

514.7

П-63

ЛЕКЦИИ
ПО ГЕОМЕТРИИ
Семестр IV

М. М. ПОСТНИКОВ

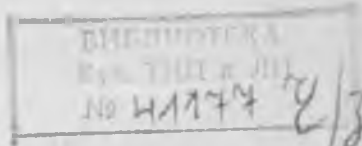
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

2

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Математика»*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988



ББК 22.151

П63

УДК 514.7 (075.8)

Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 496 с. — ISBN 5-02-013741-1.

Является непосредственным продолжением пособий того же автора «Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия», «Семестр II. Линейная алгебра» и «Семестр III. Гладкие многообразия». Семестр IV посвящен в основном теории связностей в векторных расслоениях. Рассматриваются также топологические вопросы — фундаментальная группа, накрытия и элементы теории K -групп. Заканчивается книга экскурсом в теорию гомотопических групп.

Для студентов математических специальностей вузов.

Рецензенты:

кафедра математического анализа Новосибирского государственного университета (заведующий кафедрой академик АН СССР Ю. Г. Решетняк);

доктор физико-математических наук профессор В. И. Ведерников

Учебное издание

ПОСТНИКОВ Михаил Михайлович

Лекции по геометрии

Семестр IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Заведующий редакцией Н. А. Угарова

Редакторы Ю. П. Соловьев, Т. А. Панькова

Художественный редактор Г. М. Коровина

Технический редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова

ИБ № 32382

Сдано в набор 19.02.88. Подписано к печати 19.08.88. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26,04. Усл. кр.-отт. 26,04. Уч.-изд. л. 26,32. Тираж 14 000 экз. Заказ № 2446. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 113054 Москва Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». 121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 10. Заказ 2135.

П 1702040000—173

053(02)-88

76-88

ISBN 5-02-013741-1

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
ЛЕКЦИЯ 1	13
Расслоения и их морфизмы.— Фактортопология и факторпространство.— Действия групп.— Топологические и гладкие группы и их действия.— Главные расслоения.— Расслоения со структурной группой.— Сечения расслоений.— Локально тривиальные расслоения.	
ЛЕКЦИЯ 2	33
Накрытия.— Примеры накрытий.— Замечания о накрытиях.— Теорема о накрывающем пути.— Уточнение этой теоремы.— Расслоения в смысле Гуревича.	
ЛЕКЦИЯ 3	49
Гомотопические классы путей.— Фундаментальная группа топологического пространства.— Односвязность стягиваемых пространств.— Односвязность сферы.— Фундаментальная группа окружности.	
ЛЕКЦИЯ 4	60
Независимость фундаментальной группы от выбора начальной точки.— Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением.— Точная гомотопическая последовательность накрытия.— Свойства гомотопической последовательности накрытия.— Односвязные накрытия.— Существование и единственность поднятий.— Удобные пространства.	
ЛЕКЦИЯ 5	79
Полулокально односвязные пространства.— Существование односвязных накрытий.— Условие изоморфности двух накрытий.— Универсальные накрытия.— Вспомогательная лемма.— Теорема классификации накрытий.— Группа автоморфизмов накрытия.— Регулярные накрытия.— Введение гладкости.	
ЛЕКЦИЯ 6	101
Векторные расслоения.— Сечения векторных расслоений.— Морфизмы векторных расслоений.— Комплексные и кватернионные структуры на вещественном расслоении.— Примеры векторных расслоений.— Расслоения ассоциированные с главными $GL(n; K)$-расслоениями.— Склеивающие коциклы векторных расслоений.— Векторные расслоения и классы когомологий матричных коциклов.	
ЛЕКЦИЯ 7	121
Векторные $\mathfrak{g}$-расслоения.— Линейные $\mathfrak{g}$-пространства.— Кватернионы.— Группа $U(n)$ (и $Sp(n)$).— Векторные расслоения типа $\mathfrak{g}$.— Их связь с главными $\mathfrak{g}$-расслоениями.— Условие редуцируемости.— Ориентируемые векторные расслоения.— Метризуемые векторные расслоения.	

ЛЕКЦИЯ 8	138
Квазикомплексные многообразия.— Многообразие кососимметрических ортогональных матриц.— Условие квазикомплексифицируемости.— Квазикомплексифицируемые сферы.— Алгебра октав.— Квазикомплексифицируемость сферы S^1.— Квазикомплексифицируемые многообразия размерности 6.— Параллелизуемость квазигрупп.— Вещественные алгебры с делением.	
ЛЕКЦИЯ 9	153
Геометрии Клейна.— Расслоения типа $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.— Сравнение $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$-расслоений с расслоениями $\xi[\mathcal{F}]$.— Редукция $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$-расслоений.— Редукция главных расслоений.— Двухлистное накрытие неориентируемого многообразия.	
ЛЕКЦИЯ 10	168
Прообраз векторного расслоения.— Гладкие векторные расслоения.— Поля горизонтальных подпространств — Связности и их формы.— Прообраз связности.— Связности на комплексном расслоении и на его о вещественном.— Диагонализация связности.	
ЛЕКЦИЯ 11	185
Горизонтальные кривые — Ковариантные производные сечений.— Ковариантное дифференцирование вдоль кривой.— Связности как ковариантные дифференцирования.— Линейные отображения модулей сечений.— Связности на метризованных расслоениях.	
ЛЕКЦИЯ 12	202
ξ-тензорные поля.— Полилинейные функционалы и ξ-тензорные поля.— Ковариантное дифференцирование ξ-тензорных полей.— Случай ξ-ковекторных полей.— Общий случай.— Кронекерово произведение матриц и тензорное произведение линейных операторов.— Функторы.— Тензорное произведение векторных расслоений.— Обобщение.— Тензорное произведение сечений.	
ЛЕКЦИЯ 13	221
Ковариантный дифференциал.— Сравнение различных определений связности.— Группы Ли.— Примеры групп Ли.— Алгебра Ли группы Ли.— Касательное пространство в единице.— Формула для коммутатора.	
ЛЕКЦИЯ 14	236
Однопараметрические подгруппы.— Экспоненциальное отображение и нормальные координаты.— Выражение умножения в группе Ли через умножение в ее алгебре Ли.— Дифференциал присоединенного представления.— Операции в алгебре Ли группы Ли и однопараметрические подгруппы.— Подгруппы Ли группы Ли.— Распределения и их интегральные подмногообразия.— Теорема Фробениуса.— Подмногообразия многообразий, удовлетворяющих второй аксиоме счетности.— Единственность структуры подалгебры Ли.	
ЛЕКЦИЯ 15	257
Замкнутые подгруппы группы Ли.— Теорема Картана.— Алгебраические группы.— Карты, согласованные с подгруппой Ли.— Слабая гладкость на подгруппе Ли.— Теорема Фрейденшталя.— Теорема Адо и третья теорема Ли — Локально изоморфные группы Ли — Групповые накрытия.— Существование универсального группового накрытия.	
ЛЕКЦИЯ 16	276
Связности на расслоении реперов.— Сравнение со связностями на векторных расслоениях.— Явное построение связности на векторном расслоении.— Гладкие главные расслоения.— Фундаменталь-	

