $A$ в вектор $Y$:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \tag{2}$$

$$Y = AX. \tag{3}$$

Введем в рассматриваемом пространстве новый базис $(e_1', e_2', e_3')$, связанный со старым базисом формулами перехода

$$\begin{aligned} e_1' &= b_{11} e_1 + b_{21} e_2 + b_{31} e_3, \\ e_2' &= b_{12} e_1 + b_{22} e_2 + b_{32} e_3, \\ e_3' &= b_{13} e_1 + b_{23} e_2 + b_{33} e_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть вектор $X$ в новом базисе напишется так:

$$X' = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Можем написать равенство

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3', \tag{6}$$

где в правую часть подставлены выражения (4). Приравнивая коэффициенты при векторах $e_1$, $e_2$, $e_3$ справа и слева, получим равенства

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_2 &= b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3 &= b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3', \end{aligned} \tag{7}$$

или коротко

$$X = BX', \tag{8}$$

где

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Эта матрица невырожденная, имеет обратную матрицу $B^{-1}$, так как система (7) имеет определенное решение относительно $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$. Если в новом базисе запишем вектор $Y$:

$$Y' = y_1'e_1' + y_2'e_2' + y_3'e_3',$$

то, очевидно, имеет место равенство

$$Y = BY'. \tag{10}$$

Подставляя выражения (8) и (10) в (3), получим

$$BY' = ABX'. \tag{11}$$

Умножая обе части равенства на $B^{-1}$, получим

$$Y' = B^{-1}ABX'. \tag{12}$$

Следовательно, матрица $A'$ преобразования в новом базисе будет

$$A' = B^{-1}AB. \tag{13}$$

Пример. Пусть с помощью матрицы $A$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

производится преобразование вектора в базисе $(e_1, e_2, e_3)$. Определить матрицу преобразования $A'$ в базисе $(e_1', e_2', e_3')$, если

$$e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad e_2' = 2e_1 + e_2 + 3e_3, \quad e_3' = e_1 + e_2 + e_3.$$

Решение. Здесь матрица $B$ такова (см. формулы (4) и (9)):

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу ($\Delta(B) = 1$)

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Далее находим

$$B^{-1}A=\begin{Vmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -4\end{Vmatrix}.$$

Окончательно по формуле (13) находим

$$A'=B^{-1}AB=\begin{Vmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{Vmatrix}.$$

Докажем, далее, следующую теорему.

Теорема 1. *Характеристический многочлен* (*левая часть уравнения* (8) § 11) *не меняется в зависимости от выбора базиса при данном линейном преобразовании.*

Доказательство. Напишем два матричных равенства

$$A'=B^{-1}AB,\ E=B^{-1}EB,$$

где $A$ и $A'$ — матрицы, соответствующие различным базисам при одном и том же линейном преобразовании, $B$ — матрица перехода от новых координат к старым, $E$ — единичная матрица.

На основании двух последних равенств получаем

$$A'-\lambda E=B^{-1}(A-\lambda E)B.$$

Переходя от матриц к определителям и пользуясь правилом умножения матриц и определителей, получаем

$$\Delta(A'-\lambda E)=\Delta(B^{-1}(A-\lambda E)B)=\Delta(B^{-1})\Delta(A-\lambda E)\Delta(B).$$

Но

$$\Delta(B^{-1})\Delta(B)=\Delta(B^{-1}B)=\Delta(E)=1.$$

Следовательно,

$$\Delta(A'-\lambda E)=\Delta(A-\lambda E).$$

Слева и справа стоят характеристические многочлены матриц преобразования. Теорема доказана.

## § 14. Квадратичные формы и их преобразования

Определение 1. *Квадратичной формой* от нескольких переменных называется однородный многочлен второй степени от этих переменных.

Квадратичная форма от трех переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$ имеет вид

$$F=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{33}x_2x_3, \qquad (1)$$

где $a_{ij}$ — заданные числа, коэффициенты 2 взяты для того, чтобы получить более простые последующие формулы.

Равенство (1) можно написать так:

$$F = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \quad (2)$$

где $a_{ij}$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ — заданные числа, при этом

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}. \quad (3)$$

Матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \quad (4)$$

называется *матрицей квадратичной формы* (1). Данная матрица симметричная.

Будем считать $(x_1, x_2, x_3)$ координатами точки пространства или координатами вектора в ортогональном базисе $(e_1, e_2, e_3)$, где $e_1$, $e_2$, $e_3$ — единичные векторы.

Рассмотрим линейное преобразование в базисе $(e_1, e_2, e_3)$:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Матрица этого преобразования совпадает с матрицей квадратичной формы.

Определим далее два вектора

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad (6)$$

$$X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \quad (7)$$

Преобразование (5) запишем в форме

$$X' = AX. \quad (8)$$

Тогда квадратичную форму (2) можно представить как скалярное произведение этих векторов:

$$F = (X, AX). \quad (9)$$

Пусть $e_1'$, $e_2'$, $e_3'$ — ортогональные собственные векторы преобразования (8), соответствующие собственным значениям $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. Можно доказать, что если матрица симметрична, то существует ортогональный базис, составленный из собственных векторов матрицы. Произведем преобразование (8) в базисе $(e_1', e_2', e_3')$. Тогда матрица преобразования в этом базисе будет диагональной

(см. § 12):

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Можно показать, что применяя это преобразование к квадратичной форме (1), можно привести последнюю к виду

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2. \tag{11}$$

Направления собственных векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ называются *главными направлениями* квадратичной формы.

## § 15. Ранг матрицы. Существование решений системы линейных уравнений

Определение 1. *Минором* данной матрицы называется определитель, составленный без перестановок из оставшихся элементов матрицы после вычеркивания из нее нескольких строк и столбцов.

Пример 1. Пусть дана матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}.$$

Миноры третьего порядка этой матрицы получаются после вычеркивания одного столбца и замены знака матрицы $\| \ \|$ знаком определителя $| \ |$. Их четыре. Миноры второго порядка получаются после вычеркивания двух столбцов и одной строки, их 18. Миноров первого порядка 12.

Определение 2. *Рангом* матрицы $A$ называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы $A$.

Пример 2. Легко проверить, что ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

равен 2.

Пример 3. Ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

равен 1.

Если матрица $A$ квадратная порядка $n$, то ранг этой матрицы $k$ удовлетворяет соотношению $k \leqslant n$. Как указывалось выше, если $k = n$, то матрица называется невырожденной, если $k < n$, то матрица называется вырожденной.

Например, матрица

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

является невырожденной, так как $\Delta(A)=1\neq 0$; матрица в примере 2 особая, так как там $n=3$, $k=2$.

Понятие ранга матрицы широко используется в теории систем линейных уравнений. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть дана система линейных уравнений:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Введем в рассмотрение матрицу системы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix} \tag{2}$$

и расширенную матрицу

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\end{Vmatrix}. \tag{3}$$

*Система* (1) *имеет решения, если ранг матрицы A равен рангу матрицы B. Система не имеет решений, если ранг матрицы A меньше ранга матрицы B. Если ранг матрицы A и ранг матрицы B равен* 3, *то система имеет единственное решение.*

*Если ранг матриц A и B равен* 2, *то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных выражаются через третье, которое имеет произвольное значение.*

*Если ранг матриц A и B равен* 1, *то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных имеют произвольные значения, а третье выражается через них.*

Справедливость этой теоремы легко устанавливается на основании анализа решений системы уравнений, известного из алгебры. Эта теорема справедлива для системы любого числа уравнений.

