

453345

И.С. ПИСА

III *III* *I*
III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

Н. С. ПИСКУНОВ

5172

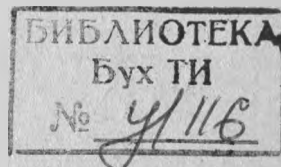
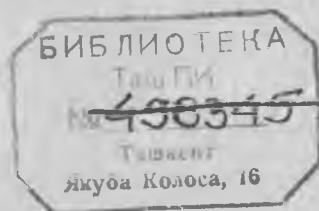
П-345

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ДЛЯ ВТУЗОВ
ТОМ ПЕРВЫЙ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника
для высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1964

Б17.2

П 34

УДК 510 (022)

Николай Семенович Пискунов

Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов

Том первый

М., 1964 г., 514 стр. с илл.

Редакторы *И. В. Кеппен, Ю. А. Горьков.*

Техн редактор *Н. Я. Мурашова.*

Корректор *Т. Д. Доверман.*

Слано в набор 3/X 1963 г. Подписано к печати 8/I 1964 г. Бумага 60×90^{1/16}.
Физ. печ. л. 34. Условн. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 33,64. Тираж 200 000 экз. Т-00919.
Цена книги 1 р. 11 к. Заказ № 928.

Издательство «Наука».
Редакция математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию	9

ГЛАВА I

ЧИСЛО. ПЕРЕМЕННАЯ. ФУНКЦИЯ

§ 1.	Действительные числа. Изображение действительных чисел точками числовой оси	11
§ 2.	Абсолютная величина действительного числа	13
§ 3.	Переменные и постоянные величины	14
§ 4.	Область изменения переменной величины	15
§ 5.	Упорядоченная переменная величина. Возрастающая и убывающая переменные величины. Ограниченная переменная величина	16
§ 6.	Функция	17
§ 7.	Способы задания функции	18
§ 8.	Основные элементарные функции. Элементарные функции	20
§ 9.	Алгебраические функции	24
§ 10.	Полярная система координат	26
Упражнения к главе I		27

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1.	Предел переменной величины. Бесконечно большая переменная величина	29
§ 2.	Предел функции	31
§ 3.	Функция, стремящаяся к бесконечности. Ограниченные функции	35
§ 4.	Бесконечно малые и их основные свойства	38
§ 5.	Основные теоремы о пределах	41
§ 6.	Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	45
§ 7.	Число e	47
§ 8.	Натуральные логарифмы	51
§ 9.	Непрерывность функций	52
§ 10.	Некоторые свойства непрерывных функций	55
§ 11.	Сравнение бесконечно малых	57
Упражнения к главе II		60

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1.	Скорость движения	63
§ 2.	Определение производной	65
§ 3.	Геометрическое значение производной	67
§ 4.	Дифференцируемость функций	68

§ 5. Нахождение производных от элементарных функций. Производная от функции $y = x^n$ при n целом и положительном	70
§ 6. Производные от функций $y = \sin x$; $y = \cos x$	72
§ 7. Производные: постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы, произведения, частного	73
§ 8. Производная логарифмической функции	77
§ 9. Производная от сложной функции	78
§ 10. Производные функций $y = \lg x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln x $	80
§ 11. Неявная функция и ее дифференцирование	82
§ 12. Производные степенной функции при любом действительном показателе, показательной функции, сложной показательной функции	84
§ 13. Обратная функция и ее дифференцирование	86
§ 14. Обратные тригонометрические функции и их дифференцирование	90
§ 15. Таблица основных формул дифференцирования	93
§ 16. Параметрическое задание функции	94
§ 17. Уравнения некоторых кривых в параметрической форме	96
§ 18. Производная функции, заданной параметрически	99
§ 19. Гиперболические функции	100
§ 20. Дифференциал	103
§ 21. Геометрическое значение дифференциала	107
§ 22. Производные различных порядков	108
§ 23. Дифференциалы различных порядков	110
§ 24. Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически	111
§ 25. Механическое значение второй производной	113
§ 26. Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали	115
§ 27. Геометрическое значение производной радиуса-вектора по полярному углу	117
Упражнения к главе III	118

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)	127
§ 2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)	129
§ 3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)	130
§ 4. Предел отношения двух бесконечно малых величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ »)	131
§ 5. Предел отношения двух бесконечно больших величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ »)	134
§ 6. Формула Тейлора	139
§ 7. Разложение по формуле Тейлора функций e^x , $\sin x$, $\cos x$	142
Упражнения к главе IV	145

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи	148
§ 2. Возрастание и убывание функции	149
§ 3. Максимум и минимум функций	151

§ 4. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной	157
§ 5. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной	159
§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	163
§ 7. Применение теории максимума и минимума функций к решению задач	164
§ 8. Исследование функции на максимум и минимум с помощью формулы Тейлора	166
§ 9. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба	168
§ 10. Асимптоты	174
§ 11. Общий план исследования функций и построения графиков	179
§ 12. Исследование кривых, заданных параметрически	183
<i>Упражнения к главе V</i>	187

ГЛАВА VI

КРИВИЗНА КРИВОЙ

§ 1. Длина дуги и ее производная	192
§ 2. Кривизна	194
§ 3. Вычисление кривизны	196
§ 4. Вычисление кривизны линии, заданной параметрически	198
§ 5. Вычисление кривизны линии, заданной уравнением в полярных координатах	199
§ 6. Радиус и круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента	200
§ 7. Свойства эволюты	205
§ 8. Приближенное вычисление действительных корней уравнения	208
<i>Упражнения к главе VI</i>	212

ГЛАВА VII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Комплексные числа. Исходные определения	215
§ 2. Основные действия над комплексными числами	217
§ 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа	219
§ 4. Показательная функция с комплексным показателем и ее свойства	222
§ 5. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа	224
§ 6. Разложение многочлена на множители	226
§ 7. О кратных корнях многочлена	229
§ 8. Разложение многочлена на множители в случае комплексных корней	230
§ 9. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа	231
§ 10. О наилучшем приближении функций многочленами. Теория Чебышева	233
<i>Упражнения к главе VII</i>	235

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Определение функции нескольких переменных	236
§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных	239
§ 3. Частное и полное приращение функции	240
§ 4. Непрерывность функции нескольких переменных	241
§ 5. Частные производные функции нескольких переменных	244

§ 6. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных	245
§ 7. Полное приращение и полный дифференциал	246
§ 8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	249
§ 9. Приложение дифференциала к оценке погрешности при вычислениях	250
§ 10. Производная сложной функции. Полная производная	254
§ 11. Производная от функции, заданной неявно	256
§ 12. Частные производные различных порядков	259
§ 13. Поверхности уровня	262
§ 14. Производная по направлению	264
§ 15. Градиент	266
§ 16. Формула Тейлора для функции двух переменных	269
§ 17. Максимум и минимум функции нескольких переменных	271
§ 18. Максимум и минимум функции нескольких переменных, связанных данными уравнениями (условные максимумы и минимумы)	279
§ 19. Особые точки кривой	284
Упражнения к главе VIII	288

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения кривой в пространстве	292
§ 2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента. Уравнение касательной к кривой. Уравнение нормальной плоскости	295
§ 3. Правила дифференцирования векторов (векторных функций)	300
§ 4. Первая и вторая производные вектора по длине дуги. Кривизна кривой. Главная нормаль	302
§ 5. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение	308
§ 6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	313
Упражнения к главе IX	317

ГЛАВА X

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл	319
§ 2. Таблица интегралов	322
§ 3. Некоторые свойства неопределенного интеграла	323
§ 4. Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки	325
§ 5. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен	328
§ 6. Интегрирование по частям	331
§ 7. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование	334
§ 8. Разложение рациональной дроби на простейшие	338
§ 9. Интегрирование рациональных дробей	341
§ 10. Способ Остроградского	344
§ 11. Интегралы от иррациональных функций	347
§ 12. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	348
§ 13. Интегрирование дифференциальных биномов	351
§ 14. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций	354

§ 15. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок	359
§ 16. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции	360
Упражнения к главе X	361

ГЛАВА XI

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Постановка задачи. Нижняя и верхняя интегральные суммы	370
§ 2. Определенный интеграл	372
§ 3. Основные свойства определенного интеграла	378
§ 4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона—Лейбница	382
§ 5. Замена переменной в определенном интеграле	386
§ 6. Интегрирование по частям	387
§ 7. Несобственные интегралы	390
§ 8. Приближенное вычисление определенных интегралов	397
§ 9. Формула Чебышева	403
§ 10. Интегралы, зависящие от параметра	408
Упражнения к главе XI	411

ГЛАВА XII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах	415
§ 2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах	418
§ 3. Длина дуги кривой	419
§ 4. Вычисление объема тела по площади параллельных сечений	424
§ 5. Объем тела вращения	426
§ 6. Поверхность тела вращения	426
§ 7. Вычисление работы с помощью определенного интеграла	428
§ 8. Координаты центра тяжести	429
Упражнения к главе XII	433

ГЛАВА XIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи. Уравнение движения тела при сопротивлении среды, пропорциональном скорости. Уравнение цепной линии	439
§ 2. Определения	442
§ 3. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)	443
§ 4. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. Задача о распаде радия	448
§ 5. Однородные уравнения первого порядка	452
§ 6. Уравнения, приводящиеся к однородным	454
§ 7. Линейные уравнения первого порядка	457
§ 8. Уравнение Бернулли	460
§ 9. Уравнение в полных дифференциалах	462
§ 10. Интегрирующий множитель	465
§ 11. Огибающая семейства кривых	467
§ 12. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка	473
§ 13. Уравнение Клеро	475
§ 14. Уравнение Лагранжа	477

§ 15. Ортогональные и изогональные траектории	479
§ 16. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия)	483
§ 17. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$	485
§ 18. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка	488
§ 19. Графический метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка	496
§ 20. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства	498
§ 21. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	504
§ 22. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	508
§ 23. Неоднородные линейные уравнения второго порядка	510
§ 24. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	514
§ 25. Неоднородные линейные уравнения высших порядков	520
§ 26. Дифференциальное уравнение механических колебаний	524
§ 27. Свободные колебания	526
§ 28. Вынужденные колебания	528
Упражнения к главе XIII	532
Предметный указатель	542

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В пятом издании полностью сохранен без изменений весь текст четвертого издания, но этот материал разделен на два тома (для удобства использования настоящего и предыдущих изданий учебника нумерация глав тоже оставлена без изменения).

Содержание всего учебника определяется программами курса математики для вузов, рассчитанными на 300—450 часов. Учебник предназначен для изучения курса математики как в стационарных, так и в заочных вузах. Это учитывалось при изложении материала; в частности, с этой целью в учебнике разобрано много примеров, иллюстрирующих изложенный теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Первый том содержит материал, соответствующий программе 1-го курса вуза, за исключением главы XIII «Дифференциальные уравнения», которая, как правило, проходится на 2-м курсе. Но так как в некоторых вузах предварительные сведения о дифференциальных уравнениях, необходимые для последующих дисциплин, даются на 1-м курсе, то часть этой главы (§§ 1—28) и помещена в первом томе.

Отметим, что материал, содержащийся в программе вузов, рассчитанный на число часов порядка 300, почти полностью содержится в первом томе (но в нем содержится и материал, выходящий за рамки этой программы).

Второй том — конец главы XIII (§§ 29—34), главы XIV—XIX — содержит материал, соответствующий программе 2-го курса вуза.

Первые две главы первого тома — «Число. Переменная. Функция» и «Предел. Непрерывность функции» написаны в пределах возможного кратко. Некоторые вопросы, обычно излагаемые в этих главах, без ущерба для дела перенесены в третью и последующие главы. Это дало возможность раньше перейти к основному понятию дифференциального исчисления — производной, что требуют другие дисциплины вузовского курса (целесообразность такого расположения материала подтверждается опытом работы).

В связи с включением во вузовскую программу по высшей математике вопросов, необходимых для обеспечения курсом математики вузовских дисциплин, связанных с автоматикой и

лительной техникой, в учебнике подробно изложены соответствующие разделы: «Численное интегрирование дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений»*), «Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений», «Понятие о теории устойчивости Ляпунова», «Оператор Гамильтона», «Интеграл Фурье» и т. д.

В главе XVIII рассмотрены основные уравнения математической физики. Обращено большое внимание на выяснение характера физических явлений, приводящих к уравнениям различных типов и соответствующим краевым задачам. Большое внимание уделено численным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В главе XIX излагаются основные понятия операционного исчисления и операционный метод решения дифференциальных уравнений. Это требуется для многих последующих дисциплин, и особенно электротехнических.

В учебник включено большое количество задач и примеров, для упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами. Задачи и примеры специально подобраны по каждому разделу курса, что способствует усвоению излагаемого материала. Это обстоятельство также делает книгу удобной для самостоятельного изучения курса математики, в частности для студентов-заочников.

Автор

*) Обычно излагаемые численные методы анализа также изложены в данном учебнике.

ГЛАВА I

ЧИСЛО. ПЕРЕМЕННАЯ. ФУНКЦИЯ

§ 1. Действительные числа. Изображение действительных чисел точками числовой оси

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности и на протяжении длительного времени подвергалось расширению и обобщению.

Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль называются *рациональными числами*. Каждое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{p}{q}$ двух целых чисел p и q , например

$$\frac{5}{7}; \quad 1,25 = \frac{5}{4}.$$

В частности, целое число p можно рассматривать как отношение двух целых чисел $\frac{p}{1}$, например

$$6 = \frac{6}{1}; \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами*: таковы числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$ и т. д.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) *чисел*. Действительные числа упорядочены по величине, т. е. для каждой пары действительных чисел x и y имеет место одно, и только одно, из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется бесконечная прямая, на которой выбраны: 1) некоторая точка O , называемая началом отсчета, 2) положительное направление, которое указывается стрелкой, и 3) масштаб для измерения длин. Чаще всего мы будем располагать числовую ось горизонтально и положительное направление выбирать слева направо.

Если число x_1 положительно, то его изображают точкой M_1 , лежащей справа от точки O на расстоянии $OM_1 = x_1$; если число x_2

отрицательно, то его изображают точкой M_2 , лежащей слева от точки O на расстоянии $OM_2 = -x_2$ (рис. 1). Точка O изображает число нуль. Очевидно, что каждое действительное число изображается определенной точкой числовой оси. Два различных действительных числа изображаются различными точками числовой оси.

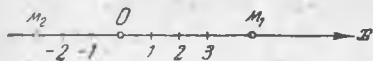


Рис. 1.

Справедливо также утверждение: каждая точка числовой оси является изображением только одного действительного числа (рационального или иррационального).

Таким образом, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому числу соответствует единственная изображающая его точка и, наоборот, каждой точке соответствует единственное изображаемое ею число. Это дает возможность во многих рассуждениях в некотором смысле равнозначно употреблять понятие «число x » и понятие «точка x ». Последним обстоятельством мы будем широко пользоваться в курсе.

Укажем без доказательства следующее важное свойство совокупности действительных чисел: *между двумя произвольными действительными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа*. В терминах геометрических это предложение формулируется так: *между двумя произвольными точками числовой оси найдутся как рациональные, так и иррациональные точки*.

В заключение отметим следующую теорему, представляющую в известном смысле «мостик между теорией и практикой».

Теорема. *Каждое иррациональное число α можно с любой степенью точности выразить с помощью рациональных чисел.*

В самом деле, пусть иррациональное число $\alpha > 0$ и пусть требуется вычислить α с точностью до $\frac{1}{n}$ (например, до $\frac{1}{10}$, до $\frac{1}{100}$ и т. д.).

Каково бы ни было α , оно заключается между двумя целыми числами N и $N+1$. Разделим отрезок между N и $N+1$ на n частей; тогда α окажется между рациональными числами $N + \frac{m}{n}$ и $N + \frac{m+1}{n}$. Так как их разность равна $\frac{1}{n}$, то, значит, каждое из них выражает α с заданной степенью точности: первое с недостатком, а второе — с избытком.

Пример. Иррациональное число $\sqrt{2}$ выражается рациональными числами:

$$1,4 \text{ и } 1,5 \text{ — с точностью до } \frac{1}{10},$$

$$1,41 \text{ и } 1,42 \text{ — с точностью до } \frac{1}{100},$$

$$1,414 \text{ и } 1,415 \text{ — с точностью до } \frac{1}{1000} \text{ и т. д.}$$

§ 2. Абсолютная величина действительного числа

Введем нужное для дальнейшего понятие абсолютной величины действительного числа.

Определение. *Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x (обозначается $|x|$) называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям*

$$|x| = x, \quad \text{если } x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \quad \text{если } x < 0.$$

Примеры: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Из определения следует, что для любого x справедливо соотношение $x \leq |x|$.

Рассмотрим некоторые свойства абсолютных величин.

1. *Абсолютная величина алгебраической суммы нескольких действительных чисел не больше суммы абсолютных величин слагаемых:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство. Пусть $x + y \geq 0$, тогда

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \quad (\text{так как } x \leq |x| \text{ и } y \leq |y|).$$

Пусть $x + y < 0$, тогда

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

ч. т. д.

Проведенное доказательство легко распространяется на любое число слагаемых.

Примеры:

$$|-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \quad \text{или} \quad 1 < 5;$$

$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \quad \text{или} \quad 8 = 8.$$

2. *Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого:*

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

Доказательство. Положим $x - y = z$, тогда $x = y + z$ и по доказанному

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

откуда

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

ч. т. д.

3. *Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей:*

$$|xyz| = |x| |y| |z|.$$

4. Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Последние два свойства непосредственно следуют из определения абсолютной величины.

§ 3. Переменные и постоянные величины

В результате измерения таких физических величин, как время, длина, площадь, объем, масса, скорость, давление, температура и т. п., определяются численные значения физических величин. Математика занимается величинами, отвлекаясь от их конкретного содержания. В дальнейшем, говоря о величинах, мы будем иметь в виду их численные значения. В различных явлениях некоторые величины изменяются, т. е. меняются их численные значения, другие величины сохраняют свое численное значение. Так, при равномерном движении точки время и расстояние меняются; скорость остается постоянной.

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется *постоянной величиной*. В дальнейшем переменные величины мы будем обозначать буквами $x, y, z, u, \dots$ и т. д., постоянные величины будем обозначать буквами $a, b, c, \dots$ и т. д.

З а м е ч а н и е. В математике постоянная величина часто рассматривается как частный случай переменной, у которой все численные значения одинаковы.

Следует отметить, что при рассмотрении конкретных физических явлений может иметь место такое положение, что величина с одним и тем же названием в одном явлении оказывается постоянной, в другом — переменной. Например, скорость равномерного движения есть величина постоянная, а скорость равномерно ускоренного движения — величина переменная. Величины, которые сохраняют свое значение в любом явлении, называются *абсолютными постоянными*. Например, отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная: $\pi \approx 3,14159$.

Как мы увидим на протяжении всего курса, понятие переменной величины является основным понятием дифференциального и интегрального исчисления. «Поворотным пунктом в математике, — пишет Ф. Энгельс в «Диалектике природы», — была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление».

§ 4. Область изменения переменной величины

Переменная величина принимает различные числовые значения. В зависимости от характера рассматриваемой задачи совокупность этих значений может быть различная. Например, температура воды, подогреваемой в обычных условиях, будет меняться от комнатной температуры, равной $15-18^{\circ}\text{C}$, до точки кипения, 100°C . Переменная же величина $x = \cos \alpha$ может принимать все значения от -1 до $+1$.

Значения переменной величины геометрически изображаются точками числовой оси. Так, значения переменной $x = \cos \alpha$ при всевозможных значениях α изображаются совокупностью точек отрезка числовой оси, от -1 до 1 , включая и точки -1 и 1 (рис. 2).

Определение. Совокупность всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной.

Отметим следующие области изменения переменной величины, которые часто будут встречаться в дальнейшем.

Промежутком или *интервалом* называется совокупность всех чисел x , заключенных между данными числами a и b ($a < b$), при этом сами эти числа не принадлежат рассматриваемой совокупности чисел; его обозначают так: (a, b) или с помощью неравенств $a < x < b$.

Отрезком или *сегментом* называется совокупность всех чисел x , заключенных между двумя данными числами a и b , причем оба числа a и b принадлежат рассматриваемой совокупности; его обозначают так: $[a, b]$ или с помощью неравенств $a \leq x \leq b$. Иногда отрезок называется *замкнутым промежутком* или *замкнутым интервалом*.

Если одно из чисел a или b , например a , присоединяется к промежутку, а другое—нет, то получается *полузамкнутый промежуток*, его можно задать неравенствами

$$a \leq x < b$$

и обозначить $[a, b)$. Если присоединяется число b и не присоединяется число a , то получается полузамкнутый промежуток $(a, b]$, который можно задать неравенствами

$$a < x \leq b.$$

Если переменная x принимает всевозможные значения, большие чем a , то такой интервал обозначают $(a, +\infty)$ и задают условиями неравенствами

$$a < x < +\infty.$$

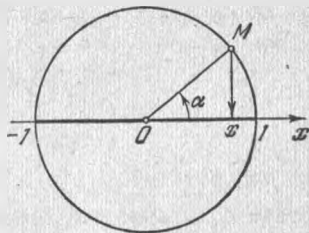


Рис. 2.

458345

Так же рассматриваются бесконечные интервалы и полузамкнутые бесконечные интервалы, задаваемые условными неравенствами

$$a \leq x < +\infty; -\infty < x < c; -\infty < x \leq c; -\infty < x < +\infty.$$

Пример. Область изменения переменной $x = \cos \alpha$ при всевозможных значениях α есть отрезок $[-1, 1]$ и определяется неравенствами $-1 \leq x \leq 1$.

Данные выше определения можно сформулировать, используя вместо понятия «число» понятие «точка», например:

Отрезком называется совокупность всех точек x , заключенных между данными точками a и b (*концами отрезка*), причем концы отрезка принадлежат рассматриваемой совокупности.

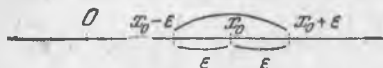


Рис. 3.

Окрестностью данной точки x_0 называется произвольный интервал (a, b) , содержащий эту точку внутри себя, т. е. интервал (a, b) ,

концы которого удовлетворяют условию $a < x_0 < b$. Часто рассматривается окрестность (a, b) точки x_0 , для которой x_0 является серединой.

Тогда x_0 называется **центром окрестности**, величина $\frac{b-a}{2}$ называется **радиусом окрестности**. На рисунке 3 изображена окрестность $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ точки x_0 с радиусом ϵ .

§ 5. Упорядоченная переменная величина. Возрастающая и убывающая переменные величины. Ограниченная переменная величина

Будем говорить, что переменная x есть **упорядоченная переменная величина**, если известна область изменения этой переменной величины и про каждое из двух любых ее значений можно сказать, какое значение предыдущее и какое последующее. Здесь понятия «предыдущее» и «последующее» не связаны со временем, а являются способом «упорядочения» значений переменной величины, т. е. установления порядка соответствующих значений переменной величины.

Определение 1. Переменная величина называется **возрастающей**, если каждое последующее ее значение больше предыдущего ее значения. Переменная величина называется **убывающей**, если каждое ее последующее значение меньше предыдущего.

Возрастающие переменные величины и убывающие переменные величины называются **монотонно изменяющимися** переменными величинами или просто **монотонными величинами**.

Пример. При удвоении числа сторон правильного вписанного в круг многоугольника площадь s этого многоугольника является возрастающей переменной величиной. Площадь правильного описанного около круга многоугольника при удвоении числа сторон является убывающей переменной величиной. Заметим, что не всякая переменная величина является непременно

возрастающей или убывающей. Так, например, переменная $x = \sin \alpha$, если α есть возрастающая величина на отрезке $[0, 2\pi]$, не является монотонной величиной. Она сначала возрастает от 0 до 1, затем убывает от 1 до -1 , затем возрастает от -1 до 0.

Определение 2. Переменная величина x называется *ограниченной*, если существует такое постоянное $M > 0$, что все последующие значения переменной, начиная с некоторого, удовлетворяют условию $-M \leq x \leq M$, т. е. $|x| \leq M$.

Иначе говоря, переменная величина называется ограниченной, если можно указать такой отрезок $[-M, M]$, что все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут принадлежать этому отрезку. Однако не следует думать, что переменная величина будет принимать непременно все значения отрезка $[-M, M]$. Например, переменная величина, принимающая всевозможные рациональные значения на отрезке $[-2, 2]$, ограничена, тем не менее она не принимает всех значений на $[-2, 2]$, а именно иррациональных.

§ 6. Функция

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Так, например, при изучении движения пройденный путь рассматривается как переменная, изменяющаяся в зависимости от изменения времени. Здесь пройденный путь есть функция времени.

Рассмотрим другой пример. Известно, что площадь круга выражается через радиус так: $Q = \pi R^2$. Если радиус R будет принимать различные числовые значения, то площадь Q также будет принимать различные числовые значения. Таким образом, изменение одной переменной влечет изменение другой. Здесь площадь круга Q есть функция радиуса R . Сформулируем определение понятия «функция».

Определение 1. Если каждому значению переменной x , принадлежащему некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y , то y есть *функция* от x или, в символической записи, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Зависимость переменных x и y называется *функциональной зависимостью*. Буква f в символической записи функциональной зависимости $y = f(x)$ указывает, что над значением x нужно произвести какие-то операции, чтобы получить значение y . Вместо записи $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. д. иногда пишут $y = u(x)$, $u = u(x)$ и т. д., то есть буквы y , u и т. д. обозначают и зависимую переменную, и символ совокупности операций над x .

Запись $y = C$, где C — постоянная, обозначает функцию, значение которой при любом значении x одно и то же и равно C .

Определение 2. Совокупность значений x , для которых определяются значения функции y в силу правила $f(x)$, называется *областью определения функции* (или *областью существования функции*).

Пример 1. Функция $y = \sin x$ определена при всех значениях x . Следовательно, ее область определения будет бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$.

Замечание 1. Если имеем функциональную зависимость двух переменных величин x и $y = f(x)$ и если x и $y = f(x)$ рассматривать как упорядоченные переменные величины, то из двух значений функции $y^* = f(x^*)$ и $y^{**} = f(x^{**})$, соответствующих двум значениям аргумента x^* и x^{**} , последующим значением функции будет то, которое соответствует последующему значению аргумента. Поэтому естественно, например, следующее определение.

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента x соответствует большее значение функции, то функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*. Аналогичным образом определяется *убывающая* функция.

Пример 2. Функция $Q = \pi R^2$ при $0 < R < +\infty$ есть функция возрастающая, так как большему значению R соответствует большее значение Q .

Замечание 2. Иногда в определении понятия функции допускают, что каждому значению x , принадлежащему некоторой области, соответствует не одно, а несколько значений y или даже бесконечное множество значений y . В этом случае функцию называют *многозначной* в отличие от определенной выше функции, которую называют *однозначной*. В дальнейшем, говоря о функции, мы будем иметь в виду только однозначные функции. Если в силу необходимости придется иногда иметь дело с многозначными функциями, то мы будем делать специальные оговорки.

§ 7. Способы задания функции

1. Табличный способ задания функции

При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующие значения функции $y_1, y_2, \dots, y_n$.

x	x_1	x_2	$\dots\dots\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots\dots\dots$	y_n

Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

В результате экспериментального изучения явлений также могут получиться таблицы, выражающие функциональную зависимость между измеряемыми величинами. Так, например, в результате измерения температуры воздуха на метеорологической площадке в определенный день получается следующая таблица:

Значение температуры T (в градусах) в зависимости от времени t (в часах)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0,5	1	3	3,5	4

Эта таблица определяет T как функцию t .

II. Графический способ задания функции

Если в прямоугольной системе координат на плоскости имеем некоторую совокупность точек $M(x, y)$, при этом никакие две точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy , то эта совокупность точек определяет некоторую однозначную функцию $y=f(x)$; значениями аргумента являются абсциссы точек, значениями функции — соответствующие ординаты (рис. 4).

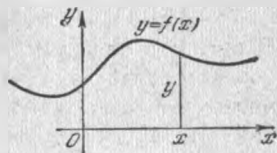


Рис. 4.

Совокупность точек плоскости (xOy), абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется *графиком* данной функции.

III. Аналитический способ задания функции

Сначала разясним понятие «аналитическое выражение». *Аналитическим выражением* будем называть символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные или переменные величины.

Отметим, что под совокупностью известных математических операций будем понимать не только математические операции, известные из курса средней школы (сложение, вычитание, извлечение корня и т. д.), но и те, которые будут определяться по мере изучения курса.

Аналитическими выражениями, например, являются:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\lg x - \sin x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}$$

и т. д.

Если функциональная зависимость $y=f(x)$ такова, что f обозначает аналитическое выражение, то говорят, что функция y от x *задана аналитически*.

Примеры функций, заданных аналитически: 1) $y=x^4-2$; 2) $y=\frac{x+1}{x-1}$; 3) $y=\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\sin x$; 5) $Q=\pi R^2$ и т. д.

Здесь функции заданы аналитически с помощью одной формулы (под формулой понимается равенство двух аналитических выражений). В таких случаях можно говорить о естественной области определения функции.

Естественной областью определения функции, заданной аналитически, является совокупность значений x , при которых имеет вполне определенное значение стоящее справа аналитическое выражение. Так, естественной областью определения функции $y=x^4-2$ является бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$, так как функция определяется при

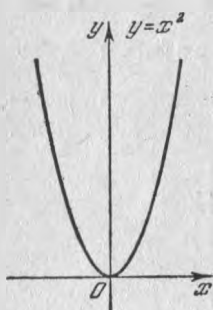


Рис. 5.

всех значениях x . Функция $y=\frac{x+1}{x-1}$ определена при всех значениях x , кроме значения $x=1$, так как при этом значении знаменатель обращается в нуль. Для функции $y=\sqrt{1-x^2}$ естественной областью определения будет отрезок $-1 \leq x \leq 1$ и т. д.

Замечание. Иногда бывает нужно рассматривать не всю естественную область определения функции, а только некоторую ее часть. Так, зависимость площади Q круга от радиуса R определяется функцией $Q=\pi R^2$. Областью определения данной функции при рассмотрении данного геометрического вопроса является бесконечный интервал $0 < R < +\infty$. Естественной же областью определения данной функции является бесконечный интервал $-\infty < R < +\infty$.

Если функция $y=f(x)$ задана аналитически, то она может быть изображена графически на плоскости координат xOy . Так, графиком функции $y=x^2$ является парабола, изображенная на рисунке 5.

§ 8. Основные элементарные функции.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие, аналитическим способом заданные функции.

1. *Степенная функция*: $y=x^a$, где a — действительное число *).

*) При a иррациональном эта функция вычисляется путем логарифмирования и потенцирования: $\log y = a \log x$. При этом предполагается, что $x > 0$.

II. *Показательная функция*: $y = a^x$, где a — положительное число, не равное единице.

III. *Логарифмическая функция*: $y = \log_a x$, где основание логарифмов a — положительное число, не равное единице.

IV. *Тригонометрические функции*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \\ y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Обратные тригонометрические функции*:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \\ y = \operatorname{arcctg} x, \quad y = \operatorname{arcsec} x, \quad y = \operatorname{arccosec} x.$$

Рассмотрим области определения и графики основных элементарных функций.

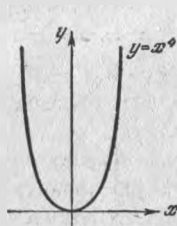


Рис. 6.

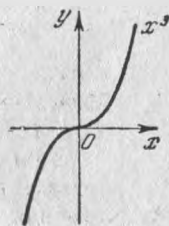


Рис. 7.

Степенная функция, $y = x^a$.

1. a — целое положительное число. Функция определена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Графики функции в этом случае при некоторых значениях a имеют вид, изображенный на рисунках 6 и 7.

2. a — целое отрицательное число. В этом случае функция определена при всех значениях x , кроме $x = 0$. Графики функций при некоторых значениях a имеют вид, изображенный на рисунках 8 и 9.

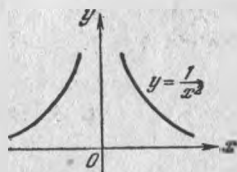


Рис. 8.

На рисунках 10, 11, 12 изображены графики степенной функции при дробно-рациональных значениях a .

Показательная функция, $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при всех значениях x . График ее имеет вид, изображенный на рисунке 13.

Логарифмическая функция, $y = \log_a x$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция определена при $x > 0$. График ее изображен на рисунке 14.

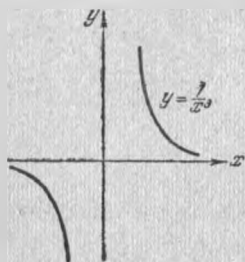


Рис. 9.

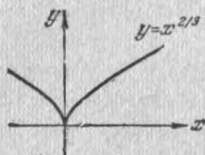


Рис. 10.

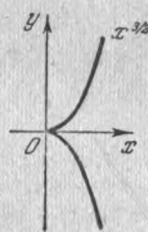


Рис. 11.

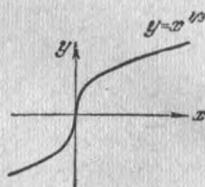


Рис. 12.

Тригонометрические функции. Независимая переменная x в формулах $y = \sin x$ и т. д. выражается в радианах. Все перечисленные тригонометрические функции — периодические. Сформулируем общее определение периодической функции.

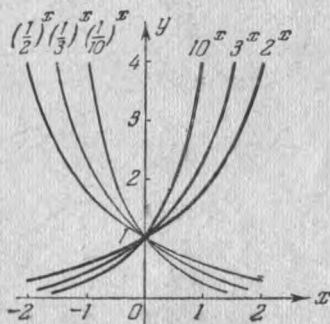


Рис. 13.

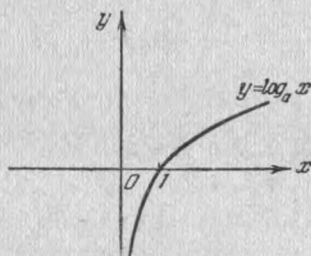


Рис. 14.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число C , от прибавления (или вычитания) которого к аргументу x значение функции не изменяется: $f(x + C) = f(x)$. Наименьшее такое число называется *периодом* функции; в дальнейшем будем обозначать его $2l$.

Из определения непосредственно следует, что $y = \sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π : $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Период $\cos x$ также равен 2π . Период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π .

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены при всех значениях x ; функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sec x$ определены всюду, кроме точек $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{cosec} x$

определены при всех значениях x , кроме точек $x = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).
Графики тригонометрических функций изображены на рисунках 15—19.

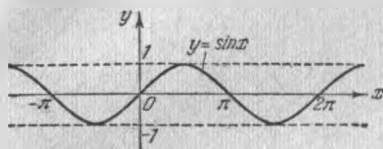


Рис. 15.

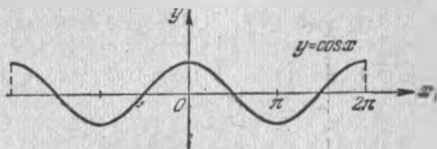


Рис. 16.

Обратные тригонометрические функции будут нами подробно рассмотрены позднее.

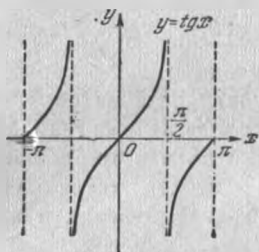


Рис. 17.

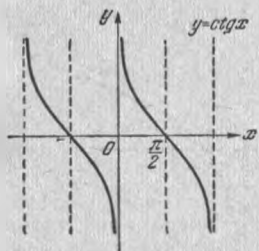


Рис. 18.

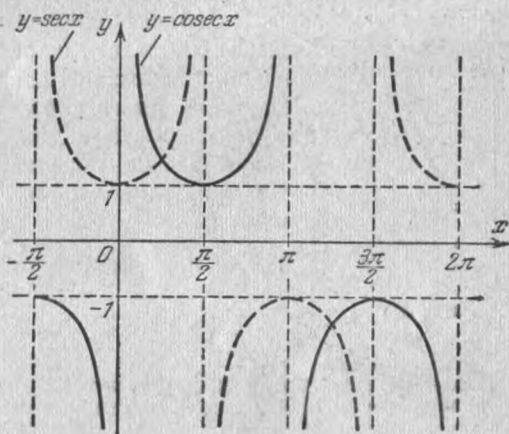


Рис. 19.

Введем, далее, понятие функции от функции. Если y является функцией от u , а u в свою очередь зависит от переменной x , то y также зависит от x . Пусть $y = F(u)$ и $u = \varphi(x)$. Получаем функцию y от x

$$y = F[\varphi(x)].$$

Последняя функция называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Пример 1. Пусть $y = \sin u$, $u = x^2$. Функция $y = \sin(x^2)$ является сложной функцией x .

Замечание. Областью определения функции $y = F[\varphi(x)]$ является или вся область определения функции, $u = \varphi(x)$, или та ее

часть, в которой определяются значения u , не выходящие из области определения функции $F(u)$.

Пример 2. Областью определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1-x^2$) является отрезок $[-1, 1]$, так как $u < 0$ при $|x| > 1$ и, следовательно, функция $\sqrt{u}$ не определена при этих значениях x (хотя функция $u = 1-x^2$ определена при всех значениях x). Графиком этой функции является верхняя половина окружности с центром в начале координат и радиусом единица.

Операция «функция от функции» может производиться не один, а любое число раз. Например, функция $y = \ln [\sin (x^2 + 1)]$ получается в результате следующих операций (определения следующих функций):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Определим, далее, понятие элементарной функции.

Определение 2. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где справа стоящее выражение составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

На основании определения следует, что элементарные функции являются функциями, заданными аналитически.

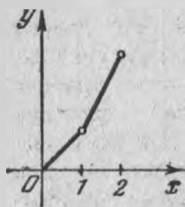


Рис. 20.

Примеры элементарных функций:

$$y = \sqrt{1 + 4 \sin^2 x}; \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2 \operatorname{tg} x}{10^x - x + 10}.$$

Примеры неэлементарных функций:

1. Функция $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($y = f(n)$) не является элементарной, так как количество операций, которое нужно произвести для получения y , увеличивается с увеличением n , т. е. не является ограниченным.

2. Функция, изображенная на рисунке 20, также не является элементарной, так как она задается с помощью двух формул:

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) &= 2x - 1, & \text{если } 1 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

§ 9. Алгебраические функции

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида:

1. Целая рациональная функция или многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные числа, называемые коэффициентами;

n — целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена. Очевидно, что эта функция определена при всех значениях x , т. е. определена на бесконечном интервале.

Примеры: 1. $y = ax + b$ — *линейная функция*. При $b = 0$ линейная функция $y = ax$ выражает пропорциональную зависимость y от x . При $a = 0$, $y = b$ функция есть постоянная.

2. $y = ax^2 + bx + c$ — *квадратичная функция*. График квадратичной функции есть парабола (рис. 21).

Эти функции подробно рассматривались в аналитической геометрии.

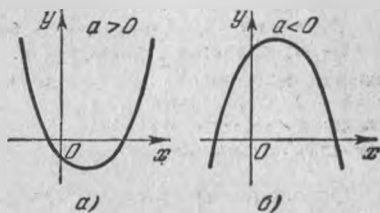


Рис. 21.

II. Дробная рациональная функция. Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Дробной рациональной функцией является, например, функция $y = \frac{a}{x}$, выражающая обратную пропорциональную зависимость. Ее график изображен на рисунке 22.

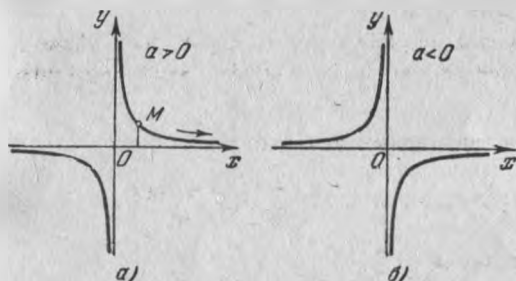


Рис. 22.

Очевидно, что дробная рациональная функция определена при всех значениях x , кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

III. Иррациональная функция. Если в формуле $y = f(x)$ в правой части производятся операции сложения, вычи-

тания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями, то функция y от x называется *иррациональной*. Примеры иррациональных функций: $y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$; $y = \sqrt{x}$ и т. п.

Замечание 1. Перечисленные три вида алгебраических функций не исчерпывают всех алгебраических функций. *Алгебраической функцией* называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x) y^n + P_1(x) y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\dots$, $P_n(x)$ — некоторые многочлены от x .

Можно доказать, что каждая из функций перечисленных трех видов удовлетворяет некоторому уравнению вида (1), но не всякая

функция, удовлетворяющая уравнению вида (1), является функцией одного из перечисленных трех видов.

Замечание 2. Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Примеры трансцендентных функций: $y = \cos x$; $y = 10^x$ и т. п.

§ 10. Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно определять с помощью так называемой *полярной системы координат*.

На плоскости выбираем некоторую точку O , называемую *полюсом*, и выходящую из этой точки полупрямую, называемую *полярной осью*. Положение точки M на плоскости можно определить двумя числами: числом ρ , выражающим расстояние точки M от полюса, и числом φ — величиной угла, образованного отрезком OM с полярной осью. Положительным направлением отсчета угла φ считается направление против часовой стрелки. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M (рис. 23).

Радиус-вектор ρ будем всегда считать неотрицательным. Если полярный угол φ брать в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$, то каждой точке плоскости, кроме полюса, соответствует вполне определенная пара чисел ρ и φ . Для полюса $\rho = 0$, φ — произвольное.

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox — с полярной

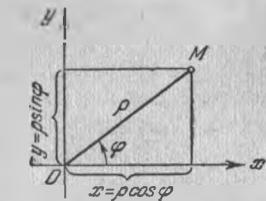


Рис. 24.

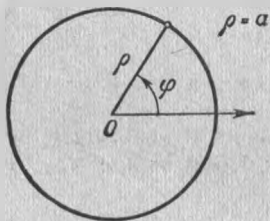


Рис. 25.

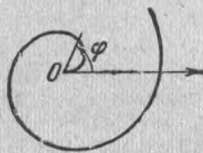


Рис. 26.

осью. Установим связь между прямоугольными и полярными координатами одной и той же точки. Из рисунка 24 непосредственно следует: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и обратно $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Примечание. При нахождении φ нужно учитывать, в какой четверти находится точка, и брать соответствующее значение φ .

Уравнение $\rho = F(\varphi)$ в полярной системе координат определяет некоторую линию.

Пример 1. Уравнение $\rho = a$, где $a = \text{const}$, определяет в полярных координатах окружность с центром в полюсе и радиусом a . Уравнение этой окружности (рис. 25) в прямоугольной системе координат, расположенной так, как указано на рис. 24, будет:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Пример 2.

$$\rho = a\varphi, \quad \text{где } a = \text{const}.$$

Составим таблицу значений ρ при некоторых значениях φ :

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

Соответствующая кривая изображена на рисунке 26. Эта кривая называется *спиралью Архимеда*.

Пример 3.

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Это — уравнение окружности радиуса a , центр которой находится в точке $\rho_0 = a, \varphi = 0$ (рис. 27). Напишем уравнение этой окружности в прямоугольных координатах. Подставляя в данное уравнение $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

будем иметь: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ или

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

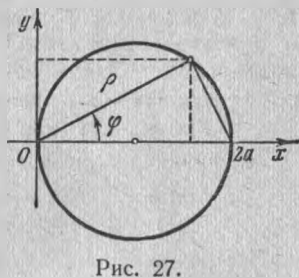


Рис. 27.

Упражнения к главе I

1. Дана функция $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Проверить, что $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Вычислить значения:

а) $f(4)$. *Отв.* 17. б) $f(\sqrt{2})$. *Отв.* 3. в) $f(a+1)$.

Отв. $a^2 + 2a + 2$. г) $f(a) + 1$. *Отв.* $a^2 + 2$.

д) $f(a^2)$. *Отв.* $a^4 + 1$. е) $[f(a)]^2$. *Отв.* $a^4 + 2a^2 + 1$.

ж) $f(2a)$. *Отв.* $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Написать выражения: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}$. *Отв.* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{1-x}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Написать выражения: $\psi(2x)$ и $\psi(0)$. *Отв.* $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \lg \theta$. Проверить равенство $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$. Проверить равенство $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \lg x$; $\varphi(x) = x^3$. Написать выражения: а) $f[\varphi(2)]$. *Отв.* $3 \lg 2$. б) $f[\varphi(a)]$. *Отв.* $3 \lg a$. в) $\varphi[f(a)]$. *Отв.* $[\lg a]^3$.

8. Найти естественную область определения функции $y = 2x^2 + 1$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

9. Найти естественные области определения функций: а) $\sqrt{1-x^2}$. *Отв.* $-1 \leq x \leq +1$. б) $\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$. *Отв.* $-3 \leq x \leq 7$.

в) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt{x-b}$. *Отв.* $-\infty < x < +\infty$. г) $\frac{a+x}{a-x}$. *Отв.* $x \neq a$.

д) $\arcsin^2 x$. *Отв.* $-1 \leq x \leq 1$. е) $y = \lg x$. *Отв.* $x > 0$. ж) $y = a^x$ ($a > 0$). *Отв.* $-\infty < x < +\infty$.

Построить графики функций:

10. $y = -3x + 5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. 12. $y = 3 - 2x^2$. 13. $y = x^2 + 2x - 1$.

14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \sin 2x$. 16. $y = \cos 3x$. 17. $y = x^2 - 4x + 6$.

18. $y = \frac{1}{1-x^2}$. 19. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 20. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$.

22. $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{4}x$. 23. $y = 3^x$. 24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2 \frac{1}{x}$. 26. $y = x^3 + 1$.

27. $y = 4 - x^3$. 28. $y = \frac{1}{x^2}$. 29. $y = x^4$. 30. $y = x^4$. 31. $y = x^{\frac{1}{2}}$. 32. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

33. $y = x^{\frac{1}{3}}$. 34. $y = |x|$. 35. $y = \log_2 |x|$. 36. $y = \log_2 (1-x)$.

37. $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 38. $y = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

39. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1; 1]$ следующим образом:

$$f(x) = 1 + x \quad \text{при } -1 \leq x \leq 0;$$

$$f(x) = 1 - 2x \quad \text{при } 0 \leq x < 1.$$

40. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; 2]$ следующим образом:

$$f(x) = x^3 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1;$$

$$f(x) = x \quad \text{при } 1 \leq x \leq 2.$$

Построить кривые, данные полярными уравнениями:

41. $\varrho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль). 42. $\varrho = a^\varphi$ (логарифмическая спираль).

43. $\varrho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската). 44. $\varrho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида).

45. $\varrho = a \sin 3\varphi$.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. Предел переменной величины. Бесконечно большая переменная величина

В этом параграфе мы будем рассматривать упорядоченные переменные величины, изменяющиеся специальным образом, который определяется терминами «переменная величина стремится к пределу». Во всем дальнейшем курсе понятие предела переменной будет играть фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа — производная, интеграл и др.

Определение 1. Постоянное число a называется *пределом* переменной величины x , если для каждого наперед заданного произвольно малого положительного числа ε можно указать такое значение переменной x , что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Если число a есть предел переменной величины x , то говорят, что x стремится к пределу a , и пишут:

$$x \rightarrow a \text{ или } *) \lim x = a.$$

В терминах геометрических определение предела может быть сформулировано следующим образом:

Постоянное число a есть *предел* переменной x , если для любой наперед заданной как угодно малой окрестности с центром в точке a и радиусом ε найдется такое значение x , что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находиться в этой окрестности (рис. 28). Рассмотрим несколько примеров переменных, стремящихся к пределу.

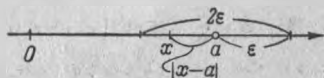


Рис. 28.

Пример 1. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 + 1; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad x_3 = 1 + \frac{1}{3}; \quad \dots; \quad x_n = 1 + \frac{1}{n}; \quad \dots$$

*) «lim» есть сокращение латинского слова *limes* — предел.

Докажем, что эта переменная величина имеет предел, равный единице. Имеем

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Для любого ε все последующие значения переменной, начиная с номера n , где $\frac{1}{n} < \varepsilon$, или $n > \frac{1}{\varepsilon}$, будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ ч. т. д.}$$

Заметим, что здесь переменная величина стремится к пределу, убывая.

Пример 2. Переменная величина x последовательно принимает значения

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}; x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}; x_3 = 1 - \frac{1}{2^3}; x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}; \dots; x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}; \dots$$

Эта переменная имеет предел, равный единице. Действительно,

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Для любого ε , начиная с номера n , удовлетворяющего соотношению $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, из которого следует:

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}, n \lg 2 > \lg \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}.$$

все последующие значения x будут удовлетворять соотношению $|x_n - 1| < \varepsilon$. Отметим, что здесь значения переменной величины то больше, то меньше предела. Переменная величина стремится к пределу, «колеблясь вокруг него».

Замечание 1. Как указывалось в § 3 гл. I, постоянную величину c часто рассматривают как величину переменную, все значения которой одинаковы: $x = c$.

Очевидно, что предел постоянной будет равен самой постоянной, так как всегда выполняется неравенство $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при любом ε .

Замечание 2. Из определения предела следует, что переменная величина не может иметь двух пределов. Действительно, если $\lim x = a$ и $\lim x = b$ ($a < b$), то x должен удовлетворять сразу двум неравенствам:

$$|x - a| < \varepsilon \text{ и } |x - b| < \varepsilon$$

при произвольно малом ε , а это невозможно, если $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (рис. 29).

Замечание 3. Не следует думать, что каждая переменная величина имеет предел. Пусть переменная величина x последовательно принимает следующие значения:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1 - \frac{1}{4}; x_3 = \frac{1}{8}; \dots; x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}; x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(рис. 30). При достаточно большом k значение x_{2k} и все последующие значения с четными номерами будут отличаться как угодно мало

от единицы, а следующее значение x_{2k+1} и все последующие значения x с нечетными номерами будут как угодно мало отличаться от нуля. Следовательно, переменная x не стремится к пределу.

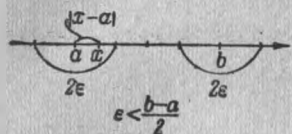


Рис. 29.

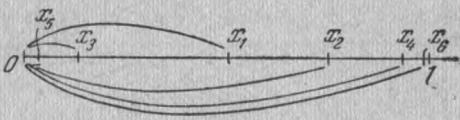


Рис. 30.

В определении предела указано, что если переменная величина стремится к пределу a , то a — постоянное число. Но понятие «стремится» употребляется и для характеристики другого способа изменения переменной величины, что видно из следующего определения.

Определение 2. Переменная x стремится к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x , начиная с которого все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x| > M$.

Если переменная x стремится к бесконечности, то ее называют *бесконечно большой* переменной величиной и пишут $x \rightarrow \infty$.

Пример 3. Переменная величина x принимает значения

$$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = -3; \dots; x_n = (-1)^n n; \dots$$

Это — бесконечно большая переменная величина, так как при произвольном $M > 0$ все значения переменной, начиная с некоторого, по абсолютной величине будут больше M .

Переменная величина x «стремится к плюс бесконечности», $x \rightarrow +\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $M < x$.

Примером переменной величины, стремящейся к плюс бесконечности, может служить переменная величина x , принимающая значения $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$

Переменная величина x «стремится к минус бесконечности», $x \rightarrow -\infty$, если при произвольном $M > 0$ все последующие значения переменной, начиная с некоторого, будут удовлетворять неравенству $x < -M$.

Например, переменная x , принимающая значения $x_1 = -1, x_2 = -2, \dots, x_n = -n, \dots$, стремится к минус бесконечности.

§ 2. Предел функции

В этом параграфе будем рассматривать некоторые случаи изменения функции при стремлении аргумента x к некоторому пределу a или к бесконечности.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности.

Функция $y=f(x)$ стремится к пределу b ($y \rightarrow b$) при x , стремящемся к a ($x \rightarrow a$), если для каждого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно указать такое положительное число δ , что для всех x , отличных от a и удовлетворяющих неравенству *)

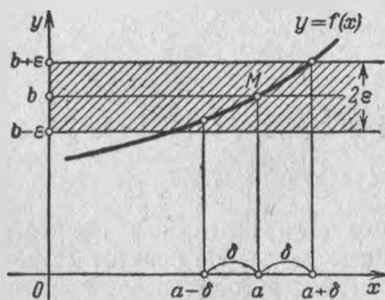


Рис. 31.

$$|x - a| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если b есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то пишут:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$.

Если $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$, то на графике функции $y=f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис. 31); так как из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, то это значит, что для всех точек x , отстоящих от точки a не далее чем на δ , точки M графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$.

Замечание 1. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ можно определить и следующим образом.

Пусть переменная величина x принимает значения так (упорядочена так), что если

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

то x^{**} есть последующее, а x^* — предыдущее значение; если же

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ и } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

то $\bar{x}^{**}$ есть последующее, а $\bar{x}^*$ — предыдущее.

Другими словами, из двух точек числовой прямой последующей является та точка, которая ближе к точке a ; при равных расстояниях последующая — та, которая правее от точки a .

Пусть упорядоченная таким образом переменная величина x стремится к пределу a [$x \rightarrow a$ или $\lim x = a$].

*) Здесь имеются в виду те значения x , удовлетворяющие неравенству $|x - a| < \delta$, которые принадлежат области определения функции. Аналогичные обстоятельства будут встречаться и в дальнейшем. Так, при рассмотрении поведения функции при $x \rightarrow \infty$ может случиться, что функция определена только при целых положительных значениях x . Следовательно, в этом случае $x \rightarrow \infty$, принимая только целые положительные значения. Оговорок об этом мы в дальнейшем делать не будем.

Рассмотрим, далее, переменную величину $y=f(x)$. При этом будем считать, как и всюду в дальнейшем, что из двух значений функции последующим является то значение, которое соответствует последующему значению аргумента.

Если определенная так переменная величина y при $x \rightarrow a$ стремится к некоторому пределу b , то будем писать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

и говорить, что функция $y=f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow a$.

Легко доказать, что оба определения предела функции эквивалентны.

Замечание 2. Если $f(x)$ стремится к пределу b_1 при x , стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a , то пишут $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ и называют b_1

пределом функции $f(x)$ в точке a слева.

Если x принимает только значения большие, чем a , то пишут $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$ и называют b_2 *пределом функции в точке a справа* (рис. 32).

Можно доказать, что если предел справа и предел слева существуют и равны, т. е. $b_1 = b_2 = b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a . И обратно, если существует предел функции b в точке a , то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Пример 1. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1) = 7$. Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$; для того чтобы выполнялось неравенство

$$|(3x+1)-7| < \varepsilon,$$

необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \varepsilon/3, \quad -\varepsilon/3 < x-2 < \varepsilon/3.$$

Таким образом, при любом ε для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \varepsilon/3 = \delta$, значение функции $3x+1$ будет отличаться от 7 меньше чем на ε . А это и значит, что 7 есть предел функции при $x \rightarrow 2$.

Замечание 3. Для существования предела функции при $x \rightarrow a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x=a$. При нахождении предела рассматриваются значения функции в окрестности точки a , отличные от a ; это положение наглядно иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Здесь функция $\frac{x^2-4}{x-2}$ не определена при $x=2$.

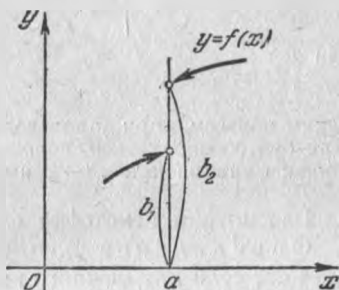


Рис. 32.

Нужно доказать, что при произвольном ε найдется такое δ , что будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

если $|x - 2| < \delta$. Но при $x \neq 2$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 \right| = |x+2-4| < \varepsilon$$

или

$$|x - 2| < \varepsilon. \quad (2)$$

Таким образом, при произвольном ε неравенство (1) будет выполняться, если будет выполняться неравенство (2) (здесь $\delta = \varepsilon$). А это и значит, что данная функция при $x \rightarrow 2$ имеет пределом число 4.

Рассмотрим некоторые случаи изменения функции при $x \rightarrow \infty$.

Определение 2. Функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow \infty$, если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 3. Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1 \text{ или, в иной записи, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Нужно доказать, что при произвольном ε будет выполняться неравенство

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \varepsilon, \quad (3)$$

если только $|x| > N$, причем N определяется выбором ε . Неравенство (3) эквивалентно следующему неравенству: $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, которое будет выполняться, если будет

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N.$$

Это и значит, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ (рис. 33).

Зная смысл символов $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, очевидным является и смысл выражений:

« $f(x)$ стремится к b при $x \rightarrow +\infty$ » и

« $f(x)$ стремится к b при $x \rightarrow -\infty$ »,

которые символически записываются так:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

§ 3. Функция, стремящаяся к бесконечности. Ограниченные функции

Мы рассмотрели случаи, когда функция $f(x)$ стремится к некоторому пределу b при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Определение 1. Функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow a$, т. е. является *бесконечно большой* величиной при $x \rightarrow a$, если для каждого положительного числа M , как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений x , отличных от a , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow a$, то пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

или $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow a$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, соответственно пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

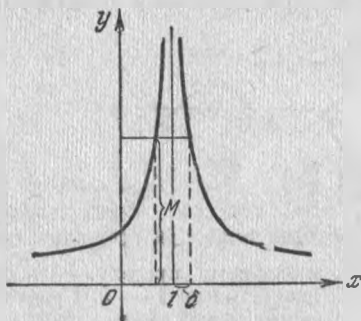


Рис. 34.

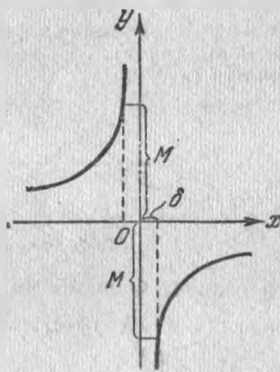


Рис. 35.

Пример 1. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M,$$

если только

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$$

Функция $\frac{1}{(1-x)^2}$ принимает только положительные значения (рис. 34).

Пример 2. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь:

$$\left| -\frac{1}{x} \right| > M,$$

если только

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Здесь $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ при $x < 0$ и $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$ при $x > 0$ (рис. 35).

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, то пишут:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

и, в частности, может быть:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ и т. п.}$$

Замечание 1. Функция $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$ может не стремиться к конечному пределу или к бесконечности.

Пример 3. Функция $y = \sin x$, определенная на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, при $x \rightarrow \infty$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (рис. 36).

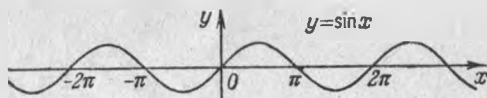


Рис. 36.

Пример 4. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$, определенная при всех значениях x , кроме значения $x = 0$, не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности при $x \rightarrow 0$. График этой функции изображен на рисунке 37.

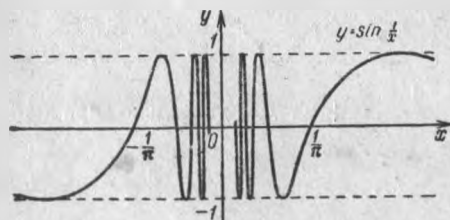


Рис. 37.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента x , если существует положительное число M такое, что для всех значений x , принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться

неравенство $|f(x)| \leq M$. Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в данной области.

Пример 5. Функция $y = \sin x$, определенная в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, является ограниченной, так как при всех значениях x

$$|\sin x| \leq 1 = M.$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной при $x \rightarrow a$* , если существует окрестность с центром в точке a , в которой данная функция ограничена.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной при $x \rightarrow \infty$* , если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, функция $f(x)$ ограничена.

Вопрос об ограниченности функции, стремящейся к пределу, решается следующей теоремой.

Теорема 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, при этом b есть конечное число, то функция $f(x)$ является ограниченной при $x \rightarrow a$.

Доказательство. Из равенства $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое δ , что в окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

или

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

А это и значит, что функция $f(x)$ ограничена при $x \rightarrow a$.

Замечание 2. Из определения ограниченной функции $f(x)$ следует, что если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

т. е. если $f(x)$ есть бесконечно большая, то она является неограниченной. Обратное не верно: неограниченная функция может и не быть бесконечно большой.

Например, функция $y = x \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ является неограниченной, так как для любого $M > 0$ можно найти такие значения x , что $|x \sin x| > M$. Но функция $y = x \sin x$ не является бесконечно большой, поскольку она обращается в нуль при $x = 0, \pi, 2\pi \dots$

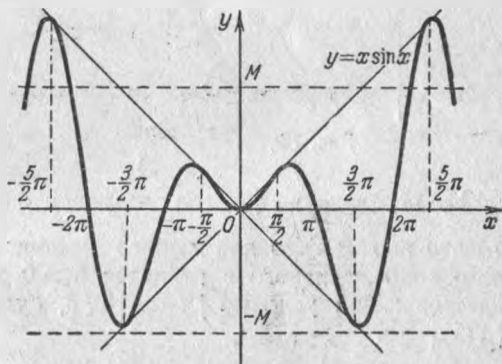


Рис. 38.

График функции $y = x \sin x$ изображен на рисунке 38.

Теорема 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ есть ограниченная функция при $x \rightarrow a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что при произвольном $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности точки $x = a$ будем иметь $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, или $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, или $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$.

Из последних неравенств следует:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon};$$

взяв, например, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$, получаем:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}.$$

А это и значит, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена.

§ 4. Бесконечно малые и их основные свойства

В этом параграфе будем рассматривать функции, стремящиеся к нулю при некотором характере изменения аргумента.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

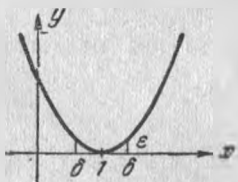


Рис. 39.

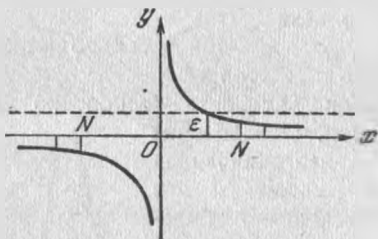


Рис. 40.

Из определения предела следует, что если, например, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то это значит, что для любого наперед заданного произвольно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, будет удовлетворяться условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Функция $\alpha = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow 1$, так как $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ (рис. 39).

Пример 2. Функция $\alpha = \frac{1}{x}$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ (рис. 40) (см. пример 3 § 2).

Установим важное для дальнейшего соотношение:

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ представляется в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой α :

$$y=b+\alpha, \quad (1)$$

то

$$\lim y=b \text{ (при } x \rightarrow a \text{ или } x \rightarrow \infty).$$

Обратно, если $\lim y=b$, то можно написать $y=b+\alpha$, где α — бесконечно малая.

Доказательство. Из равенства (1) следует $|y-b|=|\alpha|$. Но при произвольном ε все значения α , начиная с некоторого, удовлетворяют соотношению $|\alpha|<\varepsilon$, следовательно, для всех значений y , начиная с некоторого, будет выполняться неравенство $|y-b|<\varepsilon$. А это и значит, что $\lim y=b$.

Обратно: если $\lim y=b$, то при произвольном ε для всех значений y , начиная с некоторого, будет $|y-b|<\varepsilon$. Но если обозначим $y-b=\alpha$, то, следовательно, для всех значений α , начиная с некоторого, будет $|\alpha|<\varepsilon$, а это значит, что α — бесконечно малая.

Пример 3. Пусть дана функция (рис. 41)

$$y=1+\frac{1}{x},$$

тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y=1,$$

и наоборот, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y=1,$$

то переменную y можно представить в виде суммы предела 1 и бесконечно малой $\alpha=\frac{1}{x}$, т. е.

$$y=1+\alpha.$$

Теорема 2. Если $\alpha=\alpha(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$) и не обращается в нуль, то $y=\frac{1}{\alpha}$ стремится к бесконечности.

Доказательство. При любом как угодно большом $M>0$ будет выполняться неравенство $\frac{1}{|\alpha|}>M$, если только будет выполняться неравенство $|\alpha|<\frac{1}{M}$. Последнее неравенство будет выполняться для всех значений α , начиная с некоторого, так как $\alpha(x) \rightarrow 0$.

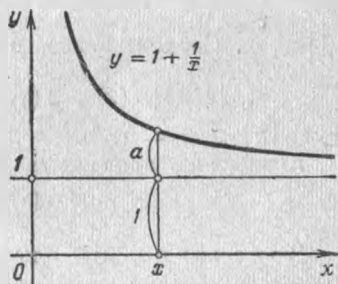


Рис. 41.

Теорема 3. *Алгебраическая сумма двух, трех и вообще определенного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится аналогично.

Пусть $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$. Докажем, что при произвольном как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при удовлетворении неравенства $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|u| < \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ есть бесконечно малая, то найдется такое δ_1 , что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_1 будет

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\beta(x)$ есть бесконечно малая, то в окрестности точки a с радиусом δ_2 будет $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем δ равным меньшему из величин δ_1 и δ_2 , тогда в окрестности точки a с радиусом δ будут выполняться неравенства $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, в этой окрестности будет

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $|u| < \varepsilon$, ч. т. д.

Аналогично проводится доказательство и для случая, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0.$$

Замечание. В дальнейшем нам придется рассматривать такие суммы бесконечно малых величин, что с уменьшением каждого слагаемого число слагаемых увеличивается. В этом случае утверждение теоремы может оказаться и неверным. Рассмотрим, например,

$$u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{x \text{ слагаемых}}, \text{ где } x \text{ принимает только целые положительные}$$

значения ($x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$). Очевидно, что каждое слагаемое при $x \rightarrow \infty$ есть бесконечно малая, но сумма $u = 1$ не есть бесконечно малая.

Теорема 4. *Произведение функции бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ на функцию, ограниченную $z = z(x)$, при $x \rightarrow a$ (или $x \rightarrow \infty$) есть величина (функция) бесконечно малая.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $x \rightarrow a$. Для некоторого $M > 0$ найдется такая окрестность точки $x = a$, в которой будет удовлетворяться неравенство $|z| < M$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность, в которой будет выполняться неравенство $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$. В наименьшей из этих двух окрестностей будет

выполняться неравенство

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

А это и значит, что αz — бесконечно малая. Для случая $x \rightarrow \infty$ доказательство проводится аналогично. Из данной теоремы вытекают:

Следствие 1. Если $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, то $\lim \alpha \beta = 0$, так как $\beta(x)$ есть величина ограниченная. Это справедливо для любого конечного числа множителей.

Следствие 2. Если $\lim \alpha = 0$ и $c = \text{const}$, то $\lim c\alpha = 0$.

Теорема 5. Частное $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ от деления величины бесконечно малой $\alpha(x)$ на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. На основании теоремы 2 § 3 следует, что $\frac{1}{z(x)}$ есть величина ограниченная. Поэтому дробь $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ есть произведение величины бесконечно малой на величину ограниченную, т. е. величина бесконечно малая.

§ 5. Основные теоремы о пределах

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать совокупности функций, которые зависят от одного и того же аргумента x , при этом $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$.

Мы будем проводить доказательство для одного из этих случаев, так как для другого доказательство проводится аналогично. Иногда мы вообще не будем писать ни $x \rightarrow a$, ни $x \rightarrow \infty$, подразумевая то или другое.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных:

$$\lim (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_k.$$

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится так же. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Тогда на основании теоремы 1 § 4 можем написать:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые. Следовательно,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как $(a_1 + a_2)$ есть постоянная величина, а $(\alpha_1 + \alpha_2)$ — величина

бесконечно малая, то снова по теореме 1 § 4 заключаем, что

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Теорема 2. Предел произведения двух, трех и вообще определенного числа переменных равен произведению пределов этих переменных

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \dots \cdot \lim u_k.$$

Доказательство. Для сокращения записи приведем доказательство для двух множителей. Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Следовательно,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

Произведение $a_1 a_2$ есть величина постоянная. Величина $a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2$ на основании теорем § 4 есть величина бесконечно малая. Следовательно, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела. Действительно, если $\lim u_1 = a_1$, c — постоянная и, следовательно, $\lim c = c$, то $\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, ч. т. д.

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Теорема 3. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ если } \lim v \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Следовательно, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, где α и β — бесконечно малые.

Напишем тождества

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)},$$

или

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

Дробь $\frac{a}{b}$ есть постоянное число, а дробь $\frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}$ по теоремам 4 и 5

§ 4 есть бесконечно малая переменная величина, так как $ab - \beta a$ есть бесконечно малая, а знаменатель $b(b + \beta)$ имеет пределом $b^2 \neq 0$.

Следовательно, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (4x-2)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5}{4 \lim_{x \rightarrow 1} x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Здесь мы воспользовались доказанной теоремой о пределе дроби, так как предел знаменателя при $x \rightarrow 1$ отличен от нуля. Если же предел знаменателя есть нуль, то теорема о пределе дроби не может быть применена. В этом случае требуется производить специальные рассуждения.

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

Здесь знаменатель и числитель при $x \rightarrow 2$ стремятся к нулю и, следовательно, теорема 3 неприменима. Произведем следующее тождественное преобразование:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x , отличных от 2. Поэтому, имея в виду определение предела, можем написать:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$. При $x \rightarrow 1$ знаменатель стремится

к нулю, а числитель к нулю не стремится (числитель стремится к единице). Следовательно, предел обратной величины есть нуль, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Отсюда на основании теоремы 2 предыдущего параграфа будем иметь:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty.$$

Теорема 4. Если между соответствующими значениями трех функций $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ выполняются неравенства $u \leq z \leq v$, при этом $u(x)$ и $v(x)$ при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$) стремятся к одному и тому же пределу b , то $z = z(x)$ при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$) стремится к тому же пределу.

Доказательство. Для определенности будем рассматривать изменение функций при $x \rightarrow a$. Из неравенств $u \leq z \leq v$ следуют неравенства

$$u - b \leq z - b \leq v - b;$$

по условию

$$\lim_{x \rightarrow a} u = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = b.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ найдется некоторая окрестность с центром в точке a , в которой будет выполняться неравенство

$|u-b| < \varepsilon$; так же найдется некоторая окрестность с центром в точке a , в которой будет выполняться неравенство $|v-b| < \varepsilon$. В меньшей из указанных окрестностей будут выполняться неравенства:

$$-\varepsilon < u-b < \varepsilon \text{ и } -\varepsilon < v-b < \varepsilon,$$

а следовательно, будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon < z-b < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} z = b.$$

Теорема 5. Если при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$) функция y принимает неотрицательные значения $y \geq 0$ и при этом стремится к пределу b , то b есть неотрицательное число: $b \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $b < 0$, тогда $|y-b| \geq |b|$, то есть модуль разности $|y-b|$ больше положительного числа $|b|$ и, следовательно, не стремится к нулю при $x \rightarrow a$. Но тогда y при $x \rightarrow a$ не стремится к b , что противоречит условию теоремы. Значит, предположение, что $b < 0$, приводит к противоречию. Следовательно, $b \geq 0$.

Аналогично доказывается, что если $y \leq 0$, то $\lim y \leq 0$.

Теорема 6. Если между соответствующими значениями двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, стремящихся к пределам при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$), выполняется неравенство $v \geq u$, то имеет место $\lim v \geq \lim u$.

Доказательство. По условию $v-u \geq 0$, следовательно (по теореме 5), $\lim (v-u) \geq 0$, или $\lim v - \lim u \geq 0$, т. е. $\lim v \geq \lim u$.

Пример 6. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Из рисунка 42 следует: если $OA=1$, $x > 0$, то $AC = \sin x$, $AB = x$, $\sin x < x$. Очевидно, что при $x < 0$ будет $|\sin x| < |x|$. Из этих неравенств на основании теорем 5 и 6 следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Пример 7. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

Действительно, $\left| \sin \frac{x}{2} \right| < \left| \sin x \right|$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

Пример 8. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; заметим, что

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

В некоторых исследованиях вопроса о пределе переменных приходится решать две самостоятельные задачи:

1) доказывать, что предел переменной существует, и устанавливать границы, внутри которых рассматриваемый предел находится;

2) вычислять рассматриваемый предел с нужной степенью точности.

Иногда первый вопрос решается с помощью следующей, важной для дальнейшего теоремы.

Теорема 7. Если переменная величина v возрастающая, т. е. всякое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, т. е. $v < M$, то эта переменная величина имеет предел $\lim v = a$, где $a \leq M$.

Аналогичное утверждение имеет место и для убывающей ограниченной переменной величины.

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим, так как оно основывается на теории действительных чисел, которую мы здесь не даем *).

В следующих двух параграфах будут получены пределы двух функций, имеющие большое применение в математике.

§ 6. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Найдем предел этой функции при $x \rightarrow 0$. Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 43); обозначим центральный угол MOB

через x , при этом $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Из рисунка 43

непосредственно следует:

площадь $\triangle MOA <$

$<$ площади сектора $MOA <$
 $<$ площади $\triangle COA$. (1)

Площадь $\triangle MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$$

Площадь сектора $MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$.

Площадь $\triangle COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Неравенство (1) после сокращения на $\frac{1}{2}$ переписывается так:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

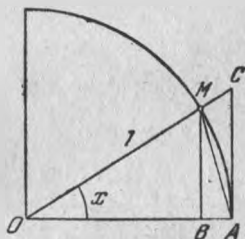


Рис. 43.

*) Доказательство этой теоремы приведено, например, в книге Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1960.

Разделим все члены на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Мы вывели это неравенство в предположении, что $x > 0$; замечая, что $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$, заключаем, что оно верно и при $x < 0$. Но $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

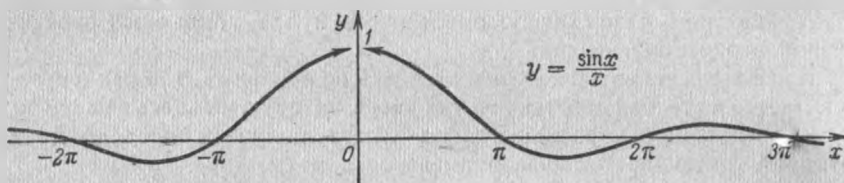


Рис. 44.

Следовательно, переменная $\frac{\sin x}{x}$ заключена между двумя величинами, имеющими один и тот же предел, равный 1; таким образом, на основании теоремы 4 предыдущего параграфа

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

График функции $y = \frac{\sin x}{x}$ изображен на рисунке 44.

Примеры.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (kx \rightarrow 0)}} \frac{\sin(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k \quad (k = \text{const}).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}). \end{aligned}$$

§ 7. Число e

Рассмотрим переменную величину

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

где n — возрастающая переменная величина, принимающая значения 1, 2, 3, ...

Теорема 1. *Переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, заключенный между числами 2 и 3.*

Доказательство. По формуле бинома Ньютона можем написать:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Произведя очевидные алгебраические преобразования (1), получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Из последнего равенства следует, что переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая переменная величина при возрастающем n .

Действительно, при переходе от значения n к значению $n+1$ каждое слагаемое последней суммы возрастает

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{ и т. д.}$$

и добавляется еще один член. (Все члены разложения — положительные.)

Покажем, что переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Замечая, что $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$; $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1$ и т. д., из выражения (2) получим неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}.$$

Замечая, далее, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

можем написать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{< 1}.$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ и первым членом $a = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \\ &= 1 + \frac{a - aq^n}{1 - q} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Из равенства (2) следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Итак, переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая и ограниченная, поэтому на основании теоремы 7 § 5 она имеет предел. Этот предел обозначается буквой e .

Определение. Предел переменной величины $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ называется *) *числом e* :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Из неравенства (3) на основании теоремы 6 § 5 следует, что и число e удовлетворяет неравенству $2 \leq e \leq 3$. Теорема доказана.

Число e — иррациональное число. Позднее будет указан метод его вычисления с любой степенью точности. Его значение с десятью верными знаками после запятой:

$$e = 2,7182818284\dots$$

Теорема 2. Функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ стремится при x , стремящемся к бесконечности, к пределу e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

*) Можно показать, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ при $n \rightarrow +\infty$, если n не является возрастающей переменной величиной.

Доказательство. Было установлено, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ при $n \rightarrow \infty$, если n принимает целые положительные значения. Пусть теперь x стремится к бесконечности, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

1) Пусть $x \rightarrow +\infty$. Каждое его значение заключено между двумя положительными целыми числами

$$n \leq x < n + 1.$$

При этом будут выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, \\ 1 + \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Если $x \rightarrow \infty$, то, очевидно, и $n \rightarrow \infty$. Найдем пределы переменных, между которыми заключена переменная $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e, \end{aligned}$$

следовательно (по теореме 4 § 5),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

2) Пусть $x \rightarrow -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1)$ или $x = -(t+1)$. При $t \rightarrow +\infty$ будет $x \rightarrow -\infty$. Можем написать:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ и первым членом $a = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \\ &= 1 + \frac{a - aq^n}{1 - q} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Из равенства (2) следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Итак, переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — возрастающая и ограниченная, поэтому на основании теоремы 7 § 5 она имеет предел. Этот предел обозначается буквой e .

Определение. Предел переменной величины $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ называется *) *числом e* :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Из неравенства (3) на основании теоремы 6 § 5 следует, что и число e удовлетворяет неравенству $2 \leq e \leq 3$. Теорема доказана.

Число e — иррациональное число. Позднее будет указан метод его вычисления с любой степенью точности. Его значение с десятью верными знаками после запятой:

$$e = 2,7182818284\dots$$

Теорема 2. Функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ стремится при x , стремящемся к бесконечности, к пределу e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

*) Можно показать, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ при $n \rightarrow +\infty$, если n не является возрастающей переменной величиной.

Доказательство. Было установлено, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ при $n \rightarrow \infty$, если n принимает целые положительные значения. Пусть теперь x стремится к бесконечности, принимая как дробные, так и отрицательные значения.

1) Пусть $x \rightarrow +\infty$. Каждое его значение заключено между двумя положительными целыми числами

$$n \leq x < n + 1.$$

При этом будут выполняться неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, \\ 1 + \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Если $x \rightarrow \infty$, то, очевидно, и $n \rightarrow \infty$. Найдем пределы переменных, между которыми заключена переменная $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e, \end{aligned}$$

следовательно (по теореме 4 § 5),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

2) Пусть $x \rightarrow -\infty$. Введем новую переменную $t = -(x+1)$ или $x = -(t+1)$. При $t \rightarrow +\infty$ будет $x \rightarrow -\infty$. Можем написать:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Теорема доказана. График функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ изображен на рисунке 45.

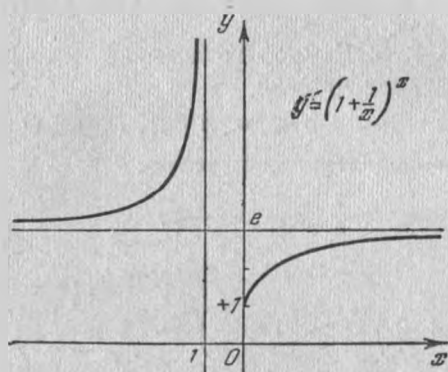


Рис. 45.

Если в равенстве (4) положить $\frac{1}{x} = \alpha$, то при $x \rightarrow \infty$ имеем $\alpha \rightarrow 0$ (но $\alpha \neq 0$) и мы получаем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e, \\ 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e \cdot e = e^3, \\ 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2, \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4. \end{aligned}$$

§ 8. Натуральные логарифмы

В § 8 главы I была определена логарифмическая функция $y = \log_a x$. Число a называется основанием логарифмов. Если $a = 10$, то y называется десятичным логарифмом числа x и обозначается $y = \lg x$. Из школьного курса известны таблицы значений десятичных логарифмов, которые называются *бригговыми*, по имени английского ученого Бригга (1556—1630).

Логарифмы с основанием $e = 2,71828\dots$ называются *натуральными* или *неперовыми логарифмами*, по имени одного из первых изобретателей логарифмических таблиц, математика Непера (1550—1617). Следовательно, если $e^y = x$, то y называют натуральными логарифмами числа x и пишут $y = \ln x$ вместо $y = \log_e x$. Графики функций $y = \ln x$ и $y = \lg x$ построены на рисунке 46.

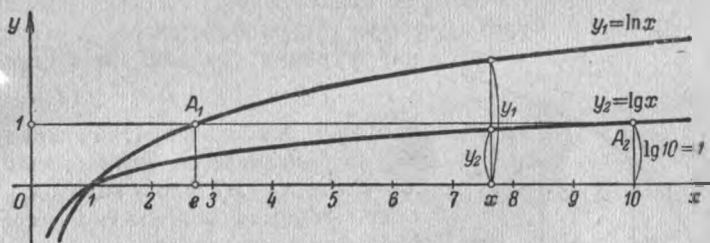


Рис. 46.

Установим, далее, зависимость между десятичными и натуральными логарифмами одного и того же числа x . Пусть $y = \lg x$ или $x = 10^y$. Прологарифмируем левую и правую части последнего равенства при основании e , получим $\ln x = y \ln 10$. Определяем $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$, или, подставляя значение y , имеем $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$.

Таким образом, если известен натуральный логарифм числа x , десятичный логарифм этого числа находится путем умножения на множитель $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$, не зависящий от x . Число M называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg x = M \ln x.$$

Если положим в этом тождестве $x = e$, то получим выражение числа M через десятичные логарифмы:

$$\lg e = M \quad (\ln e = 1).$$

Натуральные логарифмы через десятичные выражаются так:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x,$$

где

$$\frac{1}{M} = 2,302585.$$

Замечание. Для вычисления натуральных логарифмов чисел существуют специальные таблицы (например, см. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, 1963).

§ 9. Непрерывность функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в x_0 . Пусть $y_0=f(x_0)$.

Если x получит некоторое положительное или отрицательное — безразлично — приращение Δx и примет значение $x=x_0+\Delta x$, то и функция y получит некоторое приращение Δy . Новое, наращенное значение функции будет $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ (рис. 47). Приращение функции Δy выразится формулой

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной при значении $x=x_0$* (или *в точке x_0*), если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (очевидно, и в самой точке x_0) и если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \quad (2)$$

Описательно геометрически непрерывность функции в данной точке означает, что разность ординат графика функции $y=f(x)$ в точках $x_0+\Delta x$ и x_0 будет по абсолютной величине произвольно малой, если только $|\Delta x|$ будет достаточно мало.

Пример 1. Докажем, что функция $y=x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0 . Действительно,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

при любом способе стремления к нулю Δx (рис. 48, а и б).

Пример 2. Докажем, что функция $y=\sin x$ непрерывна в произвольной точке x_0 . Действительно,

$$y_0 = \sin x_0, \quad y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

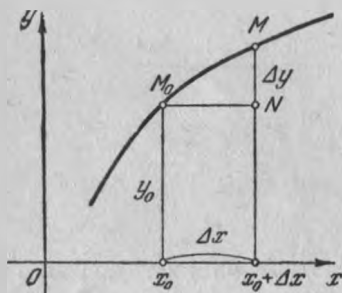


Рис. 47.

Было показано, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ (пример 7 § 5). Функция $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ ограничена. Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Аналогичным образом рассматривая каждую основную элементарную функцию и каждую элементарную функцию, можно было бы доказать следующую теорему

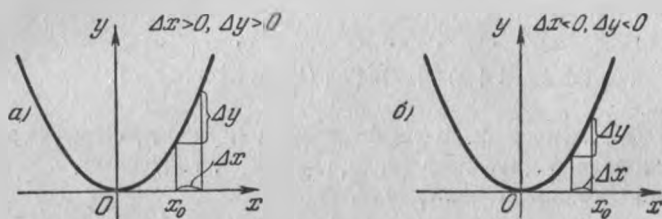


Рис. 48.

Теорема. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена*).*

Условие непрерывности (2) можно записать и так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

но

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x), \quad (3)$$

т. е. для того, чтобы найти предел непрерывной функции при $x \rightarrow x_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0 .

Пример 3. Функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке x_0 и потому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 &= x_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow 3} x^2 &= 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Пример 4. Функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке и потому

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*) Этот вопрос подробно изложен в книге Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1960.

Пример 5. Функция $y=e^x$ непрерывна в каждой точке и потому $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.

$$\text{Пример 6. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}].$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и функция $\ln z$ непрерывна при $z > 0$, и, следовательно, при $z = e$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a, b) , где $a < b$, то говорят, что функция *непрерывна на этом интервале*.

Если функция определена и при $x=a$, и при этом $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, то говорят, что $f(x)$ в точке $x=a$ *непрерывна справа*. Если $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=b$ *непрерывна слева*.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна на концах интервала, соответственно справа и слева, то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна на замкнутом интервале* или *отрезке* $[a, b]$.

Пример 7. Функция $y=x^2$ непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, что следует из примера 1.

Если в какой-то точке $x=x_0$ для функции $y=f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, т. е. если при $x=x_0$ функция не определена или не существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ при произвольном стремлении $x \rightarrow x_0$, хотя выражения, стоящие справа и слева, существуют, то при $x=x_0$ функция $y=f(x)$ *разрывна*. Точка $x=x_0$ в этом случае называется *точкой разрыва* функции.

Пример 8. Функция $y=\frac{1}{x}$ разрывна при $x=0$. Действительно, при $x=0$ функция не определена:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Легко показать, что эта функция непрерывна при любом значении $x \neq 0$.

Пример 9. Функция $y=2^{\frac{1}{x}}$ разрывна при $x=0$. Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. При $x=0$ функция не определена (рис. 49).

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x}{|x|}$. При $x < 0$ будет $\frac{x}{|x|} = -1$; при $x > 0$ будет $\frac{x}{|x|} = 1$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1;$$

при $x=0$ функция не определена. Таким образом, мы установили, что

функция $f(x) = \frac{x}{|x|}$ разрывна при $x=0$ (рис. 50).

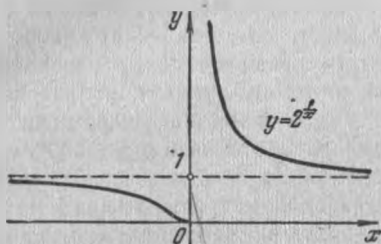


Рис. 49.

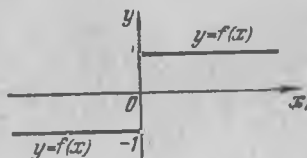


Рис. 50.

Пример 11. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$, рассмотренная в примере 4 § 3, разрывна при $x=0$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ такова, что существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, но или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, или значение функции $f(x)$ при $x=x_0$ не определено, то $x=x_0$ называется *точкой разрыва 1-го рода*. (Например, для функции, рассмотренной в примере 10, точка $x=0$ есть точка разрыва 1-го рода.)

§ 10. Некоторые свойства непрерывных функций

В этом параграфе рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства будут сформулированы в виде теорем, которые мы приводим без доказательства*).

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ ($a \leq x \leq b$), то на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $x=x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению

$$f(x_1) \geq f(x),$$

где x — любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению

$$f(x_2) \leq f(x).$$

*) Доказательства этих теорем можно найти в книге Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. 1, Физматгиз, 1960.

Значение функции $f(x_1)$ будем называть *наибольшим значением* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$, значение функции $f(x_2)$ будем называть *наименьшим значением* функции на отрезке $[a, b]$.

Коротко эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке $a \leq x \leq b$ функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m .

Смысл этой теоремы наглядно иллюстрируется на рисунке 51.

Замечание. Утверждение теоремы о существовании наибольшего значения функции может оказаться неверным, если рассматривать значения функции на интервале $a < x < b$. Так, например, если мы будем рассматривать функцию $y=x$ на интервале $0 < x < 1$, то среди ее значений нет наибольшего и нет наименьшего. Действительно, на интервале нет ни наименьшего, ни наибольшего значений x . (Нет крайней левой точки, так как, какую бы мы ни взяли точку x^* , найдется точка левее

взятой, например точка $\frac{x^*}{2}$; также нет крайней правой, а следовательно, нет ни наименьшего, ни наибольшего значений функции $y=x$.)

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней

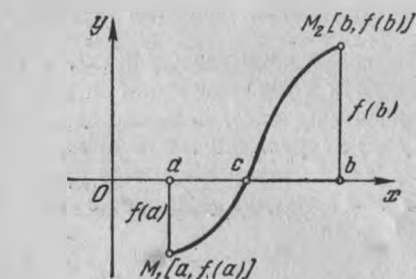


Рис. 52.

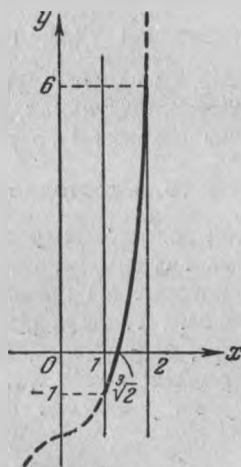


Рис. 53.

мере одна точка $x=c$, в которой функция обращается в нуль:

$$f(c)=0, \quad a < c < b.$$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной

функции $y=f(x)$, соединяющий точки $M_1[a, f(a)]$ и $M_2[b, f(b)]$, где $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (или $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$), пересекает ось Ox по крайней мере в одной точке (рис. 52).

Пример. Дана функция $y=x^3-2$. $y_{x=1}=-1$, $y_{x=2}=6$. На отрезке $[1, 2]$ она непрерывна. Следовательно, на этом отрезке существует точка, где $y=x^3-2$ обращается в нуль. Действительно, $y=0$ при $x=\sqrt[3]{2}$ (рис. 53).

Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то, каково бы ни было число μ , заключенное между числами A и B , найдется такая точка $x=c$, заключенная между a и b , что $f(c)=\mu$.

Смысл данной теоремы отчетливо иллюстрируется на рисунке 54. В данном случае всякая прямая $y=\mu$ пересекает график функции $y=f(x)$.

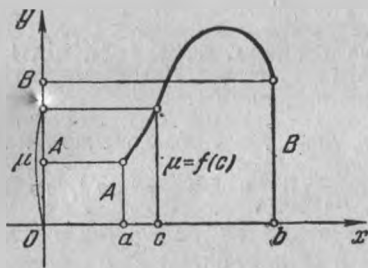


Рис. 54.

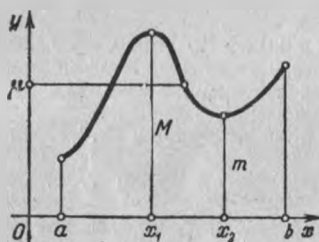


Рис. 55.

Замечание. Отметим, что теорема 2 является частным случаем этой теоремы, так как если A и B имеют разные знаки, то в качестве μ можно взять 0 и тогда $\mu=0$ будет заключено между числами A и B .

Следствие теоремы 3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором интервале и принимает наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наименьшими и наибольшими значениями.

Действительно, пусть $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Тогда по теореме 3 на этом отрезке функция $y=f(x)$ принимает любое значение μ , заключенное между M и m . Но отрезок $[x_1, x_2]$ заключен внутри рассматриваемого интервала, на котором определена функция $f(x)$ (рис. 55).

§ 11. Сравнение бесконечно малых

Пусть одновременно несколько бесконечно малых величин

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

являются функциями одного и того же аргумента x и стремятся к нулю при стремлении x к некоторому пределу a или к бесконечности.

Охарактеризуем стремление этих переменных к нулю, рассматривая их отношения *).

Будем пользоваться в дальнейшем следующими определениями.

Определение 1. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ имеет конечный и отличный от нуля предел, т. е. если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$, а следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, то бесконечно малые β и α называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Пример 1. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$, где $x \rightarrow 0$. Бесконечно малые α и β одного порядка, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Пример 2. При $x \rightarrow 0$ бесконечно малые x , $\sin 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7 \ln(1+x)$ являются бесконечно малыми одного и того же порядка. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в примере 1.

Определение 2. Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к нулю, т. е. если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ (а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), то бесконечно малая β называется *бесконечно малой величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α* , а бесконечно малая α называется *бесконечно малой низшего порядка, чем бесконечно малая β* .

Пример 3. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \rightarrow 0$. Бесконечно малая β есть бесконечно малая высшего порядка, чем бесконечно малая α , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0.$$

При этом бесконечно малая α есть бесконечно малая низшего порядка, чем бесконечно малая β .

Определение 3. Бесконечно малая β называется *бесконечно малой k -го порядка относительно бесконечно малой α* , если β и α^k — бесконечно малые одного порядка, т. е. если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

Пример 4. Если $\alpha = x$, $\beta = x^3$, то при $x \rightarrow 0$ бесконечно малая β есть бесконечно малая третьего порядка относительно бесконечно малой α , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

Определение 4. Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к единице, т. е. если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то бесконечно

*) Будем предполагать, что бесконечно малая, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль в некоторой окрестности точки α .

малые β и α называют *эквивалентными бесконечно малыми* *) и пишут $\alpha \sim \beta$.

Пример 5. Пусть $\alpha = x$ и $\beta = \sin x$, где $x \rightarrow 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 6. Пусть $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, где $x \rightarrow 0$. Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(см. пример 6 § 9).

Теорема 1. Если α и β — эквивалентные бесконечно малые, то их разность $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β .

Доказательство. Действительно,

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Теорема 2. Если разность двух бесконечно малых $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β , то α и β суть эквивалентные бесконечно малые.

Доказательство. Пусть $\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$, тогда $\lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 0$, или $1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, или $1 = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, т. е. $\alpha \approx \beta$. Если $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, то $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0$, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, т. е. $\alpha \approx \beta$.

Пример 7. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x + x^2$, где $x \rightarrow 0$.

Бесконечно малые α и β эквивалентны, так как их разность $\beta - \alpha = x^2$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β . Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

Пример 8. При $x \rightarrow \infty$ бесконечно малые $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ и $\beta = \frac{1}{x}$ — эквивалентные бесконечно малые, так как их разность $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α и чем β . Предел отношения α и β равен 1:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

*) В этом случае α и β иногда называют *равносильными бесконечно малыми*.

Замечание. Если отношение двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$ не имеет предела и не стремится к бесконечности, то β и α не сравнимы между собой в указанном выше смысле.

Пример 9. Пусть $\alpha = x$, $\beta = x \sin \frac{1}{x}$, где $x \rightarrow 0$. Бесконечно малые α и β не сравнимы, так как их отношение $\frac{\beta}{\alpha} = \sin \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности (см. пример 4 § 3).

Упражнения к главе II

Вычислить указанные пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$. *Омс.* 4.
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2 \sin x - \cos x + \operatorname{ctg} x]$. *Омс.* 2.
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Омс.* 0.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$. *Омс.* 2.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$. *Омс.* $\frac{4}{3}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$. *Омс.* 1.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$. *Омс.* $\frac{1}{2}$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$. *Омс.* $\frac{1}{3}$.

Указание. Напишем формулу $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ для $k=0, 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1; \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1; \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1; \\ &\dots \dots \dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части, получим:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n+1),$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

откуда

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5}$. *Омс.* ∞ .
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4}$. *Омс.* 0.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 + 2x}$. *Омс.* $\frac{1}{2}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. *Омс.* 4.
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. *Омс.* 3.
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 12x + 20}$. *Омс.* $\frac{1}{8}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$. *Омс.* 1.
16. $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 + 3y^2 + 2y}{y^2 - y - 6}$. *Омс.* $-\frac{2}{5}$.
17. $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u+2)(u-3)}$. *Омс.* 0.
18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$. *Омс.* $3x^2$.

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$. *Омс.* -1 . 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$. *Омс.* n (n — целое положительное число). 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. *Омс.* $\frac{1}{2}$. 22. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$. *Омс.* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2} - p}{\sqrt{x^2+q^2} - q}$. *Омс.* $\frac{q}{p}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. *Омс.* $\frac{2}{3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$. *Омс.* $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$. *Омс.* $\frac{1}{2}$. 27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Омс.* 1 . 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Омс.* 1 при $x \rightarrow +\infty$, -1 при $x \rightarrow -\infty$. 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. *Омс.* 0 .
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$. *Омс.* $\frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$, $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\lg x}$. *Омс.* 1 . 32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$. *Омс.* 4 . 33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$. *Омс.* $\frac{1}{9}$. 34. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Омс.* $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 35. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$. *Омс.* 1 .
36. $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Омс.* $\sqrt{3}$. 37. $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$. *Омс.* $\frac{2}{\pi}$. 38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$. *Омс.* $\frac{2}{3}$. 39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$. *Омс.* $2 \cos a$. 40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. *Омс.* $\frac{1}{2}$. 41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. *Омс.* e^2 . 42. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$. *Омс.* $\frac{1}{e}$. 43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. *Омс.* $\frac{1}{e}$. 44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$. *Омс.* e . 45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\ln(n+1) - \ln n]\}$. *Омс.* 1 . 46. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$. *Омс.* e^2 . 47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$. *Омс.* a . 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Омс.* e . 49. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. *Омс.* e^3 . 50. $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$. *Омс.* 1 . 51. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$. *Омс.* 1 при $\alpha \rightarrow +\infty$.