ные вертикальные поля.— Горизонтальные формы.— Векторнозначные дифференциальные формы.

ЛЕКЦИЯ 17 293

Фундаментальные формы и поля горизонтальных подпространств.— Связности на гладком главном расслоении.— Проекторы, индуцированные связностями.— Горизонтальные векторные поля.— Связности на ассоциированных расслоениях.— Связности на ассоциированных векторных расслоениях.

ЛЕКЦИЯ 18 305

Параллельный перенос вдоль кривой.— Группа голономии и ее компонента единицы.— Лемма о разложении гомотопных нулю петель в произведение малых лассо.— Доказательство связности суженной группы голономии.— Изоморфизм групп голономии в различных точках.— Счетность фундаментальной группы.— Теорема редукции.— Доказательство существования связности в универсально тривиализирующих накрытиях.— Аффинное пространство связностей.

ЛЕКЦИЯ 19 323

Вычисление параллельного переноса вдоль петли.— Оператор кривизны в данной точке.— Перенесение вектора по бесконечно малому параллелограмму.— Тензор кривизны.— Формула преобразования компонент тензора кривизны.— Выражение оператора кривизны через ковариантные производные.— Структурное уравнение Картана.— Тождество Бианки.

ЛЕКЦИЯ 20 343

Тензор кривизны и группа голономии.— Выражение алгебры голономии через тензор кривизны.— Случай плоской связности.— Ковариантно постоянные тривиализации.— Связности, обладающие абсолютным параллелизмом.— Переход к главным расслоениям.— Параллельный перенос и группа голономии для главных расслоений.— Теорема редукции для главных расслоений.— Форма кривизны связности на главном расслоении.— Теорема Амброза—Сингера.— Применение теоремы Амброза—Сингера к векторным расслоениям.

ЛЕКЦИЯ 21 360

Лемма о касательном пространстве прямого произведения и ее следствия.— Об одном дифференциальном уравнении.— Существование горизонтальных накрытий для главных расслоений.— Альтернативное определение формы кривизны.— Тождество Бианки для формы кривизны главного расслоения.— Структурное уравнение Картана.— Эквивариантные горизонтальные формы.— Минимые кватернионы.— Формы F_λ, δ .

ЛЕКЦИЯ 22 375

Уравнения Максвелла электромагнитного поля.— Операторная интерпретация.— Калибровочные поля.— Инстантоны.— Формула для топологического заряда.— Функционал Янга—Миллса.— Инвариантные многочлены на пространстве матриц.— Характеристические классы векторных расслоений.

ЛЕКЦИЯ 23 395

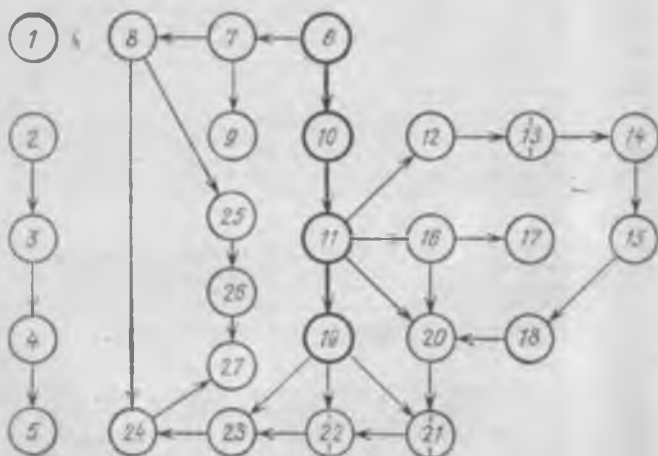
Характеристические классы Чженя и Понтрягина.— Характеристические числа Чженя и Понтрягина.— Свойства классов Чженя и Понтрягина.— Полные классы Чженя и Понтрягина.— Характеры Чженя и Понтрягина.— Характеристический класс Эйлера.— K -функтор.— Расслоения и пространства конечного типа.

ЛЕКЦИЯ 24 413

K -функтор.— Сравнение K - и K -функторов.— Операция λ^k .— Операции Адамса.— Группы KSp^n .— Инвариант Хопфа.— Конструкция Хопфа.— Ряд элементарных импликаций.— Теорема о равносильности.