## § 16. Дифференцирование и интегрирование матриц

Пусть дана матрица $\|a_{ij}(t)\|$, где членами $a_{ij}(t)$ матрицы являются функции некоторого аргумента $t$:

$$\|a_{ij}(t)\|=\begin{Vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t)\end{Vmatrix}, \tag{1}$$

или коротко будем это записывать так:

$$A(t)=\|a_{ij}(t)\| \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{2}$$

Пусть члены матрицы имеют производные

$$\frac{da_{11}(t)}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{mn}(t)}{dt}.$$

Определение 1. *Производной от матрицы* $A(t)$ называется матрица, обозначим ее через $\frac{dA(t)}{dt}$, члены которой являются производными от членов матрицы $A(t)$, т. е.

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Заметим, что такое определение производной от матрицы получается естественным путем, если наряду с введенными операциями вычитания матриц и умножения на число (см. § 4) присоединить операцию предельного перехода:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{\| a_{ij}(t+\Delta t)\| - \| a_{ij}(t)\|\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{a_{ij}(t+\Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\| = \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_{ij}(t+\Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\|.$$

Символически коротко равенство (3) можно записать так:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left\| \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right\|. \tag{4}$$

Определение 2. *Интегралом* от матрицы $A(t)$ называется матрица, обозначим ее через

$$\int_{t_0}^{t} A(z)\, dz,$$

члены которой равны интегралам от членов данной матрицы:

$$\int_{t_0}^{t} A(z)\, dz = \left\| \begin{array}{cccc} \int_{t_0}^{t} a_{11}(z)\, dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{1n}(z)\, dz \\ \int_{t_0}^{t} a_{21}(z)\, dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{2n}(z)\, dz \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{t_0}^{t} a_{m1}(z)\, dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{mn}(z)\, dz \end{array} \right\|, \tag{5}$$

более кратко:

$$\int_{t_0}^{t} \| a(z) \| dz = \left\| \int_{t_0}^{t} a_{ij}(z)\, dz \right\|. \tag{6}$$

## § 17. Матричная запись системы дифференциальных уравнений и решений системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему $n$ линейных дифференциальных уравнений с $n$ искомыми функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты $a_{ij}$ — постоянные. Введем обозначение:

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

Это матрица решений или векторное решение системы (1). Далее, определим матрицу производных от решений:

$$\frac{dX}{dt} = \left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Выпишем матрицу коэффициентов системы дифференциальных уравнений

$$A = \| a_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Пользуясь правилом умножения матриц (см. § 4), систему дифференциальных уравнений (1) можно в матричной форме записать

так:

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{5}$$

или коротко на основании правила дифференцирования матриц

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{6}$$

Пусть

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где $\alpha_i$ — некоторые числа.

Совокупность решений системы дифференциальных уравнений будем искать в форме (см. формулы (2) § 30 гл. XIII)

$$X = e^{kt}\alpha. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6) и пользуясь правилом умножения матрицы на число и правилом дифференцирования матриц, получаем

$$ke^{kt}\alpha = Ae^{kt}\alpha, \tag{9}$$

откуда

$$k\alpha = A\alpha, \tag{10}$$

или

$$A\alpha - k\alpha = 0.$$

Напомним, что в последнем равенстве $A$ — матрица (4), $k$ — число, $\alpha$ — столбцевая матрица (7). Матрицу, стоящую в левой части равенства (10), можно записать так:

$$(A - kE)\alpha = 0, \tag{11}$$

где $E$ — единичная матрица $n$-го порядка. В развернутом виде равенство (11) перепишется так:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Равенство (11) показывает, что вектор $\alpha$ с помощью матрицы $A$ преобразуется в параллельный ему вектор $k\alpha$. Следовательно, вектор $\alpha$ является собственным вектором матрицы $A$, соответствующий собственному значению $k$ (см. § 11).

В скалярной форме равенство (10) записывается как система алгебраических уравнений (см. систему (3) § 30 гл. XIII). Число $k$ должно определяться из уравнения (5) § 30 гл. XIII, которое в матричной форме можно записать так:

$$\Delta(A-kE)=0, \tag{13}$$

т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Пусть все корни уравнения (14) различны:

$$k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n.$$

Для каждого значения $k_i$ из системы (11) определяется матрица значений $\alpha$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \dots \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}$$

(одно из этих значений произвольное). Решение системы (1) в матричной форме, следовательно, запишется так:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t} \\ \dots \\ C_ne^{k_nt} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

где $C_i$ — произвольные постоянные.

В скалярной форме решения даются формулами (6) § 30 гл. XIII.

Пример 1. Записать в матричной форме систему и решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_1+2x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2.$$

Решение. Напишем матрицу системы

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

В матричной форме система уравнений запишется так (см. уравнение (5)):

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение (14) и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=0,\quad \text{т. е.}\quad k^2-5k+4=0,$$

следовательно, $k_1=1$, $k_2=4$. Составляем систему (12) для определения значений $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ для корня $k_1=1$:

$$(2-1)\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0, \qquad \alpha_1^{(1)}+(3-1)\alpha_2^{(1)}=0.$$

Полагая $\alpha_1^{(1)}=1$, получаем $\alpha_2^{(1)}=-1/2$.

Аналогичным образом находим $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2^{(2)}$, соответствующие корню $k_2=4$. Получаем $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Теперь можем написать решение системы в матричной форме (формула (15))

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{4t} \end{Vmatrix},$$

или в обычной форме

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{4t}, \quad x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

Пример 2. Записать в матричной форме систему и решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2, \quad \frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+3x_3.$$

Решение. Напишем матрицу системы

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, в матричной форме система уравнений записывается так (см. уравнение (5)):

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение (14) и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix}=1, \quad \text{т. е.} \quad (1-k)(2-k)(3-k)=0,$$

следовательно,

$$k_1=1, \quad k_2=2, \quad k_3=3.$$

Определим $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, соответствующие корню $k_1=1$, из системы уравнений (12):

$$\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0, \quad \alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}+2\alpha_3^{(1)}=0,$$

находим

$$\alpha_1^{(1)}=1, \quad \alpha_2^{(1)}=-1, \quad \alpha_3^{(1)}=0.$$

Определим $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$, соответствующие корню $k_2=2$, из системы

$$-\alpha_1^{(2)}=0, \quad \alpha_1^{(2)}=0, \quad \alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_3^{(2)}=0,$$

находим

$$\alpha_1^{(2)}=0, \quad \alpha_2^{(2)}=1, \quad \alpha_3^{(2)}=-1.$$

Определяем $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$, соответствующие корню $k_3=3$, из системы

$$-2\alpha_1^{(3)}=0,\quad \alpha_1^{(3)}-\alpha_2^{(3)}=0,\quad \alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(3)}=0,$$