0 при $a \rightarrow -\infty$. 52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$. Отв. $\frac{\alpha}{\beta}$. 53. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 1$). Отв. $+\infty$

при $x \rightarrow +\infty$, 0 при $x \rightarrow -\infty$. 54. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$. Отв. $\ln a$.

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{x}$. Отв. $\alpha - \beta$. 56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$. Отв. 1.

Определить точки разрыва функций:

57. $y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Отв. Разрывы при $x = -2$; -1 ; 0 ; 2 .

58. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$. Отв. Разрывы при $x = 0$ и $x = \pm \frac{2}{\pi}$; $\pm \frac{2}{3\pi}$; $\dots$; $\frac{2}{(2n+1)\pi}$; $\dots$

59. Найти точки разрыва функции $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ и построить график этой функции. Отв. Разрыв при $x = 0$ ($y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0+0$, $y \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0-0$).

60. Между следующими бесконечно малыми (при $x \rightarrow 0$) величинами x^2 , $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x \cos x$, $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x} выбрать бесконечно малые одного порядка с бесконечно малой x , а также высшего и низшего порядка, чем x . Отв. Бесконечно малые одного порядка $\sin 3x$ и xe^{2x} ; бесконечно малые высшего порядка x^2 и $2x \cos \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, бесконечно малая низшего порядка $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Среди указанных бесконечно малых (при $x \rightarrow 0$) величин найти бесконечно малые, равносильные бесконечно малой x : $2 \sin x$, $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^2$, $\sqrt{2x^2 + x^3}$, $\ln(1+x)$, $x^2 + 3x^4$. Отв. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. Убедиться в том, что при $x \rightarrow 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1 - \sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентны? Отв. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sqrt[3]{x}} = 3$, следовательно, данные бесконечно малые одного порядка, но не эквивалентны.

ГЛАВА III ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Скорость движения

Будем рассматривать прямолинейное движение некоторого твердого тела, например движение камня, брошенного вертикально вверх, или движение поршня в цилиндре двигателя и т. д. Отвлекаясь от конкретных размеров и формы тела, мы будем в дальнейшем представлять его в виде движущейся точки M . Расстояние s движущейся точки, отсчитываемое от некоторого начального ее положения M_0 , будет зависеть от времени t , т. е. s будет функцией времени t :

$$s = f(t). \quad (1)$$

Пусть в некоторый момент времени *) t движущаяся точка M находилась на расстоянии s от начального положения M_0 , а в некоторый следующий момент $t + \Delta t$ точка оказалась в положении M_1 — на расстоянии $s + \Delta s$ от начального положения (рис. 56). Таким образом, за промежуток времени Δt расстояние s изменилось на величину Δs . В этом случае говорят, что за промежуток времени Δt величина s получила приращение Δs .

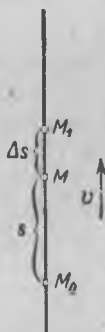


Рис. 56.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; оно дает нам среднюю скорость движения точки за время Δt :

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

Средняя скорость не может во всех случаях точно охарактеризовать быстроту перемещения точки M в момент t . Если, например, тело в начале промежутка Δt перемещалось очень быстро, а в конце очень медленно, то средняя скорость, очевидно, не сможет отразить указанных особенностей движения точки и дать нам правильное

*) Здесь, как и в дальнейшем, конкретное значение переменной мы будем обозначать той же буквой, что и саму переменную.

представление об истинной скорости ее движения в момент t . Для того чтобы точнее выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости, надо взять меньший промежуток времени Δt . Наиболее полно характеризует скорость движения точки в момент t тот предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \rightarrow 0$. Этот предел и называют скоростью движения в данный момент:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3)$$

Таким образом, *скоростью движения в данный момент* называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt , когда приращение времени стремится к нулю.

Напишем равенство (3) в развернутом виде. Так как

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

то

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (3')$$

Это и будет скорость неравномерного движения. Таким образом, мы видим, что понятие скорости неравномерного движения органически связано с понятием предела. Только с помощью понятия предела можно определить скорость неравномерного движения.

Из формулы (3') следует, что v не зависит от приращения времени Δt , а зависит от значения t и характера функции $f(t)$.

Пример. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент t и в момент $t = 2$ сек., если зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Решение. В момент t имеем $s = \frac{1}{2} g t^2$; в момент $t + \Delta t$ получим:

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t \Delta t + \Delta t^2).$$

Найдем Δs :

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t \Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} g t^2 = g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2.$$

Составим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \Delta t,$$

по определению, имеем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t + \frac{1}{2} g \Delta t \right) = g t.$$

Таким образом, скорость в любой момент времени t равна $v = g t$.

При $t = 2$ имеем $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ м/сек.

§ 2. Определение производной

Пусть мы имеем функцию

$$y = f(x), \quad (1)$$

определенную в некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое (положительное или отрицательное — безразлично) приращение Δx . Тогда функция y получит некоторое приращение Δy . Таким образом:

при значении аргумента x будем иметь $y = f(x)$,

при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Найдем приращение функции Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$. Если этот предел существует, то его называют производной данной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Таким образом, по определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Следовательно, *производной* данной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда последнее произвольным образом стремится к нулю.

Заметим, что в общем случае для каждого значения x производная $f'(x)$ имеет определенное значение, т. е. производная является также функцией от x .

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$ или $y'|_{x=a}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Пример 1. Дана функция $y=x^2$; найти ее производную y' :

1) в произвольной точке x ,

2) при $x=3$.

Решение. 1) При значении аргумента, равном x , имеем $y=x^2$. При значении аргумента, равном $x+\Delta x$, имеем $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$.

Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходя к пределу, найдем производную от данной функции:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y=x^2$ в произвольной точке равна

$$y' = 2x.$$

2) При $x=3$ получим:

$$y' \big|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 2. $y = \frac{1}{x}$; найти y' .

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, получаем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}; \\ \Delta y &= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{1}{x(x + \Delta x)}; \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Замечание. В предыдущем параграфе было установлено, что если зависимость расстояния s движущейся точки от времени t выражается формулой

$$s = f(t),$$

то скорость v в момент t выражается формулой

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Следовательно,

$$v = s'_t = f'(t),$$

т. е. скорость равна производной*) от пути по времени t .

*) Когда мы говорим «производная по x » или «производная по времени t » и т. д., то под этим мы подразумеваем, что при вычислении производной мы считаем аргументом переменную x или время t и т. д.

§ 3. Геометрическое значение производной

Мы подошли к понятию производной, рассматривая скорость движущегося тела (точки), т. е. исходя из механических представлений. Теперь мы дадим не менее важное геометрическое истолкование производной. Для этого нам прежде всего потребуется определение касательной к кривой в данной точке.

Пусть имеем кривую и на ней фиксированную точку M_0 . Возьмем на кривой точку M_1 и проведем секущую M_0M_1 (рис. 57). Если точка

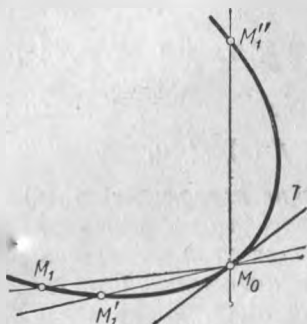


Рис. 57.

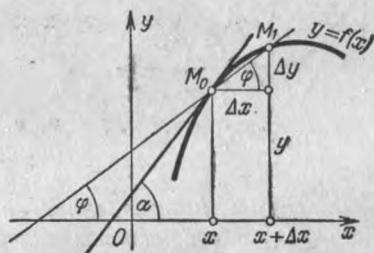


Рис. 58.

M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_0 , то секущая M_0M_1 занимает различные положения M_0M_1' , M_0M_1'' и т. д.

Если при неограниченном приближении точки M_1 по кривой к точке M_0 с любой стороны секущая стремится занять положение определенной прямой M_0T , то эта прямая называется *касательной* к кривой в точке M_0 (понятие «стремится занять» будет уточнено ниже).

Рассмотрим функцию $f(x)$ и соответствующую этой функции кривую

$$y = f(x)$$

в прямоугольной системе координат (рис. 58). При некотором значении x функция имеет значение $y = f(x)$. Этим значениям x и y на кривой соответствует точка $M_0(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx . Новому значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует «наращенное» значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Соответствующей ему точкой кривой будет точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведем секущую M_0M_1 и обозначим через φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox . Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Из рисунка 58 непосредственно усматриваем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Если теперь Δx будет стремиться к нулю, то точка M_1 будет перемещаться вдоль кривой, приближаясь к M_0 . Секущая M_0M_1 будет поворачиваться вокруг точки M_0 и угол φ будет меняться с изменением Δx . Если при $\Delta x \rightarrow 0$ угол φ стремится к некоторому пределу α , то прямая, проходящая через M_0 и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α , будет искомой касательной. Нетрудно найти ее угловой коэффициент:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Следовательно,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

т. е. значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равняется тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке $M_0(x, y)$.

Пример. Найти тангенсы углов наклона касательной к кривой $y = x^2$ в точках $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $M_2(-1, 1)$ (рис. 59).

Решение. На основании примера 1 § 2 имеем $y' = 2x$; следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. Дифференцируемость функций

Определение. Если функция

$$y = f(x) \quad (1)$$

имеет производную в точке $x = x_0$, т. е. если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (2)$$

то мы говорим, что при данном значении $x = x_0$ функция *дифференцируема* или (что равносильно этому) имеет производную.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b) , то говорят, что она *дифференцируема на отрезке $[a, b]$ или, соответственно, в интервале (a, b) .*

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

где γ есть величина, стремящаяся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. Но тогда

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \gamma \Delta x;$$

отсюда следует, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, а это и значит, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (см. § 9 гл. II).

Таким образом, в точках разрыва функция не может иметь производной. Обратное заключение неверно, т. е. из того, что в какой-нибудь точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема: функция $f(x)$ может и не иметь производной в точке x_0 . Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 2]$ следующим образом (см. рис. 60):

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) &= 2x - 1 && \text{при } 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

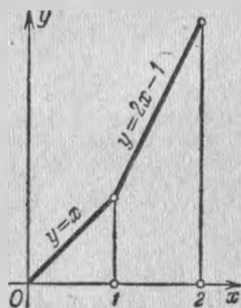


Рис. 60.

Эта функция при $x=1$ не имеет производной, хотя и непрерывна в этой точке.

Действительно, при $\Delta x > 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(1+\Delta x) - 1] - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

при $\Delta x < 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак Δx , а это значит, что в точке $x=1$ функция не имеет производной*). Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке $x=1$ данная «кривая» не имеет определенной касательной.

Непрерывность же функции в точке $x=1$ следует из того, что

$$\Delta y = \Delta x \text{ при } \Delta x < 0,$$

$$\Delta y = 2\Delta x \text{ при } \Delta x > 0,$$

и следовательно, в обоих случаях $\Delta y \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

*) По определению производной требуется, чтобы отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремилось при $\Delta x \rightarrow 0$ к одному и тому же пределу независимо от того, каким образом стремится к нулю Δx .

Пример 2. Функция $y = \sqrt[3]{x}$, график которой изображен на рисунке 61, определена и непрерывна для всех значений независимого переменного.

Выясним, имеет ли эта функция производную при $x=0$; для этого найдем значения функции при $x=0$ и при $x=0+\Delta x$; при $x=0$ имеем $y=0$, при $x=0+\Delta x$ имеем $y+\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$. Следовательно,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

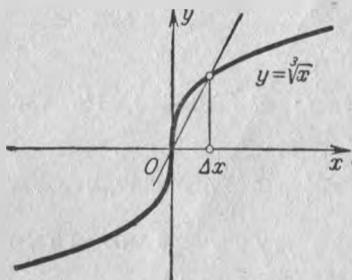


Рис. 61.

Таким образом, отношение приращения функции к приращению аргумента в точке $x=0$ стремится к бесконечности при $\Delta x \rightarrow 0$ (и, значит, предела не имеет). Следовательно, рассматриваемая функция не дифференцируема в точке $x=0$. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. совпадает с осью Oy .

§ 5. Нахождение производных от элементарных функций.

Производная от функции $y = x^n$ при n целом и положительном

Для нахождения производной от данной функции $y = f(x)$, исходя из общего определения производной, необходимо произвести следующие действия:

1) дать аргументу x приращение Δx , вычислить наращенное значение функции:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) найти соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) найти предел данного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Мы применим здесь и в следующих параграфах этот общий способ для вычисления производных от некоторых элементарных функций.

Теорема. Производная функции $y = x^n$, где n — целое положительное число, равна nx^{n-1} , т. е.

$$\text{если } y = x^n, \text{ то } y' = nx^{n-1}. \quad (1)$$

Доказательство. Имеем функцию

$$y = x^n.$$

1) Если x получает приращение Δx , то

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим:

$$\begin{aligned} \Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n &= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n \end{aligned}$$

или

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3) Находим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Найдем предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1},$$

следовательно, $y' = nx^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 2. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Последний результат имеет простое геометрическое толкование: касательная к прямой $y = x$ при любом значении x совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен 1.

Отметим, что формула (1) верна и в случае n дробного и отрицательного. (Это будет доказано в § 12.)

Пример 3. $y = \sqrt{x}$.

Представим данную функцию в виде степени:

$$y = x^{\frac{1}{2}};$$

тогда по формуле (1) (учитывая только что сделанное замечание) получаем:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1}$$

или

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4. $y = \frac{1}{x \sqrt{x}}$.

Представим y в виде степенной функции:

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2 \sqrt{x}}.$$

§ 6. Производные от функций $y = \sin x$; $y = \cos x$

Теорема 1. Производная от $\sin x$ есть $\cos x$, т. е.

$$\text{если } y = \sin x, \text{ то } y' = \cos x. \quad (II)$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx ; тогда

$$1) \ y + \Delta y = \sin(x + \Delta x);$$

$$2) \ \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

$$3) \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

$$4) \ y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

но так как

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Последнее равенство получается на том основании, что $\cos x$ есть непрерывная функция.

Теорема 2. Производная от $\cos x$ есть $-\sin x$, т. е.

$$\text{если } y = \cos x, \text{ то } y' = -\sin x. \quad (III)$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx , тогда

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \cos(x + \Delta x); \\ \Delta y &= \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right); \end{aligned}$$

учитывая, что $\sin x$ есть непрерывная функция, окончательно получим:

$$y' = -\sin x.$$

§ 7. Производные: постоянной, произведения постоянной на функцию, суммы, произведения, частного

Теорема 1. Производная постоянной равна нулю, т. е.

$$\text{если } y = C, \text{ где } C = \text{const, то } y' = 0. \quad (\text{IV})$$

Доказательство. $y = C$ есть такая функция от x , значения которой при всех x равны C .

Следовательно, при любом значении x

$$y = f(x) = C.$$

Дадим аргументу x приращение Δx ($\Delta x \neq 0$). Так как функция y сохраняет значение C при всех значениях аргумента, то

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Значит, приращение функции равно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

и следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

т. е.

$$y' = 0.$$

Последний результат имеет простое геометрическое истолкование. Графиком функции $y = C$ служит прямая, параллельная оси Ox .

Касательная к графику в любой ее точке, очевидно, совпадает с этой прямой и, следовательно, образует с осью Ox угол, тангенс которого y' равен нулю.

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е.*

$$\text{если } y = Cu(x), \text{ где } C = \text{const, то } y' = Cu'(x). \quad (V)$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь:

$$\begin{aligned} y &= Cu(x), \\ y + \Delta y &= Cu(x + \Delta x), \\ \Delta y &= Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)], \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ т. е. } y' = Cu'(x). \end{aligned}$$

Пример 1. $y = 3 \frac{1}{\sqrt{x}}.$

$$y' = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 3 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$y' = -\frac{3}{2x \sqrt{x}}.$$

Теорема 3. *Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций*).*

Для случая, например, трех слагаемых имеем:

$$y = u(x) + v(x) + w(x); \quad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad (VI)$$

Доказательство. Для значений аргумента x

$$y = u + v + w$$

(аргумент x в обозначении функции для краткости письма опускаем).

Для значения аргумента $x + \Delta x$ имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

где Δy , Δu , Δv и Δw — приращения функций y , u , v и w , соответствующие приращению Δx аргумента x . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}, \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \end{aligned}$$

*) Выражение $y = u(x) - v(x)$ равносильно $y = u(x) + (-1)v(x)$ и $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x).$

или

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Пример 2. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

т. е.

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{x}}.$$

Теорема 4. Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т. е.

$$\text{если } y = uv, \text{ то } y' = u'v + uv'. \quad (\text{VII})$$

Доказательство. Рассуждая, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим:

$$\begin{aligned} y &= uv, \\ y + \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v), \\ \Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}, \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) v + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

(так как u и v не зависят от Δx).

Рассмотрим последний член в правой части

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как $u(x)$ — дифференцируемая функция, то она непрерывна. Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Таким образом, рассматриваемый член равен нулю, и мы окончательно получаем:

$$y' = u'v + uv'.$$

На основании доказанной теоремы легко получается правило дифференцирования произведения любого числа функций.

Так, если имеем произведение трех функций

$$y = uvw,$$

то, представляя правую часть как произведение u и (vw) , получим:
 $y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$.
 Таким приемом можем получить аналогичную формулу для производной произведения любого (конечного) числа функций. Именно, если $y = u_1 u_2 \dots u_n$, то

$$y' = u_1' u_2 \dots u_{n-1} u_n + u_1 u_2' \dots u_{n-1} u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n'.$$

Пример 3. Если $y = x^2 \sin x$, то

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Пример 4. Если $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$, то

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x. \end{aligned}$$

Теорема 5. Производная дроби (т. е. частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т. е.

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (\text{VIII})$$

Доказательство. Если Δu , Δu и Δv суть приращения функций u , u и v , соответствующие приращению Δx аргумента x , то

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}, \\ \Delta y &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}, \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}. \end{aligned}$$

Отсюда, заметив, что $\Delta v \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0^*$, получаем:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

* $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$, так как $v(x)$ — дифференцируемая и, следовательно, непрерывная функция.

Пример 5. Если $y = \frac{x^3}{\cos x}$, то

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.$$

Замечание. Если имеем функцию вида

$$y = \frac{u(x)}{C},$$

где знаменатель C есть постоянная, то, дифференцируя эту функцию, нет надобности применять формулу (VIII), а целесообразнее применять формулу (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C} u \right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Конечно, этот результат получается и по формуле (VIII).

Пример 6. Если $y = \frac{\cos x}{7}$, то

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}.$$

§ 8. Производная логарифмической функции

Теорема. Производная от функции $\log_a x$ равна $\frac{1}{x} \log_a e$, т. е.

$$\text{если } y = \log_a x, \text{ то } y' = \frac{1}{x} \log_a e. \quad (\text{IX})$$

Доказательство. Если Δy есть приращение функции $y = \log_a x$, соответствующее приращению Δx аргумента x , то

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Помножим и разделим на x выражение, стоящее в правой части последнего равенства:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Обозначим величину $\frac{\Delta x}{x}$ через α . Очевидно, $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

и данном x . Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но, как известно (см. § 7 гл. II),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Если же выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к числу e , то логарифм этого выражения стремится к $\log_a e$ (в силу непрерывности логарифмической функции). Поэтому окончательно получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Заметив, что $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, полученную формулу можно переписать так:

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}.$$

Отметим важный частный случай этой формулы: если $a = e$, то $\ln a = \ln e = 1$, т. е.

$$\text{если } y = \ln x, \text{ то } y' = \frac{1}{x}. \quad (X)$$

§ 9. Производная от сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$, т. е. такая, что ее можно представить в следующем виде:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

или $y = F[\varphi(x)]$ (см. гл. I, § 8). В выражении $y = F(u)$ переменное u называют *промежуточным аргументом*.

Установим правило дифференцирования сложной функции.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u = F'(u)$, тогда сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в указанной точке x также имеет производную, которая равна

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'(x),$$

где вместо u должно быть подставлено выражение $u = \varphi(x)$. Коротко,

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

т. е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x .

Доказательство. При определенном значении x будем иметь:

$$u = \varphi(x), \quad y = F(u).$$

При нарастании значения аргумента $x + \Delta x$

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Таким образом, приращению Δx соответствует приращение Δu , которому соответствует приращение Δy , причем при $\Delta x \rightarrow 0$ будет $\Delta u \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

По условию

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Из этого соотношения, пользуясь определением предела, получаем (при $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \quad (1)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$. Перепишем равенство (1)

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \quad (2)$$

Равенство (2) справедливо и при $\Delta u = 0$ при произвольном α , так как оно превращается в тождество $0 = 0$. При $\Delta u = 0$ будем полагать $\alpha = 0$. Разделим все члены равенства (2) на Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

По условию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в равенстве (3), получим:

$$y'_x = y'_u u'_x. \quad (4)$$

Пример 1. Пусть дана функция $y = \sin(x^2)$. Найдем y'_x . Данную функцию представим как функцию от функции следующим образом:

$$y = \sin u, \quad u = x^2.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \quad u'_x = 2x.$$

Следовательно, по формуле (4)

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Подставляя вместо u его выражение, окончательно получаем:

$$y'_x = 2x \cos(x^2).$$

Пример 2. Дана функция $y = (\ln x)^3$. Найдем y'_x .
Данную функцию представим следующим образом:

$$y = u^3, \quad u = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$y'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{x} = 3 (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Если функция $y = f(x)$ такова, что ее можно представить в виде

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

нахождение производной y'_x производится путем последовательного применения предыдущей теоремы.

По доказанному правилу имеем:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Применяя эту же теорему для нахождения u'_x , будем иметь:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

Подставляя выражение u'_x в предыдущее равенство, получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \quad (5)$$

или

$$y'_x = F'_u(u) \Phi'_v(v) \Psi'_x(x).$$

Пример 3. Дана функция $y = \sin [(\ln x)^3]$. Найдем y'_x . Представим данную функцию следующим образом:

$$y = \sin u, \quad u = v^3, \quad v = \ln x.$$

Находим:

$$y'_u = \cos u, \quad u'_v = 3v^2, \quad v'_x = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, по формуле (5) получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3 (\cos u) v^2 \cdot \frac{1}{x},$$

или окончательно

$$y'_x = \cos [(\ln x)^3] \cdot 3 (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Заметим, что рассмотренная функция определена только при $x > 0$.

§ 10. Производные функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \ln |x|$

Теорема 1. Производная от функции $\operatorname{tg} x$ равна $\frac{1}{\cos^2 x}$, т. е.

$$\text{если } y = \operatorname{tg} x, \quad \text{то } y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (XI)$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

то по правилу дифференцирования дроби [см. формулу (VIII) § 7 гл. III] получаем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Производная от функции $\operatorname{ctg} x$ равна $-\frac{1}{\sin^2 x}$, т. е.

$$\text{если } y = \operatorname{ctg} x, \text{ то } y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (\text{XII})$$

Доказательство. Так как

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

то

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Пример 1. Если $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$, то

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Пример 2. Если $y = \ln \operatorname{ctg} x$, то

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

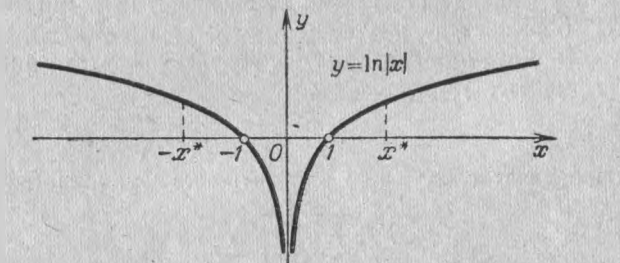


Рис. 62.

Теорема 3. Производная от функции $\ln |x|$ (рис. 62) равна $\frac{1}{x}$, т. е.

$$\text{если } y = \ln |x|, \text{ то } y' = \frac{1}{x}. \quad (\text{XIII})$$

Доказательство. а) Если $x > 0$, то $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$ и поэтому

$$y' = \frac{1}{x}.$$

б) Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$. Но

$$\ln|x| = \ln(-x).$$

(Заметим, что если $x < 0$, то $-x > 0$.) Представим функцию $y = \ln(-x)$ как сложную функцию, положив

$$y = \ln u; \quad u = -x.$$

Тогда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u} (-1) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

Итак, для отрицательных значений x также имеет место равенство

$$y'_x = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, формула (XIII) доказана для любого значения $x \neq 0$. (При $x = 0$ функция $\ln|x|$ не определена.)

§ 11. Неявная функция и ее дифференцирование

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое мы символически обозначим так:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) , такова, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x , то функция $y = f(x)$ есть *неявная функция*, определенная уравнением (1).

Так, например, уравнение

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

неявно определяет следующие элементарные функции (рис. 63 и 64):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4)$$

Действительно, после подстановки в уравнение (2) получаем тождество

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Выражения (3) и (4) получились путем решения уравнения (2) относительно y . Но не всякую неявно заданную функцию можно предста-

вить явно, т. е. можно представить в виде $y = f(x)$ *), где $f(x)$ есть элементарная функция.

Так, например, функции, заданные уравнениями

$$y^2 - y - x^2 = 0$$

или

$$y - x - \frac{1}{4} \sin y = 0,$$

не выражаются через элементарные функции, т. е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y .

Замечание 1. Отметим, что термины «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ задания.

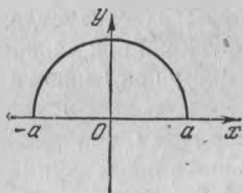


Рис. 63.

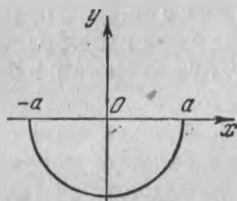


Рис. 64.

Каждая явная функция $y = f(x)$ может быть представлена и как неявная $y - f(x) = 0$.

Укажем, далее, правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, т. е. не представляя в виде $y = f(x)$.

Допустим, что функция задана уравнением

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Если здесь y есть функция от x , определяемая этим равенством, то это равенство есть тождество.

Дифференцируя обе части этого тождества по x , считая, что y есть функция от x , получим (пользуясь правилом дифференцирования сложной функции):

$$2x + 2yy' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Заметим, что если бы мы стали дифференцировать соответствующую явную функцию

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

*) Если функция задана уравнением вида $y = f(x)$, то говорят, что функция задана в *явном виде* или является *явной*.

то получили бы:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

т. е. тот же результат.

Рассмотрим еще один пример неявной функции y от x :

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Дифференцируем по x :

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Замечание 2. Из приведенных примеров следует, что для нахождения значения производной неявной функции при данном значении аргумента x нужно знать и значение функции y при данном значении x .

§ 12. Производные степенной функции при любом действительном показателе, показательной функции, сложной показательной функции

Теорема 1. Производная от функции x^n , где n — любое действительное число, равна nx^{n-1} , т. е.

$$\text{если } y = x^n, \text{ то } y' = nx^{n-1}. \quad (I')$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Логарифмируя данную функцию, будем иметь:

$$\ln y = n \ln x.$$

Дифференцируем обе части полученного равенства по x , считая y функцией от x :

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x}; \quad y' = yn \frac{1}{x}.$$

Подставляя сюда значение $y = x^n$, окончательно получаем:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Легко показать, что эта формула верна и для $x < 0$, если только x^n имеет смысл *).

Теорема 2. Производная от функции a^x , где $a > 0$, равна $a^x \ln a$, т. е.

$$\text{если } y = a^x, \text{ то } y' = a^x \ln a. \quad (XIV)$$

Доказательство. Логарифмируя равенство $y = a^x$, получим:

$$\ln y = x \ln a.$$

*) Эта формула была ранее доказана (§ 5 гл. III) для случая, когда n является целым положительным числом. Теперь формула (I) доказана в общем случае (для любого постоянного числа n).

Дифференцируем полученное равенство, считая y функцией от x :

$$\frac{1}{y} y' = \ln a; \quad y' = y \ln a$$

или

$$y' = a^x \ln a.$$

Если основание $a = e$, то $\ln e = 1$ и мы получим формулу

$$y = e^x, \quad y' = e^x. \quad (\text{XIV}')$$

Пример 1. Дана функция

$$y = e^{x^2}.$$

Представим ее как сложную функцию, введя промежуточный аргумент u :

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

тогда

$$y_u = e^u, \quad u'_x = 2x$$

и, следовательно,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

Сложной показательной функцией называется функция, у которой и основание и показатель степени являются функциями от x , например $(\sin x)^{x^2}$, $x^{1/x}$, x^x , $(\ln x)^x$, вообще, всякая функция вида

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

есть сложная показательная функция *).

Теорема 3.

$$\text{Если } y = u^v, \text{ то } y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \quad (\text{XV})$$

Доказательство. Логарифмируем функцию y :

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируя полученное равенство по x , будем иметь:

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \ln u,$$

откуда

$$y' = y \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

Подставляя сюда выражение $y = u^v$, получаем:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Таким образом, производная сложной показательной функции состоит из двух слагаемых: первое слагаемое получается, если при дифференцировании предположить, что u есть функция от x , а v есть постоянная (т. е. если рассматривать u^v как степенную функцию); второе слагаемое получается, если предположить, что v есть

*) Часто такую функцию называют показательной-степенной или степенно-показательной.

функция от x , а $u = \text{const}$ (т. е. если рассматривать u^v как показательную функцию).

Пример 2. Если $y = x^x$, то $y' = xx^{x-1}(x') + x^x(x') \ln x$ или
 $y' = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x)$.

Пример 3. Если $y = (\sin x)^{x^2}$, то
 $y' = x^2(\sin x)^{x^2-1}(\sin x)' + (\sin x)^{x^2}(x^2)' \ln \sin x =$
 $= x^2(\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x$.

Прием, примененный в этом параграфе для нахождения производных и состоящий в том, что сначала находят производную логарифма данной функции, широко применяется при дифференцировании функций. Применение этого приема нередко значительно упрощает вычисления.

Пример 4. Требуется найти производную от функции

$$y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

Решение. Логарифмируя, находим:

$$\ln y = 2 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - 3 \ln(x+4) - x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Умножая на y и подставляя $\frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ вместо y , получаем:

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right].$$

Замечание. Выражение $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, являющееся производной по x от натурального логарифма данной функции $y = y(x)$, называется *логарифмической производной*.

§ 13. Обратная функция и ее дифференцирование

Пусть дана возрастающая (рис. 65) или убывающая функция

$$y = f(x), \quad (1)$$

определенная на некотором интервале (a, b) ($a < b$) (см. § 6 гл. I). Пусть $f(a) = c$, $f(b) = d$. Для определенности будем в дальнейшем рассматривать возрастающую функцию.

Рассмотрим два различных значения x_1 и x_2 , принадлежащих интервалу (a, b) . Из определения возрастающей функции следует, что если $x_1 < x_2$ и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то $y_1 < y_2$. Следовательно, двум различным значениям x_1 и x_2 соответствуют два различных значения функции y_1 и y_2 . Справедливо и обратное, т. е. если $y_1 < y_2$,

$y_1 = f(x_1)$, а $y_2 = f(x_2)$, то из определения возрастающей функции следует, что $x_1 < x_2$. Таким образом, между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Рассматривая эти значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции, получаем x как функцию y :

$$x = \varphi(y). \quad (2)$$

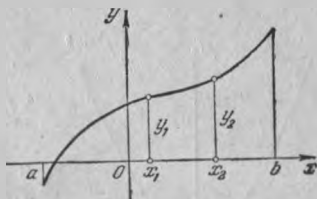


Рис. 65.

Эта функция называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Очевидно, что и функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что и убывающая функция имеет обратную.

Замечание 1. Укажем без доказательства, что если *возрастающая* (или *убывающая*) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = c$, $f(b) = d$, то обратная функция определена и непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Пример 1. Пусть дана функция $y = x^3$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, она имеет обратную $x = \sqrt[3]{y}$ (рис. 66).

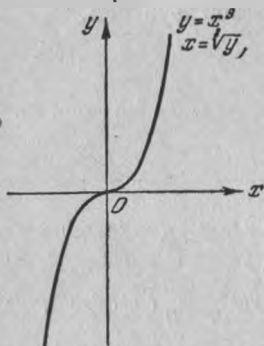


Рис. 66.

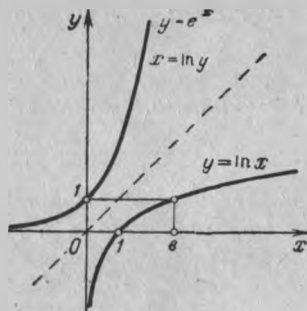


Рис. 67.

Заметим, что обратная функция $x = \varphi(y)$ находится путем решения уравнения $y = f(x)$ относительно x .

Пример 2. Пусть дана функция $y = e^x$. Эта функция — возрастающая на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она имеет обратную $x = \ln y$. Область определения обратной функции $0 < y < +\infty$ (рис. 67).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей на некотором интервале, то она может иметь несколько обратных функций *).

*) Подчеркнем еще раз, что, говоря о том, что y есть функция от x , мы понимаем однозначную зависимость y от x .

Пример 3. Функция $y = x^2$ определена на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$. Она не является ни возрастающей, ни убывающей и не имеет обратной. Если мы рассмотрим интервал $0 \leq x < +\infty$, то здесь функция является возрастающей и обратной для нее будет $x = \sqrt{y}$. На интервале же $-\infty < x < 0$ функция — убывающая, и обратной для нее будет функция $x = -\sqrt{y}$ (рис. 68).

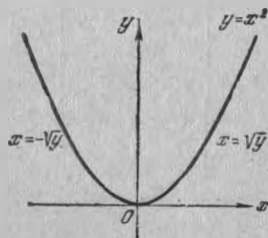


Рис. 68.

Замечание 3. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными, то графиками их является одна и та же кривая. Но если аргумент обратной функции мы обозначим снова через x , а функцию через y и построим их в одной координатной системе, то получим уже два различных графика.

Легко видеть, что графики будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Пример 4. На рисунке 67 построены графики функции $y = e^x$ (или $x = \ln y$) и обратной для нее функции $y = \ln x$, рассмотренных в примере 2.

Докажем, далее, теорему, позволяющую находить производную функции $y = f(x)$, зная производную обратной функции.

Теорема. Если для функции

$$y = f(x) \quad (1)$$

существует обратная функция

$$x = \varphi(y), \quad (2)$$

которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\frac{1}{\varphi'(y)}$, т. е. справедлива формула

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad (\text{XVI})$$

Таким образом, производная одной из двух взаимно обратных функций равна единице, деленной на производную второй из этих функций при соответствующих значениях x и y^*).

*) Когда мы пишем $f'(x)$ или y'_x , то мы считаем, что при вычислении производной в качестве независимого переменного берется x ; когда же мы пишем $\varphi'(y)$ или x'_y , то мы считаем, что при вычислении производной роль независимого переменного играет y . Заметим, что после дифференцирования по y , указанного в правой части формулы (XVI), надо вместо y подставить $f(x)$.

Доказательство. Дифференцируем обе части равенства (2) по x , считая y функцией от x^*):

$$1 = \varphi'(y) y'_x,$$

откуда

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Заметив, что $y'_x = f'(x)$, получаем формулу (XVI), которую можно записать и в таком виде:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Полученный результат наглядно иллюстрируется геометрически. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 69). Эта же кривая будет графиком функции $x = \varphi(y)$, где x рассматривается уже как функция, а y — как независимая переменная. Рассмотрим некоторую точку $M(x, y)$ этой кривой. Проведем касательную к кривой в этой точке. Обозначим углы, образованные данной касательной с положительными направлениями осей Ox и Oy , соответственно, через α и β . На основании результатов § 3 о геометрическом значении производной имеем:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{tg} \alpha, \\ \varphi'(y) &= \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из рисунка 69 непосредственно следует, что если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то, как легко видеть, $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Следовательно, в любом случае

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Подставляя выражения для $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ из формулы (3), получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

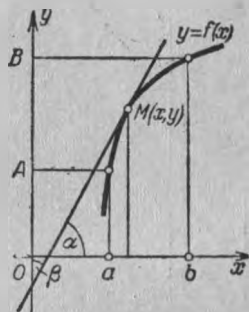


Рис. 69.

*) Здесь мы, по сути дела, находим производную функции от x , заданной неявно уравнением

$$x - \varphi(y) = 0.$$

§ 14. Обратные тригонометрические функции и их дифференцирование

1) Функция $y = \arcsin x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \sin y \quad (1)$$

и построим ее график, направив ось Oy вертикально вверх (рис. 70).

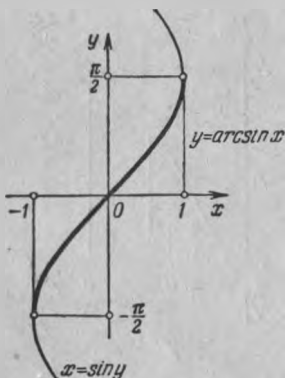


Рис 70.

Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ функция $x = \sin y$ — возрастающая, ее значения заполняют отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Поэтому функция $x = \sin y$ имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \arcsin x^*).$$

Эта функция определена на отрезке $-1 \leq x \leq 1$, ее значения заполняют отрезок $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. На рисунке 70 график функции $y = \arcsin x$ изображен жирной линией.

Теорема 1. Производная от функции $\arcsin x$ равна $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$\text{если } y = \arcsin x, \text{ то } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{XVII})$$

Доказательство. На основании равенства (1) находим:

$$x'_y = \cos y.$$

По правилу дифференцирования обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

но

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

поэтому

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

*) Отметим, что известное из тригонометрии равенство $y = \text{Arcsin } x$, есть другая запись равенства (1). Здесь (при данном x) y обозначает совокупность значений углов, синус которых равен x .

перед корнем берется знак плюс, так как функция $y = \arcsin x$ принимает значения на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos y \geq 0$.

Пример 1. $y = \arcsin e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Пример 2.

$$y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^2,$$

$$y' = 2 \arcsin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -2 \arcsin \frac{1}{x} \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

2) Функция $y = \arccos x$.

Как и выше, рассмотрим функцию

$$x = \cos y \quad (2)$$

и построим ее график, направив ось Oy вверх (рис. 71). Эта функция определена в бесконечном интервале $-\infty < y < +\infty$. На отрезке $0 \leq y \leq \pi$ функция $x = \cos y$ — убывающая и имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \arccos x.$$

Эта функция определена на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Значения функции заполняют отрезок $\pi \geq y \geq 0$. На рисунке 71 график функции $y = \arccos x$ изображен жирной линией.

Теорема 2. Производная от функции $\arccos x$ равна $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$\text{если } y = \arccos x, \text{ то } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{XVIII})$$

Доказательство. На основании равенства (2) находим:

$$x_y' = -\sin y.$$

Следовательно,

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Но $\cos y = x$, поэтому

$$y_x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В равенстве $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ перед корнем берется знак плюс, так как значения функции $y = \arccos x$ заполняют отрезок $0 \leq y \leq \pi$ и, следовательно, $\sin y \geq 0$.

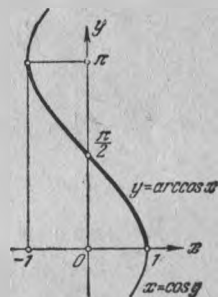


Рис. 71.

Пример 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{tg} y \quad (3)$$

и построим ее график (рис. 72). Эта функция определена при всех значениях y , кроме значений $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

На интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функция $x = \operatorname{tg} y$ — возрастающая и имеет обратную, которую обозначают так:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

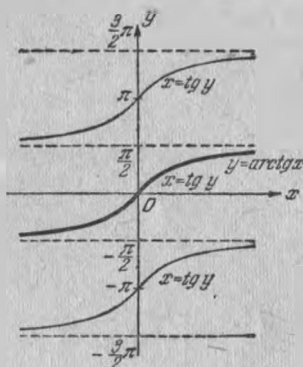


Рис. 72.

Эта функция определена на интервале $-\infty < x < +\infty$. Значения функции заполняют интервал $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. На рисунке 72 график функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен жирной линией.

Теорема 3. Производная от функции $\operatorname{arctg} x$ равна $\frac{1}{1+x^2}$, т. е.

$$\text{если } y = \operatorname{arctg} x, \text{ то } y' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (\text{XIX})$$

Доказательство. На основании равенства (3) находим:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

но

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

так как $\operatorname{tg} y = x$, то окончательно получаем:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 4. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4 (\operatorname{arctg} x)^3 (\operatorname{arctg} x)' = 4 (\operatorname{arctg} x)^3 \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рассмотрим функцию

$$x = \operatorname{ctg} y. \quad (4)$$

предполагаем однозначными). Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости Oxy , то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Когда t изменяется от T_1 до T_2 , эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями* этой кривой, t называется *параметром*, а способ задания кривой уравнениями (1) называется *параметрическим*.

Предположим, далее, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x ;

$$y = \psi[\Phi(x)]. \quad (2)$$

Таким образом, уравнения (1) определяют y как функцию от x , и говорят, что функция y от x задается параметрически.

Выражение $y = f(x)$ непосредственной зависимости y от x может получиться путем исключения параметра t из уравнений (1).

Параметрическое задание кривых широко применяется в механике. Если в плоскости Oxy движется некоторая материальная точка и нам известны законы движения проекций этой точки на оси координат,

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

где параметр t есть время, то уравнения (1') являются параметрическими уравнениями траектории движущейся точки. Исключая из этих уравнений параметр t , получим уравнение траектории в форме $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача. Определить траекторию и место падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скоростью v_0 на высоте y_0 (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

Решение. Возьмем систему координат так, как показано на рисунке 74, предполагая, что самолет сбрасывает груз в тот момент, когда он пересекает ось Oy . Очевидно, что горизонтальное перемещение груза будет равномерным, с постоянной скоростью v_0 :

$$x = v_0 t.$$

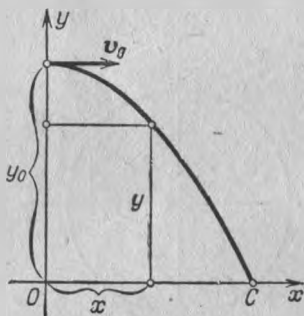


Рис. 74.

Вертикальное перемещение падающего груза под влиянием силы тяжести будет выражаться формулой

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние груза от земли в любой момент времени будет выражаться формулой

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Два уравнения:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t, \\ y &= y_0 - \frac{g}{2} t^2.\end{aligned}$$

будут параметрическими уравнениями траектории. Чтобы исключить параметр t , из первого уравнения находим значение $t = \frac{x}{v_0}$ и подставляем это значение во второе уравнение. Тогда получим уравнение траектории в форме

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $M(0, y_0)$, причем ось Oy служит осью симметрии параболы.

Определим величину отрезка OC . Обозначим абсциссу точки C через X , заметим, что ордината этой точки $y = 0$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, будем иметь:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

откуда

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Уравнения некоторых кривых в параметрической форме

Окружность. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом r (рис. 75).

Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведенным в некоторую точку $M(x, y)$ окружности, и осью Ox . Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

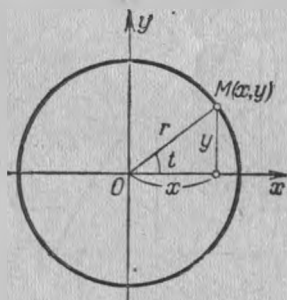


Рис. 75.

Это и есть параметрические уравнения окружности. Если мы исключим из этих уравнений параметр t , то получим уравнение окружности, содержащее только x и y . Возводя в квадрат параметрические уравнения и складывая, находим:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

или

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Эллипс. Дано уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Положим

$$x = a \cos t. \quad (2')$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим:

$$y = b \sin t. \quad (2'')$$

Уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2)$$

являются параметрическими уравнениями эллипса.

Выясним геометрический смысл параметра t . Проведем две окружности с центрами в начале координат и радиусами a и b (рис. 76). Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, а B — точка большой окружности, имеющая ту же абсциссу, что и точка M . Обозначим через t угол, образованный радиусом OB с осью Ox . Непосредственно из рисунка следует:

$$\begin{aligned} x &= OP = a \cos t \quad [\text{это — уравнение (2')}], \\ CQ &= b \sin t. \end{aligned}$$

На основании равенства (2') заключаем, что $CQ = y$, т. е. прямая CM параллельна оси Ox .

Следовательно, в уравнениях (2) t есть угол, образованный радиусом OB и осью абсцисс. Угол t иногда называют эксцентрическим углом.

Ц и к л о и д а. Циклоидой называется кривая, описанная точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится без скольжения по прямой (рис. 77). Предположим, что точка M катящейся окружности в начале движения совпала с началом координат. Определим координаты точки M после того, как окружность

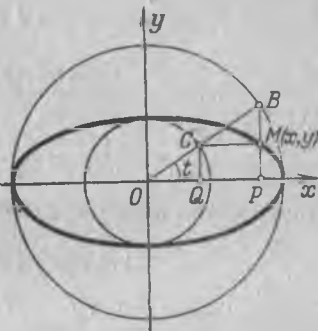


Рис. 76.

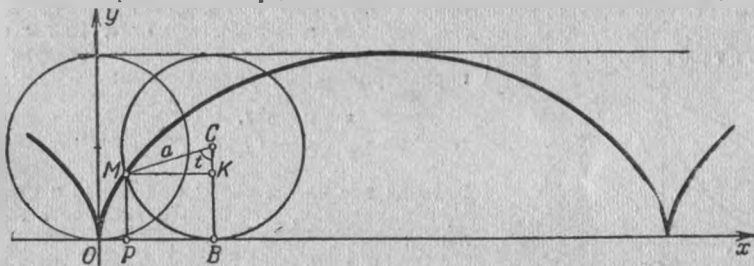


Рис. 77.

повернулась на угол t . Обозначим через a радиус катящейся окружности. Как видно из рисунка 77,

$$x = OP = OB - PB,$$

но так как окружность катится без скольжения, то

$$OB = \widehat{MB} = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

Следовательно, $x = at - a \sin t = a(t - \sin t)$.

Далее,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3)$$

являются параметрическими уравнениями циклоиды. При изменении t от 0 до 2π точка M опишет одну арку циклоиды.

Исключим параметр t из последних уравнений и получим непосредственную зависимость x от y . На отрезке $0 \leq t \leq \pi$ функция $y = a(1 - \cos t)$ имеет обратную:

$$t = \arccos \frac{a-y}{a}.$$

Подставляя выражение для t в первое из уравнений (3), получим:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \sin \left(\arccos \frac{a-y}{a} \right)$$

или

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \text{ при } 0 \leq x \leq \pi a.$$

Непосредственно из рисунка замечаем, что при $\pi a \leq x \leq 2\pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right).$$

Заметим, что функция

$$x = a(t - \sin t)$$

имеет обратную, но она не выражается через элементарные функции. Поэтому и функция $y = f(x)$ не выражается через элементарные функции.

Замечание 1. На примере циклоиды легко убедиться, что в некоторых случаях для исследования функций и кривых параметрические уравнения удобнее, чем непосредственная зависимость y от x или x от y .

Астроида. Астроидой называется кривая, заданная следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4)$$

Возводя все члены обоих уравнений в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим зависимость между x и y :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (\cos^2 t + \sin^2 t),$$

или

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad (5)$$

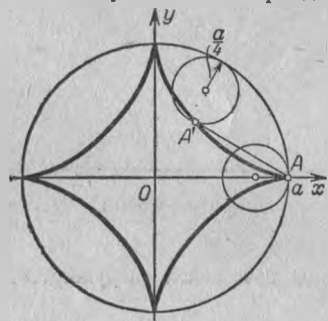


Рис. 78.

Ниже (см. § 12 гл. V) будет показано, что эта кривая имеет форму, изображенную на рисунке 78. Эта кривая может быть получена как траектория некоторой точки окружности радиуса $\frac{a}{4}$, катящейся без скольжения по другой окружности радиуса a (причем меньшая окружность все время остается внутри большей; см. рис. 78).

Замечание 2. Отметим, что уравнения (4) и уравнение (5) определяют не одну функцию $y = f(x)$. Они определяют две непрерывные функции на отрезке $-a \leq x \leq a$. Одна из них принимает неотрицательные значения, другая — неположительные.

§ 18. Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x),$$

t — промежуточный аргумент.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t) \Phi'_x(x). \quad (2)$$

На основании теоремы о дифференцировании обратной функции следует:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (2), получаем:

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (XXI)$$

Выведенная формула дает возможность находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя выражения непосредственной зависимости y от x .

Пример 1. Функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq \pi).$$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$: 1) при любом значении t ; 2) при $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$1) \ y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t;$$

$$2) \ (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной к циклоиде

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

в произвольной точке ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Решение. Угловой коэффициент касательной в каждой точке равен значению производной y'_x в этой точке, т. е. равен

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Но

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t.$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной к циклоиде в каждой ее точке равен $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$, где t — значение параметра, соответствующее этой точке. Но это значит, что угол α наклона касательной к оси x равен $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (для значений t между $-\pi$ и π *).

§ 19. Гиперболические функции

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций вида $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Эти комбинации рассматривают как новые функции и обозначают так:

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первую из функций (1) называют *гиперболическим синусом*, вторую — *гиперболическим косинусом*. С помощью этих функций можно определить еще две функции $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$:

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \text{гиперболический} \\ &\quad \text{тангенс,} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \text{гиперболический} \\ &\quad \text{котангенс.}\end{aligned} \right\} \quad (1')$$

*) Действительно, угловой коэффициент равен тангенсу угла α наклона касательной к оси Ox . Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

и $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ для тех значений t , для которых $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ лежит между 0 и π .

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены, очевидно, для всех значений x . Функция же $\operatorname{cth} x$ определена всюду, за исключением точки $x=0$.

Графики гиперболических функций представлены на рисунках 79, 80, 81.

Из определения функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ [формулы (1)] следуют соотношения, аналогичные соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (2)$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad (3)$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b. \quad (3')$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Далее, заметив, что

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и справедливость соотношения (3').

Название «гиперболические функции» объясняется тем, что функции $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ играют ту же роль для параметрического представления гиперболы

$$x^2 - y^2 = 1,$$

какую тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ — для параметрического представления окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Действительно, исключая параметр t из уравнений

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

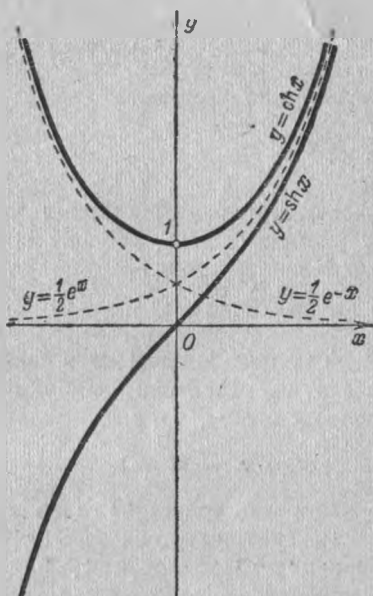


Рис. 79.

получим:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

или

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (уравнение окружности).}$$

Аналогично уравнения

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} t, \\ y &= \operatorname{sh} t \end{aligned}$$

являются параметрическими уравнениями гиперболы.

Действительно, возводя почленно в квадрат эти уравнения и вычитая из первого второе, получим:

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t.$$

Так как выражение в правой части на основании формулы (2) равно единице, то, следовательно,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

а это и есть уравнение гиперболы.

Рассмотрим окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 82). В уравнениях $x = \cos t$, $y = \sin t$

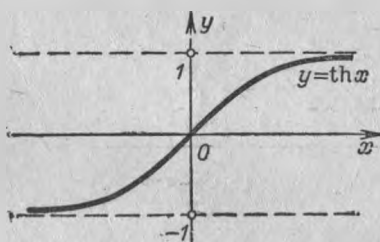


Рис. 80.

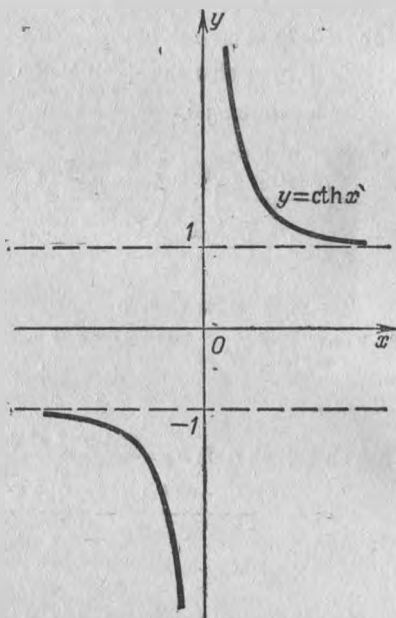


Рис. 81.

параметр t численно равен центральному углу AOM или удвоенной площади S сектора AOM , так как $t = 2S$.

Отметим без доказательства, что в параметрических уравнениях гиперболы

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} t, \\ y &= \operatorname{sh} t \end{aligned}$$

параметр t также численно равен удвоенной площади «гиперболического сектора» AOM (рис. 83).

Производные гиперболических функций определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, & (\operatorname{cth} x)' &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXII})$$

которые вытекают из самого определения гиперболических функций;

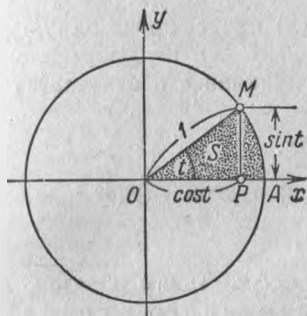


Рис. 82.

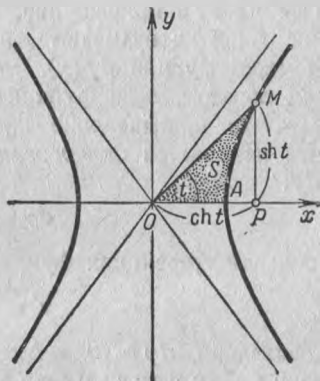


Рис. 83.

например, для функции $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ имеем:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

§ 20. Дифференциал

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a, b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Умножая все члены последнего равенства на Δx , получим:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$, то при постоянном x и переменном $\Delta x \rightarrow 0$ произведение $f'(x) \Delta x$ есть бесконечно малая величина

первого порядка относительно Δx . Произведение же $\alpha \Delta x$ есть всегда величина бесконечно малая высшего порядка относительно Δx , так как

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, приращение Δy функции состоит из двух слагаемых, из которых первое слагаемое есть [при $f'(x) \neq 0$] так называемая главная часть приращения, линейная относительно Δx . Произведение $f'(x) \Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают через dy или $df(x)$.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x , то произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx аргумента называется *дифференциалом* функции и обозначается символом dy :

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (2)$$

Найдем дифференциал функции $y = x$; в этом случае

$$y' = (x)' = 1,$$

и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал dx независимого переменного x совпадает с его приращением Δx . Равенство $dx = \Delta x$ можно было бы рассматривать также как определение дифференциала независимого переменного, и тогда рассмотренный пример показывал бы, что это не противоречит определению дифференциала функции. В любом случае формулу (2) мы можем записать так:

$$dy = f'(x) dx.$$

Но из этого соотношения следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, производную $f'(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Вернемся к выражению (1), которое с учетом (2) перепишем так:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \quad (3)$$

Таким образом, приращение функции отличается от дифференциала функции на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δx . Если $f'(x) \neq 0$, то $\alpha \Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка и относительно dy и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(y) \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Поэтому в приближенных вычислениях иногда пользуются приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy, \quad (4)$$

или в развернутом виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x, \quad (5)$$

что сокращает вычисления.

Пример 1. Найти дифференциал dy и приращение Δy функции $y = x^2$:

1) при произвольных значениях x и Δx ;

2) при $x = 20$, $\Delta x = 0,1$.

Решение. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$,

$$dy = (x^2)' \Delta x = 2x \Delta x.$$

2) Если $x = 20$, $\Delta x = 0,1$, то $\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01$,

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00.$$

Погрешность при замене Δy на dy равна 0,01. Во многих случаях ее можно считать малой по сравнению с $\Delta y = 4,01$ и ею пренебречь.

Рассмотренная задача наглядно иллюстрируется рисунком 84.

В приближенных вычислениях пользуются также приближенным равенством, которое получается из (5),

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (6)$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$.

В этом случае приближенное равенство (6) примет вид

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x. \quad (7)$$

Вычислим приближенное значение $\sin 46^\circ$. Положим $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$,

$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $46^\circ = 45^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$. Подставляя в (7), будем иметь:

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{180}$$

или

$$\sin 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,017 = 0,7194.$$

Пример 3. Если в формуле (7) положим $x = 0$, $\Delta x = \alpha$, то получим следующее приближенное равенство:

$$\sin \alpha \approx \alpha.$$

Пример 4. Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то по формуле (6) получаем следующее приближенное равенство:

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x,$$

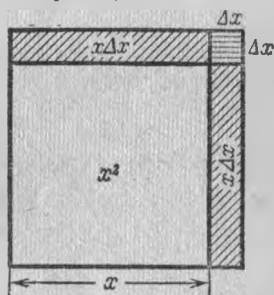


Рис. 84.

при $x=0$, $\Delta x=\alpha$ получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha.$$

Пример 5. Если $f(x) = \sqrt{x}$, то формула (6) дает:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x.$$

Полагая $x=1$, $\Delta x=\alpha$, получаем приближенное равенство:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha.$$

Задача нахождения дифференциала функции равносильна нахождению производной, так как, умножив последнюю на дифференциал аргумента, получим дифференциал функции. Следовательно, большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциалов. Так, например:

Дифференциал суммы двух дифференцируемых функций u и v равен сумме дифференциалов этих функций:

$$d(u+v) = du + dv.$$

Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций u и v определяется формулой

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Докажем, например, последнюю формулу. Если $y=uv$, то

$$dy = y' dx = (uv' + vu') dx = uv' dx + vu' dx,$$

но

$$v' dx = dv, \quad u' dx = du,$$

поэтому

$$dy = u dv + v du.$$

Аналогично доказываются и другие формулы, например формула, определяющая дифференциал частного:

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Решим несколько примеров на вычисление дифференциала функции.

Пример 6. $y = \operatorname{tg}^2 x$, $dy = 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Пример 7. $y = \sqrt{1 + \ln x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \frac{1}{x} dx$.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x), \text{ или } y = f[\varphi(x)].$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \varphi'(x),$$

следовательно,

$$dy = f'_u(u) \varphi'(x) dx,$$

но $\varphi'(x) dx = du$, поэтому

$$dy = f'(u) du.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной. Иначе говоря, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это важное свойство дифференциала, называемое инвариантностью формы дифференциала, будет широко использовано в дальнейшем.

Пример 8. Дана функция $y = \sin \sqrt{x}$. Найти dy .

Решение. Представив данную функцию как сложную:

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{x},$$

находим:

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

но $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, поэтому можно написать:

$$dy = \cos u du \quad \text{или} \quad dy = \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

§ 21. Геометрическое значение дифференциала

Рассмотрим функцию

$$y = f(x)$$

и соответствующую ей кривую (рис. 85).

Возьмем на кривой $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$, проведем касательную к кривой в этой точке и обозначим через α угол *, который касательная образует с положительным направлением оси Ox . Дадим независимому переменному приращение Δx ; тогда функция получит приращение $\Delta y = NM_1$. Значениям $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ на кривой $y = f(x)$ будет соответствовать точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Из треугольника MNT находим:

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha;$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

то

$$NT = f'(x) \Delta x;$$

но согласно определению дифференциала $f'(x) \Delta x = dy$. Таким

*) Предполагая, что функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x , получаем $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

образом,

$$NT = dy.$$

Последнее равенство означает, что дифференциал функции $f(x)$,

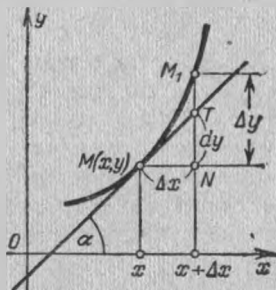


Рис. 85.

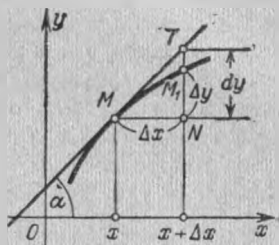


Рис. 86.

соответствующий данным значениям x и Δx , равен приращению ординаты касательной к кривой $y=f(x)$ в данной точке x .

Из рисунка 85 непосредственно следует, что

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

По доказанному ранее $\frac{M_1T}{NT} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Не следует думать, что всегда Δy больше dy . Так, на рисунке 86 $\Delta y = M_1N$, $dy = NT$, причем $\Delta y < dy$.

§ 22. Производные различных порядков

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a, b]$. Значения производной $f'(x)$, вообще говоря, зависят от x , т. е. производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x . Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Производная от первой производной называется *производной второго порядка* или *второй производной* от первоначальной функции и обозначается символом y'' или $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Так, например, если $y = x^5$, то

$$y' = 5x^4; y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

Вообще, *производной n -го порядка от функции $f(x)$* называется производная (первого порядка) от производной $(n-1)$ -го порядка и

обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(Порядок производной берется в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени.)

Производные четвертого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV} , y^V , y^{VI} , ... В таком случае порядок производной можно писать без скобок. Например, если $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^V = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0$.

Пример 1. Дана функция $y = e^{kx}$ ($k = \text{const}$). Найти выражение ее производной любого порядка n .

Решение. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Пример 2. $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ y''' &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\ y^{IV} &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Аналогично выводятся формулы для производных любого порядка и от некоторых других элементарных функций. Читатель сам сможет найти формулы для производных n -го порядка от функций $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила, указанные в теоремах 2 и 3 § 7.

В данном случае имеют место очевидные формулы:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Выведем формулу (так называемую формулу Лейбница), дающую возможность вычислить производную n -го порядка от произведения двух функций $u(x)v(x)$. Для того чтобы вывести эту формулу, мы найдем сначала несколько производных, а затем установим общий закон, пригодный для вычисления производной любого порядка:

$$\begin{aligned} y &= uv, \\ y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u'v'' + 2u'v'' + u'v''' = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \\ y^{IV} &= u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}. \end{aligned}$$

Закон составления производных сохраняется для производных любого порядка и заключается, очевидно, в следующем.

Надо выражение $(u+v)^n$ разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить показатели степеней для u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени ($u^0 = v^0 = 1$), входящие в крайние члены разложения, надо заменить самими функциями (т. е. «производными нулевого порядка»):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Это и есть *формула Лейбница*.

Строгое доказательство этой формулы можно было бы провести методом полной математической индукции (т. е. доказать, что из справедливости этой формулы для порядка n следует справедливость ее для порядка $n+1$).

Пример 3. $y = e^{ax}x^2$. Найти производную $y^{(n)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} u &= e^{ax}, & v &= x^2, \\ u' &= ae^{ax}, & v' &= 2x, \\ u'' &= a^2e^{ax}, & v'' &= 2, \\ \vdots & & \vdots & \\ u^{(n)} &= a^ne^{ax}, & v^{(n)} &= 0, \\ y^{(n)} &= a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}e^{ax} \cdot 2, \end{aligned}$$

или

$$y^{(n)} = e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. Дифференциалы различных порядков

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x — независимое переменное. Дифференциал этой функции

$$dy = f'(x) dx$$

есть некоторая функция от x , но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель (dx) является приращением независимого переменного x и от значения этого переменного не зависит. Так как dy есть функция от x , то мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* этой функции и обозначается через d^2y :

$$d(dy) = d^2y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу общего определения дифференциала имеем:

$$d^2y = [f'(x) dx]' dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной, и мы получаем:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2 , подразумевая под этим квадрат выражения dx ; вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т. д.

Третьим дифференциалом или дифференциалом третьего порядка функции называется дифференциал от ее второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Вообще, дифференциалом n -го порядка называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx,$$

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (1)$$

Пользуясь дифференциалами различных порядков, производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (2)$$

Следует, однако, сказать, что равенства (1) и (2) (при $n > 1$) верны только для того случая, когда x является независимым переменным *).

§ 24. Производные различных порядков от неявных функций и функций, заданных параметрически

1. Покажем на примере способ нахождения производных различных порядков от неявных функций.

Пусть неявная функция y от x определяется равенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Дифференцируем по x все члены этого равенства, помня, что y есть функция от x :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

отсюда находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (2)$$

*) Тем не менее равенство (2) мы будем писать и в том случае, когда x не является независимым переменным; но в этом случае выражение $\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ следует рассматривать как символические обозначения производных.

Последнее равенство снова дифференцируем по x (имея в виду, что y есть функция от x):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставляем сюда вместо производной $\frac{dy}{dx}$ ее выражение из равенства (2), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y + x \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}}{y^2},$$

или после упрощения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^3}.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

поэтому вторую производную можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, найдем $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

2. Рассмотрим теперь задачу о нахождении производных высших порядков от функции, заданной параметрически.

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

причем функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

В § 18 было доказано, что в этом случае производная $\frac{dy}{dx}$ определяется равенством

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \quad (4)$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ дифференцируем по x равенство (4), имея в виду, что t есть функция от x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \frac{dt}{dx}, \quad (5)$$

но

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (5), получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

Последней формуле можно придать следующий, более компактный вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \psi''(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Аналогичным образом можно найти производные $\frac{d^2 y}{dx^3}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$ и т. д.

Пример. Функция y от x задана параметрически:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \cos t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \sin t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{(-a \sin t)^3} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Механическое значение второй производной

Путь s , пройденный поступательно движущимся телом, в зависимости от времени t выражается формулой

$$s = f(t). \quad (1)$$

Как уже известно (см. § 1 гл. III), скорость v тела в данный момент равна первой производной от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Пусть в некоторый момент t скорость тела была равна v . Если движение не является равномерным, то за промежуток времени Δt , истекший с момента t , скорость изменится и получит приращение Δv .

Средним ускорением за время Δt называется отношение приращения скорости Δv к приращению времени:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорением в данный момент называется предел отношения приращения скорости к приращению времени, когда последнее стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

иначе говоря, ускорение (в данный момент) равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

но так как $v = \frac{ds}{dt}$, то, следовательно,

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

т. е. *ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени*. Исходя из равенства (1), получаем:

$$a = f''(t).$$

Пример. Найти скорость v и ускорение a свободно падающего тела, если зависимость расстояния s от времени t дается формулой

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0, \quad (3)$$

где $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ускорение земного тяготения, а $s_0 = s_{t=0}$ — значение s при $t=0$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0; \quad (4)$$

из этой формулы следует, что $v_0 = (v)_{t=0}$.

Дифференцируя еще раз, находим:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

Заметим, что, обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g , то скорость выражается равенством (4), а расстояние — равенством (3) при условии, что $(v)_{t=0} = v_0$ и $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. Уравнения касательной и нормали. Длины подкасательной и поднормали

Рассмотрим кривую, уравнение которой есть

$$y = f(x).$$

Возьмем на этой кривой точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 87) и напишем уравнение касательной к данной кривой в точке M , предполагая, что эта касательная не параллельна оси ординат.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку M , имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для касательной (см. § 3)

$$k = f'(x_1),$$

поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

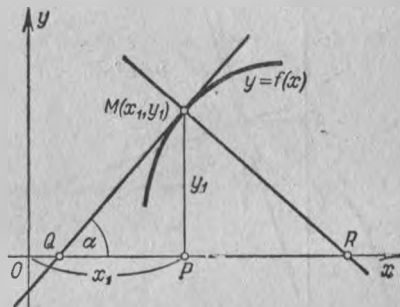


Рис. 87.

Наряду с касательной к кривой в данной точке очень часто приходится рассматривать нормаль.

Определение. *Нормалью* к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_t касательной равенством

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

т. е.

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Следовательно, уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке $M(1, 1)$.

Решение. Так как $y' = 3x^2$, то угловой коэффициент касательной равен $(y')_{x=1} = 3$.

Следовательно, уравнение касательной:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ или } y = 3x - 2,$$

Уравнение нормали:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

или

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(см. рис. 88).

Длина T отрезка QM (рис. 87) касательной, заключенного между точкой касания и осью Ox , называется *длиной касательной*. Проекция этого отрезка на ось Ox , т. е. отрезок QP , называется *подкасательной*; длина подкасательной обозначается через S_T . Длина N отрезка MR называется *длиной нормали*, а проекция RP отрезка RM на ось Ox называется *поднормалью*; длина поднормали обозначается через S_N .

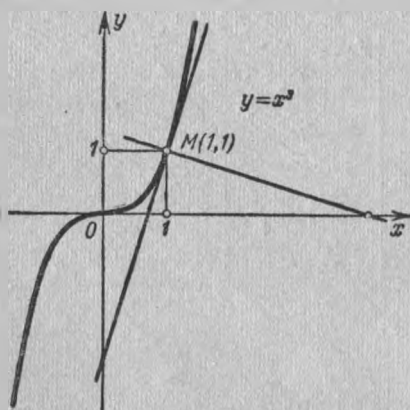


Рис. 88.

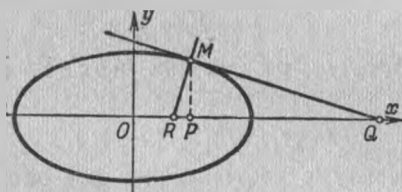


Рис. 89.

Найдем величины T , S_T , N , S_N для кривой $y = f(x)$ и точки $M(x_1, y_1)$.

Из рисунка 87 видно, что

$$QP = y_1 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y_1}{y_1'},$$

поэтому

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y_1'} \right|,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y_1'} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|.$$

Далее, из этого же рисунка ясно, что

$$PR = y_1 \operatorname{tg} \alpha = y_1 y_1',$$

поэтому

$$S_N = |y_1 y_1'|,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

Эти формулы выведены в предположении, что $y_1 > 0$, $y_1' > 0$. Однако они сохраняются и в общем случае.

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали, длины касательной и подкасательной, длины нормали и поднормали для эллипса:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (1)$$

в точке $M(x_1, y_1)$, для которой $t = \pi/4$ (рис. 89).

Решение. Из уравнений (1) находим:

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Находим координаты точки касания M :

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение касательной:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{или} \quad (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Длины подкасательной и поднормали:

$$S_T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad S_N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Длины касательной и нормали:

$$T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 27. Геометрическое значение производной радиуса-вектора по полярному углу

Пусть имеем уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = f(\theta). \quad (1)$$

Напишем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Подставляя сюда вместо ρ его выражение через θ из уравнения (1), будем иметь:

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \quad (2)$$

Уравнения (2) являются параметрическими уравнениями данной кривой, причем параметром является полярный угол θ (рис. 90).

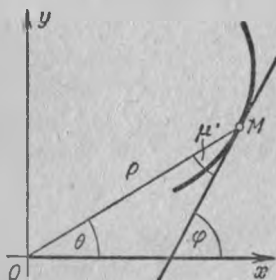


Рис. 90.

Если через φ обозначим угол, составленный касательной к кривой в некоторой точке $M(\rho, \theta)$ с положительным направлением оси абсцисс, то будем иметь:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}, \text{ или } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta}. \quad (3)$$

Обозначим через μ угол между направлением радиуса-вектора и касательной. Очевидно, что $\mu = \varphi - \theta$,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}.$$

Подставляя сюда вместо $\operatorname{tg} \varphi$ его выражение (3) и производя преобразования, получим:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \cos \theta - (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \sin \theta}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \cos \theta + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

или

$$\rho'_0 = \rho \operatorname{ctg} \mu. \quad (4)$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по полярному углу равна длине радиуса-вектора, умноженной на котангенс угла между радиусом-вектором и касательной к кривой в данной точке.

Пример. Показать, что касательная к логарифмической спирали $\rho = e^{a\theta}$ пересекается с радиусом-вектором под постоянным углом.

Решение. Из уравнения спирали находим: $\rho' = ae^{a\theta}$. На основании формулы (4) получаем:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ т. е. } \mu = \operatorname{arccotg} a = \operatorname{const}.$$

Упражнения к главе III

Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной: 1. $y = x^3$. *Отв.* $3x^2$. 2. $y = \frac{1}{x}$. *Отв.* $-\frac{1}{x^2}$. 3. $y = \sqrt{x}$.

Отв. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. *Отв.* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 5. $y = \sin^2 x$. *Отв.* $2 \sin x \cos x$. 6. $y = 2x^2 - x$. *Отв.* $4x - 1$.

Определить тангенсы углов наклона касательных к кривым: 7. $y = x^3$. а) При $x = 1$. *Отв.* 3. б) При $x = -1$. *Отв.* 3; сделать чертеж. 8. $y = 1/x$. а) При $x = 1/2$. *Отв.* -4. б) При $x = 1$. *Отв.* -1; сделать чертеж. 9. $y = \sqrt{x}$ при $x = 2$. *Отв.* $1/2\sqrt{2}$.

- Найти производные функций: 10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. *Омс.* $y' = 4x^3 + 6x$.
11. $y = 6x^3 - x^2$. *Омс.* $y' = 18x^2 - 2x$. 12. $y = \frac{x^3}{a+b} - \frac{x^3}{a-b} - x$.
Омс. $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$. 13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. *Омс.* $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$.
14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$. *Омс.* $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$. 15. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$.
Омс. $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$. 16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. *Омс.* $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} +$
 $+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$. 17. $y = \frac{(x+1)^4}{x^{\frac{3}{2}}}$. *Омс.* $y' = \frac{3(x+1)^3(x-1)}{2x^{\frac{5}{2}}}$. 18. $y = \frac{x}{m} +$
 $+\frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$. *Омс.* $y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$.
Омс. $y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. *Омс.* $y' =$
 $= \frac{5}{3}ax^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$. 21. $y = (1+4x^3)(1+2x^3)$. *Омс.* $y' =$
 $= 4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y = x(2x-1)(3x+2)$. *Омс.* $y' = 2(9x^2+x-1)$.
23. $y = (2x-1)(x^2-6x+3)$. *Омс.* $y' = 6x^2-26x+12$. 24. $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$.
Омс. $y' = \frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 25. $y = \frac{a-x}{a+x}$. *Омс.* $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t) =$
 $= \frac{t^3}{1+t^2}$. *Омс.* $f'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$. *Омс.* $f'(s) =$
 $= \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y = \frac{x^2+1}{x^2-x-2}$. *Омс.* $y' = \frac{x^4-2x^2-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$.
29. $y = \frac{x^p}{x^m-a^m}$. *Омс.* $y' = \frac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y = (2x^2-3)^2$.
Омс. $y' = 8x(2x^2-3)$. 31. $y = (x^2+a^2)^5$. *Омс.* $y' = 10x(x^2+a^2)^4$.
32. $y = \sqrt{x^2+a^2}$. *Омс.* $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y = (a+x)\sqrt{a-x}$.
Омс. $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Омс.* $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.
35. $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. *Омс.* $y' = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$.
Омс. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. *Омс.* $y' = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.
38. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ *Омс.* $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \times$
 $\times \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 39. $y = \sin^2 x$. *Омс.* $y' = \sin 2x$. 40. $y =$
 $= 2 \sin x + \cos 3x$. *Омс.* $y' = 2 \cos x - 3 \sin 3x$. 41. $y = \operatorname{tg}(ax+b)$. *Омс.* $y' =$

- $= \frac{a}{\cos^3(ax+b)}$. 42. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. *Омс.* $y' = \frac{1}{1+\cos x}$. 43. $y = \sin 2x \cos 3x$.
Омс. $y' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$. 44. $y = \operatorname{ctg}^2 5x$. *Омс.* $y' = -10 \operatorname{ctg} 5x \times$
 $\times \operatorname{csc}^2 5x$. 45. $y = t \sin t + \cos t$. *Омс.* $y' = t \cos t$. 46. $y = \sin^2 t \cos t$.
Омс. $y' = \sin^2 t (3 \cos^2 t - \sin^2 t)$. 47. $y = a \sqrt{\cos 2x}$. *Омс.* $y' = -\frac{a \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
48. $r = a \sin^2 \frac{\varphi}{3}$. *Омс.* $r'_{\varphi} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$. 49. $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}$.
Омс. $y' = -\frac{2x \cos x + \sin^2 x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)}{x^2 \sin^2 x}$. 50. $y = a \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right)^2$.
Омс. $y' = 2a \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. 51. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$. *Омс.* $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{sc}^2 x$. 52. $y = \ln \cos x$.
Омс. $y' = -\operatorname{tg} x$. 53. $y = \ln \operatorname{tg} x$. *Омс.* $y' = 2/\sin 2x$. 54. $y = \ln \sin^2 x$.
Омс. $y' = 2 \operatorname{ctg} x$. 55. $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{sc} x}$. *Омс.* $y' = \sin x + \cos x$. 56. $y =$
 $= \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Омс.* $y' = \frac{1}{\cos x}$. 57. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$. *Омс.* $y' = \frac{1}{\cos x}$.
58. $y = \sin(x+a) \cos(x+a)$. *Омс.* $y' = \cos 2(x+a)$. 59. $f(x) = \sin(\ln x)$.
Омс. $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x) = \operatorname{tg}(\ln x)$. *Омс.* $f'(x) = \frac{\operatorname{sc}^2(\ln x)}{x}$.
61. $f(x) = \sin(\cos x)$. *Омс.* $f'(x) = -\sin x \cos(\cos x)$. 62. $r = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \varphi$.
Омс. $\frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi$. 63. $f(x) = (x \operatorname{ctg} x)^2$. *Омс.* $f'(x) = 2x \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x - x \operatorname{csc}^2 x)$.
64. $y = \ln(ax+b)$. *Омс.* $y' = a/(ax+b)$. 65. $y = \log_a(x^2+1)$.
Омс. $y' = \frac{2x}{(x^2+1) \ln a}$. 66. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$. *Омс.* $y' = \frac{2}{1-x^2}$.
67. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$. *Омс.* $y' = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}$. 68. $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x}$.
Омс. $y' = \frac{4x}{1-x^2}$. 69. $y = \ln(x^2+x)$. *Омс.* $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$. 70. $y =$
 $= \ln(x^3 - 2x + 5)$. *Омс.* $y' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 5}$. 71. $y = x \ln x$. *Омс.* $y' = \ln x + 1$.
72. $y = \ln^2 x$. *Омс.* $y' = \frac{2 \ln x}{x}$. 73. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. *Омс.* $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
74. $y = \ln(\ln x)$. *Омс.* $y' = \frac{1}{x \ln x}$. 75. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Омс.* $f'(x) =$
 $= \frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. *Омс.* $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.
77. $y = \sqrt{a^2+x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. *Омс.* $y' = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y =$
 $= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. *Омс.* $y' = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} +$

$$+ \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad 80. \quad y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos^2 x}.$$

$$81. \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x. \quad \text{Омс.} \quad y' = \operatorname{tg}^2 x. \quad 82. \quad y = e^{ax}. \quad \text{Омс.} \quad y' = ae^{ax}.$$

$$83. \quad y = e^{4x+5}. \quad \text{Омс.} \quad y' = 4e^{4x+5}. \quad 84. \quad y = a^{x^2}. \quad \text{Омс.} \quad 2x a^{x^2} \ln a. \quad 85. \quad y = 7^{x^2+2x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = 2(x+1) 7^{x^2+2x} \ln 7. \quad 86. \quad y = c^{a^2-x^2}. \quad \text{Омс.} \quad y' = -2xc^{a^2-x^2} \ln c.$$

$$87. \quad y = ae^{\sqrt{x}}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}. \quad 88. \quad r = a^b. \quad \text{Омс.} \quad r' = a^b \ln a.$$

$$89. \quad r = a^{\ln b}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{dr}{db} = \frac{a^{\ln b} \ln a}{b}. \quad 90. \quad y = e^x (1-x^2).$$

$$\text{Омс.} \quad y' = e^x (1-2x-x^2). \quad 91. \quad y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}. \quad 92. \quad y =$$

$$= \ln \frac{e^x}{1+e^x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{1}{1+e^x}. \quad 93. \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad \text{Омс.} \quad y' =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad 94. \quad y = e^{\sin x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = e^{\sin x} \cos x. \quad 95. \quad y = a^{\operatorname{tg} nx}. \quad \text{Омс.} \quad y' =$$

$$= na^{\operatorname{tg} nx} \operatorname{sc}^2 nx \ln a. \quad 96. \quad y = e^{\cos x} \sin x. \quad \text{Омс.} \quad y' = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x).$$

$$97. \quad y = e^x \ln \sin x. \quad \text{Омс.} \quad y' = e^x (\operatorname{ctg} x + \ln \sin x). \quad 98. \quad y = x^n e^{\sin x}.$$

$$\text{Омс.} \quad y' = x^{n-1} e^{\sin x} (n + x \cos x). \quad 99. \quad y = x^x. \quad \text{Омс.} \quad y' = x^x (\ln x + 1).$$

$$100. \quad y = x^{\frac{1}{x}}. \quad \text{Омс.} \quad y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right). \quad 101. \quad y = x^{\ln x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = x^{\ln x - 1} \ln x^2.$$

$$102. \quad y = e^{x^2}. \quad \text{Омс.} \quad y' = e^{x^2} (1 + \ln x) x^x. \quad 103. \quad y = (x/n)^{nx}.$$

$$\text{Омс.} \quad y' = n \left(\frac{x}{n} \right)^{nx} \left(1 + \ln \frac{x}{n} \right). \quad 104. \quad y = x^{\sin x}. \quad \text{Омс.} \quad x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right).$$

$$105. \quad y = (\sin x)^x. \quad \text{Омс.} \quad (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x). \quad 106. \quad y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$\text{Омс.} \quad y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \operatorname{sc}^2 x \ln \sin x). \quad 107. \quad y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\cos^2 \frac{1-e^x}{1+e^x}}. \quad 108. \quad y = \sin \sqrt{1-2^x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = -\frac{\cos \sqrt{1-2^x}}{2 \sqrt{1-2^x}} 2^x \ln 2.$$

$$109. \quad y = 10^{x \operatorname{tg} x}. \quad \text{Омс.} \quad y' = 10^{x \operatorname{tg} x} \ln 10 \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right).$$

Найти производные функций, предварительно логарифмируя эти функции:

$$110. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} \right).$$

$$111. \quad y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}. \quad \text{Омс.} \quad y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right). \quad 112. \quad y = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^3 (x+3)^4}. \quad \text{Омс.} \quad y' =$$

$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4 (x+3)^5}. \quad 113. \quad y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}}. \quad \text{Омс.} \quad y' =$$

$$= \frac{-161x^3 + 480x - 271}{60 \sqrt[5]{(x-1)^2} \sqrt[4]{(x-2)^7} \sqrt[3]{(x-3)^{10}}}. \quad 114. \quad y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

122. $y' = \frac{1 + 3x^2 - 2x^4}{(1 - x^2)^2}$. 115. $y = x^5 (a + 3x)^3 (a - 2x)^3$. 116. $y = \arcsin \frac{x}{a}$. 117. $y = (\arcsin x)^2$. 118. $y = \operatorname{arctg} (x^2 + 1)$.
 119. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}$. 120. $y = \arccos (x^2)$. 121. $y = \frac{\arccos x}{x}$.
 122. $y' = \frac{-(x + \sqrt{1 - x^2} \arccos x)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$. 123. $y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$.
 124. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$. 125. $u = \operatorname{arctg} \frac{v + a}{1 - av}$. 126. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{3}}{1 - x^2}$.
 127. $y = x \arcsin x$. 128. $f(x) = \arccos (\ln x)$. 129. $f(x) = \arcsin \sqrt{\sin x}$.
 130. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ ($0 \leq x < \pi$). 131. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.
 132. $y = \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 133. $y = x^{\arcsin x}$. 134. $y = \arcsin (\sin x)$.
 135. $y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3 + 5 \cos x}$. 136. $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$. 137. $y = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.
 138. $y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x$. 139. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x + 1}{x^3 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.
 140. $y = \ln \frac{1 + x \sqrt{2 + x^2}}{1 - x \sqrt{2 + x^2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{2}}{1 - x^2}$. 141. $y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.
 142. $y' = \frac{2n |x|^{2n-1}}{x(x^{2n} + 1)}$.

Дифференцирование неявных функций

Найти $\frac{dy}{dx}$, если: 142. $y^2 = 4px$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$. 143. $x^2 + y^2 = a^2$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. 144. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$. 145. $y^3 - 3y +$

$+ 2ax = 0$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{3(1-y^2)}$. 146. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

147. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 148. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$. 149. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

150. $y = \cos(x+y)$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}$. 151. $\cos(xy) = x$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных параметрически: 152. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$. 153. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

154. $x = a \cos^3 t$; $y = b \sin^3 t$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$. 155. $x = \frac{3at}{1+t^2}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$. 156. $u = 2 \ln \operatorname{ctg} s$, $v = \operatorname{tg} s + \operatorname{ctg} s$. Показать, что $\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} 2s$.

Найти тангенсы углов наклона касательных к кривым: 157. $x = \cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = -1/2$, $y = \sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Омс.* $1/\sqrt{3}$.

158. $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ в точке $x = 1$, $y = -\sqrt{3}/2$. Сделать чертеж. *Омс.* $1/2 \sqrt{3}$. 159. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ при $t = \pi/2$. Сделать

чертеж. *Омс.* 1. 160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ при $t = \pi/4$. Сделать чертеж. *Омс.* -1 . 161. Тело, брошенное под углом α к горизонту, в безвоздушном

пространстве описало под действием силы тяжести кривую (параболу), уравнения которой: $x = v_0 \cos \alpha t$, $y = v_0 \sin \alpha t - gt^2/2$ ($g = 9,8 \text{ м/сек}^2$). Зная, что $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50 \text{ м/сек}$, определить направление движения при: 1) $t = 2 \text{ сек}$; 2) $t = 7 \text{ сек}$. Сделать чертеж. *Омс.* 1) $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\operatorname{tg} \varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134^\circ, 7$.

Найти дифференциалы следующих функций: 162. $y = (a^2 - x^2)^5$.

Омс. $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. 163. $y = \sqrt{1+x^2}$. *Омс.* $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

164. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. *Омс.* $dy = \operatorname{sc}^4 x dx$. 165. $y = \frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$.

Омс. $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Вычислить приращения и дифференциалы функций: 166. $y = 2x^3 - x$ при $x = 1$, $\Delta x = 0,01$. *Омс.* $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$. 167. Дано $y = x^3 + 2x$. Найти Δy и dy при $x = -1$, $\Delta x = 0,02$. *Омс.* $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$.

168. Дано $y = \sin x$. Найти dy при $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/18$. *Омс.* $dy = \pi/36 =$

$= 0,00873$. 169. Зная, что $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,866025$; $\cos 60^\circ = 1/2$, найти приближенные значения $\sin 60^\circ 3'$ и $\sin 60^\circ 18'$. Результаты сопоставить с данными таблицы. *Омс.* $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,868643$. 170. Найти

приближенное значение $\operatorname{tg} 45^\circ 4' 30''$. *Отв.* 1,00262. 171. Зная, что $\log_{10} 200 = 2,30103$, найти приближенное значение $\log_{10} 200,2$. *Отв.* 2,30146.

Производные различных порядков. 172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Найти y'' .

Отв. $18x - 4$. 173. $y = \sqrt[5]{x^3}$. Найти y''' . *Отв.* $\frac{42}{125} x^{-\frac{12}{5}}$. 174. $y = x^5$.

Найти $y^{(4)}$. *Отв.* $6!$. 175. $y = \frac{C}{x^n}$. Найти y'' . *Отв.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. 176. $y =$

$= \sqrt{a^2 - x^2}$. Найти y'' . *Отв.* $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}$. 177. $y = 2\sqrt{x}$.

Найти $y^{(4)}$. *Отв.* $-\frac{15}{8\sqrt{x^3}}$. 178. $y = ax^2 + bx + c$. Найти y''' . *Отв.* 0.

179. $f(x) = \ln(x+1)$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $-\frac{6}{(x+1)^2}$. 180. $y = \operatorname{tg} x$. Найти y''' .

Отв. $6 \operatorname{sc}^4 x - 4 \operatorname{sc}^2 x$. 181. $y = \ln \sin x$. Найти y''' . *Отв.* $2 \operatorname{ctg} x \operatorname{csc}^2 x$.

182. $f(x) = \sqrt{\sec 2x}$. Найти $f''(x)$. *Отв.* $f''(x) = 3[f(x)]^5 - f(x)$.

183. $y = \frac{x^3}{1-x}$. Найти $f^{IV}(x)$. *Отв.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$. 184. $p = (q^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{q}{a}$.

Найти $\frac{d^3 p}{dq^3}$. *Отв.* $\frac{4a^3}{(a^2 + q^2)^2}$. 185. $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$. *Отв.* $\frac{y}{a^2}$.

186. $y = \cos ax$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $a^n \cos(ax + n\pi/2)$. 187. $y = a^x$. Найти $y^{(n)}$.

Отв. $(\ln a)^n a^x$. 188. $y = \ln(1+x)$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. 190. $y = e^x x$. Найти $y^{(n)}$.

Отв. $e^x (x+n)$. 191. $y = x^{n-1} \ln x$. Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $\frac{(n-1)!}{x}$. 192. $y = \sin^2 x$.

Найти $y^{(n)}$. *Отв.* $-2^{n-1} \cos(2x + n\pi/2)$. 193. $y = x \sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Отв. $x \sin(x + n\pi/2) - n \cos(x + n\pi/2)$. 194. Если $y = e^x \sin x$, то

доказать, что $y'' - 2y' + 2y = 0$. 195. $y^2 = 4ax$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$. *Отв.* $-\frac{4a^2}{y^3}$.

196. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$. *Отв.* $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$; $-\frac{3b^6 x}{a^4 y^5}$. 197. $x^2 + y^2 = r^2$.

Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$. *Отв.* $-\frac{r^2}{y^3}$. 198. $y^2 - 2xy = 0$. Найти $\frac{d^3 y}{dx^3}$. *Отв.* 0. 199. $\varphi =$

$= \operatorname{tg}(\varphi + \varrho)$. Найти $\frac{d^3 \varrho}{d\varphi^3}$. *Отв.* $-\frac{2(5 + 8\varrho^2 + 3\varrho^4)}{\varrho^3}$. 200. $\operatorname{sc} \varphi \cdot \cos \varrho = C$.

Найти $\frac{d^2 \varrho}{d\varphi^2}$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^3 \varrho}$. 201. $e^x + x = e^y + y$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Отв. $\frac{(1 - e^{x+y})(e^x - e^y)}{(e^y + 1)^3}$. 202. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Отв. $-\frac{2a^2 xy}{(y^2 - ax)^3}$. 203. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

- Омс. $-\frac{1}{4a \sin^4 t/2}$. 204. $x = a \cos 2t$, $y = b \sin^2 t$. Показать, что $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. 205. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Омс. $-\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$. 206. Показать, что $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} (\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$.

Уравнения касательной и нормали.
Длины подкасательной и поднормали

207. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ в точке $M(3, 2)$. Омс. Касательная $8x - y - 22 = 0$; нормаль $x + 8y - 19 = 0$.

208. Найти уравнение касательной и нормали длины подкасательной и поднормали окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в точке $M(x_1, y_1)$. Омс. Касательная $xx_1 + yy_1 = r^2$; нормаль $x_1 y - y_1 x = 0$; $s_T = |-y_1^2/x_1|$; $s_N = |-x_1|$.

209. Показать, что подкасательная параболы $y^2 = 4px$ в любой точке делится вершиной пополам и поднормаль постоянна и равна $2p$. Сделать чертеж.

210. Найти уравнение касательной в точке $M(x_1, y_1)$: а) К эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Омс. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. б) К гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Омс. $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

211. Найти уравнение касательной и нормали к «локону» $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точке, где $x = 2a$. Омс. Касательная $x + 2y = 4a$; нормаль $y = 2x - 3a$.

212. Показать, что нормаль к кривой $3y = 6x - 5x^2$, проведенная в точке $M(1, 1/3)$, проходит через начало координат.

213. Показать, что касательная к кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ в точке $M(a, b)$ есть $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

214. Найти уравнение той касательной к параболы $y^2 = 20x$, которая образует угол в 45° с осью Ox . Омс. $y = x + 5$ [в точке $(5, 10)$].

215. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 = 52$, параллельных к прямой $2x + 3y = 6$. Омс. $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$, перпендикулярных к прямой $2y + 5x = 10$. Омс. Таких касательных нет.

217. Показать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к гиперболе $xy = m$ делится точкой касания пополам.

218. Доказать, что заключенный между осями координат отрезок касательной к астроидам $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ имеет постоянную длину.

219. Под каким углом α пересекаются кривые $y = a^x$ и $y = b^x$? Омс. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. Найти длины подкасательной, поднормали, касательной и нормали циклоиды $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ в точке, для которой $\theta = \pi/2$. Омс. $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Найти величины s_T , s_N , T и N для гипоциклоиды $x = 4a \cos^3 t$, $y = 4a \sin^3 t$. Омс. $s_T = -4a \sin^2 t \cos t$; $s_N = -4a \sin^4 t / \cos t$; $T = 4a \sin^2 t$; $N = 4a \sin^2 t \operatorname{tg} t$.

Разные задачи

Найти производные функций: 222. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

Омс. $y' = \frac{1}{\cos^3 x}$. 223. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. Омс. $y' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$.

224. $y = \arcsin(\sin x)$. Омс. $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$. 225. $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ ($a > 0$, $b > 0$). Омс. $y' = \frac{1}{a + b \cos x}$. 226. $y = |x|$.

Омс. $y' = \frac{x}{|x|}$. 227. $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$. Омс. $y' = -\frac{x}{|x| \sqrt{1 - x^2}}$.

228. Из формул для объема и поверхности шара $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ и $s = 4 \pi r^2$ следует, что $\frac{dv}{dr} = s$. Объяснить геометрический смысл этого результата. Найти аналогичное соотношение между площадью круга и длиной окружности.

229. В треугольнике ABC сторона a выражается через две другие стороны b , c и угол A между ними формулой $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$. При постоянных b и c сторона a является функцией угла A . Показать, что $\frac{da}{dA} = h_a$, где h_a есть высота треугольника, соответствующая основанию a .

Пояснить этот результат геометрическими соображениями.

230. Пользуясь понятием дифференциала, выяснить происхождение приближенных формул $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$, где $|b|$ есть число малое по сравнению с a .

231. Период колебания маятника равен $T = \pi \sqrt{l/g}$. Какое влияние на погрешность при вычислении периода T окажет погрешность в 1% при измерении: 1) длины маятника l ; 2) ускорения силы тяжести g ? Омс. 1) $\approx 1/2\%$; 2) $\approx 1/2\%$.

232. Трактриса обладает тем свойством, что для любой ее точки отрезок касательной T сохраняет постоянную длину. Доказать это, исходя из 1) уравнения трактрисы в форме

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \quad (a > 0);$$

2) параметрических уравнений кривой

$$x = a (\ln \operatorname{tg} t/2 + \cos t), \quad y = a \sin t.$$

233. Доказать, что функция $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$ (здесь C_1 и C_2 — постоянные).

234. Полагая $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$, доказать равенства: $y'' = 2z$, $z'' = -2y$.

235. Показать, что функция $y = \sin(m \arcsin x)$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$.

236. Доказать, что если $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, то $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2$.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

§ 1. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах $x=a$ и $x=b$ обращается в нуль [$f(a)=f(b)=0$], то существует внутри отрезка $[a, b]$ по крайней мере одна точка $x=c$, $a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$ *).

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее значение m .

Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна, т. е. при всех значениях x имеет постоянное значение $f(x)=m$. Но тогда в любой точке отрезка будет $f'(x)=0$, и теорема доказана.

Предположим, что $M \neq m$. Тогда по крайней мере одно из этих чисел не равно нулю.