ЛЕКЦИЯ 25	433
Главные расслоения над сферами.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau_{S^{l+1}}$.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau_{S^{l+1}}^U$.— Непараллелизуемость сфер S^{l+1}.— Гомотопические группы пунктированных пространств.— Альтернативное определение гомотопических групп.— Гомотопические группы и классы отображений сфер.— Гомотопические группы абелевых пространств.	
ЛЕКЦИЯ 26	453
Гомотопическая последовательность расслоения.— Группы $\pi_l S^m$ при $l < m$.— Стабилизация групп $\pi_l SO(m)$.— Классификация отображений многообразий в сферы.— Теоремы Урысона и Титце.— Связность группы $\text{Diff}_0^+ R^n$.— Доказательство теоремы Хопфа о продолжении.	
ЛЕКЦИЯ 27	468
Группа $\pi_l S^n$.— Теорема о характеристическом классе.— Ее обобщение.— Гомотопические группы накрывающего пространства — Расслоение Хопфа и группа $\pi_l S^3$.— Группы $\pi_{l+1} S^n$.— Операции в гомотопических группах сфер.— Вычисление гомотопического класса отображения $\pi_1^U \circ \tau_{l+1}^U$.— Связь с K_C-группами.	
ДОПОЛНЕНИЕ при корректуре	482
Построение $(N, \text{Sp}(l))$-инстантонов.— Описание $(N, \text{Sp}(l))$-инстантонов.— Пространство модулей $(N, \text{Sp}(l))$-инстантонов.— N-инстантоны.— Случай $N=1$.— Случай $N=2$.— Случай $N=3$.	
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	493

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ЛЕКЦИЙ



ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является непосредственным продолжением предыдущей книги этой серии ¹⁾ и подобно ей предназначена служить учебником по расширенному — по сравнению с читаемым ныне — курсу геометрии для студентов-математиков университетов. Хотя общий замысел серии, подробно изложенный в предисловии к Семестру III, остался прежним, тем не менее характер книги несколько изменился. Основная причина состоит в полной неразработанности основных принципов преподавания геометрии в университетах. Если, скажем, по анализу имеется вековая традиция как устного преподавания, так и письменных учебников, то в отношении геометрии царит полная неясность и в том, что следует включать в программу, и в том, как это нужно преподавать и излагать. Необходимо иметь несколько разных учебников, написанных с различных позиций, и только после длительной обкатки их в реальном преподавании можно будет обоснованно принимать решения о составе курса и о стиле его преподавания. Пока же учебник приходится писать так, чтобы он мог обслуживать много по-разному ориентированных обязательных курсов. Это, конечно, резко увеличивает объем книги, но зато оставляет лектору значительную свободу маневра и позволяет вдумчивому студенту существенно выйти за пределы аудиторного изложения.

Отдел математики, называемый дифференциальной геометрией, зародился как теория кривых и поверхностей евклидова пространства, изучаемых средствами анализа. После Римана центр тяжести исследований постепенно переключился на геометрию многообразий с произвольной

¹⁾ См. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987. В дальнейшем цитируется как «Семестр III».

римановой метрикой. Изучение параллельного перенесения в римановой геометрии привело — после длительного процесса освоения новых концепций — к общему понятию связности в произвольных главных (или векторных) расслоениях. Это понятие не только служит базисом, на котором в настоящее время возвышается здание дифференциальной геометрии, но играет существеннейшую роль в других геометрически ориентированных отделах математики и даже физики.

Связь дифференциальной геометрии с физикой всегда была очень тесна. (Все знают, что Риман впервые изложил свои идеи во вступительной лекции 1854 г., но мало кому известно, что разработал он их в работе 1867 г., посвященной одному вопросу теории теплопроводности.) В теории относительности Эйнштейна эта связь достигла такой интенсивности, что стали даже говорить, быть может, несколько поспешно, о геометризации физики. Сейчас открылась новая дверь, соединяющая физику с геометрией, — потенциалы калибровочных полей теории элементарных частиц оказались не чем иным, как связностями в тех или иных главных расслоениях!

Все это определяет желательность (а, быть и может, и необходимость) введения общей теории связностей в обязательный курс геометрии для математиков (о физиках речи нет — они давно уже вынуждены изучать все эти вопросы под маской калибровочных полей). Как ни странно, но основной минимально необходимый материал здесь не очень велик и может быть изложен за четыре — пять лекций. Правда, при этом за бортом остается много деталей и разветвлений, без которых обходиться на самом деле трудно. Они также изложены в этой книге — для чего понадобилось вдвое больше места, — но как факультативный материал, в основном для самостоятельного изучения. Более же конкретные вопросы (пространства аффинной связности, симметричные пространства, римановы пространства, пространственные формы Кэли — Клейна, теорема Гаусса — Бонне, вариационная теория геодезических и т. п.), которые, конечно, также должны входить в курс, будут изложены в следующем томе.

Много места в книге уделено вопросам, лишь косвенно связанным с дифференциальной геометрией, так что название книги имеет более или менее условный характер. (Достаточно сказать, что изложение собственно дифференциально-геометрического материала начинается лишь с деся-

той лекции!) Три (правда, неполные) лекции посвящены группам Ли.

Из топологического материала в книгу включена лишь теория накрытий и фундаментальной группы, необходимость которых в обязательном курсе, по-видимому, уже общепризнанна. В связи с характеристическими классами, трактуемыми дифференциально-геометрически, введены K -группы, которые затем применяются к задаче о четности инварианта Хопфа. (Напомним, что — очень беглое! — понятие о группах гомологий было дано в последней лекции Семестра III.) В заключительных трех лекциях 25—27 в связи с задачей о параллелизуемости сфер вводятся гомотопические группы и излагаются их простейшие свойства.

Наиболее важные вопросы в книге разобраны очень детально (даже, возможно, с излишней подробностью; см., например, в лекции 18 изложение связностей в расслоении реперов). Вместе с тем, для сохранения разумного объема книги, другие вопросы — быть может, не менее важные — изложены в виде задач (правда, с подробными указаниями).

Как и в Семестре III, мелкий шрифт используется для изложения внегеометрического (в основном относящегося к анализу) материала, а также для некоторых задач (в основном более трудных). Остальные задачи фактически являются тривиальными упражнениями, предназначенными исключительно для самоконтроля читателя.

В отличие от Семестра III лекции в книге теперь несколько увеличены по сравнению с устными. Имеется в виду, что лектор должен произвести определенный отбор и часть материала изложить либо без доказательств, либо в виде задач для студентов, либо отсылая их к учебнику. Вместе с тем к концу второго года обучения темп лекций и объем применяемого на них материала, конечно, не может оставаться на уровне первого семестра.