находим

$$\alpha_1^{(3)}=0,\quad \alpha_2^{(3)}=0,\quad \alpha_3^{(3)}=1.$$

Напишем в матричной форме решение системы (см. формулу (15))

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{Vmatrix},$$

или в обычной форме

$$x_1=C_1e^t,\quad x_2=-C_1e^t+C_2e^{2t},\quad x_3=-C_2e^{2t}+C_3e^{3t}.$$

## § 18. Матричная запись линейного уравнения $n$-го порядка

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^nx}{dt^n}=a_n\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots+a_1x. \tag{1}$$

Заметим, что из дальнейшего изложения будет следовать, что такая нумерация коэффициентов удобна. Обозначим $x=x_1$ и, далее,

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\ \ldots,\ \frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$
$$\frac{dx_n}{dt}=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n. \tag{2}$$

Напишем матрицу коэффициентов этой системы

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Тогда систему (2), аналогично формуле (5) § 17, можно записать так:

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{4}$$

или коротко

$$\frac{dX}{dt}=AX. \tag{5}$$

Дальнейшее решение проводится так же, как это было в § 17, так как матричное уравнение (5) является частным случаем уравнения (6) § 17.

Пример. Записать в матричной форме уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}=p\frac{dx}{dt}+qx.$$

Решение. Обозначим $x=x_1$. Далее

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=px_2+qx_1.$$

В матричной форме система уравнений запишется так:

$$\left\|\begin{matrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ q & p\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\right\|.$$

## § 19. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом последовательных приближений с использованием матричной записи

Пусть требуется найти решение системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}(t)\,x_1+a_{12}(t)\,x_2+\ldots+a_{1n}(t)\,x_n,\\
\frac{dx_2}{dt}&=a_{21}(t)\,x_1+a_{22}(t)\,x_2+\ldots+a_{2n}(t)\,x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}(t)\,x_1+a_{n2}(t)\,x_2+\ldots+a_{nn}(t)\,x_n,
\end{aligned}\tag{1}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$x_1=x_{10},\ x_2=x_{20},\ \ldots,\ x_n=x_{n0} \quad \text{при} \quad t=t_0. \tag{2}$$

Если ввести в рассмотрение, наряду с матрицей коэффициентов системы и матрицей решений, матрицу начальных значений

$$\boldsymbol{X}_0=\left\|\begin{matrix}x_{10}\\ x_{20}\\ \ldots\\ x_{n0}\end{matrix}\right\|, \tag{3}$$

то систему уравнений (1) с начальными условиями (2) запишем так:

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=A(t)\,\boldsymbol{X} \tag{4}$$

при начальных условиях

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0 \quad \text{при} \quad t=t_0. \tag{5}$$

Здесь $A(t)$ — снова матрица коэффициентов системы.

Будем решать задачу методом последовательных приближений.

Для лучшего понимания дальнейшего материала применим метод последовательных приближений сначала для одного линейного уравнения первого порядка (см. гл. XVI, § 26).

Требуется найти решение одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x \tag{6}$$

при начальном условии

$$x = x_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \tag{7}$$

Будем предполагать, что $a(t)$ — непрерывная функция.

Как указывалось в § 26 гл. XVI, решение дифференциального уравнения (6) при начальном условии (7) сводится к решению интегрального уравнения

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,x(z)\,dz. \tag{8}$$

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,x_0\,dz, \\ x_2 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,x_1(z)\,dz, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,x_{m-1}(z)\,dz, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

Вводят для сокращения письма оператор $S$ — оператор интегрирования

$$S(\quad) = \int_{t_0}^{t} (\quad)\,dz. \tag{10}$$

Используя оператор $S$, равенства (9) записывают так:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + S(ax_0), \\ x_2 &= x_0 + S(ax_1) = x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))), \\ x_3 &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))))), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a\ldots)))))))), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$x_m = x_0 + Sax_0 + Sa\,Sax_0 + Sa\,Sa\,Sax_0 + \ldots + \underbrace{Sa\,Sa\,Sa\ldots Sax_0}_{m \text{ раз}}.$$

Вынося $x_0$ за скобки ($x_0$ — постоянная), получаем

$$x_m = [1 + Sa + Sa\,Sa + \ldots + \underbrace{Sa\,Sa\ldots Sa}_{m \text{ раз}}]\,x_0. \tag{11}$$

Выше (в § 26 гл. XVI) было доказано, что если $a(t)$ — непрерывная функция, то последовательность $\{x_m\}$ сходится. Предел этой последовательности есть сходящийся ряд:

$$x = [1 + Sa + Sa\,Sa + \ldots]\,x_0. \tag{12}$$

Замечание. Если $a(t) = \text{const}$, то формула (12) принимает простой вид. Действительно, на основании (10) можем написать

$$Sa = aS1 = a(t - t_0),$$

$$Sa\,Sa = a^2 S(t - t_0) = a^2 \frac{(t-t_0)^2}{2},$$

. . . . . .

$$\underbrace{Sa\,Sa\ldots Sa}_{m \text{ раз}} = a^m \frac{(t-t_0)^m}{m!}.$$

. . . . . .

В этом случае (12) принимает вид

$$x = \left[1 + a\frac{t-t_0}{1} + a^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + a^m\frac{(t-t_0)^m}{m!} + \ldots\right]x_0,$$

или

$$x = x_0 e^{a(t-t_0)}. \tag{13}$$

Рассмотренный метод решения одного уравнения (6) целиком переносится на решение системы (1) при начальных условиях (2).

В матричной форме система (1) с начальными условиями (2) запишется так:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\,X \tag{14}$$

при начальном условии

$$X = X_0 \quad \text{при } t = t_0. \tag{15}$$

Используя правило умножения матриц и интегрирования матриц, решение системы (14) при условии (15) сводится к решению матричного интегрального уравнения

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(z)\,X(z)\,dz. \tag{16}$$

Находим последовательные приближения

$$\boldsymbol{X}_m(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(z)\,\boldsymbol{X}_{m-1}(z)\,dz. \tag{17}$$

Путем последовательной подстановки последовательных приближений под интеграл решение системы в матричной форме выразится так:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(z_1)\left(\boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{z_1} A(z_2)\left(\boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{z_2} A(z_3)(\ldots)\ldots dz_3\right)dz_2\right)dz_1,$$

или

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_{t_0}^{t} A(z_1)\,\boldsymbol{X}_0 dz_1 + \int_{t_0}^{t} A(z_1)\int_{t_0}^{z_1} A(z_2)\,\boldsymbol{X}_0 dz_2 dz_1 + \ldots \tag{18}$$

Используя оператор интегрирования $S$, равенства (18) можно написать так:

$$\boldsymbol{X}(t) = [E + SA + SASA + \ldots]\,\boldsymbol{X}_0. \tag{19}$$

Оператор, стоящий в квадратных скобках, обозначают одной буквой. Обозначим его через $\mathcal{E}_A^{(t_0 t)}$. Равенство (19) коротко записывают так:

$$\boldsymbol{X}(t) = \mathcal{E}_{A(t)}^{(t_0 t)}\,\boldsymbol{X}_0. \tag{20}$$

Интересно отметить следующее обстоятельство. Если коэффициенты системы (1) постоянные, то, пользуясь правилом вынесения за знак матрицы общего множителя всех членов матрицы *), можем написать

$$SA = \frac{t-t_0}{1}A,$$

$$SASA = \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2,$$

$$SASASA = \frac{(t-t_0)^3}{3!}A^3 \text{ и т. д.}$$

Формула (19) в случае постоянных коэффициентов примет вид

$$\boldsymbol{X}(t) = \left[E + \frac{t-t_0}{1}A + \frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}A^2 + \ldots + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m + \ldots\right]\boldsymbol{X}_0. \tag{21}$$

Последнее равенство символически записывают так:

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{(t-t_0)A}\,\boldsymbol{X}_0. \tag{22}$$

---

*) Мы оставляем без обсуждения вопрос о предельном переходе для операций над матрицами.