Предположим для определенности, что $M > 0$ и что функция принимает свое наибольшее значение при $x=c$, т. е. $f(c)=M$. При этом заметим, что c не равно ни a , ни b , так как по условию $f(a)=0$, $f(b)=0$. Так как $f(c)$ — наибольшее значение функции, то $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Отсюда следует, что

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{при } \Delta x > 0; \quad (1')$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{при } \Delta x < 0. \quad (1'')$$

Так как по условию теоремы производная при $x=c$ существует, то, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= f''(c) \leq 0 \quad \text{при } \Delta x > 0; \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= f'(c) \geq 0 \quad \text{при } \Delta x < 0. \end{aligned}$$

*) Число c называется *корнем функции* $\varphi(x)$, если $\varphi(c)=0$.

Но соотношения $f'(c) \leq 0$ и $f'(c) \geq 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(c) = 0$. Следовательно, внутри отрезка $[a, b]$ имеется точка c , в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Теорема о корнях производной имеет простое геометрическое истолкование: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке

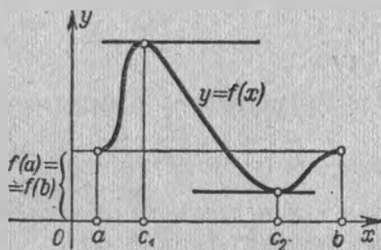


Рис. 91.

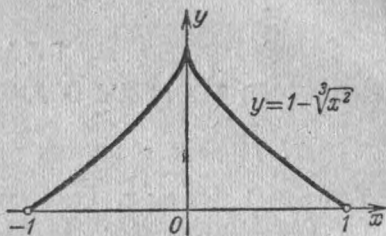


Рис. 92.

касательную, пересекает ось Ox в точках с абсциссами a и b , то на этой кривой найдется по крайней мере одна точка с абсциссой c , $a < c < b$, в которой касательная параллельна оси Ox .

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a, b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a) = f(b)$ (рис. 91). Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и ранее.

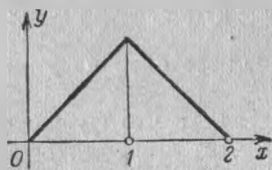


Рис. 93.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ такова, что производная существует не во всех точках внутри отрезка $[a, b]$, то утверждение теоремы может оказаться неверным (т. е. в этом случае на отрезке $[a, b]$ может не оказаться такой точки c , в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль).

Так, например, функция

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(рис. 92) непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и обращается в нуль на концах отрезка, однако производная

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

внутри промежутка в нуль не обращается. Это происходит оттого, что внутри промежутка существует точка $x=0$, в которой производная не существует (обращается в бесконечность).

График, изображенный на рисунке 93, дает нам еще один пример функции, производная которой не обращается в нуль на отрезке $[0, 2]$.

Для этой функции также не выполнены условия теоремы Ролля, так как в точке $x=1$ функция не имеет производной.

§ 2. Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется по крайней мере одна такая точка c , $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим буквой Q число $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, т. е. положим

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)$, определенную равенством

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \quad (3)$$

Выясним геометрический смысл функции $F(x)$. Для этого напомним сначала уравнение хорды AB (рис. 94), учитывая, что ее угловой коэффициент равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$ и что она проходит через точку $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a);$$

отсюда

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Но $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Следовательно, $F(x)$ для каждого значения x равняется разности ординат кривой $y = f(x)$ и хорды $y = f(a) + Q(x - a)$ для точек с одинаковой абсциссой.

Легко видеть, что $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и обращается в нуль на концах отрезка, т. е. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Следовательно, к функции $F(x)$ применима теорема Ролля. Согласно этой теореме внутри отрезка существует точка $x = c$ такая, что

$$F'(c) = 0.$$

Но

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

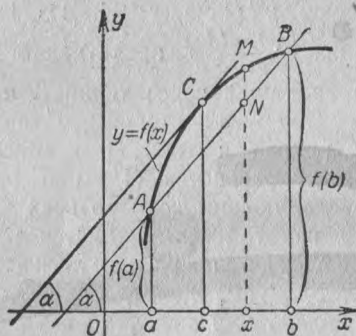


Рис. 94.

Значит,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

откуда

$$Q = f'(c).$$

Подставляя значение Q в равенство (2), будем иметь:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (1')$$

откуда непосредственно следует формула (1). Таким образом, теорема доказана.

Чтобы выяснить геометрический смысл теоремы Лагранжа, обратимся к рисунку 94. Из рисунка непосредственно ясно, что величина $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ представляет собой тангенс угла α наклона хорды, проходящей через точки A и B графика с абсциссами a и b .

С другой стороны, $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой в точке с абсциссой c . Таким образом, геометрический смысл равенства (1') или равносильного ему равенства (1) состоит в следующем: если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B , в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки A и B .

Заметим, далее, следующее. Так как значение c удовлетворяет условию $a < c < b$, то $c - a < b - a$, или

$$c - a = \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, заключенное между 0 и 1, т. е.

$$0 < \theta < 1.$$

Но тогда

$$c = a + \theta(b - a),$$

и формуле (1) можно придать следующий вид:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f' [a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (1'')$$

§ 3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется такая точка $x = c$, $a < c < b$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (1)$$

Доказательство. Определим число Q равенством

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \quad (2)$$

Отметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(b)$ равнялось бы $\varphi(a)$, и тогда по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка, что противоречит условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Очевидно, что $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$ (это вытекает из определения функции $F(x)$ и определения числа Q). Заметив, что функция $F(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, заключаем, что между a и b существует такое значение $x = c$ ($a < c < b$), что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя значение Q в равенство (2), получим равенство (1).

Замечание. Теорему Коши нельзя доказать, как это может показаться с первого взгляда, применением теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Действительно, мы получили бы в этом случае (после сокращения дроби на $b - a$) формулу

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

в которой $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Но так как, вообще говоря, $c_1 \neq c_2$, то полученный результат, очевидно, не дает еще теоремы Коши.

§ 4. Предел отношения двух бесконечно малых величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ »)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$ этого отрезка, т. е. $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$.

Отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено при $x = a$, но имеет вполне определенный смысл при значениях $x \neq a$. Следовательно, может

быть поставлен вопрос о разыскании предела этого отношения при $x \rightarrow a$. Вычисление пределов такого типа называется обычно «раскрытием неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ ».

С такого рода задачей мы уже имели дело и раньше, например при рассмотрении предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, при нахождении производных от элементарных функций. Выражение $\frac{\sin x}{x}$ при $x=0$ не имеет смысла, т. е. функция $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, но мы видели, что предел выражения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ существует и равняется 1.

Теорема (Правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x=a$, то есть $f(a) = \varphi(a) = 0$; тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \rightarrow a$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Возьмем на отрезке $[a, b]$ какую-нибудь точку $x \neq a$. Применяя формулу Коши, будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

где ξ лежит между a и x . Но по условию $f(a) = \varphi(a) = 0$, значит

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (1)$$

Если $x \rightarrow a$, то и $\xi \rightarrow a$, так как ξ заключено между x и a . При этом, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то $\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ также существует и равен A . Отсюда ясно, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

и окончательно

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 1. Теорема имеет место и в том случае, если функции $f(x)$ или $\varphi(x)$ не определены при $x=a$, но

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Для того чтобы свести этот случай к рассмотренному ранее, мы доопределяем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x=a$ так, чтобы они стали непрерывными в точке a . Для этого достаточно положить

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \quad \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0,$$

так как, очевидно, предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \rightarrow a$ не зависит от того, определены ли функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке $x=a$.

Замечание 2. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем условиям, которые были наложены в условиях теоремы на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то, применяя правило Лопиталья к отношению $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, приходим к формуле $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и т.д.

Замечание 3. Если $\varphi'(a) = 0$, но $f'(x) \neq 0$, то теорема приложима к обратному отношению $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, которое стремится к нулю при $x \rightarrow a$. Следовательно, отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится к бесконечности.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Здесь три раза пришлось применить правило Лопиталья, так как отношения первых, вторых и третьих производных при $x=0$ приводят к неопределенности $\frac{0}{0}$.

Замечание 4. Правило Лопиталья применимо и в том случае, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Действительно, полагая $x = \frac{1}{z}$, видим, что $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$, находим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

§ 5. Предел отношения двух бесконечно больших величин («Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ »)

Рассмотрим, далее, вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$).

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \neq a$ в окрестности точки a , причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль; пусть, далее,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$$

и пусть существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (1)$$

Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (2)$$

Доказательство. В рассматриваемой окрестности точки a возьмем две точки α и x так, чтобы было $\alpha < x < a$ (или $a > x > \alpha$). По теореме Коши будем иметь:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (3)$$

где $a < c < x$. Левую часть равенства (3) преобразуем так:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}. \quad (4)$$

Из соотношений (3) и (4) получаем:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}. \quad (5)$$

Из условия (1) следует, что при произвольно малом $\varepsilon > 0$ можно a выбрать настолько близким к a , что для всех $x = c$, где $a < c < a$, будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \quad (6)$$

Далее рассмотрим дробь

$$\frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}.$$

Закрепив a так, чтобы обеспечивалось выполнение неравенства (6), будем x приближать к a . Так как $f(x) \rightarrow \infty$ и $\varphi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} = 1$$

и, следовательно, при ранее выбранном $\varepsilon > 0$ для x , достаточно близких к a , будем иметь:

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon$$

или

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \quad (7)$$

Перемножая соответствующие члены неравенств (6) и (7), получим:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

или на основании равенства (5)

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Так как ε — произвольно малое число при x , достаточно близком к a , то из последних неравенств следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

или на основании (1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если в условии (1) $A = \infty$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty,$$

то равенство (2) остается справедливым и в этом случае. Действительно, из предыдущего выражения следует:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Тогда по доказанной теореме

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Замечание 2. Доказанная теорема легко распространяется на случай, когда $x \rightarrow \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ и

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (8)$$

Доказательство проводится путем замены $x = \frac{1}{z}$, как это делалось при аналогичных условиях в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (см. § 4, замечание 4).

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Замечание 3. Отметим еще раз, что формулы (2) и (8) справедливы только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный), существует. Может случиться, что предел, стоящий слева, существует, в то время как предел, стоящий справа, не существует. Приведем пример. Пусть требуется найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Этот предел существует и равен 1. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Но отношение производных

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

при $x \rightarrow \infty$ не стремится ни к какому пределу, а колеблется между 0 и 2.

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3 \frac{(-1)}{(1)} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3. \end{aligned}$$

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Вообще, при любом целом $n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 1}{e^x} = 0.$$

К предыдущим случаям сводятся случаи других неопределенностей, которые символически записывают так:

$$\text{а) } 0 \cdot \infty; \text{ б) } 0^0; \text{ в) } \infty^0; \text{ г) } 1^\infty; \text{ д) } \infty - \infty,$$

и смысл которых состоит в следующем.

а) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$; требуется найти

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)].$$

Это — неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Если искомое выражение переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

или в виде

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

то при $x \rightarrow a$ мы получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{n}{x^{n+1}}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^{n+1}} = 0.$$

б) Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0;$$

требуется найти

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)},$$

или, как говорят, раскрыть неопределенность вида 0^0 .

Положив

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y = \varphi(x) [\ln f(x)].$$

При $x \rightarrow a$ получим (справа) неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Найдя $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$, легко получить $\lim_{x \rightarrow a} y$. Действительно, в силу непрерывности логарифмической функции, $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$, и если $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = b$, то, очевидно, $\lim_{x \rightarrow a} y = e^b$. Если, в частности, $b = +\infty$ или $-\infty$, то, соответственно, $\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty$ или 0 .

Пример 6. Требуется найти $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$. Положив $y = x^x$, находим: $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

Подставляя найденные значения $C_1, C_2, \dots, C_n$ в формулу (2), получим искомый многочлен:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a). \quad (5)$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$ (рис. 95):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

откуда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

или в развернутом виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \quad (6)$$

$R_n(x)$ называется *остаточным членом*. Для тех значений x , для которых остаточный член $R_n(x)$ мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$.

Таким образом, формула (6) дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Дальнейшая наша задача — оценить величину $R_n(x)$ при различных значениях x .

Запишем остаточный член в форме

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \quad (7)$$

где $Q(x)$ есть некоторая функция, подлежащая определению, и в соответствии с этим перепишем формулу (6):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (6')$$

При фиксированных x и a функция $Q(x)$ имеет определенное значение; обозначим его через Q .

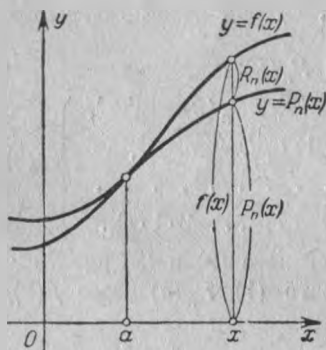


Рис. 95.

Рассмотрим, далее, вспомогательную функцию от t (t заключено между a и x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots \\ \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q,$$

где Q имеет значение, определенное соотношением (6'); при этом считаем a и x определенными числами.

Найдем производную $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \\ - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

или после сокращения:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (8)$$

Итак, функция $F(t)$ имеет производную во всех точках t , лежащих вблизи точки с абсциссой a .

Далее, замечаем, что [на основании формулы (6')]

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Поэтому к функции $F(t)$ применима теорема Ролля, и, следовательно, существует такое значение $t = \xi$, заключенное между a и x , при котором $F'(\xi) = 0$. Отсюда на основании соотношения (8) получаем:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

откуда

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Подставляя это выражение в формулу (7), получаем:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Это — так называемая *форма Лагранжа* для остаточного члена.

Так как ξ заключено между x и a , то его можно представить в форме *)

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

где θ — число, заключенное между 0 и 1, т. е. $0 < \theta < 1$; тогда формула остаточного члена примет вид

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

*) См. конец § 2 настоящей главы.

Формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \quad (9)$$

называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$.

Если в формуле Тейлора положить $a=0$, то она запишется в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (10)$$

где θ заключено между числами 0 и 1. Этот частный случай формулы Тейлора иногда называют *формулой Маклорена*.

§ 7. Разложение по формуле Тейлора функций e^x , $\sin x$, $\cos x$

1. Разложение функции $f(x) = e^x$.

Находя последовательные производные от $f(x)$, получим:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & f'(0) = 1, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f^{(n)}(x) = e^x, & f^{(n)}(0) = 1. \end{array}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (10) § 6, будем иметь:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leq 1$, то, взяв $n=8$, получим оценку остаточного члена:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3.$$

При $x=1$ получим формулу, позволяющую найти приближенное значение числа e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!};$$

производя вычисления в десятичных дробях с пятью десятичными знаками, найдем отсюда:

$$e = 2,71827.$$

Здесь верны первые четыре знака, так как ошибка не превосходит числа $\frac{3}{9!}$ или 0,00001.

Отметим, что, каково бы ни было x , остаточный член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Действительно, так как $0 < 1$, то величина $e^{\theta x}$ при фиксированном x ограничена (она меньше, чем e^x , при $x > 0$, и меньше, чем 1, при $x < 0$).

Докажем, что, каково бы ни было фиксированное число x ,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Действительно,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Если x есть фиксированное число, то найдется такое целое положительное число N , что

$$|x| < N.$$

Введем обозначение $\frac{|x|}{N} = q$; тогда, заметив, что $0 < q < 1$, можем написать при $n = N+1$, $N+2$, $N+3$ и т. д.:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| &= \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| < \\ &< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2}, \end{aligned}$$

потому что

$$\left| \frac{x}{N} \right| = q; \left| \frac{x}{N+1} \right| < q; \dots; \left| \frac{x}{n+1} \right| < q.$$

Но величина $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ постоянная, т. е. не зависит от n , а q^{n-N+2} стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \quad (1)$$

Следовательно, и $R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из предыдущего следует, что при любом x , взяв достаточное число членов, мы можем вычислить e^x с любой степенью точности.

2. Разложение функции $f(x) = \sin x$.

Находим последовательные производные от $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1, \\ f^{IV}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), & f^{IV}(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin n\frac{\pi}{2}, \\ f^{(n+1)}(x) &= \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], & f^{(n+1)}(\xi) &= \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в формулу (10) § 6, получим разложение функции $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Так как $\left| \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \right| \leq 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при всех

значениях x .

Применим полученную формулу для приближенного вычисления $\sin 20^\circ$. Положим $n=3$, т. е. ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0,343.$$

Оценим сделанную ошибку, которая равна остаточному члену:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \sin(\xi + 2\pi) \right| \leq \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0,0006 < 0,001.$$

Следовательно, ошибка меньше, чем 0,001, т. е. $\sin 20^\circ = 0,343$ с точностью до 0,001.

На рисунке 96 даны графики функции $f(x) = \sin x$ и первых трех приближений: $S_1(x) = x$; $S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$; $S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

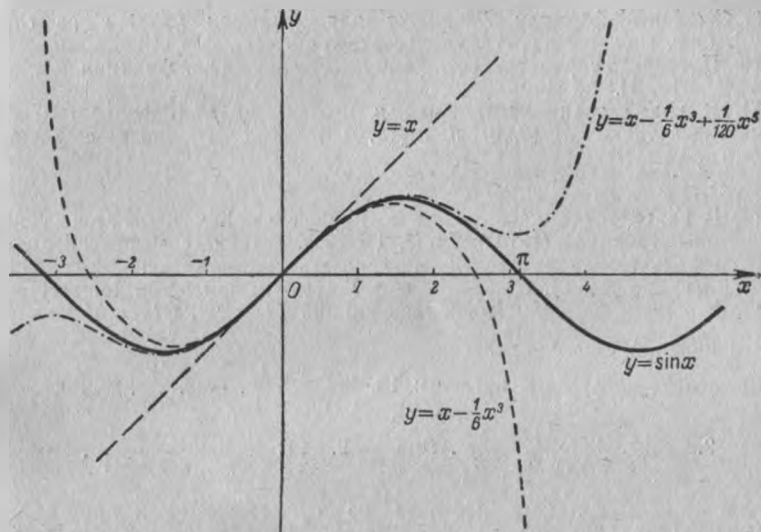


Рис. 96.

3. Разложение функции $f(x) = \cos x$.

Находя значения последовательных производных при $x=0$ от функции $f(x) = \cos x$ и подставляя в формулу Маклорена, получим разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$|\xi| < |x|.$$

Здесь также $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x .

Упражнения к главе IV

Проверить справедливость теоремы Ролля для функций: 1. $y = x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[1, 2]$. 2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ на отрезке $[0, 1]$. 3. $y = (x-1) \times (x-2)(x-3)$ на отрезке $[1, 3]$. 4. $y = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

5. Функция $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ имеет корнями 1 и -1 . Найти корень производной $f'(x)$, о котором говорится в теореме Ролля.

6. Проверить, что между корнями функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x + 6}$ находится корень ее производной.

7. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \cos^2 x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$.

8. Функция $y = 1 - \sqrt[5]{x}$ обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производная от этой функции нигде в интервале $(-1, 1)$ в нуль не обращается. Объяснить, почему здесь неприменима теорема Ролля.

9. Составить формулу Лагранжа для функции $y = \sin x$ на отрезке $[x_1, x_2]$. *Отв.* $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1) \cos c$, $x_1 < c < x_2$.

10. Проверить справедливость формулы Лагранжа для функции $y = 2x - x^2$ на отрезке $[0, 1]$.

11. В какой точке касательная к кривой $y = x^n$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(a, a^n)$? *Отв.* В точке с абсциссой

$$c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

12. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна хорде, стягивающей точки $M_1(1, 0)$ и $M_2(e, 1)$? *Отв.* В точке с абсциссой $c = e - 1$.

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства: 13. $e^x \geq 1 + x$.

14. $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$). 15. $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ при $b > a$. 16. $\operatorname{arctg} x < x$.

17. Написать формулу Коши для функций $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[1, 2]$ и найти c . *Отв.* $c = \frac{14}{9}$.

Вычислить следующие пределы: 18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. *Отв.* $\frac{1}{n}$. 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Отв. 2. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. *Отв.* 2. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. *Отв.* -2.

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. *Отв.* Предела не существует ($\sqrt{2}$ при $x \rightarrow +0$,

$-\sqrt{2}$ при $x \rightarrow -0$). 23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$. *Отв.* $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

Отв. $\ln \frac{a}{b}$. 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^2 x}$. *Отв.* $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$. *Отв.* $\cos a$.

27. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. *Отв.* 2. 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^4}$. *Отв.* $\frac{1}{3}$.

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$. *Отв.* $\frac{3}{2}$. 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (где $n > 0$). *Отв.* 0.

31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}$. *Отв.* 1. 32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$. *Отв.* -1. 33. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{ay}}$.

Отв. 0 при $a > 0$; ∞ при $a \leq 0$. 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. *Отв.* 1.

35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$. *Отв.* 1. 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$. *Отв.* 1. 37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}$.

Отв. 0. 38. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. *Отв.* $\frac{2}{\pi}$. 39. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right]$.

Отв. $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$. *Отв.* -1. 41. $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi)$. *Отв.* 0.

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]. \text{ Ответ. } \frac{1}{2}. \quad 43. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x. \text{ Ответ. } \frac{1}{2}. \quad 44. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{Ответ. } \infty. \quad 45. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}. \text{ Ответ. } \frac{1}{e}. \quad 46. \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{t^2}. \text{ Ответ. } 1. \quad 47. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x}.$$

$$\text{Ответ. } 1. \quad 48. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x. \text{ Ответ. } e^a. \quad 49. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}. \text{ Ответ. } \frac{1}{e}.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}. \text{ Ответ. } 1. \quad 51. \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi^2}}. \text{ Ответ. } \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}. \text{ Ответ. } \frac{1}{e}.$$

53. Разложить по степеням $x-2$ многочлен $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.
 Ответ. $2 - 7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

54. Разложить по степеням $x+1$ многочлен $x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1$.
 Ответ. $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

55. Написать формулу Тейлора для функции $y = \sqrt{x}$ при $a=1$, $n=3$.
 Ответ. $\sqrt{x} = 1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{8} - \frac{(x-1)^4}{4!} \cdot \frac{5}{16} \times$

$$\times [1 + \theta(x-1)]^{\frac{5}{2}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

56. Написать формулу Маклорена для функции $y = \sqrt{1+x}$ при $n=2$.
 Ответ. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}, \quad 0 < \theta < 1.$

57. Пользуясь результатами предыдущего примера, оценить погрешность приближенного равенства $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ при $x=0,2$.
 Ответ. Меньше $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$.

Выяснить происхождение приближенных равенств при небольших значениях x и оценить погрешность этих равенств: 58. $\ln \cos x \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

59. $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$. 60. $\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6}$. 61. $\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$.

62. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. 63. $\ln(x + \sqrt{1-x^2}) \approx x - \frac{x^3}{3!}$.

Пользуясь формулой Тейлора, вычислить пределы выражений:

64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^3}{2}}$. Ответ. 1. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Ответ. 0.

66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^3}$. Ответ. 1. 67. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

Ответ. $\frac{1}{2}$. 68. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg} x \right)$. Ответ. $\frac{1}{3}$. 69. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$. Ответ. $\frac{2}{3}$.

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи

Изучение количественной стороны различных явлений природы приводится к установлению и изучению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, т. е. в виде одной или нескольких формул, то мы получаем возможность исследовать эту функциональную зависимость средствами математического анализа. Например, при исследовании явления полета снаряда в пустоте получается формула, дающая зависимость дальности полета R от угла возвышения α и начальной скорости v_0 :

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(g — ускорение силы тяжести).

Получив эту формулу, мы имеем возможность выяснить, при каком α дальность R будет наибольшей, при каком — наименьшей, каковы должны быть условия, чтобы при увеличении угла α увеличивалась дальность и т. д.

Рассмотрим другой пример. В результате изучения колебания груза на рессоре (вагон, автомобиль) получили формулу, показывающую, как отклонение y груза от положения равновесия зависит от времени t :

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Величины k , A , B , ω , входящие в эту формулу, имеют вполне определенное значение для данной колебательной системы (они зависят от упругости рессоры, от величины груза и т. д., но не изменяются с течением времени t) и поэтому рассматриваются нами как постоянные.

На основании приведенной формулы можно выяснить, при каких значениях t отклонение y увеличивается с увеличением t , как меняется величина наибольшего отклонения в зависимости от времени, при каких значениях t наблюдаются эти наибольшие отклонения, при каких значениях t получаются наибольшие скорости движения груза и ряд других вопросов.

Все перечисленные вопросы входят в понятие «исследовать поведение функции». Очевидно, выяснить все эти вопросы, вычисляя значения функции в отдельных точках (подобно тому, как мы это делали в гл. II), весьма затруднительно. Целью настоящей главы является установление более общих приемов исследования поведения функций.

§ 2. Возрастание и убывание функции

В § 6 главы I было дано определение возрастающей и убывающей функций. Теперь мы применим понятие производной для исследования возрастания и убывания функции.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке $[a, b]$ не отрицательна, т. е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$. Придадим аргументу x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Так как $f(x)$ — функция возрастающая, то

$$f(x + \Delta x) > f(x) \text{ при } \Delta x > 0$$

и

$$f(x + \Delta x) < f(x) \text{ при } \Delta x < 0.$$

В обоих случаях

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad (2)$$

а следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

т. е. $f'(x) \geq 0$, что и требовалось доказать. [Если бы было $f'(x) < 0$, то при достаточно малых значениях Δx отношение (1) было бы отрицательным, что противоречит соотношению (2).]

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $f'(x) > 0$ при всех значениях x , принадлежащих промежутку (a, b) .

Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

По условию $f'(\xi) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, а это и значит, что $f(x)$ — возрастающая функция.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающей (дифференцируемой) функции, а именно.

Если $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) то $f(x)$ убывает

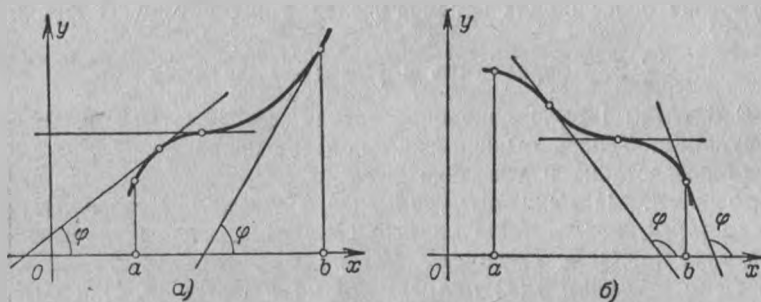


Рис. 97.

на отрезке $[a, b]$. [Конечно, мы и здесь предполагаем, что функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ и дифференцируема всюду на (a, b) .]

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема выражает следующий геометрический факт. Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол φ или — в отдельных точках —

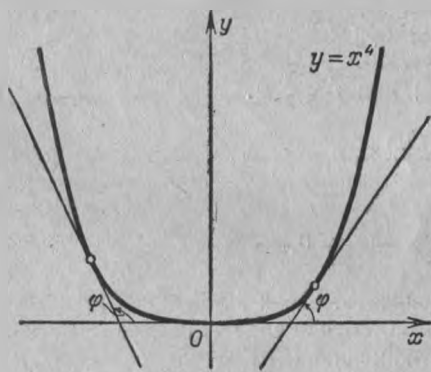


Рис. 98.

горизонтальна; тангенс этого угла не отрицателен: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (рис. 97, а). Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то угол наклона касательной — тупой (или — в отдельных точках — касательная горизонтальна); тангенс этого угла не положителен (рис. 97, б). Аналогично иллюстрируется и вторая часть теоремы. Теорема позволяет судить о возрастании или убывании функции по знаку ее производной.

Пример. Определить области возрастания и убывания функции

$$y = x^4.$$

Решение. Производная равна

$$y' = 4x^3;$$

при $x > 0$ имеем $y' > 0$ — функция возрастает; при $x < 0$ имеем $y' < 0$ — функция убывает (рис. 98).

§ 3. Максимум и минимум функций

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет *максимум* (maximum), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет *максимум* при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине*).

Так, например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 99, имеет максимум при $x = x_1$.

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет *минимум* (minimum) при $x = x_2$, если

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

при любых Δx — как положительных, так и отрицательных, — достаточно малых по абсолютной величине (рис. 99).

Например, функция $y = x^4$, рассмотренная в конце предыдущего параграфа (см. рис. 98), при $x = 0$ имеет минимум, так как $y = 0$ при $x = 0$ и $y > 0$ при других значениях x .

В связи с определениями максимума и минимума следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

1. Функция, определенная на отрезке, может достигать максимального и минимального значений только при значениях x , заключенных внутри рассматриваемого отрезка.

2. Не следует думать, что максимум и минимум функции являются, соответственно, ее наибольшим и наименьшим значениями на рассматриваемом отрезке: в точке максимума функция имеет наибольшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке максимума, а в точке минимума — наименьшее значение лишь по сравнению с теми значениями, которые она имеет во всех точках, достаточно близких к точке минимума.

Так, на рисунке 100 изображена функция, определенная на отрезке $[a, b]$, которая

при $x = x_1$ и $x = x_2$ имеет максимум,

при $x = x_3$ и $x = x_4$ имеет минимум,

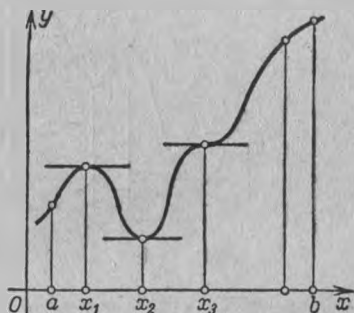


Рис. 99.

*) Иногда это определение формулируют так: функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке x_1 , если можно найти такую окрестность (α, β) точки x_1 ($\alpha < x_1 < \beta$), что для всех точек этой окрестности, отличных от x_1 , выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$.

но минимум функции при $x = x_4$ больше максимума функции при $x = x_1$. При $x = b$ значение функции больше любого максимума функции на рассматриваемом отрезке.

Максимумы и минимумы функции называют *экстремумами* *) или *экстремальными значениями* функции.

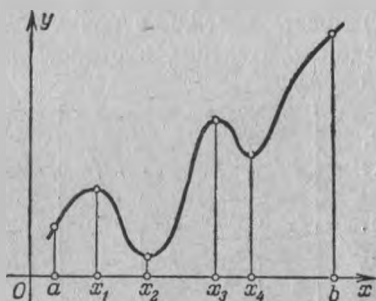


Рис. 100.

Экстремальные значения функции и их расположение на отрезке $[a, b]$ в известной степени характеризуют изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

Ниже будет указан метод нахождения экстремальных значений.

Теорема 1 (Необходимое условие существования экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или мини-

мум, то ее производная обращается в нуль в этой точке, т. е. $f'(x_1) = 0$.

Доказательство. Предположим для определенности, что в точке $x = x_1$ функция имеет максимум. Тогда при достаточно малых по абсолютному значению приращениях Δx ($\Delta x \neq 0$) имеет место

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

т. е.

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Но в таком случае знак отношения

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

определяется знаком Δx , а именно:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0.$$

Согласно определению производной имеем:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Если $f(x)$ имеет производную при $x = x_1$, то предел, стоящий справа, не зависит от того, как Δx стремится к нулю (оставаясь положительным или отрицательным).

Но если $\Delta x \rightarrow 0$, оставаясь отрицательным, то

$$f'(x_1) \geq 0.$$

*) Extremum — крайний (лат.).

Если же $\Delta x \rightarrow 0$, оставаясь положительным, то

$$f'(x_1) \leq 0.$$

Так как $f'(x_1)$ есть определенное число, не зависящее от способа стремления Δx к нулю, то два последних неравенства совместимы только в том случае, если

$$f'(x_1) = 0.$$

Аналогичным образом теорема доказывается и для случая минимума функции.

Доказанной теореме соответствует следующий очевидный геометрический факт: если в точках максимума и минимума функция $f(x)$ имеет производную, то касательная к кривой $y = f(x)$ в этих точках параллельна оси Ox . Действительно, из того, что $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$, где φ — угол между касательной и осью Ox , следует, что $\varphi = 0$ (рис. 99).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие: *если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или минимум) только при тех значениях, при которых производная обращается в нуль.* Обратное заключение неверно: не при всяком значении, при котором производная обращается в нуль, обязательно существует максимум или минимум. Так, на рисунке 99 изображена функция, у которой при $x = x_0$ производная обращается в нуль (касательная горизонтальна), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Точно так же функция $y = x^3$ (рис. 101) при $x = 0$ имеет производную, равную нулю:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, как бы ни была близка точка x к точке O , всегда

$$x^3 < 0 \text{ при } x < 0$$

и

$$x^3 > 0 \text{ при } x > 0.$$

Мы исследовали тот случай, когда функция во всех точках некоторого отрезка имеет производную. Как же обстоит дело в тех точках, где производная не существует? Мы покажем на примерах, что в таких точках может быть или максимум, или минимум, но может и не быть ни того, ни другого.

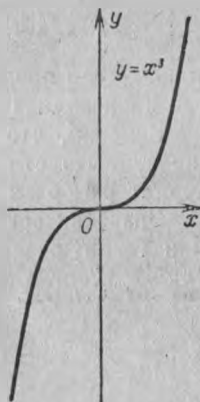


Рис. 101.

Пример 1. Функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$ (в этой точке кривая не имеет определенной касательной), но в этой точке данная функция имеет минимум: $y=0$ при $x=0$, тогда как для всякой точки x , отличной от нуля, имеем $y > 0$ (рис. 102).

Пример 2. Функция $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$ не имеет производной при $x=0$, так как $y' = -(1-x^{2/3})^{-1/2} x^{-1/3}$ обращается в бесконечность при $x=0$, но в этой точке функция имеет максимум: $f(0)=1$, $f(x) < 1$ при x , отличном от нуля (рис. 103).

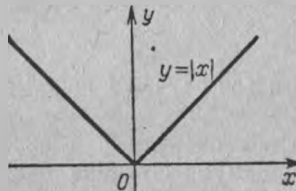


Рис. 102.

Пример 3. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ не имеет производной при $x=0$ ($y' \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$). В этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума: $f(0)=0$; $f(x) < 0$ для $x < 0$; $f(x) > 0$ для $x > 0$ (рис. 104).

Таким образом, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю; либо в тех точках, где производная не существует.

Заметим, что если производная не существует в какой-либо точке (но существует в близлежащих точках), то в этой точке производная терпит разрыв.

Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими точками* или *критическими значениями*.

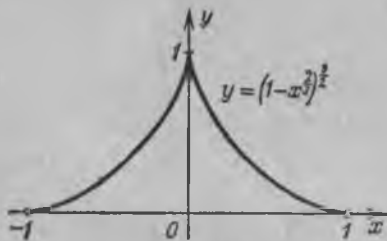


Рис. 103.

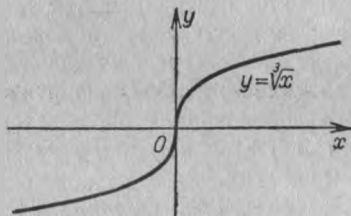


Рис. 104.

Из предыдущего следует, что не при всяком критическом значении функция имеет максимум или минимум. Однако, если в какой-либо точке функция достигает максимума или минимума, то эта точка наверняка является критической. Поэтому для разыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно каждую критическую точку, выясняют, будет ли в этой точке максимум или минимум функции или же не будет ни максимума, ни минимума.

Исследование функции в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 2 (Достаточные условия существования экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором

интервале, содержащем критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_1 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом,

$$\text{если а) } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет максимум;

$$\text{если б) } \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{при } x > x_1, \end{cases}$$

то в точке x_1 функция имеет минимум. При этом надо иметь в виду, что условия а) или б) должны выполняться для всех значений x , достаточно близких к x_1 , т. е. во всех точках некоторой достаточно малой окрестности критической точки x_1 .

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак с плюса на минус, т. е. что для всех x , достаточно близких к точке x_1 , имеем:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x > x_1.$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получим

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

где ξ есть точка, лежащая между x и x_1 .

1) Пусть $x < x_1$; тогда

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \quad (1)$$

2) Пусть $x > x_1$; тогда

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

и, следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

или

$$f(x) < f(x_1). \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) показывают, что для всех значений x , достаточно близких к x_1 , значения функции меньше, чем значения функции в точке x_1 . Следовательно, в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы о достаточном условии минимума.

Рисунок 105 наглядно иллюстрирует смысл теоремы 2.

Пусть в точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и для всех x , достаточно близких к точке x_1 , выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x > x_1.$$

Тогда при $x < x_1$ касательная к кривой образует с осью Ox острый угол — функция возрастает, а при $x > x_1$ касательная образует с осью Ox тупой угол — функция убывает; при $x = x_1$ функция переходит от возрастания к убыванию, т. е. имеет максимум.

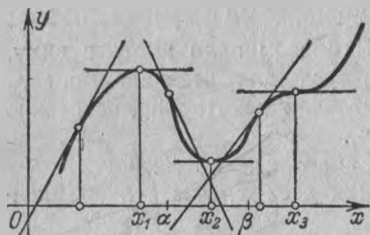


Рис. 105.

Если в точке x_2 имеем $f'(x_2) = 0$ и для всех значений x , достаточно близких к точке x_2 , выполняются неравенства

$$f'(x) < 0 \text{ при } x < x_2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } x > x_2,$$

то при $x < x_2$ касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол — функция убывает, а при $x > x_2$ касательная к кривой образует острый угол — функция возрастает. При $x = x_2$ функция переходит от убывания к возрастанию, т. е. имеет минимум.

Если при $x = x_3$ имеем $f'(x_3) = 0$ и для всех значений x , достаточно близких к x_3 , выполняются неравенства

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_3,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } x > x_3,$$

то функция возрастает как при $x < x_3$, так и при $x > x_3$. Следовательно, при $x = x_3$ функция не имеет ни максимума, ни минимума. Именно такой случай имеет место для функции $y = x^3$ при $x = 0$.

Действительно, производная $y' = 3x^2$, следовательно,

$$(y')_{x=0} = 0,$$

$$(y')_{x<0} > 0,$$

$$(y')_{x>0} > 0,$$

а это значит, что при $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (см. выше рис. 101).

§ 4. Схема исследования дифференцируемой функции на максимум и минимум с помощью первой производной

На основании предыдущего параграфа можно сформулировать следующее правило для исследования дифференцируемой функции

$$y = f(x)$$

на максимум и минимум:

1. Ищем первую производную функции, т. е. $f'(x)$.
2. Находим критические значения аргумента x ; для этого:
 - а) приравниваем первую производную нулю и находим действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$;
 - б) находим значения x , при которых производная $f'(x)$ терпит разрыв.
3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным в интервале между двумя критическими точками, то для исследования знака производной слева и справа, например, от критической точки x_2 (рис. 105) достаточно определить знак производной в точках α и β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, где x_1 и x_3 — ближайшие критические точки).

4. Вычисляем значение функции $f(x)$ при каждом критическом значении аргумента.

Таким образом, имеем следующее схематическое изображение возможных случаев:

Знаки производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_1 :			Характер критической точки
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	—	Точка максимума
—	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	+	Точка минимума
+	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	+	Нет ни максимума, ни минимума (функция возрастает)
—	$f'(x_1) = 0$ или разрывна	—	Нет ни максимума, ни минимума (функция убывает)

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Находим действительные корни производной:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем на рисунке 106.

Исследуем первую критическую точку $x_1 = 1$. Так как $y' = (x-1)(x-3)$, то

$$\text{при } x < 1 \text{ имеем } y' = (-) \cdot (-) > 0;$$

$$\text{при } x > 1 \text{ имеем } y' = (+) \cdot (-) < 0.$$

Значит, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

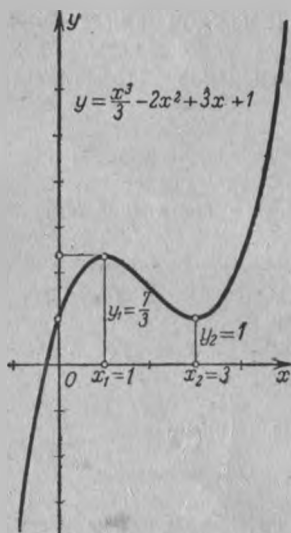


Рис. 106.

Исследуем вторую критическую точку $x_2 = 3$:

$$\text{при } x < 3 \text{ имеем } y' = (+) \cdot (-) < 0;$$

$$\text{при } x > 3 \text{ имеем } y' = (+) \cdot (+) > 0.$$

Значит, при переходе через значение $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = 3$ функция имеет минимум, а именно:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (рис. 106).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1) \sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Находим критические значения аргумента: а) находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

б) находим точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка $x_2 = 0$.

(Отметим, что при $x_2 = 0$ функция определена и непрерывна.)

Других критических точек нет.

3) Исследуем характер полученных критических точек. Исследуем точку $x_1 = \frac{2}{5}$. Заметив, что

$$(y')_{x < \frac{2}{5}} < 0, (y')_{x > \frac{2}{5}} > 0,$$

заключаем, что при $x = \frac{2}{5}$ функция имеет минимум. Значение функции в точке минимума равно

$$\begin{aligned} (y)_{x=\frac{2}{5}} &= \\ &= \left(\frac{2}{5} - 1\right) \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}. \end{aligned}$$

Исследуем вторую критическую точку $x = 0$. Заметив, что

$$(y)_{x < 0} > 0, (y)_{x > 0} < 0,$$

заключаем, что при $x = 0$ функция имеет максимум, причем $(y)_{x=0} = 0$. График исследуемой функции изображен на рисунке 107.

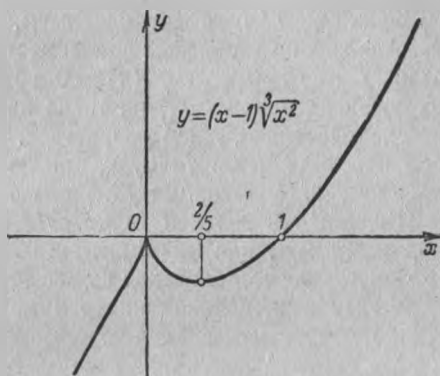


Рис. 107.

§ 5. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Пусть при $x = x_1$ производная функции $x = f(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(x_1) = 0$. Пусть, кроме того, вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $f'(x_1) = 0$; тогда при $x = x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$, и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть

$$f'(x_1) = 0 \text{ и } f''(x_1) < 0.$$

Так как, по условию, $f''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_1$, то, очевидно, найдется некоторый малый отрезок, окружающий точку $x = x_1$, во всех точках которого вторая производная $f''(x)$ будет отрицательна.

Так как $f''(x)$ есть первая производная от первой производной, $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x = x_1$ (§ 2 гл. V). Но $f'(x_1) = 0$,

следовательно, на этом отрезке при $x < x_1$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_1$ имеем $f'(x) < 0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе через точку $x = x_1$ меняет знак с плюса на минус, а это значит, что в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум. Первая часть теоремы доказана.

Аналогичным образом доказывается вторая часть теоремы, а именно: если $f''(x_1) > 0$, то $f''(x) > 0$ во всех точках некоторого отрезка, окружающего точку x_1 , но тогда на этом отрезке $f''(x) = (f'(x))' > 0$ и, следовательно, $f'(x)$ возрастает. Так как $f'(x_1) = 0$, то, значит, при переходе через точку x_1 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т. е. функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_1$.

Если в критической точке $f''(x_1) = 0$, то в этой точке может быть или максимум, или минимум или не быть ни максимума, ни минимума. В этом случае исследование нужно вести первым способом (см. § 4 гл. V).

Схему исследования экстремумов с помощью второй производной можно изобразить в следующей таблице:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критической точки
0	—	Точка максимума
0	+	Точка минимума
0	0	Неизвестен

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 2 \sin x + \cos 2x.$$

Решение. Так как функция является периодической периода 2π , то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, 2\pi]$.

1) Находим производную:

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2(\cos x - 2 \sin x \cos x) = 2 \cos x (1 - 2 \sin x).$$

2) Находим критические значения аргумента:

$$2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = -2 \sin x - 4 \cos 2x.$$

4) Исследуем характер каждой критической точки:

$$(y'')_{x_1 = \frac{\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, в точке $x_1 = \frac{\pi}{6}$ имеем максимум:

$$(y)_{x = \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее,

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$ имеем минимум:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

В точке $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ имеем:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Следовательно, при $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ функция имеет максимум:

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Наконец,

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ имеем минимум:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

График исследуемой функции изображен на рисунке 108.

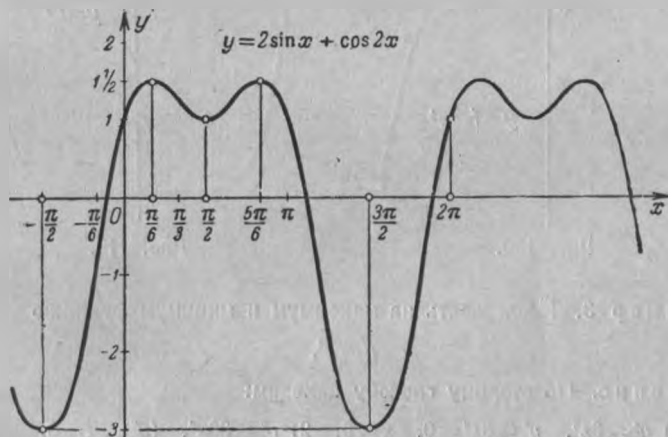


Рис. 108.

Покажем, далее, на примерах, что если в некоторой точке $x = x_1$ имеем $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) = 0$, то в этой точке функция $f(x)$ может

иметь либо максимум, либо минимум либо не иметь ни максимума, ни минимума. .

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 1 - x^4.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Определяем знак второй производной при $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, выяснить характер критической точки с помощью знака второй производной в данном случае нельзя.

3) Исследуем характер критической точки первым способом (см. § 4 гл. V):

$$(y')_{x < 0} > 0, \quad (y')_{x > 0} < 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет максимум, а именно:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

График рассмотренной функции изображен на рисунке 109.

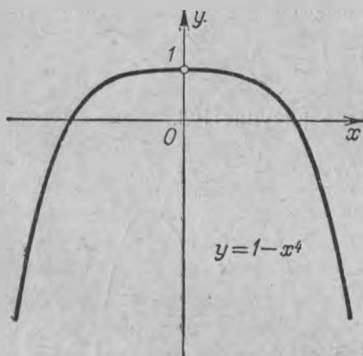


Рис. 109.

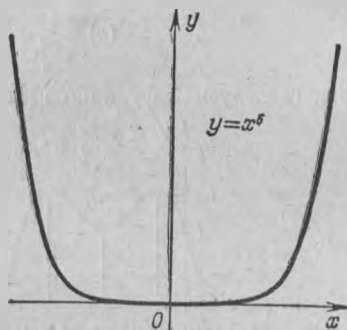


Рис. 110.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^6.$$

Решение. По второму способу находим:

$$1) \ y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \quad 2) \ y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Следовательно, второй способ ответа не дает. Прибегая к первому способу, получаем:

$$(y')_{x < 0} < 0, \quad (y')_{x > 0} > 0.$$

Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум (рис. 110).

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)^3.$$

Решение. Второй способ:

$$y' = 3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0;$$

таким образом, второй способ ответа не дает. По первому способу находим:

$$(y')_{x < 1} > 0, \quad (y')_{x > 1} > 0.$$

Следовательно, при $x=1$ функция не имеет ни максимума, ни минимума (рис. 111).

§ 6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наибольшего значения (см. § 10 гл. II). Будем предполагать, что на данном отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение достигается внутри отрезка $[a, b]$, то очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если имеется несколько максимумов), а именно, наибольшим максимумом. Но может случиться, что наибольшее значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Итак, функция на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов этого отрезка, либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума.

То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума.

Из предыдущего вытекает следующее правило: если требуется найти наибольшее значение непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, то надо:

- 1) найти все максимумы функции на отрезке;
- 2) определить значения функции на концах отрезка, т. е. вычислить $f(a)$ и $f(b)$;
- 3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее; оно и будет представлять собой наибольшее значение функции на отрезке.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

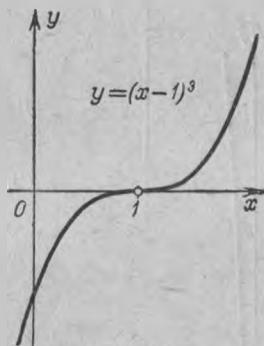


Рис. 111.

Пример. Определить наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 - 3x + 3 \text{ на отрезке } \left[-3; \frac{3}{2}\right].$$

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы функции на отрезке $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$

$$y'' = 6x, \quad (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ имеет место минимум:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Далее,

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Следовательно, в точке $x = -1$ имеет место максимум:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Определяем значение функции на концах отрезка:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8}, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой

функции на отрезке $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ есть

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

а наименьшее значение есть

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

Рис. 112.

График рассматриваемой функции изображен на рисунке 112.

§ 7. Применение теории максимума и минимума функций к решению задач

С помощью теории максимума и минимума решаются многие задачи геометрии, механики и т. д. Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. Дальность $R = OA$ (рис. 113) полета ядра (в пустоте), выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, наклоненного под углом φ к горизонту, определяется формулой

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$



(g — ускорение силы тяжести). Определить угол φ , при котором дальность R будет наибольшей при данной начальной скорости v_0 .

Решение. Величина R представляет собой функцию переменного угла φ . Исследуем эту функцию на максимум на отрезке $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0; \quad \text{критическое значение } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Следовательно, при значении $\varphi = \frac{\pi}{4}$ функция R имеет максимум

$$(R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Значения функции R на кон-

цах отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ равны:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

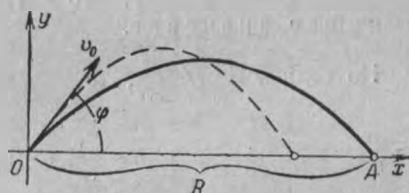


Рис. 113.

Таким образом, найденный максимум и есть искомое наибольшее значение R .

Задача 2. Какие размеры надо придать цилиндру, чтобы при данном объеме v его полная поверхность S была наименьшей?

Решение. Обозначая через r радиус основания цилиндра и через h высоту цилиндра, будем иметь:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Так как объем цилиндра задан, то при данном r величина h определяется формулой

$$v = \pi r^2 h,$$

откуда

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Подставляя это выражение h в формулу для S , получим:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2},$$

или

$$S = 2 \left(\pi r^2 + \frac{v}{r} \right).$$

Здесь v — заданное число. Таким образом, мы представили S как функцию одного независимого переменного r .

Найдем наименьшее значение этой функции в промежутке $0 < r < \infty$:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dr} &= 2 \left(2\pi r - \frac{v}{r^2} \right), \\ 2\pi r - \frac{v}{r^2} &= 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}, \\ \left(\frac{d^2S}{dr^2} \right)_{r=r_1} &= 2 \left(2\pi + \frac{2v}{r^3} \right)_{r=r_1} > 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в точке $r=r_1$ функция S имеет минимум. Заметив, что $\lim_{r \rightarrow 0} S = \infty$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} S = \infty$, т. е. что при стремлении r к нулю или к бесконечности поверхность S неограниченно возрастает, мы приходим к выводу, что в точке $r=r_1$ функция S имеет наименьшее значение.

Но если $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, то

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Таким образом, для того чтобы при данном объеме v полная поверхность S цилиндра была наименьшей, высота цилиндра должна равняться его диаметру.

§ 8. Исследование функции на максимум и минимум с помощью формулы Тейлора

В § 5 главы V было замечено, что если в некоторой точке $x=a$ имеем $f'(a)=0$ и $f''(a)=0$, то в этой точке может быть либо максимум, либо минимум либо нет ни того, ни другого. При этом указывалось, что для решения вопроса в этом случае нужно вести исследование первым способом, т. е. путем исследования знака первой производной слева и справа от точки $x=a$.

Теперь мы покажем, что можно в этом случае исследование вести и с помощью формулы Тейлора, выведенной в § 6 гл. IV.

Для большей общности предположим, что не только $f''(x)$, но и все производные до n -го порядка включительно от функции $f(x)$ обращаются в нуль при $x=a$:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad (1)$$

а

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Предположим, далее, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$ -го порядка включительно в окрестности точки $x=a$.

Напишем формулу Тейлора для $f(x)$, принимая во внимание равенства (1):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2)$$

где ξ — число, заключенное между a и x .

Так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности точки a и $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, то найдется такое малое положительное число h , что при любом x , удовлетворяющем неравенству $|x-a| < h$, будет $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. При этом если $f^{(n+1)}(a) > 0$, то и во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ будет $f^{(n+1)}(x) > 0$; если $f^{(n+1)}(a) < 0$, то во всех точках этого интервала будет $f^{(n+1)}(x) < 0$.

Перепишем формулу (2) в виде

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

и рассмотрим различные частные случаи.

Первый случай. n — нечетное.

а) Пусть $f^{(n+1)}(a) < 0$. Тогда найдется интервал $(a-h, a+h)$, во всех точках которого $(n+1)$ -я производная отрицательна. Если x есть точка этого интервала, то ξ тоже находится между $a-h$ и $a+h$ и, следовательно, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Так как $n+1$ — четное число, то $(x-a)^{n+1} > 0$ при $x \neq a$, и поэтому правая часть в формуле (2') отрицательна.

Следовательно, при $x \neq a$ во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ имеем:

$$f(x) - f(a) < 0,$$

а это значит, что при $x=a$ функция имеет максимум.

б) Пусть $f^{(n+1)}(a) > 0$. Тогда при достаточно малом значении h во всех точках x интервала $(a-h, a+h)$ имеет место $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Следовательно, правая часть формулы (2') будет положительна, т. е. при $x \neq a$ во всех точках указанного интервала будет:

$$f(x) - f(a) > 0,$$

а это значит, что при $x=a$ функция имеет минимум.

Второй случай. n — четное.

Тогда $n+1$ — нечетное и величина $(x-a)^{n+1}$ имеет разные знаки при $x < a$ и $x > a$.

Если h достаточно мало по абсолютной величине, то $(n+1)$ -я производная во всех точках интервала $(a-h, a+h)$ сохраняет тот же знак, что и в точке a . Следовательно, $f(x) - f(a)$ имеет разные знаки при $x < a$ и при $x > a$. Но это значит, что при $x=a$ нет ни максимума, ни минимума.

Заметим, что если при n четном $f^{(n+1)}(a) > 0$, то $f(x) < f(a)$ для $x < a$ и $f(x) > f(a)$ для $x > a$.

Если же при n четном $f^{(n+1)}(a) < 0$, то $f(x) > f(a)$ для $x < a$ и $f(x) < f(a)$ для $x > a$.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Если при $x = a$ имеем:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$$

и первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная четного порядка, то в точке a

$f(x)$ имеет максимум, если $f^{(n+1)}(a) < 0$;

$f(x)$ имеет минимум, если $f^{(n+1)}(a) > 0$.

Если же первая не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}(a)$ есть производная нечетного порядка, то функция не имеет ни максимума, ни минимума в точке a . При этом

$f(x)$ возрастает, если $f^{(n+1)}(a) > 0$;

$f(x)$ убывает, если $f^{(n+1)}(a) < 0$.

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Найдем критические значения функции

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Из уравнения

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

получаем единственную критическую точку

$$x = 1$$

(так как данное уравнение имеет лишь один действительный корень).

Исследуем характер критической точки $x = 1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \quad \text{при } x = 1,$$

$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \quad \text{при } x = 1,$$

$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \quad \text{при любом } x.$$

Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет минимум.

§ 9. Выпуклость и вогнутость кривой.

Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 1. Мы говорим, что кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Мы говорим, что кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале (b, c) , если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз — *вогнутой*.

На рисунке 114 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c) .

Направление выпуклости кривой является важной характеристикой ее формы. Настоящий параграф посвящен установлению признаков, по которым можно было бы, исследуя функцию $y=f(x)$, судить о направлении выпуклости ее графика на различных интервалах.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x) < 0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпукла).

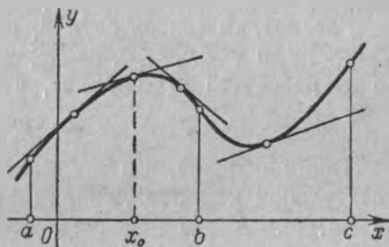


Рис. 114.

Доказательство. Возьмем в интервале (a, b) произвольную точку $x=x_0$ (рис. 114) и проведем касательную к кривой в точке с абсциссой $x=x_0$. Теорема будет доказана, если мы установим, что все точки кривой на интервале (a, b) лежат ниже этой касательной, т. е. что ордината любой точки кривой $y=f(x)$ меньше ординаты у касательной при одном и том же значении x .

Уравнение кривой имеет вид

$$y=f(x). \quad (1)$$

Уравнение же касательной к кривой в точке $x=x_0$ имеет вид

$$\bar{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

или

$$\bar{y}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x равна

$$y-\bar{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x)-f(x_0)$, получим:

$$y-\bar{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

(где c лежит между x_0 и x), или

$$y-\bar{y}=[f'(c)-f'(x_0)](x-x_0).$$

К выражению, стоящему в квадратных скобках, снова применяем теорему Лагранжа; тогда

$$y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \quad (3)$$

(где c_1 лежит между x_0 и c).

Рассмотрим сначала тот случай, когда $x > x_0$. В этом случае $x_0 < c < x$; так как

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

и так как, кроме того, по условию,

$$f''(c_1) < 0,$$

то из равенства (3) следует, что $y - \bar{y} < 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x < x_0$. В этом случае $x < c < x_0$, $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, а так как, по условию, $f''(c_1) < 0$, то из равенства (3) следует, что

$$y - \bar{y} < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой лежит ниже касательной к кривой, каковы бы ни были значения x и x_0 на интервале (a, b) . А это и значит, что кривая выпукла. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 1'. Если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т. е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнута).

Замечание. Содержание теорем 1 и 1' можно иллюстрировать геометрически. Рассмотрим кривую $y = f(x)$, обращенную выпуклостью вверх на интервале (a, b) (рис. 115). Производная $f'(x)$ равна

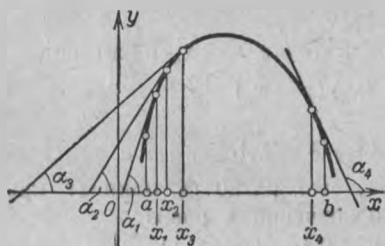


Рис. 115.

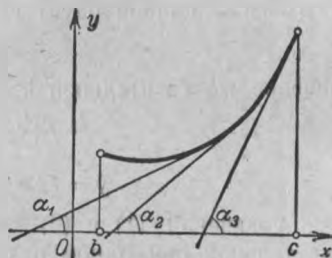


Рис. 116.

тангенсу угла α наклона касательной в точке с абсциссой x , т. е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]_x$. Если $f''(x) < 0$ для всех x на интервале (a, b) , то это значит, что $\operatorname{tg} \alpha$ убывает с возрастанием x . Геометрически нагляден тот факт, что если $\operatorname{tg} \alpha$ убывает с возрастанием x , то соответствующая кривая выпукла. Аналитическим доказательством этого факта и является теорема 1.

Подобным же образом иллюстрируется геометрически и теорема 1' (рис. 116).

Пример 1. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением

$$y = 2 - x^2.$$

Решение. Вторая производная

$$y'' = -2 < 0$$

для всех значений x . Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх (рис. 117).

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$y = e^x.$$

Так как

$$y'' = e^x > 0$$

для всех значений x , то, следовательно, кривая всюду вогнута, т. е. обращена выпуклостью вниз (рис. 118).

Пример 3. Кривая определяется уравнением

$$y = x^3.$$

Так как

$$y'' = 6x,$$

то $y'' < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. Следовательно, при $x < 0$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > 0$ — выпуклостью вниз (рис. 119).

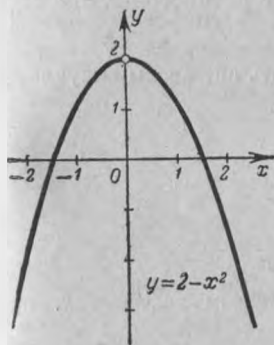


Рис. 117.

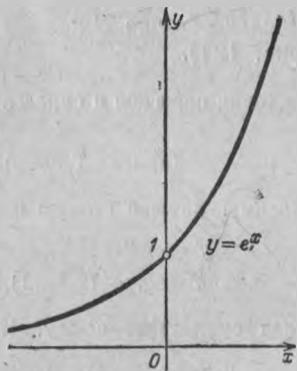


Рис. 118.

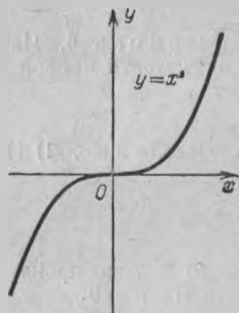


Рис. 119.

Определение 2. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

На рисунках 119, 120 и 121 точки O , A и B суть точки перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны — над нею.

Установим теперь достаточные условия того, что данная точка кривой является точкой перегиба.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x=a$ производная $f'(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=a$ есть точка перегиба.

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$.

Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вверх и при $x > a$ — выпуклостью вниз. Следовательно, точка A кривой с абсциссой $x=a$ есть точка перегиба (рис. 120).

2) Если $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$, то при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ — выпук-

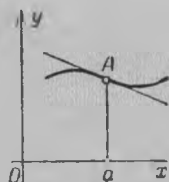


Рис. 120.

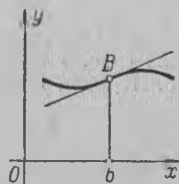


Рис. 121.

лостью вверх. Следовательно, точка B кривой с абсциссой $x=b$ есть точка перегиба (см. рис. 121).

Пример 4. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y=e^{-x^2} \text{ (кривая Гаусса).}$$

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$\begin{aligned} y' &= -2xe^{-x^2}, \\ y'' &= 2e^{-x^2}(2x^2-1). \end{aligned}$$

2) Вторая производная существует всюду. Находим значения x , при которых $y''=0$:

$$\begin{aligned} 2e^{-x^2}(2x^2-1) &= 0, \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3) Исследуем полученные значения:

$$\begin{aligned} \text{при } x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ имеем } y'' &> 0, \\ \text{при } x > -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ имеем } y'' &< 0; \end{aligned}$$

вторая производная меняет знак при переходе через точку x_1 , следовательно,

при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ на кривой имеется точка перегиба; ее координаты:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right);$$

при $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $y'' < 0$,

при $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $y'' > 0$.

Следовательно, при $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ на кривой также имеется точка перегиба;

ее координаты: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Впрочем, существование второй точки перегиба вытекает непосредственно из симметрии кривой относительно оси Oy .

4) Из предыдущего следует, что

при $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая вогнута;

при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ кривая выпукла;

при $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ кривая вогнута.

5) Из выражения первой производной

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

следует, что

при $x < 0$ $y' > 0$, т. е. функция возрастает;

при $x > 0$ $y' < 0$, т. е. функция убывает;

при $x = 0$ $y' = 0$.

В этой точке функция имеет максимум, а именно: $y = 1$.

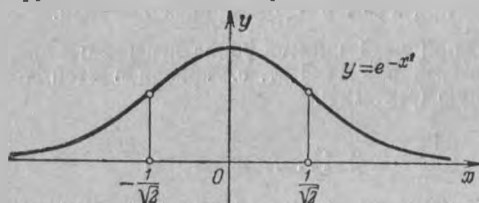


Рис. 122.

На основании проведенного исследования легко построить график кривой (рис. 122).

Пример 5. Исследовать на точки перегиба кривую

$$y = x^3.$$

Решение. 1) Находим вторую производную:

$$y'' = 12x^2.$$

2) Определяем точки, в которых $y'' = 0$:

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Исследуем полученное значение $x=0$:

при $x < 0$ $y'' > 0$ — кривая вогнута;

при $x > 0$ $y'' > 0$ — кривая вогнута.

Следовательно, кривая не имеет точек перегиба (рис. 123).

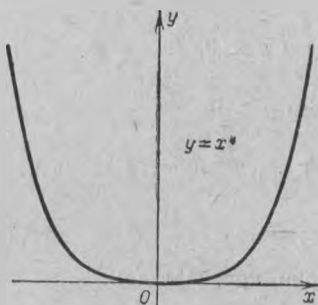


Рис. 123.

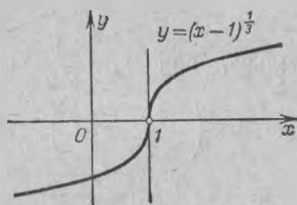


Рис. 124.

Пример 6. Исследовать на точки перегиба кривую

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Решение. 1) Находим первую и вторую производные:

$$y' = \frac{1}{3} (x-1)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9} (x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) Вторая производная нигде не обращается в нуль, но при $x=1$ она не существует ($y' = \pm \infty$).

3) Исследуем значение $x=1$:

при $x < 1$ $y'' > 0$ — кривая вогнута;

при $x > 1$ $y'' < 0$ — кривая выпукла.

Следовательно, при $x=1$ имеется точка перегиба; это — точка $(1; 0)$.

Заметим, что $y' = \infty$ при $x=1$, т. е. кривая в этой точке имеет вертикальную касательную (рис. 124).

§ 10. Асимптоты

Очень часто приходится исследовать форму кривой $y=f(x)$, а значит, и характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы или ординаты переменной точки кривой или абсциссы и ординаты одновременно. При этом важным частным случаем является тот, когда исследуемая кривая при удалении ее переменной точки в бесконечность *) неограниченно приближается к некоторой прямой.

*) Мы говорим, что переменная точка M движется по кривой в бесконечность, если расстояние этой точки от начала координат неограниченно возрастает.

Определение. Прямая A называется *асимптотой* кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю (рис. 125 и 126).

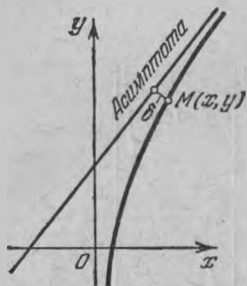


Рис. 125.

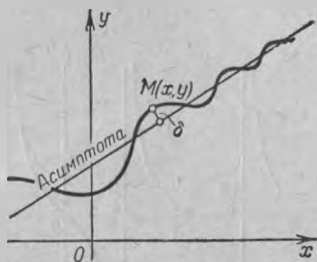


Рис. 126.

Мы будем в дальнейшем различать асимптоты *вертикальные* (т. е. параллельные оси ординат) и *наклонные* (т. е. не параллельные оси ординат).

1. Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$; и обратно, если прямая $x=a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных равенств.

Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот нужно найти такие значения $x=a$, при приближении к которым функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x=a$ будет вертикальной асимптотой.

Пример 1. Кривая $y = \frac{2}{x-5}$ имеет вертикальную асимптоту $x=5$, так как $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 5$ (рис. 127).

Пример 2. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот:

$$x = \pm \frac{\pi}{2}; x = \pm \frac{3\pi}{2}; x = \pm \frac{5\pi}{2}; \dots$$

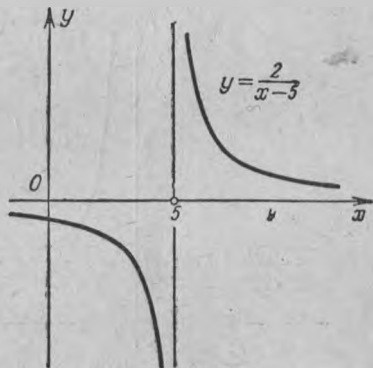


Рис. 127.

Это следует из того, что $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, когда x стремится к значениям $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ или $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$ (рис. 128).

Пример 3. Кривая $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (рис. 129).

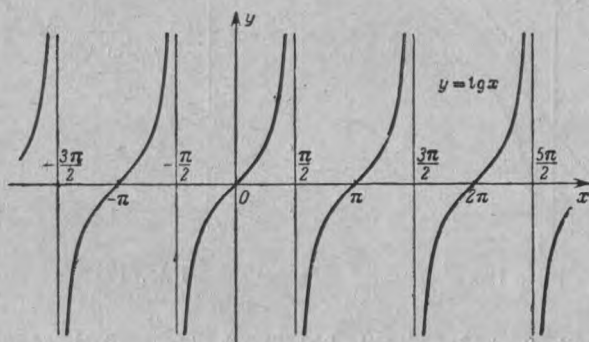


Рис. 128.

II. Наклонные асимптоты

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Определим числа k и b (рис. 130). Пусть $M(x, y)$ — точка, лежащая на кривой, и $N(x, \bar{y})$ — точка, лежащая на асимптоте. Длина отрезка

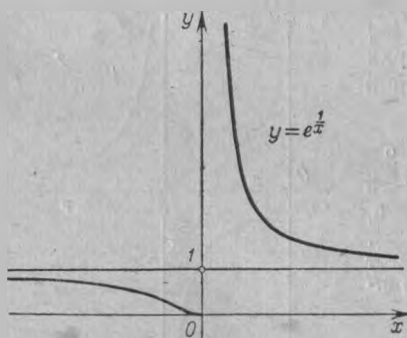


Рис. 129.

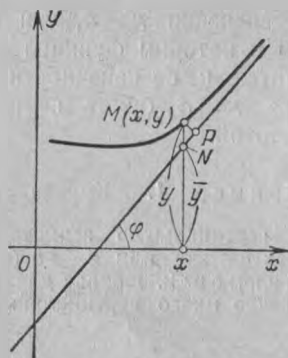


Рис. 130.

MP равна расстоянию от точки M до асимптоты. По условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} MP = 0. \quad (2)$$

Если обозначим через φ угол наклона асимптоты к оси Ox , то из $\triangle NMP$ найдем:

$$NM = \frac{MP}{\cos \varphi}.$$

Так как φ — постоянный угол (не равный $\frac{\pi}{2}$), то в силу предыдущего равенства

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} NM = 0, \quad (2')$$

и наоборот, из равенства (2') следует равенство (2). Но

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

и равенство (2') принимает вид

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \quad (3)$$

Итак, если прямая (1) есть асимптота, то выполняется равенство (3), и наоборот, если при постоянных k и b выполняется равенство (3), то прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Определим теперь k и b . Вынося x за скобки в равенстве (3), получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Так как $x \rightarrow +\infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

При b постоянном $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0,$$

или

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

Зная k , из равенства (3) находим b :

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (5)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (4) и (5). Обратно, если существуют пределы (4) и (5), то выполняется равенство (3) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота. Если хотя бы один из пределов (4) или (5) не существует, то кривая асимптоты не имеет.

Заметим, что мы проводили исследование применительно к рисунку 130, при $x \rightarrow +\infty$, но все рассуждения справедливы и для случая $x \rightarrow -\infty$.

Пример 4. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Решение. 1) Ищем вертикальные асимптоты:

$$\begin{array}{ll} \text{при } x \rightarrow -0 & y \rightarrow +\infty; \\ \text{при } x \rightarrow +0 & y \rightarrow -\infty. \end{array}$$

Следовательно, прямая $x=0$ есть вертикальная асимптота.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right] = 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - x] =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2, \end{aligned}$$

т. е.

$$b = 2.$$

Следовательно, прямая

$$y = x + 2$$

есть наклонная асимптота данной кривой.

Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x :

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ эта разность отрицательна, а при $x < 0$ положительна; следовательно, при $x > 0$ кривая лежит ниже асимптоты, при $x < 0$ — выше асимптоты (рис. 131).

Пример 5. Найти асимптоты кривой

$$y = e^{-x} \sin x + x.$$

Решение. 1) Вертикальных асимптот, очевидно, нет.

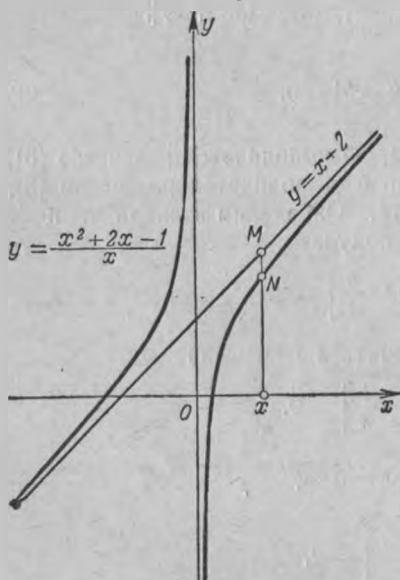


Рис. 131.

2) Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0.$$

Следовательно, прямая

$$y = x$$

есть наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

Заданная кривая не имеет асимптоты при $x \rightarrow -\infty$. Действительно,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x}$ не существует, так как $\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1$. (Здесь первое слагаемое неограниченно возрастает при $x \rightarrow -\infty$ и, следовательно, предела не имеет.)

§ 11. Общий план исследования функций и построения графиков

Под «исследованием функции» обычно понимается разыскание:

- 1) естественной области существования функции;
- 2) точек разрыва функции;
- 3) интервалов возрастания и убывания функции;
- 4) точек максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значений функции;
- 5) областей выпуклости и вогнутости графика, точек перегиба;
- 6) асимптот графика функции.

На основании проведенного исследования строится график функции (иногда целесообразно намечать элементы графика параллельно с исследованием).

Замечание 1. Если исследуемая функция $y = f(x)$ — четная, т. е. такая, что при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т. е. если

$$f(-x) = f(x),$$

то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента, принадлежащих области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Пример 1. Функция $y = x^2$ — четная, так как $(-x)^2 = (x)^2$ (см. рис. 5).

Пример 2. Функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$ (см. рис. 16).

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ — нечетная, т. е. такая, что при изменении аргумента функция меняет знак, т. е. если

$$f(-x) = -f(x),$$

то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 3. Функция $y=x^3$ —нечетная, так как $(-x)^3=-x^3$ (см. рис. 7).

Пример 4. Функция $y=\sin x$ —нечетная, так как $\sin(-x)=-\sin x$ (см. рис. 15).

Замечание 3. Так как знание одних свойств функции позволяет сделать вывод о других ее свойствах, то иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции. Так, например, если мы выяснили, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым мы уже определили и области возрастания и убывания функции.

Пример 5. Исследовать функцию

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Область существования функции—интервал $-\infty < x < +\infty$. Сразу отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум: из равенства

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

находим критические точки:

$$x_1=-1, \quad x_2=1.$$

Исследуем характер критических точек:

при $x_1 < -1$ имеем $y' < 0$;

при $x_1 > -1$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, при $x=-1$ функция имеет минимум:

$$y_{\min}=(y)_{x=-1}=-0,5.$$

Далее,

при $x < 1$ имеем $y' > 0$;

при $x > 1$ имеем $y' < 0$.

Следовательно, при $x=1$ функция имеет максимум:

$$y_{\max}=(y)_{x=1}=0,5.$$

4) Определим области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < -1$ имеем $y' < 0$ —функция убывает;

при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$ —функция возрастает;

при $1 < x < +\infty$ имеем $y' < 0$ —функция убывает.

5) Определим области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: из равенства

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$$

получаем:

$$x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=0, \quad x_3=\sqrt{3}.$$

Исследуя y'' как функцию от x , находим:

при $-\infty < x < -\sqrt{3}$	$y'' < 0$ —кривая выпуклая;
при $-\sqrt{3} < x < 0$	$y'' > 0$ —кривая вогнутая;
при $0 < x < \sqrt{3}$	$y'' < 0$ —кривая выпуклая;
при $\sqrt{3} < x < +\infty$	$y'' > 0$ —кривая вогнутая.

Следовательно, точка с координатами $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ есть точка перегиба; точно так же точки $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ есть точки перегиба.

б) Определим асимптоты кривой:

$$\begin{aligned} \text{при } x \rightarrow +\infty \quad y &\rightarrow 0; \\ \text{при } x \rightarrow -\infty \quad y &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая $y=0$ есть единственная наклонная асимптота. Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как ни для одного конечного значения x функция не стремится к бесконечности.

График исследуемой кривой изображен на рисунке 132.

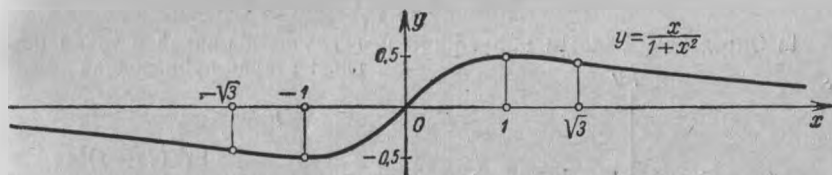


Рис. 132.

Пример 6. Исследовать функцию

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при всех значениях x .

2) Функция всюду непрерывна.

3) Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3 \sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3 \sqrt[3]{x} (2a - x)^2}.$$

Производная существует всюду, за исключением точек

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 2a.$$

Исследуем предельные значения производной при $x \rightarrow -0$ и при $x \rightarrow +0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4a - 3x}{3 \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(2a + x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{4a - 3x}{3 \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(2a + x)^2}} = +\infty$$

при $x < 0$ будет $y' < 0$, при $x > 0$ будет $y' > 0$.

Следовательно, при $x=0$ функция имеет минимум. Значение функции в этой точке равно нулю.

Исследуем теперь функцию в другой критической точке $x_2 = 2a$. При $x \rightarrow 2a$ производная также стремится к бесконечности. Однако в данном случае для всех значений x , близких к $2a$ (находящихся как справа, так и слева

от точки $2a$), производная отрицательна. Следовательно, в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $x_2 = 2a$, так же как и вблизи этой точки, функция убывает; касательная к кривой в этой точке вертикальна.

При $x = \frac{4a}{3}$ производная обращается в нуль. Исследуем характер этой критической точки. Рассматривая выражение первой производной, замечаем, что

$$\text{при } x < \frac{4a}{3} \text{ будет } y' > 0, \text{ при } x > \frac{4a}{3} \text{ будет } y' < 0.$$

Следовательно, при $x = \frac{4a}{3}$ функция имеет максимум:

$$y_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

4) На основании проведенного исследования получаем области возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < 0$ функция убывает;

при $0 < x < \frac{4a}{3}$ функция возрастает;

при $\frac{4a}{3} < x < +\infty$ функция убывает.

5) Определяем области выпуклости и вогнутости кривой и точки перегиба: вторая производная

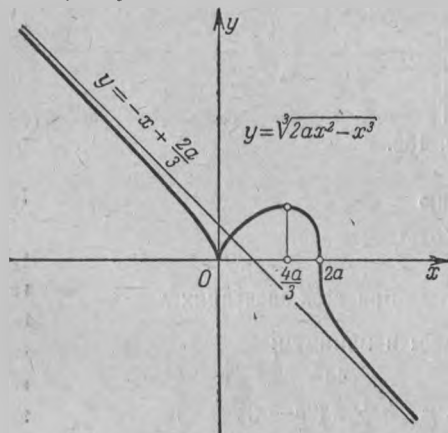


Рис. 133.

$$y'' = \frac{8a^2}{9x^2(2a-x)^{5/3}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль. Однако существуют две точки, в которых вторая производная терпит разрыв: это точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2a$.

Исследуем знак второй производной вблизи каждой из этих точек:

при $x < 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 0$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх.

Значит, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба.

При $x < 2a$ имеем $y'' < 0$ — кривая обращена выпуклостью вверх;

при $x > 2a$ имеем $y'' > 0$ — кривая обращена выпуклостью вниз. Значит, точка $(2a; 0)$ на кривой является точкой перегиба.

6) Определяем асимптоты кривой:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2 - x^3} \sqrt[3]{2ax^2 - x^3 + x^3}} = \frac{2a}{3}.$$

Следовательно, прямая

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

есть наклонная асимптот кривой $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$. График исследуемой функции изображен на рисунке 133.

§ 12. Исследование кривых, заданных параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В этом случае исследование и построение кривой проводятся аналогично тому, как это было сделано для кривой, заданной уравнением

$$y = f(x).$$

Вычисляем производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для тех точек кривой, вблизи которых кривая является графиком некоторой функции $y = f(x)$, вычисляем производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (3)$$

Находим значения параметра $t = t_1, t_2, \dots, t_k$, при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ обращается в нуль или терпит разрыв. (Такие значения t мы будем называть критическими значениями.) По формуле (3) в каждом из интервалов $(t_1, t_2); (t_2, t_3); \dots; (t_{k-1}, t_k)$, а следовательно, и в каждом из интервалов $(x_1, x_2); (x_2, x_3); \dots; (x_{k-1}, x_k)$ (где $x_i = \varphi(t_i)$) определяем знак $\frac{dy}{dx}$, тем самым определяем области возрастания и убывания. Это дает также возможность определить характер точек, соответствующих значениям параметра $t_1, t_2, \dots, t_k$. Далее, вычисляем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \quad (4)$$

На основании этой формулы определяем направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t , при приближении к которым или x , или y стремятся к бесконечности, и такие значения t , при приближении к которым и x , и y стремятся к бесконечности. Затем производим исследование обычным способом.

Некоторые особенности, появляющиеся при исследовании кривых, заданных параметрически, выясним на примерах.

Пример 1. Исследовать кривую, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \quad (1')$$

Решение. Величины x и y определены для всех значений t . Но так как функции $\cos^3 t$ и $\sin^3 t$ — периодические, с периодом 2π , достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π ; при этом область изменения x будет отрезок $[-a, a]$ и областью изменения y будет отрезок $[-a, a]$. Следовательно, рассматриваемая кривая асимптот не имеет. Далее, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Эти производные обращаются в нуль при $t=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Определяем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t. \quad (3')$$

На основании формул (2'), (3') составляем следующую таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x ($y=f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	Убывает
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	Возрастает
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	Убывает
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	Возрастает

Из таблицы следует, что уравнения (1') определяют две непрерывные функции вида $y=f(x)$, при $0 \leq t \leq \pi$ будет $y \geq 0$ (см. две первые строчки таблицы), при $\pi < t \leq 2\pi$ будет $y < 0$ (см. две последние строчки таблицы). Из формулы (3') следует:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

В этих точках касательная к кривой вертикальна. Далее, находим:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\pi} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2\pi} = 0.$$

В этих точках касательная к кривой горизонтальна. Затем находим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

Отсюда следует:

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $0 < t < \pi$ — кривая вогнута,

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ при $\pi < t < 2\pi$ — кривая выпукла.

На основании результатов исследования можем построить кривую (рис. 134). Эта кривая называется *астроидой*.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнениями (*декартов лист*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \quad (1'')$$

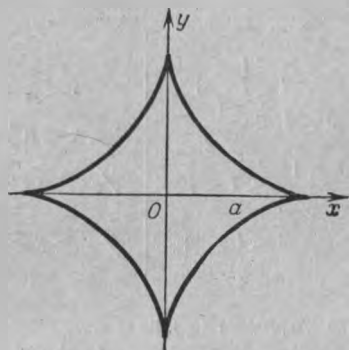


Рис. 134.

Решение. Обе функции определены при всех значениях t , кроме $t = -1$, при этом

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1-0} x &= \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty, & \lim_{t \rightarrow -1-0} y &= \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty; \\ \lim_{t \rightarrow -1+0} x &= -\infty, & \lim_{t \rightarrow -1+0} y &= +\infty. \end{aligned}$$

Заметим, далее, что

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 & \quad x=0, \quad y=0, \\ \text{при } t \rightarrow +\infty & \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0, \\ \text{при } t \rightarrow -\infty & \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Найдем $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a \left(\frac{1}{2} - t^3 \right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \quad (2'')$$

Для t получаем следующие критические значения:

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4 = \sqrt[3]{2}.$$

Далее, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \quad (3'')$$

На основании формул (1''), (2''), (3'') составляем таблицу:

Область изменения t	Соответствующая область изменения x	Соответствующая область изменения y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер изменения y как функции от x ($y=f(x)$)
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	—	Убывает
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	—	Убывает
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	+	Возрастает
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	—	Убывает
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	Возрастает

Из формулы (3'') находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0 \\ (x=0) \\ (y=0)}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty \\ (x=0) \\ (y=0)}} = \infty.$$

Следовательно, начало координат кривая пересекает дважды, с касательной, параллельной оси Ox , и с касательной, параллельной оси Oy . Далее,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \infty.$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(\begin{aligned} x &= a\sqrt[3]{4} \\ y &= a\sqrt[3]{2} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

В этой точке касательная к кривой вертикальна.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{2} \\ \left(\begin{aligned} x &= a\sqrt[3]{2} \\ y &= a\sqrt[3]{4} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

В этой точке касательная к кривой горизонтальна. Исследуем вопрос о существовании асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1) \frac{3at}{1+t^3} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая $y = -x - a$ является асимптотой ветви кривой при

$$x \rightarrow +\infty.$$

Аналогичным образом найдем:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -a.$$

Таким образом, найденная прямая является асимптотой и для ветви кривой при $x \rightarrow -\infty$.

На основании проведенного исследования строим кривую (рис. 135).

Некоторые вопросы, связанные с исследованием кривых, будут дополнительно рассмотрены в главе VIII, § 19 «Особые точки кривой».

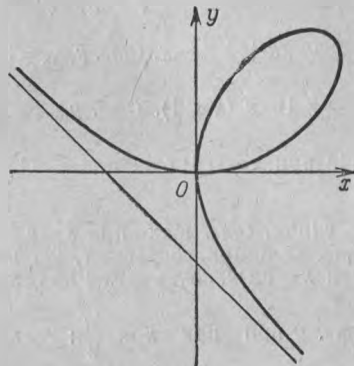


Рис. 135.

Упражнения к главе V

- Найти экстремумы функций: 1. $y = x^2 - 2x + 3$. *Отв.* $y_{\min} = 2$ при $x = 1$.
 2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{7}{2}$ при $x = 1$. 3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$.
Отв. $y_{\max} = 10$ при $x = 1$, $y_{\min} = -22$ при $x = 5$. 4. $y = -x^4 + 2x^2$. *Отв.* $y_{\max} = 1$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. 5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = -14$ при $x = \pm 2$. 6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. *Отв.* $y_{\max}$ при $x = -4$ и $x = 3$, $y_{\min}$ при $x = -3$ и $x = 4$. 7. $y = 2 - (x - 1)^{\frac{2}{3}}$. *Отв.* $y_{\max} = 2$ при $x = 1$.
 8. $y = 3 - 2(x + 1)^{\frac{1}{3}}$. *Отв.* Нет ни $y_{\max}$, ни $y_{\min}$. 9. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x + 2}$. *Отв.* $y_{\min}$ при $x = \sqrt{2}$, $y_{\max}$ при $x = -\sqrt{2}$. 10. $y = \frac{(x - 2)(3 - x)}{x^2}$. *Отв.* $y_{\max}$ при $x = \frac{12}{5}$. 11. $y = 2e^x + e^{-x}$. *Отв.* $y_{\min}$ при $x = -\frac{\ln 2}{2}$. 12. $y = \frac{x}{\ln x}$.
Отв. $y_{\min} = e$ при $x = e$. 13. $y = \cos x + \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$. *Отв.* $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$. 14. $y = \sin 2x - x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$. *Отв.* $y_{\max}$ при $x = \frac{\pi}{6}$, $y_{\min}$ при $x = -\frac{\pi}{6}$. 15. $y = x + \operatorname{tg} x$. *Отв.* Нет ни $y_{\max}$, ни $y_{\min}$. 16. $y = e^x \sin x$.
Отв. $y_{\min}$ при $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$, $y_{\max}$ при $x = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$. 17. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
Отв. $y_{\max}$ при $x = 0$; два $y_{\min}$ при $x = -1$ и при $x = 1$. 18. $y = (x - 2)^3(2x + 1)$.
Отв. $y_{\min} \approx -8,24$ при $x = \frac{1}{8}$. 19. $y = x + \frac{1}{x}$. *Отв.* $y_{\min}$ при $x = 1$; $y_{\max}$ при $x = -1$. 20. $y = x^2(a - x)^2$. *Отв.* $y_{\max} = \frac{a^4}{16}$ при $x = \frac{a}{2}$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ и

- при $x=a$. 21. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$. *Отв.* $\max$ при $x = \frac{a^2}{a-b}$; $\min$ при $x = \frac{a^2}{a+b}$.
22. $y = x + \sqrt{1-x}$. *Отв.* $y_{\max} = 5/4$ при $x = 3/4$; $y_{\min} = -1$ при $x = -1$. 23. $y = x\sqrt{1-x}$ ($x \leq 1$). *Отв.* $y_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ при $x = \frac{2}{3}$. 24. $y = \frac{x}{1+x^2}$. *Отв.* $\min$ при $x = -1$; $\max$ при $x = 1$. 25. $y = x \ln x$. *Отв.* $\min$ при $x = 1/e$. 26. $y = x \ln^2 x$. *Отв.* $\max$ при $x = e^{-\frac{1}{2}}$; $\min$ при $x = 1$. 27. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Функция возрастает. 28. $y = \sin 3x - 3 \sin x$. *Отв.* $\min$ при $x = \pi/2$; $\max$ при $x = 3\pi/2$. 29. $y = 2x + \operatorname{arctg} x$. *Отв.* Нет экстремумов. 30. $y = \sin x \cos^2 x$. *Отв.* $\min$ при $x = \frac{\pi}{2}$; два $\max$: при $x = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ и при $x = \arccos \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$. 31. $y = \arcsin(\sin x)$. *Отв.* $\max$ при $x = \frac{(4m+1)\pi}{2}$; $\min$ при $x = \frac{(4m+3)\pi}{2}$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функции на указанных отрезках: 32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ ($-2 \leq x \leq 2$). *Отв.* Наибольшее значение

- $y = 2$ при $x = \pm 1$, наименьшее $y = -25$ при $x = \pm 2$. 33. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ ($-1 \leq x \leq 5$). *Отв.* Наибольшее значение $y = 23/3$ при $x = 5$, наименьшее значение $y = -13/3$ при $x = -1$. 34. $y = \frac{x-1}{x+1}$ ($0 \leq x \leq 4$). *Отв.* Наибольшее значение $y = 3/5$ при $x = 4$, наименьшее значение $y = -1$ при $x = 0$. 35. $y = \sin 2x - x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$). *Отв.* Наибольшее значение $y = \pi/2$ при $x = -\pi/2$, наименьшее значение $y = -\pi/2$ при $x = \pi/2$.

36. Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая разные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жести, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов? *Отв.* $a/6$.

37. Доказать, что из всех прямоугольников, которые могут быть вписаны в данный круг, наибольший периметр имеет квадрат. Показать также, что у квадрата и периметр будет наибольший.

38. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

39. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, имеющий гипотенузой отрезок h . *Отв.* Длина каждого катета равна $h/\sqrt{2}$.

40. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R . *Отв.* Высота равна $2R/\sqrt{3}$.

41. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который может быть вписан в данный шар радиуса R . *Отв.* Высота равна $R\sqrt{2}$.

42. Найти высоту прямого конуса с наименьшим объемом, описанного около данного шара радиуса R . *Отв.* Высота равна $4R$ (объем конуса равен двум объемам шара).

43. Резервуар, который должен иметь квадратное дно и быть открытым сверху, нужно выложить внутри свинцом. Каковы должны быть размеры

резервуара емкостью в 32 л, чтобы выкладка требовала наименьшего количества свинца? *Отв.* Высота 0,2 м, сторона основания 0,4 м (т. е. сторона основания должна быть вдвое больше высоты).

44. Кровельщик желает сделать открытый желоб наибольшей вместимости, у которого дно и бока были бы шириной 10 см и бока были бы одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть ширина желоба наверху? *Отв.* 20 см.

45. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раза больше радиуса основания.

46. Требуется изготовить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют данную толщину. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала? *Отв.* Если R — внутренний радиус основания, v — внутренний объем цилиндра,

то $R = \sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Требуется построить котел, состоящий из цилиндра, завершенного двумя полусферами, со стенками постоянной толщины так, чтобы при данном объеме v он имел наименьшую наружную поверхность. *Отв.* Котел должен

иметь форму шара с внутренним радиусом $R = \sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Построить равнобокую трапецию, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр; угол при основании трапеции равен α . *Отв.*

Длина боковой стороны равна $\sqrt{S/\sin \alpha}$.

49. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема. *Отв.* Высота призмы равна $2R/\sqrt{3}$.

50. Около полушара радиуса R требуется описать конус наименьшего объема; плоскость основания конуса совпадает с плоскостью основания полушара; найти высоту конуса. *Отв.* Высота конуса равна $R\sqrt{3}$.

51. Описать около данного цилиндра радиуса r прямой конус наименьшего объема, полагая, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. *Отв.* Радиус основания конуса равен $3r/2$.

52. Из листа, имеющего форму круга радиуса R , вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости. *Отв.* Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Из всех круглых цилиндров, вписанных в данный куб с ребром a таким образом, что оси их совпадают с диагональю куба, а окружности оснований касаются его граней, найти наибольшей по объему. *Отв.* Высота цилиндра равна $a\sqrt{3}/3$; радиус основания равен $a/\sqrt{6}$.

54. В прямоугольной системе координат дана точка (x_0, y_0) , лежащая в первом квадранте. Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала с положительными направлениями осей координат треугольник наименьшей площади. *Отв.* Прямая отсекает на осях отрезки $2x_0$ и $2y_0$, т. е. имеет

уравнение $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$.

55. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка на расстоянии a от вершины; найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой. *Отв.* $x = a - p$.

56. Принимая, что прочность бруска с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и кубу высоты, найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 см. *Отв.* Ширина равна 8 см.

57. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца надо послать гонца в военный лагерь, расположенный в 15 км,

считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега. Если гонец может делать пешком по 5 км в час, а на веслах по 4 км в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы поспеть в лагерь в кратчайшее время. *Отв.* В 3 км от лагеря.

58. Точка перемещается по плоскости в среде, расположенной вне линии MN со скоростью v_1 , а по линии MN со скоростью v_2 . По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B , расположенную на линии MN ? Расстояние точки A от линии MN равно h , расстояние проекции α точки A на линию MN от B равно a .

Отв. Если ACB — путь точки, то $\frac{aC}{AC} = \frac{v_1}{v_2}$ при $\frac{aB}{AB} \geq \frac{v_1}{v_2}$ и $aC = aB$ при $\frac{aB}{AB} < \frac{v_1}{v_2}$.

59. Груз w поднимают рычагом, причем сила F приложена к одному концу, а точка опоры находится на другом конце рычага. Если груз привешен к точке, находящейся на расстоянии a сантиметров от точки опоры, а стержень рычага весит γ граммов на каждый сантиметр длины, то какова должна быть длина рычага, чтобы сила, потребная для поднятия груза, была наименьшая? *Отв.* $x = \sqrt{2aw/\gamma}$ см.

60. При n измерениях неизвестной величины x получены отсчеты: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Показать, что сумма квадратов погрешностей $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ будет наименьшей, если за x принять число $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$.

61. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь, смачиваемая водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала превышает вдвое его высоту.

Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривых. 62. $y = x^5$. *Отв.* При $x < 0$ кривая выпукла; при $x > 0$ кривая вогнута; при $x = 0$ точка перегиба. 63. $y = 1 - x^2$. *Отв.* Кривая всюду выпукла. 64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. *Отв.* При $x = 1$ точка перегиба. 65. $y = (x - b)^3$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба. 66. $y = x^4$. *Отв.* Кривая всюду вогнута.

67. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. *Отв.* При $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ точка перегиба. 68. $y = \operatorname{tg} x$.

Отв. При $x = \pi$ точка перегиба. 69. $y = xe^{-x}$. *Отв.* При $x = 2$ точка перегиба. 70. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. *Отв.* При $x = b$ точка перегиба.

71. $y = a - \sqrt{(x - b)^2}$. *Отв.* Кривая не имеет точки перегиба.

Найти асимптоты следующих кривых: 72. $y = \frac{1}{x - 1}$. *Отв.* $x = 1$; $y = 0$.

73. $y = \frac{1}{(x + 2)^n}$. *Отв.* $x = -2$; $y = 0$. 74. $y = c + \frac{a^3}{(x - b)^3}$. *Отв.* $x = b$,

$y = c$. 75. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. *Отв.* $x = 0$; $y = 0$. 76. $y = \ln x$. *Отв.* $x = 0$.

77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. *Отв.* $y = x + 2$. 78. $y^3 = a^3 - x^3$. *Отв.* $y + x = 0$.

79. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Отв.* $x = 2a$. 80. $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. *Отв.* $x = 2a$, $y = \pm (x + a)$.