Известно, что привычка к определенным обозначениям автоматизирует мышление и делает усвоение нового материала более легким. Напротив, введение новых, незнакомых обозначений может создать трудности в понимании даже известного материала. Поэтому автор учебника обязан следовать сложившимся обозначениям и весьма осторожно вводить новые. К несчастью, в дифференциальной геометрии наблюдается в этом отношении ужасающий разноречивой и в разных ее отделах (и в разных учебниках) обозначения, как правило, никак друг с другом не коррелированы. В этой книге произведена попытка более или

менее унифицировать обозначения, не отходя при этом слишком далеко от традиции. Полностью это сделать, естественно, не удалось, и читатель не должен быть шокирован, обнаружив, например, что проекция расслоения, обозначаемая обычно буквой p , в отдельных лекциях обозначается буквой p , которая в других лекциях употребляется для обозначения точек (а также как индекс).

Конкретное содержание книги ясно из подробного оглавления. Поэтому мы ограничимся лишь краткими комментариями.

Лекция 1 имеет вводный характер и, строго говоря, без нее в дальнейшем можно обойтись (в лекциях, не имеющих дела с главными расслоениями). Однако, полностью опустив ее, читатель лишится общей перспективы и сильно сузит свой кругозор. Можно рекомендовать не изучать эту лекцию сразу, но возвращаться к ней каждый раз, когда в этом появится необходимость.

Лекции 2—5 посвящены накрытиям и фундаментальной группе. Изложение в них построено концентрически и при необходимости можно опустить лекцию 5 или даже оставить лишь лекции 2 и 3; каждый вариант содержит более или менее законченный запас сведений. (Подобный принцип изложения принят и в некоторых следующих лекциях.)

В лекции 6 начинается основная тема—векторные расслоения. С этой лекции можно начинать, но опустить ее никак нельзя.

В лекции 7 обсуждается задача о редукции структурной группы векторного расслоения. В качестве примеров рассмотрены задачи о метризуемости векторных расслоений и о квазикомплексифицируемости гладких многообразий. В лекции 8 обсуждается вопрос, при каких n сфера размерности n квазикомплексифицируема или параллелизуема.

Задача о редукции структурной группы (для векторных расслоений уже рассмотренная в лекции 7) в общем виде рассматривается в лекции 9. В связи с этим вводится понятие геометрии Клейна.

Как уже было сказано, собственно дифференциальная геометрия начинается в лекции 10. Здесь дается геометрическое определение связности на векторном расслоении как особого вида поля горизонтальных подпространств. Эту лекцию можно читать сразу после лекции 6.

В лекции 11 вводятся ковариантные производные и устанавливается их биективное соответствие со связностями.

В лекции 12 описывается процедура перенесения связности (= ковариантного дифференцирования) с данного векторного расслоения на любые его тензорные степени. Изложение построено так, что это перенесение предшествует конструкции тензорных степеней и служит для его мотивировки. Конечно, рассматриваются не только тензорные степени, но и произвольные непрерывные функторы.

Имея понятие тензорного произведения расслоений, мы можем теперь ввести понятие ковариантного дифференциала. Это делается в начале лекции 13. Затем мы переходим к группам Ли, теории которых посвящена оставшаяся часть лекции 13 и лекции 14, 15. (Заметим, что на практике конец лекции 14 приходится, разрывая изложение, присоединять к лекции 15.)

В лекциях 16, 17 вводятся связности на главных расслоениях и сопоставляются со связностями на векторных расслоениях. Эти лекции за счет примеров и подробных разъяснений без труда могут быть сокращены до одной-полутора лекций.

Лекция 18 состоит из двух частей. В первой части вводится группа голономии и доказывается (с использованием общих теорем лекции 15), что это группа является группой Ли. Затем доказывается теорема о редуцируемости расслоения к его группе голономии. В аудиторном изложении, когда не требуется все обозначать и все договаривать, доказательства обеих теорем оказываются и быстрыми, и нетрудными. Во второй части—лишь косвенно связанной с первой—доказывается, что над паракомпактным хаусдорфовым многообразием каждое векторное расслоение обладает хотя бы одной связностью и потому тривиализуется над любой шаровой координатной окрестностью.

В лекции 19 вычисляется параллельный перенос вдоль петли и на этой основе вводится тензор кривизны. Обсуждаются также и другие его определения. Эту лекцию можно читать—опустив два последних раздела—непосредственно после лекции 11.

Основная тема лекции 20—выражение через тензор кривизны элементов группы голономии. После эвристического обсуждения этой задачи доказывается дающая ответ теорема Амброза—Сингера. Для этого параллельный перенос, форму кривизны и группу голономии приходится определять для произвольных главных расслоений.

В лекции 21 теорема о существовании накрывающих горизонтальных кривых—необходимая для доказательства

в общем случае теоремы Амброза—Сингера—доказывается для произвольных главных расслоений. Затем обсуждается альтернативное определение формы кривизны связности на главном расслоении, тождество Бьянки и структурное уравнение Картана. Лекция завершается изложением кватернионной конструкции инстантонов.

На этом изложение дифференциальной геометрии по существу заканчивается и в лекции 22 после краткого экскурса в теорию калибровочных полей Янга—Миллса мы снова возвращаемся к топологии. В этой и следующей лекции излагается принадлежащая Вейлю дифференциально-геометрическая теория характеристических классов и основные идеи теории K -групп. В лекции 24 доказывается—с лагунами—теорема Адамса о четности инварианта Хопфа при $n \neq 2, 4$ и 8 и подробно обсуждаются ее различные алгебраические эквиваленты.

В лекции 25 обсуждаются расслоения над сферами и в этой связи вводятся гомотопические группы.

В лекции 26 вычисляются группы $\pi_n S^m$ при $n \leq m$ и доказывается теорема Хопфа об отображении многообразий в сферы той же размерности.

В заключительной лекции 27 излагается—с большими лагунами—методика вычисления K -групп сфер и их применение к проблеме инварианта Хопфа.

Центральное место в книге занимают лекции 6, 10, 11 и 19. В современном—сокращенном до предела—курсе геометрии на мехмате (см. предисловие к Семестру III) приходится ограничиваться только ими (и частью материала лекций 5 и 12) и сразу переходить к римановой геометрии. Выше на схеме эти лекции выделены черным.