## Упражнения к главе XXI

**1.** Для линейного преобразования $y_1=3x_1+2x_2$, $y_2=7x_1+5x_2$ найти матрицу обратного преобразования. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{Vmatrix}$.

**2.** Найти матрицу обратного преобразования $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_1$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

**3.** Найти произведение матриц $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{Vmatrix}$.

**4.** Даны матрицы $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$ и $B=\begin{Vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. Найти матрицы $AB$ и $BA$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$.

**5.** Даны: $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$, $E$ — единичная матрица 3-го порядка. Определить матрицу $A+2E$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$.

**6.** Дана матрица $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу $A^2$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{Vmatrix}$.

**7.** Пусть $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. Найти $A^2+5A$. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{Vmatrix}$.

**8.** Для матрицы $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$ найти обратную. *Отв.* $\begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix}$.

**9.** Решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=10,\\ 2x_1+x_2+x_3&=20,\\ x_1+3x_2+x_3&=30 \end{aligned}$$

записать в матричной форме и найти $x_1$, $x_2$, $x_3$.

*Отв.* $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix}$, $x_1=30$, $x_2=20$, $x_3=-60$.

**10.** Решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=3,\\ 5x_1+4x_2+3x_3&=11,\\ 10x_1+5x_2+x_3&=11{,}5 \end{aligned}$$

записать в матричной форме и найти $x_1$, $x_2$, $x_3$.

*Отв.* $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 11 \\ 11{,}5 \end{Vmatrix}$, $x_1=0{,}5$, $x_2=1$, $x_3=1{,}5$.

**11.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

*Отв.* $k_1=6$, $k_2=k_3=-3$; $\tau_1=m\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{j}-m\boldsymbol{k}$, $\tau_2$ — любой вектор, удовлетворяющий условию $\tau_1\tau_2=0$, $m$ — произвольное число.

**12.** Найти собственные векторы матрицы $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$. *Отв.* Не существуют.

**13.** Найти собственные векторы матрицы $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. *Отв.* Все векторы собственные.

**14.** Решить матричным способом систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}+x_2=0, \qquad \frac{dx_2}{dt}+4x_1=0.$$

*Отв.* $x_1=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $x_2=-2(C_1e^{2t}-C_2e^{-2t})$.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I

**Значения функции** $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ **и приведенной функции Лапласа**

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x)$$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $\Delta$ | $\hat{\Phi}(x)$ | $\Delta$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $\Delta$ | $\hat{\Phi}(x)$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 564 | 0,0000 | 269 | 1,40 | 0,9523 | 74 | 0,6550 | 169 |
| 0,05 | 0,0564 | 561 | 0,0269 | 269 | 1,45 | 0,9597 | 64 | 0,6719 | 164 |
| 0,10 | 0,1125 | 555 | 0,0538 | 268 | 1,50 | 0,9661 | 55 | 0,6883 | 159 |
| 0,15 | 0,1680 | 547 | 0,0806 | 267 | 1,55 | 0,9716 | 47 | 0,7042 | 153 |
| 0,20 | 0,2227 | 536 | 0,1073 | 266 | 1,60 | 0,9736 | 41 | 0,7195 | 147 |
| 0,25 | 0,2763 | 523 | 0,1339 | 265 | 1,65 | 0,9804 | 34 | 0,7342 | 143 |
| 0,30 | 0,3286 | 508 | 0,1604 | 262 | 1,70 | 0,9838 | 29 | 0,7485 | 136 |
| 0,35 | 0,3794 | 490 | 0,1866 | 261 | 1,75 | 0,9867 | 24 | 0,7621 | 132 |
| 0,40 | 0,4284 | 471 | 0,2127 | 258 | 1,80 | 0,9891 | 20 | 0,7753 | 126 |
| 0,45 | 0,4755 | 450 | 0,2385 | 256 | 1,85 | 0,9911 | 17 | 0,7879 | 121 |
| 0,50 | 0,5205 | 428 | 0,2641 | 252 | 1,90 | 0,9928 | 14 | 0,8000 | 116 |
| 0,55 | 0,5633 | 406 | 0,2893 | 250 | 1,95 | 0,9942 | 11 | 0,8116 | 111 |
| 0,60 | 0,6039 | 381 | 0,3143 | 246 | 2,00 | 0,9953 | 10 | 0,8227 | 105 |
| 0,65 | 0,6420 | 358 | 0,3389 | 243 | 2,05 | 0,9963 | 7 | 0,8332 | 102 |
| 0,70 | 0,6778 | 334 | 0,3632 | 238 | 2,10 | 0,9970 | 6 | 0,8434 | 96 |
| 0,75 | 0,7112 | 309 | 0,3870 | 235 | 2,15 | 0,9976 | 5 | 0,8530 | 92 |
| 0,80 | 0,7421 | 286 | 0,4105 | 231 | 2,20 | 0,9981 | 4 | 0,8622 | 87 |
| 0,85 | 0,7707 | 262 | 0,4336 | 226 | 2,25 | 0,9985 | 3 | 0,8709 | 83 |
| 0,90 | 0,7969 | 240 | 0,4562 | 221 | 2,30 | 0,9988 | 3 | 0,8792 | 79 |
| 0,95 | 0,8209 | 218 | 0,4783 | 217 | 2,35 | 0,9991 | 2 | 0,8871 | 74 |
| 1,00 | 0,8427 | 197 | 0,5000 | 212 | 2,40 | 0,9993 | 2 | 0,8945 | 71 |
| 1,05 | 0,8624 | 178 | 0,5212 | 207 | 2,45 | 0,9995 | 1 | 0,9016 | 66 |
| 1,10 | 0,8802 | 159 | 0,5419 | 201 | 2,50 | 0,9996 | 1 | 0,9082 | 64 |
| 1,15 | 0,8961 | 142 | 0,5620 | 197 | 2,55 | 0,9997 | 1 | 0,9146 | 59 |
| 1,20 | 0,9103 | 126 | 0,5817 | 191 | 2,60 | 0,9998 | 0 | 0,9205 | 56 |
| 1,25 | 0,9229 | 111 | 0,6008 | 186 | 2,65 | 0,9998 | 1 | 0,9261 | 53 |
| 1,30 | 0,9340 | 98 | 0,6194 | 181 | 2,70 | 0,9999 | 0 | 0,9314 | 50 |
| 1,35 | 0,9438 | 85 | 0,6375 | 175 | 2,75 | 0,9999 | 0 | 0,9364 | 46 |