Исследовать функции и построить их графики: 81. $y = x^4 - 2x + 10$.

82. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$. 83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y = \frac{6x}{1+x^2}$. 85. $y = \frac{4+x}{x^2}$.
 86. $y = \frac{x}{x^2-1}$. 87. $y = \frac{x+2}{x^3}$. 88. $y = \frac{x^2}{1+x}$. 89. $y^2 = x^3 - x$.
 90. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$. 91. $y = \sqrt[3]{x^3+2}$. 92. $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$. 93. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
 94. $y = xe^{-x}$. 95. $y = x^2e^{-x^2}$. 96. $y = x - \ln(x+1)$. 97. $y = \ln(x^2+1)$.
 98. $y = \sin 3x$. 99. $y = x + \sin x$. 100. $y = x \sin x$. 101. $y = e^{-x} \sin x$.
 102. $y = \ln \sin x$. 103. $y = \frac{\ln x}{x}$. 104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$ 105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$
 106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Дополнительные задачи

- Найти асимптоты линий: 108. $y = \frac{x^2+1}{1+x}$. *Омс.* $x = -1$; $y = x - 1$.
 109. $y = x + e^{-x}$. *Омс.* $y = x$. 110. $2y(x+1)^2 = x^3$. *Омс.* $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$.
 111. $y^3 = a^3 - x^3$. *Омс.* $x + y = 0$. 112. $y = e^{-2x} \sin x$. *Омс.* $y = 0$. 113. $y = e^{-x} \sin 2x + x$. *Омс.* $y = x$. 114. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. *Омс.* $x = -\frac{1}{e}$;
 $y = x + \frac{1}{e}$. 115. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Омс.* $x = 0$; $y = x$. 116. $x = \frac{2t}{1-t^2}$,
 $y = \frac{t^2}{1-t^2}$. *Омс.* $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

- Исследовать функции и построить их графики: 117. $y = |x|$.
 118. $y = \ln |x|$. 119. $y^2 = x^3 - x$. 120. $y = (x+1)^2(x-2)$. 121. $y = x + |x|$.
 122. $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$. 123. $y = x^2 \sqrt{x+1}$. 124. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$. 125. $y = \frac{x^2}{2} \ln x$.
 126. $y = \frac{1}{e^x - 1}$. 127. $y = \frac{x}{\ln x}$. 128. $y = x + \frac{\ln x}{x}$. 129. $y = x \ln x$.
 130. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. 131. $y = |\sin 3x|$. 132. $y = \frac{\sin x}{x}$. 133. $y = x \operatorname{arctg} x$.
 134. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$. 135. $y = e^{-2x} \sin 3x$. 136. $y = |\sin x| + x$.
 137. $y = \sin(x^2)$. 138. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$.

ГЛАВА VI

КРИВИЗНА КРИВОЙ

§ 1. Длина дуги и ее производная

Пусть дуга кривой M_0M (рис. 136) есть график функции $y=f(x)$, определенной на интервале (a, b) . Определим длину дуги кривой. Возьмем на кривой AB точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M$. Соединив взятые точки, получим ломаную линию $M_0M_1M_2\dots M_{i-1}M_i\dots M_{n-1}M$, вписанную в дугу M_0M . Обозначим длину этой ломаной через P_n .

Длиной дуги M_0M называется предел (обозначим его через s), к которому стремится длина ломаной, при стремлении к нулю наибольшей из длин отрезков ломаной $M_{i-1}M_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек ломаной $M_0M_1M_2\dots M_{i-1}M_i\dots M_{n-1}M$.

Отметим, что это определение длины дуги произвольной кривой аналогично определению длины окружности.

В главе XII будет доказано, что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то дуга кривой $y=f(x)$, заключенная между точками $[a; f(a)]$ и $[b; f(b)]$, имеет вполне определенную длину, причем будет указан способ вычисления этой длины. Там же будет установлено (как следствие), что в указанных условиях отношение длины любой дуги этой кривой к длине стягивающей ее хорды стремится к 1, когда длина хорды стремится к 0:

$$\lim_{M_0M \rightarrow 0} \frac{\text{дл. } \overline{M_0M}}{\text{дл. } M_0M} = 1.$$

Эта теорема легко может быть доказана для окружности*), однако в общем случае мы пока примем ее без доказательства.

*) Рассмотрим дугу AB , центральный угол которой равен 2α (рис. 137). Длина этой дуги равна $2R\alpha$ (R — радиус окружности), а длина стягивающей ее хорды равна $2R \sin \alpha$. Поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{дл. } \overline{AB}}{\text{дл. } AB} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2R\alpha}{2R \sin \alpha} = 1.$$

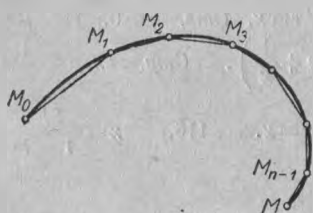


Рис. 136.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть мы имеем на плоскости кривую, заданную уравнением

$$y = f(x).$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка кривой,

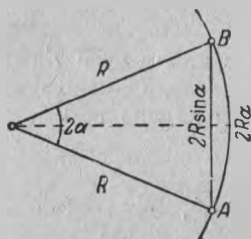


Рис. 137.

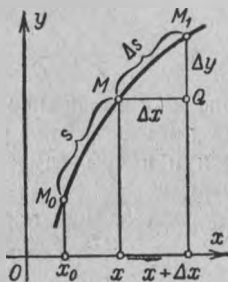


Рис. 138.

а $M(x, y)$ — переменная точка этой кривой. Обозначим через s длину дуги M_0M (рис. 138).

При изменении абсциссы x точки M длина s дуги будет меняться, т. е. s есть функция x . Найдем производную s по x .

Дадим x приращение Δx . Тогда дуга s получит приращение $\Delta s = \text{дл. } \overline{MM_1}$. Пусть $\overline{MM_1}$ — хорда, стягивающая эту дугу. Для того чтобы найти $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$, поступим следующим образом: из $\triangle MM_1Q$ находим:

$$\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Помножим и разделим левую часть на Δs :

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} \right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Разделим все члены равенства на Δx^2 :

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} \right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2.$$

Найдем предел левой и правой частей при $\Delta x \rightarrow 0$. Учитывая, что

$\lim_{\overline{MM_1} \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ и что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

или

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (1)$$

Для дифференциала дуги получим следующее выражение:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

или *)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2')$$

Мы получили выражение дифференциала длины дуги для того случая, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$. Однако формула (2') сохраняется и в том случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями.

Если кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt,$$

и выражение (2') принимает вид

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

§ 2. Кривизна

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности, изогнутости.

Пусть мы имеем кривую, которая не пересекает самое себя и имеет определенную касательную в каждой точке. Проведем касательные к кривой в каких-нибудь двух ее точках A и B и обозначим через α угол, образованный этими касательными, или — точнее — угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B (рис. 139). Этот угол называется *углом смежности* дуги AB . У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности больше (рис. 139 и 140).

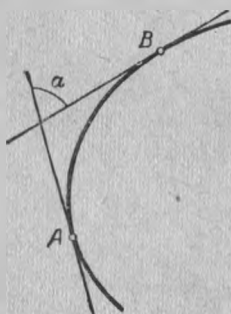


Рис. 139.

С другой стороны, рассматривая дуги различной длины, мы не можем оценить степень их искривленности только соответствующим углом смежности. Отсюда следует, что полной характеристикой изогнутости кривой будет отношение

угла смежности к длине соответствующей дуги.

*) Строго говоря, формула (2') верна лишь для того случая, когда $dx > 0$. Если же $dx < 0$, то $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Поэтому, в общем случае эту формулу правильнее записать так: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Определение 1. Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ дуги $\widehat{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\widehat{AB}}.$$

Для одной и той же кривой средняя кривизна ее различных частей (дуг) может быть различной; так, например, для кривой, показанной на рисунке 141, средняя кривизна дуги $\widehat{AB}$ не равна средней кривизне дуги $\widehat{A_1B_1}$, хотя длины этих дуг равны между собой. Более того, вблизи различных точек кривая

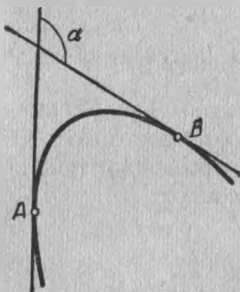


Рис. 140.

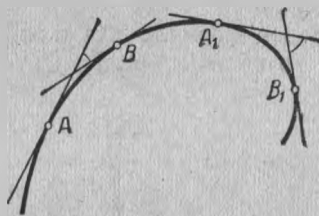


Рис. 141.

искривлена по-разному. Для того чтобы охарактеризовать степень искривленности данной линии в непосредственной близости к данной точке A , введем понятие кривизны кривой в данной точке.

Определение 2. Кривизной K_A линии в данной точке A называется предел средней кривизны дуги $\widehat{AB}$, когда длина этой дуги стремится к нулю (т. е. когда точка B приближается *) к точке A):

$$K_A = \lim_{B \rightarrow A} K_{\text{ср}} = \lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\widehat{AB}}.$$

Пример. Для окружности радиуса r : 1) определить среднюю кривизну дуги $\widehat{AB}$, соответствующей центральному углу α (рис. 142); 2) определить кривизну в точке A .

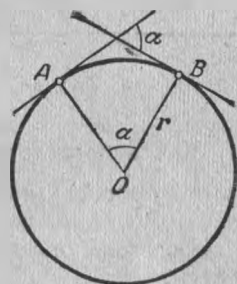


Рис. 142.

Решение. 1) Очевидно, что угол смежности дуги $\widehat{AB}$ равен α , длина дуги равна αr . Следовательно,

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\alpha r},$$

или

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{r}.$$

*) Мы предполагаем, что величина предела не зависит от того, с какой стороны от точки A мы берем переменную точку B на кривой.

2) Кривизна в точке A равна

$$K = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, средняя кривизна дуги окружности радиуса r не зависит от длины и положения дуги, для всех дуг она равна $\frac{1}{r}$. Кривизна окружности в любой ее точке также не зависит от выбора этой точки и равна $\frac{1}{r}$.

Замечание. Отметим, что для произвольной кривой кривизна в различных ее точках, вообще говоря, будет различная. Это мы увидим ниже.

§ 3. Вычисление кривизны

Выведем формулу для вычисления кривизны данной линии в любой ее точке $M(x, y)$. При этом мы будем предполагать, что кривая задана в декартовой системе координат уравнением вида

$$y = f(x) \quad (1)$$

и что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Проведем касательные к кривой в точках M и M_1 с абсциссами x и $x + \Delta x$ и обозначим через φ и $\varphi + \Delta\varphi$ углы наклона этих касательных (рис. 143).

Длину дуги $\widehat{M_0M}$, отсчитываемую от некоторой постоянной точки M_0 , обозначим через s ; тогда $\Delta s = \widehat{M_0M_1} - \widehat{M_0M}$, а $|\Delta s| = \widehat{MM_1}$.

Как непосредственно видно из рис. 143, угол смежности, соответствующий дуге $\widehat{MM_1}$, равен абсолютной величине *) разности углов φ и $\varphi + \Delta\varphi$, т. е. равен $|\Delta\varphi|$.

Согласно определению средней кривизны кривой на участке MM_1 имеем:

$$K_{\text{ср}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Чтобы получить кривизну в точке M , нужно найти предел полученного выражения при условии, что длина дуги $\widehat{MM_1}$ стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

*) Для кривой, изображенной на рисунке 143, очевидно, что $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, так как $\Delta\varphi > 0$.

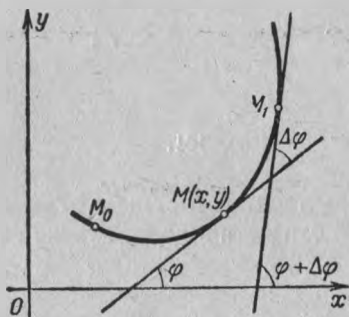


Рис. 143.

Так как величины φ и s обе зависят от x (являются функциями от x), то, следовательно, φ можно рассматривать как функцию от s . Мы можем считать, что эта функция задана параметрически с помощью параметра x . Тогда

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

и, следовательно,

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|. \quad (2)$$

Для вычисления $\frac{d\varphi}{ds}$ используем формулу дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Чтобы выразить производную $\frac{d\varphi}{dx}$ через функцию $y = f(x)$, замечаем, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ и, следовательно,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Что же касается производной $\frac{ds}{dx}$, то еще в § 1 гл. VI мы нашли

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

или, так как $K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$, окончательно получаем:

$$K = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (3)$$

Следовательно, в любой точке кривой, где существует и непрерывна вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2}$, можно вычислить кривизну. Для ее вычисления служит формула (3). Заметим, что при вычислении кривизны кривой следует брать только арифметическое (т. е. положительное) значение корня в знаменателе, так как кривизна линии по определению не может быть отрицательной.

Пример 1. Определить кривизну параболы $y^2 = 2px$:

а) в ее произвольной точке $M(x, y)$;

б) в точке $M_1(0, 0)$;

в) в точке $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции $y = \sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), получим:

$$\text{а) } K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}};$$

$$\text{б) } K_{x=0, y=0} = \frac{1}{p};$$

$$\text{в) } K_{x=\frac{p}{2}, y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

Пример 2. Определить кривизну прямой $y = ax + b$ в ее произвольной точке (x, y) .

Решение.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

Обращаясь к формуле (3), получаем:

$$K = 0.$$

Таким образом, прямая представляет собой «линию нулевой кривизны». Этот же результат легко можно получить непосредственно из определения кривизны.

§ 4. Вычисление кривизны линии, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тогда (см. § 24 гл. III):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3) предыдущего параграфа, получаем:

$$K = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

Пример. Определить кривизну циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в ее произвольной точке (x, y) .

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), находим:

$$K = \frac{|a(1 - \cos t) a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}{|a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t|^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2} a (1 - \cos t)^{1/2}} = \frac{1}{2^{3/2} a (1 - \cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}.$$

§ 5. Вычисление кривизны линии, заданной уравнением в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением вида

$$\varrho = f(\theta). \quad (1)$$

Напишем формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \cos \theta, \\ y &= \varrho \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если в эти формулы подставить вместо ϱ его выражение через θ , т. е. $f(\theta)$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Последние уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой (1), причем параметром является θ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{d\varrho}{d\theta} \cos \theta - \varrho \sin \theta, & \frac{dy}{d\theta} &= \frac{d\varrho}{d\theta} \sin \theta + \varrho \cos \theta, \\ \frac{d^2x}{d\theta^2} &= \frac{d^2\varrho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\varrho}{d\theta} \sin \theta - \varrho \cos \theta, \\ \frac{d^2y}{d\theta^2} &= \frac{d^2\varrho}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{d\varrho}{d\theta} \cos \theta - \varrho \sin \theta. \end{aligned}$$

Подставляя последние выражения в формулу (1) предыдущего параграфа, получаем формулу для вычисления кривизны кривой в полярных координатах:

$$K = \frac{|\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''|}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Пример. Определить кривизну спирали Архимеда $\rho = a\theta$ ($a > 0$) в произвольной точке (рис. 144).

Решение.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0.$$

Следовательно,

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}.$$

Заметим, что при больших значениях θ имеют место приближенные равенства: $\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2} \approx 1$, $\frac{\theta^2 + 1}{\theta^2} \approx 1$; поэтому, заменяя в предыдущей формуле

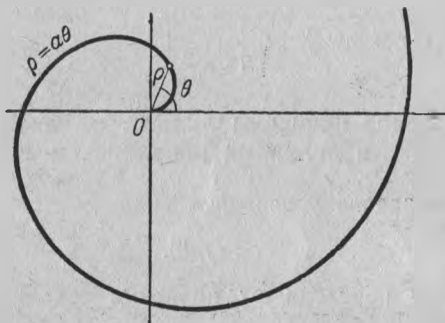


Рис. 144.

$\theta^2 + 2$ на θ^2 и $\theta^2 + 1$ на θ^2 , получаем приближенную формулу (для больших значений θ):

$$K \approx \frac{1}{a} \frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

Таким образом, при больших значениях θ спираль Архимеда имеет приблизительно ту же кривизну, что и окружность радиуса $a\theta$.

§ 6. Радиус и круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Определение. Величина R , обратная кривизне K линии в данной точке M , называется *радиусом кривизны* этой линии в рассматриваемой точке:

$$R = \frac{1}{K}, \quad (1)$$

или

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \quad (2)$$

Построим в точке M нормаль к кривой (рис. 145), направленную в сторону вогнутости кривой, и отложим на этой нормали отрезок MC , равный радиусу R кривизны кривой в точке M . Точка C называется *центром кривизны* данной кривой в точке M , круг радиуса R с центром в точке C (проходящей через точку M) называется *кругом кривизны* данной кривой в точке M .

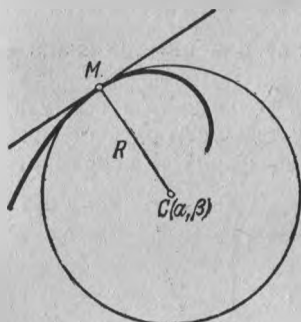


Рис. 145.

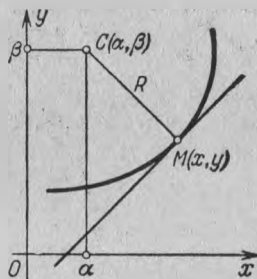


Рис. 146.

Из определения круга кривизны следует, что в данной точке кривизна кривой и кривизна круга кривизны равны между собой. Выведем формулы, определяющие координаты центра кривизны. Пусть кривая задана уравнением

$$y = f(x). \quad (3)$$

Зафиксируем на кривой точку $M(x, y)$ и определим координаты α и β центра кривизны, соответствующего этой точке (рис. 146). Для этого напомним уравнение нормали к кривой в точке M :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \quad (4)$$

(Здесь X и Y — текущие координаты точки нормали.)

Так как точка $C(\alpha, \beta)$ лежит на нормали, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4):

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \quad (5)$$

Далее, точка $C(\alpha, \beta)$ находится от точки $M(x, y)$ на расстоянии, равном радиусу кривизны R :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), определим α и β :

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2,$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

отсюда

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} R,$$

а так как $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, то

$$\alpha = x \pm \frac{y' (1+y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1+y'^2}{|y''|}.$$

Чтобы решить вопрос о том, верхние или нижние знаки следует брать в последних формулах, нужно рассмотреть случай $y'' > 0$ и случай $y'' < 0$. Если $y'' > 0$, то в этой точке кривая вогнута и, следовательно, $\beta > y$ (рис. 146) и потому следует брать нижние знаки. Учитывая, что в этом случае $|y''| = y''$, формулы координат центра кривизны будут:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y' (1+y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Аналогичным образом можно показать, что формулы (7) будут справедливы и в случае $y'' < 0$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то координаты центра кривизны легко получить из формул (7), подставляя в них вместо y' и y'' их выражения через параметр

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^2_t}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y' (x'^2_t + y'^2_t)}{x'_t y''_t - x''_t y'_t}, \\ \beta &= y + \frac{x'_t (x'^2_t + y'^2_t)}{x'_t y''_t - x''_t y'_t}. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Пример 1. Определить координаты центра кривизны параболы

$$y^2 = 2px$$

а) в произвольной точке $M(x, y)$; б) в точке $M_0(0, 0)$; в) в точке $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Решение. Подставляя значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в формулы (7), получим (рис. 147):

$$\text{а) } \alpha = 3x + p, \quad \beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}};$$

$$\text{б) при } x=0 \text{ находим: } \alpha=p, \quad \beta=0;$$

$$\text{в) при } x=\frac{p}{2} \text{ имеем: } \alpha=\frac{5p}{2}, \quad \beta=-p.$$

Если в точке $M_1(x, y)$ данной линии кривизна отлична от нуля, то этой точке соответствует вполне определенный центр кривизны $C_1(\alpha, \beta)$. Совокупность всех центров кривизны данной линии образует некоторую новую линию, называемую *эволютой* по отношению к первой.

Таким образом, геометрическое место центров кривизны данной линии называется ее *эволютой*. По отношению к своей эволюте данная линия называется *эвольвентой* или *инволютой* (или *разверткой*).

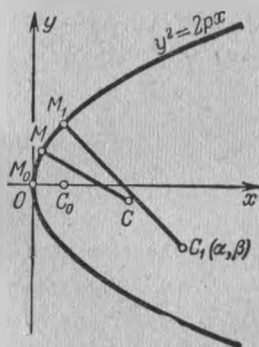


Рис. 147.

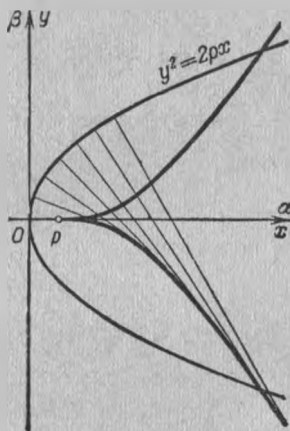


Рис. 148.

Если данная кривая определяется уравнением $y = f(x)$, то уравнения (7) можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты с параметром x . Исключая из этих уравнений параметр x (если это возможно), получим непосредственную зависимость между текущими координатами эволюты α и β . Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то уравнения (7') дают параметрические уравнения эволюты (так как величины x , y , x' , y' , x'' , y'' являются функциями от t).

Пример 2. Найти уравнение эволюты параболы

$$y^2 = 2px.$$

Решение. На основании примера 1 имеем для любой точки (x, y) параболы:

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Исключая из этих уравнений параметр x , получим:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p} (\alpha - p)^3.$$

Это — уравнение полукубической параболы (рис. 148).

Пример 3. Найти уравнение эволюты эллипса, заданного параметрическими уравнениями:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Решение. Вычисляем производные от x и y по t :

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t, & y' &= b \cos t; \\ x'' &= -a \cos t, & y'' &= -b \sin t. \end{aligned}$$

Подставляя выражения производных в формулы (7'), получим:

$$\begin{aligned} \alpha &= a \cos t - \frac{b \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \\ &= a \cos t - a \cos t \sin^2 t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \cos^3 t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \cos^3 t.$$

Аналогично получаем:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b} \right) \sin^3 t.$$

Исключив параметр t , получаем уравнение эволюты эллипса в виде

$$\left(\frac{\alpha}{b} \right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a} \right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{2/3}.$$

Здесь α и β — текущие координаты эволюты (рис. 149).

Пример 4. Найти параметрические уравнения эволюты циклоиды

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - \cos t); & y' &= a \sin t; \\ x'' &= a \sin t; & y'' &= -a \cos t. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в формулу (7'), находим:

$$\begin{aligned} \alpha &= a(t + \sin t), \\ \beta &= -a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Сделаем преобразование переменных, положив

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi - \pi a, \\ \beta &= \eta - 2a, \\ t &= \tau - \pi; \end{aligned}$$

тогда уравнения эволюты примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= a(\tau - \sin \tau), \\ \eta &= a(1 - \cos \tau); \end{aligned}$$

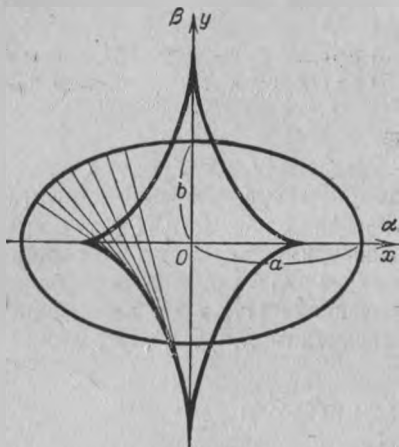


Рис. 149.

они определяют в координатах ξ, η циклоиду с тем же производящим кругом радиуса a . Таким образом, эволютой циклоиды является такая же циклоида, но

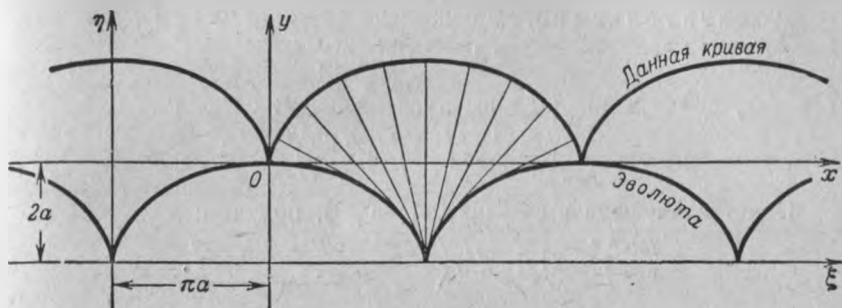


Рис. 150.

смещенная по оси Ox на величину $-\pi a$ и по оси Oy на величину $-2a$ (рис. 150).

§ 7. Свойства эволюты

Теорема 1. *Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.*

Доказательство. Угловой коэффициент касательной к эволюте, определяемой параметрическими уравнениями (7') предыдущего параграфа, равен

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{dx}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}}.$$

Заметив, что [в силу тех же уравнений (7')]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2y'^2 - y'y'''' - y'^2y''''}{y'^2} = -y' \frac{3y'y'' - y'''' - y'^2y''''}{y'^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{3y''y' - y'''' - y'^2y''''}{y'^2}, \quad (2)$$

получаем соотношение

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Но y' есть угловой коэффициент касательной к кривой в соответствующей точке, поэтому из полученного соотношения следует, что касательная к кривой и касательная к ее эволюте в соответствующей точке взаимно перпендикулярны, т. е. нормаль к кривой является касательной к эволюте.

Теорема 2. *Если на некотором участке M_1M_2 кривой радиус кривизны изменяется монотонно (т. е. либо только возрастает, либо только убывает), то приращение длины дуги эволюты на*

этом участке кривой равно (по абсолютной величине) соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.

Доказательство. На основании формулы (2') § 1 гл. VI имеем:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

где ds — дифференциал длины дуги эволюты; отсюда

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Подставляя сюда выражения (1) и (2), получим:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y'''' - y'^2 y''''}{y''^2} \right)^2. \quad (3)$$

Найдем, далее, $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Так как

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{y''}, \text{ то } R^2 = \frac{(1 + y'^2)}{y''^2}.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, получим после соответствующих преобразований

$$2R \frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)(3y'y''^2 - y'''' - y'^2 y''')}{(y''^2)^3}.$$

Деля обе части равенства на $2R = \frac{2(1 + y'^2)^{1/2}}{y''}$, получим:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2} (3y'y''^2 - y'''' - y'^2 y''')}{y''^3}.$$

Возводя в квадрат, получим:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y'''' - y'^2 y'''}{y''^3} \right)^2. \quad (4)$$

Сравнивая равенства (3) и (4), находим:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

По условию $\frac{dR}{dx}$ не меняет знак (R только возрастает или только убывает), следовательно, и $\frac{ds}{dx}$ не меняет знак. Примем для определенности $\frac{dR}{dx} \leq 0$, $\frac{ds}{dx} \geq 0$ (что соответствует рис. 151). Следовательно,

$$\frac{dR}{dx} = - \frac{ds}{dx}.$$

Пусть точка M_1 имеет абсциссу x_1 , а M_2 — абсциссу x_2 . Применим теорему Коши к функциям $s(x)$ и $R(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

где ξ — число, заключенное между x_1 и x_2 ($x_1 < \xi < x_2$).

Введем обозначения (рис. 151):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Тогда $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, или $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Но это значит, что

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

Совершенно так же доказывается это равенство и при возрастании радиуса кривизны.

Мы доказали теоремы 1 и 2 для того случая, когда кривая задана уравнением в явном виде $y = f(x)$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то эти

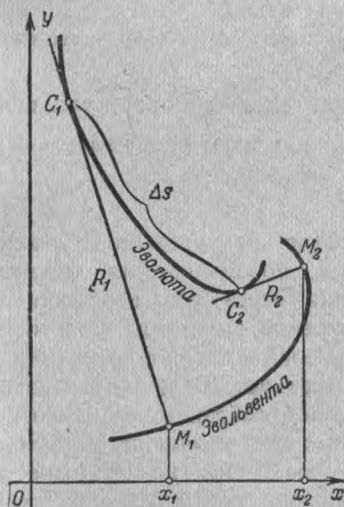


Рис. 151.

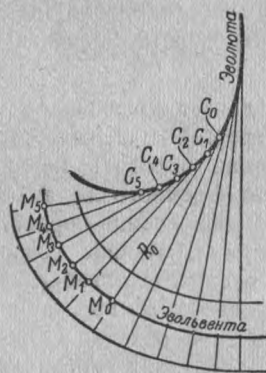


Рис. 152.

теоремы остаются в силе, причем их доказательство проводится совершенно аналогично.

Замечание. Укажем следующий простой механический способ для построения кривой (эвольвенты) по ее эволюте.

Пусть гибкая линейка согнута по форме эволюты C_0C_5 (рис. 152). Предположим, что нерастяжимая нить, одним концом укрепленная

в точке C_0 , огибает эту линейку. Если мы будем эту нить развевать, оставляя ее все время натянутой, то конец нити опишет кривую $M_0 M_0$ — эвольвенту. Отсюда происходит и название «эвольвента» — развертка. Доказательство того, что полученная кривая действительно является эвольвентой, может быть проведено с помощью установленных выше свойств эволюты.

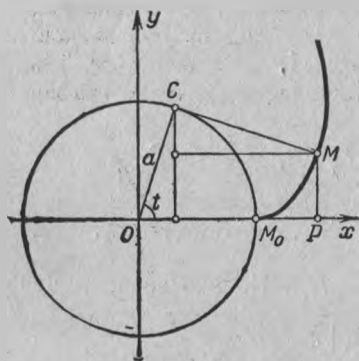


Рис. 153.

Отметим, что одной эволюте соответствует бесчисленное множество различных эвольвент (рис. 152).

Пример. Пусть имеем окружность радиуса a (рис. 153). Возьмем ту из эвольвент этой окружности, которая проходит через точку $M_0(a, 0)$.

Учитывая, что $CM = CM_0 = at$, легко получить уравнения эвольвенты окружности:

$$\begin{aligned} OP = x &= a(\cos t + t \sin t), \\ PM = y &= a(\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Отметим, что профиль зуба зубчатого колеса имеет чаще всего форму эвольвенты круга.

§ 8. Приближенное вычисление действительных корней уравнения

Методы исследования поведения функции дают возможность находить приближенные значения корней уравнения

$$f(x) = 0.$$

Если данное уравнение есть алгебраическое уравнение *) первой, второй, третьей или четвертой степени, то существуют формулы, позволяющие выразить корни уравнения через его коэффициенты с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Для уравнений выше четвертой степени таких формул, вообще говоря, не существует. Если коэффициенты любого уравнения, алгебраического или неалгебраического (трансцендентного) не буквенные, а числовые, то корни уравнения могут быть вычислены приближенно с любой степенью точности. Отметим, что даже в тех случаях, когда корни алгебраического уравнения выражаются через радикалы, на практике иногда целесообразно применять приближенный метод решения уравнения. Ниже будут изложены некоторые методы приближенного вычисления корней уравнения.

1. Способ хорд. Пусть дано уравнение (1)

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — непрерывная дважды дифференцируемая функция на отрезке

*) Уравнение $f(x) = 0$ называется алгебраическим, если $f(x)$ есть многочлен (см. § 6 гл. VII).

$[a, b]$. Допустим, что путем исследования функции $y=f(x)$ внутри отрезка $[a, b]$ мы выделим отрезок $[x_1, x_2]$ такой, что внутри этого отрезка функция — монотонная (или возрастающая, или убывающая), а на концах его — значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разных знаков. Примем для определенности, что $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (рис. 154). Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, то ее график пересечет ось Ox в какой-либо одной точке между x_1 и x_2 .

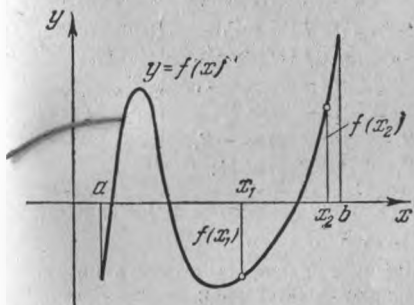


Рис. 154.

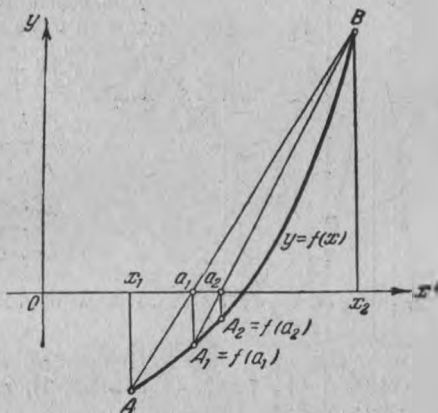


Рис. 155.

Проведем хорду AB , соединяющую концы кривой $y=f(x)$, соответствующие абсциссам x_1 и x_2 . Абсцисса a_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и будет приближенным значением корня (рис. 155). Для разыскания этого приближенного значения напомним уравнение прямой AB , проходящей через две данные точки $A[x_1, f(x_1)]$ и $B[x_2, f(x_2)]$: $\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Так как $y=0$ при $x=a_1$, то, следовательно, $\frac{-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{a_1-x_1}{x_2-x_1}$, откуда

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}. \quad (2)$$

Чтобы получить более точное значение корня, определяем $f(a_1)$. Если $f(a_1) < 0$, то повторяем тот же прием, применяя формулу (2) к отрезку $[a_1, x_2]$. Если $f(a_1) > 0$, то применяем эту формулу к отрезку $[x_1, a_1]$. Повторяя этот прием несколько раз, мы будем, очевидно, получать все более точные значения корня a_2, a_3 и т. д.

Пример 1. Найти приближенные значения корней уравнения

$$f(x) = x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Решение. Найдем, прежде всего, участки монотонности функции $f(x)$. Вычислив производную $f'(x) = 3x^2 - 6$, мы обнаруживаем, что она положи-

тельна при $x < -\sqrt{2}$, отрицательна при $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ и снова положительна при $x > \sqrt{2}$ (рис. 156). Итак, функция имеет три участка монотонности, на каждом из которых находится по одному корню.

Для удобства дальнейших вычислений сузим эти участки монотонности (но так, чтобы на каждом участке лежал бы соответствующий корень). Для этого, подставляя в выражение $f(x)$ наугад те или иные значения x , выделим внутри каждого участка монотонности такие более короткие отрезки, на концах которых функция имеет разные знаки:

$$\begin{array}{ll} x_1=0, & f(0)=2, \\ x_2=1, & f(1)=-3, \\ x_3=-3, & f(-3)=-7, \\ x_4=-2, & f(-2)=6, \\ x_5=2, & f(2)=-2, \\ x_6=3, & f(3)=11. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\}$$

Таким образом, корни находятся в интервалах $(0; 1)$, $(-3; -2)$, $(2; 3)$.

Найдем приближенное значение корня в интервале $(0; 1)$; по формуле (2) имеем:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0) \cdot 2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Так как $f(0,4) = 0,4^3 - 6 \cdot 0,4 + 2 = -0,336$, $f(0)=2$, то, следовательно, корень заключен между 0 и 0,4. Применяя к этому интервалу снова формулу (2), получим следующее приближение:

$$a_2 = 0 - \frac{(0,4-0) \cdot 2}{-0,336-2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342 \text{ и т. д.}$$

Аналогичным образом найдем приближенные значения корней в других интервалах.

2. Способ касательных (способ Ньютона). Пусть снова $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, причем на отрезке $[x_1, x_2]$ первая производная не меняет своего знака. Тогда в интервале (x_1, x_2) имеется один корень уравнения $f(x)=0$. Предположим еще, что и вторая производная не меняет своего знака на отрезке $[x_1, x_2]$; этого можно добиться путем уменьшения длины интервала, содержащего корень.

Сохранение знака второй производной на отрезке $[x_1, x_2]$ означает, что кривая либо только выпукла, либо только вогнута на участке $[x_1, x_2]$.

Проведем касательную к кривой в точке B (рис. 157). Абсцисса a_1 точки пересечения касательной с осью Ox будет приближенным значением корня. Чтобы найти эту абсциссу, напишем уравнение касательной в точке B :

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

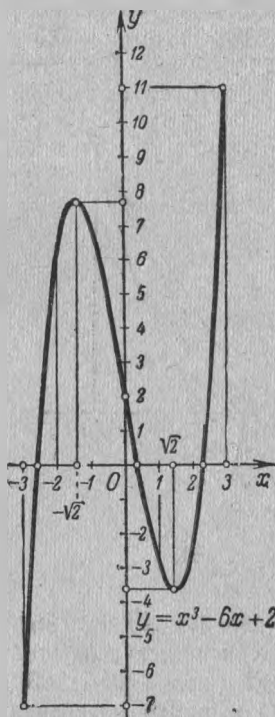


Рис. 156.

Заметив, что $x = a_1$ при $y = 0$, получим:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3)$$

Проведя затем касательную в точке B_1 , аналогично находим более точное значение корня a_2 . Повторяя этот прием несколько раз, мы можем вычислить приближенное значение корня с любой нужной нам точностью.

Отметим следующее обстоятельство. Если бы мы провели касательную к кривой не в точке B , а в точке A , то могло оказаться, что точка пересечения касательной с осью Ox находится вне интервала (x_1, x_2) .

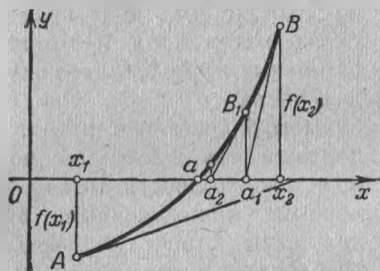


Рис. 157.

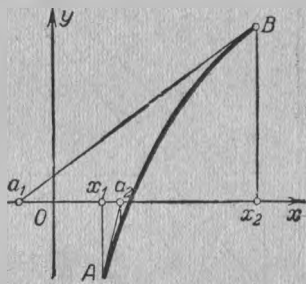


Рис. 158.

Из рисунков 157 и 158 следует, что касательную нужно проводить в том конце дуги, в котором знаки функции и ее второй производной совпадают. Так как на отрезке $[x_1, x_2]$ вторая производная, по условию, сохраняет знак, то это совпадение знаков функции и второй производной на одном из концов обязательно имеет место. Это правило остается верным и для случая, когда $f''(x) < 0$. Если касательная проводится в левом конце интервала, то в формуле (3) вместо x_2 нужно подставить x_1 :

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3')$$

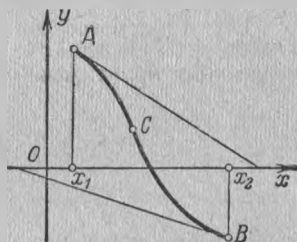


Рис. 159.

В случае, когда внутри интервала (x_1, x_2) есть точка перегиба C , то способ касательных может дать приближенное значение корня, лежащее вне интервала (x_1, x_2) (рис. 159).

Пример 2. Применим формулу (3) к вычислению корня уравнения

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

заключенного в интервале $(0; 1)$. Имеем:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6)|_{x=0} = -6,$$

поэтому по формуле (3) получаем:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0,333.$$

3. Комбинированный способ (рис. 160). Применяя на отрезке $[x_1, x_2]$ одновременно способ хорд и способ касательных, мы получаем две точки a_1 и $\bar{a}_1$, лежащие по разные стороны от искомого корня a (так как $f(a_1)$ и $f(\bar{a}_1)$ имеют разные знаки). Далее, на отрезке $[a_1, \bar{a}_1]$ применяем снова метод хорд и метод касательных. В результате получаем два числа: a_2 и $\bar{a}_2$, еще более близких к значению корня. Продолжаем таким образом до тех пор, пока разность между найденными приближенными значениями не станет меньше, чем требуемая степень точности. Заметим, что при комбинированном методе мы приближаемся к искомому корню одновременно с обеих

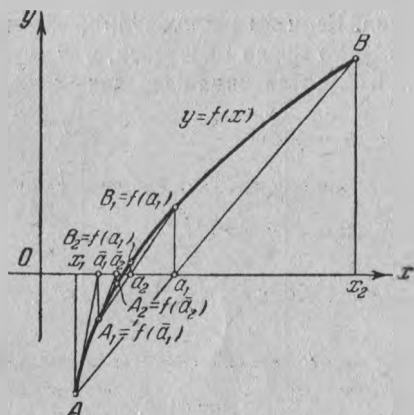


Рис. 160.

сторон (т. е. мы находим одновременно как приближенное значение корня с избытком, так и приближенное значение корня с недостатком).

Так, в рассмотренном нами примере путем подстановки убеждаемся, что $f(0,333) > 0$, $f(0,342) < 0$. Следовательно, значение корня заключено между найденными приближенными значениями: $0,333 < x < 0,342$.

Упражнения к главе VI

Найти кривизну кривых в указанных точках: 1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$. *Омс.* b/a^2 в точке $(0, b)$; a/b^2 в точке $(a, 0)$. 2. $xy = 12$ в точке $(3, 4)$. *Омс.* $24/125$. 3. $y = x^2$ в точке (x_1, y_1) .

Омс. $\frac{6x_1}{(1+9x_1^2)^{3/2}}$. 4. $16y^2 = 4x^4 - x^6$ в точке $(2, 0)$. *Омс.* $\frac{1}{2}$. 5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

в произвольной точке. *Омс.* $\frac{1}{3}(axy)^{\frac{1}{3}}$.

Найти радиус кривизны нижеследующих кривых в указанных точках; вычертить каждую кривую и построить соответствующий круг кривизны. 6. $y^2 = x^3$ в точке $(4, 8)$. *Омс.* $R = 80\sqrt{10}/3$. 7. $x^2 = 4ay$ в точке $(0, 0)$.

Омс. $R = 2a$. 8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ в точке (x_1, y_1) . *Омс.* $R = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{3/2}}{a^4b^4}$.

9. $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$. *Отв.* $R = 2\sqrt{2}$. 10. $y = \sin x$ в точке $(\pi/2, 1)$.

Отв. $R = 1$. 11. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$ при $t = t_1$. *Отв.* $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

Найти радиус кривизны кривых: 12. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ при $t = 1$. *Отв.* $R = 6$.

13. Окружность $\varrho = a \sin \theta$. *Отв.* $R = a/2$. 14. Спираль Архимеда $\varrho = a\theta$.

Отв. $R = \frac{(\varrho^2 + a^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2a^2}$. 15. Кардиоида $\varrho = a(1 - \cos \theta)$. *Отв.* $R = \frac{2}{3} \sqrt{2a\varrho}$.

16. Лемниската $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$. *Отв.* $R = \frac{a^2}{3\varrho}$. 17. Парабола $\varrho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$.

Отв. $R = 2a \sec^3 \frac{\theta}{2}$. 18. $\varrho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$. *Отв.* $R = \frac{3}{4} a \sin^2 \frac{\theta}{3}$.

Найти точки кривых, в которых радиус кривизны имеет наименьшее значение: 19. $y = \ln x$. *Отв.* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \ln 2\right)$. 20. $y = e^x$. *Отв.* $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. *Отв.* $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. 22. $y = a \ln \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. *Отв.* В точке $(0, 0)$ $R = a/2$.

Найти координаты центра кривизны (α, β) и уравнения эволюты для каждой из следующих кривых: 23. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Отв.* $\alpha = \frac{(a^2 + b^2)x^3}{a^4}$;

$\beta = -\frac{(a^2 + b^2)y^3}{b^4}$. 24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Отв.* $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

25. $y^3 = a^2x$. *Отв.* $\alpha = \frac{a^4 + 15y^4}{6a^2y}$; $\beta = \frac{a^4y - 9y^5}{2a^4}$. 26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6. \end{cases}$

Отв. $\alpha = -\frac{4}{3}t^2$; $\beta = 3t^2 - \frac{3}{2}$. 27. $\begin{cases} x = k \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sin t. \end{cases}$

Отв. $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} \right)$ (трактрисса). 28. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$

Отв. $\alpha = a \cos t$; $\beta = a \sin t$. 29. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$ *Отв.* $\alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sin^2 t$;

$\beta = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t$. 30. Вычислить с точностью до 0,001 корни уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$. *Отв.* $x_1 = 1,675$, $x_2 = 0,539$, $x_3 = -2,214$.

31. Для уравнения $f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0$ определить приближенное значение корня, заключенное в интервале $(1; 1,1)$. *Отв.* 1,045.

32. Вычислить корни уравнения $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ с точностью до 0,01. *Отв.* $0,38 < x_1 < 0,39$; $1,24 < x_2 < 1,25$.

33. Решить приближенно уравнение $x^2 - 5 = 0$. *Отв.* $x_1 \approx 1,71$, $x_{2,3} = 1,71 \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

34. Найти приближенное значение корня уравнения $x - \operatorname{tg} x = 0$, который находится между 0 и $3\pi/2$. *Отв.* 4,4935.

35. Вычислить с точностью до 0,001 корень уравнения $\sin x = 1 - x$. Указание. Привести уравнение к виду $f(x) = 0$. *Отв.* $0,5110 < x < 0,5111$.

Разные задачи

36. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиусу-вектору этой точки.

37. Найти наибольшее значение радиуса кривизны кривой $\varrho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Отв. $R = 3a/4$.

38. Найти координаты центра кривизны кривой $y = x \ln x$ в точке, где $y' = 0$. Отв. $(e^{-1}, 0)$.

39. Доказать, что для точек спирали Архимеда $\varrho = a\varphi$ при $\varphi \rightarrow \infty$ величина разности между радиусом-вектором и радиусом кривизны стремится к 0.

40. Найти параболу $y = ax^2 + bx + c$, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $(\pi/2, 1)$ общие касательную и кривизну. Сделать чертеж.

Отв. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

41. Функция $y = f(x)$ определена так:

$$f(x) = x^3 \text{ в интервале } -\infty < x \leq 1,$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ в интервале } 1 < x < +\infty.$$

Каковы должны быть a, b, c для того, чтобы линия $y = f(x)$ имела везде непрерывную кривизну? Сделать чертеж. Отв. $a = 3, b = -3, c = 1$.

42. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой ее точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

43. Написать уравнение окружности кривизны параболы $y = x^2$ в точке $(1, 1)$. Отв. $(x+4)^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

44. Написать уравнение окружности кривизны кривой $y = \lg x$ в точке $(\frac{\pi}{4}, 1)$. Отв. $(x - \frac{\pi-10}{4})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}$.

45. Найти длину всей эволюты эллипса, полуоси которого равны a и b . Отв. $4(a^3 - b^3)/ab$.

46. Найти приближенное значение корней уравнения $xe^x = 2$ с точностью до 0,01. Отв. Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 0,84$.

47. Найти приближенное значение корней уравнения $x \ln x = 0,8$ с точностью до 0,01. Отв. Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1,64$.

48. Найти приближенное значение корней уравнения $x^2 \operatorname{arctg} x = 1$ с точностью до 0,001. Отв. Уравнение имеет единственный действительный корень $x \approx 1,096$.

ГЛАВА VII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Комплексные числа. Исходные определения

Комплексным числом называется выражение

$$a + bi, \quad (1)$$

где a и b — действительные числа, i — так называемая *мнимая единица*, определяемая равенствами

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1; \quad (2)$$

a называется *действительной* частью, а bi — *мнимой* частью комплексного числа. Два комплексных числа $a + bi$ и $a - bi$, отличающихся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Если $a = 0$, то число $0 + bi = bi$ называется *чисто мнимым*; если $b = 0$, то получается действительное число: $a + 0 \cdot i = a$.

Принимаются два основных соглашения:

1) два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ считаются равными, если

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2,$$

т. е. если равны в отдельности их действительные и мнимые части;

2) комплексное число равно нулю:

$$a + bi = 0,$$

тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$.

1. Геометрическое изображение комплексных чисел. Всякое комплексное число $a + bi$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b (рис. 161), и обратно, всякую точку $M(a, b)$ плоскости Oxy можно рассматривать как геометрический образ комплексного числа $a + bi$.

Но если каждой точке $A(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$, то, в частности, точкам, лежащим на оси Ox , соответствуют действительные числа ($b = 0$). Если же точка лежит на оси Oy , то она изображает чисто мнимое число, так как в этом случае $a = 0$. Поэтому при изображении комплексных чисел на

плоскости ось Oy называют осью мнимых чисел или *мнимой осью*, а ось Ox — *действительной осью*.

Соединив точку $A(a, b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $a + bi$ вектор $\overline{OA}$.

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Обозначим через φ и r ($r \geq 0$) полярные координаты точки $A(a, b)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси Ox — полярной осью. Тогда (рис. 161), как известно, имеют место следующие соотношения:

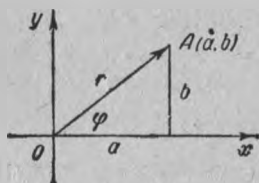


Рис. 161.

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

и следовательно, комплексное число можно представить в форме

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

Выражение, стоящее справа, называется тригонометрической формой записи комплексного числа $a + bi$. Величины r и φ выражаются через x и y формулами

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$$

и называются: r — *модулем*, φ — *аргументом* комплексного числа $a + bi$.

Аргумент комплексного числа, угол φ , считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета. Очевидно, что аргумент φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — любое целое число.

Модуль r комплексного числа $a + bi$ обозначается иногда символом $|a + bi|$:

$$r = |a + bi|.$$

Отметим, что действительное число A также может быть записано в форме (3), а именно:

$$A = |A|(\cos 0 + i \sin 0) \quad \text{при } A > 0,$$

$$A = |A|(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{при } A < 0.$$

Модуль комплексного числа 0 равен нулю: $|0| = 0$. В качестве же аргумента нуля можно прнять любой угол φ . Действительно, для любого угла φ имеет место равенство

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

§ 2. Основные действия над комплексными числами

1. Сложение комплексных чисел. Суммой двух комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов.

2. Вычитание комплексных чисел. Разностью двух комплексных чисел $a_2 + b_2 i$ и $a_1 + b_1 i$ называется такое комплексное число, которое, будучи сложено с $a_1 + b_1 i$, дает в сумме $a_2 + b_2 i$.

Легко видеть, что

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i. \quad (2)$$

Отметим, что модуль разности двух комплексных чисел $\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости комплексного переменного (рис. 162).

3. Умножение комплексных чисел. Произведением комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется такое комплексное число, которое получается, если мы перемножаем эти числа как двучлены по правилам алгебры, учитывая только, что

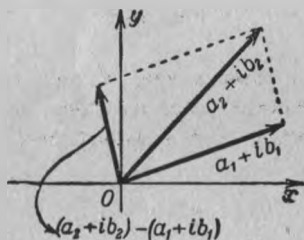


Рис. 162.

$i^2 = -1$; $i^3 = (-1)i = -i$; $i^4 = (-i)(i) = -i^2 = 1$; $i^5 = 1 \cdot i$ и т. д., и вообще при k целом:

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i.$$

На основании этого правила получаем:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2,$$

или

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i. \quad (3)$$

Если комплексные числа написаны в тригонометрической форме, то будем иметь:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (3')$$

т. е. произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.

Замечание 1. Сопряженные числа $a+bi$ и $a-bi$, в силу формулы (3), удовлетворяют равенству

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2,$$

т. е. произведение сопряженных комплексных чисел равняется сумме квадратов модулей каждого из них.

4. Деление комплексных чисел. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению: если

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(где $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), то x и y должны быть такими, чтобы выполнялось равенство

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi),$$

или

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x) i.$$

Следовательно,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

откуда находим:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

и окончательно получаем:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \quad (4)$$

Практически деление комплексных чисел выполняется следующим образом: чтобы разделить $a_1 + ib_1$ на $a_2 + ib_2$, умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю (т. е. на $a_2 - ib_2$). Тогда делителем будет действительное число; разделив на него действительную и мнимую части делимого, получим частное:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \end{aligned}$$

В случае тригонометрической формы комплексного числа получаем:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Для проверки этого равенства достаточно умножить делитель на частное:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] = \\ = r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Замечание 2. Из правил действий над комплексными числами следует, что в результате операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел получается снова комплексное число.

Если правила действий над комплексными числами применить к действительным числам, рассматривая их как частный случай комплексных, то эти правила будут совпадать с обычными правилами действий, известными из арифметики.

Замечание 3. Вернувшись к определениям суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел, легко проверить, что если в этих выражениях заменить каждое комплексное число сопряженным, то и результаты указанных действий заменяются сопряженными числами. Отсюда, в частности, вытекает следующая теорема.

Теорема. *Если в многочлен с действительными коэффициентами*

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

подставить вместо x число $a + bi$, а затем сопряженное число $a - bi$, то и результаты этих подстановок будут взаимно сопряженными.

§ 3. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа

1. Возведение в степень. Из формулы (3') предыдущего параграфа следует, что если n — целое положительное число, то

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Эта формула называется *формулой Муавра*. Она показывает, что *при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Рассмотрим теперь еще одно приложение формулы Муавра. Полагая в этой формуле $r = 1$, получим:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Разлагая левую часть по формуле бинома Ньютона и приравнявая действительные и мнимые части, мы сможем выразить $\sin n\varphi$

и $\cos n\varphi$ через степени $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Так, например, в случае $n=3$ получаем:

$$\cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi;$$

используя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi = -\sin^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

2. Извлечение корня. Корнем n -й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n -я степень которого равняется подкоренному числу, т. е.

$$\sqrt[n]{r (\cos \psi + i \sin \psi)} = \rho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

если

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Так как у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π , то

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

Отсюда находим:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где k — любое целое число, $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое (т. е. действительное положительное) значение корня из положительного числа r . Следовательно,

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (2)$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня. Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π , и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень n -й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Корень n -й степени из действительного числа A , отличного от нуля, также имеет n значений, так как действительное число является частным случаем комплексного и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$\text{если } A > 0, \text{ то } A = |A| (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$\text{если } A < 0, \text{ то } A = |A| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Пример 1. Найти все значения кубического корня из единицы.

Решение. Представим единицу в тригонометрической форме:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

По формуле (2) получаем:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Полагая k равным 0, 1, 2, находим три значения корня:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Учитывая, что

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

получаем:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

На рисунке 163 точки A, B, C являются геометрическими изображениями полученных корней.

3. Решение двучленного уравнения. Уравнение вида

$$x^n = A$$

называется *двучленным*. Найдём корни этого уравнения.

Если A есть действительное положительное число, то

$$x = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Выражение в скобках даёт все значения корня n -й степени из 1.

Если A — действительное отрицательное число, то

$$x = \sqrt[n]{|A|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right).$$

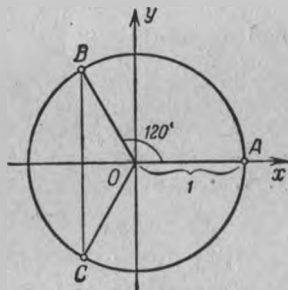


Рис. 163.

Выражение в скобках даёт все значения корня n -й степени из -1 .

Если A — комплексное число, то значения x находятся по формуле (2).

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 = 1.$$

Решение.

$$x = \sqrt[4]{1} \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}.$$

Полагая k равным 0, 1, 2, 3, получаем:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

§ 4. Показательная функция с комплексным показателем и ее свойства

Пусть $z = x + iy$. Если x и y — действительные переменные, то z называется комплексным переменным. Каждому значению комплексного переменного z на плоскости Oxy (плоскости комплексного переменного) соответствует определенная точка (см. рис. 161).

Определение. Если каждому значению комплексного переменного z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w , то w есть *функция комплексного переменного z* . Функции комплексного аргумента обозначают $w = f(z)$ или $w = w(z)$.

Вводятся понятия предела функции комплексного переменного, производной, интеграла и т. д.

Здесь мы рассмотрим одну функцию комплексного переменного — показательную функцию

$$w = e^z$$

или

$$w = e^{x+iy}.$$

Комплексные значения функции w определяются так *):

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

т. е.

$$w(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Примеры:

$$1. z = 1 + \frac{\pi}{4} i, \quad e^{1 + \frac{\pi}{4} i} = e \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = e \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$2. z = 0 + \frac{\pi}{2} i, \quad e^{0 + \frac{\pi}{2} i} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i,$$

$$3. z = 1 + i, \quad e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \sin 1) = 0,54 + i \cdot 0,83,$$

4. $z = x$ — действительное число, $e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x$ — обычная показательная функция.

Свойства показательной функции.

1. Если z_1 и z_2 — два комплексных числа, то

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

*) Целесообразность такого определения показательной функции комплексного переменного будет показана и ниже, см. § 21 гл. XIII и § 18 гл. XVI (т. II).

тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны, на основании теоремы о произведении двух комплексных чисел в тригонометрической форме будем иметь:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

В равенствах (4) и (5) правые части равны, следовательно, равны и левые: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

2. Аналогичным образом доказывается формула

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \quad (6)$$

3. Если m — целое число, то

$$(e^z)^m = e^{mz}. \quad (7)$$

При $m > 0$ эта формула легко получается на основании формулы (3); если $m < 0$, то она получается на основании формул (3) и (6).

4. Справедливо тождество

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \quad (8)$$

Действительно, по формулам (3) и (1) получаем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

На основании тождества (8) следует, что показательная функция e^z есть периодическая функция с периодом $2\pi i$.

5. Рассмотрим, далее, комплексную величину

$$w = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — действительные функции действительного переменного x . Это есть *комплексная функция действительного переменного*.

а) Пусть существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

Тогда $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ называют пределом комплексной переменной w .

б) Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то выражение

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \quad (9)$$

будем называть *производной* комплексной функции действительного переменного по действительному аргументу.

Рассмотрим, далее, следующую показательную функцию:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

где α и β — постоянные действительные числа, а x — действительное переменное. Это есть комплексная функция действительного переменного, которую согласно с формулой (1) можно переписать так:

$$w = e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

или

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Найдем производную w' . По формуле (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i (e^{\alpha x} \sin \beta x)' = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta) [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}. \end{aligned}$$

Итак, если $w = e^{(\alpha + i\beta)x}$, то $w' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}$, или

$$[e^{(\alpha + i\beta)x}]' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}. \quad (10)$$

Таким образом, если k — комплексное число (в частности действительное) и x — действительное число, то

$$(e^{kx})' = k e^{kx}. \quad (9')$$

Получили обычную формулу дифференцирования показательной функции. Далее,

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k (e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

и при произвольном n

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Эти формулы нам потребуются в дальнейшем.

§ 5. Формула Эйлера.

Показательная форма комплексного числа

Если в формуле (1) предыдущего параграфа положим $x = 0$, то получим:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (1)$$

Это есть *формула Эйлера*, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменяя в формуле (1) y на $-y$, получим:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) найдем $\cos y$ и $\sin y$:

$$\left. \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Последними формулами пользуются, в частности, для выражения степеней $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и их произведений через синус и косинус кратных дуг.

$$\begin{aligned} \text{Примеры: } 1. \cos^2 y &= \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) = \\ &= \frac{1}{4} [(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)] = \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 2y + 2) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2y). \\ 2. \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Показательная форма комплексного числа. Представим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r — модуль комплексного числа, φ — аргумент комплексного числа. По формуле Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в так называемой показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Примеры. Представить числа 1, i , -2 , $-i$ в показательной форме. Решение.

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i}, \\ i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i}, \\ -2 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i}, \\ -i &= \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2} i}. \end{aligned}$$

§ 6. Разложение многочлена на множители

Функция

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n,$$

где n — целое число, как известно, называется *многочленом* (*полиномом*) или *целой рациональной функцией* от x ; число n называется *степенью многочлена*. Здесь коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$ — действительные или комплексные числа; независимое переменное x также может принимать как действительные, так и комплексные значения. *Корнем* многочлена называется такое значение переменного x , при котором многочлен обращается в нуль.

Теорема 1 (Теорема Безу). При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.

Доказательство. При делении $f(x)$ на $x - a$ частным будет многочлен $f_1(x)$, степень которого на единицу ниже степени $f(x)$, остатком будет постоянное число R . Таким образом, можем написать:

$$f(x) = (x - a)f_1(x) + R. \quad (1)$$

Это равенство справедливо при всех значениях x , отличных от a (деление на $x - a$ при $x = a$ не имеет смысла).

Заставим теперь x стремиться к a . Тогда предел левой части равенства (1) равен $f(a)$, а предел правой части равен R . Так как функции $f(x)$ и $(x - a)f_1(x) + R$ равны между собой для всех $x \neq a$, то равны и их пределы при $x \rightarrow a$, т. е. $f(a) = R$.

Следствие. Если a есть корень многочлена, т. е. $f(a) = 0$, то $f(x)$ делится без остатка на $x - a$ и, следовательно, представляется в виде произведения

$$f(x) = (x - a)f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — многочлен.

Пример 1. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ при $x = 1$ обращается в нуль, т. е. $f(1) = 0$, поэтому данный многочлен делится без остатка на $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений с одним неизвестным x .

Всякое число (действительное или комплексное), которое, будучи подставлено в уравнение вместо x , обращает уравнение в тождество, называется *корнем* уравнения.

Пример 2. Числа $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$; ..., являются корнями уравнения $\cos x = \sin x$.

Если уравнение имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен степени n , то это уравнение называется *алгебраическим* уравнением степени n . Из определения следует, что корни алгебраического уравнения $P(x) = 0$ те же, что и корни многочлена $P(x)$.

Естественно, возникает вопрос: всякое ли уравнение имеет корни?

В случае неалгебраического уравнения ответ отрицателен: существуют такие неалгебраические уравнения, которые не имеют ни одного корня — ни действительного, ни комплексного, например уравнение $e^x = 0$ *).

Однако в случае алгебраического уравнения ответ на поставленный вопрос положителен. Этот ответ дается основной теоремой алгебры:

Теорема 2 (Основная теорема алгебры). *Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.*

Эта теорема доказывается в высшей алгебре. Здесь мы ее примем без доказательства.

Пользуясь основной теоремой алгебры, легко доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Всякий многочлен n -й степени разлагается на n линейных множителей вида $x - a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n .*

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть многочлен степени n :

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n.$$

Этот многочлен в силу основной теоремы имеет по крайней мере один корень; обозначим его через a_1 . Тогда на основании следствия из теоремы Безу мы можем написать:

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — многочлен $(n-1)$ -й степени; $f_1(x)$ также имеет корень. Обозначим его через a_2 . Тогда

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

где $f_2(x)$ — многочлен $(n-2)$ -й степени. Аналогично

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x).$$

Продолжая этот процесс выделения линейных множителей, дойдем до соотношения

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n,$$

где f_n — многочлен нулевой степени, т. е. некоторое фиксированное число. Это число, очевидно, равно коэффициенту при x^n , т. е. $f_n = A_0$.

*) Действительно, если бы число $x_i = a + bi$ было корнем этого уравнения, то имело бы место тождество $e^{a+bi} = 0$ или (на основании формулы Эйлера) $e^a (\cos b + i \sin b) = 0$. Но e^a не может равняться нулю ни при каком действительном значении a ; также не равно нулю $\cos b + i \sin b$ (так как модуль этого числа равен $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$ при любых b). Следовательно, и произведение $e^a (\cos b + i \sin b) \neq 0$, т. е. $e^{a+bi} \neq 0$, но это значит, что уравнение $e^x = 0$ не имеет корней.

На основании полученных равенств можем написать:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \quad (2)$$

Из разложения (2) следует, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ суть корни многочлена $f(x)$, так как при подстановке $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ правая часть, а следовательно и левая, обращается в нуль.

Пример 3. Многочлен $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ обращается в нуль при

$$x = 1, x = 2, x = 3.$$

Следовательно,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Никакое значение $x = a$, отличное от $a_1, a_2, \dots, a_n$, не может быть корнем многочлена $f(x)$, так как ни один из множителей в правой части равенства (2) не обращается в нуль при $x = a$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Многочлен n -й степени не может иметь более чем n различных корней.

Но в таком случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если значения двух многочленов n -й степени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают при $n+1$ различных значениях $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ аргумента x , то эти многочлены тождественны.

Доказательство. Обозначим через $f(x)$ разность многочленов

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

По условию $f(x)$ есть многочлен степени не выше n , обращающийся в нуль в точках $a_1, \dots, a_n$. Следовательно, его можно представить в виде

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Но, по условию, $f(x)$ обращается в нуль также в точке a_0 . Тогда $f(a_0) = 0$ и при этом ни один из линейных множителей не равен нулю. Поэтому $A_0 = 0$, а тогда из равенства (2) следует, что многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю. Следовательно, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, или $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Теорема 5. Если многочлен

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Доказательство. Запишем разложение этого многочлена на множители по формуле (2):

$$\begin{aligned} P(x) &= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = \\ &= A_0(x - a_1) \dots (x - a_n). \end{aligned} \quad (1')$$

Если этот многочлен тождественно равен нулю, то он равен нулю и при некотором значении x , отличном от $a_1, \dots, a_n$. Но тогда ни одна из скобок $x - a_1, \dots, x - a_n$ не равна нулю и, следовательно, $A_0 = 0$.

Аналогичным образом доказывается, что $A_1=0$, $A_2=0$ и т. д.

Теорема 6. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Это следует из того, что разность данных многочленов есть многочлен, тождественно равный нулю. Следовательно, на основании предыдущей теоремы все его коэффициенты—нули.

Пример 4. Если многочлен ax^3+bx^2+cx+d тождественно равен многочлену x^3-5x , то $a=0$, $b=1$, $c=-5$, $d=0$.

§ 7. О кратных корнях многочлена

Если в разложении многочлена n -й степени на линейные множители

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \quad (1)$$

некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

При этом

$$k_1+k_2+\dots+k_m=n.$$

В этом случае корень a_1 называется *корнем кратности k_1* или k_1 -кратным корнем, a_2 —корнем кратности k_2 и т. д.

Пример. Многочлен $f(x) = x^3-5x^2+8x-4$ разлагается на следующие линейные множители:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Это разложение можно написать так:

$$f(x) = (x-2)^2(x-1).$$

Корень $a_1=2$ —двукратный корень, $a_2=1$ —простой корень.

Если многочлен имеет корень a кратности k , то мы будем считать, что многочлен имеет k одинаковых корней. Тогда из теоремы о разложении многочлена на линейные множители получается следующая теорема.

Всякий многочлен n -й степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Замечание. Все, что говорилось о корнях многочлена

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n,$$

можно, очевидно, сформулировать в терминах корней алгебраического уравнения

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0.$$

Докажем, далее, следующую теорему.

Теорема. Если a_1 является для многочлена $f(x)$ корнем кратности $k_1 > 1$, то для производной $f'(x)$ это число является корнем кратности $k_1 - 1$.

Доказательство. Если a_1 есть корень кратности $k_1 - 1$, то из формулы (1') следует:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$ не обращается в нуль при $x = a_1$, т. е. $\varphi(a_1) \neq 0$. Дифференцируя, получим:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k_1(x - a_1)^{k_1-1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) = \\ &= (x - a_1)^{k_1-1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)]. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Тогда

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \psi(x),$$

причем

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

т. е. $x = a_1$ есть корень кратности $k_1 - 1$ многочлена $f'(x)$. Из проведенного доказательства следует, что если $k_1 = 1$, то a_1 не является корнем производной $f'(x)$.

Из доказанной теоремы следует, что a_1 является корнем кратности $k_1 - 2$ для производной $f''(x)$, корнем кратности $k_1 - 3$ для производной $f'''(x)$..., корнем кратности 1 (простым корнем) для производной $f^{(k_1-1)}(x)$ и не является корнем для производной $f^{(k_1)}(x)$, т. е.

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

но

$$f^{(k_1)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Разложение многочлена на множители в случае комплексных корней

В формуле (1) § 7 гл. VII корни $a_1, a_2, \dots, a_n$ могут быть как действительными, так и комплексными. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + bi$, то он имеет и сопряженный корень $a - bi$.

Доказательство. Если мы подставим в многочлен $f(x)$ вместо x число $a + bi$, произведем возведение в степени и соберем отдельно члены, содержащие i и не содержащие i , то получим:

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

где M и N — выражения, не содержащие i .

Так как $a + bi$ — корень многочлена, то

$$f(a + bi) = M + Ni = 0,$$

откуда

$$M=0, \quad N=0.$$

Подставим теперь в многочлен вместо x выражение $a-bi$. Тогда (на основании замечания 3 в конце § 2) мы получим в результате число, сопряженное с числом $M+Ni$, т. е.

$$f(a-bi) = M-Ni.$$

Так как $M=0$ и $N=0$, то $f(a-bi)=0$, т. е. $a-bi$ есть корень многочлена.

Итак, в разложении

$$f(x) = A_0 (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$$

комплексные корни входят попарно сопряженными.

Перемножив линейные множители, соответствующие паре комплексно сопряженных корней, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} [x-(a+bi)][x-(a-bi)] &= \\ &= [(x-a)-bi][(x-a)+bi] = \\ &= (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ — действительные числа.

Если число $a+bi$ является корнем кратности k , то сопряженное число $a-bi$ должно являться корнем той же кратности k , так что наряду с линейными множителями $x-(a+bi)$ в разложении многочлена входят столько же линейных множителей вида $x-(a-bi)$.

Таким образом, *многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности*, т. е.

$$f(x) = A_0 (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}.$$

При этом

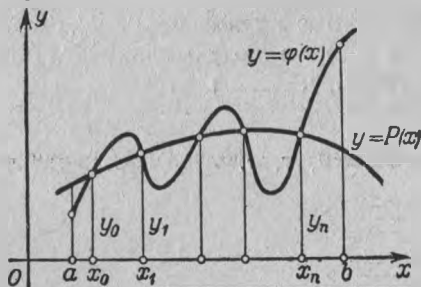
$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n.$$

§ 9. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами y и x , описывающая количественную сторону данного явления; при этом функция $y = \varphi(x)$ остается нам неизвестной, но на основании эксперимента установлены значения этой функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ при некоторых значениях аргумента $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

Задача заключается в том, чтобы найти функцию, по возможности более простую с точки зрения вычислительной (например, многочлен), которая представляла бы неизвестную функцию $y = \varphi(x)$ на

отрезке $[a, b]$ точно или приближенно. В более отвлеченной форме эту задачу можно сформулировать так: на отрезке $[a, b]$ заданы



значения неизвестной функции $y = \varphi(x)$ в $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n);$$

требуется найти многочлен $P(x)$ степени $\leq n$, приближенно выражающий функцию $\varphi(x)$.

В качестве такого многочлена естественно взять многочлен, значения которого в точках $x_0, x_1,$

$x_2, \dots, x_n$ совпадают с соответствующими значениями $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ функции $\varphi(x)$ (рис. 164). Тогда поставленная задача, называемая «задачей *интерполирования* функции», формулируется так: для данной функции $\varphi(x)$ найти многочлен $P(x)$ степени $\leq n$, который при заданных значениях $x_0, x_1, \dots, x_n$ принимал бы значения

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

В качестве искомого многочлена возьмем многочлен n -й степени вида

$$\begin{aligned} P(x) = & C_0(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) + \\ & + C_1(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n) + \\ & + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \dots \\ & \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

и определим коэффициенты $C_0, C_1, \dots, C_n$ так, чтобы выполнялись условия

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n. \quad (2)$$

Положим в формуле (1) $x = x_0$; тогда, принимая во внимание равенства (2), получим:

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n),$$

откуда

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Затем, положив $x = x_1$, получим:

$$y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n),$$

откуда

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}.$$

Таким же образом найдем:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)};$$

$$\dots$$

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим:

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3) \dots (x_2-x_n)} y_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})} y_n. \quad (3)$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Отметим без доказательства, что если $\varphi(x)$ имеет производную $(n+1)$ -го порядка на отрезке $[a, b]$, то ошибка при замене функции $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$, т. е. величина $R(x) = \varphi(x) - P(x)$, удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Замечание. Из теоремы 4 § 6 следует, что многочлен $P(x)$ является единственным, удовлетворяющим поставленным условиям.

Пример. Из эксперимента получены значения функции $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$, $y_1 = -5$ при $x_1 = 2$, $y_2 = 4$ при $x_2 = -4$. Требуется представить приближенно функцию $y = \varphi(x)$ многочленом 2-й степени.

Решение. По формуле (3) имеем (при $n=2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} 4.$$

или

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. О наилучшем приближении функций многочленами.

Теория Чебышева

В связи с задачей, рассмотренной в предыдущем параграфе, естественно поставить такой вопрос: пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Можно ли эту функцию с любой наперед заданной степенью точности приближенно представить в виде многочлена $P(x)$? Иначе говоря, можно ли подобрать

такой многочлен $P(x)$, чтобы разность между $\varphi(x)$ и $P(x)$ по абсолютной величине во всех точках отрезка $[a, b]$ была меньше любого наперед заданного положительного числа ε ? Утвердительный ответ *) на этот вопрос содержится в следующей теореме, которую мы приводим здесь без доказательства:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что во всех точках указанного отрезка выполняется неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Выдающийся советский математик академик С. Н. Бернштейн дал следующий способ непосредственного построения таких многочленов, которые приближенно равны непрерывной функции $\varphi(x)$ на заданном отрезке.

Пусть, например, функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Составим выражение

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — значение данной функции в точке $x = \frac{m}{n}$. Выражение $B_n(x)$ является многочленом n -й степени; его называют *многочленом Бернштейна*.

Если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то можно подобрать такой многочлен Бернштейна (т. е. так выбрать его степень n), чтобы для всех значений x на отрезке $[0, 1]$ выполнялось неравенство

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Отметим, что рассмотрение отрезка $[0, 1]$, а не произвольного отрезка $[a, b]$ не является существенным ограничением общности, так как с помощью замены переменного $x = a + t(b-a)$ можно любой отрезок $[a, b]$ преобразовать в отрезок $[0, 1]$. При этом многочлен n -й степени преобразуется в многочлен той же степени.

Создателем теории наилучшего приближения функций с помощью многочленов является один из величайших представителей математической мысли русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894). Им получены наиболее глубокие результаты в этой области, оказавшие исключительное влияние на работу последующих математиков. Исходной точкой для создания этой теории Чебышевым была его работа по теории шарнирных механизмов, широко используемых

*) Заметим, что интерполяционный многочлен Лагранжа [см. (3) § 9] не дает еще ответа на поставленный вопрос. Его значения равны значениям функции в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, но они могут быть очень далеки от значений функции в других точках отрезка $[a, b]$.

в машинах. Изучая такие механизмы, он пришел к задаче разыскания среди всех многочленов данной степени с коэффициентом при старшем члене, равным единице, такого многочлена, который меньше всех отклоняется от нуля на заданном отрезке. Такие многочлены им были найдены и впоследствии учеными названы *многочленами Чебышева*. Эти многочлены обладают многими замечательными свойствами и в настоящее время являются могучим средством исследования во многих вопросах математики и техники.

Упражнения к главе VII

1. Найти $(3+5i)(4-i)$. *Ота.* $17+17i$. 2. Найти $(6+11i)(7+3i)$. *Ота.* $9+95i$. 3. Найти $\frac{3-i}{4+5i}$. *Ота.* $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. 4. Найти $(4-7i)^2$. *Ота.* $-524+7i$.
5. Найти $\sqrt{i}$. *Ота.* $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. Найти $\sqrt{-5-12i}$. *Ота.* $\pm(2-3i)$. 7. Привести к тригонометрическому виду выражения: а) $1+i$. *Ота.* $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$. б) $1-i$. *Ота.* $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$. 8. Найти $\sqrt[3]{i}$. *Ота.* $\frac{i+\sqrt[3]{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt[3]{3}}{2}$. 9. Выразить через степени $\sin x$ и $\cos x$ следующие выражения: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$. 10. Выразить через синус и косинус кратных дуг: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$.
11. $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ разделить на $x+4$. *Ота.* $f(x)=(x+4) \times (x^2-8x+40)-161$, т. е. частное $=x^2-8x+40$; остаток $f(-4)=-161$.
12. $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ разделить на $x+3$. *Ота.* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$.
13. $f(x)=x^7-1$ разделить на $x-1$. *Ота.* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.
- Разложить на множители многочлены: 14. $f(x)=x^4-1$. *Ота.* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. *Ота.* $f(x)=(x-2)(x+1)$.
16. $f(x)=x^2+1$. *Ота.* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.
17. На основании эксперимента получены значения функции y от x :

$$y_1=4 \quad \text{при } x_1=0,$$

$$y_2=6 \quad \text{при } x_2=1,$$

$$y_3=10 \quad \text{при } x_3=2.$$

Представить приближенно функцию многочленом второй степени. *Ота.* x^2+x+4 .

18. Найти многочлен четвертой степени, принимающий при $x=1, 2, 3, 4, 5$, соответственно, значения $2, 1, -1, 5, 0$. *Ота.* $\frac{3}{2}x^4-17x^3+\frac{129}{2}x^2-92x+35$.

19. Найти многочлен, по возможности низкой степени, принимающий при $x=2, 4, 5, 10$, соответственно, значения $3, 7, 9, 19$. *Ота.* $2x-1$.

20. Найти многочлены Бернштейна 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней для функции $y=\sin \pi x$ на отрезке $[0, 1]$. *Ота.* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$;

$$B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x); \quad B_4(x)=2x(1-x)[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}].$$

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Определение функции нескольких переменных

Рассматривая функции одного переменного, мы указывали, что при изучении многих явлений приходится встречаться с функциями двух и более независимых переменных. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y , выражается формулой

$$S = xy.$$

Каждой паре значений x и y соответствует определенное значение площади S ; S есть функция двух переменных.

Пример 2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x , y , z , выражается формулой

$$V = xyz.$$

Здесь V есть функция трех переменных x , y , z .

Пример 3. Дальность R полета снаряда, выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, ствол которого наклонен к горизонту под углом φ , выражается формулой

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(если пренебречь сопротивлением воздуха). Здесь g — ускорение силы тяжести. Для каждой пары значений v_0 и φ эта формула дает определенное значение R , т. е. R является функцией двух переменных v_0 и φ .

Пример 4.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Здесь u есть функция четырех переменных x , y , z , t .

Определение 1. Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y , из некоторой области их изменения D , соответствует определенное значение величины z , то мы говорим, что z есть *функция двух независимых переменных x и y* , определенная в области D .

Символически функция двух переменных обозначается так:

$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y) \text{ и т. д.}$$

Функция двух переменных может быть задана, например, с помощью таблицы или аналитически—с помощью формулы, как это сделано в рассмотренных выше четырех примерах. На основании формулы можно составить таблицу значений функции для некоторых пар значений независимых переменных. Так, для первого примера можно составить следующую таблицу:

$$S = xy$$

$y \backslash x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

В этой таблице на пересечении строки и столбца, соответствующих определенным значениям x и y , проставлено соответствующее значение функции S .

Если функциональная зависимость $z = f(x, y)$ получается в результате измерений величины z при экспериментальном изучении какого-либо явления, то сразу получается таблица, определяющая z как функцию двух переменных. В этом случае функция задается только таблицей.

Как и в случае одного независимого переменного, функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значениях x и y .

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y , при которых определяется функция

$$z = f(x, y),$$

называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y мы будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy , то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости. Эту совокупность точек будем также называть областью определения функции. В частности, областью определения может быть и вся плоскость. В дальнейшем мы будем главным образом иметь дело с такими областями, которые представляют собой части плоскости, ограниченные линиями. Линию, ограничивающую данную область, будем называть *границей* области. Точки области, не лежащие на границе, будем называть *внутренними* точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой* или *незамкнутой*. Если же к области относятся и точки границы, то область называется *замкнутой*.

Пример 5. Определить естественную область определения функции $z = 2x - y$.

Аналитическое выражение $2x - y$ имеет смысл при любых значениях x и y . Следовательно, естественной областью определения функции является вся плоскость Oxy .

Пример 6.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Для того чтобы x имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т. е. x и y должны удовлетворять неравенству

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

Пример 7.

$$z = \ln(x + y).$$

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должно удовлетворяться неравенство

$$x + y > 0 \text{ или } y > -x.$$

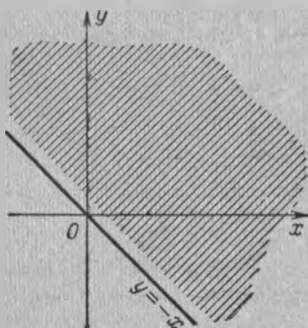


Рис. 165.

Это значит, что естественной областью определения функции z является половина плоскости, расположенная над прямой $y = -x$, не включая самой прямой (рис. 165).

Пример 8. Площадь треугольника S представляет собой функцию основания x и высоты y :

$$S = \frac{xy}{2}.$$

Областью определения этой функции является область $x > 0$, $y > 0$ (так как основание треугольника и его высота не могут быть ни отрицательными, ни нулем). Заметим, что область определения рассматриваемой функции не совпадает с естественной областью определения того аналитического выражения, с помощью которого задается функция, так как естественной областью определения выражения $\frac{xy}{2}$ является, очевидно, вся плоскость Oxy .

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех или более переменных.

Определение 3. Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменных $x, y, z, \dots, u, t$ соответствует определенное значение переменной w , то будем называть w функцией независимых переменных $x, y, z, \dots, u, t$ и писать $w = F(x, y, z, \dots, u, t)$ или $w = f(x, y, z, \dots, u, t)$ и т. п.

Так же как и для функции двух переменных, можно говорить об области определения функции трех, четырех и более переменных.

Так, например, для функции трех переменных областью определения является некоторая совокупность троек чисел (x, y, z) .

Заметим тут же, что каждая тройка чисел задает некоторую точку $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$. Следовательно, область определения функции трех переменных является некоторая совокупность точек пространства.

Аналогично этому можно говорить об области определения функции четырех переменных $u = f(x, y, z, t)$ как о некоторой совокупности четверок чисел (x, y, z, t) . Однако область определения функции четырех или большего числа переменных уже не допускает простого геометрического истолкования.

В примере 2 приведена функция трех переменных, определенная при всех значениях x, y, z .

В примере 4 приведена функция четырех переменных.

Пример 9.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Здесь w — функция четырех переменных x, y, z, u , определенная при значениях переменных, удовлетворяющих соотношению

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0.$$

§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

определенную в области G на плоскости Oxy (эта область может быть, в частности, и всей плоскостью), и систему прямоугольных

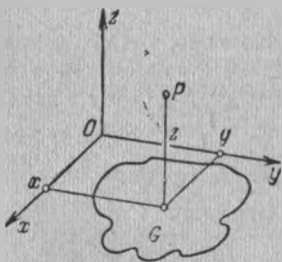


Рис. 166.

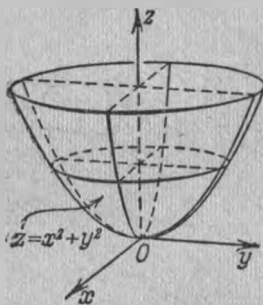


Рис. 167.

декартовых координат $Oxyz$ (рис. 166). В каждой точке (x, y) восставим перпендикуляр к плоскости Oxy и на нем отложим отрезок, равный $f(x, y)$.

Тогда мы получим в пространстве точку P с координатами

$$x, y, z = f(x, y).$$

Геометрическое место точек P , координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется графиком функции двух переменных.

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений, т. е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y \Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x \Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y.$$

При $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0,2$, $\Delta y=0,3$ имеем $\Delta_x z=0,4$, $\Delta_y z=0,3$, $\Delta z=0,76$.

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных. Так, для функции трех переменных $u = f(x, y, t)$ имеем:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. Непрерывность функции нескольких переменных

Введем одно важное вспомогательное понятие — понятие окрестности данной точки.

Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, т. е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если мы говорим, что функция $f(x, y)$ обладает каким-либо свойством «вблизи точки (x_0, y_0) » или «в окрестности точки (x_0, y_0) », то под этим подразумеваем, что найдется такой круг с центром (x_0, y_0) , во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Прежде чем рассматривать понятие непрерывности функции нескольких переменных, рассмотрим понятие предела функции нескольких переменных *). Пусть дана функция

$$z = f(x, y),$$

определенная в некоторой области G плоскости Oxy .

Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области G или на ее границе (рис. 169).

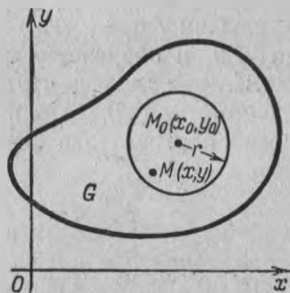


Рис. 169.

*) Мы будем в основном рассматривать функции двух переменных, так как рассмотрение трех и более переменных не вносит никаких принципиальных изменений, но вносит добавочные технические трудности.

Определение 1. Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Определение 2. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$* , если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1')$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \quad (1'')$$

Обозначим $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (см. рис. 168). При $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ $\Delta \rho \rightarrow 0$, и обратно, если $\Delta \rho \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Замечая, далее, что выражение, стоящее в квадратных скобках в равенстве (1''), есть полное приращение функции Δz , равенство (1'') можно переписать в форме

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (1''')$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в области*.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (1), то точка $N(x_0, y_0)$ называется *точкой разрыва* функции $z = f(x, y)$. Условие (1') может не выполняться, например, в следующих случаях:

1) $z = f(x, y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N(x_0, y_0)$, за исключением самой точки $N(x_0, y_0)$;

2) функция $z = f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0, y_0)$, но не существует предела $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$;

§ 5. Частные производные функции нескольких переменных

Определение. *Частной производной по x* от функции $z=f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z=f(x, y)$ обозначается одним из символов

$$z'_x; f'_x(x, y); \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично *частная производная по y* от функции $z=f(x, y)$ определяется как предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ по y к приращению Δy при стремлении Δy к нулю. Частная производная по y обозначается одним из символов

$$z'_y; f'_y; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y , а $\Delta_y z$ при неизменном x , мы можем определения частных производных сформулировать так: *частной производной по x* от функции $z=f(x, y)$ называется производная по x , вычисленная в предположении, что y — постоянная. *Частной производной по y* от функции $z=f(x, y)$ называется производная по y , вычисленная в предположении, что x — постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одного переменного, и только требуется каждый раз помнить, по какому переменному ищется производная.

Пример 1. Дана функция $z=x^2 \sin y$; требуется найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Пример 2. $z=x^y$.

Здесь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, если имеем функцию u четырех переменных x, y, z, t :

$$u = f(x, y, z, t),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y} \text{ и т. д.}$$

Пример 3. $u = x^2 + y^2 + xtz^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^2.$$

§ 6. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных

Пусть уравнение

$$z = f(x, y)$$

есть уравнение поверхности, изображенной на рисунке 172.

Проведем плоскость $x = \text{const}$. В сечении этой плоскости с поверхностью получится линия PT . При данном x рассмотрим на плоскости Oxy некоторую точку $M(x, y)$. Точке M соответствует точка $P(x, y, z)$, принадлежащая поверхности $z = f(x, y)$. Оставляя x неизменным, дадим переменному y приращение $\Delta y = MN = PT'$. Тогда функция z получит приращение $\Delta_y z = TT'$ [точке $N(x, y + \Delta y)$ соответствует точка $T(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ на поверхности $z = f(x, y)$].

Отношение $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ равно тангенсу угла, образуемого секущей PT с положительным направлением оси Oy :

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} \widehat{TP'T'}.$$

Следовательно, предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

равен тангенсу угла β , образованного касательной PB к кривой PT в точке P с положительным направлением оси Oy :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

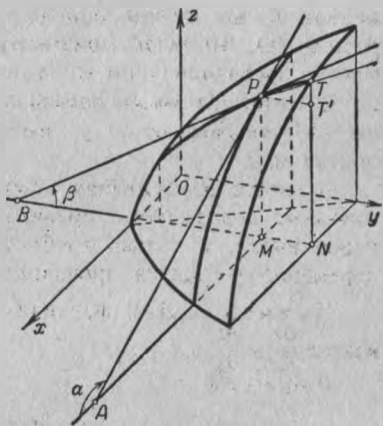


Рис. 172.

Итак, частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = \text{const.}$

Аналогично частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ численно равна тангенсу угла наклона α касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = \text{const.}$

§ 7. Полное приращение и полный дифференциал

По определению полного приращения функции $z = f(x, y)$ имеем (см. § 3 гл. VIII):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

Предположим, что $f(x, y)$ в рассматриваемой точке (x, y) имеет непрерывные частные производные.

Выразим Δz через частные производные. Для этого в правой части равенства (1) прибавим и вычтем $f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (2)$$

Выражение

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

стоящее во второй квадратной скобке, можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного y (значение x остается постоянным). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}, \quad (3)$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Точно так же выражение, стоящее в первой квадратной скобке равенства (2), можно рассматривать как разность двух значений функции одного переменного x (второй аргумент сохраняет одно и то же значение $y + \Delta y$). Применяя к этой разности теорему Лагранжа, получим:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}, \quad (4)$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x + \Delta x$.

Внося выражения (3) и (4) в равенство (2), получим:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \quad (5)$$

Так как, по предположению, частные производные непрерывны, то

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ заключены, соответственно, между x и $x + \Delta x$, y и $y + \Delta y$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ стремятся, соответственно, к x и y). Равенства (6) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

где величины γ_1 и γ_2 стремятся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю (т. е. когда $\Delta \varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$).

В силу равенств (6') соотношение (5) принимает вид

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \quad (5')$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta \varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Действительно, отношение $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \varrho} \rightarrow 0$ при $\varrho \rightarrow 0$, так как γ_1 является бесконечно малой величиной, а $\frac{\Delta x}{\Delta \varrho}$ — ограниченной ($|\frac{\Delta x}{\Delta \varrho}| \leq 1$). Аналогично проверяется, что $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \varrho} \rightarrow 0$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy . При $f'_x(x, y) \neq 0$ и $f'_y(x, y) \neq 0$ это выражение представляет собой главную часть приращения, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно $\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$, полное приращение (Δz) которой в данной точке (x, y) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy , и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta \varrho$, называется *дифференцируемой в данной точке*, а линейная часть приращения называется *полным дифференциалом* и обозначается через dz или df .

Из равенства (5') следует, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y.$$

Равенство (5') можно переписать в виде

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

и с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно $\Delta \rho$ можно написать следующее приближенное равенство:

$$\Delta z \approx dz.$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy мы будем называть *дифференциалами* независимых переменных x и y и обозначать, соответственно, через dx и dy . Тогда выражение полного дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

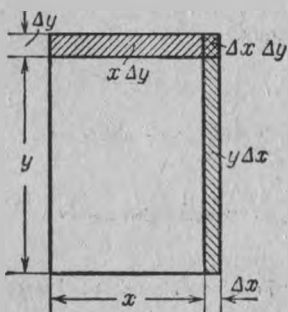


Рис. 173.

Таким образом, если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в точке (x, y) , и ее полный дифференциал равен сумме произведений частных производных на дифференциалы соответствующих независимых переменных.

Пример 1. Найти полный дифференциал и полное приращение функции $z = xy$ в точке $(2; 3)$ при $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.
Решение.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy = y \Delta x + x \Delta y.$$

Следовательно,

$$\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72;$$

$$dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7.$$

На рисунке 173 дана иллюстрация к этому примеру.

Предыдущие рассуждения и определения соответственным образом обобщаются на функции любого числа аргументов.

Если имеем функцию любого числа переменных

$$w = f(x, y, z, u, \dots, t),$$

причем все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывны в точке $(x, y, z, u, \dots, t)$, то выражение

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

является главной частью полного приращения функции и называется **полным дифференциалом**. Доказательство того, что разность $\Delta w - dw$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots + (\Delta t)^2}$, проводится совершенно так же, как и для функции двух переменных.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$ трех переменных x, y, z .

Решение. Заметим, что частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z = e^{x^2+y^2} \sin 2z$$

непрерывны при всех значениях x, y, z , находим:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = e^{x^2+y^2} (2x \sin^2 z dx + 2y \sin^2 z dy + \sin 2z dz).$$

§ 8. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдем полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \quad (1)$$

Мы имели приближенную формулу:

$$\Delta z \approx dz, \quad (2)$$

где

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (1) вместо Δz развернутое выражение для dz , получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y, \quad (4)$$

верную с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx и Δy .

Покажем, как используются формулы (2) и (4) для приближенных вычислений.

Задача. Вычислить объем материала, нужного для изготовления цилиндрического стакана следующих размеров (рис. 174):

радиус внутреннего цилиндра R ,
высота внутреннего цилиндра H ,
толщина стенок и дна стакана k .

Решение. Дадим два решения этой задачи: точное и приближенное.

а) Точное решение. Искомый объем v равен разности объемов внешнего цилиндра и внутреннего цилиндра. Так как радиус внешнего цилиндра равен $R+k$, а высота $H+k$, то

$$v = \pi (R+k)^2 (H+k) - \pi R^2 H,$$

или

$$v = \pi (2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \quad (5)$$

б) Приближенное решение. Обозначим через f объем внутреннего цилиндра, тогда $f = \pi R^2 H$. Это — функция двух переменных R и H . Если увеличим R и H на k , то функция f получит приращение Δf ; но это и будет искомый объем v , т. е. $v = \Delta f$.

На основании соотношения (1) имеем приближенное равенство

$$v \approx df,$$

или

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H.$$

Но так как

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k,$$

то получаем:

$$v \approx \pi (2RHk + R^2k). \quad (6)$$

Сравнивая результаты (5) и (6), видим, что они отличаются на величину $\pi (Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$, состоящую из членов второго и третьего порядка малости относительно k .

Применим эти формулы к числовым примерам.

Пусть $R=4$ см, $H=20$ см, $k=0,1$ см.

Применяя (5), получим точно:

$$v = \pi (2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,1^2 + 0,1^3) = 17,881\pi.$$

Применяя формулу (6), получим приближенно:

$$v \approx \pi (2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,1) = 17,6\pi.$$

Следовательно, приближенная формула (6) дает ответ с ошибкой меньше, чем $0,3\pi$, что составляет $100 \cdot \frac{0,3\pi}{17,881\pi} \%$, т. е. менее 2% измеренной величины.

§ 9. Приложение дифференциала к оценке погрешности при вычислениях

Пусть некоторая величина u является функцией величин $x, y, z, \dots, t$:

$$u = f(x, y, z, \dots, t),$$

причем, определяя каким-то способом значения величины $x, y, z, \dots, t$, мы допускаем погрешности $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$. Тогда значение u , вычисленное по неточным значениям аргументов, получится с погрешностью

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t).$$

Нижe мы займeмся оцeнкой погрeшности Δu , eсли известны погрeшности Δx , Δy , ..., Δt .

При достаточнo малых абсолютных значениях величин Δx , Δy , ..., Δt можем приближенно заменить полное приращение полным дифференциалом

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t.$$

Здесь значения частных производных и значения погрешностей аргументов могут быть как положительными, так и отрицательными. Заменяя их абсолютными величинами, получим неравенство

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|. \quad (1)$$

Если через $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, ..., $|\Delta^* u|$ обозначим *максимальные абсолютные* погрешности соответствующих величин (границы для абсолютных величин значений погрешностей), то можно, очевидно, принять:

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta^* t|. \quad (2)$$

Примеры.

1. Пусть $u = x + y + z$, тогда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|.$$

2. Пусть $u = x - y$, тогда

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|.$$

3. Пусть $u = xy$, тогда

$$|\Delta^* u| = |x| |\Delta^* y| + |y| |\Delta^* x|.$$

4. Пусть $u = \frac{x}{y}$, тогда

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta^* y| = \frac{|y| |\Delta^* x| + |x| |\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Гипотенуза c и катет a прямоугольного треугольника ABC , определенные с максимальными абсолютными погрешностями $|\Delta^* c| = 0,2$, $|\Delta^* a| = 0,1$, соответственно равны $c = 75$, $a = 32$. Определить угол A по формуле $\sin A = \frac{a}{c}$; максимальную абсолютную погрешность $|\Delta A|$ при вычислении угла A .

Решение. $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin \frac{a}{c}$, следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

По формуле (2) получим:

$$|\Delta A| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75 \sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 = 0,00275 \text{ радианов} = 9'38''.$$

Таким образом,

$$A = \arcsin \frac{32}{75} \pm 9'38''.$$

6. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катет $b = 121,56$ м, угол $A = 25^\circ 21' 40''$, при этом максимальная абсолютная погрешность при определении катета b равна $|\Delta^* b| = 0,05$ м, максимальная абсолютная погрешность при определении угла A равна $|\Delta^* A| = 12''$.

Определить максимальную абсолютную погрешность при вычислении катета a по формуле $a = b \operatorname{tg} A$.