Как уже было сказано, римановой геометрии (и смежным вопросам) будет посвящен следующий том.

Лекция 1

Расслоения и их морфизмы.— Фактортопология и факторпространство.— Действия групп.— Топологические и гладкие группы и их действия.— Главные расслоения.— Расслоения со структурной группой.— Сечения расслоений.— Локально тривиальные расслоения.

Слово «расслоение» вызывает представление о некотором множестве $\mathcal{E}$, разбитом (расслоенном) на непустые непересекающиеся подмножества—слои. Пусть $\mathcal{B}$ —множество всех слоев, а $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ —отображение, сопоставляющее каждой точке $p \in \mathcal{E}$ содержащий ее слой. Отображение π однозначно определено расслоением и, в свою очередь, однозначно его определяет. При этом любое надъективное отображение вида $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ доставляет нам некоторое расслоение множества $\mathcal{E}$ (состоящее из прообразов $\pi^{-1}(b)$ точек $b \in \mathcal{B}$). Конечно, в топологической ситуации (когда $\mathcal{E}$ является топологическим пространством) отображение π естественно считать непрерывным. Все это объясняет и мотивирует следующее определение:

Определение 1. *Расслоением* называется произвольная тройка вида

$$\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}),$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ —топологические пространства, а $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ —непрерывное отображение (как правило, надъективное). Пространство $\mathcal{E}$ называется *тотальным пространством* расслоения ξ . (Употребляются также термины *пространство расслоения* и *расслоенное пространство*.) Пространство $\mathcal{B}$ называется *базой* расслоения ξ . Расслоение с базой $\mathcal{B}$ называется также *расслоением над $\mathcal{B}$* . Отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *проекцией* расслоения ξ . Для любой точки $b \in \mathcal{B}$ ее прообраз $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ называется *слоем* расслоения ξ над точкой b .

Замечание 1. Так как задание отображения $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ уже предусматривает задание пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$, то средний компонент тройки $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ однозначно определяет остальные два. Поэтому формально расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ совпадает с отображением π . Различие состоит только в точке зрения (отображение есть правило, сопоставляющее каждой точке $p \in \mathcal{E}$ точку $\pi(p) \in \mathcal{B}$, а расслоение сопоставляет каждой точке $b \in \mathcal{B}$ подпространство $\mathcal{F}_b$).

Тем не менее иногда удобно не различать ξ и π и называть *расслоением* отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Когда нужно отметить зависимость $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ и π от ξ , мы будем писать $\mathcal{E}^\xi$, $\mathcal{B}^\xi$ и π^ξ (а иногда по требованию типографии $\mathcal{E}(\xi)$, $\mathcal{B}(\xi)$ и $\pi(\xi)$).

Расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется *расслоением с типичным слоем*, если для любых двух точек $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ слои $\mathcal{F}_{b_1}$ и $\mathcal{F}_{b_2}$ гомеоморфны, т. е. если существует такое топологическое пространство $\mathcal{F}$, что для любой точки $b \in \mathcal{B}$ слой $\mathcal{F}_b$ гомеоморфен пространству $\mathcal{F}$. Пространство $\mathcal{F}$ однозначно определено с точностью до гомеоморфизма и называется *типичным слоем* расслоения.

Ясно, что проекция каждого расслоения, обладающего типичным слоем, является надъективным отображением.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ — два расслоения. Непрерывное отображение $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ называется *послойным*, если оно переводит каждый слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, расслоения ξ в некоторый слой $\mathcal{F}_{b'}$, расслоения ξ' . Такое отображение определяет по формуле $\psi(b) = b'$ отображение $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, удовлетворяющее соотношению $\pi' \circ \varphi = \psi \circ \pi$, т. е. замыкающее коммутативную диаграмму

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{B}' \end{array}$$

но, вообще говоря, не непрерывное. Если отображение φ непрерывно, то послойное отображение φ называется *морфизмом* расслоения ξ в расслоение ξ' и в этом случае пишут $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$.

Поскольку отображение ψ однозначно характеризуется как отображение, замыкающее диаграмму (1), можно также сказать, что отображение $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ тогда и только тогда является морфизмом $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$, когда существует непрерывное отображение $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, замыкающее диаграмму (1). Иногда морфизмом $\xi \rightarrow \xi'$ называют пару (φ, ψ) .

Морфизм $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$ называется *изоморфизмом*, если оба отображения φ и ψ являются гомеоморфизмами, т. е. если определено непрерывное отображение $\varphi^{-1}: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ и это отображение является морфизмом $\xi' \rightarrow \xi$. Расслоения ξ и ξ' называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм $\xi \rightarrow \xi'$.

В случае, когда $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ и $\psi = \text{id}$, послойное отображение φ (автоматически являющееся морфизмом) называется

морфизмом над $\mathcal{B}$. Для него имеет место коммутативная диаграмма



Морфизм над $\mathcal{B}$, являющийся гомеоморфизмом (и, следовательно, изоморфизмом), называется *изоморфизмом над $\mathcal{B}$* . Расслоения ξ и ξ' с одной и той же базой $\mathcal{B}$ называются *изоморфными*, если они изоморфны над $\mathcal{B}$.

Задача 1. Докажите, что если отображение π открыто (переводит открытые множества в открытые), то любое постоянное отображение $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ является морфизмом $\xi \rightarrow \xi'$. Таким образом, для расслоений, проекции которых являются открытыми отображениями, морфизмы — это в точности послонные отображения (а изоморфизмы — послонные гомеоморфизмы).

Непрерывное отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *факторным*, если множество $U \subset \mathcal{B}$ тогда и только тогда открыто в $\mathcal{B}$, когда открыто в $\mathcal{E}$ множество $\pi^{-1}U$. Факторное надъективное отображение называется *эпиоморфным*. Эпиоморфные отображения называются также *эпиоморфизмами*.

Задача 2. Покажите, что любое открытое или замкнутое непрерывное отображение является факторным.