Таблица 1 (*продолжение*)

| $x$ | $\Phi(x)$ | $\Delta$ | $\hat{\Phi}(x)$ | $\Delta$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $\Delta$ | $\hat{\Phi}(x)$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,80 | 0,9999 | 1 | 0,9410 | 44 | 3,90 | | | 0,9915 | 15 |
| 2,85 | | | 0,9454 | 41 | 4,00 | | | 0,9930 | 13 |
| 2,90 | | | 0,9495 | 39 | 4,10 | | | 0,9943 | 11 |
| 2,95 | | | 0,9534 | 36 | 4,20 | | | 0,9954 | 9 |
| 3,00 | 1,0000 | | 0,9570 | 33 | 4,30 | | | 0,9963 | 7 |
| 3,05 | | | 0,9603 | 32 | 4,40 | | | 0,9970 | 6 |
| 3,10 | | | 0,9635 | 29 | 4,50 | | | 0,9976 | 5 |
| 3,15 | | | 0,9664 | 27 | 4,60 | | | 0,9981 | 4 |
| 3,20 | | | 0,9691 | 25 | 4,70 | | | 0,9985 | 3 |
| 3,25 | | | 0,9716 | 24 | 4,80 | | | 0,9988 | 3 |
| 3,30 | | | 0,9740 | 21 | 4,90 | | | 0,9991 | 2 |
| 3,35 | | | 0,9761 | 21 | 5,00 | | | 0,9993 | 1 |
| 3,40 | | | 0,9782 | 36 | 5,10 | | | 0,9994 | 2 |
| 3,50 | | | 0,9818 | 30 | 5,20 | | | 0,9996 | 1 |
| 3,60 | | | 0,9848 | 26 | 5,30 | | | 0,9997 | 0 |
| 3,70 | | | 0,9874 | 22 | 5,40 | | | 0,9997 | |
| 3,80 | | | 0,9896 | 19 | | | | | |

Таблица 2

Значения функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,3989 | 1,00 | 0,2420 | 2,00 | 0,0540 |
| 0,05 | 0,3984 | 1,05 | 0,2299 | 2,05 | 0,0488 |
| 0,10 | 0,3970 | 1,10 | 0,2179 | 2,10 | 0,0440 |
| 0,15 | 0,3945 | 1,15 | 0,2059 | 2,15 | 0,0396 |
| 0,20 | 0,3910 | 1,20 | 0,1942 | 2,20 | 0,0355 |
| 0,25 | 0,3867 | 1,25 | 0,1826 | 2,25 | 0,0317 |
| 0,30 | 0,3814 | 1,30 | 0,1714 | 2,30 | 0,0283 |
| 0,35 | 0,3752 | 1,35 | 0,1604 | 2,35 | 0,0252 |
| 0,40 | 0,3683 | 1,40 | 0,1497 | 2,40 | 0,0224 |
| 0,45 | 0,3605 | 1,45 | 0,1394 | 2,45 | 0,0198 |
| 0,50 | 0,3521 | 1,50 | 0,1295 | 2,50 | 0,0175 |
| 0,55 | 0,3429 | 1,55 | 0,1200 | 2,55 | 0,0154 |
| 0,60 | 0,3332 | 1,60 | 0,1109 | 2,60 | 0,0136 |
| 0,65 | 0,3230 | 1,65 | 0,1023 | 2,65 | 0,0119 |
| 0,70 | 0,3123 | 1,70 | 0,0940 | 2,70 | 0,0104 |
| 0,75 | 0,3011 | 1,75 | 0,0863 | 2,75 | 0,0091 |
| 0,80 | 0,2897 | 1,80 | 0,0790 | 2,80 | 0,0079 |
| 0,85 | 0,2780 | 1,85 | 0,0721 | 2,85 | 0,0069 |
| 0,90 | 0,2661 | 1,90 | 0,0656 | 2,90 | 0,0060 |
| 0,95 | 0,2541 | 1,95 | 0,0596 | 2,95 | 0,0051 |

Таблица 2 (*продолжение*)

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,00 | 0,0044 | 3,35 | 0,0015 | 3,70 | 0,0004 |
| 3,05 | 0,0038 | 3,40 | 0,0012 | 3,75 | 0,0004 |
| 3,10 | 0,0033 | 3,45 | 0,0010 | 3,80 | 0,0003 |
| 3,15 | 0,0028 | 3,50 | 0,0009 | 3,85 | 0,0002 |
| 3,20 | 0,0024 | 3,55 | 0,0007 | 3,90 | 0,0002 |
| 3,25 | 0,0020 | 3,60 | 0,0006 | 3,95 | 0,0002 |
| 3,30 | 0,0017 | 3,65 | 0,0005 | 4,00 | 0,0001 |

Таблица 3

Значения функции $\overline{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$

| $x$ | $\overline{\Phi(x)}$ | $x$ | $\overline{\Phi(x)}$ | $x$ | $\overline{\Phi(x)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,95 | 0,3289 | 1,90 | 0,4713 |
| 0,01 | 0,0040 | 1,00 | 0,3413 | 2,00 | 0,4772 |
| 0,05 | 0,0199 | 1,05 | 0,3531 | 2,10 | 0,4821 |
| 0,10 | 0,0398 | 1,10 | 0,3643 | 2,20 | 0,4861 |
| 0,15 | 0,0596 | 1,15 | 0,3749 | 2,30 | 0,4893 |
| 0,20 | 0,0793 | 1,20 | 0,3849 | 2,40 | 0,4918 |
| 0,25 | 0,0987 | 1,25 | 0,3944 | 2,50 | 0,4938 |
| 0,30 | 0,1179 | 1,30 | 0,4032 | 2,60 | 0,4953 |
| 0,35 | 0,1368 | 1,35 | 0,4115 | 2,70 | 0,4965 |
| 0,40 | 0,1554 | 1,40 | 0,4192 | 2,80 | 0,4974 |
| 0,45 | 0,1736 | 1,45 | 0,4265 | 2,90 | 0,4981 |
| 0,50 | 0,1915 | 1,50 | 0,4332 | 3,00 | 0,49865 |
| 0,55 | 0,2088 | 1,55 | 0,4394 | 3,20 | 0,49931 |
| 0,60 | 0,2257 | 1,60 | 0,4452 | 3,40 | 0,49966 |
| 0,65 | 0,2422 | 1,65 | 0,4505 | 3,60 | 0,499841 |
| 0,70 | 0,2580 | 1,70 | 0,4554 | 3,80 | 0,499927 |
| 0,75 | 0,2734 | 1,75 | 0,4599 | 4,00 | 0,499968 |
| 0,80 | 0,2881 | 1,80 | 0,4641 | 4,50 | 0,499997 |
| 0,85 | 0,3023 | 1,85 | 0,4678 | 5,00 | 0,500000 |
| 0,90 | 0,3159 | | | | |