Решение. По формуле (2) находим:

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A| |\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A} |\Delta^* A|.$$

Подставляя соответствующие значения (и помня, что $|\Delta^* A|$ нужно выразить в радианах), получим:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25^\circ 21' 40'' \cdot 0,05 + \frac{121,56}{\cos^2 25^\circ 21' 40''} \frac{12}{206265} = 0,0237 + 0,0087 = 0,0324 \text{ м.}$$

Отношение погрешности Δx некоторой величины к приближенному значению x этой величины называется *относительной погрешностью* величины. Будем его обозначать δx ,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Максимальной относительной погрешностью величины x называется отношение максимальной абсолютной погрешности к абсолютной величине x и обозначается $|\delta^* x|$,

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \quad (3)$$

Для оценки максимальной относительной погрешности функции u разделим все числа равенства (2) на $|u| = |f(x, y, z, \dots, t)|$

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} \right| |\Delta^* y| + \dots + \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} \right| |\Delta^* t|, \quad (4)$$

но

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \ln |f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y} \ln |f|; \dots; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t} \ln |f|.$$

Поэтому равенство (3) можно переписать так:

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln |f| \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln |f| \right| |\Delta^* y| + \dots \\ \dots + \left| \frac{\partial}{\partial t} \ln |f| \right| |\Delta^* t| \dots, \quad (5)$$

или коротко:

$$|\delta^* u| = \left| \Delta^* \ln |f| \right|. \quad (6)$$

Из формул как (3), так и (5) следует, что максимальная относительная погрешность функции равняется максимальной абсолютной погрешности логарифма этой функции.

Из формулы (6) следуют правила, применяемые в приближенных вычислениях.

1. Пусть $u = xy$. Пользуясь результатами примера 3, получим:

$$|\delta^* u| = \frac{|x| |\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|y| |\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

т. е. максимальная относительная погрешность произведения равняется сумме максимальных относительных погрешностей сомножителей.

2. Если $u = \frac{x}{y}$, то, пользуясь результатами примера 4, находим:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Замечание. На основании примера 2 следует, что если $u = x - y$, то

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Если x и y близки, то может оказаться, что $|\delta^* u|$ будет очень велика по сравнению с определяемой величиной $x - y$. Это обстоятельство следует учитывать при производстве вычислений.

Пример 7. Период колебания маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

Какую относительную погрешность в определении T мы допустим по этой формуле, принимая $\pi \approx 3,14$ (с точностью до 0,005), $l = 1$ м (с точностью до 0,01 м), $g = 9,8$ м/сек² (с точностью до 0,02 м/сек²).

Решение. По формуле (6) максимальная относительная погрешность равна

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Но

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2} \ln l - \frac{1}{2} \ln g.$$

Вычислим $|\Delta^* \ln T|$. Учитывая, что $\pi \approx 3,14$, $\Delta^* \pi = 0,005$, $l = 1$ м, $\Delta^* l = 0,01$ м, $g = 9,8$ м/сек², $\Delta^* g = 0,02$ м/сек², получим:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02}{2 \cdot 9,8} = 0,0076.$$

Итак, максимальная относительная погрешность равна

$$\delta^* T = 0,0076 = 0,76\%.$$

§ 10. Производная сложной функции. Полная производная

Предположим, что в уравнении

$$z = F(u, v) \quad (1)$$

u и v являются функциями независимых переменных x и y :

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \quad (2)$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y .

Конечно, z можно выразить и непосредственно через x, y , а именно:

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (3)$$

Пример 1. Пусть

$$z = u^2 v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1;$$

тогда

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Предположим, что функции $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам и поставим задачу: вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, исходя из уравнений (1) и (2) и не пользуясь уравнением (3).

Дадим аргументу x приращение Δx , сохраняя значение y неизменным. Тогда, в силу уравнения (2), u и v получают приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

Но если u и v получают приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, то и функция $z = F(u, v)$ получит приращение Δz , определяемое формулой (5') § 7 гл. VIII:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Разделим все члены этого равенства на Δx :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta_x u \rightarrow 0$ и $\Delta_x v \rightarrow 0$ (в силу непрерывности функций u и v). Но тогда γ_1 и γ_2 тоже стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_1 = 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

Если бы мы дали приращение Δu переменному u , а x оставили неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений нашли бы:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4')$$

Пример 2.

$$z = \ln(u^2 + v); \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Используя формулы (4) и (4'), находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (2u ye^{x+y^2} + 1).$$

Для случая большего числа переменных формулы (4) и (4') естественным образом обобщаются.

Например, если $w = F(z, u, v, s)$ есть функция четырех аргументов z, u, v, s , а каждый из них зависит от x и y , то формулы (4) и (4') принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если задана функция $z = F(x, y, u, v)$, где y, u, v в свою очередь зависят от одного аргумента x :

$$y = f(x); \quad u = \varphi(x); \quad v = \psi(x),$$

то, по сути дела, z является функцией только одного переменного x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dx}$.

Эта производная вычисляется по первой из формул (5):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx};$$

но так как y, u, v — функции только одного x , то частные производные обращаются в обыкновенные; кроме того, $\frac{dx}{dx} = 1$; поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (6)$$

Эта формула носит название формулы для вычисления *полной производной* $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Пример 3.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Формула (6) дает в этом случае следующий результат:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x.$$

§ 11. Производная от функции, заданной неявно

Начнем рассмотрение этого вопроса с неявной функции одного переменного *). Пусть некоторая функция y от x определяется уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть непрерывная функция y от x задается неявно уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ — непрерывные функции в некоторой области D , содержащей точку (x, y) , координаты которой удовлетворяют уравнению (1); кроме того, в этой точке $F'_y(x, y) \neq 0$. Тогда функция y от x имеет производную

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Доказательство. Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y . При этом

$$F(x, y) = 0.$$

Дадим независимому переменному x приращение Δx . Функция y получит приращение Δy , т. е. значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует значение функции $y + \Delta y$. В силу уравнения $F(x, y) = 0$ будем иметь:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Следовательно,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Левую часть последнего равенства, являющуюся полным приращением

*) В § 11 гл. III мы решали задачу о дифференцировании неявной функции одного переменного. Там мы рассматривали отдельные примеры и не нашли общей формулы, дающей производную от неявной функции, а также не выяснили условий существования этой производной.

функции двух переменных по формуле (5') § 7, можно переписать так:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

где γ_1 и γ_2 стремятся к нулю при Δx и Δy , стремящихся к нулю. Так как левая часть последнего выражения равна нулю, можно написать:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Разделим последнее равенство на Δx и вычислим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда, учитывая, что при этом γ_1 и γ_2 также стремятся к нулю и что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, в пределе получим:

$$y'_x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (1)$$

Мы доказали существование производной y'_x от функции, заданной неявно, и нашли формулу для ее вычисления.

Пример 1. Уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

определяет y как неявную функцию от x . Здесь

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно, по формуле (1)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{y}.$$

Заметим, что заданное уравнение определяет две разные функции [так как каждому значению x в промежутке $(-1, 1)$ соответствуют два значения y]; однако найденное значение y'_x справедливо как для одной, так и для другой функции.

Пример 2. Дано уравнение, связывающее x и y :

$$e^y - e^x + xy = 0.$$

Здесь $F(x, y) = e^y - e^x + xy$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Следовательно, по формуле (1) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Если каждой паре чисел x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z , удовлетворяющих уравнению (2), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x и y .

Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

неявно определяет две непрерывные функции z от x , y , которые можно выразить явно, разрешив уравнение относительно z ; в этом случае мы получаем:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ и } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z от x и y , определяемой уравнением (2).

Когда мы ищем $\frac{\partial z}{\partial x}$, мы считаем y постоянным. Поэтому здесь применима формула (1), если только независимым переменным считать x , а функцией z . Поэтому

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Таким же путем находим:

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Пример 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Дифференцируя эту функцию как явную (после разрешения уравнения относительно z), мы получили бы тот же результат.

Пример 4.

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Здесь $F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1; \\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

§ 12. Частные производные различных порядков

Пусть имеем функцию двух переменных:

$$z = f(x, y).$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y . Поэтому от них можно снова находить частные производные. Следовательно, частных производных второго порядка от функции двух переменных четыре, так как каждую из функций $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно дифференцировать как по x , так и по y .

Вторые частные производные обозначают так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; здесь f дифференцируется последовательно два раза по x ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; здесь f сначала дифференцируется по x , а потом результат дифференцируется по y ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; здесь f дифференцируется сначала по y , а потом результат дифференцируется по x ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; здесь f дифференцируется последовательно два раза по y .

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x , так и по y . Получим частные производные третьего порядка. Их будет, очевидно, уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, *частная производная n -го порядка* есть первая производная от производной $(n-1)$ -го порядка. Например, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ есть производная n -го порядка; здесь функция z сначала p раз дифференцировалась по x , а потом $n-p$ раз по y .

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 1. Вычислить частные производные второго порядка от функции $f(x, y) = x^2y + y^3$.

Решение. Последовательно находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy; & \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 3y^2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial (x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$, если $z = y^2 e^x + x^2 y^2 + 1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 e^x + 2xy^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2 e^x + 2y^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} &= 2ye^x + 6y^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^x + 3x^2 y^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 2ye^x + 6xy^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} &= 2ye^x + 6y^2.\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$, если $u = z^2 e^{x+y^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z^2} = 4yze^{x+y^2}.$$

Естественно поставить вопрос, зависит ли результат дифференцирования функции нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным, т. е. будут ли, например, тождественно равны производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

или

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} \text{ и } \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t \partial x \partial y} \text{ и т. д.}$$

Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим выражение $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$.

Если введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определенную равенством

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

то A можно записать в виде

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Так как, по предположению, f'_x определена в окрестности точки (x, y) , то, следовательно, $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x, x + \Delta x]$; но тогда, применяя теорему Лагранжа, получим:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x + \Delta x$.

Но

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Так как f_{xy} определена в окрестности точки (x, y) , то f'_x дифференцируема на отрезке $[y, y + \Delta y]$, поэтому, применив к полученной разности вновь теорему Лагранжа (по переменному y), будем иметь:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Следовательно, первоначальное выражение A равно

$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (1)$$

Переставив в нем средние слагаемые, получим:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

тогда

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y).$$

Применяя снова теорему Лагранжа, получим:

$$A = \Delta y \psi'(\bar{y}),$$

где $\bar{y}$ заключено между y и $y + \Delta y$.

Но

$$\psi'(\bar{y}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}).$$

Применив еще раз теорему Лагранжа, получим:

$$f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x + \Delta x$.

Таким образом, первоначальное выражение A можно записать в виде

$$A = \Delta x \Delta y f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2)$$

Левые части равенства (1) и (2) равны A , следовательно, равны и правые, т. е.

$$\Delta x \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \Delta x f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}),$$

откуда

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Так как производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в точке (x, y) , то
 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y)$ и $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(x, y)$. Окончательно получим:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы как следствие получается, что если частные производные $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ и $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ непрерывны, то

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Аналогичная теорема имеет место и для функции любого числа переменных.

Пример 4. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x}$, если $u = e^{xy} \sin z$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xye^{xy} \sin z = e^{xy} (1 + xy) \sin z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy} (1 + xy) \cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xe^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xye^{xy} \cos z = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z \partial x}$$

(см., кроме того, примеры 1—2 этого параграфа).

§ 13. Поверхности уровня

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D , в которой задана функция

$$u = u(x, y, z). \quad (1)$$

В этом случае говорят, что в области D задано *скалярное поле*. Если, например, $u(x, y, z)$ обозначает температуру в точке $M(x, y, z)$, то говорят, что задано скалярное поле температур; если область D заполнена жидкостью или газом и $u(x, y, z)$ обозначает давление, то имеется скалярное поле давлений и т. д.

Рассмотрим точки области D , в которых функция $u(x, y, z)$ имеет постоянное значение c :

$$u(x, y, z) = c. \quad (2)$$

Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Если возьмем другое значение c , то получим другую поверхность. Эти поверхности называются *поверхностями уровня*.

Пример 1. Пусть задано скалярное поле

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

Здесь поверхностями уровня будут поверхности

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

т. е. эллипсоиды с полуосями $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$.

Если функция u есть функция двух переменных x и y :

$$u = u(x, y),$$

то «поверхностями» уровня будут линии на плоскости Oxy :

$$u(x, y) = c, \quad (2')$$

которые называются *линиями уровня*.

Если значения u мы будем откладывать по оси Oz :

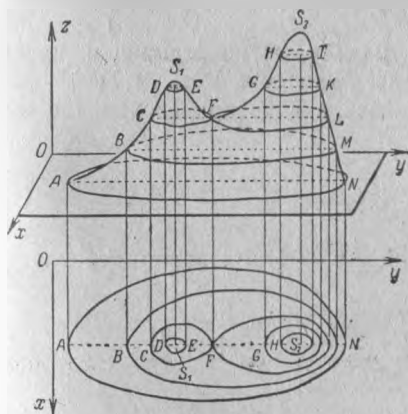


Рис. 175.

$$z = u(x, y),$$

то линиями уровня на плоскости Oxy будут проекции линий, кото-

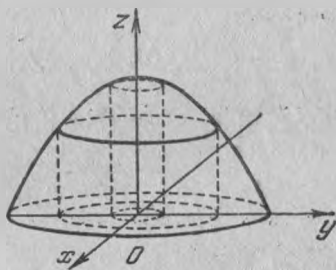


Рис. 176.

рые получаются в пересечении поверхности $z = u(x, y)$ с плоскостями $z = c$ (рис. 175). Зная линии уровня, легко исследовать характер поверхности $z = u(x, y)$.

Пример 2. Определить линии уровня функции $z = 1 - x^2 - y^2$. Линиями уровня будут линии с уравнениями $1 - x^2 - y^2 = c$. Это (рис. 176) окружности с радиусом $\sqrt{1-c}$. В частности, при $c=0$ получаем окружность $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. Производная по направлению

Рассмотрим в области D функцию $u = u(x, y, z)$ и точку $M(x, y, z)$. Проведем из точки M вектор S , направляющие косинусы которого $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ (рис. 177). На векторе S , на расстоянии

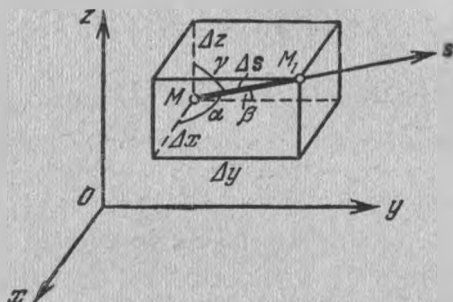


Рис. 177.

Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Таким образом,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Будем предполагать, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области D .

Аналогично тому, как это делалось в § 7, полное приращение функции представим так:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 стремятся к нулю при $\Delta s \rightarrow 0$. Разделим все члены равенства (1) на Δs :

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos \gamma.$$

Следовательно, равенство (2) можно переписать так:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma. \quad (3)$$

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$ называется *производной от*

функции $u = u(x, y, z)$ в точке (x, y, z) по направлению вектора S и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т. е.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (3), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что, зная частные производные, легко найти производную по любому направлению S . Сами частные производные являются частным случаем производной по направлению. Так, например, при $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пример. Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Найти производную $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1, 1, 1)$: а) в направлении вектора $S_1 = 2i + j + 3k$; б) в направлении вектора $S_2 = i + j + k$.

Решение. а) Находим направляющие косинусы вектора S_1 :

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Частные производные в точке $M(1, 1, 1)$ будут

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) Находим направляющие косинусы вектора S_2 :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

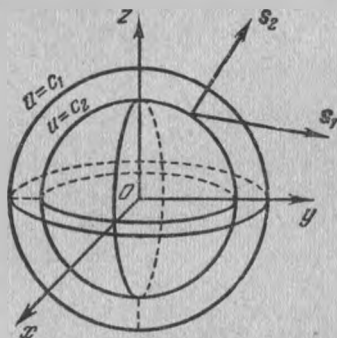


Рис. 178.

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Заметим для дальнейшего, что $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$ (рис. 178).

§ 15. Градиент

В каждой точке области D , в которой задана функция $u = u(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1)$$

Этот вектор называется *градиентом* функции $u(x, y, z)$. Говорят, что в области D определено *векторное поле градиентов*. Докажем, далее, следующую теорему, устанавливающую связь между градиентом и производной по направлению.

Теорема. Пусть дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ и определено в этом скалярном поле поле градиентов

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора S равняется проекции вектора $\text{grad } u$ на вектор S .

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор S^0 , соответствующий вектору S :

$$S^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\text{grad } u$ и S^0 :

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора S . Следовательно, мы можем написать:

$$\text{grad } u \cdot S^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Если обозначим угол между векторами $\text{grad } u$ и S^0 через φ (рис. 179), то можем написать:

$$|\text{grad } u| \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \quad (3)$$

или

$$\text{пр. } S^0 \text{ grad } u = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы наглядно устанавливается связь между градиентом и производной в данной точке по любому направлению. В данной точке $M(x, y, z)$ строим вектор $\text{grad } u$ (рис. 180).

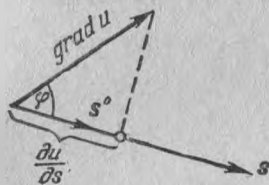


Рис. 179.

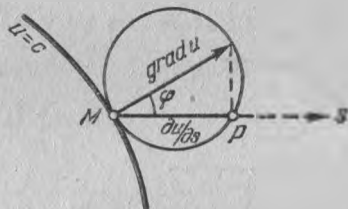


Рис. 180.

Строим сферу, для которой $\text{grad } u$ является диаметром. Из точки M проводим вектор S . Обозначим точку пересечения вектора S с поверхностью сферы через P . Тогда очевидно, что $MP = |\text{grad } u| \cos \varphi$, если φ — угол между направлениями градиента и отрезка MP (при этом $\varphi < \frac{\pi}{2}$), т. е. $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Очевидно, что при изменении направления вектора S на противоположное производная изменит знак, а ее абсолютная величина останется прежней.

Установим некоторые свойства градиента.

1) Производная в данной точке по направлению вектора S имеет наибольшее значение, если направление вектора S совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно $|\text{grad } u|$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из равенства (3): наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial s}$ будет при $\varphi = 0$, и в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

2) Производная по направлению вектора, касательного к поверхности уровня, равна нулю.

Это утверждение следует из формулы (3). Действительно, в этом случае

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos \varphi = 0.$$

Пример 1. Дана функция

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

а) Определим градиент в точке $M(1, 1, 1)$. Выражение градиента этой функции в произвольной точке будет

$$\text{grad } u = 2xi + 2yj + 2zk.$$

Следовательно,

$$(\text{grad } u)_M = 2i + 2j + 2k, \quad |\text{grad } u|_M = 2\sqrt{3}.$$

б) Определим производную от функции u в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении градиента. Направляющие косинусы градиента будут

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

Замечание. Если функция $u = u(x, y)$ есть функция двух переменных, то вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

лежит в плоскости Oxy . Докажем, что $\text{grad } u$ направлен перпендикулярно к линии уровня $u(x, y) = c$, лежащей в плоскости Oxy и прохо-

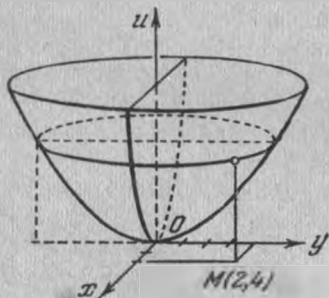


Рис. 182.

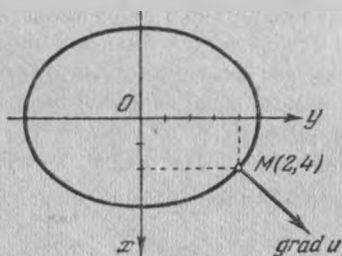


Рис. 183.

дящей через соответствующую точку. Действительно, угловой коэффициент k_1 касательной к линии уровня $u(x, y) = c$ будет равен

$$k_1 = -\frac{u_x}{u_y}. \quad \text{Угловой коэффициент } k_2 \text{ градиента равен } k_2 = \frac{u_y}{u_x}.$$

Очевидно, что $k_1 k_2 = -1$. Это и доказывает справедливость нашего утверждения (рис. 181). Аналогичное свойство градиента функции трех переменных будет установлено в § 6 гл. IX.

Пример 2. Определить градиент функции $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ (рис. 182) в точке $M(2, 4)$.

Решение. Здесь

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} = x \right|_M = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3} y \right|_M = \frac{8}{3}.$$

Следовательно,

$$\text{grad } u = 2i + \frac{8}{3}j.$$

Уравнение линии уровня (рис. 183), проходящей через данную точку, будет

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

§ 16. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция двух переменных

$$z = f(x, y)$$

непрерывна вместе со всеми своими частными производными до $(n+1)$ -го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M(a, b)$. Тогда, аналогично тому, как это было в случае функции одного переменного (см. § 6 гл. IV), функцию двух переменных представим в виде суммы многочлена n -го порядка по степеням $(x-a)$ и $(y-b)$ и некоторого остаточного члена. Ниже будет показано, что для случая $n=2$ эта формула имеет вид

$$f(x, y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) + \frac{1}{2!} [A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2] + R_2, \quad (1)$$

где коэффициенты A_0, D, E, A, B, C не зависят от x и y , а R_2 — остаточный член, структура которого аналогична структуре остаточного члена в формуле Тейлора для функции одного переменного.

Применим формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ одного переменного y , считая x постоянным (ограничимся членами второго порядка)

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x, b) + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

где $\eta_1 = b + \theta_1(y-b)$, $0 < \theta_1 < 1$. Функции $f(x, b)$, $f_y^*(x, b)$, $f_{yy}^*(x, b)$ разложим по формуле Тейлора по степеням $(x-a)$, ограничиваясь смешанными производными до третьего порядка включительно:

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f_x'(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f_{xx}''(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_{xxx}'''(\xi_1, b), \quad (3)$$

где $\xi_1 = x + \theta_2(x-a)$, $0 < \theta_2 < 1$;

$$f_y^*(x, b) = f_y'(a, b) + \frac{x-a}{1} f_{yx}''(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f_{yxx}'''(\xi_2, b), \quad (4)$$

где $\xi_2 = x + \theta_3(x-a)$, $0 < \theta_3 < 1$;

$$f_{yy}^*(x, b) = f_{yy}''(a, b) + \frac{x-a}{1} f_{yyx}'''(\xi_3, b), \quad (5)$$

где $\xi_3 = x + \theta_4(x-a)$; $0 < \theta_4 < 1$.

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в формулу (2), получим:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{x-a}{1} f_x'(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f_{xx}''(a, b) + \\ & + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_{xxx}'''(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1} \left[f_y'(a, b) + \frac{x-a}{1} f_{yx}''(a, b) + \right. \\ & + \left. \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f_{yxx}'''(\xi_2, b) \right] + \frac{(y-b)^2}{1 \cdot 2} \left[f_{yy}''(a, b) + \frac{x-a}{1} f_{yyx}'''(\xi_3, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_{yyy}'''(x, \eta). \end{aligned}$$

Располагая числа так, как указано в формуле (1), получим:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) f_x'(a, b) + (y-b) f_y'(a, b) + \\ & + \frac{1}{2!} [(x-a)^2 f_{xx}''(a, b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}''(a, b) + \\ & + (y-b)^2 f_{yy}''(a, b)] + \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f_{xxx}'''(\xi_1, b) + \\ & + 3(x-a)^2(y-b) f_{xxy}'''(\xi_2, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}'''(\xi_3, b) + \\ & + (y-b)^3 f_{yyy}'''(a, \eta)]. \quad (6) \end{aligned}$$

Это и есть формула Тейлора при $n=2$. Выражение

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} [(x-a)^3 f_{xxx}'''(\xi_1, b) + 3(x-a)^2(y-b) f_{xxy}'''(\xi_2, b) + \\ & + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}'''(\xi_3, b) + (y-b)^3 f_{yyy}'''(a, \eta)] \end{aligned}$$

называется остаточным членом. Обозначим, далее, $x-a=\Delta x$, $y-b=\Delta y$, $\Delta \varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Преобразуем R_2 :

$$R_2 = \frac{1}{3!} \left[\frac{\Delta x^3}{\Delta \varrho^3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3 \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta \varrho^3} f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \right. \\ \left. + 3 \frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta \varrho^3} f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \frac{\Delta y^3}{\Delta \varrho^3} f'''_{yyy}(\alpha, \eta) \right] \Delta \varrho^3.$$

Так как $|\Delta x| < \Delta \varrho$, $|\Delta y| < \Delta \varrho$ и третьи производные, по условию, ограничены, то коэффициент при $\Delta \varrho^3$ ограничен в рассматриваемой области; обозначим его через α_0 .

Тогда можем написать:

$$R_2 = \alpha_0 \Delta \varrho^3.$$

Формула Тейлора (6) в принятых обозначениях для случая $n=2$ примет вид

$$f(x, y) = f(a, b) + \Delta x f'_x(a, b) + \Delta y f'_y(a, b) + \\ + \frac{1}{2!} [\Delta x^2 f''_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a, b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a, b)] + \alpha_0 \Delta \varrho^3. \quad (6')$$

При любом n формула Тейлора имеет аналогичный вид.

§ 17. Максимум и минимум функции нескольких переменных

Определение 1. Мы говорим, что функция $z=f(x, y)$ имеет *максимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$ (т. е. при $x=x_0$ и $y=y_0$), если

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

для всех точек (x, y) , достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Совершенно аналогично говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

для всех точек (x, y) , достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции, т. е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Пример 1. Функция

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

достигает минимума при $x=1$, $y=2$, т. е. в точке $(1, 2)$. Действительно, $f(1, 2) = -1$, а так как $(x-1)^2$ и $(y-2)^2$ всегда положительны при $x \neq 1$, $y \neq 2$, то

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1,$$

то есть

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

Геометрическая картина, соответствующая данному случаю, изображена на рисунке 184.

Пример 2. Функция

$$z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$$

при $x=0, y=0$ (т. е. в начале координат) достигает максимума (рис. 185).

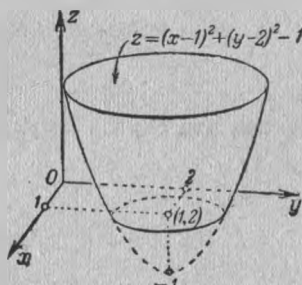


Рис. 184.

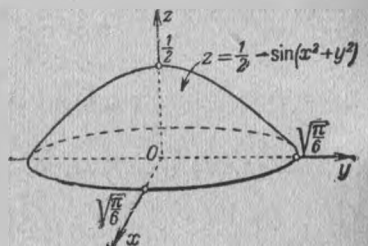


Рис. 185.

Действительно,

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

Возьмем внутри окружности $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ точку (x, y) , отличную от точки $(0, 0)$; тогда при $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$ будет

$$\sin(x^2 + y^2) > 0$$

и поэтому

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2},$$

т. е.

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

Данное выше определение максимума и минимума функции можно перефразировать следующим образом.

Положим $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$; тогда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x, y)$ достигает максимума в точке $M(x_0, y_0)$.

2) Если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x, y)$ достигает *минимума* в точке $M(x_0, y_0)$.

Эти формулировки переносятся без изменения на функции любого числа переменных.

Теорема 1. (Необходимые условия экстремума.) Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Действительно, дадим переменному y определенное значение, именно $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одного переменного x . Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум (максимум или минимум), то, следовательно, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или равно нулю, или не су-

ществует. Совершенно аналогично можно доказать, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или равно нулю или не существует.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения в тех случаях, в которых мы заранее уверены в существовании максимума или минимума. В противном случае требуется дополнительное исследование.

Так, например, функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$,

которые обращаются в нуль при $x=0$ и $y=0$. Но эта функция при указанных значениях не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно, эта функция равна нулю в начале координат и принимает в как угодно близких точках от начала координат как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, значение нуль не является ни максимумом, ни минимумом (рис. 186).

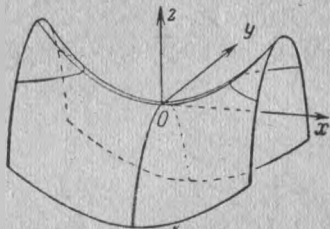


Рис. 186.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (или не существует), называются *критическими* точками функции $z = f(x, y)$. Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то (в силу теоремы 1) это может случиться только в критической точке.

Для исследования функции в критических точках установим достаточные условия экстремума функции двух переменных:

Теорема 2. Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того,

y_0) является критической точкой функции $f(x, y)$,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда при $x = x_0, y = y_0$:

1) $f(x, y)$ имеет максимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

2) $f(x, y)$ имеет минимум, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ и } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

3) $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0;$$

4) если $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$, то экстремум

может быть и может не быть (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Доказательство. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x, y)$ (формула (6) § 16). Полагая

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \alpha_0 (\Delta \varrho)^3, \end{aligned}$$

где $\Delta \varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, а α_0 стремится к нулю при $\Delta \varrho \rightarrow 0$.

По условию

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \alpha_0 (\Delta \varrho)^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим теперь значения вторых частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$ через A, B, C :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{M_0} = A; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} = B; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{M_0} = C.$$

Обозначим через φ угол между направлением отрезка M_0M , где M есть точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, и осью Ox ; тогда

$$\Delta x = \Delta \varrho \cos \varphi; \quad \Delta y = \Delta \varrho \sin \varphi.$$

Подставляя эти выражения в формулу для Δf , найдем:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 [A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + 2\alpha_0 \Delta \varrho]. \quad (2)$$

Предположим, что $A \neq 0$.

Разделив и умножив на A выражение, стоящее в квадратных скобках, получим:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi}{A} + 2\alpha_0 \Delta \varrho \right]. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь четыре возможных случая.

1) Пусть $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Тогда в числителе дроби стоит сумма двух неотрицательных величин. Они одновременно в нуль не обращаются, так как первый член обращается в нуль при $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$, второй при $\sin \varphi = 0$.

Если $A < 0$, то дробь есть отрицательная величина, не обращающаяся в нуль. Обозначим ее через $-m^2$; тогда

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta \varrho],$$

где m не зависит от $\Delta \varrho$, $\alpha_0 \Delta \varrho \rightarrow 0$ при $\Delta \varrho \rightarrow 0$. Следовательно, при достаточно малых $\Delta \varrho$ будет:

$$\Delta f < 0,$$

или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Но тогда для всех точек $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, достаточно близких к точке (x_0, y_0) , имеет место неравенство

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0),$$

а это означает, что в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ достигает максимума.

2) Пусть $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Тогда, аналогично рассуждая, получим:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 [m^2 + 2\alpha_0 \Delta \varrho]$$

или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

т. е. $f(x, y)$ имеет минимум в точке (x_0, y_0) .

3') Пусть $AC - B^2 < 0$, $A > 0$. В этом случае функция не имеет ни максимума, ни минимума. Функция возрастает, когда мы движемся из точки (x_0, y_0) по одним направлениям, и убывает, когда мы движемся по другим направлениям. Действительно, при перемещении вдоль луча $\varphi = 0$ имеем:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 [A + 2\alpha_0 \Delta \varrho] > 0;$$

при движении вдоль этого луча функция возрастает. Если же перемещаться вдоль луча $\varphi = \varphi_0$, такого, что $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{A}{B}$, то при $A > 0$ будет:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \sin^2 \varphi_0 + 2\alpha_0 \Delta \varrho \right] < 0;$$

при движении вдоль этого луча функция убывает.

3'') Пусть $AC - B^2 < 0$, $A < 0$. В этом случае функция тоже не имеет ни максимума, ни минимума. Исследование проводится так же, как и в случае 3'.

3''') Пусть $AC - B^2 < 0$, $A = 0$. Тогда $B \neq 0$, и равенство (2) можно переписать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 [\sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi) + 2\alpha_0 \Delta \varrho].$$

При достаточно малых значениях φ выражение, стоящее в круглых скобках, сохраняет знак, так как оно близко к $2B$, а множитель $\sin \varphi$ меняет знак в зависимости от того, будет ли φ больше нуля или меньше нуля (после выбора $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$ мы можем ϱ взять настолько малым, что $2\alpha_0$ не будет изменять знак всей квадратной скобки). Следовательно, и в этом случае Δf меняет знак при различных φ , т. е. при различных Δx и Δy , следовательно, и в этом случае нет ни максимума, ни минимума.

Таким образом, каков бы ни был знак A , имеем всегда следующее положение:

Если $AC - B^2 < 0$ в точке (x_0, y_0) , то функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума. В этом случае поверхность, служащая графиком функции, может вблизи этой точки иметь, например, форму седла (см. выше рис. 186). Говорят, что функция имеет в этой точке *минимакс*.

4) Пусть $AC - B^2 = 0$. В этом случае на основании формул (2) и (3) сделать заключения о знаке Δf нельзя. Так, например, при $A \neq 0$ будем иметь:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta \varrho)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2}{A} + 2\alpha_0 \Delta \varrho \right];$$

при $\varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{A}{B} \right)$ знак Δf определяется знаком $2\alpha_0$, здесь

требуется специальное дальнейшее исследование (например, с помощью формулы Тейлора более высокого порядка или каким-либо иным способом). Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Пример 3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

получаем:

$$x = -\frac{4}{3}; \quad y = \frac{1}{3}.$$

2) Находим производные второго порядка в критической точке $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и определяем характер критической точки:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, в точке $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ данная функция имеет минимум, а именно:

$$z_{\min} = -\frac{4}{3}.$$

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. 1) Найдем критические точки, пользуясь необходимыми условиями экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки:

$$x_1 = 1, y_1 = 1 \text{ и } x_2 = 0, y_2 = 0.$$

2) Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Исследуем характер первой критической точки:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=1, y=1} = 6; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{x=1, y=1} = -3; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=1, y=1} = 6;$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0; \quad A > 0.$$

Следовательно, в точке $(1; 1)$ данная функция имеет минимум, именно:

$$z_{\min} = -1.$$

4) Исследуем характер второй критической точки $M_2(0, 0)$:

$$\begin{aligned} A &= 0; \quad B = -3; \quad C = 0; \\ AC - B^2 &= -9 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, во второй критической точке функция не имеет ни максимума, ни минимума (минимакс).

Пример 5. Разложить данное положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

Решение. Обозначим слагаемые: первое через x , второе через y ; тогда третье будет $a - x - y$. Произведение этих слагаемых равно

$$u = xy(a - x - y).$$

По условию задачи $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, т. е. $x + y < a$, $u > 0$. Следовательно, x и y могут принимать значения, принадлежащие области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

Найдем частные производные функции u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - 2x - y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - 2y - x).$$

Приравняв производные нулю, получим систему уравнений

$$y(a - 2x - y) = 0; \quad x(a - 2y - x) = 0.$$

Решая эту систему, находим критические точки:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & M_1(0, 0); \\ x_2 &= 0, & y_2 &= a, & M_2(0, a); \\ x_3 &= a, & y_3 &= 0, & M_3(a, 0); \\ x_4 &= \frac{a}{3}, & y_4 &= \frac{a}{3}, & M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right). \end{aligned}$$

Первые три точки лежат на границе области, последняя — внутри. На границе области функция u равна нулю, а внутри области она положительна;

следовательно, в точке $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ функция u имеет максимум (так как это единственная экстремальная точка внутри треугольника). Максимальное значение произведения есть

$$u_{\max} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Проведем исследование характера критических точек, пользуясь достаточными условиями. Найдем частные производные второго порядка функции u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

В точке $M_1(0, 0)$ имеем $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a$; $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;
 $AC - B^2 = -a^2 < 0$. Следовательно, в точке M_1 нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_2(0, a)$ имеем $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a$; $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a$;
 $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Значит, в точке M_2 тоже нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_3(a, 0)$ имеем $A = 0$; $B = -a$; $C = -2a$;

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

И в точке M_3 нет ни максимума, ни минимума. В точке $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ имеем

$$A = -\frac{2a}{3}; \quad B = -\frac{a}{3}; \quad C = -\frac{2a}{3};$$

$$AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0; \quad A < 0.$$

Следовательно, в точке M_4 имеем максимум.

§ 18. Максимум и минимум функции нескольких переменных, связанных данными уравнениями (условные максимумы и минимумы)

Во многих задачах на разыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к разысканию максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями (например, они должны удовлетворять данным уравнениям).

Рассмотрим, например, такую задачу. Из данного куска жести площадью $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Обозначим длину, ширину и высоту коробки через x, y, z . Задача сводится к разысканию максимума функции

$$v = xyz$$

при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Здесь мы имеем задачу на *условный экстремум*: переменные x, y, z связаны условием $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. В настоящем параграфе мы рассмотрим методы решения таких задач.

Рассмотрим сначала вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если эти переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y), \quad (1)$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (2)$$

При наличии условия (2) из двух переменных x и y независимым будет только одно, например x , так как y определяется из равенства (2) как функция от x . Если бы мы разрешили уравнение (2) относительно y , то, вставляя в равенство (1) вместо y найденное выражение, получили бы функцию одного переменного x и свели бы задачу к задаче об исследовании на максимум и минимум функции одного независимого переменного x .

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнения (2) относительно x или y . При тех значениях x , при которых функция u может иметь максимум или минимум, производная от u по x должна обращаться в нуль.

Из (1) находим $\frac{du}{dx}$, помня, что y есть функция от x :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Из равенства (2) находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4)$$

Это равенство удовлетворяется для всех x и y , удовлетворяющих уравнению (2) (см. § 11 гл. VIII).

Умножив члены равенства (4) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (3), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума. Подберем λ так, чтобы для значений x и y , соответствующих экстремуму функции u , вторая скобка в равенстве (5) обратилась в нуль *)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

*) Для определенности будем предполагать, что в критических точках

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0.$$

$y=z$. Но в таком случае из уравнения (10) получаем $x=y=z=\sqrt[n]{\frac{a}{3}}$. Это — единственная система значений x , y и z , при которых может быть максимум или минимум.

Можно доказать, что полученное решение дает максимум. Впрочем, это ясно и из геометрических соображений (в условиях задачи объем коробки не может быть неограниченно большим; следовательно, естественно ожидать, что при каких-то определенных значениях сторон этот объем будет наибольшим).

Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно $\sqrt[n]{\frac{a}{3}}$.

Пример 2. Определить наибольшее значение корня n -й степени из произведения чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ при условии, что их сумма равна данному числу a . Следовательно, задача ставится так: требуется найти максимум функции $u = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ при условии

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n - a &= 0 \\ (x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Образует вспомогательную функцию

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a).$$

Находим ее частные производные:

$$\begin{aligned} F'_{x_1} &= \frac{1}{n} \frac{x_2 x_3 \dots x_n}{(x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \quad \text{или} \quad u = -n\lambda x_1, \\ F'_{x_2} &= \frac{1}{n} \frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \quad \text{или} \quad u = -n\lambda x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ F'_{x_n} &= \frac{1}{n} \frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \quad \text{или} \quad u = -n\lambda x_n. \end{aligned}$$

Из последних равенств находим:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

а на основании уравнения (12) получаем:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}.$$

По смыслу задачи эти значения дают максимум функции $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$, равный $\frac{a}{n}$.

Таким образом, для любых положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, связанных соотношением $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$, выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{a}{n} \quad (13)$$

(так как, по доказанному, $\frac{a}{n}$ является наибольшим значением этой функции). Подставляя теперь в неравенство (13) вместо a его значение, полученное из

равенства (12), найдем:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \quad (14)$$

Это неравенство справедливо для любых положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Выражение, стоящее в левой части равенства (14), называется *средним геометрическим* этих чисел. Таким образом, среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

§ 19. Особые точки кривой

Понятие частной производной используется при исследовании кривых.

Пусть кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Угловой коэффициент касательной к кривой определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(см. § 11 гл. VIII).

Если в данной точке $M(x, y)$ рассматриваемой кривой по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не обращается в нуль,

то в этой точке вполне определяется или $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$. Кривая $F(x, y) = 0$ в такой точке имеет вполне определенную касательную. В этом случае точка $M(x, y)$ называется *обыкновенной* точкой.

Если же в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = 0,$$

то угловой коэффициент касательной становится неопределенным.

Определение. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривой $F(x, y) = 0$ обе частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обращаются в нуль, то такая точка называется *особой точкой* кривой. Следовательно, особая точка кривой определяется системой уравнений

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Естественно, что не всякая кривая имеет особые точки. Так, например, для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

очевидно,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2};$$

производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обращаются в нуль только при $x=0$, $y=0$, но эти значения x и y не удовлетворяют уравнению эллипса. Следовательно, эллипс не имеет особых точек.

Не предпринимая подробного исследования поведения кривой вблизи особой точки, рассмотрим несколько примеров кривых, имеющих особые точки.

Пример 1. Исследовать особые точки кривой

$$y^2 - x(x-a)^2 = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. В данном случае $F(x, y) = y^2 - x(x-a)^2$, поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-a)(a-3x); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Решая совместно три уравнения:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

находим единственную удовлетворяющую им систему значений x и y :

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Следовательно, точка $M_0(a, 0)$ есть особая точка кривой.

Исследуем поведение кривой вблизи особой точки и построим кривую. Перепишем данное уравнение в виде

$$y = \pm (x-a) \sqrt{x}.$$

Из этой формулы следует, что кривая: 1) определена лишь при $x \geq 0$; 2) симметрична относительно оси Ox ; 3) пересекает ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(a, 0)$. Последняя точка, как было указано, является особой.

Мы рассмотрим сначала ту часть кривой, которая соответствует знаку $+$:

$$y = (x-a) \sqrt{x}.$$

Найдем первую и вторую производные от y по x :

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

При $x=0$ имеем $y' = \infty$. Следовательно, кривая касается оси Oy в начале координат. При $x = \frac{a}{3}$ имеем $y' = 0$, $y'' > 0$, т. е. при $x = \frac{a}{3}$ функция y имеет минимум:

$$y = -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

На отрезке $0 < x < a$ имеем $y < 0$; при $x > \frac{a}{3}$ будет $y' > 0$; при $x \rightarrow \infty$ будет $y \rightarrow \infty$. При $x=a$ имеем $y' = \sqrt{a}$, т. е. в особой точке $M_0(a, 0)$ ветвь кривой $y = (x-a) \sqrt{x}$ имеет касательную $y = \sqrt{a}(x-a)$.

Так как вторая ветвь кривой $y = -(x-a)\sqrt{x}$ симметрична с первой относительно оси Ox , то, следовательно, в особой точке кривая имеет и вторую касательную (ко второй ветви)

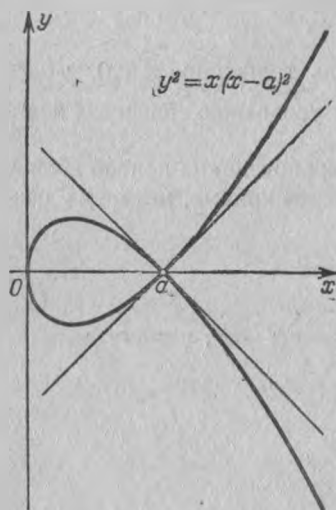


Рис. 187

$$y = -\sqrt{a}(x-a).$$

Через особую точку кривая проходит дважды. Такая точка называется *узловой точкой*.

Рассмотренная кривая изображена на рисунке 187.

Пример 2. Исследовать на особые точки кривую (полукубическая парабола)

$$y^2 - x^3 = 0.$$

Решение. Координаты особых точек определяются из системы уравнений:

$$y^2 - x^3 = 0; \quad 3x^2 = 0; \quad 2y = 0.$$

Следовательно, $M_0(0, 0)$ есть особая точка.

Перепишем данное уравнение в виде

$$y = \pm \sqrt{x^3}.$$

Для построения кривой исследуем сначала ветвь, которой в уравнении соответствует знак плюс; ветвь кривой, соответствующая знаку минус, симметрична с первой относительно оси Ox .

Функция y определена только при $x \geq 0$, неотрицательна и возрастает при возрастании x .

Найдем первую и вторую производные от функции $y = \sqrt{x^3}$:

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}; \quad y'' = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

При $x=0$ имеем $y=0$, $y'=0$. Следовательно, рассматриваемая ветвь кривой имеет в начале координат касательную $y=0$. Вторая ветвь кривой $y = -\sqrt{x^3}$ также проходит через начало координат и имеет ту же касательную $y=0$. Таким образом, две различные ветви кривой встречаются в начале координат, имеют одну и ту же касательную и расположены от касательной по разные стороны. Такая особая точка называется *точкой возврата первого рода* (рис. 188).

З а м е ч а н и е. Кривую $y^2 - x^3 = 0$ можно рассматривать как предельный случай кривой $y^2 = x(x-a)^2 = 0$ (рассмотренной в примере 1), когда $a \rightarrow 0$, т. е. когда петля кривой стягивается в точку.

Пример 3. Исследовать кривую $(y-x^2)^2 - x^3 = 0$.

Решение. Координаты особых точек определяются системой уравнений

$$-4x(y-x^2) - 5x^2 = 0; \quad 2(y-x^2) = 0,$$

которая имеет единственное решение: $x=0$, $y=0$. Следовательно, начало координат есть особая точка.

Перепишем данное уравнение в виде $y = x^2 \pm \sqrt{x^3}$. Из этого уравнения следует, что x может принимать значения от 0 до $+\infty$.

Определим производные первого и второго порядка:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2} \sqrt{x^3}; \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x}.$$

Исследуем ветви кривой, соответствующие знакам плюс и минус, в отдельности. В обоих случаях при $x=0$ имеем: $y=0$, $y'=0$, т. е. для обеих ветвей ось Ox является касательной. Рассмотрим сначала ветвь

$$y = x^2 + \sqrt{x^3}.$$

При возрастании x от 0 до ∞ y возрастает от 0 до ∞ . Вторая ветвь

$$y = x^2 - \sqrt{x^3}$$

пересекает ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

При $x = \frac{16}{25}$ функция $y = x^2 - \sqrt{x^3}$ имеет максимум. Если $x \rightarrow +\infty$, то $y \rightarrow -\infty$.

Таким образом, в данном случае в начале координат встречаются две ветви кривой; обе ветви имеют одну и ту же касательную и расположены

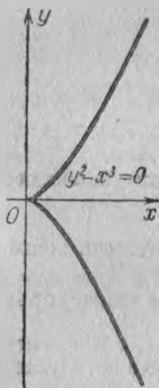


Рис. 188.

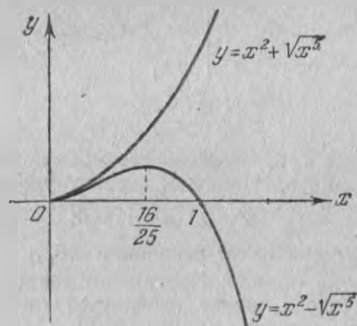


Рис. 189.

по одну сторону от касательной вблизи точки касания. Такая особая точка называется *точкой возврата второго рода*. График рассматриваемой функции изображен на рисунке 189.

Пример 4. Исследовать кривую $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

Решение. Начало координат есть особая точка. Для исследования кривой вблизи этой точки перепишем уравнение кривой в виде

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Так как уравнение кривой содержит только четные степени переменных, то кривая симметрична относительно осей координат и, следовательно, достаточно исследовать часть кривой, соответствующую положительным значениям x и y . Из последнего уравнения следует, что x может изменяться на отрезке от 0 до 1, т. е. $0 \leq x \leq 1$.

Вычислим первую производную для той ветви кривой, которая является графиком функции $y = +x^2 \sqrt{1 - x^2}$:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При $x=0$ имеем $y=0$, $y'=0$. Следовательно, в начале координат кривая касается оси Ox .

При $x=1$ имеем $y=0$, $y'=\infty$; следовательно, в точке $(1, 0)$ касательная параллельна оси Oy . При $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ функция имеет максимум (рис. 190).

В начале координат (в особой точке) две ветви кривой, соответствующие знакам плюс и минус перед корнем, взаимно касаются. Такая особая точка называется *точкой соприкосновения*.

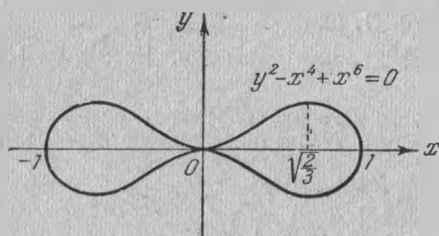


Рис. 190.

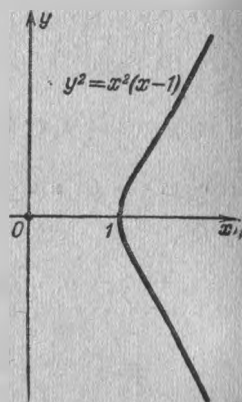


Рис. 191.

Пример 5. Исследовать кривую $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

Решение. Напишем систему уравнений, определяющих особые точки:

$$y^2 - x^2(x-1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Эта система имеет решение $x=0$, $y=0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ есть особая точка кривой. Перепишем данное уравнение в виде $y = \pm x \sqrt{x-1}$. Очевидно, что x может изменяться от 1 до $+\infty$, а также принимать значение 0 (в последнем случае $y=0$).

Исследуем ветвь кривой, соответствующую знаку плюс перед корнем. При увеличении x от 1 до ∞ y увеличивается от 0 до ∞ . Производная

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

При $x=1$ имеем $y'=\infty$; следовательно, в точке $(1, 0)$ касательная параллельна оси Oy .

Вторая ветвь кривой, соответствующая знаку минус, симметрична с первой относительно оси Ox .

Точка $(0, 0)$ имеет координаты, удовлетворяющие уравнению, и, следовательно, принадлежит кривой, но вблизи нее нет других точек кривой (рис. 191). Такая особая точка называется *изолированной особой точкой*.

Упражнения к главе VIII

Найти частные производные следующих функций:

1. $z = x^2 \sin^2 y$. Отв. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$. 2. $z = x y^2$.

Отв. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x y^{2-1} 2y \ln x$.

3. $u = x^{x^2+y^2+z^2}$.

Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y e^{x^2+y^2+z^2}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z e^{x^2+y^2+z^2}$.

$$4. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad 5. z = \operatorname{arctg}(xy).$$

$$\text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}. \quad 6. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \quad 7. z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 8. u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} -$$

$$-\frac{z}{y^2} e^{\frac{z}{y}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{\frac{z}{y}}. \quad 9. z = \arcsin(x+y). \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$10. z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Найти полные дифференциалы от следующих функций:

$$11. z = x^2 + xy^3 + \sin y. \quad \text{Омс.} \quad dz = (2x + y^3) dx + (2xy + \cos y) dy.$$

$$12. z = \ln(xy). \quad \text{Омс.} \quad dz = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}. \quad 13. z = e^{x^2+y^2}. \quad \text{Омс.} \quad dz = 2e^{x^2+y^2} \times$$

$$\times (x dx + y dy). \quad 14. u = \operatorname{tg}(3x-y) + 6^{y+z}. \quad \text{Омс.} \quad du = \frac{3dx}{\cos^2(3x-y)} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)} + 6^{y+z} \ln 6 \right) dy + 6^{y+z} \ln 6 dz. \quad 15. w = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$\text{Омс.} \quad dw = \frac{y dx - x dy}{|y| \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$16. \text{Вычислить } f_x(2, 3) \text{ и } f_y'(2, 3), \text{ если } f(x, y) = x^2 + y^3. \text{Омс. } f_x'(2, 3) = 4, \\ f_y'(2, 3) = 27.$$

$$17. \text{Вычислить } df(x, y) \text{ при } x=1, y=0; dx=\frac{1}{2}, dy=1/4, \text{ если} \\ f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}. \text{Омс. } 1/2.$$

$$18. \text{Составить формулу, дающую при малых абсолютных значениях ве-} \\ \text{личин } x, y \text{ и } z \text{ приближенное выражение для } \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}.$$

$$\text{Омс. } 1 + \frac{1}{2}(x-y-z).$$

$$19. \text{То же для } \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}. \text{Омс. } 1 + \frac{1}{2}(x-y-z).$$

$$20. \text{Найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = u + v^2; \quad u = x^2 + \sin y, \quad v = \ln(x+y). \\ \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2v \frac{1}{x+y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2v \frac{1}{x+y}.$$

$$21. \text{Найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}; \quad u = -\cos x; \quad v = \cos x \\ \text{Омс.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

22. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^2 + y^2$. *Омс.* $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v} (\cos x - 6x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v} (0 - 2 \cdot 2y) = -4ye^{u-2v}$.

23. Найти полные производные данных функций: $z = \arcsin(u+v)$; $u = \sin x \cos \alpha$; $v = \cos x \sin \alpha$. *Омс.* $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, если $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, если $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$.

24. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y = a \sin x$; $z = \cos x$. *Омс.* $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{ax} \sin x$.

25. $z = \ln(1-x^2)$; $x = \sqrt{\sin \theta}$; $\frac{dz}{d\theta} = -2 \operatorname{tg} \theta$.

Найти производные от неявных функций от x , заданных уравнениями

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$. 27. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$.

28. $y^x = x^y$. *Омс.* $\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - xy \ln x}$. 29. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.

Омс. $\frac{dy}{dx} = \frac{y [\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x [x + e^{xy} - \cos(xy)]}$. 30. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Омс. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$. 31. $u - v \operatorname{tg} aw = 0$; найти $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Омс. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{\sin 2aw}{2av}$. 32. $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$; показать,

что $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$. 33. $\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{z}\right)$; показать, что $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, какова бы ни была дифференцируемая функция F .

Вычислить частные производные второго порядка:

34. $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$. *Омс.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.

35. $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$. *Омс.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x$.

36. Доказать, что если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

37. Доказать, что если $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}$, то $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$.

38. Доказать, что если $z = \ln(x^2 + y^2)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

39. Доказать, что если $z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax)$, то $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

при любых дважды дифференцируемых φ и ψ .

40. Найти производную от функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1, 2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° . *Омс.* $5 + 11\sqrt{3}/2$.

41. Найти производную от функции $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точке $M(2, 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5, 5)$. *Отв.* 9,4.

42. Найти производную функции $f(x, y)$ в направлении: 1) Биссектрисы координатного угла Oxy . *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. 2) Отрицательной полуоси

Ox . *Отв.* $-\frac{\partial f}{\partial x}$.

43. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$. Показать, что в точке $M(2/3, -4/3)$ производная в любом направлении равна нулю («функция стационарна»).

44. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ определить треугольник с наибольшей площадью. *Отв.* Равносторонний треугольник.

45. Найти прямоугольный параллелепипед, который имеет наибольший объем при данной полной поверхности S . *Отв.* Куб с ребром $\sqrt{S/6}$.

46. Найти расстояние между двумя прямыми в пространстве, уравнения которых $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. *Отв.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Исследовать на максимум и минимум функции: 47. $z = x^2 y^2 (a - x - y)$.

Отв. Максимум z при $x = a/2$; $y = a/3$. 48. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Отв. Минимум z при $x = y = 1/\sqrt[3]{3}$. 49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ ($0 \leq x \leq \pi/2$; $0 \leq y \leq \pi/2$). *Отв.* Максимум z при $x = y = \pi/3$.

50. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ ($0 \leq x \leq \pi$; $0 \leq y \leq \pi$). *Отв.* Максимум z при $x = y = \pi/3$.

Найти особые точки следующих кривых, исследовать их характер и составить уравнения касательных в них:

51. $x^2 + y^3 - 3axy = 0$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — узел; $x = 0$, $y = 0$ — уравнения касательных.

52. $a^4 y^2 = x^4 (a^2 - x^2)$. *Отв.* В начале координат точка соприкосновения; двойная касательная $y^2 = 0$.

53. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — точка возврата первого рода, $y^2 = 0$ — касательная.

54. $y^2 = x^2(9 - x^2)$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — узел; $y = \pm 3x$ — уравнения касательных.

55. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^2 = 0$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — точка возврата второго рода; $y^2 = 0$ — двойная касательная.

56. $y^3 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2)$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — узел; $y = \pm x$ — уравнения касательных.

57. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = x^2 y^2$. *Отв.* $M_0(0, 0)$ — изолированная точка.

58. Показать, что кривая $y = x \ln x$ имеет концевую точку в начале координат и касательную — ось Oy .

59. Показать, что кривая $y = \frac{x}{1 + e^x}$ имеет угловую точку в начале координат и что касательные в этой точке: справа $y = 0$, слева $y = x$.

ГЛАВА IX

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения кривой в пространстве

Рассмотрим вектор $\overline{OA} = \mathbf{r}$, начало которого совпадает с началом координат, а концом является некоторая точка $A(x, y, z)$ (рис. 192). Такой вектор называют *радиусом-вектором*.

Выразим этот вектор через проекции на оси координат:

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk. \quad (1)$$

Пусть проекции вектора $\mathbf{r}$ суть функции некоторого параметра t

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тогда формулу (1) можно переписать так:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \quad (1')$$

или коротко

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1'')$$

При изменении t изменяются x, y, z , и точка A — конец вектора $\mathbf{r}$ — опишет в пространстве некоторую линию, которую называют *годографом* вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Уравнение (1') или (1'') называют *векторным уравнением* линии в пространстве. Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями* линии в пространстве. С помощью этих уравнений для каждого значения t определяются координаты x, y, z соответствующей точки кривой.

Замечание. Кривая в пространстве может быть также определена как геометрическое место точек пересечения двух поверхностей; следовательно, такая кривая может быть задана двумя уравнениями двух

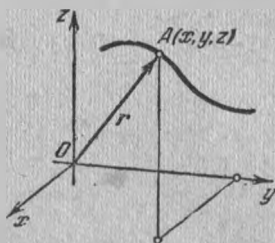


Рис. 192.

поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Так, например, уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1$$

являются уравнениями окружности, получающейся в пересечении сферы и плоскости (рис. 193).

Итак, кривая в пространстве может быть задана или параметрическими уравнениями (2), или двумя уравнениями поверхностей (3).

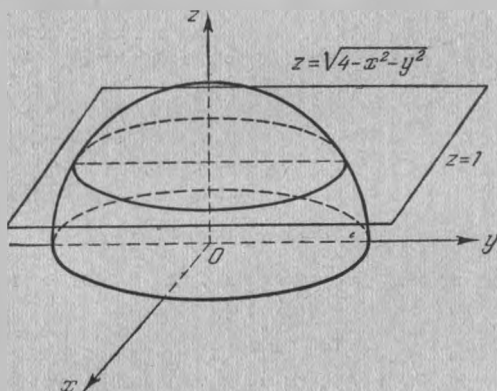


Рис. 193.

Если мы исключим параметр t из уравнений (2) и получим два уравнения, связывающие x , y , z , то тем самым осуществим переход от параметрического способа задания линии к заданию ее с помощью поверхностей. Обратно, если положим $x = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ — произвольная функция) и найдем y и z как функции от t из уравнений

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z] = 0, \quad \Phi_2[\varphi(t), y, z] = 0,$$

то осуществим переход от задания линии с помощью поверхностей к параметрическому способу задания.

Пример 1. Уравнения

$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

являются параметрическими уравнениями прямой. Исключая параметр t , получим два уравнения, каждое из которых есть уравнение плоскости. Например, если из первого уравнения почленно вычесть второе и третье, получим $x - y - z = -3$. Вычитая же из первого учетверенное третье, получим: $x - 4z = -9$. Таким образом, заданная прямая является линией пересечения плоскостей $x - y - z + 3 = 0$ и $x - 4z + 9 = 0$.

Пример 2. Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса a , ось которого совпадает с осью Oz (рис. 194). На данный цилиндр будем навивать

прямоугольный треугольник C_1AC так, чтобы вершина A треугольника лежала в точке пересечения образующей цилиндра с осью Ox , а катет AC_1 нависал на круговое сечение цилиндра, лежащее в плоскости Oxy . Тогда гипотенуза образует на цилиндре линию, которая называется *винтовой линией*.

Напишем уравнение винтовой линии, обозначая через x, y, z координаты ее переменной точки M и через t угол AOP (см. рис. 194). Тогда

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = PM = AP \operatorname{tg} \theta,$$

где через θ обозначен острый угол треугольника C_1AC . Заметив, что $\bar{AP} = at$, так как $\bar{AP}$ есть дуга круга радиуса a , соответствующая центральному углу t ,

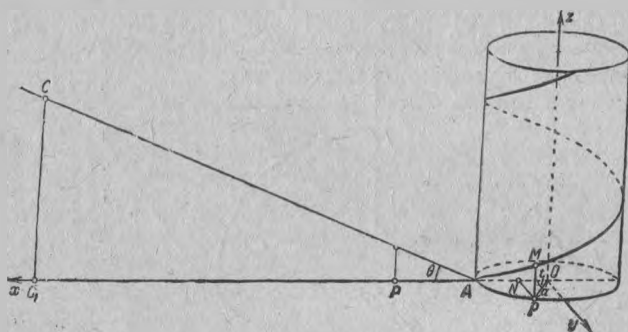


Рис. 194.

и обозначив $\operatorname{tg} \theta$ через m , получаем параметрические уравнения винтовой линии в виде

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt.$$

(здесь t —параметр), или в векторной форме:

$$r = ia \cos t + ja \sin t + kamt.$$

Из параметрических уравнений винтовой линии легко исключить параметр t ; возводя первые два уравнения в квадрат и складывая их, найдем $x^2 + y^2 = a^2$. Это—уравнение цилиндра, на котором расположена винтовая линия. Далее, деля почленно второе уравнение на первое и подставляя в полученное уравнение значение t , найденное из третьего уравнения, найдем уравнение другой поверхности, на которой расположена винтовая линия:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

Это—так называемая *винтовая поверхность (геликоид)*. Ее можно получить как след движения полупрямой, параллельной плоскости Oxy , если конец этой полупрямой находится на оси Oz , причем сама полупрямая с постоянной угловой скоростью вращается вокруг оси Oz и с постоянной скоростью поднимается вверх так, что ее конец перемещается вдоль оси Oz . Винтовая линия является линией пересечения этих двух поверхностей. Поэтому ее можно задать двумя уравнениями:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

§ 2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента. Уравнение касательной к кривой.

Уравнение нормальной плоскости

Вернемся к формулам (1') и (1'') предыдущего параграфа:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$$

или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

При изменении t вектор $\mathbf{r}$ изменяется в общем случае по величине и по направлению. Говорят, что $\mathbf{r}$ есть *векторная функция* от скалярного аргумента t . Допустим, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t) = \chi_0.$$

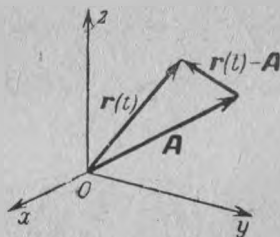


Рис. 195.

Тогда говорят, что вектор $\mathbf{r}_0 = \varphi_0\mathbf{i} + \psi_0\mathbf{j} + \chi_0\mathbf{k}$ есть предел вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, и пишут (рис. 195)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$

Из последнего равенства следуют очевидные равенства:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}_0|.$$

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции скалярного аргумента

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad (1)$$

предполагая, что начало вектора $\mathbf{r}(t)$ находится в начале координат. Мы знаем, что последнее уравнение является уравнением некоторой пространственной кривой.

Возьмем какое-нибудь фиксированное значение t , соответствующее определенной точке M на кривой, и дадим t приращение Δt ; тогда

мы получим вектор

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t)\mathbf{i} + \psi(t + \Delta t)\mathbf{j} + \chi(t + \Delta t)\mathbf{k},$$

который определяет на кривой некоторую точку M_1 (рис. 196). Найдем приращение вектора

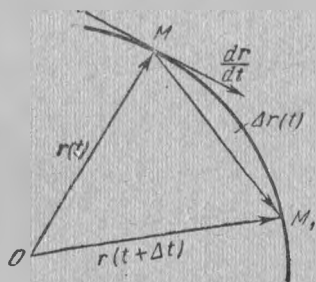


Рис. 196.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ &= [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]\mathbf{i} + \\ &+ [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]\mathbf{j} + \\ &+ [\chi(t + \Delta t) - \chi(t)]\mathbf{k}. \end{aligned}$$

На рисунке 196, где $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$, $\overline{OM_1} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$, это приращение изображается вектором $\overline{MM_1} = \Delta \mathbf{r}(t)$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ приращения векторной функции к приращению скалярного аргумента; это, очевидно, есть вектор, коллинеарный с вектором $\Delta \mathbf{r}(t)$, так как получается из него умножением на скалярный множитель $\frac{1}{\Delta t}$. Мы можем записать этот вектор так:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\chi(t + \Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}\mathbf{k}.$$

Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют производные при выбранном значении t , то множители, стоящие при $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ обратятся в производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$. Следовательно, в этом случае предел $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ существует и равен вектору $\varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}.$$

Вектор, определяемый последним равенством, называется *производной* от вектора $\mathbf{r}(t)$ по скалярному аргументу t . Производную обозначают символом $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ или $\mathbf{r}'$.

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}' = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (2')$$

Выясним направление вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 приближается к точке M , то направление секущей MM_1 в пределе дает направление касательной. Следовательно, вектор производной $\frac{dr}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M . Длина вектора $\frac{dr}{dt}$ определяется формулой *)

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \quad (3)$$

На основании полученных результатов легко написать уравнение касательной к кривой

$$r = xi + yj + zk$$

в точке $M(x, y, z)$, имея в виду, что в уравнении кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x, y, z)$, имеет вид

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p},$$

где X, Y, Z — координаты переменной точки прямой, а m, n, p — величины, пропорциональные направляющим косинусам этой прямой (т. е. проекциям направляющего вектора прямой).

С другой стороны, мы установили, что вектор

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

направлен по касательной. Поэтому проекции этого вектора являются числами, пропорциональными направляющим косинусам касательной, а значит и числам m, n, p . Следовательно, уравнение касательной будет иметь вид

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \quad (4)$$

Пример 1. Написать уравнение касательной к винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

при произвольном значении t и при $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

По формуле (4) имеем:

$$\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - amt}{am}.$$

*) Мы будем предполагать, что в рассматриваемых точках $\left| \frac{dr}{dt} \right| \neq 0$.

В частности, при $t = \frac{\pi}{4}$ получим:

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

Так же как и в случае плоской кривой, прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью* к пространственной кривой в данной точке. Нормалей к данной пространственной кривой в данной точке можно, очевидно, провести бесчисленное множество. Все они лежат в плоскости, перпендикулярной к касательной прямой. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью*.

Из условия перпендикулярности нормальной плоскости к касательной (4) получаем уравнение нормальной плоскости:

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{dt}(Z-z) = 0. \quad (5)$$

Пример 2. Написать уравнение нормальной плоскости к винтовой линии в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. На основании примера 1 и формулы (5) получаем:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Выведем теперь уравнение касательной прямой и нормальной плоскости пространственной кривой в случае, когда эта кривая дана уравнениями

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \quad (6)$$

Выразим координаты x, y, z этой кривой как функции некоторого параметра t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (7)$$

Будем предполагать, что $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ — дифференцируемые функции от t .

Подставляя в уравнения (6) вместо x, y, z выраженные через t их значения для точек кривой, получим два тождества относительно t :

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \quad (8a)$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0. \quad (8б)$$

Дифференцируя тождества (8a) и (8б) по t , находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}; \quad (10)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}.$$

Мы здесь предполагаем, разумеется, что выражение $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \neq 0$, однако можно доказать, что окончательные формулы (11) и (12) (см. ниже) справедливы и в том случае, когда это выражение равно нулю, если только хоть один из определителей, фигурирующих в окончательных формулах, отличен от нуля.

Из равенств (10) получаем:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}}.$$

Следовательно, на основании формулы (4) уравнение касательной прямой будет иметь вид

$$\frac{X-x}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}},$$

или, пользуясь определителями,

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}}. \quad (11)$$

Нормальная плоскость представляется уравнением

$$(X-x) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y-y) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (Z-z) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Эти формулы имеют смысл только тогда, когда хотя бы один из фигурирующих в них определителей отличен от нуля. Если же в некоторой точке кривой все три определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, то эта точка называется *особой точкой* пространственной кривой. В этой точке кривая может вообще не иметь касательной, подобно тому как это имело место в особых точках у плоских кривых (см. § 19 гл. VIII).

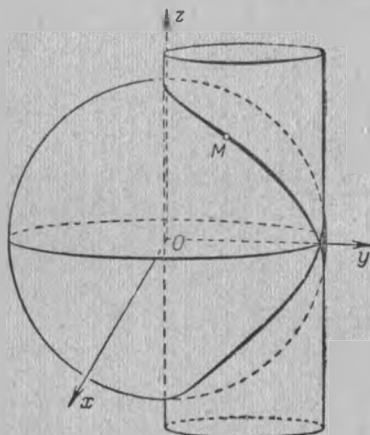


Рис. 197.

Пример 3. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 2ry$ в точке $M(r, r, r\sqrt{2})$ (рис. 197).

Решение.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Значения производных в данной точке M будут:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2},$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Поэтому уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{X-r}{0} = \frac{Y-r}{\sqrt{2}} = \frac{Z-r\sqrt{2}}{-1}.$$

Уравнение нормальной плоскости

$$\sqrt{2}(Y-r) - (Z-r\sqrt{2}) = 0.$$

§ 3. Правила дифференцирования векторов (векторных функций)

Как мы видели, производная от вектора

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad (1)$$

по определению, равна

$$\mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}. \quad (2)$$

Отсюда сразу следует, что основные правила дифференцирования функций остаются в силе и для векторов. Мы выведем здесь формулы дифференцирования суммы и скалярного произведения векторов, а остальные формулы выпишем, предоставив их вывод читателю.

I. Производная суммы векторов равна сумме производных от слагаемых векторов.

В самом деле, пусть, например, даны два вектора:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \varphi_1(t) \mathbf{i} + \psi_1(t) \mathbf{j} + \chi_1(t) \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_2(t) &= \varphi_2(t) \mathbf{i} + \psi_2(t) \mathbf{j} + \chi_2(t) \mathbf{k}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

их сумма равна

$$\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] \mathbf{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)] \mathbf{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)] \mathbf{k}.$$

По определению производной от переменного вектора имеем:

$$\frac{d[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]' \mathbf{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]' \mathbf{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]' \mathbf{k}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{dt} &= [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)] \mathbf{i} + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)] \mathbf{j} + [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)] \mathbf{k} = \\ &= \varphi_1'(t) \mathbf{i} + \psi_1'(t) \mathbf{j} + \chi_1'(t) \mathbf{k} + \varphi_2'(t) \mathbf{i} + \psi_2'(t) \mathbf{j} + \chi_2'(t) \mathbf{k} = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}. \quad (I)$$

II. Производная от скалярного произведения векторов выражается формулой

$$\frac{d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}. \quad (II)$$

Действительно, если $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ определены формулами (3), то, как известно, скалярное произведение этих векторов равно

$$\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t) = \varphi_1 \varphi_2 + \psi_1 \psi_2 + \chi_1 \chi_2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}{dt} &= \varphi_1' \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2' + \psi_1' \psi_2 + \psi_1 \psi_2' + \chi_1' \chi_2 + \chi_1 \chi_2' = \\ &= (\varphi_1' \varphi_2 + \psi_1' \psi_2 + \chi_1' \chi_2) + (\varphi_1 \varphi_2' + \psi_1 \psi_2' + \chi_1 \chi_2') = \\ &= (\varphi_1' \mathbf{i} + \psi_1' \mathbf{j} + \chi_1' \mathbf{k})(\varphi_2 \mathbf{i} + \psi_2 \mathbf{j} + \chi_2 \mathbf{k}) + (\varphi_1 \mathbf{i} + \psi_1 \mathbf{j} + \chi_1 \mathbf{k})(\varphi_2' \mathbf{i} + \psi_2' \mathbf{j} + \chi_2' \mathbf{k}) = \\ &= \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из формулы (II) получается следующее важное следствие.

Следствие. Если вектор $\mathbf{e}$ — единичный, т. е. $|\mathbf{e}| = 1$, то его производная есть вектор, к нему перпендикулярный.

Доказательство. Если $\mathbf{e}$ — единичный вектор, то

$$\mathbf{e} \mathbf{e} = 1.$$

Возьмем производную по t от обеих частей последнего равенства:

$$e \frac{de}{dt} + \frac{de}{dt} e = 0,$$

или

$$2e \frac{de}{dt} = 0,$$

т. е. скалярное произведение

$$e \frac{de}{dt} = 0,$$

а это и означает, что вектор $\frac{de}{dt}$ перпендикулярен к вектору e .

III. *Постоянный числовой множитель можно вынести за знак производной:*

$$\frac{d(a\mathbf{r}(t))}{dt} = a \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = a\mathbf{r}'(t). \quad (\text{III})$$

IV. *Производная векторного произведения векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ определяется формулой*

$$\frac{d[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}. \quad (\text{IV})$$

§ 4. Первая и вторая производные вектора по длине дуги. Кривизна кривой. Главная нормаль

Как и в случае кривых на плоскости, определяется длина дуги *) пространственной кривой $\overline{M_0 A} = s$ (рис. 198). При движении переменной точки $A(x, y, z)$ по кривой длина дуги s изменяется; и обратно, при изменении s изменяются координаты x, y, z переменной точки A , лежащей на кривой. Следовательно, координаты x, y, z переменной точки кривой A можно рассматривать как функции длины дуги s :

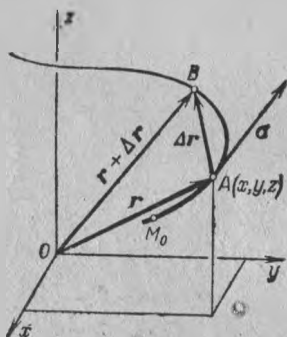


Рис. 198.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \\ z &= \chi(s). \end{aligned}$$

В этих параметрических уравнениях кривой параметром является длина дуги s .

Вектор $\overline{OA} = \mathbf{r}$ выразится соответственно

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k}$$

*) Длина дуги пространственной кривой определяется так же, как и длина дуги плоской кривой (см. § 1 гл. VI и § 3 гл. XII).

или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (1)$$

т. е. вектор $\mathbf{r}$ является функцией длины дуги s .

Выясним геометрический смысл производной $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Как видно из рисунка 198, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{M_0 A} &= s, & \widehat{AB} &= \Delta s, & \widehat{M_0 B} &= s + \Delta s, \\ \overline{OA} &= \mathbf{r}(s), & \overline{OB} &= \mathbf{r}(s + \Delta s), \\ \overline{AB} &= \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s), \\ \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} &= \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}}. \end{aligned}$$

Мы уже видели в § 2, что вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$ направлен по касательной к кривой в точке A в сторону возрастания s . С другой стороны, имеет место равенство $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}} \right| = 1$ [предел отношения длины хорды к длине дуги *)]. Следовательно, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ есть единичный вектор, направленный по касательной; обозначим его через σ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sigma. \quad (2)$$

Если вектор $\mathbf{r}$ задан проекциями:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

то

$$\sigma = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k}, \quad (3)$$

причем

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Рассмотрим, далее, вторую производную векторной функции $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, т. е. производную от $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, и выясним ее геометрическое значение.

*) Мы указывали на это соотношение для плоской кривой в § 1 гл. VI. Оно имеет место и для пространственной кривой $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль.

Из формулы (2) следует, что

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}.$$

Следовательно, нам нужно найти $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}$.

Из рисунка 199 имеем $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \boldsymbol{\sigma}$, $\overline{BK} = \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}$. Проведем из точки B вектор $\overline{BL}_1 = \boldsymbol{\sigma}$. Из треугольника BKL_1 находим:

$$\overline{BK} = \overline{BL}_1 + \overline{L_1K}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + \overline{L_1K}.$$

Следовательно, $L_1K = \Delta \boldsymbol{\sigma}$. Так как, по доказанному, длина вектора $\boldsymbol{\sigma}$ не меняется, то $|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}|$; следовательно, треугольник BKL_1 — равнобедренный.

Угол $\Delta \varphi$ при вершине этого треугольника есть угол поворота касательной к кривой при переходе из точки A в точку B , т. е. соответствует приращению

длины дуги Δs . Из треугольника BKL_1 находим:

$$L_1K = |\Delta \boldsymbol{\sigma}| = 2|\boldsymbol{\sigma}| \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|$$

(так как $|\boldsymbol{\sigma}| = 1$).

Разделим обе части последнего равенства на Δs :

$$\left| \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}}{\Delta s} \right| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|.$$

Перейдем к пределу в обеих частях последнего равенства при $\Delta s \rightarrow 0$. В левой части получим:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} \right|.$$

Далее,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right| = 1,$$

так как в данном случае мы рассматриваем такие кривые, что существует предел $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ и, следовательно, $\Delta \varphi \rightarrow 0$ при $\Delta s \rightarrow 0$. Таким

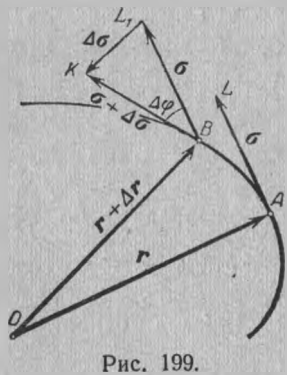


Рис. 199.

образом, после перехода к пределу получаем:

$$\left| \frac{d\sigma}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|. \quad (4)$$

Отношение угла поворота $\Delta\varphi$ касательной при переходе от точки A к точке B к длине Δs дуги AB , взятое по абсолютной величине, называется, так же как и для плоской кривой, *средней кривизной* данной линии на участке AB :

$$\text{средняя кривизна} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Предел средней кривизны при $\Delta s \rightarrow 0$ называется *кривизной* линии в точке A и обозначается буквой K :

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Но в таком случае из равенства (4) следует, что $\left| \frac{d\sigma}{ds} \right| = K$, т. е. длина производной от единичного вектора *) касательной по длине дуги равняется кривизне линии в данной точке. Так как вектор σ единичный, то его производная $\frac{d\sigma}{ds}$ перпендикулярна к нему (см. § 3 гл. IX, следствие).

Итак, вектор $\frac{d\sigma}{ds}$ по длине равен кривизне кривой, а по направлению перпендикулярен к вектору касательной.

О п р е д е л е н и е. Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\sigma}{ds}$ и проходящая через соответствующую точку кривой, называется *главной нормалью* кривой в данной точке. Единичный вектор этого направления обозначим через n .

Так как длина вектора $\frac{d\sigma}{ds}$ равна K — кривизне кривой, то

$$\frac{d\sigma}{ds} = Kn.$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны* линии в данной точке и обозначается через R , т. е. $\frac{1}{K} = R$. Поэтому мы можем написать:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}. \quad (5)$$

Из этой формулы следует:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2} \right)^2. \quad (6)$$

*) Напоминаем, что производная вектора, есть вектор, и поэтому мы можем говорить о длине производной.

Но

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2 x}{ds^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{ds^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{ds^2} \mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2}. \quad (6')$$

Последняя формула дает возможность вычислить кривизну линии в любой точке, если эта линия задана параметрическими уравнениями, в которых параметром является длина дуги s (т. е. если радиус-вектор переменной точки данной линии выражен как функция от длины дуги).

Рассмотрим случай, когда радиус-вектор $\mathbf{r}$ выражен как функция произвольного параметра t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

В этом случае длину дуги s будем рассматривать как функцию параметра t . Тогда вычисление кривизны производится следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (7)$$

Так как *)

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1,$$

то

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (8)$$

Дифференцируя правую и левую части и сокращая на два, получим:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (9)$$

Далее, из формулы (7) следует:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

Дифференцируем по s обе части последнего равенства:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3};$$

*) Это равенство следует из того, что $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|}$. Но $\Delta \mathbf{r}$ — хорда, стягивающая дугу длины Δs . Поэтому $\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|}$ стремится к 1 при $\Delta s \rightarrow 0$.

подставляя полученное выражение для $\frac{d^2r}{ds^2}$ в формулу (6), будем иметь:

$$\frac{1}{R^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{dr}{dt} \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} \right]^2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2 \frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}.$$

Выражая $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d^2s}{dt^2}$ по формулам (8) и (9) через производные от $r(t)$, получим *):

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \quad (10)$$

Формулу (10) можно переписать и так **):

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \quad (11)$$

Мы получили формулу, которая дает возможность вычислить кривизну данной линии в любой ее точке при произвольном параметрическом задании этой кривой.

Если в частном случае кривая является плоской и лежит в плоскости Oxy , то ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

*) Преобразовываем знаменатель следующим образом: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3 = \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$. Здесь нельзя написать $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$. Под $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ подразумевается скалярный квадрат вектора $\frac{dr}{dt}$. Под $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$ подразумевается третья степень числа $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$. Выражение же $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$ не имеет смысла.

**) Мы использовали тождество

$$a^2b^2 - (ab)^2 = (a \times b)^2,$$

в справедливости которого легко убедиться, если переписать тождество в следующем виде:

$$a^2b^2 - (ab \cos \varphi)^2 = (ab \sin \varphi)^2.$$

Подставляя эти выражения x, y, z в формулу (11), мы получим выведенную ранее (в гл. VI) формулу, дающую кривизну *плоской* кривой, заданной параметрически:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Пример. Вычислить кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r} = t\mathbf{a} \cos t + j\mathbf{a} \sin t + k\mathbf{a}mt$$

в произвольной точке.

Решение:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{a} \sin t + j\mathbf{a} \cos t + k\mathbf{a}m,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -t\mathbf{a} \cos t - j\mathbf{a} \sin t,$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ia^2m \sin t - ja^2m \cos t + ka^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2 + 1),$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2 = a^2(1 + m^2).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2 + 1)}{[a^2(1 + m^2)]^3} = \frac{1}{a^2(1 + m^2)^2},$$

откуда

$$R = a(1 + m^2) = \text{const.}$$

Таким образом, винтовая линия имеет постоянный радиус кривизны.

Замечание. Если кривая лежит в плоскости, то, не нарушая общности, можно предположить, что она лежит в плоскости Oxy (этого всегда можно добиться преобразованием координат). Если же кривая лежит в плоскости Oxy , то $z = 0$; но тогда и $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ и, следовательно, вектор $\mathbf{n}$ лежит также в плоскости Oxy . Отсюда получаем вывод: если кривая лежит в плоскости, то ее главная нормаль лежит в той же плоскости.

§ 5. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение

Определение 1. Плоскость, проходящая через касательную прямую и главную нормаль к заданной кривой в точке A , называется *соприкасающейся плоскостью* в точке A .

Для плоскости кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью кривой. Если же кривая не плоская, то, взяв на ней две точки P и P_1 , мы получим две различные соприкасающиеся плоскости, образующие между собой двугранный угол μ . Чем больше угол μ ,

тем сильнее кривая по своей форме отличается от плоской кривой. Для того чтобы это уточнить, введем еще одно определение.

Определение 2. Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Возьмем на бинормали единичный вектор $\mathbf{b}$ и направим его так, чтобы векторы σ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ образовывали тройку той же ориентации, что и единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, лежащие на осях координат (рис. 200, 201).

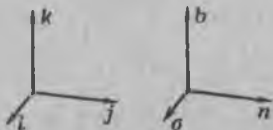


Рис. 200.

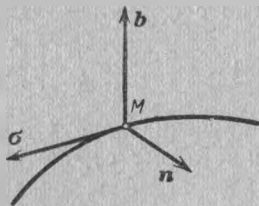


Рис. 201.

В силу определения векторного и скалярного произведения векторов имеем:

$$\mathbf{b} = \sigma \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{b}\mathbf{b} = 1. \quad (1)$$

Найдем производную $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$. По формуле (IV) § 3

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d(\sigma \times \mathbf{n})}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \times \mathbf{n} + \sigma \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}. \quad (2)$$

Но $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$ (см. § 4), поэтому

$$\frac{d\sigma}{ds} \times \mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0,$$

и формула (2) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \sigma \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}. \quad (3)$$

Отсюда следует (на основании определения векторного произведения), что $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ есть вектор, перпендикулярный к вектору касательной σ . С другой стороны, так как $\mathbf{b}$ — единичный вектор, то $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярен к $\mathbf{b}$ (см. § 3, следствие).

Значит, вектор $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярен и к σ и к $\mathbf{b}$, т. е. коллинеарен вектору $\mathbf{n}$.

Обозначим длину вектора $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ через $\frac{1}{T}$, т. е. положим:

$$\left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = \frac{1}{T};$$

тогда

$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{T} n. \quad (4)$$

Величина $\frac{1}{T}$ называется *кручением* данной кривой.

Двугранный угол μ между соприкасающимися плоскостями, соответствующими двум точкам кривой, равен углу между бинормальями. По аналогии с формулой (4) § 4 гл. IX можно написать:

$$\left| \frac{db}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Итак, кручение кривой в точке A по абсолютной величине равно пределу, к которому стремится отношение угла μ между соприкасающимися плоскостями в точке A и соседней точке B к длине $|\Delta s|$ дуги AB , когда $\Delta s \rightarrow 0$.

Если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость не меняет своего направления и, следовательно, кручение равно нулю.

Из определения кручения ясно, что оно является мерой отклонения пространственной кривой от плоской кривой. Величина T называется *радиусом кручения* кривой.

Найдем формулу для вычисления кручения. Из формул (3) и (4) следует:

$$\frac{1}{T} n = \sigma \times \frac{dn}{ds}.$$

Умножив скалярно обе части на n , будем иметь:

$$\frac{1}{T} nn = n \left[\sigma \times \frac{dn}{ds} \right].$$

В правой части последнего равенства мы получили так называемое смешанное (или тройное) произведение трех векторов n , σ и $\frac{dn}{ds}$.

В таком произведении, как известно, можно переставлять сомножители в круговом порядке. Учитывая, кроме того, что $nn=1$, мы перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\frac{1}{T} = \sigma \left[\frac{dn}{ds} \times n \right]$$

или

$$\frac{1}{T} = -\sigma \left[n \times \frac{dn}{ds} \right]. \quad (5)$$

Но так как $n = R \frac{d^2 r}{ds^2}$, то

$$\frac{dn}{ds} = R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2}$$

$$\begin{aligned} \left[n \times \frac{dn}{ds} \right] &= R \frac{d^2 r}{ds^2} \times \left\{ R \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} \right\} = \\ &= R^2 \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right] + R \frac{dR}{ds} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right], \end{aligned}$$

а так как векторное произведение вектора на самого себя равно нулю, то

$$\left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right] = 0.$$

Таким образом,

$$\left[n \times \frac{dn}{ds} \right] = R^2 \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right].$$

Заметив, что $\sigma = \frac{dr}{ds}$, и возвращаясь к равенству (5), получаем:

$$\frac{1}{T} = -R^2 \frac{dr}{ds} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right]. \quad (6)$$

Если вектор r выражен как функция произвольного параметра t , то можно показать*), аналогично тому, как это делалось в предыдущем

*) В самом деле,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Дифференцируем это равенство еще раз по t :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Снова дифференцируем по t :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 r}{dt^3} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \right) \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d^2 r}{ds^2} 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} = \\ &= \frac{d^3 r}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3}. \end{aligned}$$

Составим, далее, смешанное (тройное) произведение:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^3 r}{dt^3} \right) &= \\ &= \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \left\{ \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} \right] \times \left[\frac{d^3 r}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Раскрывая это произведение по правилу умножения многочленов и отбрасывая все те члены, которые содержат хотя бы два одинаковых векторных сомножителя (так как смешанное произведение трех множителей, где хотя бы два множителя равны, есть нуль), получим:

$$\frac{dr}{dt} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^3 r}{dt^3} \right) = \frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^6.$$

Наконец, заметив, что

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \text{ или } \left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}^3,$$

получаем требуемое равенство.

параграфе, что

$$\frac{dr}{ds} \left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right] = \frac{\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right]}{\left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (6) и заменяя R^2 его выражением по формуле (11) § 4, окончательно получаем:

$$\frac{1}{T} = - \frac{\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right]}{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right]^2}. \quad (7)$$

Эта формула дает возможность вычислить кручение кривой в любой точке, если кривая задана параметрическими уравнениями с произвольным параметром t .

В заключение этого параграфа отметим, что формулы, выражающие производные векторов σ , b , n , называются *формулами Серре — Френе*:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}, \quad \frac{db}{ds} = \frac{n}{T}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\sigma}{R} - \frac{b}{T}.$$

Последняя из них получается так:

$$\begin{aligned} n &= b \times \sigma, \\ \frac{dn}{ds} &= \frac{d(b \times \sigma)}{ds} = \frac{db}{ds} \times \sigma + b \times \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{T} \times \sigma + b \times \frac{n}{R} = \\ &= \frac{1}{T} n \times \sigma + \frac{1}{R} b \times n; \end{aligned}$$

но

$$n \times \sigma = -b; \quad b \times n = -\sigma,$$

поэтому

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{T} - \frac{\sigma}{R}.$$

Пример. Вычислить кручение винтовой линии

$$r = i a \cos t + j a \sin t + k a m t.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3} \right] &= \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m, \\ \left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right]^2 &= a^4 (1 + m^2) \quad (\text{см. пример § 4}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T = - \frac{a^4 (1 + m^2)}{a^3 m} = - \frac{a (1 + m^2)}{m}.$$

§ 6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть имеем поверхность, заданную уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Введем следующее определение.

Определение 1. Прямая линия называется *касательной* к поверхности в некоторой точке $P(x, y, z)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку P .

Так как через точку P проходит бесконечное число различных кривых, лежащих на поверхности, то и касательных к поверхности, проходящих через эту точку, будет, вообще говоря, бесконечное множество.

Введем понятие об особых и обыкновенных точках поверхности $F(x, y, z) = 0$.

Если в точке $M(x, y, z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует, то точка M называется *особой* точкой поверхности. Если в точке

$M(x, y, z)$ все три производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка M называется *обыкновенной* точкой поверхности.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. Все касательные прямые к данной поверхности (1) в ее обыкновенной точке P лежат в одной плоскости.

Доказательство. Рассмотрим на поверхности некоторую линию L (рис. 202), проходящую через данную точку P поверхности. Пусть рассматриваемая кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = \chi(t). \quad (2)$$

Касательная к кривой будет касательной к поверхности. Уравнения этой касательной имеют вид

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Если выражения (2) подставить в уравнение (1), то это уравнение превратится в тождество относительно t , так как кривая (2) лежит

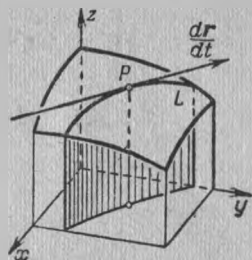


Рис. 202.

на поверхности (1): Дифференцируя его по t , получим *):

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим, далее, векторы N и $\frac{dr}{dt}$, проходящие через точку P :

$$N = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k. \quad (4)$$

Проекции этого вектора $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ зависят от x , y , z — координат точки P ; заметим, что так как точка P — обыкновенная, то эти проекции в точке P одновременно не обращаются в нуль и потому

$$|N| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Вектор

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k \quad (5)$$

— касательный к кривой, проходящей через точку P и лежащей на поверхности. Проекции этого вектора вычисляются на основании уравнений (2) при значении параметра t , соответствующем точке P . Вычислим скалярное произведение векторов N и $\frac{dr}{dt}$, которое равно сумме произведений одноименных проекций:

$$N \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

На основании равенства (3) выражение, стоящее в правой части, равно нулю, следовательно,

$$N \frac{dr}{dt} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что вектор N и касательный вектор $\frac{dr}{dt}$ к кривой (2) в точке P перпендикулярны. Проведенное рассуждение справедливо для любой кривой (2), проходящей через точку P и лежащей на поверхности. Следовательно, каждая касатель-

*) Мы здесь применяем правило дифференцирования сложной функции трех переменных. Это правило в данном случае применимо, так как все частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, по условию, непрерывны.

ная к поверхности в точке P перпендикулярна к одному и тому же вектору N и потому все эти касательные лежат в одной плоскости, перпендикулярной к вектору N . Теорема доказана.

Определение 2. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку P , называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке P (рис. 203).

Заметим, что в особых точках поверхности может не существовать касательной плоскости. В таких точках касательные прямые к поверхности могут не лежать в одной плоскости. Так, например, вершина конической поверхности является особой точкой. Касательные к конической поверхности в этой точке не лежат в одной плоскости (они сами образуют коническую поверхность).

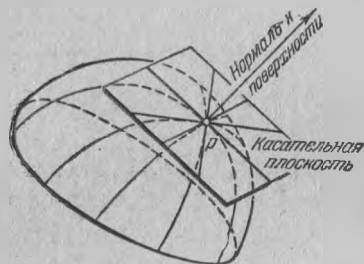


Рис. 203.

Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности (1) в обыкновенной точке. Так как эта плоскость перпендикулярна к вектору (4), то, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \quad (6)$$

Если уравнение поверхности задано в форме

$$z = f(x, y), \text{ или } z - f(x, y) = 0,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

и уравнение касательной плоскости в этом случае примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \quad (6')$$

Замечание. Если в формуле (6') положим $X - x = \Delta x$; $Y - y = \Delta y$, то эта формула примет вид

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y;$$

ее правая часть представляет полный дифференциал функции $z = f(x, y)$. Следовательно, $Z - z = dz$. Таким образом, полный дифференциал функции двух переменных в точке $M(x, y)$, соответствующий приращениям Δx и Δy независимых переменных x и y , равен соответствующему приращению аппликаты (z) касательной плоскости к поверхности, которая является графиком данной функции.

Определение 3. Прямая, проведенная через точку $P(x, y, z)$ поверхности (1) перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности (рис. 203).

Напишем уравнения нормали. Так как ее направление совпадает с направлением вектора N , то ее уравнения будут иметь вид

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (7)$$

Если уравнение поверхности задано в форме $z=f(x, y)$, или

$$z-f(x, y)=0,$$

то уравнения нормали имеют вид

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{1}.$$

Замечание. Пусть поверхность $F(x, y, z)=0$ есть поверхность уровня для некоторой функции трех переменных $u=u(x, y, z)$, т. е.

$$F(x, y, z)=u(x, y, z)-C=0.$$

Очевидно, что вектор N , определенный формулой (4), направленный по нормали к поверхности уровня $F=u(x, y, z)-C=0$, будет

$$N = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

т. е.

$$N = \text{grad } u.$$

Этим мы доказали, что *градиент функции $u(x, y, z)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.*

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности шара $x^2+y^2+z^2=14$ в точке $P(1, 2, 3)$.

Решение.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

при $x=1, y=2, z=3$ имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости будет:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ или } x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Упражнения к главе IX

Найти производные от векторов: 1. $r = i \operatorname{ctg} t + j \operatorname{arctg} t$. *Омс.* $r' = -\frac{1}{\sin^2 t} i + \frac{1}{1+t^2} j$. 2. $r = i e^{-t} + j 2t + k \ln t$. *Омс.* $r' = -i e^{-t} + 2j + \frac{k}{t}$.

3. $r = t^2 i - \frac{j}{t} + \frac{k}{t^2}$. *Омс.* $r' = 2t i + \frac{j}{t^2} - \frac{2k}{t^3}$.

4. Найти вектор касательной, уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой $r = t i + t^2 j + t^3 k$ в точке $(3, 9, 27)$. *Омс.* $r' = i + 6j + 27k$; касательная: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; нормальная плоскость: $x + 6y + 27z = 786$.

5. Найти вектор касательной, уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости к кривой: $r = i \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{2} j \sin t + k \sin \frac{t}{2}$. *Омс.* $r' =$

$$= -\frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} j \cos t + \frac{1}{2} k \cos \frac{t}{2}; \text{ уравнение касательной } \frac{X - \cos^2 \frac{t}{2}}{-\sin t} =$$

$$= \frac{Y - \frac{1}{2} \sin t}{\cos t} = \frac{Z - \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}; \text{ уравнение нормальной плоскости: } + X \sin t -$$

$-Y \cos t - Z \cos \frac{t}{2} = -x \sin t + y \cos t + z \cos \frac{t}{2}$, где x, y, z — координаты той точки кривой, в которой проводится нормальная плоскость (т. е. $x = \cos^2 \frac{t}{2}$, $y = \frac{1}{2} \sin t$, $z = \sin \frac{t}{2}$).