Задача 3. Покажите, что эпиоморфизм $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ тогда и только тогда является открытым отображением, когда для каждого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$ множество $\pi^{-1}(\pi V)$ также открыто.

Для любого отношения эквивалентности $\sim$ на топологическом пространстве $\mathcal{E}$ множество $\mathcal{B} = \mathcal{E}/\sim$ всех классов эквивалентности естественным образом топологизируется требованием, чтобы каноническая проекция

$$(2) \quad \pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}, \quad p \mapsto [p],$$

была эпиоморфизмом. Это означает, что множество $U \subset \mathcal{B}$ тогда и только тогда открыто в $\mathcal{B}$, когда его полный прообраз $\pi^{-1}U = \{p \in \mathcal{E}; [p] \in U\}$ открыт в $\mathcal{E}$.

Эта топология на $\mathcal{B}$ называется *фактортопологией*, а множество $\mathcal{B}$, снабженное фактортопологией, называется *факторпространством*. [Можно сказать, что фактортопология является наиболее слабой топологией на $\mathcal{B}$, т. е.

имеющей наименьший запас открытых множеств, по отношению к которой проекция (2) непрерывна.]

Являясь эпиморфизмом, проекция (2), тем не менее, может не быть открытым отображением.

Важный класс отношений эквивалентности, для которых проекция (2) открыта, возникает в связи с действиями групп.

Говорят, что группа $\mathcal{G}$ *действует слева* на множестве $\mathcal{E}$ (или является *группой преобразований* этого множества), если задано такое отображение

$$(3) \quad \mathcal{G} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (a, p) \mapsto ap, \quad a \in \mathcal{G}, \quad p \in \mathcal{E},$$

что для любых элементов $a, b \in \mathcal{G}$ и $p \in \mathcal{E}$ имеют место равенства

$$ep = p, \quad a(bp) = (ab)p,$$

где e — единица группы $\mathcal{G}$.

Аналогично определяется *действие справа*:

$$(4) \quad \mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (p, a) \mapsto pa.$$

Для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ отображение

$$L_a: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad p \mapsto ap,$$

биективно и отображение $a \mapsto L_a$ представляет собой гомоморфизм группы $\mathcal{G}$ в группу $\text{Sym } \mathcal{E}$ всех биективных отображений $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ множества $\mathcal{E}$ в себя.

Мы будем называть этот гомоморфизм *представлением группы $\mathcal{G}$ в $\mathcal{E}$, ассоциированным с действием (3)*. Ясно, что соответствие

действие $\Leftrightarrow$ ассоциированное представление

между всевозможными действиями (3) и всевозможными гомоморфизмами $\mathcal{G} \rightarrow \text{Sym } \mathcal{E}$ биективно.

Действие (3) называется *эффективным*, если ассоциированное представление является мономорфизмом, т. е. если для любого элемента $a \neq e$ группы $\mathcal{G}$ существует такой элемент $p \in \mathcal{E}$, что $ap \neq p$. Действие (3) называется *свободным*, если для каждого элемента $p \in \mathcal{E}$ равенство $ap = p$ имеет место только при $a = e$. Ясно, что любое свободное действие эффективно.

Действие (3) определяет на $\mathcal{E}$ отношение эквивалентности $\sim$, в котором $p \sim q$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = ap$. Соответствующие классы эквивалентности называются *орбитами* дей-

ствия (3). Любые две орбиты либо совпадают, либо не пересекаются. Орбита, содержащая элемент $p \in \mathcal{E}$, состоит из всех элементов вида ap , $a \in \mathcal{G}$, и обозначается символом $\mathcal{G}p$. Множество всех орбит мы будем обозначать символом $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Оно связано с множеством $\mathcal{E}$ естественным надъективным отображением факторизации

$$(5) \quad \pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{G}, \quad p \mapsto \mathcal{G}p.$$

Для любого элемента $p \in \mathcal{E}$ отображение

$$j_p: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}p, \quad a \mapsto ap,$$

надъективно. Оно тогда и только тогда биективно для всех $p \in \mathcal{E}$, когда действие (3) свободно.

Для любой группы $\mathcal{G}$ умножение в $\mathcal{G}$ и операция перехода к обратному элементу определяют отображения

$$(6) \quad \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

$$(7) \quad \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad a \mapsto a^{-1}.$$

Группа $\mathcal{G}$ называется *топологической группой*, если на ней задана топология, относительно которой оба отображения (6) и (7) непрерывны. Аналогично группа $\mathcal{G}$ называется *группой Ли* (или *гладкой группой*), если на ней задана гладкость, относительно которой оба отображения (6) и (7) гладки.

Задача 4. Покажите, что если для группы $\mathcal{G}$, являющейся гладким многообразием, отображение (6) гладко, то отображение (7) также гладко (т. е. $\mathcal{G}$ является группой Ли). [Заметим, что для топологических групп аналогичное утверждение неверно.]

Действие топологической группы $\mathcal{G}$ на топологическом пространстве $\mathcal{E}$ называется *непрерывным*, если непрерывно отображение (3); имеется в виду, что множество $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$ наделено топологией прямого произведения. Аналогично действие группы Ли $\mathcal{G}$ на гладком многообразии $\mathcal{E}$ называется *гладким*, если отображение (3) гладко по отношению к гладкости на $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$, являющейся произведением гладкостей многообразий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$.

Топологическое пространство (гладкое многообразие) $\mathcal{E}$, наделенное непрерывным (гладким) действием топологической (гладкой) группы $\mathcal{G}$, называется $\mathcal{G}$ -пространством (соответственно $\mathcal{G}$ -многообразием). $\mathcal{G}$ -пространство ($\mathcal{G}$ -многообразие) называется *эффективным* или *свободным*, если эффективно или соответственно свободно действие (3).

Пространство орбит $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$ непрерывного (или гладкого) действия наделяется фактортопологией, так что естественная проекция (5) оказывается эпиоморфизмом. Вопрос, будет ли для гладкого действия это пространство гладким многообразием, в общем случае решается отрицательно. В дальнейшем мы рассмотрим условия, обеспечивающие положительный ответ на этот вопрос, а пока ограничимся лишь непрерывными действиями. Конечно, все результаты топологического характера, которые мы получим для непрерывных действий, будут автоматически справедливы и для действий гладких.