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Амплитуда колебаний 97
— комплексная 98, 348, 354
Анализ гармонический 345

Вектор линейного преобразования собственный 529
— матрицы собственный 529
— пространства Ф 360
Векторы базисные 525
— ортогональные 358
Величина случайная двумерная 487
— — дискретная 449
— — непрерывная 465
— — равномерно распределенная 469
— — центрированная 459
Вероятность 435, 436
— геометрическая 441
— относительной частоты при повторных испытаниях 453
— попадания двумерной случайной величины в эллипс рассеивания 494
— — случайной величины в заданный интервал 466, 479
— условная 443—445
Вихрь 231
Вронскиан 69
Вычисление двойного интеграла 160
— значений $\sin x$ приближенное 283
— интеграла Пуассона 172—174
— коэффициентов тригонометрического ряда 319, 321
— криволинейного интеграла 213
— логарифмов приближенное 288
— массы фигуры 189
— объема тела 161, 166, 195
— определенных интегралов с помощью рядов 290—292
— площади плоской области 167
— — поверхности 181
— поверхностного интеграла 227
— работы 209, 216
— тройного интеграла 194
— числа $\pi$ 288
Вычитание сходящихся рядов почленное 248

Гармоника 348
Гипотеза 446
Гистограмма 497
Градиент скалярной функции 236
Группа событий полная 436
Группировка 497

Движение стационарное 51
— установившееся 51
Дельта-функция 429
Диаметр области 190
— площадки 153
Дивергенция вектора 235
Дисперсия 460
— непрерывной случайной величины 473
— нормально распределенной случайной величины 476
— статистическая 500, 502
Дифференцирование изображения 407
— степенного ряда 279
— функциональных рядов почленное 273
Длина вектора 359
Дополнение алгебраическое 512

Жесткость рессоры 94

Задача Дирихле 385, 387
— Дирихле — Неймана 387
— краевая вторая 385
— — для уравнения Лапласа 385
— — первая 373, 385
— — — для уравнения теплопроводности 377
— Неймана 385, 387
— о второй космической скорости 64
— — математическом маятнике 62
— — распаде радия 23
— — стрельбе до первого попадания 450
— об электрических колебаниях в проводах 367
Закон больших чисел 504
— Гаусса 474

Закон Кулона 228
— равномерной плотности 469
— распределения вероятностей биномиальный 453
— — — дискретной случайной величины 449
— — интегральный 468
— — нормальный 474
— — равномерно распределенной случайной величины 469
— — случайной величины 449
— — центрированной случайной величины 459
Замена переменных в двойном интеграле 174—179
— — — тройном интеграле 196—199
Значение интеграла главное 353
— определяемой величины подходящее 499
— собственное 370, 529
Значения наблюденные 496
— функции $f(x)$ 551, 552
— — $\Phi(x)$ 550, 551
— — $\overline{\Phi}(x)$ 552
— — $\hat{\Phi}(x)$ 550, 551

Изображение 401
— дельта-функции 429
— лапласово 401
— производной 409
— функции с измененным масштабом независимой переменной 403, 404
Изоклина 21
Интеграл вероятностей 478
— двойной 153
— — в полярных координатах 170
— двукратный 155
— Дирихле 341
— дифференциального уравнения 17
— — — общий 18
— — — особый 46
— — — частный 18
— — — $n$-го порядка общий 56
—, зависящий от параметра 201
— криволинейный 209, 211, 212
— — от полного дифференциала 223
— — по замкнутому контуру 210
— несобственный кратный 173
— от векторной функции 210
— — матрицы 538
— поверхностный 225, 226
— Пуассона 172, 383, 394
— трехкратный 191
— тройной 190
— — в сферических координатах 197, 198
— — — цилиндрических координатах 196
— Фурье 350
Интеграл Фурье в комплексной форме 354
Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов 292—294
— почленное степенно́го ряда 279
— — функционального ряда 272
— уравнений в полных дифференциалах 35
Интервал сходимости степенно́го ряда 276
Исследование свободных колебаний 423, 424

Колебание вынужденное 99
— гармоническое 97, 424
— затухающее 99, 424
— свободное 96, 423
Координаты криволинейные 175
— — в пространстве 198
— сферические 197
— центра масс линии 197
— — — плоской фигуры 188
— — — тела 200
— цилиндрические 196
Корень функции Бесселя 357
— характеристического уравнения 109
Косинус гиперболический комплексной переменной 302
— комплексной переменной 302
Косинус-преобразование Фурье 351
Косинусы направляющие нормали 226
Коэффициенты биномиальные 287
— степенно́го ряда 275, 280
— тригонометрического ряда 318
— Фурье 319, 321
— — комплексные 348
— — по ортогональной системе функций 356
Кривая гладкая 67
— интегральная 19, 56, 117
— нормального распределения 474
— распределения 465
— — вероятностей 465
— — интегральная 468
— резонанса 101
Круг сходимости 301

Линейность изображения 404
Линия равного потенциала 52
— силовая 53
— тока 52
— цепная 15
— эквипотенциальная 52
Лист декартов 239
Ломаная Эйлера 128
Луч 168

Мажорируемость степенно́го ряда 278
Масса тела 189

Материал статистический 496
Матрица 511
— вырожденная 514, 536
— диагональная 512
— единичная 512, 517
— квадратичной формы 535
— квадратная 511
— невырожденная 536
— обратная 513, 519, 521
— ортогональная 527
— отображения 509
— присоединенная 521
— расширенная 537
— симметричная 512
— столбцевая 512
— строчная 512
— транспонированная 512
Матрицы равные 512
Медиана 473, 475
Мера точности 487
Метод Адамса 130
— вариации произвольных постоянных 82, 91
— интегрирования дифференциальных уравнений графический 66
— — систем дифференциальных уравнений первого порядка приближенный 136
— неопределенных коэффициентов 294
— приближенного решения дифференциальных уравнений разностный 130
— разделения переменных 368
— Фурье решения задач математической физики 368
— Эйлера численного решения дифференциальных уравнений первого порядка 127
Метрика пространства Ф 360
Минор 536
Многоугольные распределения вероятностей 449
Множитель интегрирующий 38
Мода 450, 473, 475
Модуль вектора 359
Момент балки изгибающий 58
— инерции плоской фигуры относительно оси 185
— — — — — точки 184
— — системы точек 184
— — тела 199
— — точки 184
— статический 189
— центральный второго порядка 463
— — первого порядка 463
— — третьего порядка 463

Набла-оператор 236
Направление интегрирования 209
Направления квадратичной формы главные 536
Нахождение радиуса сходимости ряда 277
Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве 232
— — — — — — на плоскости 220
Непрерывность суммы ряда 270
— — степенного ряда 278
Неравенство Бесселя 337
— Буняковского 187
— Шварца 187
Норма элемента 360