6. Найти уравнения касательной к кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ и косинусы углов, составляемых ею с осями координат.

$$\text{Омс. } \frac{X - X_0}{\sin \frac{t_0}{2}} = \frac{Y - Y_0}{\cos \frac{t_0}{2}} = \frac{Z - Z_0}{\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}}, \quad \cos \alpha = \sin^2 \frac{t_0}{2}; \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \sin t_0;$$

$$\cos \gamma = \cos \frac{t_0}{2}.$$

7. Найти уравнение нормальной плоскости к кривой $z = x^2 - y^2$, $y = x$ в начале координат. У к а з а н и е. Написать уравнения кривой в параметрической форме. *Омс.* $x + y = 0$.

8. Найти σ, n, b в точке $t = \frac{\pi}{2}$ для кривой $r = i (\cos t + \sin^2 t) + j \sin t (1 - \cos t) - k \cos t$. *Омс.* $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} (-i + j + k)$; $n = \frac{-5i - 4j - k}{\sqrt{42}}$;

$$b = \frac{t - 2j + 3k}{\sqrt{14}}.$$

9. Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривой $x = \frac{t^2}{4}$;

$$y = \frac{t^2}{3}; \quad z = \frac{t^2}{2} \text{ в точке } (x_0, y_0, z_0). \text{ Омс. } \frac{x - x_0}{t_0^2 + 2t_0} = \frac{y - y_0}{1 - t_0^2} = \frac{z - z_0}{-2t_0^2 - t_0}.$$

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2t_0} = \frac{z - z_0}{t_0^2}.$$

10. Найти уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $y^2 = x$; $x^2 = z$ в точке $M(1, 1, 1)$. *Отв.* $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. Найти радиус кривизны для кривой, заданной уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$. *Отв.* $R = 2$.

12. Найти радиус кручения кривой: $r = i \cos t + j \sin t + k \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Отв. $T = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{2(e^t - e^{-t})}$.

13. Найти радиус кривизны и кручения для кривой $r = t^2 i + 2t^3 j$.

Отв. $R = \frac{2}{3} t (1 + 9t^2)^{3/2}$, $T = \infty$

14. Доказать, что кривая $r = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) i + (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) j + (a_3 t^2 + b_3 t + c_3) k$ плоская. *Отв.* $r'' = 0$, поэтому кручение равно нулю.

15. Найти кривизну и кручение кривой $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t \sqrt{2}$.

Отв. Кривизна равна $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; кручение равно $\frac{-\sqrt{2}}{(x-y)^2}$.

16. Найти кривизну и кручение кривой $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$, $z = e^t$.

Отв. Кривизна равна $\frac{\sqrt{2}}{3} e^t$; кручение равно $\frac{1}{3} e^t$.

17. Найти уравнение касательной плоскости к гиперболоиду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_1, y_1, z_1) . *Отв.* $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1$.

18. Найти уравнение нормали к поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точке $(2, 2, 3)$. *Отв.* $y + 4x = 10$; $3x - z = 3$.

19. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке $M(2, 1, 12)$. *Отв.* $8x + 8y - z = 12$.

20. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$. *Отв.* $x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}$.

ГЛАВА X

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

В главе III мы рассматривали такую задачу: дана функция $F(x)$; требуется найти ее производную, т. е. функцию $f(x) = F'(x)$.

В этой главе мы будем рассматривать обратную задачу: дана функция $f(x)$; требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Найти первообразную от функции $f(x) = x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно было взять в качестве первообразных следующие функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ или вообще $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (где C — произвольная постоянная), так как

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\frac{x^3}{3} + C$ исчерпываются все первообразные от функции x^2 . Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. В силу определения первообразной имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при любом значении x на отрезке $[a, b]$.

Обозначим:

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Тогда на основании равенств (1) будет:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

или

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0$$

при любом значении x на отрезке $[a, b]$. Но из равенства $\varphi'(x) = 0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная.

Действительно, применим теорему Лагранжа (см. § 2 гл. IV) к функции $\varphi(x)$, которая, очевидно, непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Какова бы ни была точка x на отрезке $[a, b]$, мы имеем в силу теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(\xi),$$

где $a < \xi < x$.

Так как $\varphi'(\xi) = 0$, то

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

или

$$\varphi(x) = \varphi(a). \quad (3)$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ в любой точке x отрезка $[a, b]$ сохраняет значение $\varphi(a)$, а это и значит, что функция $\varphi(x)$ является постоянной на отрезке $[a, b]$. Обозначая постоянную $\varphi(a)$ через C , из равенств (2) и (3) получаем:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x) dx$. Таким образом, по определению,

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

если

$$F'(x) = f(x).$$

В случае формулы 7 имеем:

$$(-\ln |\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

следовательно, $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$.

В случае формулы 8

$$(\ln |\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

следовательно, $\int \operatorname{ctg} x = \ln |\sin x| + C$.

В случае формулы 12

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} [\ln |a+x| - \ln |a-x|]' = \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Отметим, что последняя формула будет следовать также из общих результатов § 9 гл. X.

В случае формулы 14

$$(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Эта формула также будет следовать из общих результатов § 11.

Аналогично проверяются формулы 11' и 13'. Заметим, что эти формулы будут выведены впоследствии из формул 11 и 13 (см. § 4, примеры 3 и 4).

§ 3. Некоторые свойства неопределенного интеграла

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx. \quad (1)$$

Для доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства. На основании равенства (4) предыдущего параграфа находим:

$$\begin{aligned} \left(\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx \right)' &= f_1(x) + f_2(x), \\ \left(\int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx \right)' &= \\ &= \left(\int f_1(x) \, dx \right)' + \left(\int f_2(x) \, dx \right)' = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Таким образом, производные от левой и правой частей равенства (1) равны между собой, т. е. производная от любой первообразной, стоящая в левой части, равняется производной от любой функции, стоящей в правой части равенства. Следовательно, по теореме § 1 гл. X любая функция, стоящая в левой части равенства (1), отличается от любой функции, стоящей в правой части равенства (1), на постоянное слагаемое. В этом смысле и нужно понимать равенство (1).

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если $a = \text{const}$, то*

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (2)$$

Для доказательства равенства (2) найдем производные от левой и правой его частей:

$$\begin{aligned} \left(\int af(x) dx \right)' &= af(x), \\ \left(a \int f(x) dx \right)' &= a \left(\int f(x) dx \right)' = af(x). \end{aligned}$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно, как и в равенстве (1), разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать равенство (2).

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила.

I. Если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \quad (3)$$

Действительно, дифференцируя левую и правую части равенства (3), получим:

$$\begin{aligned} \left(\int f(ax) dx \right)' &= f(ax), \\ \left(\frac{1}{a} F(ax) \right)' &= \frac{1}{a} (F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax) a = F'(ax) = f(ax). \end{aligned}$$

Производные от правой и левой частей равны, ч. т. д.

II. Если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C. \quad (4)$$

III. Если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) доказываются дифференцированием правой и левой частей равенств.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - 3 \sin x + 5 \sqrt{x}) dx &= \int 2x^2 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5 \sqrt{x} dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3(-\cos x) + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x \sqrt[4]{x} \right) dx &= 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{4}} dx = \\ &= 3 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2} \sqrt{x^3} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} x^2 \sqrt[4]{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| + C.$$

Пример 4.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C.$$

Пример 5.

$$\int \sin (2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos (2x-6) + C.$$

§ 4. Интегрирование методом замены переменной или способом подстановки

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x) dx,$$

причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t) dt$; докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено его выражение через x на основании равенства (1).

Для того чтобы установить, что выражения, стоящие справа и слева, одинаковы в указанном выше смысле, нужно доказать, что их производные по x равны между собой. Находим производную от левой части

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x).$$

Правую часть равенства (2) будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t — промежуточный аргумент. Зависимость t от x выражается равенством (1), при этом $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ и по правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \frac{dt}{dx} = \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Следовательно, производные по x от правой и левой частей равенства (2) равны, ч. т. д.

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (2).

Замечание. При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменного в виде не $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$. Проиллюстрируем это на примере. Пусть нужно вычислить интеграл, имеющий вид

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)}.$$

Здесь удобно положить

$$\psi(x) = t,$$

тогда

$$\begin{aligned} \psi'(x) dx &= dt, \\ \int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\psi(x)| + C. \end{aligned}$$

Приведем несколько примеров на интегрирование с помощью замены переменных.

Пример 1. $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = ?$ Сделаем подстановку $t = \sin x$; тогда $dt = \cos x \, dx$ и, следовательно, $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C$.

Пример 2. $\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = ?$ Полагаем $t = 1+x^2$; тогда $dt = 2x \, dx$ и $\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

Пример 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a \, dt$, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a \, dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = a \, dt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$ (предполагается, что $a > 0$).

В примерах 3 и 4 выведены формулы, приведенные в таблице интегралов под номерами 11' и 13' (см. выше, § 2).

Пример 5. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Полагаем $t = \ln x$; тогда $dt = \frac{dx}{x}$,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

Пример 6. $\int \frac{x \, dx}{1+x^4} = ?$ Полагаем $t = x^2$; тогда $dt = 2x \, dx$,

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Метод замены переменных является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменных. Успех интегрирования зависит в значительной степени от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменных, которая упростила

бы данный интеграл. По существу говоря, изучение методов интегрирования сводится к выяснению того, какую надо сделать замену переменной при том или ином виде подынтегрального выражения. Этому и посвящена большая часть настоящей главы.

§ 5. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

1. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т. е. будут ли корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменного

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Тогда получим:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Это — табличные интегралы (см. формулы 11' и 12).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}. \end{aligned}$$

Делаем замену переменного $x+2=t$, $dx=dt$. Подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x , окончательно находим

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_1 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции

$$I_1 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим:

$$I_1 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Последний интеграл есть интеграл I_1 , вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменного

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b) dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$I_1 = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx.$$

Применим указанный прием:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 2\right)}{x^2-2x-5} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2) dx}{x^2-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 4 \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C.
 \end{aligned}$$

III. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. I, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a , к табличным интегралам вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ при } a > 0 \text{ или } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \text{ при } a < 0,$$

которые уже рассмотрены в таблице интегралов (см. формулы 13' и 14).

IV. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\
 &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.
 \end{aligned}$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b) dx = dt,$$

получим:

$$\int \frac{(2ax+b) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Второй же интеграл был рассмотрен нами в п. III настоящего параграфа.

Пример 3.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\ &= 5 \sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2 + \sqrt{(x+2)^2+6}| + C = \\ &= 5 \sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+10}| + C.\end{aligned}$$

§ 6. Интегрирование по частям

Пусть u и v — две дифференцируемые функции от x . Тогда, как известно, дифференциал произведения uv вычисляется по следующей формуле:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$uv = \int u dv + \int v du$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Последняя формула называется *формулой интегрирования по частям*. Эта формула чаще всего применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и dv , чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу dv и вычисление интеграла $\int v du$ составляли в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int u dv$. Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач, и мы покажем на ряде примеров, как это делается.

Пример 1. $\int x \sin x dx = ?$ Положим

$$u = x, \quad dv = \sin x dx;$$

тогда

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Следовательно,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Замечание. При определении функции v по дифференциалу dv мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит [что легко проверить, подставив в равенство (1) вместо v выражение $v + C$]. Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида

$$\int x^k \sin ax \, dx, \quad \int x^k \cos ax \, dx, \\ \int x^k e^{ax} \, dx, \quad \int x^k \ln x \, dx,$$

некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Пример 2. Требуется вычислить $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Пример 3. Требуется вычислить $\int x^2 e^x \, dx$. Положим $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$; тогда $du = 2x \, dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Последний интеграл снова интегрируем по частям, полагая

$$u_1 = x, \quad du_1 = dx, \\ dv_1 = e^x \, dx, \quad v_1 = e^x.$$

Тогда

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C.$$

Окончательно будем иметь:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Пример 4. Требуется вычислить $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx$. Положим $u = x^2 + 7x - 5$; $dv = \cos 2x \, dx$; тогда

$$du = (2x + 7) \, dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} \, dx.$$

Применим интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая

$$u_1 = \frac{2x+7}{2}, \quad dv_1 = \sin 2x \, dx; \quad \text{тогда}$$

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2} \sin 2x \, dx = \frac{2x+7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \\ = -\frac{(2x+7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Поэтому окончательно

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Пример 5. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & v &= -\sqrt{a^2 - x^2}; \end{aligned}$$

тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Переносим интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 6. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$\begin{aligned} u &= e^{ax}, & du &= ae^{ax}, \\ dv &= \cos bx dx, & v &= \frac{1}{b} \sin bx, \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx. \end{aligned}$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям

$$\begin{aligned} u &= e^{ax}, & du &= ae^{ax}, \\ dv &= \sin bx dx, & v &= -\frac{1}{b} \cos bx, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Найдем из последнего равенства I_1 :

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right),$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

§ 7. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь $M(x)$ — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1}.$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим:

$$\frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x + 1} = x - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^3 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

- I. $\frac{A}{x-a},$
- II. $\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \text{ — целое положительное число } \geq 2),$
- III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad \left(\text{корни знаменателя комплексные, т. е. } \frac{p^2}{4} - q < 0 \right),$
- IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \text{ — целое положительное число } \geq 2; \text{ корни знаменателя комплексные}),$

называются *простейшими дробями I, II, III и IV типов*.

Далее будет доказано (см. § 8), что всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Поэтому мы рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx &= A \ln |x-a| + C. \\
 \text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\
 &= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C. \\
 \text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \\
 &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\
 &= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\
 &= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (\text{см. § 5}).
 \end{aligned}$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx.$$

Произведем преобразование:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned}$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q=t$; $(2x+p)dx=dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Второй интеграл — обозначим его через I_k — запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Далее поступаем следующим образом:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt. \end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} &= \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, будем иметь:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \\ &+ \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k , но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже ($k-1$); таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1} .

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A , B , p , q .

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}. \end{aligned}$$

К последнему интегралу применяем подстановку $x+1=t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = \\ &= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(произвольного постоянного пока не пишем; мы учтем его только в окончательном результате).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$



§ 8. Разложение рациональной дроби на простейшие

Покажем, далее, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Пусть нам дана правильная рациональная дробь

$$\frac{F(x)}{f(x)}.$$

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов — действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Теорема 1. Пусть $x=a$ есть корень знаменателя кратности k , т. е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$ (см. § 6 гл. VII); тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (1)$$

где A — постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)} \quad (2)$$

(справедливое при любом A) и определим постоянную A так, чтобы многочлен $F(x) - Af_1(x)$ делился на $x-a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Так как $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, то A однозначно определится равенством

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

При таком A будем иметь:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Сокращая дробь в формуле (2) на $(x-a)$, получаем равенство (1).

Следствие. К правильной рациональной дроби

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)},$$

входящей в равенство (1), можно применить аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x=a$ кратности k ,

то можно написать:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ — правильная несократимая дробь. К ней также можно применить только что доказанную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим далее случай комплексных корней знаменателя. Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены (см. § 8 гл. VII).

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида $x^2 + px + q$. Если же комплексные корни имеют кратность μ , то им соответствует выражение $(x^2 + px + q)^\mu$.

Теорема 2. Если $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)$, где многочлен $\Phi_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)}, \quad (3)$$

где $\Phi_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)}, \quad (4)$$

справедливое при любых M и N , и определим M и N так, чтобы многочлен $F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x)$ делился на $x^2 + px + q$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x) = 0$$

имело те же корни $\alpha \pm i\beta$, что и многочлен $x^2 + px + q$. Следовательно,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N] \Phi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

или

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Но $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}$ есть определенное комплексное число, которое можно записать в виде $K + iL$, где K и L — некоторые действительные числа. Таким образом,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

отсюда

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

при любых частных значениях x . Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов.

Таким образом, мы видим, что всякая правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших рациональных дробей.

Пример. Пусть требуется разложить дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$ на простейшие. На основании формулы (5) имеем:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)^1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая числители, получим:

$$x^2+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^2. \quad (6)$$

или

$$x^2+2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Приравнявая коэффициенты при x^3 , x^2 , x^1 , x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$0 = A_2 + B,$$

$$1 = A_1 + 3B,$$

$$0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B,$$

$$2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$$

Решая эту систему, найдем:

$$A = -1; \quad A_1 = \frac{1}{3}; \quad A_2 = -\frac{2}{9}; \quad B = \frac{2}{9}.$$

Можно было бы также определить некоторые коэффициенты из уравнений, которые получаются при некоторых частных значениях x из равенства (6), которое является тождеством относительно x .

Так,

полагая $x = -1$, получим $3 = -3A$ или $A = -1$;

полагая $x = 2$, получим $6 = 27B$; $B = \frac{2}{9}$.

Если к этим двум уравнениям присоединим два уравнения, получающиеся приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях x , то получим четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\frac{Q(x)}{f(x)}$, т. е. интеграл

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx.$$

Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной

дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ (см. § 7). Последнюю же представляем по формуле (5) § 8 в виде суммы простейших дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Из результатов § 8 следует, что вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны следующие случаи.

I случай. *Корни знаменателя действительны и различны*, т. е.

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

и тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C. \end{aligned}$$

II случай. *Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные*:

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов. ✓

Пример 1 (см. пример в § 8 гл. X).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx &= - \int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \\ &+ \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C = \\ &= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III случай. *Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся* (т. е. различные):

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\dots(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие (см. (5) § 8 гл. X)

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Следовательно,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Полагая $x=1$, получим: $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$;

полагая $x=0$, получим: $0=-B+C$, $B=\frac{1}{2}$.

Приравнивая коэффициенты при x^2 , получим $0=A+C$, откуда $A=-\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

IV случай. Среди корней знаменателя есть комплексные кратные

$$f(x) = (x^2+px+q)^u (x^2+lx+s)^v \dots (x-a)^a \dots (x-d)^b.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{E}{x+1}.$$

откуда

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 =$$

$$= (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим:

$$A=1, B=-1, C=0, D=0, E=1.$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx &= \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln |x+1| + C. \end{aligned}$$

Первый интеграл, стоящий справа, был рассмотрен в примере 2 § 7 гл. X. Второй интеграл берется непосредственно.

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

- 1) через логарифмы—в случае простейших дробей I типа;
- 2) через рациональные функции—в случае простейших дробей II типа;
- 3) через логарифмы и арктангенсы—в случае простейших дробей III типа;
- 4) через рациональные функции и арктангенсы —в случае простейших дробей IV типа.

§ 10. Способ Остроградского

Интеграл от рациональной функции в случае наличия кратных корней у знаменателя можно вычислять другим способом, приводящим к более простым выкладкам. Этот способ позволяет, не производя разложения дроби на простейшие, выделить рациональную часть интеграла, а потом интегрировать рациональную дробь, знаменатель которой имеет только простые корни. Интегрирование такой дроби производится без труда, так как она разлагается на простейшие дроби I и III типов. Указанный способ принадлежит знаменитому русскому математику Михаилу Васильевичу Остроградскому (1801—1862) и основан на следующих соображениях.

Пусть требуется проинтегрировать правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$, где

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x^2 + px + q)^{\mu}.$$

В таком случае на основании равенства (5) § 8 все сведется к интегрированию правильных рациональных дробей четырех типов (см. § 7). При этом:

- 1) Интеграл от дроби вида $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ есть дробь вида $\frac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$.
- 2) Интеграл от дроби $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ есть сумма дробей вида $\frac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$, где $\mu^* \leq \mu-1$, и интеграла вида $\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q} dx$.

Интегрирования дробей I и III типов производить пока не будем.

Сложив рациональные дроби, получившиеся после интегрирования дробей II и IV типов, получим правильную дробь вида $\frac{Y(x)}{Q(x)}$, где многочлен $Q(x)$ равен

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} \dots (x^2+px+q)^{\mu-1} \dots (x^2+lx+s)^{\nu-1}.$$

$Y(x)$ есть многочлен, степень которого на единицу меньше степени многочлена Q .

Сложив интегралы от всех дробей I и III типов (включая и те интегралы вида $\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q} dx$, которые получаются при интегрировании дробей IV типа), получим интеграл от правильной дроби вида $\frac{X(x)}{P(x)}$, где многочлен $P(x)$ равен

$$P(x) = (x-a)(x-b) \dots (x^2+px+q) \dots (x^2+lx+s).$$

Таким образом, находим, что

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} = \int \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)} dx. \quad (1)$$

Здесь $X(x)$ — многочлен, степень которого на единицу меньше степени многочлена $P(x)$.

Определим теперь многочлены $X(x)$ и $Y(x)$, стоящие в числителях. Для этого продифференцируем обе части равенства (1):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

или

$$F(x) = \frac{f(x)Y'}{Q} - \frac{f(x)Q'Y}{Q^2} + \frac{f(x)X}{P}. \quad (2)$$

Покажем, что выражение, стоящее справа, есть многочлен. Заметив, что $f(x) = PQ$, можем переписать равенство (2) в виде

$$F(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \quad (2')$$

Значит, остается доказать, что выражение $-\frac{PQ'Y}{Q}$ является многочленом или что PQ' делится на Q . Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{Q'}{Q} &= [\ln Q]' = [(\alpha-1) \ln(x-a) + (\beta-1) \ln(x-b) + \dots \\ &\dots + (\mu-1) \ln(x^2+px+q) + \dots + (\nu-1) \ln(x^2+lx+s)]' = \\ &= \frac{\alpha-1}{x-a} + \frac{\beta-1}{x-b} + \dots + \frac{(\mu-1)(2x+p)}{x^2+px+q} + \dots + \frac{(\nu-1)(2x+l)}{x^2+lx+s}. \end{aligned}$$

Общим знаменателем дробей, стоящих в правой части, будет многочлен P . В числителе будет стоять некоторый многочлен, степень которого ниже степени P . Обозначим его через T . Таким образом,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{T}{P}.$$

Следовательно, выражение

$$P \frac{Q'}{Q} Y = P \frac{T}{P} Y = TY$$

есть многочлен. Равенство (2') принимает вид

$$F(x) = PY' - TY + QX. \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменного в равенстве (3), получим систему уравнений, из которых найдем неизвестные коэффициенты многочленов X и Y .

Пример. Вычислить

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} dx.$$

Решение. В этом случае

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^3 (x^2+x+1)^2, \\ P(x) &= (x-1) (x^2+x+1) = x^3-1, \\ Q(x) &= = x^3-1. \end{aligned}$$

Равенство (1) имеет вид

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1} dx. \quad (4)$$

Дифференцируя обе части равенства (4), получаем:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(x^3-1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)3x^2}{(x^3-1)^3} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}.$$

Освобождаясь от знаменателя, будем иметь:

$$1 = (x^3-1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)3x^2 + (x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , стоящие в разных частях равенства, получим систему из шести уравнений для определения коэффициентов A, B, C, E, F, G :

$$\begin{aligned} 0 &= E, \\ 0 &= -A + F, \\ 0 &= -2B + G, \\ 0 &= 3C - E, \\ 0 &= -2A - F, \\ 1 &= -B - G. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$E = 0, \quad A = 0, \quad C = 0, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad F = 0, \quad G = -\frac{2}{3}.$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в равенство (4), получим:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1} + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1} dx.$$

Знаменатель последнего интеграла имеет только простые корни и потому интеграл легко вычисляется. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^3-1)^2} &= \frac{-x}{3(x^3-1)} + \int \left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}}{x^2+x+1} \right] dx = \\ &= -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

§ 11. Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

I. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$, где R — рациональная функция своих аргументов *).

Пусть k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку:

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1} dt.$$

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t .

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{3}} + 1}.$$

*) Запись $R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$ указывает, что над величинами $x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}$ производятся только рациональные операции.

Точно так же следует понимать в дальнейшем записи вида

$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots\right), R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), R(\sin x, \cos x)$ и т. д. Так, например, запись $R(\sin x, \cos x)$ указывает, что над $\sin x$ и $\cos x$ производятся рациональные операции.

Решение. Общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ есть 4; поэтому делаем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\ &= \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{4}} - \ln |x^{\frac{3}{4}} + 1| \right] + C. \end{aligned}$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Решение. Делаем подстановку $x+4 = t^2$; $x = t^2 - 4$; $dx = 2t dt$; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t}{t^2 - 4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2 - 4} \right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

§ 12. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx. \quad (1)$$

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. Первая подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} + t.$$

Перед $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t :

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

(значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t,$$

т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t .

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x и dx выражаются рационально через t , то, следовательно, данный интеграл (1) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t .

Пример 1. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}.$$

Решение. Так как здесь $a=1>0$, то полагаем $\sqrt{x^2+C} = -x+t$; тогда

$$x^2+C = x^2-2xt+t^2,$$

откуда

$$x = \frac{t^2 - C}{2t}.$$

Следовательно,

$$dx = \frac{t^2 + C}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+C} = -x+t = -\frac{t^2-C}{2t} + t = \frac{t^2+C}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \int \frac{\frac{t^2+C}{2t^2} dt}{\frac{t^2+C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+C}| + C_1,$$

(см. формулу 14 таблицы интегралов).

2. Вторая подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c};$$

тогда

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

(Для определенности мы взяли перед корнем знак плюс.) Отсюда x определяется как рациональная функция от t :

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже выражаются рационально через t , то, подставляя значения x , $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t .

Пример 2. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Решение. Полагаем $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$; тогда

$$1+x+x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2+t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^2) (2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2 (2t-1)^3 (t^2-t+1) (1-t^2)^2} dt = \\ &= +2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt + C = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln |2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C. \end{aligned}$$

3. *Третья подстановка Эйлера.* Пусть α и β — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c . Полагаем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t.$$

Так как $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} &= (x-\alpha)t, \\ a(x-\alpha)(x-\beta) &= (x-\alpha)^2 t^2, \\ a(x-\beta) &= (x-\alpha)t^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t :

$$x = \frac{a\beta - at^2}{a - t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже рационально зависят от t , то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t .

Замечание 1. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a < 0$, но и при $a > 0$ — лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Решение. Так как $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, то полагаем:

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t;$$

тогда

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2, \quad x - 1 = (x + 4)t^2,$$

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} &= \int \frac{10t(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}}{1 - \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1}} \right| + C. \end{aligned}$$

Замечание 2. Заметим, что для приведения интеграла (1) к интегралу от рациональной функции достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Рассмотрим трехчлен $ax^2 + bx + c$. Если $b^2 - 4ac > 0$, то корни трехчлена действительны и, следовательно, применима третья подстановка Эйлера. Если $b^2 - 4ac \leq 0$, то в этом случае

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

и, следовательно, трехчлен имеет знак, совпадающий со знаком a . Чтобы $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ был действительным, нужно, чтобы трехчлен был положительным, а следовательно, должно быть $a > 0$. В этом случае применима первая подстановка.

§ 13. Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m, n, p, a, b — постоянные числа, называется *дифференциальным биномом*.

Теорема. Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

если m, n, p — рациональные числа, приводится к интегралу от

рациональной функции u , следовательно, выражается через элементарные функции в следующих трех случаях:

- 1) p есть целое число (положительное, отрицательное или нуль);
- 2) $\frac{m+1}{n}$ есть целое число (положительное, отрицательное или нуль);
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ есть целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Доказательство. Преобразуем данный интеграл с помощью подстановки

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Тогда

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz = \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p dz, \quad (1)$$

где

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

1. Пусть p — целое число. Так как q есть число рациональное, то обозначим его через $\frac{r}{s}$. Интеграл (1) в этом случае имеет вид

$$\int R(z^{\frac{r}{s}}, z) dx.$$

Как указывалось в § 11 гл. X, он приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $z = t^s$.

2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ есть целое число. Тогда $q = \frac{m+1}{n} - 1$ тоже есть целое число. Число p — рациональное, $p = \frac{\lambda}{\mu}$. В этом случае интеграл (1) есть интеграл вида

$$\int R[x^q, (a + bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}] dx.$$

Этот интеграл рассмотрен в § 11 гл. X. Он приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $a + bz = t^\mu$.

3. Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число. Но тогда $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ есть целое число. Преобразуем интеграл (1):

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z} \right)^p dz,$$

где $q + p$ — целое число, $p = \frac{k}{l}$ — рациональное число. Последний интеграл относится к классу интегралов

$$\int R \left[z, \left(\frac{a+bz}{z} \right)^{\frac{k}{l}} \right] dz.$$

Этот интеграл рассмотрен в § 11 гл. X. Он приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{a+bz}{z} = t^p$.

Рассмотрим на примерах интегрирование во всех трех случаях.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3(1+\sqrt[3]{x^3})}} = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx$. Здесь $p = -1$

(целое число). Положив $x^{\frac{1}{3}} = z$, добьемся того, чтобы скобка стала линейной относительно z :

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx = \int z^{-1}(1+z)^{-1} \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1} dz.$$

Сделаем теперь замену $z^{\frac{1}{2}} = t$. Тогда $z = t^2$, $dz = 2t dt$ и

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx &= \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1} dz = \frac{3}{2} \int t^{-1}(1+t^2)^{-1} 2t dt = \\ &= 3 \int \frac{dt}{1+t^2} = 3 \operatorname{arctg} t + C = 3 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. Здесь $m=3$; $n=2$;
 $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$ (целое число).

Делаем замену $x^2 = z$; тогда $x = z^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$ и

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z(1-z)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Чтобы сделать вторую скобку рациональной, положим $(1-z)^{\frac{1}{2}} = t$; тогда $1-z = t^2$; $z = t^2 - 1$; $dz = 2t dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int z(1-z)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int (t^2-1)t^{-1} 2t dt = \int (t^2-1) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{t}{3}(t^2-3) + C = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-z-2) + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2) + C. \end{aligned}$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$. Здесь $m=-2$,
 $n=2$, $p = -\frac{3}{2}$, причем $\frac{m+1}{n} + p = -2$ (целое число).

Сведем выражение в скобках к линейной функции:

$$x^2 = z; \quad x = z^{\frac{1}{2}}; \quad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

$$\begin{aligned} \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx &= \int z^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz. \end{aligned}$$

Первый сомножитель — рациональная функция. Для того чтобы сделать второй сомножитель также рациональным, выполним замену:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t;$$

тогда

$$\frac{1+z}{z} = t^2; \quad z = \frac{1}{t^2-1}; \quad dz = -\frac{2t dt}{(t^2-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx &= \frac{1}{2} \int z^{-1} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int (t^2-1)^2 t^{-3} \frac{-2t dt}{(t^2-1)^2} = - \int \frac{t^2-1}{t^2} dt = -t - \frac{1}{t} + C = \\ &= -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Знаменитый русский математик П. Л. Чебышев доказал, что только в перечисленных трех случаях интеграл от дифференциальных биномов с рациональными показателями степени выражается через элементарные функции (при условии, конечно, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$). Если же ни p , ни $\frac{m+1}{n}$, ни $\frac{m+1}{n} + p$ не являются целыми числами, то интеграл не может быть выражен в элементарных функциях.

§ 14. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

До сих пор мы систематически изучали интегралы только от алгебраических функций (рациональных и иррациональных). В настоящем параграфе мы рассмотрим интегралы от некоторых классов неалгебраических, в первую очередь тригонометрических функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (1)$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (2)$$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а следовательно, и через t :

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Далее

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выразились рационально через t . Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (1), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right] \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

На основании написанных выше формул имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\cos x, \sin x)$. Поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой». Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с «универсальной» подстановкой бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x) \cos x dx$, то подстановка $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t) dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x) \sin x \, dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t$, $\sin x \, dx = -dt$.

3) Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$, то замена $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad (2')$$

так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки мы получим интеграл от рациональной функции.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x} \, dx$.

Решение. Этот интеграл легко привести к виду $\int R(\cos x) \sin x \, dx$.

Действительно,

$$\int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x \, dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x \, dx.$$

Сделаем замену $\cos x = z$. Тогда $\sin x \, dx = -dz$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x} \, dx &= \int \frac{1-z^2}{2+z} (-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2} \, dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2} \right) \, dz = \\ &= \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \ln(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3 \ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2-\sin^2 x} &= \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

5) Рассмотрим теперь еще один интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ — именно интеграл, под знаком которого стоит произведение $\sin^m x \cos^n x dx$ (где m и n — целые числа). Здесь придется рассмотреть три случая.

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p + 1$ и преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменного:

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

Подставляя новую переменную в данный интеграл, получим:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt,$$

а это есть интеграл от рациональной функции от t .

Пример 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Обозначая $\sin x = t$, $\cos x dx = dx$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n — числа неотрицательные и четные.

Положим $m = 2p$, $n = 2q$. Напишем формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \quad (3)$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными степенями интегрируются, как указано в случае а). Четные показатели степеней снова понижаем по формулам (3). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 5.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.\end{aligned}$$

в) Если оба показателя — четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не приводит к цели. Здесь следует сделать замену $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

Пример 6.

$$\int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \, dx.$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$; тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, и мы получаем:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx &= \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2) \, dt = \\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

6) Рассмотрим в заключение интегралы вида

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx.$$

Они берутся при помощи следующих *) формул ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

Подставляя и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx = \\ &= \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(n-n)} + C.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются и два других интеграла.

Пример 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

*) Эти формулы легко вывести следующим образом:

$$\begin{aligned}\cos (m+n)x &= \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx, \\ \cos (m-n)x &= \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно и деля пополам, получим первую из приведенных трех формул. Вычитая почленно и деля пополам, получим третью формулу. Вторая формула выводится аналогично, если написать аналогичные равенства для $\sin (m+n)x$ и $\sin (m-n)x$ и затем почленно их сложить.

§ 15. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

Вернемся к интегралу, рассмотренному в § 12 гл. X,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx. \quad (1)$$

Покажем здесь метод преобразования этого интеграла к интегралу вида

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) dz, \quad (2)$$

который рассмотрен в предыдущем параграфе.

Произведем преобразование трехчлена, стоящего под корнем:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Сделаем замену переменного, положив $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$. Тогда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введем обозначения $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. В этом случае будем иметь:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}.$$

2. Пусть $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Тогда $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

3. Пусть $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Тогда $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. Следовательно,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}.$$

4. Пусть $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. В этом случае $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ есть комплексное число при любом значении x .

Таким образом, интеграл (1) преобразуется к одному из следующих типов интегралов:

$$\text{I.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt. \quad (3.1)$$

$$\text{II.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt. \quad (3.2)$$

$$\text{III.} \quad \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt. \quad (3.3)$$

Очевидно, что интеграл (3.1) приводится к интегралу вида (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$. Интеграл (3.2) приводится к виду (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m} \sec z$. Интеграл (3.3) приводится к виду (2) с помощью подстановки $t = \frac{n}{m} \sin t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

Решение. Это — интеграл типа III. Сделаем замену $x = a \sin z$, тогда $dx = a \cos z \, dz$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} &= \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \\ &= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

§ 16. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

В § 1 гл. X мы уже отмечали (без доказательства), что всякая функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b) , имеет на этом интервале первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.

Так, например, мы уже указывали, что первообразные от дифференциальных биномов, не принадлежащие к трем рассмотренным видам, не выражаются через элементарные функции в конечном виде (теорема Чебышева). Таковы же первообразные, выраженные интегралами $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ и многие другие.

Во всех подобных случаях первообразная представляет собой, очевидно, некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций.

Так, например, та из первообразных $\int e^{-x^2} dx + C$, которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *функцией Гаусса* и обозначается $\Phi(x)$. Таким образом,

$$\Phi(x) = \int e^{-x^2} dx + C, \text{ если } \Phi(0) = 0.$$

Эта функция хорошо изучена. Составлены подробные таблицы ее значений при различных значениях x . Как это делается — мы увидим в § 21 гл. XVI (т. II). На рисунках 204 и 205 изображены график

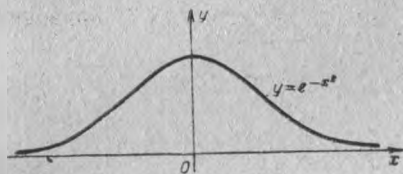


Рис. 204.

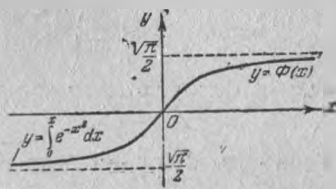


Рис. 205.

подынтегральной функции $y = e^{-x^2}$ и график функции Гаусса $y = \Phi(x)$. Та из первообразных

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C \quad (k < 1),$$

которая обращается в нуль при $x=0$, называется *эллиптическим интегралом* и обозначается $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx + C, \text{ если } E(0) = 0.$$

Так же составлены таблицы значений этой функции при различных значениях x .

Упражнения к главе X

- I. Вычислить интегралы: 1. $\int x^5 dx$. *Омс.* $\frac{x^6}{6} + C$. 2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$.
Омс. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. 3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. *Омс.* $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$. 4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}}$. *Омс.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. 5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$.
Омс. $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Омс.* $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.
 7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$. *Омс.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Интегрирование методом подстановки: 8. $\int e^{5x} dx$. *Омс.* $\frac{1}{5}e^{5x} + C$.

9. $\int \cos 5x dx$. *Омс.* $\frac{\sin 5x}{5} + C$. 10. $\int \sin ax dx$. *Омс.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$.
 11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. *Омс.* $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. 12. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. *Омс.* $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + C$. 13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$.
Омс. $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. 14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. *Омс.* $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$. 15. $\int \frac{dx}{1-x}$.

16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. *Омс.* $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$. 17. $\int \operatorname{tg} 2x \, dx$.
Омс. $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$. 18. $\int \operatorname{ctg} (5x-7) \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{5} \ln |\sin (5x-7)| + C$.
 19. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y}$. *Омс.* $-\frac{1}{3} \ln |\cos 3y| + C$. 20. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \, dx$. *Омс.* $3 \ln \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C$.
 21. $\int \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec^2 \varphi \, d\varphi$. *Омс.* $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + C$. 22. $\int (\operatorname{ctg} e^x) e^x \, dx$. *Омс.* $\ln |\sin e^x| + C$.
 23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg} \frac{S}{4} \right) dS$. *Омс.* $-\frac{1}{4} \ln |\cos 4S| - 4 \ln \left| \sin \frac{S}{4} \right| + C$.
 24. $\sin^2 x \cos x \, dx$. *Омс.* $\frac{\sin^3 x}{3} + C$. 25. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.
 26. $\int \sqrt{x^2+1} \, x \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$. 27. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.
Омс. $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C$. 28. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2+1}}$. *Омс.* $\frac{2}{3} \sqrt{x^2+1} + C$. 29. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x}$.
Омс. $-\frac{1}{\sin x} + C$. 30. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$. *Омс.* $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$. 31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^3 x} \, dx$.
Омс. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$. 32. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} \, dx$. *Омс.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$. 33. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$.
Омс. $2 \sqrt{\operatorname{tg} x-1} + C$. 34. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} \, dx$. *Омс.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$.
 35. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 \sin x+1}}$. *Омс.* $\sqrt{2 \sin x+1} + C$. 36. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{(1+\cos 2x)^2}$.
Омс. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$. 37. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. *Омс.* $2 \sqrt{1+\sin^2 x} + C$.
 38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x} \, dx$. *Омс.* $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3} + C$. 39. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{(2+3 \sin 2x)^3}$.
Омс. $-\frac{1}{12(2+3 \sin 2x)^2} + C$. 40. $\int \frac{\sin 3x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Омс.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$.
 41. $\int \frac{\ln^2 x \, dx}{x}$. *Омс.* $\frac{\ln^3 x}{3} + C$. 42. $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Омс.* $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$.
 43. $\int \frac{\arctg x \, dx}{1+x^2}$. *Омс.* $\frac{\arctg^2 x}{2} + C$. 44. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$. *Омс.* $-\frac{\arccos^3 x}{3} + C$.
 45. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$. *Омс.* $-\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$. 46. $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$. *Омс.* $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.
 47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C$. 48. $\int \frac{\cos x \, dx}{2 \sin x+3}$.
Омс. $\frac{1}{2} \ln(2 \sin x+3) + C$. 49. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. *Омс.* $\ln |\ln x| + C$. 50. $\int 2x(x^2+1)^4 \, dx$.
Омс. $\frac{(x^2+1)^5}{5} = C$. 51. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$. *Омс.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.
 52. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$. *Омс.* $\ln |\arctg x| + C$. 53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x+1)}$.

54. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$. *Омс.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.
 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. *Омс.* $\ln |\arcsin x| + C$. 56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x} dx$.
 57. $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$. *Омс.* $\sin(\ln x) + C$.
 58. $\int \cos(a+bx) dx$. *Омс.* $\frac{1}{b} \sin(a+bx) + C$. 59. $\int e^{2x} dx$.
Омс. $\frac{1}{2} e^{2x} + C$. 60. $\int e^{\frac{x}{2}} dx$. *Омс.* $2e^{\frac{x}{2}} + C$. 61. $\int e^{\sin x} \cos x dx$.
Омс. $e^{\sin x} + C$. 62. $\int a^{x^2} x dx$. *Омс.* $\frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + C$. 63. $\int e^{\frac{x}{a}} dx$. *Омс.* $ae^{\frac{x}{a}} + C$.
 64. $\int (e^{2x})^2 dx$. *Омс.* $\frac{1}{4} e^{4x} + C$. 65. $\int 3^x e^x dx$. *Омс.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$. 66. $\int e^{-3x} dx$.
Омс. $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$. 67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$. *Омс.* $\frac{1}{5} \left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\ln a} + C \right)$.
 68. $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) dx$. *Омс.* $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$. 69. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$.
Омс. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + C$. 70. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$. *Омс.* $\frac{1}{4} \ln(3+4e^x) + C$.
 71. $\int \frac{e^{2x} dx}{2+e^{2x}}$. *Омс.* $\frac{1}{2} \ln(2+e^{2x}) + C$. 72. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$.
Омс. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + C$. 73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Омс.* $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$.
 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Омс.* $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$. 75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Омс.* $\arcsin \frac{x}{3} + C$.
 76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Омс.* $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$. 77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Омс.* $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$.
 78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Омс.* $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + C$. 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$.
Омс. $\ln |x + \sqrt{x^2+9}| + C$. 80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$. *Омс.* $\frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}| + C$.
 81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$. *Омс.* $\frac{1}{a} \ln |ax + \sqrt{b^2 + a^2 x^2}| + C$. 82. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2}$.
Омс. $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax-c}{ax+c} \right| + C$. 83. $\int \frac{x^3 dx}{5-x^6}$. *Омс.* $\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$.
 84. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Омс.* $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$. 85. $\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$. *Омс.* $\frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2} + C$.
 86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Омс.* $\arcsin e^x + C$. 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.
Омс. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + C$. 88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$. *Омс.* $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C$.

$$89. \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}. \text{ Omс. } \arcsin(\ln x) + C.$$

$$\text{Omс. } -\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$\text{Omс. } \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C. \quad 92. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx. \text{ Omс. } \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} + C.$$

$$93. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \text{ Omс. } \frac{4}{3} \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + C. \quad 94. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{Omс. } 4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + C. \quad 95. \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}. \text{ Omс. } \arctg e^x + C. \quad 96. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

$$\text{Omс. } 3\sqrt[3]{\sin x} + C. \quad 97. \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \sin 2x dx. \text{ Omс. } -\frac{2}{9} \sqrt{(1 + 3 \cos^2 x)^3} + C.$$

$$98. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}. \text{ Omс. } -2\sqrt{1 + \cos^2 x} + C. \quad 99. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$\text{Omс. } \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C. \quad 100. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx. \text{ Omс. } \frac{3}{5} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + C.$$

$$101. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}. \text{ Omс. } \frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

$$\text{Интегралы вида } \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx: \quad 102. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$\text{Omс. } \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C. \quad 103. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}. \text{ Omс. } \frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C.$$

$$104. \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}. \text{ Omс. } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+3 - \sqrt{5}}{2x+3 + \sqrt{5}} \right| + C. \quad 105. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}.$$

$$\text{Omс. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C. \quad 106. \int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1}. \text{ Omс. } \arctg(2z-1) + C.$$

$$107. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}. \text{ Omс. } \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C. \quad 108. \int \frac{(6x-7) dx}{3x^2 - 7x + 11}.$$

$$\text{Omс. } \ln |3x^2 - 7x + 11| + C. \quad 109. \int \frac{(3x-2) dx}{5x^2 - 3x + 2}. \text{ Omс. } \frac{3}{10} \ln(5x^2 - 3x + 2) -$$

$$- \frac{11}{5\sqrt{31}} \arctg \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C. \quad 110. \int \frac{3x-1}{x^2 - x + 1} dx. \text{ Omс. } \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 111. \int \frac{7x+1}{6x^2 + x - 1} dx. \text{ Omс. } \frac{2}{3} \ln(3x-1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C. \quad 112. \int \frac{2x-1}{5x^2 - x + 2} dx. \text{ Omс. } \frac{1}{5} \ln(5x^2 - x + 2) +$$

$$+ \frac{8}{5\sqrt{39}} \arctg \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C. \quad 113. \int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx. \text{ Omс. } x^2 - \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln |2x^2 - x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C. \quad 114. \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

$$\text{Omс. } \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx$:

$$\text{Омс. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$$

$$115. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}. \text{Омс. } \ln |x + \frac{1}{2} +$$

$$+ \sqrt{x^2+x+1}| + C.$$

$$117. \int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}. \text{Омс. } \ln |S+a+\sqrt{2aS+S^2}| + C.$$

$$118. \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}. \text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C.$$

$$119. \int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}| + C.$$

$$120. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}.$$

$$\text{Омс. } \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{17}} + C.$$

$$121. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}. \text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |10x-1 +$$

$$+ \sqrt{20(5x^2-x-1)}| + C. 122. \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx. \text{Омс. } 2\sqrt{ax^2+bx+C} + C.$$

$$123. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \ln |2x+1 +$$

$$+ \sqrt{4x^2+4x+3}| + C. 124. \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}. \text{Омс. } -\frac{1}{11} \sqrt{3+66x-11x^2} + C.$$

$$125. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}. \text{Омс. } -\frac{1}{4} \sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4} \arcsin \frac{2x-1}{2} + C.$$

$$126. \int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx. \text{Омс. } \frac{3}{2} \sqrt{2x^2-x} + \frac{23}{4\sqrt{2}} \ln (4x-1 + \sqrt{8(2x^2-x)}) + C.$$

II. Интегрирование по частям: 127. $\int xe^x dx$. Омс. $e^x(x-1) + C$.

$$128. \int x \ln x dx. \text{Омс. } \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C. 129. \int x \sin x dx. \text{Омс. } \sin x -$$

$$-x \cos x + C. 130. \int \ln x dx. \text{Омс. } x(\ln x - 1) + C. 131. \int \arcsin x dx. \text{Омс. } x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$132. \int \ln(1-x) dx. \text{Омс. } -x - (1-x) \ln(1-x) + C.$$

$$133. \int x^n \ln x dx. \text{Омс. } \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. 134. \int x \operatorname{arctg} x dx. \text{Омс. } \frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arctg} x - x] + C.$$

$$135. \int x \arcsin x dx. \text{Омс. } \frac{1}{4} [(2x^2-1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2}] + C. 136. \int \ln(x^2+1) dx. \text{Омс. } x \ln(x+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$137. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx. \text{Омс. } (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C. 138. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Омс. } 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

$$139. \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$$

$$\text{Омс. } x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. 140. \int x \cos^2 x dx. \text{Омс. } \frac{x^2}{4} +$$

$$+ \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C. 141. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \text{Омс. } x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$$

$$142. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} dx. \quad \text{Омс.} \quad \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + C.$$

$$143. \int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} dx. \quad \text{Омс.} \quad \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C.$$

$$144. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx. \quad \text{Омс.} \quad \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \arcsin x + C.$$

$$145. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \quad \text{Омс.} \quad x \ln|x + \sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$146. \int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

Применить тригонометрические подстановки в следующих примерах:

$$147. \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx. \quad \text{Омс.} \quad -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad 148. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Омс.} \quad 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4-x^2} + C. \quad 149. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Омс.} \quad -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \quad 150. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx. \quad \text{Омс.} \quad \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей:

$$\text{Омс.} \quad \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C. \quad 152. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx. \quad \text{Омс.} \quad \frac{1}{8} \ln \frac{(x+3)^4}{(x+5)^3(x+1)}.$$

$$154. \int \frac{x^3+x^4-8}{x^3-4x} dx. \quad \text{Омс.} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)^3} \right| + C.$$

$$155. \int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)}{(x+1)^3} + \frac{16}{3} \ln(x+2) + C.$$

$$156. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{1}{x-1} + \ln \frac{x-2}{x-1} + C. \quad 157. \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

$$\text{Омс.} \quad \frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^2} + C. \quad 158. \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx. \quad \text{Омс.} \quad \frac{4x+3}{2(x+1)^2} +$$

$$+ \ln \frac{x^2}{(x+1)^2} + C. \quad 159. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^3(x+4)^2}. \quad \text{Омс.} \quad -\frac{5x+12}{x^3+6x+8} +$$

$$+ \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + C. \quad 160. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}. \quad \text{Омс.} \quad \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

$$161. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx. \quad \text{Омс.} \quad \ln \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$162. \int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx. \quad \text{Омс.} \quad \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$163. \int \frac{dx}{x^3+1}. \quad \text{Омс.} \quad \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} \cdot \text{Oms.} \ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$ 165. $\int \frac{4dx}{x^3+1} \cdot$
 Oms. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$ 166. $\int \frac{x^3}{x^3-1} dx.$
 Oms. $\frac{1}{3} [x^3 + \ln(x^3-1)] + C.$ 167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx.$ Oms. $\frac{2-x}{4(x^2+2)} +$
 $+ \ln(x^2+2) \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$ 168. $\int \frac{(4x^2-8x) dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \cdot$
 Oms. $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C.$ 169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2} \cdot$
 Oms. $\ln \frac{x-1}{x} - \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} + C.$

Интегрирование иррациональных функций:

170. $\int \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x^3+1}} dx.$
 Oms. $\frac{4}{3} [4\sqrt{x^3} - \ln(4\sqrt{x^3}+1)] + C.$ 171. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx.$ Oms. $\frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} -$
 $-\frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C.$ 172. $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^8}} dx.$ Oms. $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} +$
 $+ 2 \ln x - 24 \ln(\sqrt[12]{x}+1) + C.$ 173. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1}} dx.$
 Oms. $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 9 \ln(\sqrt[6]{x}+1) +$
 $+ \frac{3}{2} \ln(\sqrt[6]{x^2}+1) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$ 174. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2} \cdot$
 Oms. $\ln \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$ 175. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} \cdot$
 Oms. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + C.$ 176. $\int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt[14]{x}}{\sqrt[7]{x^4} + \sqrt[14]{x^{15}}} dx.$
 Oms. $14 \left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2} \sqrt[7]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4} \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5} \sqrt[14]{x^5} \right] + C.$ 177. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx.$
 Oms. $\sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2} \right) + C.$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}} \cdot$
 Oms. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C.$ 179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} \cdot$
 Oms. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C.$ 180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} \cdot$

$$\begin{aligned}
\text{Омс. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C. & \quad 181. \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx. \quad \text{Омс. } \sqrt{x^2+2x} + \\
+ \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C. & \quad 182. \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}. \quad \text{Омс. } \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C. \\
183. \int \sqrt{2x-x^2} dx. & \quad \text{Омс. } \frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C. \\
184. \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}. & \quad \text{Омс. } \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C. \\
185. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}. & \quad \text{Омс. } \ln \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C. \\
186. \int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx. & \quad \text{Омс. } -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C. \quad 187. \int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx. \\
\text{Омс. } \ln \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C. & \quad 188. \int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx. \\
\text{Омс. } -\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C.
\end{aligned}$$

Интегрирование дифференциальных биномов:

$$\begin{aligned}
189. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx. & \quad \text{Омс. } 2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + C. \quad 190. \int x^{\frac{1}{2}} \left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx. \\
\text{Омс. } \frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15} \left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} + C. & \quad 191. \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{Омс. } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \\
192. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. & \quad \text{Омс. } -(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(2x+\frac{1}{x}\right) + C. \quad 193. \int \sqrt{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx. \\
\text{Омс. } \frac{8}{11} (7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}} + C. & \quad 194. \int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx. \\
\text{Омс. } \frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}. & \quad 195. \int x^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1+x^2)^2} dx. \quad \text{Омс. } \frac{5x^{\frac{5}{2}}-3}{40} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Интегрирование тригонометрических функций: 196. $\int \sin^2 x dx$.

$$\begin{aligned}
\text{Омс. } \frac{1}{3} \cos^2 x - \cos x + C. & \quad 197. \int \sin^2 x dx. \quad \text{Омс. } -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \\
-\frac{\cos^5 x}{5} + C. & \quad 198. \int \cos^4 x \sin^2 x dx. \quad \text{Омс. } -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \\
199. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx. & \quad \text{Омс. } \csc x - \frac{1}{3} \csc^3 x + C. \quad 200. \int \cos^2 x dx. \\
\text{Омс. } \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C. & \quad 201. \int \sin^3 x dx. \quad \text{Омс. } \frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}$$

202. $\int \cos^3 x \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C$.
203. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C$. 204. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.
Омс. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$. 205. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$. *Омс.* $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x +$
 $+ \ln |\sin x| + C$. 206. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C$.
207. $\int \operatorname{sc}^2 x \, dx$. *Омс.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^3 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$. 208. $\int \operatorname{tg}^4 x \operatorname{sc}^4 x \, dx$.
Омс. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$. 209. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Омс.* $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$. 210. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$.
Омс. $C - \csc x$. 211. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos^4 x}}$. *Омс.* $\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{2}} x + 3 \cos^{-\frac{1}{2}} x + C$.
212. $\int \sin x \sin 3x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. 213. $\int \cos 4x \cos 7x \, dx$.
Омс. $\frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C$. 214. $\int \cos 2x \sin 4x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.
215. $\int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C$.
216. $\int \frac{dx}{4-5 \sin x}$. *Омс.* $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C$.
217. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$. *Омс.* $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$. 218. $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x}$.
Омс. $\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C$. 219. $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}$. *Омс.* $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.
220. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$. *Омс.* $\operatorname{arctg} (2 \sin^2 x - 1) + C$. 221. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^3}$.
Омс. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + C$. 222. $\int \frac{dx}{\sin^3 x + \operatorname{tg}^2 x}$. *Омс.* $-\frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} x + \right.$
 $\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$. 223. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$. *Омс.* $\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$.

ГЛАВА XI

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Постановка задачи. Нижняя и верхняя интегральные суммы

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл — одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т. д. сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ (рис. 206 и 207). Обозначим через m и M ее наименьшее и

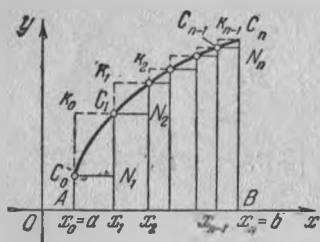


Рис. 206.

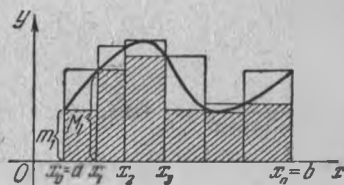


Рис. 207.

наибольшее значения на этом отрезке. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками деления

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b,$$

причем

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

и положим

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Обозначим, далее, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$

на отрезке $[x_0, x_1]$ через m_1 и M_1 ,

на отрезке $[x_1, x_2]$ через m_2 и M_2 ,

...

на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$ через m_n и M_n .

Составим суммы

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (1)$$

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (2)$$

Сумму $\underline{s}_n$ называют *нижней интегральной суммой*, а сумму $\bar{s}_n$ — *верхней интегральной суммой*.

Если $f(x) \geq 0$, то нижняя интегральная сумма численно равняется площади «вписанной ступенчатой фигуры» $AC_0N_1C_1N_2\dots C_{n-1}N_nBA$, ограниченной «вписанной» ломаной, верхняя интегральная сумма численно равняется площади «описанной ступенчатой фигуры»

$$AK_0C_1K_1\dots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA,$$

ограниченной «описанной» ломаной.

Отметим некоторые свойства верхних и нижних интегральных сумм.

а) Так как $m_i \leq M_i$ для любого i ($i = 1, 2, \dots, n$), то на основании формул (1) и (2) имеем:

$$\underline{s}_n \leq \bar{s}_n.$$

(Знак равенства будет только в случае, если $f(x) = \text{const.}$)

б) Так как

$$m_1 \geq m, m_2 \geq m, \dots, m_n \geq m,$$

где m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} \underline{s}_n &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots + m \Delta x_n = \\ &= m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m(b-a). \end{aligned}$$

Итак,

$$\underline{s}_n \geq m(b-a).$$

в) Так как

$$M_1 \leq M, M_2 \leq M, \dots, M_n \leq M,$$

где M — наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} \bar{s}_n &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots + M \Delta x_n = \\ &= M (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M(b-a). \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{s}_n \leq M(b-a).$$

Соединяя вместе полученные неравенства, имеем:

$$m(b-a) \leq \underline{s}_n \leq \bar{s}_n \leq M(b-a).$$

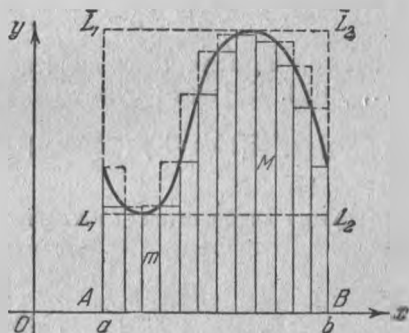


Рис. 208.

Если $f(x) \geq 0$, то последнее неравенство имеет простой геометрический смысл (рис. 208), так как произведения $m(b-a)$ и $M(b-a)$ соответственно численно равны площадям «вписанного» прямоугольника AL_1L_2B и «описанного» прямоугольника $AL_1\bar{L}_2B$.

§ 2. Определенный интеграл

Продолжим рассмотрение вопроса предыдущего параграфа. В каждом из отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ возьмем по точке, которые обозначим $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (рис. 209),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

В каждой из этих точек вычислим значение функции $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$. Составим сумму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на

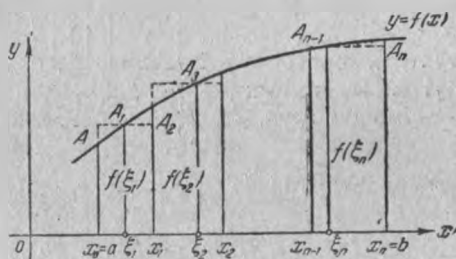


Рис. 209.

отрезке $[a, b]$. Так как при произвольном ξ_i , принадлежащем отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, будет

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

и все $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

или

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n. \quad (2)$$

Геометрический смысл последнего неравенства при $f(x) \geq 0$ состоит

в том, что фигура, площадь которой равна s_n , ограничена ломаной, заключенной между «вписанной» ломаной и «описанной» ломаной.

Сумма s_n зависит от способа разделения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и от выбора точек ξ_i внутри получающихся отрезков.

Обозначим теперь через $\max [x_{i-1}, x_i]$ наибольшую из длин отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Рассмотрим различные разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ такие, что $\max [x_{i-1}, x_i] \rightarrow 0$. Очевидно, что при этом число отрезков n в разбиении стремится к бесконечности. Для каждого разбиения, выбрав соответствующие значения ξ_i , можно составить интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Таким образом, можно говорить о последовательности разбиений и соответствующей последовательности интегральных сумм. Пусть при некоторой выбранной последовательности разбиений, когда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, эта сумма *) стремится к пределу I .

Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, и при любом выборе точек ξ_i сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ стремится к тому

же пределу I , то говорят, что функция $f(x)$ — подынтегральная функция — *интегрируема* на отрезке $[a, b]$, предел I называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Обозначают его

$\int_a^b f(x) dx$ и пишут:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Число a называется *нижним пределом* интеграла, b — *верхним пределом*. Отрезок $[a, b]$ называется *отрезком интегриции*, буква x — *переменной интегриции*.

Укажем без доказательства, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке **).

Очевидно, что если при какой-то последовательности разбиений таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, мы будем рассматривать последовательность нижних интегральных сумм s_n и верхних интегральных сумм $\bar{s}_n$ для непрерывной функции $f(x)$, то эти суммы будут стремиться к тому

*) В данном случае сумма является упорядоченной переменной величиной.

**) Читатель, интересующийся доказательством этой теоремы, может найти его, например, в книге Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа».

же пределу I — определенному интегралу от функции $f(x)$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Среди разрывных функций есть как интегрируемые, так и неинтегрируемые.

Если построить график подынтегральной функции $y=f(x)$, то в случае $f(x) \geq 0$ интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

будет численно равен площади так называемой *криволинейной трапеции*, ограниченной указанной кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox (рис. 210).

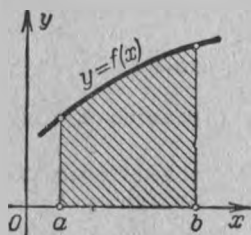


Рис. 210.

Поэтому, если требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox , то эта площадь Q вычисляется с помощью интеграла:

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Замечание 1. Отметим, что определенный интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой. Поэтому, не изменяя величины определенного интеграла, можно заменить букву x любой другой буквой:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(z) dz.$$

При введении понятия определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ мы предполагали, что $a < b$. В случае $b < a$ примем по определению

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (4)$$

Так, например,

$$\int_a^b x^2 dx = - \int_b^a x^2 dx.$$

Наконец, в случае $a=b$ полагаем по определению, что для любой функции $f(x)$ имеет место

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (5)$$

Это естественно и с геометрической точки зрения. В самом деле, основание криволинейной трапеции имеет длину, равную нулю, следовательно, и площадь ее равна нулю.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int_a^b kx dx$ ($b>a$).

Решение. Геометрически задача эквивалентна вычислению площади Q трапеции, ограниченной линиями $y=kx$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рис. 211).

Функция $y=kx$, стоящая под знаком интеграла, непрерывна. Следовательно, для вычисления определенного интеграла мы вправе, как это было замечено выше, произвести разбиение отрезка $[a, b]$ произвольным способом и произвольно выбрать промежуточные точки ξ_i . Результат вычисления определенного интеграла не зависит от способа построения интегральной суммы — лишь бы шаг разбиения стремился к нулю.

Делим отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков.

Длина Δx каждого частичного отрезка равна

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}; \text{ это число и будет шагом разбиения.}$$

Точки деления имеют координаты:

$$\begin{aligned} a &= x_0, \quad x_1 = a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x. \end{aligned}$$

В качестве точек ξ_i возьмем левые концы каждого отрезка

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta x, \quad \xi_3 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Составим интегральную сумму (1). Так как $f(\xi_i) = k\xi_i$, то

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \dots + k\xi_n\Delta x = \\ &= ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + \dots + [k(a+(n-1)\Delta x)]\Delta x = \\ &= k\{a + (a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + \dots + [a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \dots + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [1+2+\dots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x, \end{aligned}$$

где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Учитывая, что

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(как сумма арифметической прогрессии),

$$s_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \frac{b-a}{2} \right] (b-a).$$

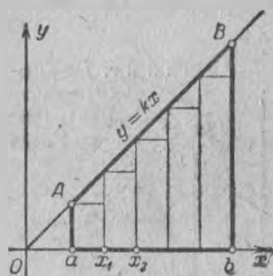


Рис. 211.

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Итак,

$$\int_a^b kx \, dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Площадь $ABba$ (рис. 211) легко вычислить методами элементарной геометрии. Результат получится тот же.

Пример 2. Вычислить $\int_a^b x^2 \, dx$.

Решение. Данный интеграл равен площади Q криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, ординатой $x = b$ и прямой $y = 0$ (рис. 212).

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками:

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_n = b = n\Delta x,$$

$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

За точки ξ_i возьмем крайние правые точки каждого из отрезков.

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} s_n &= x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x = \\ &= [(\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x] = \\ &= (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]. \end{aligned}$$

Как известно,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

поэтому

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = \int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$



Рис. 212.

Пример 3. Вычислить $\int_a^b m dx$ ($m = \text{const}$).

Решение.

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \\ &= m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a). \end{aligned}$$

Здесь $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ есть сумма длин отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$.

При любом способе разбиения эта сумма равна длине отрезка $b-a$.

Пример 4. Вычислить $\int_a^b e^x dx$.

Решение. Снова разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = a + n\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

За точки ξ возьмем левые крайние точки. Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} s_n &= e^a \Delta x + e^{a+\Delta x} \Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x} \Delta x = \\ &= e^a (1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) \Delta x. \end{aligned}$$

Выражение в скобках есть геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{\Delta x}$ и первым членом 1, поэтому

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Далее, имеем:

$$n\Delta x = b-a; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

(По правилу Лопиталя $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1$.) Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

то есть

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Замечание 2. Только что рассмотренные примеры показывают, что непосредственное вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано с большими трудностями. Даже

в тех случаях, когда подынтегральные функции являются очень простыми (kx , x^2 , e^x), этот способ требует громоздких подсчетов. Нахождение же определенных интегралов от более сложных функций приводит к еще большим трудностям. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов. Этот метод, открытый Ньютоном и Лейбницем, использует глубокую связь, существующую между интегрированием и дифференцированием. Изложению и обоснованию этого метода посвящены следующие параграфы настоящей главы.

§ 3. Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: если $A = \text{const}$, то*

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b A f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= A \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Свойство 2. *Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.* Так, в случае двух слагаемых

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (2)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i \right] = \\ &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Доказательство проводится аналогично для любого числа слагаемых.

Свойства 1 и 2, хотя и доказаны только для случая $a < b$, остаются в силе и при $a \geq b$.

Однако следующее свойство справедливо только при $a < b$:

Свойство 3. Если на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx = \\ &= \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta x_i. \end{aligned}$$

Здесь каждая разность $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$. Следовательно, каждое слагаемое суммы неотрицательно, неотрицательна вся сумма и неотрицателен ее предел, т. е.

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx \geq 0$$

или

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

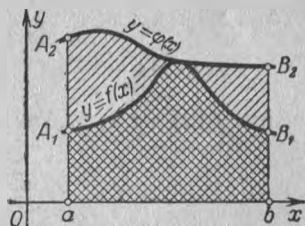


Рис. 213.

откуда следует неравенство (3).

Если $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, то указанное свойство наглядно иллюстрируется геометрически (рис. 213). Так как $\varphi(x) \geq f(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади криволинейной трапеции aA_2B_2b .

Свойство 4. Если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a \leq b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (4)$$

Доказательство. По условию

$$m \leq f(x) \leq M.$$

На основании свойства (3) имеем:

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx. \quad (4')$$

Но

$$\int_a^b m \, dx = m(b-a), \quad \int_a^b M \, dx = M(b-a)$$

(см. пример 3 § 2 гл. XI). Подставляя эти выражения в неравенство (4'), получим неравенство (4).

Если $f(x) \geq 0$, то это свойство легко иллюстрируется геометрически (рис. 214): площадь криволинейной трапеции $aABb$ содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b .

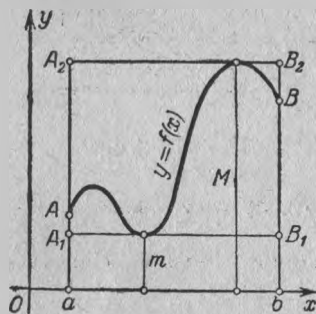


Рис. 214.

Свойство 5 (Теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ , что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(\xi). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$. Если m и M суть, соответственно, наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то в силу формулы (4)

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Отсюда

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \mu, \text{ где } m \leq \mu \leq M.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M . Следовательно, при некотором значении ξ ($a \leq \xi \leq b$) будет $\mu = f(\xi)$, т. е.

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) (b-a).$$

Свойство 6. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad (6)$$

если только все эти три интеграла существуют.

Доказательство. Предположим сначала, что $a < c < b$, и составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, то мы будем разбивать отрезок $[a, b]$ на малые отрезки так, чтобы точка c была точкой деления. Разобьем

далее интегральную сумму $\sum_a^b$, соответствующую отрезку $[a, b]$ на две

суммы: сумму $\sum_a^c$, соответствующую от-

резку $[a, c]$ и сумму $\sum_c^b$, соответствующую отрезку $[c, b]$.

Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i.$$

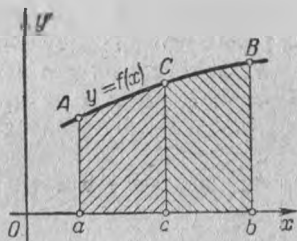


Рис. 215.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, получим соотношение (6).

Если $a < b < c$, то на основании доказанного можем написать:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx;$$

но на основании формулы (4) § 2 имеем:

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx,$$

поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Аналогичным образом доказывается это свойство при любом другом расположении точек a , b и c .

На рисунке 215 дана геометрическая иллюстрация свойства 6 для того случая, когда $f(x) > 0$ и $a < c < b$: площадь трапеции $aABb$ равна сумме площадей трапеций $aACc$ и $cCBb$.

§ 4. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница

Пусть в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx$$

нижний предел a закреплён, а верхний предел b меняется. Тогда будет меняться и значение интеграла, т. е. интеграл есть функция верхнего предела.

Для того чтобы иметь привычные обозначения, верхний предел обозначим через x , а чтобы не смешивать его с переменной интегрирования, последнюю обозначим через t . (От обозначения переменной интегрирования значение интеграла не зависит). Получим интеграл $\int_a^x f(t) dt$.

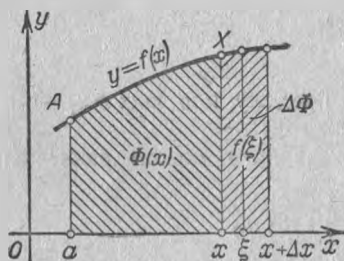


Рис. 216.

При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x . Эту функцию мы обозначим через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

Если $f(t)$ — неотрицательная функция, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$ (рис. 216). Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от изменения x .

Найдем производную от $\Phi(x)$ по x , т. е. найдем производную определенного интеграла (1) по верхнему пределу.

Теорема 1. Если $f(x)$ — непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, то имеет место равенство

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Иными словами, производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела (при условии, что подынтегральная функция непрерывна).

Доказательство. Дадим аргументу x положительное или отрицательное приращение Δx ; тогда (учитывая свойство 6 определенного интеграла) получим:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Приращение функции $\Phi(x)$ равно

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt,$$

т. е.

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем значении (свойство 5 определенного интеграла)

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

где ξ заключено между x и $x + \Delta x$.

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Но так как $\xi \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

а вследствие непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Таким образом, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Данная теорема просто иллюстрируется геометрически (рис. 216): приращение $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ равняется площади криволинейной трапеции с основанием Δx , а производная $\Phi'(x) = f(x)$ равна длине отрезка xX .

Замечание. Из доказанной теоремы, в частности, следует, что *всякая непрерывная функция имеет первообразную*. Действительно, если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$, то, как указывалось в § 2 гл. XI, в этом случае определенный интеграл

$\int_a^x f(t) dt$ существует, т. е. существует функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Но по доказанному выше она является первообразной от $f(x)$.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница* *).

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть некоторая первообразная от функции $f(x)$. По теореме 1 функция $\int_a^x f(t) dt$ есть также первообразная от $f(x)$. Но две любые первообразные от данной функции отличаются на постоянное слагаемое C^* . Следовательно, можно написать:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C^*. \quad (3)$$

Это равенство при соответствующем выборе C^* справедливо при всех значениях x , т. е. является тождеством. Для определения постоянного C^* положим в этом тождестве $x = a$; тогда

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C^*,$$

или

$$0 = F(a) + C^*,$$

откуда

$$C^* = -F(a).$$

Следовательно,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получим формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

или, заменив обозначение переменной интегрирования на x :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Отметим, что разность $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной F , так как все первообразные отличаются на постоянную величину, которая при вычитании все равно уничтожается.

*) Необходимо отметить, что такое название формулы (2) условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Но важно то, что именно Лейбниц и Ньютон впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенных интегралов.

Если ввести обозначение *)

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

то формулу (2) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона—Лейбница дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, когда известна первообразная подынтегральной функции. Только с открытием этой формулы определенный интеграл смог получить то значение в математике, какое он имеет в настоящее время. Хотя с процессом, аналогичным вычислению определенного интеграла как предела интегральной суммы, были знакомы еще в древности (Архимед), однако приложения этого метода ограничивались теми простейшими случаями, когда предел интегральной суммы мог быть вычислен непосредственно. Формула Ньютона—Лейбница значительно расширила область применения определенного интеграла, так как математика получила общий метод для решения различных задач частного вида и поэтому смогла значительно расширить круг приложений определенного интеграла к технике, механике, астрономии и т. д.

Пример 1.

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Пример 2.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Пример 3.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

Пример 4.

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

*) Выражение $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки. В литературе встречаются две формы записи: или

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

или

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Мы в дальнейшем будем употреблять и тот и другой способы записи.

Пример 5.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Пример 6.

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную t по формуле

$$x = \varphi(t).$$

Если

1) $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$,

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$,

3) $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt. \quad (1)$$

Доказательство. Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то можем написать следующие равенства:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (3)$$

Справедливость последнего равенства проверяется дифференцированием обеих частей по t . (Оно так же следует из формулы (2) § 4 гл. X.) Из равенства (2) получаем:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Из равенства (3) получаем:

$$\int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt = F[\varphi(t)] \Big|_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(b) - F(a).$$

Правые части последних выражений равны, следовательно равны и левые.

Замечание. Отметим, что при вычислении определенного интеграла по формуле (1) мы не возвращаемся к старой переменной. Если мы вычислим второй из определенных интегралов равенства (1), то мы получим некоторое число; этому же числу равняется и первый интеграл.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Решение. Сделаем замену переменной:

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt.$$

Определим новые пределы:

$$x = 0 \text{ при } t = 0,$$

$$x = r \text{ при } t = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

Вычисленный интеграл с геометрической точки зрения представляет площадь $\frac{1}{4}$ круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 217).

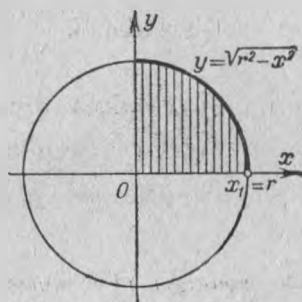


Рис. 217.

§ 6. Интегрирование по частям

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x . Тогда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b , получим:

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx. \quad (1)$$

Так как $\int (uv)' dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$; поэтому равенство (2) может быть записано в виде

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv,$$

или окончательно

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример. Вычислить интеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u} \underbrace{d \cos x}_{dv} = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

В выбранных обозначениях последнее равенство можно записать так:

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

откуда находим:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (2)$$

Тем же приемом найдем:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

поэтому

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Продолжая таким же образом далее, мы дойдем или до I_0 или до I_1 в зависимости от того, будет ли число n четным или нечетным.

Рассмотрим два случая:

1) n — число четное, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$$

2) n — число нечетное, $n = 2m + 1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1$$

но так как

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

то

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Из этих формул следует формула Валлиса, выражающая число $\frac{\pi}{2}$ в виде бесконечного произведения.

Действительно из последних двух равенств путем почленного деления находим:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \quad (3)$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Для всех x интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ справедливы неравенства

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x.$$

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим:

$$I_{2m-1} \geq I_{2m} \geq I_{2m+1},$$

откуда

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1. \quad (4)$$

Из равенства (2) следует:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

Из неравенства (4) получаем:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Переходя к пределу в формуле (3), получим формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

§ 7. Несобственные интегралы

1. Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x , таких, что $a \leq x < +\infty$. Рассмотрим интеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении b интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b (см. § 4). Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \rightarrow +\infty$ (рис. 218).

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty]$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Следовательно, по определению имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

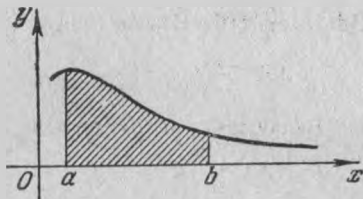


Рис. 218.

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *существует* или *сходится*. Если $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *не существует* или *расходится*.

Легко выяснить геометрический смысл несобственного интеграла в случае, когда $f(x) \geq 0$: если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x=a$, $x=b$, то естественно считать, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y=f(x)$, $x=a$ и осью абсцисс.

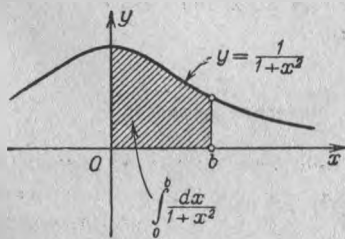


Рис. 219.

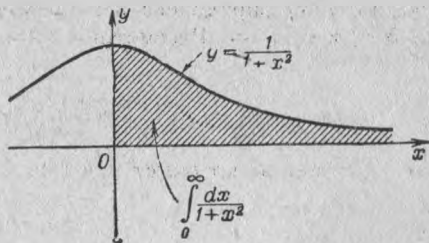


Рис. 220.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Последнее равенство следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует (сходится), по определению, и интеграл, стоящий слева.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (см. рис. 219 и 220).

Решение. По определению несобственного интеграла находим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотренный интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке 220.

Пример 2. Установить, при каких значениях α (рис. 221) интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится и при каких расходится.

Решение. Так как (при $\alpha \neq 1$)

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - 1],$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

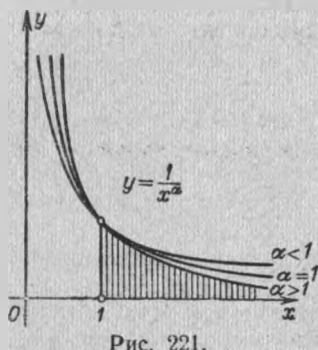


Рис. 221.

Следовательно,

$$\text{если } \alpha > 1, \text{ то } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \text{ т. е. интеграл сходится;}$$

$$\text{если } \alpha < 1, \text{ то } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty, \text{ т. е. интеграл расходится.}$$

$$\text{При } \alpha = 1 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \infty \text{ интеграл расходится.}$$

Пример 3. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Второй интеграл равен $\frac{\pi}{2}$ (см. пример 1). Вычислим первый интеграл:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_\alpha^0 = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится, и оценить его значение. Для этого могут быть полезными следующие две теоремы, которые мы приведем без доказательств, а применение их покажем на примерах.

Теорема 1. Если для всех x ($x \geq a$) выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

и если $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также сходится, при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Пример 4. Исследовать, сходится ли интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Решение. Заметим, что при $1 \leq x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Далее,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Следовательно

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

сходится и его значение меньше 1.

Теорема 2. Если для всех x ($x \geq a$) выполняется неравенство

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \text{ причем } \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ расходится, то расходится}$$

и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пример 5. Исследовать, сходится ли интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Замечаем, что

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Но

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty.$$

Следовательно, расходится и данный интеграл.

В последних двух теоремах рассматривались несобственные интегралы от неотрицательных функций. Для случая функции $f(x)$, меняющей знак в бесконечном интервале, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

В этом случае последний интеграл называется *абсолютно сходящимся*.

Пример 6. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

Решение. Здесь подынтегральная функция — знакопеременная. Замечаем, что

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|. \quad \text{Но} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ сходится. Отсюда следует, что сходится и данный интеграл.

2. Интеграл от разрывной функции. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x < c$, а при $x = c$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об интеграле $\int_a^c f(x) dx$ как о пределе интегральных сумм, так как $f(x)$ не непрерывна на отрезке $[a, c]$, и поэтому этот предел может и не существовать.

Интеграл $\int_a^c f(x) dx$ от функции $f(x)$, разрывной в точке c , определяется следующим образом:

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx.$$

Если предел, стоящий справа, существует, то интеграл называют несобственным *сходящимся* интегралом, в противном случае интеграл называют *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a, c]$ (т. е. при $x = a$), то по определению

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = x_0$ внутри отрезка $[a, c]$, то полагают

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx,$$

если оба несобственных интеграла, стоящих в правой части равенства, существуют.

Пример 7. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2 \sqrt{1-x} \Big|_0^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2 [\sqrt{1-b} - 1] = 2. \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Так как внутри отрезка интегрирования существует точка $x=0$, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл нужно представить как сумму двух слагаемых:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Следовательно, на участке $[-1, 0]$ интеграл расходится

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty.$$

Значит, на участке $[0, 1]$ интеграл также расходится.

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке $[-1, 1]$.

Отметим, что если бы мы стали вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции в точке $x=0$, то получили бы неверный результат. Действительно,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

что невозможно (рис. 222).

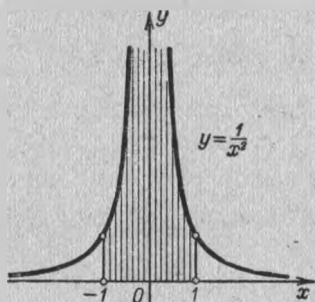


Рис. 222.

Замечание. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, \dots, a_n$, то интеграл

от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части равенства сходится. Если же хотя бы один из этих интегралов рас-

ходится, то и $\int_a^b f(x) dx$ называется расходящимся.

Для определения сходимости несобственных интегралов от разрывных функций и оценки их значений часто могут быть применены теоремы, аналогичные теоремам для оценки интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 1'. Если на отрезке $[a, c]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке c , причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0,$$

и $\int_a^c \varphi(x) dx$ сходится, то $\int_a^c f(x) dx$ также сходится.

Теорема II'. Если на отрезке $[a, c]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разрывны в точке c , причем во всех точках этого отрезка выполнены неравенства

$$f(x) \geq \varphi(x) \geq 0,$$

и $\int_a^c \varphi(x) dx$ расходится, то и $\int_a^c f(x) dx$ расходится.

Теорема III'. Если $f(x)$ — функция знакопеременная на отрезке $[a, c]$, разрывная только в точке c , и несобственный интеграл $\int_a^c |f(x)| dx$ от абсолютной величины этой функции сходится,

то сходится также интеграл $\int_a^c f(x) dx$ от самой функции.

В качестве функций, с которыми удобно сравнивать функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, часто берут $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$. Легко

проверить, что $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^\alpha} dx$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

Это же относится и к интегралам $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$.

Пример 9. Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + 4x^2} dx$?

Решение. Подынтегральная функция разрывна в левом конце отрезка $[0, 1]$. Сравнивая ее с функцией $\frac{1}{\sqrt{x}}$, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 4x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ существует. Следовательно, несобственный

интеграл от меньшей функции, т. е. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + 4x^2} dx$, тоже существует.

§ 8. Приближенное вычисление определенных интегралов

В конце главы X указывалось, что не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона—Лейбница затруднительно, и применяются различные

методы приближенного вычисления определенных интегралов. Сейчас мы изложим несколько способов приближенного интегрирования, исходя из понятия определенного интеграла как предела суммы.

I. Формула прямоугольников. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Разделим отрезок $[a, b]$ точками $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ на n равных частей длины Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Обозначим далее через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е.

$$y_0=f(x_0); \quad y_1=f(x_1); \quad \dots; \quad y_n=f(x_n).$$

Составим суммы:

$$\begin{aligned} y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x, \\ y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x. \end{aligned}$$

Каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и поэтому приближенно выражает интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1')$$

Это и есть *формулы прямоугольников*. Из рисунка 223 ясно, что если $f(x)$ — положительная и возрастающая функция, то формула (1) выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула (1') — площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников.

Ошибка, совершаемая при вычислении интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число n (т. е. чем меньше шаг деления $\Delta x = \frac{b-a}{n}$).

II. Формула трапеций. Естественно ожидать, что мы получим более точное значение определенного интеграла, если данную кривую $y=f(x)$ заменим не ступенчатой линией, как это было

в формуле прямоугольников, а вписанной ломаной (рис. 224). Тогда площадь криволинейной трапеции ABb заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами AA_1 ,

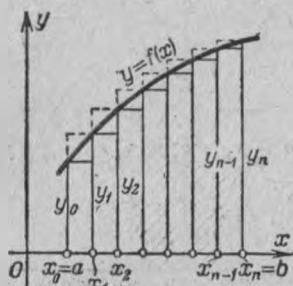


Рис. 223.

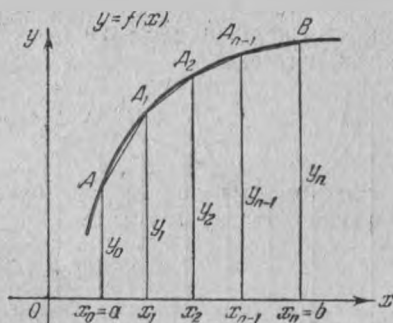


Рис. 224.

$A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$. Так как площадь первой из этих трапеций равна $\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x$, площадь второй равна $\frac{y_1+y_2}{2} \Delta x$ и т. д., то

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1+y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \Delta x \right),$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

Это и есть *формула трапеций*.

Число n выбирается произвольно. Чем больше будет это число и чем меньше, следовательно, будет шаг $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, тем с большей точностью сумма, написанная в правой части приближенного равенства (2), будет давать значение интеграла.

III. Формула парабол (формула Симпсона). Разделим отрезок $[a, b]$ на четное число частей $n=2m$. Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и ограниченной заданной кривой $y=f(x)$, заменим площадью такой криволинейной трапеции, которая ограничена параболой второй степени, проходящей через три точки:

$$M(x_0, y_0); M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2),$$

и имеющей ось, параллельную оси Oy (рис. 225). Такую криволинейную трапецию, будем называть *параболической трапецией*.

Уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy , имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Коэффициенты A , B и C однозначно определяются из условия, что парабола проходит через три заданные точки. Аналогичные параболы строим и для других пар отрезков. Сумма площадей параболических трапеций и даст приближенное значение интеграла.

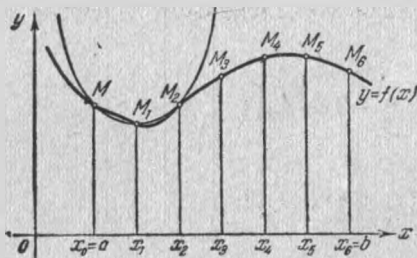


Рис. 225.

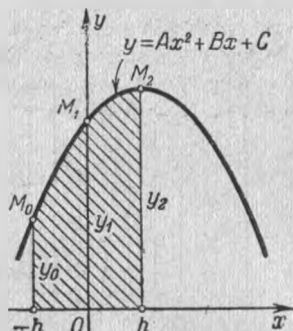


Рис. 226.

Вычислим сначала площадь одной параболической трапеции.

Лемма. Если криволинейная трапеция ограничена параболой

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

осью Ox и двумя ординатами, расстояние между которыми равно $2h$, то ее площадь равна

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (3)$$

где y_0 и y_2 — крайние ординаты, а y_1 — ордината кривой в середине отрезка.

Доказательство. Расположим вспомогательную систему координат так, как показано на рисунке 226.

Коэффициенты в уравнении параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ определяются из следующих уравнений:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{если } x_0 = -h, & \text{то } y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ \text{если } x_1 = 0, & \text{то } y_1 = C; \\ \text{если } x_2 = h, & \text{то } y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Считая коэффициенты A , B , C известными, определим площадь параболической трапеции с помощью определенного интеграла:

$$S = \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C).$$

Но из равенств (4) следует, что

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Следовательно,

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся снова к основной нашей задаче (см. рис. 225). Пользуясь формулой (3), мы можем написать следующие приближенные равенства ($h = \Delta x$):

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \\ &\dots \dots \dots \\ \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части, получим слева искомый интеграл, справа его приближенное значение:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \quad (5)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})].$$

Это и есть *формула Симпсона*. Здесь число точек деления $2m$ произвольно, но чем больше это число, тем точнее сумма в правой части равенства (5) дает значение интеграла *).

Пример. Вычислить приближенно

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

*) Для того чтобы знать, сколько точек деления надо взять, чтобы подсчитать интеграл с заданной степенью точности, можно воспользоваться формулами оценки погрешности, получающейся при приближенном вычислении интеграла. Мы не приводим здесь этих оценок. Читатель может найти их в более подробных курсах анализа: см., например, Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1962, т. II, гл. IX, § 5.

Решение. Разделим отрезок $[1, 2]$ на 10 равных частей (рис. 227). Полагая

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

составим таблицу значений подынтегральной функции:

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_5 = 1,6$	$y_5 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_6 = 1,7$	$y_6 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_7 = 1,8$	$y_7 = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$	$x_8 = 1,9$	$y_8 = 0,52632$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,50000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

I. По первой формуле прямоугольников (1) получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877.$$

По второй формуле прямоугольников (1') получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

Непосредственно из рисунка 227 следует, что в данном случае первая формула дает значение интеграла с избытком, вторая — с недостатком.

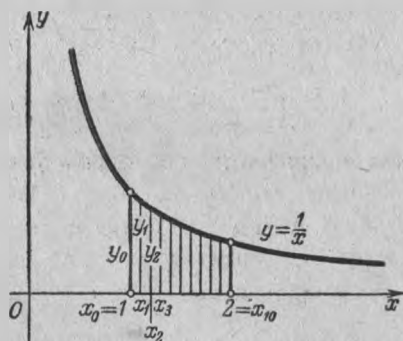


Рис. 227.

II. По формуле трапеций (2) получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left(\frac{1 + 0,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69377.$$

III. По формуле Симпсона (5) имеем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] =$$

$$= \frac{0,1}{3} (1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315.$$

В действительности $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472$ (с точностью до седьмого знака).

Таким образом, при разбиении отрезка $[0, 1]$ на 10 частей по формуле Симпсона мы получили пять верных знаков; по формуле трапеций—лишь три верных знака; по формуле прямоугольников мы можем ручаться только за первый знак.

§ 9. Формула Чебышева

В технических вычислениях часто применяется формула приближенного интегрирования Чебышева.

Пусть снова требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$.

Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом $P(x)$ Лагранжа (§ 9, гл. VII), взяв на отрезке $[a, b]$ некоторые n значений функции: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ —какие угодно точки отрезка $[a, b]$:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\dots$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \quad (1)$$

Получим следующую приближенную формулу интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx; \quad (2)$$

после некоторых вычислений она примет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n), \quad (3)$$

где коэффициенты C_i вычисляются по формулам

$$C_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} dx. \quad (4)$$

Формула (3) громоздка и неудобна для вычислений, так как коэффициенты C_i выражаются сложными дробями.

Чебышев поставил обратную задачу: задать не абсциссы $x_1, x_2, \dots, x_n$, а коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$ и определить абсциссы $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Коэффициенты C_i задаются так, чтобы формула (3) была возможно проще для вычислений. Очевидно, что это будет тогда, когда все коэффициенты C_i равны между собой:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n.$$

Если обозначить общее значение коэффициентов $C_1, C_2, \dots, C_n$ через C_n , то формула (3) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]. \quad (5)$$

Формула (5) представляет вообще приближенное равенство, но если $f(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$, то равенство будет точным. Это обстоятельство и позволяет определить величины $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Чтобы получить формулу, удобную для любого промежутка интегрирования, преобразуем отрезок интегрирования $[a, b]$ в отрезок $[-1, 1]$. Для этого положим

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t;$$

тогда при $t = -1$ будет $x = a$, при $t = 1$ будет $x = b$.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt,$$

где через $\varphi(t)$ обозначена функция от t , стоящая под знаком интеграла. Таким образом, задача интегрирования данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ всегда может быть сведена к интегрированию некоторой другой функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, задача свелась к тому, чтобы в формуле

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (6)$$

подобрать числа $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ так, чтобы эта формула была точной для всякой функции $f(x)$ вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) dx = \\ &= \begin{cases} 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \right), & \text{если } n \text{ — число нечетное;} \\ 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-2}}{n-1} \right), & \text{если } n \text{ — число четное.} \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

С другой стороны, сумма, стоящая в правой части равенства (6), на основании (7) будет равна

$$C_n [n a_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \quad (9)$$

Приравнявая выражения (8) и (9), получим равенство, которое должно быть справедливо при любых $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$:

$$\begin{aligned} 2 \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots \right) &= \\ &= C_n [n a_0 + a_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ &+ a_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1} (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ в левой и правой частях равенства:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_n n \quad \text{или} \quad C_n = \frac{2}{n}; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}; \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0; \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из последних n уравнений находим абсциссы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти решения найдены Чебышевым для различных значений n . Ниже приве-

дятся найденные им решения в случаях, когда число n промежуточных точек равно 3, 4, 5, 6, 7, 9:

Число ординат n	Коэффициент C_n	Значения абсцисс $x_1, x_2, \dots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Таким образом, приближенное вычисление интеграла на отрезке $[-1, 1]$ производится по следующей формуле Чебышева:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

где n — какое-либо из чисел 3, 4, 5, 6, 7 или 9, а $x_1, \dots, x_n$ — числа, приведенные в таблице. В качестве n нельзя брать число 8 или числа, превосходящие 9; в этом случае система уравнений (10) дает мнимые корни. Когда заданный интеграл имеет пределы интегрирования a и b , то формула Чебышева принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)],$$

где $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а x_i имеют указанные в таблице значения.

Приведем пример вычисления интеграла с помощью формулы Чебышева.

Пример. Вычислить $\int_1^3 \frac{dx}{x} (= \ln 2)$.

Решение. Прежде всего заменой переменных преобразуем этот интеграл в новый интеграл, у которого границы интегриации будут -1 и 1 :

$$x = \frac{1+t}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Тогда

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}.$$

Вычислим последний интеграл, приняв $n=3$, по формуле Чебышева

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} [f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

Так как

$$f(0,707107) = \frac{1}{3+0,707107} = \frac{1}{3,707107} = 0,269752,$$

$$f(0) = \frac{1}{3+0} = 0,333333,$$

$$f(-0,707107) = \frac{1}{3-0,707107} = \frac{1}{2,292893} = 0,436130,$$

то

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} = \frac{2}{3} (0,269752 + 0,333333 + 0,436130) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693.$$

Сравнивая этот результат с результатами вычисления по формулам прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона (см. пример в предыдущем параграфе), мы замечаем, что результат, полученный нами по формуле Чебышева (с тремя промежуточными точками), лучше согласуется с истинным значением интеграла, чем результат, полученный по формуле трапеций (с девятью промежуточными точками).

Отметим, что теория приближенного вычисления интегралов получила дальнейшее развитие в работах академика А. Н. Крылова (1863—1945).

§ 10. Интегралы, зависящие от параметра

Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Пусть дан интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx, \quad (1)$$

в котором подынтегральная функция зависит от некоторого параметра α . Если параметр α будет меняться, то будет меняться и значение определенного интеграла. Таким образом, определенный интеграл есть функция от α ; поэтому мы его можем обозначить через $I(\alpha)$.

1. Предположим, что $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ есть непрерывные функции при

$$c \leq \alpha \leq d \quad \text{и} \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Найдем производную интеграла по параметру α :

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha).$$

Для нахождения этой производной заметим, что

$$I(\alpha + \Delta\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha) &= \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx = \\ &= \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx; \\ \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx. \end{aligned}$$

Применяя теорему Лагранжа к подынтегральной функции, будем иметь:

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha),$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывна в замкнутой области (2), то

$$f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha) = f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon,$$

где величина ε , зависящая от $x, \alpha, \Delta\alpha$, стремится к нулю при $\Delta\alpha \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = \int_a^b [f'_a(x, \alpha) + \varepsilon] dx = \int_a^b f'_a(x, \alpha) dx + \int_a^b \varepsilon dx.$$

Переходя к пределу при $\Delta a \rightarrow 0$, получаем *):

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{I(a + \Delta a) - I(a)}{\Delta a} = I'_a(a) = \int_a^b f''_a(x, \alpha) dx$$

или

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha) dx \right]'_a = \int_a^b f'_a(x, \alpha) dx.$$

Последняя формула называется *формулой Лейбница*.

2. Предположим теперь, что в интеграле (1) пределы интегрирования a и b являются функциями от α :

$$I(\alpha) = \Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx. \quad (1')$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ есть сложная функция от α , причем a и b являются промежуточными аргументами. Для того чтобы найти производную от $I(\alpha)$, применим правило дифференцирования сложной функции от нескольких переменных (см. § 10 гл. VIII)

$$I'(\alpha) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{d\alpha}. \quad (3)$$

На основании теоремы о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу (см. формулу (1) § 4) получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, \alpha) dx = f[b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \alpha) dx = - \frac{\partial}{\partial a} \int_b^a f(x, \alpha) dx = -f[a(\alpha), \alpha].$$

*) Подынтегральная функция в интеграле $\int_a^b \varepsilon da$ стремится к нулю

при $\Delta a \rightarrow 0$. Из того, что подынтегральная функция в каждой точке стремится к нулю, не всегда следует, что интеграл также стремится к нулю.