Если действие (3) непрерывно, то для любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ биективное отображение $L_a: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ непрерывно и обладает непрерывным обратным отображением L_a^{-1} , т. е. является гомеоморфизмом. Поэтому для каждого открытого множества $V \subset \mathcal{G}$ множество $aV := L_a(V)$ также открыто. Следовательно, открыто и множество

$$\bigcup_{a \in \mathcal{Z}} aV = \bigcup_{p \in V} \mathcal{Z}p.$$

Но последнее множество является, очевидно, не чем иным, как полным прообразом $\pi^{-1}(\pi V)$ при отображении π множества πV . Поскольку отображение π по построению эпиоморфно, отсюда следует, что множество πV открыто в $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$. Этим доказано, что для любого непрерывного действия (3) отображение (5) не только эпиоморфно, но даже открыто.

Конечно, все это немедленно переносится на случай правых действий (4). Единственное существенное отличие состоит в том, что для действия справа ассоциированное представление будет антигомоморфизмом. Множество орбит правого действия обозначается прежним символом $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$, а отображение $p \mapsto pa$ — символом R_a . (Для пространства орбит левого действия иногда используется символ $\mathcal{Z} \backslash \mathcal{G}$. Мы этим символом пользоваться, как правило, не будем, потому что он плохо сочетается с другими обозначениями — скажем, со знаком равенства.)

Таким образом, каждое правое $\mathcal{Z}$ -пространство $\mathcal{G}$ является тотальным пространством расслоения $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{Z})$, проекция

$$(8) \quad \pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{Z}, \quad p \mapsto p\mathcal{Z},$$

которого является открытым надъективным отображением.

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ — произвольные $\mathcal{Z}$ -пространства (для определенности правые). Отображение $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ назы-

вается эквивариантным, если оно перестановочно с действием группы $\mathcal{G}$, т. е. если

$$\Phi(pa) = \Phi(p)a$$

для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{G}$.

Ясно, что по отношению к расслоениям $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{E}'/\mathcal{G})$ каждое эквивариантное отображение Φ постоянно. А так как отображение (8) открыто, то Φ является морфизмом расслоения ξ в расслоение ξ' .

В частности, любой эквивариантный гомеоморфизм $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ является изоморфизмом $\xi \rightarrow \xi'$.

Изоморфизмы $\xi \rightarrow \xi'$, являющиеся эквивариантными гомеоморфизмами $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, мы будем называть также $\mathcal{G}$ -изоморфизмами.

Для любого правого непрерывного действия (4) рассмотрим подпространство $\mathcal{E}^*$ произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, состоящее из пар $(p, q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, обе компоненты p и q которых принадлежат одной орбите действия (4), т. е. для которых существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = pa$. Если действие (4) свободно, то элемент a определен единственным образом. Обозначив его символом $\tau(p, q)$, мы получим, тем самым, некоторое отображение

$$(9) \quad \tau: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{G}.$$

Это отображение называется *отображением сдвига*.

Определение 2. Если отображение (9) непрерывно, то расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ называется *главным $\mathcal{G}$ -расслоением*. Группа $\mathcal{G}$ называется его *структурной группой*, а пространство $\mathcal{E}$ (на котором свободно действует справа группа $\mathcal{G}$) — *главным $\mathcal{G}$ -пространством*.

Легко видеть, что для каждого главного $\mathcal{G}$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{E}/\mathcal{G})$ и любой точки $p \in \mathcal{E}$ непрерывное биективное отображение

$$j_p: \mathcal{G} \rightarrow p\mathcal{G}, \quad a \mapsto pa, \quad a \in \mathcal{G},$$

является гомеоморфизмом. Действительно, по определению $j_p(\tau(p, q)) = q$ для любой точки $q \in p\mathcal{G}$, и значит непрерывное отображение

$$q \mapsto \tau(p, q), \quad q \in p\mathcal{G},$$

обратно к отображению j_p . $\square$

Доказанное утверждение означает, что *каждое главное $\mathcal{G}$ -расслоение является расслоением с типичным слоем, ко-*

торым служит пространство группы $\mathcal{G}$ (допуская определенную неточность, обычно говорят, что типичным слоем главного расслоения является сама группа $\mathcal{G}$).

Примеры главных расслоений.

Пример 1. Для любого топологического пространства $\mathcal{B}$ и любой топологической группы $\mathcal{G}$ произведение $\mathcal{G} = \mathcal{B} \times \mathcal{G}$ является правым $\mathcal{G}$ -пространством относительно действия

$$(b, a)g = (b, ag), \quad b \in \mathcal{B}, \quad a, g \in \mathcal{G}.$$

Это действие свободно и подпространство $\mathcal{G}^*$ состоит для него из таких пар $((b_1, a_1), (b_2, a_2))$, что $b_1 = b_2$. При этом отображение сдвига (9) задается формулой

$$\tau((b, a_1), (b, a_2)) = a_1^{-1}a_2,$$

и следовательно, непрерывно. Поскольку в этом случае факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{G}$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathcal{B}$, мы получаем, что для любых $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ определено главное расслоение

$$(10) \quad (\mathcal{B} \times \mathcal{G}, \pi, \mathcal{B}), \quad \text{где } \pi(b, a) = b, \quad b \in \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{G},$$

со структурной группой $\mathcal{G}$ и базой $\mathcal{B}$.

Расслоения вида (10), а также любые главные расслоения, им $\mathcal{G}$ -изоморфные, называются *тривиальными главными расслоениями*.