Область замкнутая 152
— интегрирования 153
— правильная 155, 168
— — в направлении оси *Ox* 155
— — — — — *Oy* 155
— — трехмерная 191
— сходимости ряда 266
— — степенного ряда с комплексной переменной 300
Объем тела 161, 166, 195
— эллипсоида 195
Огибающая семейства кривых 40
Ожидание математическое дискретной случайной величины 456
— — непрерывной случайной величины 471
— — нормально распределенной случайной величины 475
Оператор Гамильтона 236
— Лапласа 239, 376, 384
Определитель Вронского 69
— матрицы 509, 511
— функциональный 177
Оригинал 401
Оси рассеивания 492
Остаток ряда 267
Отклонение 459
— вероятное 481, 482
— — радиальное 495
— срединное 481, 482
— среднеквадратичное 460, 461
— — непрерывной случайной величины 473
— — нормально распределенной случайной величины 476
Отклонения главные вероятные 491
— среднеквадратичные 491
Отображение аффинное 513
— взаимно однозначное 513
— вырожденное 514
— линейное 508
— невырожденное 513
— обратное 513
— однозначное 513

Отражение зеркальное от оси 509
Оценка двукратного интеграла 158
— погрешности приближенного решения 308
Ошибка изготовления 496
— измерения 496
— срединная 481
— среднеарифметическая 486

Парабола безопасности 43
Период колебаний 97
Плоскость фазовая 117
Плотность вероятности 465
— вещества поверхностная 183
— — — средняя 183
— нормального распределения случайной величины 474, 476
— распределения вероятностей случайной величины 465
— — двумерной случайной величины 488
— — — — —, нормально распределенной 491
— спектральная 354
Площадь плоской области 167, 215, 216
— поверхности 180
— эллипса 216
Поворот 509
Подобие 532
Поле векторное безвихревое 238
— — потенциальное 237
— — соленоидальное 238
— — трубчатое 238
— направлений 20
Понижение порядка дифференциального уравнения 59, 60
Порядок дифференциального уравнения 16
Последовательность функций, ортогональная на отрезке 360
Потенциал вектора 222
— поля тяготения 233
— скоростей 52
— стационарного электрического поля 388
Поток вектора через поверхность 236
— векторного поля через поверхность 225
— вихря через поверхность 231
Правило трех сигм 484
Предел последовательности комплексных чисел 299
Преобразование ортогональное 526
— тождественное 518
— Фурье 354
— — обратное 354
Преобразования координат линейные 508
Приближение в среднем 334
Приближение решения второе 303
— — нулевое 303
— — первое 303
Признак Даламбера 252, 253
— Коши 256
— разложимости функции в ряд Фурье достаточный 321
— сходимости знакопеременного ряда достаточный 263
— — ряда интегральный 257, 258
— — — необходимый 248
Прогрессия геометрическая 246
Продолжение функции нечетное 333
— — четное 333
Произведение матриц 516
— скалярное 358
— — функций 359
Производная матрицы 538
— слева 343
— справа 343
Пространство евклидово $n$-мерное 358
— линейное функциональное с квадратичной метрикой 360
— функций 359
— $E_n$ 359
— Ф 359

Равенство Ляпунова — Парсеваля 337
Радиус сходимости степенного ряда 276
— — — — с комплексной переменной 301
Разложение в ряд Маклорена $\arcsin x$ 288
— — — — $\operatorname{ch} x$ 285
— — — — $\cos x$ 285
— — — — $e^x$ 284
— — — — $\ln(1+x)$ 288
— — — — $\operatorname{sh} x$ 285
— — — — $\sin x$ 283
— — — — $(1+x)^m$ 287
— — — Фурье непериодической функции 332, 333
— — — — нечетной функции 329, 330
— — — — функции 321
— — — — четной функции 330
Разность вторая 130
— второго порядка 130
— матриц 515
— первая 130
— первого порядка 130
Ранг матрицы 536
Распределение двумерной случайной величины нормальное 491
— температуры в однородном теле стационарное 384, 385
Распространение тепла в неограниченном стержне 379—384
Рассеивание 496

Расстояние между элементами пространства Ф 360
Растяжение 509
— вдоль оси 509
Расходимость ряда 245
Резонанс 103, 427
Решение дифференциального уравнения 17
— — — колебаний 421—423
— — — комплексное 98
— — — методом операционного исчисления 411—413
— — — общее 18
— — — особое 46, 49
— — — частное 18
— — — *n*-го порядка общее 56
— — — — — частное 56
— задачи Дирихле для кольца 390
— — — — круга 390—394
— — — методом конечных разностей 394—396
— — о распространении тепла в неограниченном стержне 383, 384
— линейного дифференциального уравнения первого порядка 30
— — неоднородного дифференциального уравнения второго порядка общее 81
— — — — — — — с постоянными коэффициентами 85, 86
— — — — — высшего порядка 91
— — — — — — — с постоянными коэффициентами 92, 93
— — однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами общее 79
— однородного дифференциального уравнения первого порядка 26
— первой краевой задачи 377—379
— системы дифференциальных уравнений общее 110
— — — — с постоянными коэффициентами матричным методом 539—541
— — — —, устойчивое по Ляпунову 114
— — линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами матричным методом 544—547
— — — однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 108
— — — уравнений матричным методом 523, 524
— уравнения колебаний в случае резонанса 426, 427
— — — струны 368—372
Решения линейно зависимые 69
— — независимые 69
Ротор 231
Ряд абсолютно сходящийся 264
— — — с комплексными членами 301
— биномиальный 287
— гармонический 249
— знакопеременный 263
— знакочередующийся 260
— из комплексных чисел 299
— мажорируемый 267
— Маклорена 283
— неабсолютно сходящийся 264
— простой статистический 497
— равномерно сходящийся 269
— расходящийся 245, 300
— с положительными членами 250
— степенной 275, 280
— — с комплексной переменной 300
— сходящийся 245, 300
— Тейлора 282
— тригонометрический 318
— условно сходящийся 264
— функциональный 266
— Фурье 321
— — в комплексной форме 347
— — для нечетных функций 330
— — — функций с периодом $2l$ 331
— — — четных функций 330
— — по ортогональной системе функций 356
— числовой 245

Свертка функций 419
Свертывание функций 419
Свойства абсолютно сходящегося ряда 265
— двойного интеграла 153, 154
— двукратного интеграла 156—159
— криволинейного интеграла 210
— сходящихся рядов 246, 247
— трехкратного интеграла 192, 193
— условно сходящегося ряда 265
Свойство линейности изображения 404
Сдвиг вдоль оси 510
Седло 119
— вырожденное 125
Семейство кривых однопараметрическое 40
— ортогональных траекторий 51
Сетка 394
Синус гиперболический комплексной переменной 302
— комплексной переменной 301
Синус-преобразование Фурье 352
Система дифференциальных уравнений автономная 115
— — — нормальная 103
— — — первого порядка 103
— линейных дифференциальных уравнений 539, 544