Однако в данном случае $\int_a^b \varepsilon dx$ стремится к нулю при $\Delta a \rightarrow 0$. Этот факт мы принимаем без доказательства.

Наконец, для вычисления $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ применяем выведенную выше формулу Лейбница:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Подставляя в формулу (3) полученные выражения производных, будем иметь:

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f[b(\alpha), \alpha] \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha}. \quad (4)$$

С помощью формулы Лейбница можно вычислить некоторые определенные интегралы.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Решение. Заметим прежде всего, что непосредственно вычислить этот интеграл мы не можем, так как первообразная от функции $e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления данного интеграла будем рассматривать его как функцию от параметра α :

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Тогда его производная по α найдется по выведенной выше формуле Лейбница *):

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right]'_\alpha dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x dx.$$

Но последний интеграл легко вычисляется с помощью элементарных функций он равен $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Поэтому

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Интегрируя полученное тождество, найдем $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha + C. \quad (5)$$

*) Формула Лейбница выведена в предположении, что пределы интегрирования a и b конечны. Однако в данном случае формула Лейбница также справедлива, хотя один из пределов интегрирования равен бесконечности. Об условиях, при которых допустимо дифференцирование несобственных интегралов по параметру, см., например, в книге: Г. М. Фихтенгольца, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, 1962, т. II, гл. XIV, § 3.

Остается определить C . Для этого замечаем, что

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0.$$

Кроме того, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Подставляя в равенство (5) $\alpha = 0$, найдем:

$$I(0) = \operatorname{arctg} 0 + C,$$

откуда $C = 0$. Следовательно, для любого значения α имеет место равенство

$$I(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha,$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arctg} \alpha.$$

Упражнения к главе XI

1. Составляя интегральную сумму s_n и переходя к пределу, вычислить определенные интегралы

$$\int_a^b x^2 dx.$$

У к а з а н и е. Отрезок $[a, b]$ разделить на n частей точками $x_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Отв. $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, где $0 < a < b$. Отв. $\ln \frac{b}{a}$.

У к а з а н и е. Деление отрезка $[a, b]$ производить так же, как и в предыдущем примере.

3. $\int_a^b \sqrt{x} dx$. Отв. $\frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2})$.

У к а з а н и е. Смотрите предыдущий пример.

4. $\int_a^b \sin x dx$. Отв. $\cos a - \cos b$.

У к а з а н и е. Предварительно установить следующее тождество:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin[a+(n-1)h] = \\ = \frac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + nh - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

для этого надо умножить и разделить все члены левой части на $\sin \frac{h}{2}$ и заменить произведение синусов разностью косинусов.

$$5. \int_a^b \cos x \, dx. \text{ Ответ. } \sin b - \sin a.$$

Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, вычислить определенные инте-

гралы: 6. $\int_0^1 x^4 \, dx$. Ответ. $\frac{1}{5}$. 7. $\int_0^1 e^x \, dx$. Ответ. $e - 1$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$. Ответ. 1.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Ответ. $\frac{\pi}{4}$. 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ. $\frac{\pi}{4}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$. Ответ. $\ln 2$.

12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. Ответ. 1. 13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$. Ответ. $\ln x$. 14. $\int_0^x \sin x \, dx$. Ответ. $2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

15. $\int_{\sqrt[3]{a}}^x x^2 \, dx$. Ответ. $\frac{x^3 - a}{3}$. 16. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$. Ответ. $\ln(2z-1)$. 17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$. Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить значения нижеследующих интегралов, применяя указанные

подстановки: 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx$, $\cos x = t$. Ответ. $\frac{1}{3}$. 20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2 \cos x}$,

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Ответ. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 21. $\int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. Ответ. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

22. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x = \operatorname{tg} t$. Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. 23. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx$, $x-1=t^2$.

Ответ. $2(2 - \operatorname{arctg} 2)$. 24. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z \sqrt{z^2+1}}$, $z = \frac{1}{x}$. Ответ. $\ln \frac{3}{2}$.

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{6-5 \sin \varphi + \sin^2 \varphi}$, $\sin \varphi = t$. Ответ. $\ln \frac{4}{3}$.

Доказать, что 26. $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ ($m > 0$, $n > 0$).

$$27. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx. \quad 28. \int_0^a f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) dx.$$

Вычислить следующие несобственные интегралы: 29. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Отв.* 1.

$$30. \int_0^{\infty} e^{-x} dx. \quad \text{Отв. } 1. \quad 31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} \quad \text{Отв. } \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0). \quad 32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Отв. } \frac{\pi}{2}. \quad 33. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}. \quad \text{Отв. } \frac{1}{4}. \quad 34. \int_0^1 \ln x dx. \quad \text{Отв. } -1. \quad 35. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

Отв. Интеграл расходится. 36. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Отв.* Интеграл расходится.

$$37. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}. \quad \text{Отв. } \pi. \quad 38. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \quad \text{Отв. } \frac{3}{2}. \quad 39. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Отв. Интеграл расходится. } 40. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}. \quad \text{Отв. } \frac{\pi}{2}. \quad 41. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}.$$

$$\text{Отв. Интеграл расходится. } 42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0). \quad \text{Отв. } \frac{b}{a^2+b^2}.$$

$$43. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0). \quad \text{Отв. } \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Вычислить приближенные значения интегралов: 44. $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона ($n=12$). *Отв.* 1,6182 (по формуле трапеций); 1,6098 (по формуле Симпсона).

45. $\int_1^{11} x^3 dx$ по формуле трапеций

и по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 3690; 3660. 46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ по формуле

трапеций ($n=6$). *Отв.* 0,8109. 47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$ по формуле Симпсона

($n=4$). *Отв.* 0,8111. 48. $\int_{10}^{10} \lg_{10} x \, dx$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 6,0656; 6,0896.

49. Вычислить значение π из соотношения $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, применяя формулу Симпсона ($n=10$). *Отв.* 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$ по формуле Симпсона ($n=10$). *Отв.* 1,371.

51. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$, где $a > 0$, найти при целом $n > 0$

величину интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$. *Отв.* $n!$.

52. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, найти величину интеграла

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Отв.* $\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$.

53. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} \, dx$. *Отв.* $\ln(1+a)$ ($a > -1$).

54. Пользуясь равенством $\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$, вычислить интеграл

$\int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^k \, dx$. *Отв.* $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

ГЛАВА XII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$, то, как известно (§ 2, гл. XI), площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 210), равна

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также ≤ 0 . По абсолютной величине он равен площади Q соответствующей криволинейной трапеции:

$$-Q = \int_a^b f(x) dx.$$

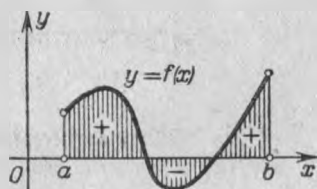


Рис. 228.

Если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a, b]$, то интеграл по всему отрезку $[a, b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл будет положителен на тех отрезках, где $f(x) \geq 0$, и отрицателен там, где $f(x) \leq 0$. Интеграл по всему отрезку даст разность площадей, лежащих выше и ниже оси Ox (рис. 228). Для того чтобы получить сумму площадей в обычном смысле, нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам или вычислить интеграл

$$Q = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь Q , ограниченную синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox , при $0 \leq x \leq 2\pi$ (рис. 229).

Решение. Так как $\sin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq \pi$ и $\sin x \leq 0$ при $\pi < x \leq 2\pi$, то

$$Q = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$

Следовательно, $Q = 2 + |-2| = 4$.

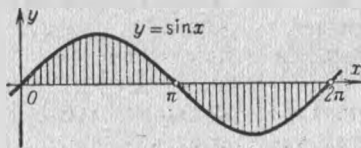


Рис. 229.

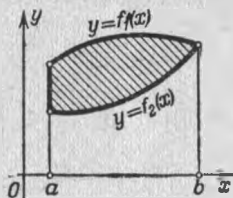


Рис. 230.

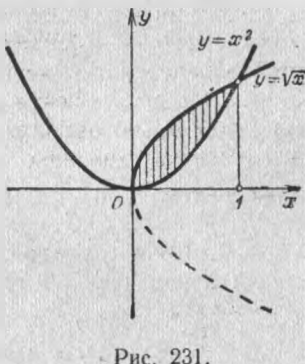


Рис. 231.

Если нужно вычислить площадь, ограниченную кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и ординатами $x = a$, $x = b$, то при условии $f_1(x) \geq f_2(x)$ будем, очевидно, иметь (рис. 230):

$$Q = \int_a^b f_1(x) \, dx - \int_a^b f_2(x) \, dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \, dx. \quad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную кривыми (рис. 231)

$$y = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad y = x^2.$$

Решение. Находим точки пересечения кривых: $\sqrt{x} = x^2$; $x = x^4$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Следовательно,

$$Q = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим теперь площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной уравнениями в параметрической форме (рис. 232):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

где $\alpha \leq t \leq \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть уравнения (3) определяют некоторую функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

$$Q = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

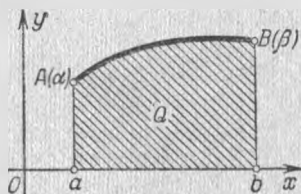


Рис. 232.

Сделаем замену переменного в этом интеграле: $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t) dt$. На основании уравнений (3) получим: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Следовательно,

$$Q = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Это и есть формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пример 3. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь x изменяется от $-a$ до $+a$, следовательно, t изменяется от π до 0 ,

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t) (-a \sin t dt) = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить площадь, ограниченную осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Изменению t от 0 до 2π соответствует изменение x от 0 до $2\pi a$. По формуле (4) имеем:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right]; \\ \int_0^{2\pi} dt &= 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi. \end{aligned}$$

Окончательно получаем: $Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$.

§ 2. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением

$$\varrho = f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — непрерывная функция при $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Определим площадь сектора OAB , ограниченную кривой $\varrho = f(\theta)$ и радиусами-векторами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

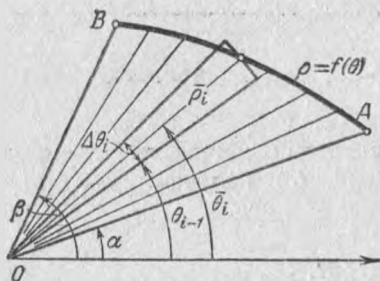


Рис. 233.

Разобьем данную площадь радиусами-векторами $\theta_0 = \alpha$, $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$ на n частей. Обозначим через $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ углы между проведенными радиусами-векторами (рис. 233).

Обозначим через $\bar{\varrho}_i$ длину радиуса-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\bar{\theta}_i$, заключенному между θ_{i-1} и θ_i .

Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\bar{\varrho}_i$ и центральным углом $\Delta\theta_i$. Его площадь будет равна

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2} \bar{\varrho}_i^2 \Delta\theta_i.$$

Сумма

$$Q_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{\varrho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

даст площадь «ступенчатого» сектора.

Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\varrho^2 = [f(\theta)]^2$ на отрезке $\alpha \leq \theta \leq \beta$, то ее предел при $\max \Delta\theta_i \rightarrow 0$ есть определенный интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2 d\theta.$$

Он не зависит от того, какой радиус-вектор $\bar{\varrho}_i$ мы возьмем внутри угла $\Delta\theta_i$. Этот предел естественно считать искомой площадью фигуры *).

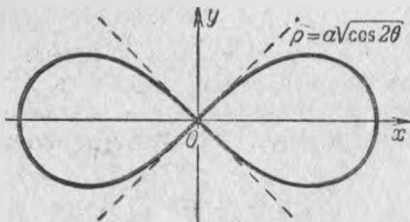


Рис. 234.

*) Можно было бы показать, что это определение площади не противоречит данному ранее; иначе говоря, если вычислять площадь криволинейного сектора с помощью криволинейных трапеций, то мы получим тот же результат.

Таким образом, площадь сектора OAB равна

$$Q = \frac{1}{2} \int_a^b \varrho^2 d\theta \quad (1)$$

или

$$Q = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (1')$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатою (рис. 234):

$$\varrho = a \sqrt{\cos 2\theta}$$

Решение. Радиус-вектор опишет четверть искомой площади, если θ меняется от 0 до $\pi/4$:

$$\frac{1}{4} Q = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \varrho^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2 \sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4},$$

следовательно, $Q = a^2$.

§ 3. Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой в прямоугольных координатах. Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением $y = f(x)$.

Найдем длину дуги AB этой кривой, заключенную между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 235).

В главе VI (§ 1) было дано определение длины дуги. Напомним это определение. Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, B$ с абсциссами $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, b = x_n$ и проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Тогда получим ломаную $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB . Длина ломаной равна

$$s_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

Длиной s дуги AB называется тот предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i. \quad (1)$$

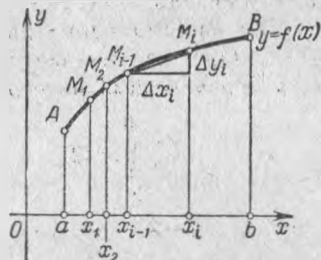


Рис. 235.

Мы докажем сейчас, что если на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Вместе с тем будет дан и способ вычисления длины дуги.

Введем обозначение:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Тогда

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа имеем:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Следовательно,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Таким образом, длина вписанной ломаной равна

$$s_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

По условию, $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел написанной интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Итак, получили формулу для вычисления длины дуги

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (2)$$

Замечание. Исходя из последней формулы, можно получить производную от длины дуги по абсциссе. Если верхний предел интегрирования будем считать переменным и обозначим через x (переменную интегриации менять не будем), то длина дуги s будет функцией от x :

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Дифференцируя этот интеграл по верхнему пределу, получим:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (3)$$

Эта формула была получена в § 1 гл. VI при иных предположениях.

Пример 1. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение. Вычислим сначала длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Тогда уравнение дуги AB будет:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}.$$

Длина всей окружности $s = 2\pi r$.

Найдем теперь длину дуги кривой в том случае, когда уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (4)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными, причем $\varphi'(t)$ на заданном участке не обращается в нуль. В этом случае уравнения (4) определяют некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда, сделав в интеграле (2) подстановку

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt,$$

получим:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt,$$

или окончательно

$$s = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (5)$$

Замечание 2. Можно доказать, что формула (5) остается в силе и для таких кривых, которые пересекаются вертикальными прямыми более чем в одной точке (в частности, для замкнутых кривых), лишь бы во всех точках кривой были непрерывны обе производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пример 2. Вычислить длину гипоциклоиды (астроиды):

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Решение. Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Находим:

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Параметр t будет изменяться от 0 до $\pi/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}s &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 3a \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \quad s = 6a. \end{aligned}$$

Замечание 3. Если задана пространственная кривая параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (6)$$

где $\alpha \leq t \leq \beta$ (см. § 1 гл. IX), то длина ее дуги определяется (так же как и для плоской дуги) как предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина наибольшего звена стремится к нулю. Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha, \beta]$, то кривая имеет определенную длину (т. е. для нее существует вышеуказанный предел), которая вычисляется по формуле

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \quad (7)$$

Последний результат мы принимаем без доказательства.

Пример 3. Вычислить длину дуги винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = amt$ при изменении t от 0 до 2π .

Решение. Из данных уравнений находим:

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = a \cos t dt, \quad dz = am dt.$$

Подставляя в формулу (7), получим:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2} dt = 2\pi a \sqrt{1 + m^2}.$$

2. Длина дуги кривой в полярных координатах. Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой

$$\rho = f(\theta), \quad (8)$$

где ρ — полярный радиус, θ — полярный угол.

Напишем формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Если сюда вместо ρ подставим его выражение (8) через θ , то получим уравнения

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta.$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления длины дуги применить формулу (5). Для этого найдем производные от x и y по параметру θ :

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta; \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Тогда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \varrho'^2 + \varrho^2.$$

Следовательно,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2} d\theta.$$

Пример 4. Найти длину кардиоида $\varrho = a(1 + \cos \theta)$ (рис. 236).

Изменяя полярный угол θ от 0 до π , получим половину искомой длины. Здесь $\varrho' = -a \sin \theta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta = \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

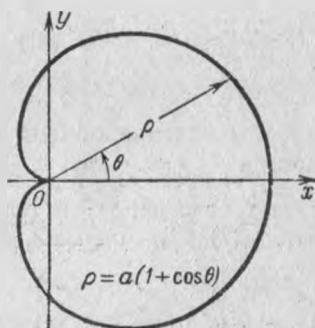


Рис. 236.

Пример 5. Вычислить длину эллипса:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

предполагая, что $a > b$.

Решение. Для вычисления воспользуемся формулой (5). Вычислим сначала $1/4$ длины дуги, т. е. длину дуги, соответствующей изменению параметра от $t=0$ до $t=\pi/2$:

$$\begin{aligned} \frac{s}{4} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt, \end{aligned}$$

где $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. Следовательно,

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt.$$

Остается только вычислить последний интеграл. Но он, как известно, не выражается в элементарных функциях (см. § 16 гл. X). Этот интеграл можно вычислить только приближенными методами (например, по формуле Симпсона).

В частности, если большая полуось эллипса равна 5, а малая равна 4, то $k = 3/5$, и длина эллипса равна

$$s = 4 \cdot 5 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 t} dt.$$

Вычисляя последний интеграл по формуле Симпсона (деля отрезок $[0, \pi/2]$ на четыре части), получим приближенное значение интеграла:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{5} \cos^2 t} dt \approx 1,298,$$

и следовательно, длина дуги всего эллипса приближенно равна

$$s \approx 25,96 \text{ единицы длины.}$$

§ 4. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений

Пусть имеем некоторое тело T . Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (рис. 237). Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т. е. будет функцией от x :

$$Q = Q(x).$$

Предположим, что $Q(x)$ есть непрерывная функция от x , и определим объем данного тела. Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n = b$.

Эти плоскости разобьют тело на слои.

В каждом частичном промежутке

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждого значения $i = 1, 2, \dots, n$ построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси Ox , а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x = \xi_i$.

Объем такого элементарного цилиндра с площадью основания $Q(\xi_i)$ ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) и высотой Δx_i равен $Q(\xi_i) \Delta x_i$. Объем всех цилиндров будет:

$$v_n = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i.$$

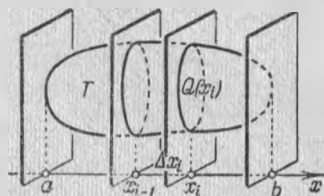


Рис. 237.

Предел этой суммы при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ (если он существует) называется объемом данного тела

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i.$$

Так как v_n представляет собой, очевидно, интегральную сумму для непрерывной функции $Q(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$, то указанный предел существует и выражается определенным интегралом

$$v = \int_a^b Q(x) dx. \quad (1)$$

Пример. Вычислить объем трехосного эллипсоида (рис. 238)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

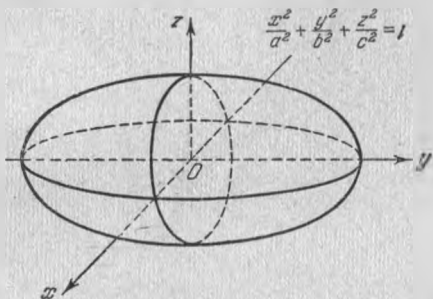


Рис. 238.

Решение. В сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oyz и отстоящей на расстоянии x от нее, получится эллипс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

$$\left[\frac{y^2}{b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{z^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1,$$

с полуосями

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Но площадь такого эллипса равняется $\pi b_1 c_1$ (см. пример 3 § 1). Поэтому

$$Q(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Объем эллипсоида будет равен

$$v = \pi b c \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi b c \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

В частности, если $a = b = c$, эллипсоид превращается в шар, и в этом случае мы получаем:

$$v = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

§ 5. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$.

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

Применяя общую формулу для вычисления объема [(1) § 4], получим формулу для вычисления объема тела вращения:

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

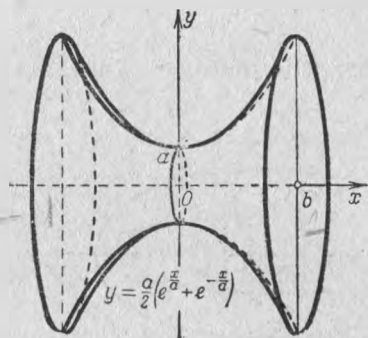


Рис. 239.

Пример. Найти объем тела, образуемого вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

вокруг оси Ox на участке от $x=0$ до $x=b$ (рис. 239).

Решение.

$$\begin{aligned} v &= \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}. \end{aligned}$$

§ 6. Поверхность тела вращения

Пусть нам дана поверхность, образованная вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox . Определим площадь этой поверхности на участке $a \leq x \leq b$. Функцию $f(x)$ предположим непрерывной и имеющей непрерывную производную во всех точках отрезка $[a, b]$.

Как и в § 3, проведем хорды AM_1 , M_1M_2 , ..., $M_{n-1}B$, длины которых обозначим через Δs_1 , Δs_2 , ..., Δs_n (рис. 240).

Каждая хорда длины Δs_i ($i=1, 2, \dots, n$) при вращении опишет усеченный конус, поверхность которого ΔP_i равна

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i.$$

Но

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i), \quad \text{где } x_{i-1} < \xi_i < x_i;$$

следовательно,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Поверхность, описанная ломаной, будет равна сумме

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

или сумме

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \times$$

$$\times \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i, \quad (1)$$

распространенной на все звенья ломаной. Предел этой суммы, когда наибольшее звено ломаной Δs_i стремится к нулю, называется *площадью рассматриваемой поверхности вращения*. Сумма (1) не является интегральной суммой для функции

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}, \quad (2)$$

так как в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, фигурирует несколько точек этого отрезка x_{i-1} , x_i , ξ_i . Но можно доказать, что предел суммы (1) равняется пределу интегральной суммы для функции (2), т. е.

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

или

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3)$$

Пример. Определить поверхность параболоида, образованную вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 2px$, соответствующей изменению x

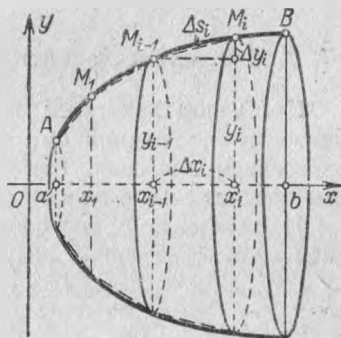


Рис. 240.

от $x=0$ до $x=a$:

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

Решение. По формуле (3) получим:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x+p} dx = \\ &= 2\pi \sqrt{p} \left[\frac{2}{3} (2x+p)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^a = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}]. \end{aligned}$$

§ 7. Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть под действием некоторой силы F материальная точка M движется по прямой Os , причем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется найти работу, произведенную силой F при перемещении точки M из положения $s=a$ в положение $s=b$.

1) Если сила F постоянна, то работа A выражается произведением силы F на длину пути, т. е.

$$A = F(b-a).$$

2) Предположим, что сила F непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, т. е. представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a \leq s \leq b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей с длинами

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n,$$

затем в каждом частичном отрезке $[s_{i-1}, s_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $F(s)$ на пути Δs_i ($i=1, 2, \dots, n$) произведением

$$F(\xi_i) \Delta s_i.$$

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу F за постоянную, а именно полагаем $F = F(\xi_i)$. В таком случае выражение $F(\xi_i) \Delta s_i$ при достаточно малом Δs_i дает нам приближенное значение работы силы F на пути Δs_i , а сумма

$$A_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta s_i$$

будет приближенным выражением работы силы F на всем отрезке $[a, b]$.

Очевидно, A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $F=F(s)$ на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы при $\max(\Delta s_i) \rightarrow 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s=a$ до точки $s=b$:

$$A = \int_a^b F(s) ds. \quad (1)$$

Пример 1. Сжатие S винтовой пружины пропорционально приложенной силе F . Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 5 см, если для сжатия ее на 1 см нужна сила в 1 кг (рис. 241).

Решение. Сила F и перемещение S связаны по условию зависимостью $F=kS$, где k —постоянная.

Будем выражать S в метрах, F —в килограммах. При $S=0,01$ $F=1$, т. е. $1=k \cdot 0,01$, откуда $k=100$, $F=100S$.

На основании формулы (1) имеем:

$$A = \int_0^{0,05} 100S dS = 100 \frac{S^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кгм.}$$

Пример 2. Сила F , с которой электрический заряд e_1 отталкивает заряд e_2 (того же знака), находящийся от него на расстоянии r , выражается формулой

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

где k —постоянная.

Определить работу силы F при перемещении заряда e_2 из точки A_1 , отстоящей от e_1 на расстоянии r_1 , в точку A_2 , отстоящую от e_1 на расстоянии r_2 , полагая, что заряд e_1 помещен в точке A_0 , принятой за начало отсчета.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -ke_1 e_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = ke_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

При $r_2 = \infty$ получим:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{ke_1 e_2}{r^2} dr = \frac{ke_1 e_2}{r_1}.$$

При $e_2 = 1$ $A = k \frac{e_1}{r}$. Последняя величина называется *потенциалом поля*, создаваемого зарядом e_1 .

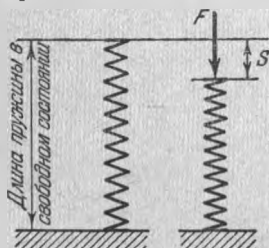


Рис. 241.

§ 8. Координаты центра тяжести

Пусть на плоскости Oxy дана система материальных точек

$$P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Произведения $x_i m_i$ и $y_i m_i$ называются *статическими моментами* массы m_i относительно осей Oy и Ox .

Обозначим через x_c и y_c координаты центра тяжести данной системы. Тогда, как известно из курса механики, координаты центра тяжести описанной материальной системы определяются формулами:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2)$$

Мы используем эти формулы при отыскании центров тяжести различных фигур и тел.

1. Центр тяжести плоской линии. Пусть дана кривая AB уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, и пусть эта кривая представляет собой материальную линию.

Предположим, что линейная плотность *) такой материальной кривой равна γ . Разобьем линию на n частей длины $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Массы этих частей будут равняться произведению их длин на (постоянную) плотность: $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. На каждой части дуги Δs возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i . Представляя теперь каждую часть дуги Δs_i материальной точкой $P_i [\xi_i, f(\xi_i)]$ с массой $\gamma \Delta s_i$ и подставляя в формулы (1) и (2) вместо x_i значение ξ_i , вместо y_i значение $f(\xi_i)$, а вместо m_i значение $\gamma \Delta s_i$ (массы частей Δs_i), получим приближенные формулы для определения центра тяжести дуги:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то стоящие в числителе и знаменателе каждой дроби суммы при $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ имеют пределы, равные пределам соответствующих интегральных сумм. Таким образом, координаты центра тяжести дуги

*) Линейной плотностью называется масса единицы длины данной линии. Мы предполагаем, что линейная плотность на всех участках кривой одинакова.

выражаются определенными интегралами:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} \, dx}, \quad (1')$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) \, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} \, dx}. \quad (2')$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной над осью Ox .

Решение. Определим абсциссу центра тяжести:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx,$$

$$x_c = \frac{a \int_{-a}^a \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{-a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{-a}^a}{a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

Найдем теперь ординату центра тяжести:

$$y_c = \frac{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx}{\pi a} = \frac{a \int_{-a}^a dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

2. Центр тяжести плоской фигуры. Пусть данная фигура, ограниченная линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, представляет собой материальную плоскую фигуру. Поверхностную плотность, т. е. массу единицы площади поверхности, мы будем считать постоянной и равной δ для всех частей фигуры.

Разобьем данную фигуру прямыми $x = a$, $x = x_1$, ..., $x = x_n = b$ на полоски ширины Δx_1 , Δx_2 , ..., Δx_n . Масса каждой полоски будет равна произведению ее площади на плотность δ . Если каждую полоску заменить прямоугольником (рис. 242) с основанием Δx_i и высотой $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, где $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, то масса полоски будет приближенно равна

$$\Delta m_i = \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Приближенно центр тяжести этой полоски будет находиться в центре соответствующего прямоугольника:

$$(x_i)_c = \xi_i; (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Заменяя теперь каждую полоску материальной точкой, масса которой равна массе соответствующей полоски и сосредоточена в центре

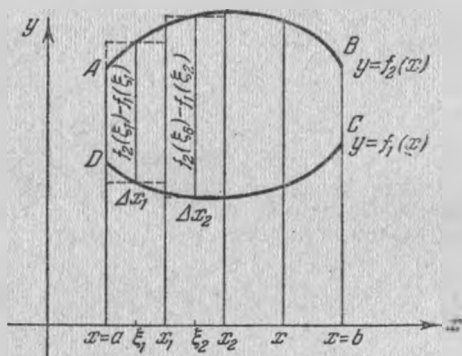


Рис. 242.

тяжести этой полоски, найдем приближенное значение координат центра тяжести всей фигуры (по формулам (1) и (2)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x_i \rightarrow 0$, получим точные координаты центра тяжести данной фигуры:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}.$$

Эти формулы справедливы для любой однородной (т. е. имеющей постоянную плотность во всех точках) плоской фигуры. Как мы видим, координаты центра тяжести не зависят от плотности δ фигуры (в процессе вычисления δ сократилось).

Пример 2. Определить координаты центра тяжести сегмента параболы $y^2 = ax$, отсекаемого прямой $x = a$ (рис. 243).

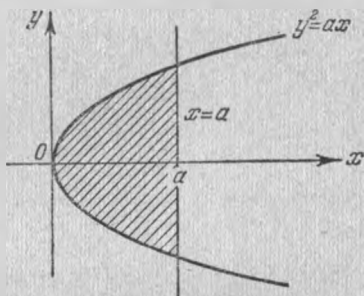


Рис. 243.

Решение. В данном случае $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, поэтому

$$x_c = \frac{2 \int_0^a x \sqrt{ax} dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{\frac{2}{5} 2 \sqrt{a} x^{5/2} \Big|_0^a}{2 \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5} a^3}{\frac{4}{3} a^2} = \frac{3}{5} a,$$

$y_c = 0$ (так как сегмент симметричен относительно оси Ox).

Упражнения к главе XII

Вычисление площадей

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.
Отв. $\frac{1}{2}$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной равнобочной гиперболой $xy = a^2$, осью Ox и прямыми $x = a$, $b = 2a$. Отв. $a^2 \ln 2$.
3. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox . Отв. $10 \frac{2}{3}$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной гипоциклоидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
Отв. $\frac{3}{8} \pi a^2$.
5. Найти площадь фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, осью Ox , осью Oy и прямой $x = a$. Отв. $\frac{a^2}{2e} (e^2 - 1)$.
6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$, прямой $y = 8$ и осью Oy . Отв. 12.
7. Найти площадь области, ограниченной одной полувошной синусоиды и осью абсцисс. Отв. 2.
8. Найти площадь области, заключенной между параболami $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$. Отв. $\frac{4}{3} p^2$.

9. Найти всю площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2x$, $y=x$. *Отв.* $\frac{3}{2}$.

10. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью абсцисс. *Отв.* $3\pi a^2$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной гипоциклоидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. *Отв.* $\frac{3}{8}\pi a^2$.

12. Найти площадь всей области, ограниченной лемнискатою $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. *Отв.* a^2 .

13. Вычислить площадь области, ограниченной одной петлей кривой $\rho=a\sin 2\varphi$. *Отв.* $\frac{1}{8}\pi a^2$.

14. Вычислить полную площадь области, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1-\cos \varphi)$. *Отв.* $\frac{3}{2}\pi a^2$.

15. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho=a\cos \varphi$. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{4}$.

16. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho=a\cos 2\varphi$. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{2}$.

17. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho=\cos 3\varphi$. *Отв.* $\frac{\pi}{4}$.

18. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho=a\cos 4\varphi$. *Отв.* $\frac{\pi a^2}{2}$.

Вычисление объемов

19. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

20. Отрезок прямой, соединяющей начало координат с точкой (a, b) , вращается вокруг оси y . Найти объем полученного конуса. *Отв.* $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.

21. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ вокруг оси Ox (предполагается, что $b \geq a$). *Отв.* $2\pi^2 a^2 b$.

22. Площадь, ограниченная линиями $y^2=2px$ и $x=a$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* πa^3 .

23. Фигура, ограниченная гипоциклоидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y=\sin x$ и осью Ox , вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{\pi^2}{2}$.

25. Фигура, ограниченная параболой $y^2=4x$ и прямой $x=4$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* 32π .

26. Фигура, ограниченная кривой $y=xe^x$ и прямыми $y=0$, $x=1$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

27. Фигура, ограниченная одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox , вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения. *Отв.* $5\pi^2 a^3$.

28. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг оси Oy . Найти объем тела вращения. *Отв.* $6\pi^2 a^3$.

29. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси Oy и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $\frac{\pi a^3}{6} (9\pi^2 - 16)$.

30. Та же фигура, что и в задаче 27, вращается вокруг прямой, параллельной оси Ox и проходящей через вершину циклоиды. Найти объем тела вращения. *Отв.* $7\pi^2 a^3$.

31. Цилиндр радиуса R пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Найти объем отсеченной части. *Отв.* $\frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$.

32. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$. *Отв.* $\frac{16}{3} R^3$.

33. Точка пересечения диагоналей квадрата перемещается вдоль диаметра круга радиуса a ; при этом плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности (при движении величина квадрата, очевидно, меняется). Найти объем тела, образуемого этим движущимся квадратом. *Отв.* $\frac{8}{3} a^3$.

34. Вычислить объем сегмента, отсекаемого от эллиптического параболоида $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ плоскостью $x = a$. *Отв.* $\pi a^2 \sqrt{pq}$.

35. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 0$, цилиндрическими поверхностями $x^2 = 2py$ и $z^2 = 2px$ и плоскостью $x = a$. *Отв.* $\frac{a^3 \sqrt{2a}}{7 \sqrt{p}}$ (в первом октанте).

36. Прямая движется параллельно плоскости Oyz , пересекая два эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащих в плоскостях Oxy и Oxz . Вычислить объем полученного тела. *Отв.* $\frac{8}{3} abc$.

Вычисление длин дуг

37. Найти всю длину гипоциклоиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. *Отв.* $6a$.

38. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$. *Отв.* $\frac{335}{27} a$.

39. Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ от начала координат до точки (x, y) . *Отв.* $\frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) = \sqrt{y^2 - a^2}$.

40. Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. *Отв.* $8a$.

41. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ в пределах от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$. *Отв.* $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

42. Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$. *Отв.* $\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

43. Найти длину спирали Архимеда $\varrho = a\varphi$ от полюса до конца первого завитка. *Отв.* $\pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

44. Найти длину спирали $\varrho = e^{a\varphi}$ от полюса до точки (ϱ, φ) .
Отв. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\varphi} = \frac{\varrho}{a} \sqrt{1+a^2}$.

45. Найти всю длину кривой $\varrho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$. *Отв.* $\frac{3}{2} \pi a$.

46. Найти длину эволюты эллипса $x = \frac{c^2}{2} \cos^3 t$; $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$.
Отв. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

47. Найти длину кардиоиды $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$. *Отв.* $8a$.

48. Найти длину дуги эвольвенты круга $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$,
 $y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_1$. *Отв.* $\frac{1}{2} a \varphi_1^2$.

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

49. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы, $y^2 = 4ax$ вокруг оси Ox , от начала O до точки с абсциссой $x = 3a$. *Отв.* $\frac{56}{3} \pi a^2$.

50. Найти площадь поверхности конуса, образуемого вращением отрезка прямой $y = 2x$ от $x = 0$ до $x = 2$: а) Вокруг оси Ox . *Отв.* $8\pi \sqrt{5}$ б) Вокруг оси Oy . *Отв.* $4\pi \sqrt{5}$.

51. Найти площадь поверхности тора, полученного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ вокруг оси Ox . *Отв.* $4\pi^2 ab$.

52. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кардиоиды вокруг оси Ox . Кардиоида задана параметрическими уравнениями $x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$. *Отв.* $\frac{128}{5} \pi a^2$.

53. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ около оси Ox . *Отв.* $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается около оси Oy . Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $16\pi^2 a^2$.

55. Арка циклоиды (см. задачу 53) вращается около касательной, параллельной оси Ox и проходящей через вершину. Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. Астроида $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ вращается около оси Ox . Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. Дуга синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = 2\pi$ вращается около оси Ox . Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $4\pi [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

58. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) вращается вокруг оси Ox . Найти поверхность тела вращения. *Отв.* $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Различные приложения определенного интеграла

59. Найти центр тяжести площади четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$). *Отв.* $\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}$.

60. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox . *Отв.* $\left(0, \frac{8}{5}\right)$.

61. Найти центр тяжести объема полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $\frac{3}{8}R$ от основания.

62. Найти центр тяжести поверхности полушара. *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $\frac{R}{2}$ от основания.

63. Найти центр тяжести поверхности кругового прямого конуса, радиус основания которого R , а высота h . *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $\frac{h}{3}$ от основания.

64. Фигура ограничена линиями $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $y = 0$. Найти центр тяжести площади этой фигуры. *Отв.* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

65. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. *Отв.* (9; 9).

66. Найти центр тяжести площади кругового сектора с центральным углом 2α и радиусом R . *Отв.* На оси симметрии, на расстоянии $\frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ от вершины сектора.

67. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 м. *Отв.* 1056 т.

68. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 м, лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза, образуемую делением квадрата одной из его диагоналей. *Отв.* 85 333,33 кг, 170 666,67 кг.

69. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 м. *Отв.* $2,5 \cdot 10^6 \pi$ кгм.

70. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x — длина пути, проходимого за время t , $c = \text{const}$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k . Найти работу, производимую сопротивлением при передвижении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$. *Отв.* $\frac{27}{7}k \sqrt[3]{c^2 a^7}$.

71. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H , а радиус основания R . *Отв.* $\frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}$.

72. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 4000 \text{ см}^2$, а высота $H = 50 \text{ см}$, плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность? Удельный вес дерева 0,8. *Отв.* $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32 \text{ кгм}$.

73. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобокой трапеции, верхнее основание которой $a = 6,4$ м, нижнее $b = 4,2$ м, а высота $H = 3$ м. *Отв.* 22,2 т.

74. Найти осевую составляющую P кг полного давления пара на сферическое дно котла. Диаметр цилиндрической части котла D мм, давление пара в котле P кг/см². *Отв.* $P = \frac{\pi P D^2}{400}$.

75. Конец вертикального вала радиуса r поддерживается плоским подпятником. Вес вала P распределяется равномерно на всю поверхность опоры. Вычислить полную работу сил трения при одном обороте вала. Коэффициент трения μ . *Отв.* $\frac{4}{3} \pi \mu P r$.

76. Вертикальный вал оканчивается пятой, имеющей форму усеченного конуса. Удельное давление пяты на подпятник постоянно и равно P . Верхний диаметр пяты D , нижний d , угол при вершине конуса 2α . Коэффициент трения μ .

Найти работу сил трения за один оборот вала. *Отв.* $\frac{\pi^2 P \mu}{6 \sin \alpha} (D^2 - d^2)$.

77. Призматический стержень длины l растягивается медленно возрастающей от 0 до P силой так, что в каждый момент растягивающая сила уравновешивается силами упругости стержня. Вычислить работу A , затраченную силой на растяжение, предполагая, что растяжение происходило в пределах упругости. Площадь поперечного сечения стержня равна F , модуль упругости материала равен E .

У к а з а н и е. Если x — удлинение стержня, а f — соответствующая сила, то $f = \frac{E x}{l}$. Удлинение под действием силы P равно $\Delta l = \frac{P l}{E F}$.

Отв. $A = \frac{P \Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2 E F}$.

78. Призматический брус подвешен вертикально, и к нижнему его концу приложена растягивающая сила P . Вычислить удлинение бруса под действием силы его веса и силы P , если дано, что длина бруса в нерастянутом состоянии равна l , площадь поперечного сечения F , вес бруса Q и модуль упругости материала E . *Отв.* $\Delta l = \frac{(Q + 2P) l}{2 E F}$.

79. Определить время, в течение которого жидкость выльется из призматического сосуда, наполненного до высоты H . Площадь поперечного сечения сосуда F , площадь отверстия f , скорость истечения определяется по формуле $v = \mu \sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, h — расстояние от отверстия до уровня жидкости. *Отв.* $T = \frac{2FH}{\mu f \sqrt{2gH}} = \frac{F}{\mu f} \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

80. Определить расход Q воды (количество воды, вытекающей в единицу времени) через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива h , ширина b . *Отв.* $Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$.

81. Определить расход воды Q , вытекающей из бокового прямоугольного отверстия высотой a и шириной b , если высота свободной поверхности воды над нижней стороной отверстия равна H .

Отв. $Q = \frac{2b\mu \sqrt{2g}}{3} [H^{3/2} - (H-a)^{3/2}]$.

ГЛАВА XIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи.

Уравнение движения тела при сопротивлении
среды, пропорциональном скорости.

Уравнение цепной линии

Пусть функция $y=f(x)$ отражает количественную сторону некоторого явления. Часто, рассматривая это явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости y от x , а можем установить зависимость между величинами x и y и производными от y по x : $y', y'', \dots, y^{(n)}$, т. е. написать дифференциальное уравнение.

Из полученной зависимости между переменной x , y и производными требуется установить непосредственную зависимость y от x , т. е. найти $y=f(x)$ или, как говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. С некоторой высоты сброшено тело, масса которого m . Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость v падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (с коэффициентом пропорциональности k), т. е. требуется найти $v=f(t)$.

Решение. По второму закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение движущегося тела (производная от скорости по времени), а F —сила, действующая на тело в направлении движения. Эта сила складывается из двух: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха— kv (мы берем ее с минусом, так как она направлена в сторону, противоположную направлению скорости). Итак,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

Мы получили соотношение, связывающее неизвестную функцию v и ее производную $\frac{dv}{dt}$, т. е. дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции v . (Это уравнение движения некоторых типов парашютов.) Решить дифференциальное уравнение—это значит найти такую функцию $v=f(t)$, которая тождественно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Таких функций имеется бесконечное множество.

Читатель легко проверит, что всякая функция вида

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

удовлетворяет уравнению (1), каково бы ни было постоянное число C . Какая же из этих функций даст искомую зависимость v от t ? Для того чтобы ее найти, используем дополнительное условие: при сбрасывании тела ему была придана начальная скорость v_0 (которая, в частности, может быть равной нулю); мы предполагаем эту начальную скорость известной. Но тогда искомая функция $v = f(t)$ должна быть такова, чтобы при $t=0$ (в начале движения) выполнялось условие $v = v_0$. Подставляя $t=0$, $v=v_0$ в формулу (2), найдем: $v_0 = C + \frac{mg}{k}$, откуда $C = v_0 - \frac{mg}{k}$.

Таким образом, постоянная C найдена. Следовательно, искомая зависимость v от t такова:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

Из этой формулы следует, что при достаточно больших t скорость v мало зависит от v_0 .

Заметим, что если $k=0$ (т. е. сопротивление воздуха отсутствует или оно столь мало, что мы можем им пренебречь), то мы получаем известный из физики результат*):

$$v = v_0 + gt. \quad (2'')$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию: $v = v_0$ при $t=0$.

Пример 2. Гибкая однородная нить подвешена за два конца. Найти уравнение кривой, по которой расположится нить под действием собственного веса (так располагаются подвешенные канаты, провода, цепи).

Решение. Пусть $M_0(0, b)$ — наиболее низкая точка нити M — ее произвольная точка (рис. 244). Рассмотрим часть нити M_0M . Эта часть находится в равновесии под действием трех сил:

1) натяжение T , действующее по касательной в точке M и составляющее с осью Ox угол φ ;

2) натяжение H в точке M_0 , действующее горизонтально;

3) вес нити γs , направленный вертикально вниз, где s — длина дуги M_0M , γ — линейный удельный вес нити.

Разлагая натяжение T на горизонтальную и вертикальную составляющие, получим уравнения равновесия:

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = \gamma s.$$

Деля члены второго равенства на соответствующие члены первого, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \quad (3)$$

* Формула (2'') может быть получена из (2') с помощью предельного перехода:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

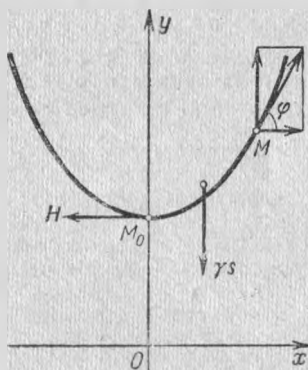


Рис. 244.

Положим теперь, что уравнение искомой кривой можно записать в виде $y = f(x)$. Здесь $f(x)$ — неизвестная функция, которую надлежит найти. Заметим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \quad (4)$$

где через a обозначено отношение $\frac{H}{Y}$.

Продифференцируем обе части равенства (4) по x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

Но, как известно (см. § 1 гл. VI),

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (5), получим дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

Оно выражает связь между первой и второй производными от неизвестной функции y .

Не останавливаясь на методах решения уравнений, укажем, что всякая функция вида

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (6) при любых значениях постоянных C_1 и C_2 . В этом можно легко убедиться, подставив первую и вторую производные указанной функции в уравнение (6). Укажем далее без доказательства, что этими функциями (при различных C_1 и C_2) исчерпываются все возможные решения уравнения (6). Это будет показано в § 18.

Графики всех полученных таким образом функций называются *цепными линиями*.

Выясним теперь, как надо подобрать постоянные C_1 и C_2 , чтобы получить именно ту цепную линию, низшая точка M которой имеет координаты $(0, b)$. Так как при $x=0$ точка цепной линии занимает наинизшее положение, то в этой точке касательная горизонтальна, т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$. Кроме того, по условию, в этой точке ордината равна b , т. е. $y = b$.

Из уравнения (7) находим:

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Подставляя сюда $x=0$, получим $0 = \frac{1}{2} (e^{C_1} - e^{-C_1})$. Следовательно, $C_1 = 0$.

Если ордината точки M_0 есть b , то $y = b$ при $x=0$.

Из уравнения (7) получаем, полагая $x=0$ и $C_1=0$, $b=\frac{a}{2}(1+1)+C_2$, откуда $C_2=b-a$. Окончательно находим:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + b - a.$$

Уравнение (7) принимает особенно простой вид, если ординату точки M_0 взять равной числу a . Тогда уравнение цепной линии будет:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

§ 2. Определения

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные y' , y'' , ..., $y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно написать так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Если искомая функция $y=f(x)$ есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Мы будем заниматься только обыкновенными дифференциальными уравнениями *).

Определение 2. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Так, например, уравнение

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

есть уравнение первого порядка.

*) Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в математическом анализе изучаются также уравнения в частных производных. Дифференциальным уравнением в частных производных называется соотношение между неизвестной функцией z , зависящей от двух или нескольких переменных $x, y, \dots$, этими переменными $x, y, \dots$ и частными производными от z : $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и т. д.

Дифференциальным уравнением в частных производных с неизвестной функцией $z(x, y)$ является, например, уравнение $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$.

Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция $z = x^2 y^2$ (и еще множество других функций).

В настоящем курсе уравнениям в частных производных посвящена гл. XVIII (т. II).

Уравнение

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

есть уравнение второго порядка и т. д.

Уравнение, рассмотренное в предыдущем параграфе в примере 1, является уравнением первого порядка, а в примере 2 — уравнением второго порядка.

Определение 3. *Решением или интегралом* дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Пример 1. Пусть мы имеем уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Функции $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ и вообще функции вида $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ или

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

являются решениями данного уравнения при любом выборе постоянных C_1 и C_2 ; в этом легко убедиться, подставив указанные функции в уравнение.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Его решениями будут все функции вида

$$y = x^2 + Cx,$$

где C — любое постоянное. Действительно, дифференцируя функцию $y = x^2 + Cx$, находим:

$$y' = 2x + C.$$

Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, получаем тождество

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Каждое из уравнений, рассмотренных в примерах 1 и 2, имеет бесчисленное множество решений.

§ 3. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

1. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y' , то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

В этом случае мы говорим, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной. Для такого уравнения справедлива следующая теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема *). Если в уравнении

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy , содержащей некоторую точку (x_0, y_0) , то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: при $x = x_0$ $y = y_0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0) .

Из только что высказанной теоремы вытекает, что уравнение (1') имеет бесконечное число различных решений [например, решение, график которого проходит через точку (x_0, y_0) ; другое решение, график которого проходит через точку (x_0, y_1) ; через точку (x_0, y_2) и т. д., если только эти точки лежат в области D].

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0 , называется *начальным условием*. Оно часто записывается в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Определение 1. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

которая зависит от одного произвольного постоянного C и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянного C ;

б) каково бы ни было начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$, т. е. $(y)_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y , в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

2. В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (2')$$

не разрешенному относительно y . Разрешив это соотношение относительно y , получаем общее решение. Однако выразить y из соотношения (2') в элементарных функциях не всегда оказывается возможным; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде.

*) Доказательство этой теоремы выходит за рамки данной книги (читатель может найти его, например, в книге: В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений).

Равенство вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение 2. *Частным решением* называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем произвольному постоянному C придать определенное значение $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Пример 1. Для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

общим решением будет семейство функций $y = \frac{C}{x}$; это можно проверить простой подстановкой в уравнение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующему начальному условию: $y_0 = 1$ при $x_0 = 2$. Подставляя эти значения в формулу $y = \frac{C}{x}$, получим $1 = \frac{C}{2}$ или $C = 2$. Следовательно, искомым частным решением будет функция $y = \frac{2}{x}$.

С точки зрения геометрической общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C (или, как говорят, от одного параметра C). Эти кривые называются *интегральными кривыми* данного дифференциального уравнения. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Так, в последнем примере общий интеграл геометрически изображается семейством гипербол $y = \frac{C}{x}$, а частный интеграл, определенный указанным начальным условием, изображается одной из этих гипербол, проходящей через точку $M_0(2, 1)$. На рисунке 245 изображены кривые семейства, соответствующие некоторым значениям параметра: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$ и т. д.

Чтобы сделать рассуждения более наглядными, мы будем в дальнейшем называть решением уравнения не только функцию $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющую уравнению, но и соответствующую интегральную кривую. В связи с этим мы будем говорить, например, о решении, проходящем через точку (x_0, y_0) .

Замечание. Уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ не имеет решения, проходящего через точку, лежащую на оси Oy (см. рис. 245). Это получается потому, что правая часть уравнения при $x = 0$ не определена и, следовательно, не является непрерывной.

Решить или, как часто говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение — значит:

а) найти его общее решение или общий интеграл (если начальные условия не заданы) или

б) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковые имеются).

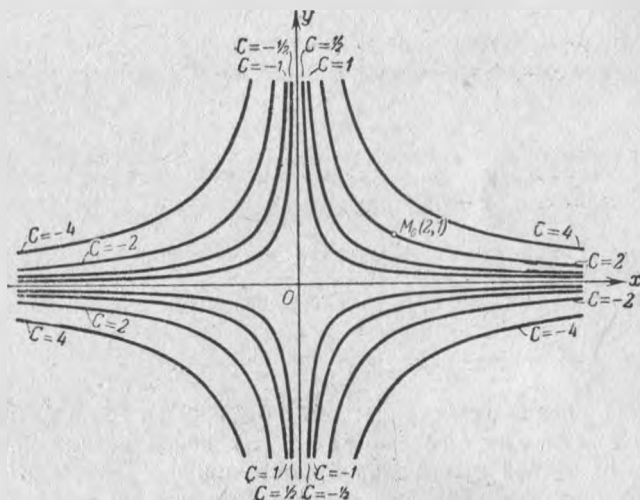


Рис. 245.

3. Дадим геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1')$$

и пусть $y = \varphi(x, C)$ есть общее решение данного уравнения. Это общее решение определяет семейство интегральных кривых на плоскости Oxy .

Уравнение (1') для каждой точки M с координатами x и y определяет значение производной $\frac{dy}{dx}$, т. е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, дифференциальное уравнение (1') дает совокупность направлений или, как говорят, определяет *поле направлений* на плоскости Oxy .

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кри-

вых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

На рисунке 246 изображено поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

4. Рассмотрим, далее, такую задачу.

Пусть дано семейство функций, зависящее от одного параметра C :

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

причем через каждую точку плоскости (или некоторой области на плоскости) проходит только одна кривая из этого семейства.

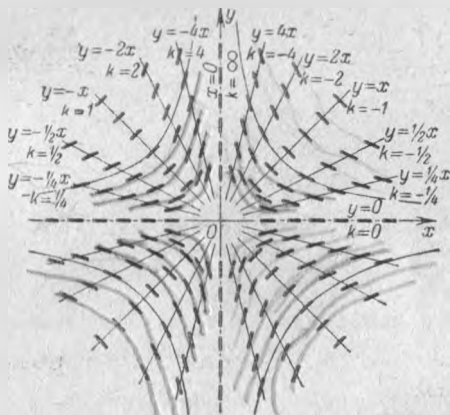


Рис. 246.

Для какого дифференциального уравнения это семейство функций является общим интегралом?

Из соотношения (2), дифференцируя по x , найдем:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \quad (3)$$

Так как через каждую точку плоскости проходит только одна кривая семейства, то для каждой пары чисел x и y определяется единственное значение C из уравнения (2). Подставляя это значение C в соотношение (3), найдем $\frac{dy}{dx}$ как функцию от x и y . Это и дает нам дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет всякая функция из семейства (2).

Следовательно, чтобы установить связь между x , y и $\frac{dy}{dx}$, т. е. чтобы написать дифференциальное уравнение, общий интеграл которого определяется формулой (2), нужно исключить C из соотношений (2) и (3).

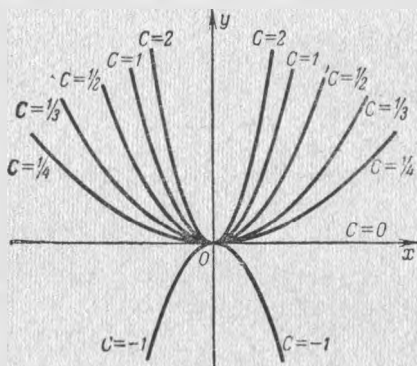


Рис. 247.

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол $y = Cx^2$ (рис. 247).

Дифференцируя по x уравнение семейства, найдем:

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Подставляя сюда значение

$$C = \frac{y}{x^2}$$

из уравнения семейства, получаем дифференцируемое уравнение данного семейства:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет смысл при $x \neq 0$, т. е. в любой области, не содержащей точек на оси Oy .

§ 4. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. Задача о распаде радия

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad (1)$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от x , на функцию, зависящую только от y . Преобразуем его следующим образом (предполагая, что $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1')$$

Считая y известной функцией от x , равенство (1') можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Интегрируя левую часть по y , а правую по x , получим:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C.$$

Мы получили соотношение, связывающее решение y , независимое переменное x и произвольную постоянную C , т. е. получили общий интеграл уравнения (1).

1. Дифференциальное уравнение типа (1')

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2)$$

называют уравнением с *разделенными переменными*. Общий интеграл его по доказанному есть

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

Пример 1. Дано уравнение с разделенными переменными:

$$x dx + y dy = 0.$$

Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2 , будем иметь:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Это — уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 248) с центром в начале координат и радиусом C .

2. Уравнение вида

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \quad (3)$$

называется уравнением с *разделяющимися переменными*. Оно может быть приведено *) к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y) M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x) N_1(y)}{N_1(y) M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) N_2(y)}{N_1(y) M_2(x)} dy = 0$$

или

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

т. е. к уравнению вида (2).

*) Эти преобразования законно производить только в той области, где ни $N_1(y)$, ни $M_2(x)$ не обращаются в нуль.

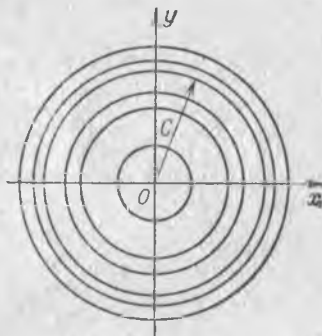


Рис. 248.

Пример 2. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C.$$

т. е.

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln |C| \quad \text{или} \quad \ln |y| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

отсюда получаем общее решение: $y = \frac{C}{x}$.

Пример 3. Дано уравнение

$$(1+x)y \, dx + (1-y)x \, dy = 0.$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0; \quad \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln |x| + x + \ln |y| - y = C \quad \text{или} \quad \ln |xy| + x - y = C;$$

последнее соотношение есть общий интеграл данного уравнения.

Пример 4. Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если при $t=0$ масса радия была m_0 .

Скорость распада определяется следующим образом. Пусть в момент t была масса m , в момент $t+\Delta t$ — масса $m+\Delta m$. За время Δt распалась масса Δm . Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ есть средняя скорость распада. Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

есть *скорость распада* радия в момент t .

По условию задачи

$$\frac{dm}{dt} = -km, \tag{4}$$

где k — коэффициент пропорциональности ($k > 0$). Мы ставим знак минус потому, что при увеличении времени масса радия убывает и потому $\frac{dm}{dt} < 0$.

*) Имея в виду дальнейшие преобразования, мы обозначили произвольную постоянную через $\ln |C|$, что допустимо, так как $\ln |C|$ (при $C \neq 0$) может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение (4) есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

$$\frac{dm}{m} = -k dt.$$

Решая уравнение, получим:

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

откуда

$$\begin{aligned} \ln \frac{m}{C} &= -kt, \\ m &= Ce^{-kt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как при $t=0$ масса радия была m_0 , то C должно удовлетворять соотношению

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Подставляя значение C в равенство (5), получим искомую зависимость (см. рис. 249) массы радия как функцию времени:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (6)$$

Коэффициент k определяется из наблюдений следующим образом. Пусть за время t_0 распадается $\alpha\%$ от первоначальной массы радия. Следовательно, выполняется соотношение

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

откуда

$$-kt_0 = \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right),$$

или

$$k = -\frac{1}{t_0} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right).$$

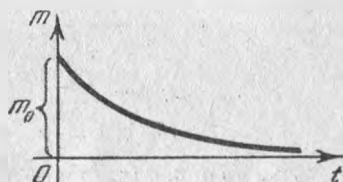


Рис. 249.

Таким образом, было определено, что для радия $k=0,00044$ (единица измерения времени—год).

Подставляя это значение k в формулу (6), получим:

$$m = m_0 e^{-0,00044t}.$$

Найдем период полураспада радия, т. е. промежуток времени, за который распадается половина первоначальной массы радия. Подставляя в последнюю формулу вместо m значение $\frac{m_0}{2}$, получим уравнение для определения периода полураспада T :

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,00044T},$$

откуда

$$-0,00044T = -\ln 2,$$

или

$$T = \frac{\ln 2}{0,00044} = 1590 \text{ лет.}$$

Заметим, что к уравнению вида (4) приводят и другие задачи физики и химии.

Замечание. Простейшим дифференциальным уравнением с разделенными переменными является уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x) dx.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$y = \int f(x) dx + C.$$

Решением уравнений этого вида мы занимались в главе X.

§ 5. Однородные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n -го измерения* относительно переменных x и y , если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Пример 1. Функция $f(x, y) = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ — однородная функция первого измерения, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[n]{(\lambda x)^n + (\lambda y)^n} = \lambda \sqrt[n]{x^n + y^n} = \lambda f(x, y).$$

Пример 2. $f(xy) = xy - y^2$ есть однородная функция второго измерения, так как $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$.

Пример 3. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$, т. е. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ или $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$.

Определение 2. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

называется *однородным* относительно x и y , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y .

Решение однородного уравнения. По условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Положив в этом тождестве $\lambda = \frac{1}{x}$, получим:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Уравнение (1) в этом случае примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Сделаем подстановку:

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Подставляя это выражение производной в уравнение (1'), получим:

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{или} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим интеграл уравнения (1').

Пример 4. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Справа стоит однородная функция нулевого измерения; следовательно, имеем однородное уравнение. Делаем замену $\frac{y}{x} = u$; тогда

$$\begin{aligned} y &= ux; & \frac{dy}{dx} &= u + x \frac{du}{dx}; \\ u + x \frac{du}{dx} &= \frac{u}{1 - u^2}; & x \frac{du}{dx} &= \frac{u^3}{1 - u^2}. \end{aligned}$$

Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{(1 - u^2) du}{u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x};$$

отсюда, интегрируя, находим:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + \ln |C| \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln |u x C|.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |Cy|.$$

Получить y как явную функцию от x , записанную с помощью элементарных функций, в данном случае невозможно. Впрочем, здесь легко выразить x через y :

$$x = y \sqrt{-2 \ln |Cy|}.$$

З а м е ч а н и е. Уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Это вытекает из того, что отношение двух однородных функций одного и того же измерения является однородной функцией нулевого измерения.

П р и м е р 5. Уравнения

$$\begin{aligned} (2x + 3y) dx + (x - 2y) dy &= 0, \\ (x^2 + y^2) dx - 2xy dy &= 0 \end{aligned}$$

являются однородными.

§ 6. Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \quad (1)$$

Если $c_1 = c = 0$, то уравнение (1) есть, очевидно, однородное. Пусть теперь c и c_1 (или одно из них) отличны от нуля. Сделаем замену переменных:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) выражения x , y и $\frac{dy}{dx}$, будем иметь:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \quad (3)$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\left. \begin{aligned} ah + bk + c &= 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

т. е. определим h и k как решения системы уравнений (4). При этом условии уравнение (3) становится однородным:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Решив это уравнение и перейдя снова к x и y по формулам (2), получим решение уравнения (1).

Система (4) не имеет решения, если

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $ab_1 = a_1b$. Но в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, т. е. $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ и, следовательно, уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \quad (5)$$

Тогда подстановкой

$$z = ax + by \quad (6)$$

уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (5) выражения (6) и (7), получим:

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1},$$

а это есть уравнение с разделяющимися переменными.

Прием, примененный к интегрированию уравнения (1), применяется и к интегрированию уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

где f — какая угодно непрерывная функция.

Пример 1. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Чтобы преобразовать его в однородное уравнение, делаем замену: $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Тогда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Решая систему двух уравнений

$$h + k - 3 = 0; \quad h - k - 1 = 0,$$

находим

$$h = 2, \quad k = 1.$$

В результате получаем однородное уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1},$$

которое решаем подстановкой

$$\frac{y_1}{x_1} = u;$$

тогда

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1};$$

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Интегрируя, находим:

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln C,$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln(Cx_1 \sqrt{1+u^2})$$

или

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Подставляя сюда $\frac{y_1}{x_1}$ вместо u , получим:

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}}.$$

Наконец, переходя к переменным x и y , окончательно получаем:

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}.$$

Пример 2. Уравнение

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

уже нельзя решить подстановкой $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, так как в этом случае система уравнений, служащая для определения h и k , неразрешима (здесь определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при переменных равен нулю)

Это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными заменой:

$$2x + y = z.$$

Тогда $y' = z' - 2$, и уравнение приводится к виду

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}.$$

или

$$z' = \frac{5z + 9}{2z + 5}.$$

Решая его, найдем:

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln |5z + 9| = x + C.$$

Так как $z = 2x + y$, то мы получим окончательно решение исходного уравнения в виде

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln |10x + 5y + 9| = x + C$$

или

$$10y - 5x + 7 \ln |10x + 5y + 9| = C_1,$$

т. е. в виде неявной функции y от x .

§ 7. Лине́йные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

Решение линейного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух функций от x :

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения (1).

Дифференцируя обе части равенства (2), находим:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), будем иметь:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v + Puv = Q$$

или

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (3)$$

Выберем функцию v такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \quad (4)$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v , находим:

$$\frac{dv}{v} = -P dx.$$

Интегрируя, получаем:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int P dx$$

или

$$v = C_1 e^{-\int P dx}.$$

Так как нам достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (4), то за функцию $v(x)$ возьмем:

$$v(x) = e^{-\int P dx}, \quad (5)$$

где $\int P dx$ — какая-нибудь первообразная. Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение (3), получим (учитывая, что $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$):

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x),$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Подставляя в формулу (2), окончательно получаем:

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right],$$

или

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x). \quad (6)$$

Замечание. Очевидно, что выражение (6) не изменится, если вместо функции $v(x)$, определенной равенством (5), мы возьмем какую-нибудь функцию $v_1(x) = \bar{C}v(x)$. Действительно, подставляя в (6) $v_1(x)$ вместо $v(x)$, получим:

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x).$$

В первом слагаемом $\bar{C}$ сокращаются; во втором слагаемом произведение $C\bar{C}$ есть произвольная постоянная, которую обозначаем одной

буквой C , и снова приходим к выражению (6). Если обозначим $\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$, то выражение (6) примет вид

$$y = v(x) \varphi(x) + Cv(x). \quad (6')$$

Очевидно, что это — общий интеграл, так как C можно подобрать так, что будет удовлетворяться начальное условие:

$$\text{при } x = x_0 \quad y = y_0.$$

Значение C определяется из уравнения

$$y_0 = v(x_0) \varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^2.$$

Решение. Полагаем

$$y = uv;$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Подставляя выражение $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, будем иметь:

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv &= (x+1)^2, \\ u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} &= (x+1)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения v получим уравнение

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0,$$

т. е.

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

откуда

$$\ln v = 2 \ln(x+1),$$

или

$$v = (x+1)^2.$$

Подставляя выражение функции v в уравнение (7), получаем для определения u уравнение

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^2,$$

или

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

откуда

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Полученное семейство является общим решением. Каково бы ни было начальное условие (x_0, y_0) , где $x_0 \neq -1$, всегда можно так подобрать C , чтобы соответствующее частное решение удовлетворяло заданному начальному условию. Например, частное решение, удовлетворяющее условию $y_0 = 3$ при $x_0 = 0$, найдется следующим образом:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2;$$

$$C = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение таково:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Однако, если начальное условие (x_0, y_0) выбрать так, что $x_0 = -1$, то мы не найдем частного решения, удовлетворяющего этому условию. Это объясняется тем, что при $x_0 = -1$ функция $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ разрывна и, следовательно, условия теоремы существования решения не соблюдены.

§ 8. Уравнение Бернулли

Рассмотрим уравнение вида *)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$ (в противном случае получилось бы линейное уравнение).

Это уравнение, называемое *уравнением Бернулли*, приводится к линейному следующим преобразованием.

Разделив все члены уравнения на y^n , получим:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q. \quad (2)$$

Сделаем, далее, замену:

$$z = y^{-n+1}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

*) К этому уравнению приводит задача о движении тела, если сопротивление среды F зависит от скорости так: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. Уравнение движения будет тогда $m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$, или $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n$.

Подставляя в уравнение (2), будем иметь линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q.$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{-n+1} , получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3. \quad (3)$$

Решение. Разделив все члены на y^3 , получим:

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^3. \quad (4)$$

Введем новую функцию

$$z = y^{-2},$$

тогда

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}.$$

Подставляя в уравнение (4), получим линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3. \quad (5)$$

Найдем его общий интеграл:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Подставляем в уравнение (5) выражения z и $\frac{dz}{dx}$:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3$$

или

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Приравниваем нулю выражение, стоящее в скобках:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - 2xv &= 0; & \frac{dv}{v} &= 2x dx; \\ \ln v &= x^2; & v &= e^{x^2}. \end{aligned}$$

Для определения u получаем уравнение

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Разделяем переменные:

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C.$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C_1 \quad z = uv = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения есть

$$y^{-1} = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}, \text{ или } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{-x^2}}}.$$

Замечание. Аналогично тому, как это делалось для линейных уравнений, можно показать, что решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) v(x),$$

где $v(x)$ — какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $v' + Pv = 0$.

§ 9. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2)$$

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах. Докажем, что если левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал, то выполняется условие (2), и обратно — при выполнении условия (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x, y) = 0, \quad (3)$$

и, следовательно, его общий интеграл есть $u(x, y) = C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Дифференцируя первое соотношение по y , а второе — по x , получим:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

т. е. равенство (2) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Покажем, что это условие является и достаточным, т. е. что при выполнении равенства (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Из соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

находим:

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),$$

где x_0 — абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y . Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (4). Для этого продифференцируем *) обе части последнего равенства по y и результат приравняем к $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

но так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то мы можем написать:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \text{ т. е. } N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y),$$

или

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

*) Интеграл $\int_{x_0}^x M(x, y) dx$ зависит от y . Для того чтобы найти производную от этого интеграла по y , нужно продифференцировать по y подынтегральную функцию: $\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Это вытекает из теоремы Лейбница о дифференцировании определенного интеграла по параметру (см. § 10 гл. XI).

или

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ будет иметь вид

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Здесь $P(x_0, y_0)$ — точка, в окрестности которой существует решение дифференциального уравнения (1).

Приравнявая это выражение произвольному постоянному C , получим общий интеграл уравнения (1):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (5)$$

Пример. Дано уравнение

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

Проверяем, не есть ли это уравнение в полных дифференциалах. Обозначим

$$M = \frac{2x}{y^3}, \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Условие (2) при $y \neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x, y)$. Найдем эту функцию.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$, то, следовательно,

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — не определенная пока функция от y .

Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

находим:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

следовательно,

$$\Psi'(y) = \frac{1}{y^2}, \quad \Psi(y) = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y} = C.$$

§ 10. Интегрирующий множитель

Пусть левая часть уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

не есть полный дифференциал. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую всех членов уравнения левая часть уравнения становится полным дифференциалом. Общее решение полученного таким образом уравнения совпадает с общим решением первоначального уравнения; функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (1).

Для того чтобы найти интегрирующий множитель μ , поступаем следующим образом: умножим обе части данного уравнения на неизвестный пока интегрирующий множитель μ :

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

т. е.

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

или

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

После деления обеих частей последнего уравнения на μ получим:

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

Очевидно, что всякая функция $\mu(x, y)$, удовлетворяющая последнему уравнению, является интегрирующим множителем уравнения (1). Уравнение (2) является уравнением в частных производных с неизвестной функцией μ , зависящей от двух переменных x и y . Можно доказать, что при определенных условиях оно имеет бесчисленное множество решений и, следовательно, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель. Но в общем случае задача нахождения $\mu(x, y)$

из уравнения (2) еще труднее, чем первоначальная задача интегрирования уравнения (1). Только в некоторых частных случаях удается найти функцию $\mu(x, y)$.

Пусть, например, уравнение (1) допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y . Тогда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0,$$

и для отыскания μ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

из которого определяется (одной квадратурой) $\ln \mu$, а следовательно, и μ . Ясно, что так можно поступать только в том случае, если выражение

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ не зависит от x .

Аналогично, если выражение $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ не зависит от y , а зависит только от x , то легко находится интегрирующий множитель, зависящий только от x .

Пример. Решить уравнение

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0.$$

Решение. Здесь $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, левая часть уравнения не есть полный дифференциал. Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя, зависящего только от y . Заметив, что

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y},$$

заключаем, что уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y . Находим его:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y};$$

отсюда

$$\ln \mu = -2 \ln y, \text{ т. е. } \mu = \frac{1}{y^2}.$$

После умножения всех членов данного уравнения на найденный интегрирую-

ший множитель μ получаем уравнение $\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y} dy = 0$ в полных дифференциалах $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$. Решая это уравнение, найдем его общий интеграл:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0,$$

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

§ 11. Огибающая семейства кривых

Пусть дано уравнение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

где x и y — переменные декартовы координаты, а C — параметр, могущий принимать различные фиксированные значения.

При каждом данном значении параметра C уравнение (1) определяет некоторую кривую на плоскости Oxy . Придавая C всевозможные значения, мы получаем семейство кривых, зависящих от одного параметра, или — как часто говорят — однопараметрическое семейство кривых. Таким образом, уравнение (1) есть

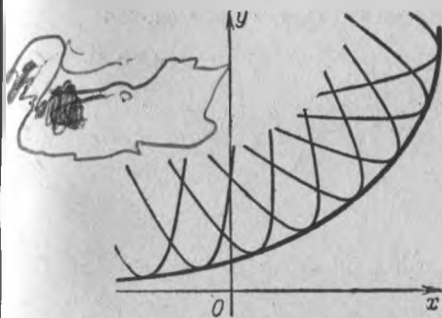


Рис. 250.

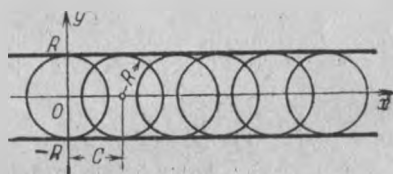


Рис. 251.

уравнение однопараметрического семейства кривых (так как оно содержит только одну произвольную постоянную).

Определение. Линия L называется *огивающей* однопараметрического семейства линий, если она в каждой своей точке касается той или иной линии семейства, причем в различных точках линии L ее касаются различные линии данного семейства (рис. 250).

Пример 1. Рассмотрим семейство линий

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

где R — постоянная, C — параметр.

Это — семейство окружностей радиуса R с центрами на оси Ox . Очевидно, что это семейство будет иметь огивающими прямыми $y = R$, $y = -R$ (рис. 251).

Нахождение уравнения огибающей данного семейства. Пусть дано семейство кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

зависящих от параметра C .

Предположим, что это семейство имеет огибающую, уравнение которой можно записать в виде $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция от x . Рассмотрим некоторую точку $M(x, y)$, лежащую на огибающей. Эта точка также лежит на некоторой кривой семейства (1). Этой кривой соответствует определенное значение параметра C , которое при данных (x, y) определяется из уравнения (1) $C = C(x, y)$. Следовательно, для всех точек огибающей удовлетворяется равенство

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \quad (2)$$

Допустим, что $C(x, y)$ — дифференцируемая функция, не постоянная ни на каком интервале рассматриваемых значений x, y . Из уравнения (2) огибающей найдем угловой коэффициент касательной к огибающей в точке $M(x, y)$. Продифференцируем равенство (2) по x , считая, что y есть функция от x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} \right] y' = 0$$

или

$$\Phi'_x + \Phi_y y' + \Phi_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0. \quad (3)$$

Далее, угловой коэффициент касательной к кривой семейства (1) в точке $M(x, y)$ найдется из равенства

$$\Phi'_x + \Phi_y y' = 0 \quad (4)$$

(C на данной кривой постоянно).

Мы предполагаем, что $\Phi_y \neq 0$, в противном случае мы считали бы x функцией, а y аргументом. Так как угловой коэффициент k огибающей равен угловому коэффициенту k кривой семейства, то из (3) и (4) получаем:

$$\Phi_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0.$$

Но так как на огибающей $C(x, y) \neq \text{const}$, то

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

и потому для ее точек справедливо равенство

$$\Phi_C(x, y, C) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, для определения огибающей служат следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обратно, если, исключая C из этих уравнений, получим уравнение $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, при этом значение $C \neq \text{const}$ на этой кривой, то $y = \varphi(x)$ есть уравнение огибающей.

Замечание 1. Если для семейства (1) некоторая функция $y = \varphi(x)$ является уравнением геометрического места *особых точек*, т. е. точек, где $\Phi_x = 0$ и $\Phi_y = 0$, то координаты этих точек также удовлетворяют уравнениям (6).

Действительно, координаты особых точек можно выразить через параметр C , входящий в уравнение (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \quad (7)$$

Если эти выражения подставим в уравнение (1), то получим тождество относительно C :

$$\Phi[\lambda(C), \mu(C), C] = 0.$$

Дифференцируя это тождество по C , получим:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

так как для любых точек выполняются равенства $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, то, следовательно, для них также выполняется равенство $\Phi'_C = 0$.

Этим мы и доказали, что координаты особых точек удовлетворяют уравнениям (6).

Итак, уравнения (6) определяют либо огибающую, либо геометрическое место особых точек кривых семейства (1), либо сочетание того и другого. Таким образом, получив кривую, удовлетворяющую уравнениям (6), необходимо дополнительно исследовать, является ли она огибающей или геометрическим местом особых точек.

Пример 2. Найти огибающую семейства окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

зависящих от одного параметра C

Решение. Дифференцируя уравнение семейства по C , получаем:

$$2(x - C) = 0.$$

Исключая C из этих двух уравнений, получим уравнение

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ или } y = \pm R.$$

Из геометрических соображений ясно, что полученная пара прямых является огибающей (а не геометрическим местом особых точек, так как окружности, входящие в семейство, не имеют особых точек).

Пример 3. Найти огибающую семейства прямых:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (a)$$

где α — параметр.

Решение. Дифференцируя по α данное уравнение семейства, будем иметь:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \quad (b)$$

Для исключения параметра α из уравнений (a) и (b) умножим члены первого на $\cos \alpha$, а второго — на $\sin \alpha$ и вычтем из первого второе; тогда будем иметь:

$$x = p \cos \alpha.$$

Подставляя это выражение в равенство (b), найдем:

$$y = p \sin \alpha.$$

Возводя члены двух последних уравнений в квадрат и складывая почленно, получим:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Это — окружность. Она является огибающей семейства (а не геометрическим местом особых точек, так как прямые линии не имеют особых точек) (рис. 252).

Пример 4. Найти огибающую траекторий снарядов, выпущенных из пушки со скоростью v_0 под различными углами наклона ствола орудия к горизонту. При этом будем считать, что орудие находится в начале координат, а траектории снарядов лежат в плоскости Oxy (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Решение. Найдем сначала уравнение траектории снаряда в том случае, когда ствол орудия составляет с положительным направлением оси Ox угол α . Во время полета снаряд участвует одновременно в двух движениях: равномерное движение со скоростью v_0 в направлении ствола

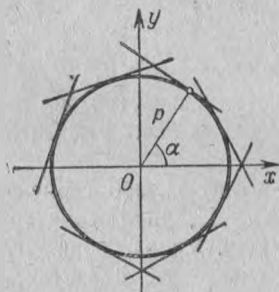


Рис. 252.

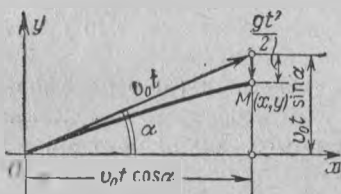


Рис. 253.

орудия и падение вниз под действием силы тяжести. Поэтому в каждый момент времени t положение снаряда M (рис. 253) будет определяться равенствами

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}.$$

Это — параметрические уравнения траектории (параметром является время t).

Исключив t , найдем уравнение траектории в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

наконец, введя обозначения $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, получим:

$$y = kx - ax^2 (1 + k^2). \quad (8)$$

Это уравнение определяет параболу с вертикальной осью, проходящую через начало координат и обращенную ветвями вниз. Для различных значений k

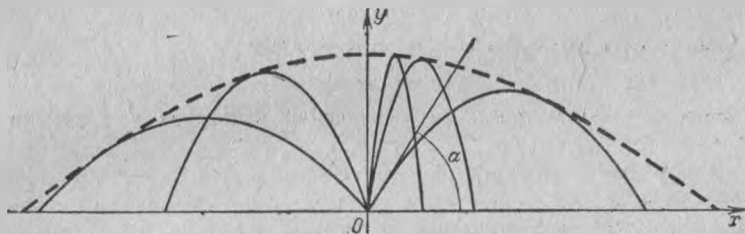


Рис. 254.

мы получим различные траектории. Следовательно, уравнение (8) является уравнением однопараметрического семейства парабол, являющихся траекториями снаряда при различных углах α и данной начальной скорости v_0 (рис. 254).

Найдем огибающую этого семейства парабол.

Дифференцируя по k обе части уравнения (8), имеем:

$$x - 2akx^2 = 0. \quad (9)$$

Исключая k из уравнений (8) и (9), получим:

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $(0, \frac{1}{4a})$, ось которой совпадает с осью Oy . Она не является геометрическим местом особых точек (так как параболы (8) не имеют особых точек). Итак, парабол

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

является огибающей семейства траекторий. Она называется параболой безопасности, так как ни одна точка за ее пределами не достижима для снаряда, выпущенного из данного орудия с данной начальной скоростью v_0 .

Пример 5. Найти огибающую семейства полукубических парабол

$$y^3 - (x - C)^2 = 0.$$

Решение. Дифференцируем по параметру C данное уравнение семейства:

$$2(x - C) = 0.$$

Исключая параметр C из двух уравнений, получим:

$$y=0.$$

Ось Ox является геометрическим местом особых точек — точек возврата первого рода (рис. 255). Действительно, найдем особые точки кривой

$$y^3 - (x - C)^2 = 0$$

при фиксировании значения C . Дифференцируя по x и y , находим:

$$F'_x = -2(x - C) = 0;$$

$$F'_y = 3y^2 = 0.$$

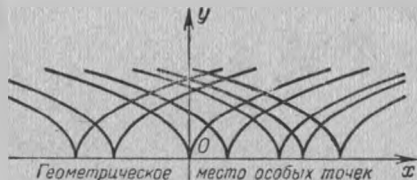


Рис. 255.

Решая совместно три предыдущих уравнения, найдем координаты особой точки: $x = C$, $y = 0$; таким образом, каждая кривая данного семейства имеет особую точку на оси Ox .

При непрерывном изменении параметра C особые точки заполнят всю ось Ox .

Пример 6. Найти огибающую и геометрическое место особых точек семейства

$$(y - C)^2 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0. \quad (10)$$

Решение. Дифференцируя по C обе части равенства (10), найдем:

$$-2(y - C) + \frac{2}{3}3(x - C)^2 = 0,$$

или

$$y - C - (x - C)^2 = 0. \quad (11)$$

Исключим теперь параметр C из полученного равенства (11) и из уравнения (10) семейства. Подставив выражение

$$y - C = (x - C)^2$$

в уравнение семейства, получим:

$$(x - C)^4 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0,$$

или

$$(x - C)^3 \left[(x - C) - \frac{2}{3} \right] = 0;$$

отсюда получаем два возможных значения C и два соответствующих им решения задачи.

Первое решение:

$$C = x;$$

поэтому из равенства (11) находим:

$$y - x - (x - x)^2 = 0$$

или

$$y = x.$$

Второе решение:

$$C = x - \frac{2}{3};$$

поэтому из равенства (11) находим:

$$y - x + \frac{2}{3} - \left[x - x + \frac{2}{3} \right]^2 = 0$$

или

$$y = x - \frac{2}{9}.$$

Мы получили две прямые: $y=x$ и $y=x-\frac{2}{9}$. Первая из них является геометрическим местом особых точек, а вторая — огибающей (рис. 256).

Замечание 2. В § 7 гл. VI было доказано, что нормаль к кривой служит касательной к ее эволюте. Следовательно, семейство нормалей к данной кривой является в то же время семейством

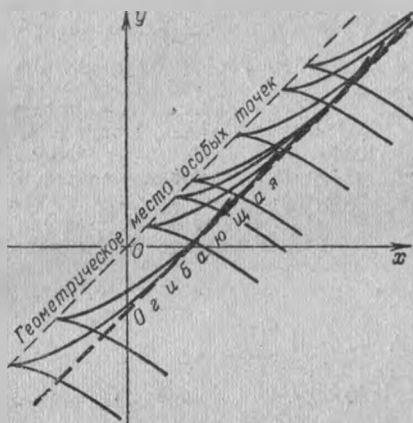


Рис. 256.

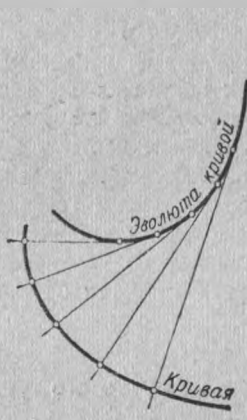


Рис. 257

касательных к ее эволюте. Таким образом, эволюта кривой является огибающей семейства нормалей этой кривой (рис. 257).

Это замечание позволяет указать еще один метод для нахождения эволюты: чтобы получить уравнение эволюты, надо сначала найти семейство всех нормалей данной кривой, а затем найти огибающую этого семейства.

§ 12. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

имеет общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (2)$$

Предположим, что семейство интегральных кривых, соответствующее уравнению (2), имеет огибающую. Докажем, что эта огибающая также является интегральной кривой дифференциального уравнения (1).

Действительно, в каждой своей точке огибающая касается некоторой кривой семейства, т. е. имеет с ней общую касательную. Следовательно, в каждой общей точке огибающей и кривая семейства имеют одинаковые значения величин x , y , y' .

Но для кривой из семейства числа x , y , y' удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, тому же уравнению удовлетворяют абсцисса, ордината и угловой коэффициент каждой точки огибающей. Но это и означает, что огибающая является интегральной кривой, а ее уравнение является решением данного дифференциального уравнения.

Так как огибающая не является, вообще говоря, кривой семейства, то ее уравнение не может быть получено из общего интеграла (2) ни при каком частном значении C . Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении C и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

Пусть известен общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

исключая C из этого уравнения и уравнения $\Phi_C(x, y, C) = 0$, получим уравнение $\psi(x, y) = 0$. Если эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (и не принадлежит семейству (2)), то это и есть *особый интеграл*.

Отметим, что через каждую точку кривой, изображающей особое решение, проходит по крайней мере по две интегральные кривые, т. е. в каждой точке особого решения нарушается единственность решения.

Пример. Найти особое решение уравнения

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \quad (*)$$

Решение. Найдем его общий интеграл. Разрешим уравнение относительно y'

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{y dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Отсюда, интегрируя, находим общий интеграл:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Легко видеть, что семейство интегральных линий представляет собой семейство окружностей радиуса R с центрами на оси абсцисс. Огибающей семейства кривых будет пара прямых $y = \pm R$.

Функции $y = \pm R$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (*). Следовательно, это есть особый интеграл.

§ 13. Уравнение Клеро

Рассмотрим так называемое *уравнение Клеро*

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi \left(\frac{dy}{dx} \right). \quad (1)$$

Оно интегрируется с помощью введения вспомогательного параметра. Именно, положим $\frac{dy}{dx} = p$; тогда уравнение (1) примет вид

$$y = xp + \psi(p). \quad (1')$$

Продифференцируем по x все члены последнего уравнения, имея в виду, что $p = \frac{dy}{dx}$ является функцией от x :

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

или

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Приравнявая каждый множитель нулю, получим:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad (2)$$

и

$$x + \psi'(p) = 0. \quad (3)$$

1) Интегрируя равенство (2), получаем $p = C$ ($C = \text{const}$). Подставляя это значение p в уравнение (1'), найдем его общий интеграл:

$$y = xC + \psi(C), \quad (4)$$

который с геометрической точки зрения представляет семейство прямых линий.

2) Если из уравнения (3) найдем p как функцию от x и подставим ее в уравнение (1'), то получим функцию

$$y = xp(x) + \psi[p(x)], \quad (1'')$$

которая, как легко показать, представляет собой решение уравнения (1).

В самом деле, в силу равенства (3) находим:

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = p.$$

Поэтому, подставляя функцию (1'') в уравнение (1), получаем тождество

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

Решение (1'') не получается из общего интеграла (4) ни при каком значении C . Это есть особое решение; оно получается

в результате исключения параметра p из уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

или, что все равно, исключением C из уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= xC + \psi(C), \\ x + \psi'_C(C) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, особое решение уравнения Клеро определяет огибающую семейства прямых, заданных общим интегралом (4).

Пример. Найти общий и особый интегралы уравнения

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Решение. Общий интеграл получаем, заменяя $\frac{dy}{dx}$ на C :

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Для получения особого решения дифференцируем последнее уравнение по C :

$$x + \frac{a}{(1 + C^2)^{3/2}} = 0.$$

Особое решение (уравнение огибающей) получается в параметрическом виде (где параметром служит C):

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1 + C^2)^{3/2}}, \\ y = \frac{aC}{(1 + C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$



Рис. 258.

Исключив параметр C , можем получить непосредственную зависимость между x и y . Возводя обе части каждого уравнения в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно полученные уравнения, найдем особое решение в следующем виде:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Это — астроида. Однако огибающей семейства (а следовательно, и особым решением) является не вся астроида, а только ее левая половина (так как из параметрических уравнений огибающей видно, что $x \leq 0$) (рис. 258).

§ 14. Уравнение Лагранжа

Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (1)$$

где φ и ψ — известные функции от $\frac{dy}{dx}$.

Это уравнение линейно относительно y и x . Рассмотренное в предыдущем параграфе уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Интегрирование уравнения Лагранжа, так же как и интегрирование уравнения Клеро, производится с помощью введения вспомогательного параметра p . Положим

$$y' = p;$$

тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \quad (1')$$

Дифференцируя по x , получим:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

или

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}. \quad (1'')$$

Из этого уравнения сразу можно найти некоторые решения: именно оно обращается в тождество при всяком постоянном значении $p = p_0$, удовлетворяющем условию

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

Действительно, при постоянном значении p производная $\frac{dp}{dx} \equiv 0$, и обе части уравнения (1'') обращаются в нуль.

Решение, соответствующее каждому значению $p = p_0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = p_0$, является линейной функцией от x (так как производная $\frac{dy}{dx}$ постоянна только у линейных функций). Для того чтобы найти эту функцию, достаточно подставить в равенство (1') значение $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Если окажется, что это решение не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной, то оно будет особым решением.

Найдем теперь общее решение. Для этого запишем уравнение (1'') в виде

$$\frac{dx}{dp} \cdot x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

и будем рассматривать x как функцию от p . Тогда полученное уравнение будет линейным дифференциальным уравнением относительно функции x от p .

Решая его, найдем:

$$x = \omega(p, C). \quad (2)$$

Исключая параметр p из уравнений (1') и (2), получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Пример. Дано уравнение

$$y = xy'^2 + y'^2. \quad (1)$$

Положив $y' = p$, будем иметь:

$$y = xp^2 + p^2. \quad (1')$$

Дифференцируя по x , получим:

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}. \quad (1'')$$

Найдем особые решения. Так как $p = p^2$ при $p_0 = 0$ и $p_1 = 1$, то решениями будут линейные функции [см (1')]:

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ т. е. } y = 0,$$

и

$$y = x + 1.$$

Будут ли эти функции частными или особыми решениями, мы увидим, когда найдем общий интеграл. Для его разыскания запишем уравнение (1'') в виде

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

и будем рассматривать x как функцию независимого переменного p . Интегрируя полученное линейное (относительно x) уравнение, находим:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \quad (11)$$

Исключая p из уравнения (1') и (11), получим общий интеграл:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

Особым интегралом исходного уравнения будет:

$$y = 0,$$

поскольку это решение не получается из общего ни при каком значении C .

Функция же $y = x + 1$ является не особым, а частным решением; она получается из общего решения при $C = 0$.

§ 15. Ортогональные и изогональные траектории

Пусть имеем однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (1)$$

Линии, пересекающие все кривые данного семейства (1) под постоянным углом, называются *изогональными траекториями*. Если этот угол прямой, то траектории называются *ортогональными траекториями*.

Ортогональные траектории. Найдем уравнение ортогональных траекторий. Напишем дифференциальное уравнение данного семейства кривых, исключая параметр C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Пусть это дифференциальное уравнение будет

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1')$$

Здесь $\frac{dy}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной к кривой семейства в точке $M(x, y)$. Так как ортогональная траектория, проходящая через точку $M(x, y)$, перпендикулярна к соответствующей кривой семейства, то угловой коэффициент касательной к ней $\frac{dy_T}{dx}$ связан с $\frac{dy}{dx}$ соотношением (рис. 259)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \quad (2)$$

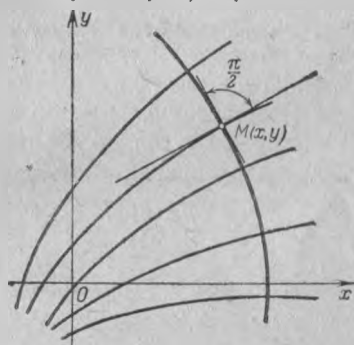


Рис. 259.

Подставляя это выражение в уравнение (1') и опуская индекс T , получим соотношение между координатами произвольной точки (x, y) и угловым коэффициентом ортогональной траектории в этой точке, т. е. дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \quad (3)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

дает семейство ортогональных траекторий.

С ортогональными траекториями приходится иметь дело, например, при рассмотрении плоского течения жидкости.

Положим, что течение жидкости на плоскости происходит так, что в каждой точке плоскости Oxy определен вектор $\mathbf{v}(x, y)$ скорости движения. Если этот вектор зависит только от положения точки на плоскости, но не зависит от времени, то движение называется стационарным или установившимся. Такое движение мы и будем рассматривать. Кроме того, мы допустим, что существует потенциал скоростей, т. е. такая функция $u(x, y)$, что проекции вектора $\mathbf{v}(x, y)$ на оси координат $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ являются ее частными производными по x и y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \quad (4)$$

Линии семейства

$$u(x, y) = C \quad (5)$$

называются *экипотенциальными линиями* (т. е. линиями равного потенциала).

Линии, касательные к которым во всех точках совпадают по направлению с вектором $\mathbf{v}(x, y)$, называются *линиями тока* и дают траектории движущихся точек.

Покажем, что линии тока суть ортогональные траектории семейства экипотенциальных линий (рис. 260).

Пусть φ — угол, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$ с осью Ox . Тогда на основании соотношения (4)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |\mathbf{v}| \cos \varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |\mathbf{v}| \sin \varphi;$$

отсюда находим угловой коэффициент касательной к линии тока

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \quad (6)$$

Угловой коэффициент касательной к экипотенциальной линии получим, дифференцируя по x соотношение (5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

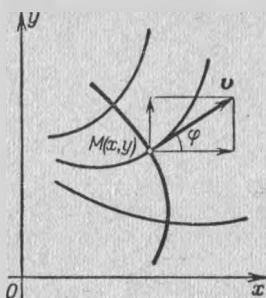


Рис. 260.

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (7)$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к эквипотенциальной линии по величине и по знаку обратен угловому коэффициенту касательной к линии тока. Отсюда и следует, что эквипотенциальные линии и линии тока взаимно ортогональны.

В случае электрического или магнитного поля ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий служат силовые линии этого поля.

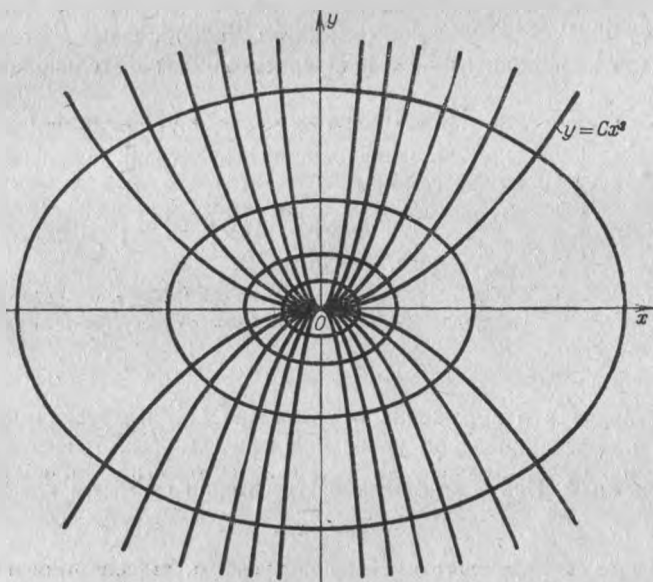


Рис. 261.

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства парабол

$$y = Cx^2.$$

Решение. Напишем дифференциальное уравнение семейства

$$y' = 2Cx.$$

Исключая C , получим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Заменяя здесь y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства

ортогональных траекторий

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

или

$$y dy = -\frac{x dx}{2}.$$

Его общий интеграл

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Следовательно, ортогональными траекториями данного семейства парабол будет некоторое семейство эллипсов с полуосями $a=2C$, $b=C\sqrt{2}$ (рис. 261).

Изогональные траектории. Пусть траектории пересекают кривые данного семейства под углом α , причем $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Угловым коэффициентом $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 262) касательной к кривой

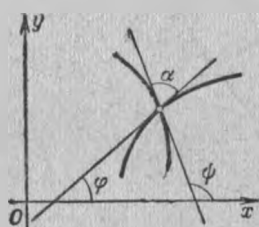


Рис. 262.

семейства и угловым коэффициентом $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg} \psi$ к изогональной траектории связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi},$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1}. \quad (2')$$

Подставляя это выражение в уравнение (1') и опуская индекс T , получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий.