Система однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 108
— ортогональных многочленов Лежандра 357
— — функций полная 301
— функций Бесселя 357
— —, ортогональная на отрезке 355
— — — полная 356
Складка функций 419
Скорость вращения вектора угловая 97
— распада радия 24
— распространения тепла 372
Сложение вероятностей несовместных событий 438, 439
— — совместных событий 440
— сходящихся рядов почленное 247
Случай 436
—, благоприятствующий событию 436
Событие достоверное 437
— невозможное 437
— случайное 434
События зависимые 443
— независимые 441
— несовместные 436
— противоположные 440
— равновозможные 436
— совместные 440
Спектр 348
— дискретный 348
— непрерывный 354
Спираль логарифмическая 55
Сравнение рядов 250, 252
Среднее арифметическое значений случайной величины 456
— взвешенное 499
Сумма геометрической прогрессии 246
— интегральная 152
— матриц 515
— ряда 245
— — из комплексных чисел 300
— — частичная 245
— событий 438
Схема урн 438
Сходимость знакочередующегося ряда 261
— ряда 245, 300
— — абсолютная 264, 301
— — равномерная 269
— — условная 264
— — Фурье в среднем 356, 361

Таблица изображений 410
Теорема Абеля 275
— Бернулли 435
— гипотез 447
— единственности изображения 402
— — решения дифференциального уравнения 308, 309
Теорема живых сил 233
— запаздывания 427
— Лапласа 503
— Лейбница 261
— Ляпунова 501
— о вычислении тройного интеграла 194
— — сложении вероятностей 438
— — сравнении рядов 250, 252
— — среднем для двукратного интеграла 159
— — — — трехкратного интеграла 193
— об оценке трехкратного интеграла 193
— Пеано 308
— разложения 415, 416
— свертывания 418
— смещения 405
— существования двойного интеграла 153
— — и единственности решения дифференциального уравнения 304
— — — — — — — $n$-го порядка 55
— — интеграла по поверхности 225
— — криволинейного интеграла 211
— — тройного интеграла 190
— центральная предельная 501
— Чебышева 500, 502
Теория вероятностей 435
Течение жидкости или газа потенциальное 385
Точка области внутренняя 154
— обыкновенная 46
— особая 46
— — для дифференциального уравнения 117
— пространства Ф 359, 360
— $n$-мерного евклидова пространства 358
Траектория дифференциального уравнения 117
— изогональная 50, 53
— ортогональная 50, 51

Угол между двумя векторами 359
Узел неустойчивый 118, 119
— устойчивый 117, 118
Узлы сетки 394
Уклонение наибольшее 334
— среднеквадратичное 334
Умножение вероятностей зависимых событий 444
— — независимых событий 441, 442
— матрицы на число 515
— — — единичную матрицу 518
— сходящегося ряда на постоянный множитель 247
Уравнение Бернулли 33

Уравнение Бесселя 295
— в конечных разностях 394
— — полных дифференциалах 35
— вида $y^{(n)} = f(x)$ 56
— волновое 364—366
— вспомогательное 412
— вынужденных колебаний 95
— геометрического места особых точек 41
— гиперболического типа 364
— дифференциальное 13, 16
— — в частных производных 13, 16
— — второго порядка неоднородное линейное 81
— — — — — — с постоянными коэффициентами 84
— — — — — однородное с постоянными коэффициентами 74
— — высшего порядка неоднородное линейное 90
— — изогональных траекторий 54
— — линейное без правой части 68
— — — неоднородное 68
— — — однородное 68
— — — первого порядка 30
— — — с правой частью 68
— — — $n$-го порядка 68, 543
— — механических колебаний 94
— — обыкновенное 16
— — ортогональных траекторий 51
— — первого порядка 17
— — — — однородное 25
— —, приводящееся к однородному 27
— — с разделенными переменными 22
— — — разделяющимися переменными 23
— — цепной линии 59
— — $n$-го порядка 55
— — — — линейное однородное с постоянными коэффициентами 79
— изображающее 412
— интегральное 303, 352
— Клеро 47
— колебаний струны 66
— крутильных колебаний стержня 396
— Лагранжа 49
— Лапласа 239, 364, 365, 384
— — в полярных координатах 389
— — — цилиндрических координатах 389
— — на плоскости 355
— неразрывности течения сжимаемой жидкости 386
— огибающей 40
— параболического типа 364
— продольных колебаний стержня 397
— разностное 394
— распространения тепла 373
— — — в стержне 377
Уравнение распространения тепла на плоскости 377
— свободных колебаний 95
— телеграфное 367, 368
— теплопроводности 364, 365, 373
— — в пространстве 376
— Фурье 364
— характеристическое 75, 529
— — для системы дифференциальных уравнений 109
— эллиптического типа 364
Уравнения динамики материальной точки основные 232
Условие граничное 366, 367, 373, 376
— линейной независимости решений линейного дифференциального уравнения 71
— Липшица 305
— начальное 18, 373, 376
— независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования на плоскости 220
— полного дифференциала функции трех переменных 232
— сходимости ряда с комплексными членами 300
Условия краевые 367
— начальные 55, 366, 367
— независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве 232
— сходимости ряда Фурье достаточные 343
Устойчивость решений системы дифференциальных уравнений 114

Фаза начальная 97
Фокус неустойчивый 121, 122
— устойчивый 120, 121
Форма квадратичная 534
Формула Адамса 133
— Байеса 447
— Грина 219, 242
— Лиувилля 70
— Остроградского 235
— Остроградского — Гаусса 235
— полной вероятности 445
— преобразования координат в двойном интеграле 177
— Стокса 231
— Тейлора 282
— Эйлера 285, 286
— — для функций комплексной переменной 302
Функции линейно зависимые 79
— — независимые 79
—, ортогональные с весом $\rho(x)$ 357
Функция абсолютно интегрируемая 349

Функция Бесселя второго рода нулевого порядка 299
— — — — $n$-го порядка 298
— — первого рода $n$-го порядка 298
— — — — $p$-го порядка 297
— гармоническая 239, 384
— Дирака 428
— единичная импульсная 429
— интегральная нормального закона распределений 481
— — распределения вероятностей двумерной случайной величины 490
— комплексной переменной аналитическая 301
— — показательная 301
— кусочно монотонная 321
— — непрерывная 338
— Лапласа 480
— — приведенная 483
— начальная 401
— нечетная 329
— однородная $n$-го измерения 25
— от случайной величины 463
— распределения вероятностей 468
— собственная 370
— спектральная 354
— Хевисайда единичная 402
— четная 329
— $\sigma_0(t)$ 402

Центр 123
— распределения вероятностей случайной величины 458, 472
— рассеивания двумерной нормально распределенной случайной величины 491

Циркуляция вектора 211
Циссоида 145

Частота 434
— колебаний 97
— относительная 434, 451
Часть уравнения правая 68
Числа волновые 348, 354
Член матрицы 511
— ряда 245

Шанс 436
Шкала рассеивания ошибок 485

Элемент пространства Ф 359
— $n$-мерного евклидова пространства 358
Эллипс инерции 188
— рассеивания 492
— — единичный 492
— — полный 492
Энергия движущейся точки кинетическая 62
— — — потенциальная 62

Якобиан 177, 198

$L$-изображение 401
— функции Хевисайда 402
— ch $at$ 406
— cos $t$ 403
— $e^{-at}$ 405
— sh $at$ 406
— sin $t$ 403
— $t^n$ 408
$\nabla$-оператор 236