Пример 2. Найти изогональные траектории семейства прямых

$$y = Cx, \quad (8)$$

пересекающие линии данного семейства под углом α , тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Решение. Напишем дифференциальное уравнение данного семейства. Дифференцируя по x уравнение (8), находим:

$$\frac{dy}{dx} = C.$$

С другой стороны, из того же уравнения

$$C = \frac{y}{x}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение данного семейства имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Пользуясь соотношением (2'), получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}.$$

Отсюда, опуская индекс T , находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}.$$

Интегрируя это однородное уравнение, получаем общий интеграл:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C, \quad (9)$$

который и определяет семейство изогональных траекторий. Чтобы выяснить, какие именно кривые входят в это семейство, перейдем к полярным координатам:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получим:

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

или

$$\rho = C e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

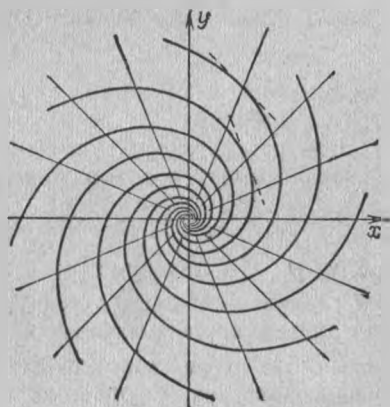


Рис. 263.

Следовательно, семейство изогональных траекторий является семейством логарифмических спиралей (рис. 263).

§ 16. Дифференциальные уравнения высших порядков (общие понятия)

Как уже указывалось выше (см. § 2), дифференциальное уравнение n -го порядка символически можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

или, если его можно разрешить относительно n -й производной,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1')$$

В настоящей главе мы будем рассматривать только такие уравнения высших порядков, которые можно разрешить относительно высшей производной. Для этих уравнений имеет место теорема о

существовании и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме о решении уравнения первого порядка.

Теорема. Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти условия называются *начальными условиями*. Доказательство этой теоремы выходит за рамки данной книги.

Если рассматривать уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, то начальными условиями при $x = x_0$ для решения будут условия

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа. Геометрический смысл этих условий следующий: через заданную точку плоскости (x_0, y_0) с заданным тангенсом угла наклона касательной y'_0 проходит единственная кривая. Из этого, далее, следует, что если мы будем задавать различные значения y'_0 при постоянных x_0 и y_0 , то получим бесчисленное множество интегральных кривых с различными углами наклона, проходящих через заданную точку.

Введем теперь понятие общего решения уравнения n -го порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется функция

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ и такая, что:

а) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$;

б) при заданных начальных условиях

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ будет удовлетворять этим условиям (предполагая, что начальные значения $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ принадлежат к области, где выполняются условия существования решения).

Соотношение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *частным решением*. График частного решения называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n -го порядка значит:

1) найти его общее решение (если начальные условия не заданы) или

2) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковые имеются).

В следующих параграфах будут изложены методы решения различных уравнений n -го порядка.

§ 17. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Простейшим уравнением n -го порядка является уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1)$$

Найдем общий интеграл этого уравнения.

Интегрируя по x левую и правую части и принимая во внимание, что $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, получим:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1,$$

где x_0 — любое фиксированное значение x , а C_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя еще раз, получим:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Продолжая далее, получим, наконец (после n интегрирований), выражение общего интеграла:

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0,$$

достаточно положить:

$$C_n = y_0, \quad C_{n-1} = y'_0, \quad \dots, \quad C_1 = y_0^{n-1}.$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$y'' = \sin(kx)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1.$$

Решение.

$$y' = \int_0^x \sin kx \, dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

или

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Это есть общий интеграл. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, достаточно определить соответствующие значения C_1 и C_2 .

Из условия $y_{x=0} = 0$ находим $C_2 = 0$.

Из условия $y'_{x=0} = 1$ находим $C_1 = 1$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x \left(\frac{1}{k} + 1 \right).$$

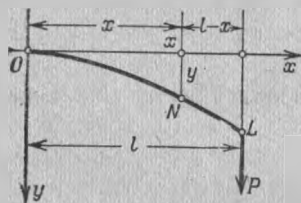


Рис. 264.

Дифференциальные уравнения рассмотренного вида встречаются в теории изгиба балоков.

Пример 2. Рассмотрим упругую призматическую балку, изгибающуюся под действием внешних сил, как непрерывно распределенных (вес, нагрузка), так и сосредоточенных. Направим ось Ox горизонтально, по оси балки в ее недеформированном состоянии, ось Oy — вертикально вниз (рис. 264).

Каждая сила, действующая на балку (например, нагрузка балки, реакция опор), имеет момент относительно какого-нибудь поперечного сечения балки, равный произведению силы на расстояние точки приложения силы от данного сечения. Сумма $M(x)$ моментов всех сил, приложенных к части балки, расположенной по одну сторону от данного сечения, с абсциссой x , называется изгибающим моментом балки относительно данного сечения. В курсе сопротивления материалов доказывается, что изгибающий момент балки равен

$$\frac{EJ}{R},$$

где E — так называемый модуль упругости, зависящий от материала балки,

J — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести площади поперечного сечения; R — радиус кривизны оси изогнутой балки, который выражается формулой (§ 6 гл. VI)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2)$$

Если считать, что деформации малы и что касательные к оси балки при изгибе образуют малый угол с осью Ox , то мы можем пренебречь квадратом малой величины y'^2 и считать:

$$R = \frac{1}{y''}.$$

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой балки примет вид

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2')$$

а это уравнение есть уравнение вида (1).

Пример 3. Балка наглухо заделана в конце O и подвергается действию сосредоточенной вертикальной силы P , приложенной к концу балки L на расстоянии l от места закрепления (рис. 264). Весом балки пренебрегаем.

Рассмотрим сечение в точке $N(x)$. Изгибающий момент относительно сечения N в данном случае будет равен

$$M(x) = (l - x)P.$$

Дифференциальное уравнение (2') примет вид

$$y'' = \frac{P}{EJ} (l - x).$$

Начальные условия: при $x=0$ прогиб y равен нулю и касательная к изогнутой оси балки совпадает с осью Ox , т. е.

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

Интегрируя уравнение, найдем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{P}{EJ} \int_0^x (l - x) dx = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right); \\ y &= \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В частности, из формулы (3) определяется прогиб h на конце балки L :

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 18. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка

I. Уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

не содержит явным образом искомой функции y .

Решение. Обозначим производную $\frac{dy}{dx}$ через p , т. е. положим $\frac{dy}{dx} = p$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Подставляя эти выражения производных в уравнение (1), получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

относительно неизвестной функции p от x . Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение:

$$p = p(x, C_1),$$

а затем из соотношения $\frac{dy}{dx} = p$ получаем общий интеграл уравнения (1):

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение цепной линии (см. § 1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Положим

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p от x :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}.$$

Разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a},$$

откуда

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Но так как $p = \frac{dy}{dx}$, то последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение относительно искомой функции y . Интегрируя его, получим уравнение цепной линии (см. § 1)

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right) + C_2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y_{x=0} = a,$$

$$y'_{x=0} = 0.$$

Первое условие дает $C_2 = 0$, второе $C_1 = 0$.
Окончательно получаем:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

З а м е ч а н и е. Аналогичным способом можно проинтегрировать уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

Полагая $y^{(n-1)} = p$, получим для определения p уравнение первого порядка:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Узнав отсюда p как функцию от x , из соотношения $y^{(n-1)} = p$ найдем y (см. § 17).

II. Уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

не содержит явным образом независимого переменного x . Для его решения снова положим

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad (3)$$

но теперь мы будем считать p функцией от y (а не от x , как прежде). Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Подставляя в уравнение (2) выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p :

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p). \quad (4)$$

Интегрируя его, найдем p как функцию от y и произвольного постоянного C_1 :

$$p = p(y, C_1).$$

Подставляя это значение в соотношение (3), получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции y от x :

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$3y'' = y^{-\frac{2}{3}}.$$

Решение. Положим $p = \frac{dy}{dx}$, рассматривая p как функцию от y . Тогда $y'' = p \frac{dp}{dy}$, и мы получаем уравнение первого порядка для вспомогательной функции p :

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{2}{3}}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \text{ или } p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Но $p = \frac{dy}{dx}$; следовательно, для определения y получаем уравнение

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx, \quad \text{или} \quad \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = dx,$$

откуда

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/2} dy}{\sqrt{C_1 y^{3/2} - 1}}.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем подстановку:

$$C_1 y^{3/2} - 1 = t^2.$$

Тогда

$$y^{1/2} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t (t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{1/2}} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{y^{1/2} dy}{\sqrt{C_1 y^{3/2} - 1}} &= \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t (t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^2}{3} + t \right) = \\ &= \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{3/2} - 1} (C_1 y^{3/2} + 2). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{3/2} - 1} (C_1 y^{3/2} + 2).$$

Пример 3. Пусть точка движется по оси Ox под действием силы, зависящей только от положения точки. Дифференциальное уравнение движения будет

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x).$$

Пусть при $t=0$ будет $x=x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$.

Умножив обе части уравнения на $\frac{dx}{dt} dt$ и проинтегрировав в пределах от 0 до t , получим:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx,$$

или

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const.}$$

Первое слагаемое последнего равенства представляет кинетическую энергию, второе — потенциальную энергию движущейся точки. Из полученного равенства следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной во все время движения.

Задача о математическом маятнике. Пусть материальная точка массы m под действием силы тяжести движется по окружности L , лежащей в вертикальной плоскости. Найдём уравнение движения точки, пренебрегая силами сопротивления (т. е. силой трения, силой сопротивления воздуха и т. п.).

Поместим начало координат в нижней точке окружности, ось Ox направим по касательной к окружности (рис. 265).

Обозначим через l радиус окружности, через s — длину дуги от начала O до переменной точки M , где находится масса m , причем эту длину берем с соответствующим знаком ($s > 0$, если точка M правее точки O ; $s < 0$, если M левее O).

Наша задача заключается в установлении зависимости s от времени t .

Разложим силу тяжести mg на тангенциальную и нормальную составляющие. Первая, равная $mg \sin \varphi$, вызывает движение, вторая уничтожается реакцией кривой, по которой движется масса m .

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Так как для окружности угол $\varphi = \frac{s}{l}$, то мы получаем уравнение

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

Это дифференциальное уравнение II типа (так как оно не содержит явным образом независимого переменного t).

Интегрируем его соответствующим образом:

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Следовательно,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l},$$

или

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

откуда

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

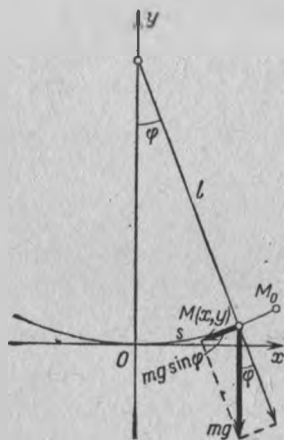


Рис. 265.

Обозначим через s_0 наибольшую длину дуги, на которую отклоняется точка M . При $s=s_0$ скорость точки равна нулю:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p \Big|_{s=s_0} = 0.$$

Это дает возможность определить C_1 :

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

откуда

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}.$$

Поэтому

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l} \right),$$

или, применяя к последнему выражению формулу для разности косинусов

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}, \quad (5)$$

или *)

$$\frac{ds}{dt} = 2 \sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}. \quad (6)$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2 \sqrt{gl} dt. \quad (7)$$

Будем пока предполагать, что $s \neq s_0$, тогда знаменатель дроби отличен от нуля. Если считать, что при $t=0$ $s=0$, то из равенства (7) получаем:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2 \sqrt{gl} t. \quad (8)$$

Это равенство и дает зависимость s от t . Интеграл, стоящий слева, не выражается через элементарные функции, не выражается через элементарные функции и функция s от t . Рассмотрим поставленную задачу приближенно.

Будем предполагать, что углы $\frac{s_0}{l}$ и $\frac{s}{l}$ малы. Углы $\frac{s+s_0}{2l}$ и $\frac{s_0-s}{2l}$ не будут превосходить $\frac{s_0}{l}$. В уравнении (6) синусы углов заменим приближенно

углами

$$\frac{ds}{dt} = 2 \sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \frac{s_0-s}{2l}}$$

*) Перед корнем мы берем знак плюс. Из замечания в конце решения задачи следует, что рассматривать случай, когда берется знак минус, нет надобности.

или

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}. \quad (6')$$

Разделяя переменные, получим (предполагаем пока, что $s \neq s_0$):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (7')$$

Снова будем считать, что $s=0$ при $t=0$. Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8')$$

или

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

откуда

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е. При решении мы предполагали, что $s \neq s_0$. Но путем непосредственной подстановки убеждаемся, что функция (9) есть решение уравнения (6') при любом значении t .

Напомним, что решение (9) является приближенным решением уравнения (5), так как уравнение (6) мы заменили приближенным уравнением (6').

Равенство (9) показывает, что точка M (которую можно рассматривать как конец маятника) совершает гармонические колебания с периодом колебания $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Этот период не зависит от амплитуды колебания s_0 .

П р и м е р 4. Задача о второй космической скорости.

Определить наименьшую скорость, с какой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Обозначим массу Земли и массу брошенного тела соответственно через M и m . По закону тяготения Ньютона сила f притяжения, действующая на тело m , будет:

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

где r — расстояние между центром Земли и центром тяжести брошенного тела, k — гравитационная постоянная.

Дифференциальное уравнение движения указанного тела с массой m будет:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (10)$$

или

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}.$$

Мы взяли знак минус потому, что в задаче ускорение отрицательно. Дифференциальное уравнение (10) есть уравнение вида (2). Будем решать это уравнение при следующих начальных условиях:

$$\text{при } t=0 \quad r=R, \quad \frac{dr}{dt}=v_0.$$

Здесь R —радиус Земли, v_0 —скорость бросания. Обозначим

$$\frac{dr}{dt}=v, \quad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr},$$

где v —скорость движения. Подставляя в уравнение (10), получим:

$$v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$v\,dv=-kM\frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\frac{v^2}{2}=+kM\frac{1}{r}+C_1. \quad (11)$$

Из условия, что $v=v_0$ на поверхности Земли (при $r=R$), определим C_1 :

$$\frac{v_0^2}{2}=+kM\frac{1}{R}+C_1$$

или

$$C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

Подставим найденное значение C_1 в равенство (11):

$$\frac{v^2}{2}=+kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}$$

или

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \quad (12)$$

По условию тело должно двигаться так, чтобы скорость всегда была положительной, следовательно, $\frac{v^2}{2} > 0$. Так как величина $\frac{kM}{r}$ при неограниченном возрастании r делается как угодно малой, то условие $\frac{v^2}{2} > 0$ будет выполняться при любом r только в случае

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R} \geq 0 \quad (13)$$

или

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Следовательно, наименьшая скорость будет определяться равенством

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \quad (14)$$

где

$$k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ см.}$$

На поверхности Земли при $r=R$ ускорение силы тяжести равно $g \left(g = 981 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right)$. На основании этого из равенства (10) получаем:

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

или

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Подставляя это значение M в формулу (14), получаем:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{сек}}.$$

§ 19. Графический метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка

Выясним геометрический смысл дифференциального уравнения второго порядка. Пусть имеем уравнение

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Обозначим через φ угол, который касательная к кривой образует с положительным направлением оси Ox ; тогда

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Чтобы выяснить геометрический смысл второй производной, вспомним формулу, определяющую радиус кривизны кривой в данной точке *)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

*) До сих пор мы всегда считали радиус кривизны положительным числом, однако в настоящем параграфе мы будем считать радиус кривизны числом, которое может принимать как положительные, так и отрицательные значения: если кривая выпукла ($y'' < 0$), мы считаем радиус кривизны отрицательным ($R < 0$); если кривая вогнута ($y'' > 0$), — положительным ($R > 0$).

Отсюда

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Но

$$y' = \operatorname{tg} \varphi; 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi; (1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|},$$

поэтому

$$y'' = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|}. \quad (3)$$

Подставляя теперь в уравнение (1) полученные выражения для y и y'' , будем иметь:

$$\frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi),$$

или

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что дифференциальное уравнение второго порядка определяет величину радиуса кривизны интегральной линии, если заданы координаты точки и направление касательной в этой точке.

Из предыдущего вытекает способ приближенного построения интегральной кривой при помощи гладкой кривой, составленной из дуг окружностей *).

Пусть, например, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0.$$

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведем луч M_0T_0 с угловым коэффициентом $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (рис. 266). Из уравнения (4) найдем величину $R = R_0$. Отложим отрезок M_0C_0 , равный R_0 на перпендикуляре к направлению M_0T_0 , и из точки C_0 , как из центра, опишем небольшую дугу M_0M_1 радиусом R_0 . Заметим при этом, что если $R_0 < 0$, то отрезок M_0C_0 нужно направлять в ту сторону, чтобы дуга окружности была обращена выпуклостью вверх, а при $R_0 > 0$ — выпуклостью вниз (см. сноску на предыдущей странице).

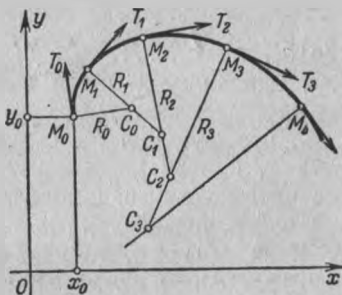


Рис. 266.

*) Кривая называется *гладкой*, если она имеет касательную во всех точках, причем угол наклона этой касательной есть непрерывная функция от длины дуги s .

Пусть, далее, x_1, y_1 — координаты точки M_1 , лежащей на построенной дуге и достаточно близкой к точке M_0 , а $\operatorname{tg} \varphi_1$ — угловой коэффициент касательной $M_1 T_1$ к проведенной окружности в точке M_1 . Из уравнения (4) найдем соответствующее точке M_1 значение $R = R_1$. Проведем отрезок $M_1 C_1$, перпендикулярный к $M_1 T_1$, равный R_1 , и из точки C_1 , как центра, опишем дугу $M_1 M_2$ радиусом R_1 . Затем на этой дуге возьмем близкую к M_1 точку $M_2(x_2, y_2)$ и продолжаем таким образом построение, пока не получим достаточно большой кусок кривой, состоящей из дуг окружностей. Из предыдущего ясно, что эта кривая приближенно является интегральной линией, проходящей через точку M_0 . Очевидно, что построенная кривая будет тем ближе к интегральной кривой, чем меньше будут дуги $M_0 M_1, M_1 M_2, \dots$

§ 20. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства

Определение 1. Дифференциальное уравнение n -го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции y и ее производных $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и $f(x)$ — заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой мы рассматриваем уравнение (1). В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях x , причем коэффициент $a_0 = 1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него). Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется *правой частью уравнения*.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным* или уравнением с *правой частью*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

и называется *линейным однородным* или уравнением *без правой части* (левая часть этого уравнения является однородной функцией первой степени относительно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$).

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 — два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (3)$$

то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — решения уравнения, то

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (3) сумму $y_1 + y_2$ и принимая во внимание тождества (4), будем иметь:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) &= \\ = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

т. е. $y_1 + y_2$ есть решение уравнения.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (3) и C — постоянная, то Cy_1 есть также решение уравнения (3).

Доказательство. Подставляя в уравнение (3) выражение Cy_1 , получим:

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

тем самым теорема доказана.

Определение 2. Два решения уравнения (3) y_1 и y_2 называются *линейно независимыми на отрезке* $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т. е. если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

В противном случае решения называются *линейно зависимыми*. Иными словами, два решения y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$, если существует такое постоянное число λ , что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \leq x \leq b$. В этом случае $y_1 = \lambda y_2$.

Пример 1. Пусть имеем уравнение $y'' - y = 0$. Легко проверить, что функции e^x , e^{-x} , $3e^x$, $5e^{-x}$ являются решениями этого уравнения. При этом функции e^x и e^{-x} линейно независимы на любом отрезке, так как отношение $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ не остается постоянным при изменении x . Функции же e^x и $3e^x$ линейно зависимы, так как $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

Определение 3. Если y_1 и y_2 суть функции от x , то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* данных функций.

Теорема 3. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Действительно, если $y_2 = \lambda y_1$, где $\lambda = \text{const}$, то $y'_2 = \lambda y'_1$, и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y'_1 & \lambda y'_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. Если определитель Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный для решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения (3), не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на отрезке $[a, b]$, где коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении x на этом отрезке.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — два решения уравнения (3), то

$$y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0, \quad y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2 = 0.$$

Умножая члены первого равенства на y_2 , члены второго равенства на $-y_1$ и складывая, получим:

$$(y'_1 y_2 - y_1 y'_2) + a_1 (y_1 y'_2 - y'_1 y_2) = 0. \quad (5)$$

Разность, стоящая во второй скобке, есть определитель Вронского $W(y_1, y_2)$. Выражение, стоящее в первой скобке, есть производная от определителя Вронского $W'(y_1, y_2)$:

$$W'(y_1, y_2) = (y'_1 y_2 - y_1 y'_2)' = y''_1 y_2 + y'_1 y'_2 - y'_1 y'_2 - y_1 y''_2 = y''_1 y_2 - y_1 y''_2.$$

Следовательно, равенство (5) принимает вид

$$W' = -a_1 W. \quad (6)$$

Разделяя переменные (при $W \neq 0$), получаем:

$$\frac{W'}{W} = -a_1.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln W = - \int_{x_0}^x a_1 dx + \ln C$$

или

$$\ln \frac{W}{C} = - \int_{x_0}^x a_1 dx,$$

откуда

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7)$$

по условию

$$W_{x=x_0} = Ce^0 = C \neq 0.$$

Но тогда из равенства (7) вытекает, что $W \neq 0$ ни при каком значении x , потому что показательная функция не обращается в нуль ни при каком конечном значении аргумента.

Замечание 1. Если определитель Вронского равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$, то он равен также нулю при любом значении x из рассматриваемого отрезка. Это непосредственно следует из формулы (7): если $W = 0$ при $x = x_0$, то

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

следовательно, $W \equiv 0$, каково бы ни было значение верхнего предела x в формуле (7).

Теорема 5. Если решения y_1 и y_2 уравнения (3) линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского W , составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.

Укажем идею доказательства этой теоремы, не приводя его полностью.

Допустим, что $W = 0$ в некоторой точке отрезка; тогда по теореме 3 определитель Вронского будет равен нулю во всех точках отрезка $[a, b]$:

$$W = 0$$

или

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Рассмотрим сначала те интервалы, содержащиеся в отрезке $[a, b]$, где $y_1 \neq 0$. Тогда

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0.$$

Следовательно, на каждом из упомянутых интервалов $\frac{y_2}{y_1}$ есть постоянная

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const.}$$

Используя теорему существования и единственности, можно показать, что $y_2 = \lambda y_1$ для всех точек отрезка $[a, b]$, включая и те, где $y_1 = 0$, а это невозможно, так как, по условию, y_2 и y_1 линейно независимы. Следовательно, определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$.

Теорема 6. Если y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения (3), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть его общее решение.

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что функция

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

есть решение уравнения (3) при любых значениях C_1 и C_2 .

Докажем теперь, что каковы бы ни были начальные условия $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, можно так подобрать значения произвольных постоянных C_1 и C_2 , чтобы соответствующее частное решение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ удовлетворяло заданным начальным условиям.

Подставляя начальные условия в равенство (8), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где обозначено:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}; (y_2)_{x=x_0} = y_{20}; (y'_1)_{x=x_0} = y'_{10}; (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Из системы (9) можно определить C_1 и C_2 , так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

есть определитель Вронского при $x = x_0$ и, следовательно, не равен 0 (в силу линейной независимости решений y_1 и y_2). Частное решение, которое получится из семейства (8) при найденных значениях C_1 и C_2 , удовлетворяет заданным начальным условиям. Таким образом, теорема доказана.

Пример 2. Уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0,$$

коэффициенты которого $a_1 = \frac{1}{x}$ и $a_2 = \frac{1}{x^2}$ непрерывны на любом отрезке, не содержащем точки $x = 0$, допускает частные решения:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(это легко проверить подстановкой в уравнение). Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Замечание 2. Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного уравнения с переменными

коэффициентами. Однако для уравнения с постоянными коэффициентами такой метод существует. Он будет изложен в следующем параграфе. Для случая же уравнений с переменными коэффициентами в главе XVI «Ряды» будут указаны некоторые приемы, которые дадут возможность находить приближенные решения, удовлетворяющие определенным начальным условиям.

Здесь мы докажем теорему, которая позволяет находить общее решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, если известно одно его частное решение. Так как иногда удается найти или угадать одно частное решение непосредственно, то эта теорема во многих случаях может оказаться полезной.

Теорема 7. Если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, то нахождение общего решения сводится к интегрированию функций.

Доказательство. Пусть y_1 есть известное частное решение уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Найдем другое частное решение данного уравнения так, чтобы y_1 и y_2 были линейно независимы. Тогда общее решение выразится формулой $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. На основании формулы (7) (см. доказательство теоремы 4) можно написать:

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1 dx}.$$

Таким образом, для определения y_2 мы получаем линейное уравнение первого порядка. Проинтегрируем его следующим образом. Разделим все члены на y_1^2 :

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx}$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx};$$

отсюда

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_2.$$

Так как мы ищем частное решение, то, положив $C_2 = 0$, $C = 1$, получаем:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (10)$$

Очевидно, что y_1 и y_2 — линейно независимые решения, так как $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (11)$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение имеет частное решение $y_1 = x$. Найдем второе частное решение y_2 так, чтобы y_1 и y_2 были линейно независимы.

Заметив, что в нашем случае $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, на основании формулы (10) получаем:

$$\begin{aligned} y &= x \int e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}} dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \\ &= x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right).$$

§ 21. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

где p и q — постоянные действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно, как было доказано выше, найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \quad \text{где } k = \text{const}; \quad (2)$$

тогда

$$y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (1), находим:

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то, значит,

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (3), то e^{kx} будет решением уравнения (1). Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* по отношению к уравнению (1).

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня: обозначим их через k_1 и k_2 . При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны следующие случаи:

I. k_1 и k_2 — действительные и притом не равные между собой числа ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 и k_2 — комплексные числа;

III. k_1 и k_2 — действительные равные числа ($k_1 = k_2$).

Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$. В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример 1. Дано уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2};$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Общий интеграл есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II. Корни характеристического уравнения комплексные. Так как комплексные корни входят попарно сопряженными, то обозначим:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \quad (4)$$

Это — комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1) (см. § 4 гл. VII).

Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента

$$y = u(x) + iv(x) \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению (1), то этому уравнению удовлетворяют функции $u(x)$ и $v(x)$.

Действительно, подставляя выражение (5) в уравнение (1), будем иметь:

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

или

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Но комплексная функция равняется нулю тогда и только тогда, когда равны нулю действительная часть и мнимая часть, т. е.

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Мы и доказали, что $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнения.

Перепишем комплексные решения (4) в виде суммы действительной и мнимой части:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

По доказанному частными решениями уравнения (1) будут действительные функции

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6')$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (6'')$$

Функции $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ линейно независимы, так как

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \text{const.}$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = A\bar{y}_1 + B\bar{y}_2 = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \quad (7)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Пример 2. Дано уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Построить график.

Решение. 1) Напишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

и найдем его корни:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

Следовательно, общий интеграл есть

$$y = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

2) Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, и определим соответствующие значения A и B . На основании первого условия находим:

$$0 = e^{-0} (A \cos 2 \cdot 0 + B \sin 2 \cdot 0), \text{ откуда } A = 0.$$

Заметив, что $y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \sin 2x$, из второго условия получаем:

$$1 = 2B, \text{ т. е. } B = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомое частное решение есть

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

График его показан на рисунке 267.

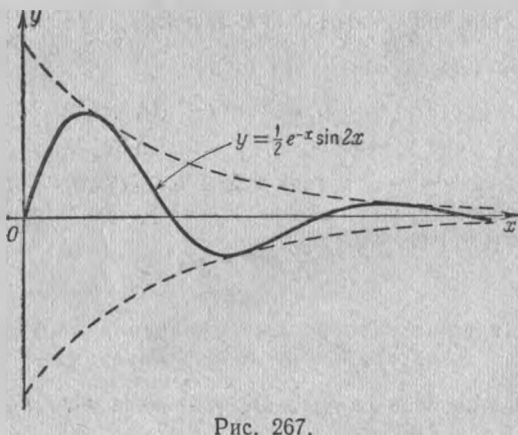


Рис. 267.

III. Корни характеристического уравнения действительные и равные. В этом случае $k_1 = k_2$.

Одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым (функция $e^{k_2 x}$ тождественно равна $e^{k_1 x}$ и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Будем искать второе частное решение в виде

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x},$$

где $u(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Подставляя выражения производных в уравнение (1), получаем:

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p) u' + (k_1^2 + pk_1 + q) u] = 0.$$

Так как k_1 — кратный корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Кроме того, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ или $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Следовательно, для того чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1 x} u'' = 0$ или $u'' = 0$. Интегрируя, получаем $u = Ax + B$. В частности, можно положить $A = 1$, $B = 0$; тогда $u = x$. Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять:

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Это решение линейно независимо с первым, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$

Поэтому общим интегралом будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

Пример 3. Дано уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Пишем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$. Находим его корни: $k_1 = k_2 = 2$. Общим интегралом будет:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

§ 22. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение n -го порядка:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Будем предполагать, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные. Прежде чем указывать метод решения уравнения (1), введем определение, нужное нам для дальнейшего.

Определение 1. Если для всех x отрезка $[a, b]$ имеет место равенство

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x),$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — постоянные числа, не все равные нулю, то говорят, что $\varphi_n(x)$ выражается линейно через функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

Определение 2. n функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ называются линейно независимыми, если никакая из этих функций линейно не выражается через остальные.

Замечание 1. Из определений следует, что если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы, то найдутся постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ не все равные нулю, такие, что для всех x отрезка $[a, b]$ будет выполняться тождество

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Примеры:

1. Функции $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ линейно зависимы, так как при $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{3}$ имеет место тождество

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_33e^x \equiv 0.$$

2. Функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ линейно независимы, так как ни при каких C_1, C_2, C_3 , одновременно не равных нулю, выражение

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

не будет тождественно равно нулю.

3. Функции $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}, \dots$, где $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ — различные числа, линейно независимы. (Это утверждение мы приводим без доказательства.)

Перейдем теперь к решению уравнения (1). Для этого уравнения справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ являются линейно независимыми решениями уравнения (1), то его общее решение есть

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (2)$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Если коэффициенты уравнения (1) постоянны, то общее решение находится так же, как и в случае уравнения второго порядка.

1) Составляем характеристическое уравнение

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2) Находим корни характеристического уравнения

$$k_1, k_2, \dots, k_n.$$

3) По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения, руководствуясь тем, что:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx} ;

- б) каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ и $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$;
 в) каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно независимых частных решений

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx};$$

- г) каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ кратности μ соответствуют 2μ частных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Этих частных решений будет равно столько, какова степень характеристического уравнения (т. е. столько, каков порядок данного линейного дифференциального уравнения). Можно доказать, что эти решения линейно независимы.

- 4) Найдя n линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Пишем общий интеграл:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \sin x,$$

где C_1, C_2, A, B — произвольные постоянные.

Замечание 2. Из изложенного следует, что вся трудность решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами заключается в решении характеристического уравнения.

§ 23. Неоднородные линейные уравнения второго порядка

Пусть имеем неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (1)$$

Структура общего решения такого уравнения (1) определяется следующей теоремой:

Теорема 1. Общее решение неоднородного уравнения (1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого

уравнения $\bar{y}''$ и общего решения y^* соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Нужно доказать, что сумма

$$y = \bar{y} + y^* \quad (3)$$

есть общее решение уравнения (1). Докажем сначала, что функция (3) есть решение уравнения (1).

Подставляя сумму $\bar{y} + y^*$ в уравнение (1) вместо y , будем иметь:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1(\bar{y} + y^*)' + a_2(\bar{y} + y^*) = f(x)$$

или

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \quad (4)$$

Так как $\bar{y}$ есть решение уравнения (2), то выражение, стоящее в первых скобках, тождественно равно нулю. Так как y^* есть решение уравнения (1), то выражение, стоящее во вторых скобках, равно $f(x)$. Следовательно, равенство (4) является тождеством. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь, что выражение (3) есть общее решение уравнения (1), т. е. докажем, что входящие в него произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

каковы бы ни были числа x_0 , y_0 и y'_0 (лишь бы x_0 было взято из той области, где функции a_1 , a_2 и $f(x)$ непрерывны).

Заметив, что $\bar{y}$ можно представить в форме

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения (2), а C_1 и C_2 — произвольные постоянные, можем переписать равенство (3) в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \quad (3')$$

Тогда на основании условий (5) будем иметь *):

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*'} = y'_0.$$

*) Здесь y_{10} , y_{20} , y_0^* , y'_{10} , y'_{20} , $y_0^{*'}$ обозначают числовые значения функций y_1 , y_2 , y^* , y'_1 , y'_2 , $y^{*'}$ при $x = x_0$.

Из этой системы уравнений нужно определить C_1 и C_2 . Переписав систему в виде

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0'^*, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

замечаем, что определитель этой системы есть определитель Вронского для функций y_1 и y_2 в точке $x = x_0$. Так как эти функции, по условию, линейно независимы, то определитель Вронского не равен нулю; следовательно, система (6) имеет определенное решение C_1 и C_2 , т. е. существуют такие значения C_1 и C_2 , при которых формула (3) определяет решение уравнения (1), удовлетворяющее данным начальным условиям. Теорема полностью доказана.

Таким образом, если известно общее решение y однородного уравнения (2), то основная задача при интегрировании неоднородного уравнения (1) состоит в нахождении какого-либо его частного решения y^* .

Укажем общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных. Напишем общее решение однородного уравнения (2)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (7)$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (1) в форме (7), рассматривая C_1 и C_2 как некоторые пока неизвестные функции от x .

Продифференцируем равенство (7):

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

Подберем искомые функции C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0. \quad (8)$$

Если учесть это дополнительное условие, то первая производная y' примет вид

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Дифференцируя теперь это выражение, найдем y'' :

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2.$$

Подставляя y , y' и y'' в уравнение (1), получим:

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + a_1 (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

или

$$C_1 (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + C_2 (y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Выражения, стоящие в первых двух скобках, обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 — решения однородного уравнения. Следовательно, последнее равенство принимает вид

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \quad (9)$$

Таким образом, функция (7) будет решением неоднородного уравнения (1) в том случае, если функции C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений (8) и (9), т. е. если

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для линейно независимых функций y_1 и y_2 , то он не равен нулю; следовательно, решая систему, мы найдем C_1 и C_2 как определенные функции от x :

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Интегрируя, получим:

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2,$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения C_1 и C_2 в равенство (7), найдем интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$, т. е. общее решение неоднородного уравнения *).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Так как

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \text{то } \ln y' = \ln x + \ln c; \quad y' = cx;$$

итак,

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

Чтобы последнее выражение было решением данного уравнения, надо определить C_1 и C_2 как функции от x из системы

$$C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x.$$

Решая эту систему, найдем:

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2} x^2,$$

*) Если положить $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, то получим частное решение уравнения (1).

откуда в результате интегрирования получаем:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Подставляя найденные функции в формулу $y = C_1 x^2 + C_2$, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

или $y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

При отыскании частных решений полезно пользоваться результатами следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть неоднородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

таково, что правая часть его есть сумма двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Если y_1 является частным решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x), \quad (11)$$

а y_2 — частным решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x), \quad (12)$$

то $y_1 + y_2$ есть частное решение *) уравнения (10).

Доказательство. Подставляя выражение $y_1 + y_2$ в уравнение (10), получим:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

или

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f_1(x) + f_2(x). \quad (13)$$

Из равенств (11) и (12) следует, что равенство (13) есть тождество. Таким образом, теорема доказана.

§ 24. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеем уравнение

$$y'' + p y' + q y = f(x), \quad (1)$$

где p и q — действительные числа.

В предыдущем параграфе был указан общий метод нахождения решения неоднородного уравнения. В случае уравнения с постоянными коэффициентами частное решение иногда бывает возможно

*) Очевидно, что соответствующая теорема остается справедливой при любом числе слагаемых правой части.

найти проще, не прибегая к интегрированию. Рассмотрим несколько таких возможностей для уравнения (1).

1. Пусть правая часть уравнения (1) представляет собой произведение показательной функции на многочлен, т. е. имеет вид

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \quad (2)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n -й степени. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}. \quad (3)$$

Действительно, подставляя y^* в уравнение (1) и сокращая все члены на множитель $e^{\alpha x}$, будем иметь:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x). \quad (4)$$

$Q_n(x)$ — многочлен степени n , $Q_n'(x)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_n''(x)$ — многочлен степени $n-2$. Таким образом, слева и справа от знака равенства стоят многочлены n -й степени. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x (число неизвестных коэффициентов равно $n+1$), получим систему $n+1$ уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения.

Если бы в этом случае частное решение мы стали искать в форме (3), то в равенстве (4) слева получился бы многочлен $(n-1)$ -й степени, так как коэффициент при $Q_n(x)$, т. е. $\alpha^2 + p\alpha + q$, равен нулю, а многочлены $Q_n'(x)$ и $Q_n''(x)$ имеют степень, меньшую чем n . Следовательно, ни при каких $A_0, A_1, \dots, A_n$ равенство (4) не было бы тождеством. Поэтому в рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде многочлена $(n+1)$ -й степени, но без свободного члена (так как свободный член этого многочлена исчезнет при дифференцировании)*):

$$y^* = x Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда в результате подстановки в дифференциальное уравнение функции $Q_n(x) e^{\alpha x}$ степень многочлена понижается на две единицы. Действительно, если α — корень характеристического урав-

*) Заметим, что все приведенные выше результаты остаются в силе и в том случае, когда α — комплексное число (это следует из правил дифференцирования функции e^{mx} , где m — любое комплексное число; см § 4 гл. VII).

нения, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; кроме того, так как α является двукратным корнем, то $2\alpha = -p$ (так как по известной теореме элементарной алгебры сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком). Итак, $2\alpha + p = 0$.

Следовательно, в левой части равенства (4) останется $Q_n''(x)$, т. е. многочлен $(n-2)$ -й степени. Для того чтобы в результате подстановки получить многочлен степени n , следует частное решение искать в виде произведения $e^{\alpha x}$ на многочлен $(n+2)$ -й степени. При этом свободный член этого многочлена и член в первой степени исчезнут при дифференцировании; поэтому их можно не включать в частное решение.

Итак, в случае, когда α является двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение можно брать в форме

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид xe^{0x} [т. е. вид $P_1(x)e^{0x}$], причем 0 не является корнем характеристического уравнения $k^2 + 4k + 3 = 0$, то частное решение будем искать в форме $y^* = Q_1(x)e^{0x}$, т. е. положим

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, будем иметь:

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

откуда

$$A_0 = \frac{1}{3}; \quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Следовательно,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Общее решение $y = \bar{y} + y^*$ будет

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения найдем легко:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Правая часть заданного уравнения $(x^2 + 1)e^{3x}$ имеет вид

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Так как коэффициент 3 в показателе степени не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \text{ или } y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x} и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1,$$

откуда $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. Следовательно, частное решение

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

и общее решение

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Решение. Здесь правая часть имеет вид $P_1(x)e^{1 \cdot x}$, причем коэффициент 1 в показателе степени является простым корнем характеристического многочлена. Следовательно, частное решение ищем в виде $y^* = xQ_1(x)e^x$, или

$$y^* = x(Ax + B)e^x;$$

подставляя это выражение в уравнение, будем иметь:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x,$$

или

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2,$$

откуда $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Следовательно, частным решением является

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x,$$

а общим

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x.$$

II. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (5)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Этот случай может быть рассмотрен приемом, примененным в предыдущем случае, если перейти от тригонометрических функций к показательным. Заменяя $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ через показательные функции по формулам Эйлера (см. § 5 гл. VII), получим:

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

или

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha + i\beta)x} + \left[\frac{1}{2} P(x) - \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha - i\beta)x}. \quad (6)$$

Здесь в квадратных скобках стоят многочлены, степени которых равняются высшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Таким образом получили правую часть вида, рассмотренного в случае I.

Доказывается (приводить доказательство мы не будем), что можно найти частные решения, не содержащие комплексные числа.

Итак, если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (7)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x , то форма частного решения определяется так:

а) если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (8)$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

б) если число $\alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение пишем в виде

$$y^* = x [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x]. \quad (9)$$

При этом во избежание возможных ошибок надо отметить, что указанные формы частных решений (8) и (9), очевидно, сохраняются и в том случае, когда в правой части уравнения (1) один из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равен нулю, т. е. когда правая часть имеет вид

$$P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ или } Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Рассмотрим, далее, важный частный случай. Пусть правая часть линейного уравнения второго порядка имеет вид

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \quad (7')$$

где M и N — постоянные числа.

а) Если βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \quad (8')$$

б) Если βi является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = x (A \cos \beta x + B \sin \beta x). \quad (9')$$

Отметим, что функция (7') является частным случаем функции (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); функции (8') и (9') являются частными случаями функции (8) и (9).

Пример 4. Найти общий интеграл линейного неоднородного уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения есть

$$\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

где A и B — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя y^* в заданное уравнение, будем иметь:

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим два уравнения для определения A и B :

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

откуда $A = \frac{1}{5}$; $B = \frac{1}{10}$.

Общее решение данного уравнения: $y = \bar{y} + y^*$, т. е.

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{10} \sin x.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = x (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Тогда

$$y^{*'} = 2x (-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = -4x (-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Подставляя эти выражения производных в данное уравнение и приравнявая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему уравнений для определения A и B :

$$4B = 1; \quad -4A = 0,$$

откуда $A=0$; $B=\frac{1}{4}$. Таким образом, общий интеграл данного уравнения:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

Решение. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{2x} (M \cos x + N \sin x),$$

причем $M=3$, $N=0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$. Общее решение однородного уравнения есть

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Так как число $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = e^{2x} (A \cos x + B \sin x).$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим после приведения подобных членов:

$$(2A + 4B) e^{2x} \cos x + (-4A + 2B) e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

Отсюда $A = \frac{3}{10}$; $B = \frac{3}{5}$. Следовательно, частное решение

$$y^* = e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right),$$

а общее

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right).$$

§ 25. Неоднородные линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, f(x)$ — непрерывные функции от x (или постоянные числа).

Пусть нам известно общее решение

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0. \quad (3)$$

Как и в случае уравнения второго порядка, для уравнения (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если y — общее решение однородного уравнения (3), а y^* — частное решение неоднородного уравнения (1), то

$$Y = \bar{y} + y^*$$

есть общее решение неоднородного уравнения.

Таким образом, задача интегрирования уравнения (1), как и в случае уравнения второго порядка, сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения.

Как и в случае уравнения второго порядка, частное решение уравнения (1) можно находить по способу вариации произвольных постоянных, считая в выражении (2) $C_1, C_2, \dots, C_n$ функциями от x .

Составим систему уравнений (ср. § 23):

$$\left. \begin{aligned} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n &= 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n &= 0, \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} &= 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эта система уравнений с неизвестными функциями $C_1', C_2', \dots, C_n'$ имеет вполне определенные решения. (Определитель из коэффициентов при $C_1', C_2', \dots, C_n'$ представляет собой определитель Вронского, составленный для частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного уравнения, а так как эти частные решения, по условию, линейно независимы, то определитель Вронского отличен от нуля.)

Итак, система (4) может быть решена относительно функций $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$. Найдя их и интегрируя, получим:

$$C_1 = \int C'_1 dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int C'_2 dx + \bar{C}_2; \quad \dots; \quad C_n = \int C'_n dx + \bar{C}_n^*$$

где $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ — постоянные интегрирования.

Докажем, что в таком случае выражение

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (5)$$

есть общее решение неоднородного уравнения (1).

Дифференцируем выражение (5) n раз, принимая каждый раз во внимание равенства (4); тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} y^* &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n, \\ y^{*'} &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \dots + C_n y_n', \\ y^{*(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}, \\ y^{*(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + f(x). \end{aligned}$$

Умножая члены первого, второго, ... и, наконец, предпоследнего уравнения, соответственно, на $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$, и складывая, получим:

$$y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \dots + a_n y^* = f(x),$$

так как $y_1, y_2, \dots, y_n$ — частные решения однородного уравнения, и поэтому суммы членов, полученные при сложении по вертикальным столбцам, равны нулю.

Следовательно, функция $y^* = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ [где $C_1, \dots, C_n$ — функции от x , определенные из уравнений (4)] является решением неоднородного уравнения (1), а так как это решение зависит от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, то оно является общим решением.

Таким образом, утверждение доказано.

В случае неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами (ср. § 24) частные решения иногда находятся проще, а именно:

I. Пусть в правой части дифференциального уравнения стоит функция $f(x) = P(x) e^{\alpha x}$, где $P(x)$ — многочлен от x ; тогда надо различать два случая:

а) если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде

$$y^* = Q(x) e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

б) если α есть корень кратности μ характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения можно искать в форме

$$y^* = x^\mu Q(x) e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$.

II. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

где M и N — постоянные числа. Тогда вид частного решения определяется следующим образом:

а) если число βi не есть корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

где A и B — постоянные неопределенные коэффициенты;

б) если число βi есть корень характеристического уравнения кратности μ , то

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

III. Пусть

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x . Тогда:

а) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

б) если число $\alpha + \beta i$ является корнем кратности μ характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x^\mu [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

где $U(x)$ и $V(x)$ имеют тот же смысл, что и в случае а).

Общее замечание к случаям II и III. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos \beta x$ или только $\sin \beta x$, мы должны искать решение в том виде, как было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, отнюдь не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций. В этом мы могли убедиться, рассматривая примеры 4, 5, 6 предыдущего параграфа, а также пример 2, приведенный в этом параграфе.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Находим общее решение однородного уравнения (см. пример 4 § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Дифференцируя y^* четыре раза и подставляя полученные выражения в заданное уравнение, получим:

$$-A_0 x^2 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Следовательно,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Общий интеграл неоднородного уравнения находится по формуле $y = \bar{y} + y^*$, т. е.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения является:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Далее, правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x) = M \cos x + N \sin x,$$

где $M = 5$, $N = 0$.

Так как i является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

Подставляя это выражение в уравнение, найдем:

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

откуда

$$4A = 0, \quad -4B = 5,$$

или $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. Следовательно, частным решением дифференциального уравнения является:

$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x,$$

а общим решением

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 26. Дифференциальное уравнение механических колебаний

В настоящем и следующих параграфах мы рассмотрим одну задачу прикладной механики, исследовав и разрешив ее с помощью линейных дифференциальных уравнений.

Пусть груз массы Q покоится на упругой рессоре (рис. 268). Отклонение груза от положения равновесия обозначим через y . Отклонение вниз будем считать положительным, вверх — отрицательным. В положении равновесия сила веса уравновешивается упругостью пружины. Предположим, что сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, — так называемая восстанавливающая сила — пропорциональна отклонению, т. е. равна $-ky$, где k — некоторая постоянная для данной рессоры величина (так называемая «жесткость рессоры» *).

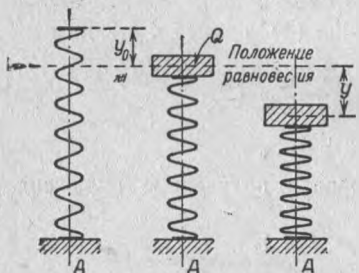


Рис. 268.

*) Рессоры, у которых восстанавливающая сила пропорциональна отклонению, называются рессорами с «линейной характеристикой».

Предположим, что движению груза Q препятствует сила сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения и пропорциональная скорости движения груза относительно нижней точки рессоры, т. е. сила $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, где $\lambda = \text{const} > 0$ (амортизатор). Напишем дифференциальное уравнение движения груза на рессоре. На основании второго закона Ньютона будем иметь:

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

(здесь k и λ — положительные числа). Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (1')$$

где обозначено:

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

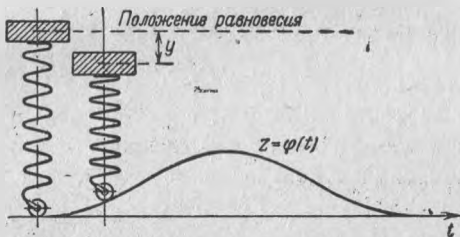


Рис. 269.

Предположим, далее, что нижняя точка рессоры совершает вертикальные движения по закону $z = \varphi(t)$. Это, например, будет иметь место, если нижний конец рессоры прикреплен к катку, который вместе с рессорой и грузом движется по неровности (рис. 269).

В этом случае восстанавливающая сила будет равна не $-ky$, а $-k[y + \varphi(t)]$, сила сопротивления будет $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$, и вместо уравнения (1) мы получим уравнение

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad (2')$$

где обозначено:

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Уравнение (1') называют уравнением *свободных* колебаний, уравнение (2') — уравнением *вынужденных* колебаний.

§ 27. Свободные колебания

Рассмотрим сначала уравнение свободных колебаний

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Напишем соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

и найдем его корни:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Пусть $\frac{p^2}{4} > q$. Тогда корни k_1 и k_2 — действительные отрицательные числа. Общее решение выражается через показательные функции:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0). \quad (1)$$

Из этой формулы следует, что отклонение y при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t \rightarrow \infty$. В данном случае колебаний не будет, так как силы сопротивления велики по сравнению с коэффициентом жесткости рессоры k .

2) Пусть $\frac{p^2}{4} = q$; тогда корни k_1 и k_2 равны между собой (и равны отрицательному числу $-\frac{p}{2}$). Поэтому общее решение будет:

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2} t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2} t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{p}{2} t}. \quad (2)$$

Здесь отклонение также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, однако не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию сомножителя $C_1 + C_2 t$).

3) Пусть $p = 0$, т. е. отсутствует сила сопротивления. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + q = 0,$$

а его корни равны $k_1 = \beta i$; $k_2 = -\beta i$, где $\beta = \sqrt{q}$. Общее решение:

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \quad (3)$$

В последней формуле произвольные постоянные C_1 и C_2 заменим другими. Именно, введем постоянные A и φ_0 , связанные с C_1 и C_2 соотношениями:

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

A и φ_0 через C_1 и C_2 определяются так:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в формулу (3), будем иметь:

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t$$

или

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0). \quad (3')$$

Колебания в этом случае называются *гармоническими*. Интегральными кривыми являются синусоиды. Промежуток времени T , за который аргумент синуса изменяется на 2π , называется *периодом* колебаний; в данном случае $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Частотой колебания называется число колебаний за время 2π ; в данном случае частота равна β ; A — величина наибольшего отклонения

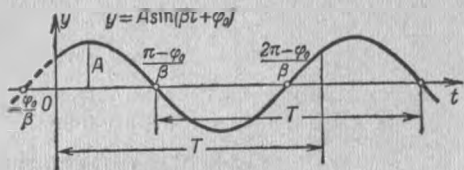


Рис. 270.

от положения равновесия называется *амплитудой* колебания; φ_0 называется *начальной фазой*. График функции (3') изображен на рисунке 270.

4) Пусть $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$.

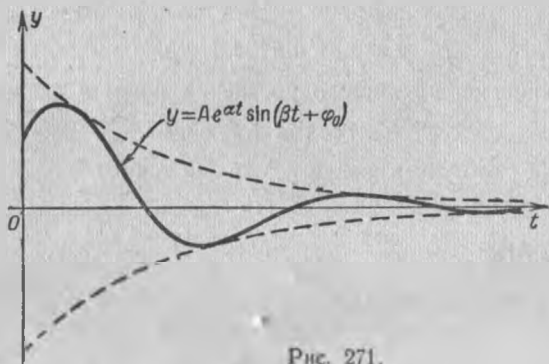


Рис. 271.

В этом случае корни характеристического уравнения — комплексные числа:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (4)$$

или

$$y = Ae^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0). \quad (4')$$

Здесь в качестве амплитуды приходится рассматривать величину $Ae^{\alpha t}$, зависящую от времени. Так как $\alpha < 0$, то она стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. здесь мы имеем дело с *затухающими колебаниями*. График затухающих колебаний изображен на рисунке 271.

§ 28. Вынужденные колебания

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(t).$$

Рассмотрим практически важный случай, когда возмущающая внешняя сила является периодической и изменяется по закону

$$f(t) = a \sin \omega t;$$

тогда уравнение примет вид

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t. \quad (1)$$

1) Предположим сначала, что $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$, т. е. корни характеристического уравнения — комплексные числа $\alpha \pm i\beta$. В этом случае (см. формулы (4) и (4') § 27) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (2)$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставляя это выражение y^* в исходное дифференциальное уравнение, находим значения M и N :

$$M = \frac{-p\omega a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}, \quad N = \frac{(q - \omega^2)a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Прежде чем подставить найденные значения M и N в равенство (3), введем новые постоянные A^* и φ^* , положив

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

т. е.

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения можно записать в форме

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin(\omega t + \varphi^*),$$

или окончательно

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Общий интеграл уравнения (1) равен $y = \bar{y} + y^*$, т. е.

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \Phi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \Phi^*).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части (решение однородного уравнения), представляет затухающие колебания; при увеличении t он убывает, и следовательно, через некоторый промежуток времени главное значение будет иметь второй член, определяющий вынужденные колебания. Частота ω этих колебаний равна частоте внешней силы $f(t)$; амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем меньше p и чем ближе ω^2 к q .

Исследуем подробнее зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты ω при различных значениях p . Для этого обозначим амплитуду вынужденных колебаний через $D(\omega)$:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}}.$$

Положим $q = \beta_1^2$ (при $p = 0$ β_1 равнялась бы частоте собственных колебаний). Тогда

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2 \omega^2}{\beta_1^2 \beta_1^2}}}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

где λ — отношение частоты возмущающей силы к частоте свободных колебаний системы, а постоянная λ не зависит от возмущающей силы. Тогда величина амплитуды будет выражаться формулой

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}}. \quad (4)$$

Найдем максимум этой функции. Он, очевидно, будет при том значении λ , при котором квадрат знаменателя имеет минимум. Но минимум функции

$$\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2} \quad (5)$$

достигается при

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

и равен

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Следовательно, максимальная величина амплитуды равна

$$\bar{D}_{\max} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Графики функции $\bar{D}(\lambda)$ при различных значениях γ показаны на рисунке 272 (для определенности при построении графиков положено $\alpha=1$, $\beta_1=1$). Эти кривые называются кривыми резонанса.

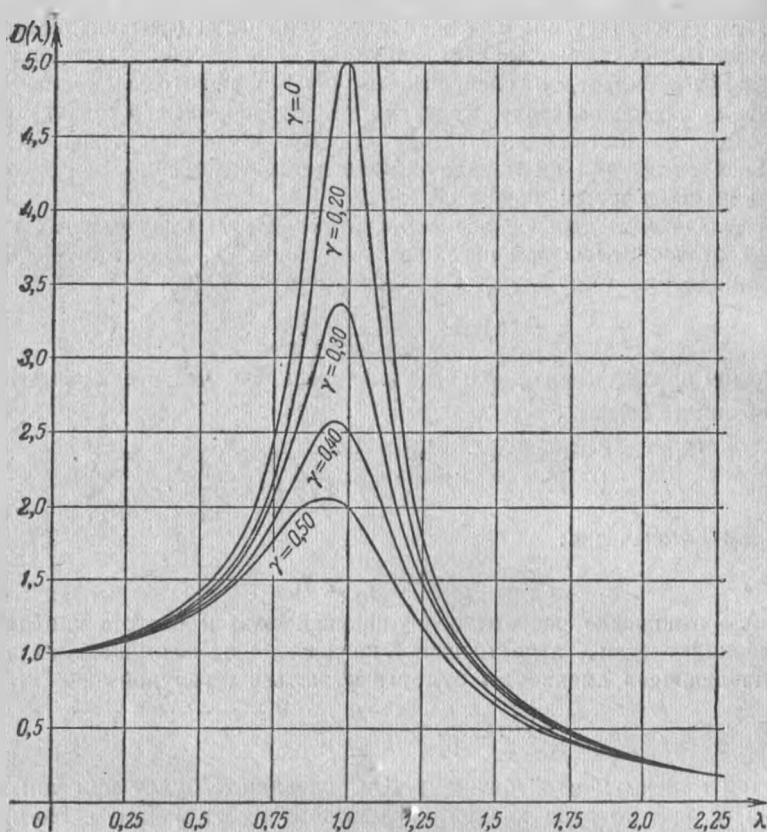


Рис. 272.

Из формулы (5) следует, что при малых γ максимальное значение амплитуды достигается при значениях λ , близких к единице, т. е. когда частота внешней силы близка к частоте свободных колебаний. Если $\gamma=0$ (следовательно, $p=0$), т. е. если отсутствует сопротивление движению, амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает при $\lambda \rightarrow 1$, т. е. при $\omega \rightarrow \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ (\gamma=0)}} \bar{D}(\lambda) = \infty.$$

При $\omega^2 = q$ имеет место явление резонанса.

2) Предположим теперь, что $p=0$, т. е. рассмотрим уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии периодической внешней силы:

$$y'' + qy = a \sin \omega t.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Если $\beta \neq \omega$, т. е. если частота внешней силы не равна частоте собственных колебаний, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, найдем:

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

Общее решение есть

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t.$$

Таким образом, движение получается в результате наложения собственного колебания с частотой β и вынужденного колебания с частотой ω .

Если $\beta = \omega$, т. е. частота собственных колебаний совпадает с частотой внешней силы, то функция (3) не является решением уравнения (6). В этом случае, в соответствии с результатами § 24, частное решение надо искать в форме

$$y^* = t(M \cos \omega t + N \sin \omega t). \quad (7)$$

Подставляя это выражение в уравнение, найдем M и N :

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \quad N = 0.$$

Следовательно,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t.$$

Общее решение будет иметь вид:

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t.$$

Второй член, стоящий в правой части, показывает, что в этом случае амплитуда колебания неограниченно возрастает при неограниченном

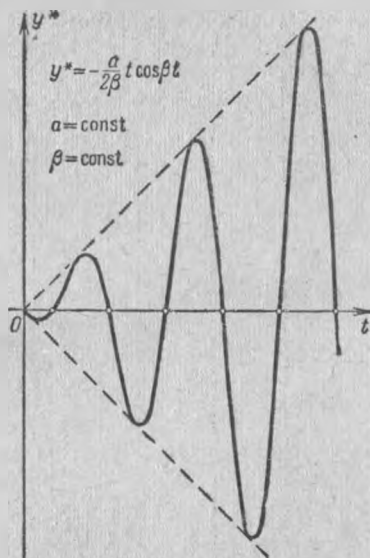


Рис. 273.

возрастании времени t . Это явление, имеющее место при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой внешней силы, называется *резонансом*.

График функции y^* изображен на рисунке 273.

Упражнения к главе XIII

Показать, что указанные функции, зависящие от произвольных постоянных, удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

Функции

Дифференциальные уравнения

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$,

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

2. $y = Cx + C - C^2$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

3. $y^2 = 2Cx + C^2$.

$$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1+C}$.

$$xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}.$$

5. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{dy}{dx} = 0.$$

6. $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x.$$

7. $y = C_1 e^{a \arcsin x} + C_2 e^{-a \arcsin x}$.

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Принтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

9. $y dx - x dy = 0$. *Омс.* $y = Cx$. 10. $(1+u) v du + (1-v) u dv = 0$. *Омс.* $\ln uv + u - v = C$. 11. $(1+y) dx - (1-x) dy = 0$. *Омс.* $(1+y)(1-x) = C$. 12. $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$. *Омс.* $\frac{t+x}{tx} +$

$+\ln \frac{x}{t} = C$. 13. $(y-a) dx + x^2 dy = 0$. *Омс.* $(y-a) = Ce^{\frac{1}{x}}$. 14. $z dt -$

$-(t^2 - a^2) dz = 0$. *Омс.* $z^2 a = C \frac{t-a}{t+a}$. 15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Омс.* $x = \frac{y+C}{1-Cy}$.

16. $(1+s^2) dt - \sqrt{t} ds = 0$. *Омс.* $2\sqrt{t} - \arctg s = C$. 17. $d\rho + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$. *Омс.* $\rho = C \cos \theta$. 18. $\sin \theta \cos \varphi d\theta - \cos \theta \sin \varphi d\varphi = 0$. *Омс.* $\cos \varphi = C \cos \theta$.

19. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\theta + \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\varphi = 0$. *Омс.* $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = C$. 20. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\varphi +$

$+ \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$. *Омс.* $\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = C$. 21. $(1+x^2) dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0$. *Омс.* $\arcsin y - \arctg x = C$. 22. $\sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0$. *Омс.* $y \sqrt{1-x^2} -$

$-x \sqrt{1-y^2} = C$. 23. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0$. *Омс.* $\operatorname{tg} y =$

$= C(1-e^x)^3$. 24. $(x-y^2 x) dx + (y-x^2 y) dy = 0$. *Омс.* $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + C$.

Задачи на составление дифференциальных уравнений

25. Доказать, что кривая, у которой угловой коэффициент касательной в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола. *Омс.* $y = ax^2 + C$.

26. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0, -2)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы. *Отв.* $y = e^x - 3$.

27. Найти кривую, проходящую через точку $(1, 1)$, чтобы угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки. *Отв.* $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

28. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в любой точке в n раз более углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. *Отв.* $y = Cx^n$.

29. Через точку $(2, 1)$ провести кривую, для которой касательная в любой точке совпадает с направлением радиуса вектора, проведенного из начала координат в ту же точку. *Отв.* $y = \frac{1}{2}x$.

30. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла между радиусом-вектором и касательной равен обратной величине радиуса-вектора, взятой с обратным знаком. *Отв.* $r(\theta + C) = 1$.

31. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла, образуемого радиусом-вектором с касательной, равен квадрату радиуса-вектора. *Отв.* $r^2 = (\theta + C)^2$.

32. Доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку, есть окружность.

33. Найти такую кривую, чтобы в каждой ее точке длина подкасательной равнялась удвоенной абсциссе. *Отв.* $y = C\sqrt{x}$.

34. Найти кривую, для которой радиус-вектор равен длине касательной между точкой касания и осью x .

Решение. По условиям задачи $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, откуда $\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем два семейства кривых: $y = Cx$ и $y = \frac{C}{x}$.

35. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20°C и тело в течение 20 мин. охлаждается со 100° до 60°C , то через сколько времени его температура понизится до 30°C ?

Решение. Дифференциальное уравнение задачи $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. Интегрируя, находим: $T - 20 = Ce^{kt}$; $T = 100$ при $t = 0$; $T = 60$ при $t = 20$; поэтому $C = 80$; $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, следовательно, $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Полагая $T = 30$, найдем $t = 60$ мин.

36. В какое время T вода вытечет через отверстие $0,5\text{ см}^2$ на дне конической воронки высотой 10 см с углом при вершине $d = 60^\circ$?

Решение. Подсчитаем двумя способами объем воды, вытекшей за время между моментами t и $t + \Delta t$. При постоянной скорости v за 1 сек через отверстие вытекает цилиндр воды с основанием $0,5\text{ см}^2$ и высотой v , а за время Δt вытекает объем воды dv , равный $-dv = -0,5v\,dt = -0,3\sqrt{2gh}\,dt$ *).

С другой стороны, вследствие утечки высота воды получает отрицательное «приращение» dh , и дифференциал объема вытекшей воды равен

$$-dv = \pi r^2 dh = \frac{\pi}{3}(h + 0,7)^2 dh.$$

* Скорость v истечения воды из отверстия, находящегося на расстоянии h от свободной поверхности, дается формулой $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести.

Таким образом,

$$\frac{\pi}{3} (h + 0,7)^3 dh = -0,3 \sqrt{2gh} dt,$$

отсюда

$$t = 0,0315 (10^{5/2} - h^{5/2}) + 0,0732 (10^{3/2} - h^{3/2}) + 0,078 (\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Полагая $h=0$, получаем время истечения $T=12,5$ сек.

37. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения ω . Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин. вращается со скоростью 60 об/мин. *Омс.* $\omega = 100 (2/3)^t$ об/мин.

38. Допустим, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря это давление равно 1 кг на 1 см², а на высоте 500 м 0,92 кг на 1 см².

У к а з а н и е. Воспользоваться законом Бойля — Мариотта, в силу которого плотность газа пропорциональна давлению. Дифференциальное уравнение задачи $dp = -k\rho dh$, откуда $p = e^{-0,00017h}$. *Омс.* $p = e^{-0,00017h}$.

Принтегрировать следующие однородные дифференциальные уравнения:

39. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$. *Омс.* $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 40. $(x+y)dx + xdy = 0$. *Омс.* $x^2 + 2xy = C$. 41. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.

Омс. $\ln(x^2 + y^2)^{1/2} - \arctg \frac{y}{x} = C$. 42. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

Омс. $1 + 2Cg - C^2x^2 = 0$. 43. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$. *Омс.* $(x+y)^2 \times$

$\times (2x+y)^3 = C$. 44. $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0$. *Омс.* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = C$ или

$s = t \ln^2 \frac{C}{t}$. 45. $(t-s)dt + tds = 0$. *Омс.* $te^{\frac{t}{s}} = C$ или $s = t \ln \frac{C}{t}$.

46. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$. *Омс.* $y = x^{\frac{3}{2}/\sqrt{3 \ln Cx}}$. 47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) =$

$= y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$. *Омс.* $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

Принтегрировать дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным: 48. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$. *Омс.* $(x+y-1)^2 \times$

$\times (x-y-1)^2 = C$. 49. $(x+2y+1)dx - (2x+4y+3)dy = 0$. *Омс.* $\ln(4x+8y+5) + 8y - 4x = C$. 50. $(x+2y+1)dx - (2x-3)dy = 0$.

Омс. $\ln(2x-3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$.

51. Определить кривую, поднормаль которой есть среднее арифметическое между абсциссой и ординатой. *Омс.* $(x-y)^2 (x+2y) = C$.

52. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy , к радиусу-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условиям задачи $\frac{y-x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} = m$, откуда $\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}$.

53. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси Ox , к радиусу-вектору равно постоянной величине.

Решение. По условию задачи $\frac{x+y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, откуда $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$.

54. Определить кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy , равен $a \operatorname{sc} \theta$, где θ —угол между радиусом-вектором и осью x .

Решение. Так как $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ и по условию задачи $y - x \frac{dy}{dx} = a \operatorname{sc} \theta$, то получаем:

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \text{ откуда } y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x}+b} - e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)} \right].$$

55. Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

Решение. Отрезок, отсекаемый нормалью на оси Oy , равен $y + \frac{x}{y}$; поэтому, по условию задачи, имеем:

$$y + \frac{x}{y} = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ откуда } x^2 = C(2y+C).$$

56. Найти форму зеркала, которое все лучи, выходящие из одной и той же точки O , отражало бы параллельно данному направлению.

Решение. За ось x принимаем данное направление, точку O за начало координат. Пусть OM —падающий луч, MP —отраженный, MQ —нормаль к искомой кривой:

$$\alpha = \beta; OM = OQ, NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2+y^2} = y \operatorname{ctg} \beta = y \frac{dy}{dx},$$

откуда $y dy = (-x + \sqrt{x^2+y^2}) dx$; интегрируя, имеем: $y^2 = C^2 + 2Cx$.

Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения:

$$57. y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3. \text{ Отв. } 2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2. \quad 58. y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

$$\text{Отв. } y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}. \quad 59. (x-x^3)y' + (2x^2-1)y - ax^3 = 0.$$

$$\text{Отв. } y = ax + Cx \sqrt{1-x^2}. \quad 60. \frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1. \text{ Отв. } s = \sin t + C \cos t.$$

$$61. \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t. \text{ Отв. } s = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}. \quad 62. y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n.$$

$$\text{Отв. } y = x^n (e^x + C). \quad 63. y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}. \text{ Отв. } x^n y = ax + C. \quad 64. y' + y = \frac{1}{e^x}.$$

$$\text{Отв. } e^x y = x + C. \quad 65. y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0. \text{ Отв. } y = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}} \right).$$

Проинтегрировать уравнения Бернулли:

$$66. y' + xy = x^2 y^3. \text{ Отв. } y^3 (x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1. \quad 67. (1-x^2)y' - xy - axy^3 = 0.$$

$$\text{Отв. } (C \sqrt{1-x^2} - a)y = 1. \quad 68. 3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0. \text{ Отв. } a^2 y^3 = Ce^{ax} -$$

$$-a(x+1) - 1. \quad 69. y' (x^2 y^3 + xy) = 1. \text{ Отв. } x \left[(2-y^2) e^{\frac{1}{2}y^2} + C \right] = e^{\frac{1}{2}y^2}.$$

$$70. (y \ln x - 2)y dx = x dy. \text{ Отв. } y(Cx + \ln x + 1) = 1. \quad 71. y - y' \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{sc} x. \text{ Отв. } y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sc} x}{\sin x + C}.$$

Проинтегрировать следующие уравнения в полных дифференциалах:

72. $(x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = 0$. *Отв.* $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$. 73. $(y - 3x^2) dx - (4y - x) dy = 0$. *Отв.* $2y^2 - xy + x^2 = C$. 74. $(y^2 - x) y' = y$. *Отв.* $y^4 = 4xy + C$. 75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$. *Отв.* $\ln \frac{y}{x} \frac{xy}{x-y} = C$. 76. $2(3xy^2 + 2x^2) dx + 3(2x^2y + y^2) dy = 0$. *Отв.* $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$. 77. $\frac{x dx + (2x + y) dy}{(x + y)^2} = 0$. *Отв.* $\ln(x + y) - \frac{x}{x + y} = C$. 78. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^3} \right) dx = \frac{2y dy}{x^2}$. *Отв.* $x^3 + y^2 = Cx^2$. 79. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0$. *Отв.* $\frac{xy}{x - y} = C$. 80. $x dx + y dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$. *Отв.* $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$.

81. Определить кривую, обладающую тем свойством, что произведение квадрата расстояния любой ее точки от начала координат на отрезок, отсекаемый на оси абсцисс нормалью в этой точке, равно кубу абсциссы этой точки. *Отв.* $y^2(2x^2 + y^2) = C$.

82. Найти огибающую следующих семейств линий: а) $y = Cx + C^3$. *Отв.* $x^2 + 4y = 0$. б) $y = \frac{x}{C} + C^2$. *Отв.* $27x^2 = 4y^3$. в) $\frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2$. *Отв.* $27y = x^3$. д) $C^2x + Cy - 1 = 0$. *Отв.* $y^2 + 4x = 0$. е) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. *Отв.* $x = 0$; $y = 0$. ф) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. *Отв.* $y^2 = 4x + 4$. г) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. *Отв.* $(x - y)^2 = 8$. г) $Cx^2 + C^2y = 1$. *Отв.* $x^4 + 4y = 0$.

83. Прямая перемещается так, что сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, сохраняет постоянную величину a . Составить уравнение огибающей всех положений прямой. *Отв.* $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (парабола).

84. Найти огибающую семейства прямых, на которых оси координат отсекают отрезок постоянной длины a . *Отв.* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат удвоенные ординаты параболы $y^2 = 2px$. *Отв.* $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$.

86. Найти огибающую семейства окружностей, центры которых лежат на параболе $y^2 = 2px$, причем все окружности семейства проходят через вершину этой параболы. *Отв.* Циссоида $x^2 + y^2(x + 2p) = 0$.

87. Найти огибающую семейства окружностей, диаметрами которых служат перпендикулярные к оси x хорды эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. *Отв.* $\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. Найти эволюту эллипса $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ как огибающую его нормалей. *Отв.* $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Проинтегрировать следующие уравнения (уравнения Лагранжа):

89. $y = 2xy' + y'^2$. *Отв.* $x = \frac{C}{3\rho^2} - \frac{2}{3}\rho$; $y = \frac{2C - \rho^3}{3\rho}$. 90. $y = xy'^2 + y'^2$.

Отв. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Особое решение: $y = 0$. 91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. *Отв.* $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p + 1)e^{-p} - p^2 + 2$. 92. $y = yy'^2 + 2xy'$. *Отв.* $4Cx = 4C^2 - y^2$. 93. Найти кривую, имеющую постоянную нормаль. *Отв.* $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Особое решение: $y = \pm a$.

Проинтегрировать данные уравнения Клеро: 94. $y = xy' + y' - y'^2$. *Отв.* $y = Cx + C - C^2$. Особое решение: $4y = (x + 1)^2$. 95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. *Отв.* $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Особое решение: $y^2 - x^2 = 1$. 96. $y = xy' + y'$.

Отв. $y = Cx + C$. 97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. Отв. $y = Cx + \frac{1}{C}$. Особое решение:

$y^2 = 4x$. 98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. Отв. $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Особое решение: $y^2 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. Площадь треугольника, образованного касательной к искомой кривой и осями координат, есть величина постоянная. Найти кривую. Отв. Равнобокая гипербола $4xy = \pm a^2$. Кроме того, любая прямая семейства $y = Cx \pm a\sqrt{C}$.

100. Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a . Отв. $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Особое решение $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Найти кривую, касательные к которой образуют на осях отрезки, сумма которых равна $2a$. Отв. $y = Cx - \frac{2aC}{1-C}$. Особое решение: $(y-x-2a)^2 = 8ax$.

102. Найти кривые, для которых произведение расстояния любой касательной до двух данных точек постоянно. Отв. Эллипсы и гиперболы. (Ортогональные и изогональные траектории.)

103. Найти ортогональные траектории семейства кривых $y = ax^n$. Отв. $x^2 + ny^2 = C$.

104. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y^2 = 2p(x-a)$ (a — параметр семейства). Отв. $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Найти ортогональные траектории семейства кривых $x^2 - y^2 = a$ (a — параметр). Отв. $y = \frac{C}{x}$.

106. Найти ортогональные траектории семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2ax$. Отв. Окружности: $y = C(x^2 + y^2)$.

107. Найти ортогональные траектории равных парабол, касающихся в вершине данной прямой. Отв. Если $2p$ — параметр парабол и данная прямая взята за ось Oy , то уравнение траектории будет $y + C = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{p}} x^{3/2}$.

108. Найти ортогональные траектории циссоид $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$. Отв. $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. Найти ортогональные траектории лемнискат $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$. Отв. $(x^2 + y^2)^3 = Cxy$.

110. Найти изогональные траектории семейства кривых: $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, где a — переменный параметр, если постоянный угол, который образует траектория с линиями семейства, равен $\omega = 60^\circ$.

Решение. Находим дифференциальное уравнение семейства $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ и заменяем y' выражением $q = \frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}$. Если $\omega = 60^\circ$, то $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'}$, и мы получаем дифференциальное уравнение $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y' \sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. Общий интеграл $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ дает искомое семейство траекторий.

111. Найти изогональные траектории семейства парабол $y^2 = 4Cx$, когда $\omega = 45^\circ$. Отв. $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2y-x}{x\sqrt{2}}}$.

112. Найти изогональные траектории семейства прямых $y=Cx$ для случая

$$\omega=30^\circ, 45^\circ. \text{ Отв. } \text{Логарифмические спирали} \quad \begin{cases} x^2+y^2=e^{2\sqrt{3}\arctg\frac{y}{x}}; \\ x^2+y^2=e^{2\arctg\frac{y}{x}}. \end{cases}$$

113. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Исключить C_1 и C_2 . Отв. $y''-y=0$.

114. Написать дифференциальное уравнение всех окружностей, лежащих в одной плоскости. Отв. $(1+y'^2)y''-3y'y'^2=0$.

115. Написать дифференциальное уравнение всех центральных кривых второго порядка, главные оси которых совпадают с осями Ox, Oy . Отв. $x(yy''+y'^2)-y'y=0$.

116. Даны дифференциальные уравнения $y'''-2y''-y'+2y=0$ и его общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти частное решение, если при $x=0$ имеем $y=1, y'=0, y''=-1$. Отв. $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

117. Даны дифференциальные уравнения $y'=\frac{1}{2y}$ и его общее решение

$$y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

Требуется: 1) проверить, что данное семейство кривых действительно является общим решением; 2) найти интегральную кривую, проходящую через точку (1, 2), если касательная в этой точке составляет с положительным направлением оси Ox угол 45° . Отв. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Принтегрировать некоторые простейшие типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка.

118. $xy''=2$. Отв. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=1; y=1; y'=1; y''=3$. 119. $y^{(n)}=x^m$. Отв. $y=\frac{m!}{(m+n)!}x^{m+n}+C_1x^{n-1}+\dots+C_{n-1}x+C_n$.

120. $y'=a^2y$. Отв. $ax=\ln(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1})+C_2$ или $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$.

121. $y'=\frac{a}{y^2}$. Отв. $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

В примерах 122—125 выделить частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x=0, y=-1; y'=0$. 122. $xy''-y'=x^2e^x$. Отв. $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Частное решение: $y=e^x(x-1)$.

123. $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. Отв. $y+C_1\ln y=x+C_2$. Частное решение: $y=-1$.

124. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. Отв. $y=C_2+C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Частное решение: $y=2\sin x-\sin x\cos x-x-1$. 125. $(y'')^2+(y')^2=a^2$. Отв. $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Частные решения: $y=a-1-a\cos x; y=a\cos x-(a+1)$. (У к а з а н и е. Параметрическая форма $y'=a\cos t, y'=a\sin t$.) 126. $y'=\frac{1}{2y}$. Отв. $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. 127. $y''=y'^2$.

Отв. $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. 128. $y'y''-3y'^2=0$. Отв. $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Принтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: 129. $y''=9y$. Отв. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

130. $y''+y=0$. Отв. $y=A\cos x+B\sin x$. 131. $y''-y'=0$.

$$\begin{array}{lll} \text{Омс.} & y = C_1 + C_2 e^x. & 132. \quad y'' + 12y = 7y'. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \\ 133. & y'' - 4y' + 4y = 0. & \text{Омс.} \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}. \quad 134. \quad y'' + 2y' + \\ & + 10y = 0. & \text{Омс.} \quad y = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x). \quad 135. \quad y'' + 3y' - 2y = 0. \end{array}$$

$$\text{Омс.} \quad y = C_1 e^{\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} x} + C_2 e^{\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} x}. \quad 136. \quad 4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Омс.} & y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2} x}. & 137. \quad y'' + y' + y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = e^{-\frac{1}{2} x} \times \\ & \times \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]. \end{array}$$

138. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти движение, которое получит один груз, если другой оборвется. *Омс.* $x = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right)$, где a есть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя.

139. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Множитель пропорциональности равен k . Расстояние между центрами равно $2c$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров, на расстоянии a от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точки. *Омс.* $x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$.

$$140. \quad y^{IV} - 5y'' + 4y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

$$141. \quad y'' - 2y' - y' + 2y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}. \quad 142. \quad y'' - 3ay'' + \\ + 3a^2 y' - a^3 y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{ax}. \quad 143. \quad y^{IV} - 4y'' = 0. \\ \text{Омс.} \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x}. \quad 144. \quad y^{IV} + 2y'' + 9y = 0.$$

$$\text{Омс.} \quad y = (C_1 \cos \sqrt{2x} + C_2 \sin \sqrt{2x}) e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2x} + C_4 \sin \sqrt{2x}) e^x.$$

$$145. \quad y^{IV} - 8y'' + 16y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}.$$

$$146. \quad y^{IV} + y = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

147. $y^{IV} - a^4 y = 0$. Найти общее решение и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям при $x_0 = 0$ $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$. *Омс.* Общее решение: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Частное решение: $y_0 = \cos ax$.

Принтегрировать следующие неоднородные линейные дифференциальные уравнения (найти общее решение):

$$148. \quad y'' - 7y' + 12y = x. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} + \frac{12x + 7}{144}. \quad 149. \quad s'' - a^2 s = t + 1. \quad \text{Омс.} \quad s = C_1 e^{at} +$$

$$+ C_2 e^{-at} - \frac{t + 1}{a^2}. \quad 150. \quad y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} -$$

$$- \frac{1}{5} (6 \sin 2x + 2 \cos 2x). \quad 151. \quad y'' - y = 5x + 2. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2.$$

$$152. \quad s'' - 2as' + a^2 s = e^t \quad (a \neq 1). \quad \text{Омс.} \quad s = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}.$$

$$153. \quad y'' + 6y' + 5y = e^{2x}. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x}.$$

154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. *Омс.* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$. 155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$.
Омс. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$. 156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. *Омс.* $y =$

$= e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41} (5 \cos x - 4 \sin x)$. 157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$.
Омс. $y = A \sin 2x + B \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$. 158. $y'' - 4y' + 5y - 2y = 2x + 3$.

Омс. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$. 159. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$.
Омс. $y = (C_1 - \sin ax) e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. 160. $y^{IV} + 2a^2 y'' +$

$+ a^4 y = 8 \cos ax$. *Омс.* $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + k^2 y = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в точке прямой $y = ax$.

Омс. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

162. Найти решение уравнения $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$, удовлетворяющее условиям $y = a$, $y' = C$ при $x = 0$. *Омс.* При $h < n$

$y = e^{-hx} \left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2} x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2} x \right)$; при $h = n$

$y = e^{-hx} [(C + ah)x + a]$; при $h > n$ $y = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} -$

$-\frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}$.

163. Найти решения уравнения $y'' + n^2 y = h \sin px$ ($p \neq n$), удовлетворяющее условиям: $y = a$, $y' = C$ при $x = 0$. *Омс.* $y = a \cos nx +$

$+\frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px$.

164. Груз весом 4 кг привешен к пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения этого груза, полагая, что верхний конец пружины совершает гармоническое колебание, закон которого $y = \sin \sqrt{100g}t$, где y измеряется по вертикали.

Решение. Обозначая через x вертикальную координату груза, считаемую от положения покоя, имеем:

$$\frac{4}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - y - l),$$

где l — длина пружины в свободном состоянии и $k = 400$, как легко видеть из начальных условий. Отсюда $\frac{d^2 x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100g}t + 100lg$. Частный интеграл этого уравнения мы должны искать в виде

$$t(C_1 \cos \sqrt{100g}t + C_2 \sin \sqrt{100g}t) + g,$$

так как первый член правой части уравнения входит в решение однородного уравнения.

165. В условиях задачи 139 начальная скорость равна v_0 и направление перпендикулярно к прямой, соединяющей центры. Найти траектории.

Решение. Если начало координат взять в середине расстояния между центрами, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx$, $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2ky$. Начальные данные

при $t=0$:

$$x=a; \quad \frac{dx}{dt}=0; \quad y=0; \quad \frac{dy}{dt}=v_0.$$

Интегрируя, находим:

$$x=a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad y=v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right).$$

Отсюда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{m v_0^2} = 1$ (эллипс).

166. Горизонтальная трубка вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Шар, помещенный внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость v_0 (вдоль трубки).

У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение движения есть $\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r$.

Начальные данные: $r=0$, $\frac{dr}{dt}=v_0$ при $t=0$. Интегрируя, находим

$$r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}].$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

$$167. \quad y'' - 7y' + 6y = \sin x. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}.$$

$$168. \quad y'' + y = \sec x. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x.$$

$$169. \quad y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}.$$

Проинтегрировать следующие уравнения различных типов *):

$$170 (181). \quad yy'' = y'^2 + 1. \quad \text{Омс.} \quad y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}].$$

$$171 (182). \quad \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0. \quad \text{Омс.} \quad \frac{xy}{x-y} = C. \quad 172 (183). \quad y = xy'^2 + y'^2.$$

$$\text{Омс.} \quad y = (\sqrt{x+1} + C)^2. \quad \text{Особые решения:} \quad y=0; \quad x+1=0.$$

$$173 (184). \quad y'' + y = \sec x. \quad \text{Омс.} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x.$$

$$174 (185). \quad (1+x^2)y' - xy - a = 0. \quad \text{Омс.} \quad y = ax + C \sqrt{1+x^2}.$$

$$175 (186). \quad x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x. \quad \text{Омс.} \quad x e^{\sin \frac{y}{x}} = C. \quad 176 (187). \quad y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x.$$

$$\text{Омс.} \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x). \quad 177 (188). \quad xy' + y - y^2 \ln x = 0.$$

$$\text{Омс.} \quad (\ln x + 1 + Cx)y = 1. \quad 178 (189). \quad (2x+2y-1)dx + (x+y-2)dy = 0.$$

$$\text{Омс.} \quad 2x+y-3 \ln(x+y+1) = C. \quad 179 (190). \quad 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

$$\text{Омс.} \quad \operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3.$$

*) В скобках поставлены номера упражнений по 4-му изданию.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная величина (модуль) 13
 — сходимость несобственного интеграла 394
 Абсолютно постоянная величина 14
 Алгебраическая функция 25
 Алгебраическое уравнение 208, 226
 Амплитуда 527
 Аналитический способ задания функции 10
 Аналитическое выражение 19
 Аргумент 17
 — комплексного числа 216
 Архимеда спираль 27, 200, 213, 436
 Асимптота 175
 Астроида 98, 185, 421, 476

 Безу теорема 226
 Бернулли уравнение 460—462
 Бернштейна многочлен 234
 Бесконечно большая 31, 35
 — малая 38—41, 57—60
 Бинормаль 309
 Бриггвы логарифмы 51

 Валлиса формула 390
 Вариация произвольных постоянных 512, 521
 Вейерштрасса теорема 234
 Векторная функция 295 —
 Векторное уравнение линии 292
 Вещественное число 11
 Винтовая линия 294, 297, 298, 308, 312, 422
 — поверхность 294
 Внутренняя точка области 237
 Вогнутость кривой 169, 170
 Возврата точка 286, 287
 Возрастание и убывание функции 149, 150
 Возрастающая переменная величина 16
 — функция 18
 Вронского определитель 499—501
 Вторая космическая скорость 494—496
 Выпуклость и вогнутость кривой 168—170

 Гаусса функция 172, 360, 361
 Геликоид 294
 Гиперболическая спираль 28
 Гиперболические функции 100—103
 Гипоциклоида 433, 435
 Главная нормаль 305
 Гладкая кривая 497
 Годограф вектора 292
 Градиент 266—268, 316
 Граница области 237
 График функции 19, 179—183
 Графический метод интегрирования 496—498
 — способ задания функции 19

 Дауценное уравнение 221
 Действительная ось 216
 — часть 215
 Действительное число 11

 Декартов лист 185
 Дифференциал 103—107
 — геометрическое значение 107, 108
 — дуги 194
 — инвариантность формы 107
 — независимого переменного 104, 248
 — полный 247
 — порядка n 110, 111
 — сложной функции 106, 107
 Дифференциальное уравнение 439, 442
 — в полных дифференциалах 462—465
 — — частных производных 442
 — —, интеграл 443
 — —, линейное 457, 498
 — —, общее решение 444, 484
 — —, общий интеграл 445, 485
 — —, однородное 452, 498
 — —, порядок 442
 — —, решение 443
 — — с разделяющимися переменными 448—452
 — —, частное решение 445
 — —, частный интеграл 445
 Дифференциальный бином 351—354
 Дифференцирование 65
 — векторов 300—302
 Дифференцируемая функция 68, 247
 Длина дуги 192, 300, 419, 421, 422
 — — в полярных координатах 423
 Дробная рациональная функция 25

 Замена переменной 325, 386

 Изогональные траектория 479, 482, 483
 Изолированная особая точка 288
 Инволюта (или развертка) 203
 Интеграл неопределенный 320
 — несобственный 390
 — определенный 373
 —, таблица 322
 Интегралы, зависящие от параметра 408—411
 Интегральная кривая 445, 485
 — сумма 372
 — —, нижняя и верхняя 371
 Интегрирование 321
 — метод замены переменной (подстановки) 325—328, 386, 387
 — по частям 331—334, 387—390
 — способом Остроградского 344—347
 Интегрирующий множитель 465
 Интервал 15
 Интерполирование 232
 Иррациональная функция 25
 — —, интегрирование 347—354
 Иррациональное число 11, 12

 Кардиоида 28, 213, 423, 434, 436
 Касательная 67, 115, 297, 299, 313
 — плоскость 313—315
 Касательных способ 210
 Квадратичная функция 25
 Клеро уравнение 475, 476

- Колебания 524
 — вынужденные 525, 528—532
 — гармонические 527
 — затухающие 528
 — свободные 525—528
 Комплексное число 215, 217—221
 —, геометрическое изображение 215
 —, показательная форма записи 225
 —, тригонометрическая форма записи 216
 Корень многочлена 226, 229
 — уравнения 225
 — функции 127
 Косинус 22, 72, 145
 — гиперболический 100, 103
 Котангенс 22, 81
 — гиперболический 100, 103
 Коши теорема 130
 Кривизна 195—200, 305—308
 Криволинейная трапеция 374
 Критические точки (значения) 154, 273
 Круг кривизны 201
 Кручение 310—312

 Лагранжа интерполяционная формула 233
 — теорема 129
 — уравнение 477, 478
 — форма остаточного члена 141
 Лейбница формула 110, 409
 Лемниската 28, 213, 419
 Линейная функция 25
 — линейно зависимые и линейно независимые решения 499—503, 509
 — — — функции 509
 Линейные дифференциальные уравнения 457—460
 — — — неоднородные 498, 510—524
 — — — однородные 498—510
 Линия тока 480
 — уровня 263
 Логарифм натуральный 51
 — неперов 51
 Логарифмическая производная 86
 — спираль 28, 113, 483
 — функция 21, 22, 77, 81
 Лопиталья правило 132

 Маклорена формула 142
 Максимум и минимум функции 151—160, 166—168, 271—284
 Матрикс математический 492—494
 Минимакс 276
 Миния единица 215
 — ось 216
 — часть 215
 Многозначная функция 18
 Многочлен 25, 226, 228—231
 Модуль 13
 — комплексного числа 216
 — перехода 51
 Монотонная величина 16
 Муавра формула 219

 Наибольшее и наименьшее значения функций 166, 163
 Наилучшее приближение 233
 Начальная фаза 527
 Начальное условие 444, 484
 Независимая переменная 17
 Неограниченная функция 36
 Неопределенный интеграл 320
 —, свойства 321, 323—325
 —, таблица 322
 Непрерывная функция 52, 54—57, 242
 Несобственный интеграл 390—397

 Нечетная функция 179
 Невяная функция 82—84, 256—258
 Нормаль 115, 298, 316
 — главная 305
 Нормальная плоскость 298, 299
 Ньютона—Лейбница формула 384
 Ньютона способ (способ касательных) 210

 Область замкнутая 237
 — изменения 15
 — определения (существования) функции 18, 20, 237
 — открытая или незамкнутая 237
 Обратная функция 86—89
 Обратные тригонометрические функции 21, 90—93
 Общее решение 444, 484
 Общий интеграл 445, 485
 Объем 425, 426
 Обыкновенные дифференциальные уравнения 442
 Огибающая 467—473
 Ограниченная переменная величина 17
 — функция 36—38
 Однозначная функция 18
 Однородная функция 452
 Однородные дифференциальные уравнения 452—454
 Окрестность 16, 241
 Окружность 27, 98, 195, 213, 387, 420
 Определенный интеграл 373
 —, приближенное вычисление 397—407
 —, свойства 378—381
 Ортогональные траектории 479—482
 Основная теорема алгебры 227
 Основные элементарные функции 20, 21
 Особая точка 284, 300, 313, 321, 469
 Особое решение 473, 474
 Особый интеграл 474
 Остаточный член формулы Тейлора 140, 141
 Остроградского способ 344—347
 Отрезок 15, 16

 Парабол формула 399
 Парабола 20, 199, 202, 203, 213, 448
 — безопасности 471
 Параболоид вращения 427
 Параметр 95
 Параметрические уравнения 95, 292
 Параметрическое задание функций 94—96
 Произобразная 319
 Перегиб точка 171, 172
 Переменная величина 14
 Период колебаний 527
 — функции 22
 Периодическая функция 22
 Площадь 415, 417, 419
 — поверхности вращения 427
 Поверхность 247
 — тела вращения 427
 — уровня 263
 Погрешность 251—253
 Подкасательная 118
 Поднормаль 116
 Подынтегральная функция 321, 373
 Подынтегральное выражение 321
 Показательная функция 21, 84, 142, 222
 Поле направлений 446
 — скалярное 262
 Полином 226
 Полная производная 255
 Полное приращение 240, 248
 Полный дифференциал 247
 Полюс 26
 Полярная ось 26

- Полярные координаты 26
 Постоянная величина 14
 Предел 29, 32—34, 41—45, 242
 Приближенное вычисление действительных
 корней уравнений 208—212
 Приращение функции 52, 240, 246
 Производная 65
 — векторной функции 296, 301, 302
 —, геометрическое значение 67, 68
 — дроби 76
 — комплексной функции 223
 —, механическое значение 66, 113, 114
 — неявной функции 83, 111, 256—258
 — обратной функции 88
 — по направлению 264, 265
 — полная 255
 — порядка n 108—110
 — постоянной 73
 — произведения 75
 — сложной функции 78, 254
 — суммы 74
 —, таблица основных формул 93, 94
 — функции, заданной параметрически 99,
 112
 — частная 244—246
 — — порядка n 259—262
 Промежуток 15
 Промежуточный аргумент 78
 Прямоугольников формула 398

 Работа 428, 429
 Радиус кривизны 200, 305
 — кручения 310
 — окрестности 16
 Радиус-вектор 292
 Развертка 203
 Разрыва точка 54, 55
 Разрывная функция 54
 Раскрытие неопределенностей 131—139
 Рациональная функция (дроби) 24, 25, 334
 — —, интегрирование 335—337, 341—344
 — —, разложение на простейшие 338—341
 Рациональное число 11, 12
 Резонанс 532
 Ролля теорема 127

 Сегмент 15
 Серре — Френе формулы 312
 Симпсона формула 401
 Синус 22, 72, 144
 — гиперболический 100, 103
 Скорость 64, 66
 Сложная функция 23, 78, 254
 Соприкасающаяся плоскость 308
 Соприкосновения точка 288
 Сопряженные комплексные числа 215
 Статический момент 430
 Степенная функция 20, 21, 71, 84
 Степень многочлена 226

 Табличный способ задания функции 18
 Тангенс 22, 80
 — гиперболический 100, 103
 Тейлора формула 139—142, 269—271
 Трактриса 213
 Трансцендентная функция 26
 Трапеций формула 399
 Тригонометрические подстановки в инте-
 грале 359
 — функции 21—23
 — —, интегрирование 354—386

 Убывающая переменная величина 16
 — функция 18
 Угол смежности 194
 Узловая точка 286
 Упорядоченная переменная величина 16
 Ускорение 114
 Условный максимум и минимум 279
 — экстремум 279

 Функциональная зависимость 17
 Функция 17
 — векторная 295
 — возрастающая 18
 — двух переменных 236
 — дифференцируемая 68
 — комплексного переменного 222
 — многозначная 18
 — неограниченная 36
 — непрерывная 52, 54—57, 242
 — нескольких переменных 238
 — нечетная 179
 — неявная 82—84
 —, область определения 18, 20
 — обратная 86—89
 — ограниченная 36—38
 — однозначная 18
 — однородная 452
 — от функции (сложная) 23
 — периодическая 22
 — разрывная 54
 —, способы задания 18—20
 — убывающая 18
 — четная 179

 Характеристическое уравнение 505
 Хорд способ 208

 Целая рациональная функция 24, 226
 Центр кривизны 201
 — окрестности 16
 — тяжести 431, 432
 Цепная линия 426, 433, 435, 441, 442
 Циклоида 97, 199, 204, 417, 434, 435

 Частная производная 244—246
 — — порядка n 259—262
 Частное приращение 240
 — решение 445, 485
 Частный интеграл 445
 Частота колебания 527
 Чебышева многочлен 235
 — формула 406
 Четная функция 179
 Число 11
 — e 48
 Числовая ось 11

 Шар, объем 425

 Эволюента 203, 207
 Эволюта 203, 205—208
 Эйлера подстановки 348—351
 — формула 224
 Эквипотенциальная линия 480
 Экстремум 152, 271, 273, 274
 — условный 279
 Элементарные функции 24, 53
 — — основные 20, 21
 Эллипс 96, 117, 204, 417, 423, 434
 Эллипсоид 425
 Эллиптический интеграл 361