Пример 2. Топологическая группа $\mathcal{G}$ называется *подгруппой* топологической группы Γ , если $\mathcal{G}$ является подгруппой абстрактной группы Γ и одновременно подпространством топологического пространства Γ . Очевидно, что по отношению к ограничению на $\Gamma \times \mathcal{G}$ умножения $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ группа Γ является свободным правым $\mathcal{G}$ -пространством. Множество Γ^* для этого $\mathcal{G}$ -пространства состоит из всех пар $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$, для которых $x^{-1}y \in \mathcal{G}$, а отображение сдвига (9) задается формулой

$$\tau(x, y) = x^{-1}y.$$

Следовательно, отображение сдвига непрерывно и потому проекция

$$\Gamma \rightarrow \Gamma/\mathcal{G}, \quad x \mapsto x\mathcal{G}, \quad x \in \Gamma,$$

является *главным $\mathcal{G}$ -расслоением*. База $\mathcal{B} = \Gamma/\mathcal{G}$ этого расслоения состоит из левых смежных классов $x\mathcal{G}$ группы Γ по подгруппе $\mathcal{G}$.

Задача 5. Топологическое пространство X называется *регулярным*, если каждая его точка p замкнута (т. е. если замкнуты все одноточечные множества $\{p\} \subset X$) и для любой окрестности U произвольной точки $p \in X$ существует такая окрестность V точки p , что $\bar{V} \subset U$. (Ср. более слабое определение 4 лекции III.14.)

Докажите, что:

- а) любое регулярное пространство хаусдорфово;
- б) пространство $\Gamma/\mathcal{G}$ левых смежных классов группы Γ по подгруппе $\mathcal{G}$ тогда и только тогда регулярно (и, значит, хаусдорфово), когда подгруппа $\mathcal{G}$ замкнута.

Замечание 2. В утверждении б задачи 5 никаких предположений о топологии группы Γ не делается (в частности, группа Γ хаусдорфовой не предполагается). Поэтому из этого утверждения, в частности, вытекает, что для любой топологической группы Γ равносильны следующие утверждения:

- 1) единица e группы Γ замкнута;
- 2) группа Γ является хаусдорфовым топологическим пространством;
- 3) группа Γ является регулярным топологическим пространством.

Задача 6. Докажите, что для любой группы Ли Γ и любой ее замкнутой подгруппы Ли $\mathcal{G}$ (т. е. подгруппы, одновременно являющейся замкнутым подмногообразием) факторпространство $\Gamma/\mathcal{G}$ представляет собой гладкое многообразие (размерности $\dim \Gamma - \dim \mathcal{G}$).

Пример 3. Для циклической группы второго порядка C_2 с образующей t формула

$$t(x) = -x, \quad x \in S^n,$$

определяет свободное действие группы C_2 на сфере $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$. Подпространство $(S^n)^*$ состоит из точек вида $(x, \varepsilon x)$, где $\varepsilon = \pm 1$, а отображение сдвига действует по формуле $\tau(x, \varepsilon x) = t^a$, где $a = 0$ при $\varepsilon = 1$ и $a = 1$ при $\varepsilon = -1$. Поскольку это отображение, очевидно, непрерывно, мы получаем, что сфера S^n является главным C_2 -пространством. Базой соответствующего главного C_2 -расслоения является n -мерное проективное пространство RP^n :

$$RP^n = S^n/C_2.$$

Заметим, что в этом примере тотальное пространство и база главного расслоения являются гладкими многообразиями, а структурная группа — группой Ли.

Если группа $\mathcal{G}$ непрерывно действует справа на пространстве $\mathcal{E}$ и слева на пространстве $\mathcal{F}$, то формула

$$(p, x)a = (pa, a^{-1}x),$$

$$p \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathcal{F}, \quad a \in \mathcal{G},$$

определяет на $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ правое—и, как легко видеть, непрерывное—действие группы $\mathcal{G}$.

Соответствующее факторпространство орбит $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})/\mathcal{G}$ обозначается символом $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ и называется *произведением над $\mathcal{G}$* пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Орбиту $(p, x)\mathcal{G}$ точки $(p, x) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ мы для сокращения формул будем, как правило, обозначать символом $[p, x]$ (или $[p, x]_{\mathcal{G}}$). Заметим, что по определению

$$[pa, x] = [p, ax]$$

для любого элемента $a \in \mathcal{G}$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} \times \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{G} = \mathcal{B}, \end{array}$$

горизонтальными стрелками которой являются отображения факторизации, а левой вертикальной стрелкой—проекция прямого произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ на первый множитель. Что же касается правой вертикальной стрелки, то она однозначно определяется требованием, чтобы получилась коммутативная диаграмма. (Действительно, если $[p, x] = [q, y]$ в $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, т. е. $q = pa$, $x = ay$, то $p\mathcal{G} = q\mathcal{G}$, т. е.

$\pi(p) = \pi(q)$ в $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Поэтому формула $\pi[p, x] = p\mathcal{G}$ корректно определяет отображение

$$\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B},$$

замыкающее диаграмму.) Из эпиморфности отображения $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ непосредственно вытекает, что *отображение π непрерывно*.

Более того, из того, что отображения $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ открыты, следует, что *отображение π открыто*. Поэтому, будучи надъективным отображением, *отображение π эпиморфно* (т. е. топология в $\mathcal{B}$ является фактортопологией и по отношению к отображению π).

Таким образом, тройка

$$(11) \quad \xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B}), \quad \mathcal{G} = \mathcal{E} \times \mathcal{F},$$

представляет собой расслоение, проекция π которого является открытым надъективным отображением. Пусть $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ — слой расслоения (11) над точкой $b \in \mathcal{B}$. Пусть, далее, p_0 — такая точка пространства $\mathcal{E}$, что $p_0 \mathcal{G} = b$. Тогда формула

$$(12) \quad j(x) = [p_0, x]_g, \quad x \in \mathcal{F},$$

определяет непрерывное отображение $j: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_b$. (Заметим, что это отображение зависит от выбора точки p_0 .)

Если $[p, x] \in \mathcal{F}_b$, т. е. $p \mathcal{G} = b$, то $p = p_0 a$ для некоторого $a \in \mathcal{G}$ и поэтому $[p, x] = [p_0, ax] = j(ax)$. Следовательно, отображение j надъективно.

Далее, легко видеть, что если действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{E}$ свободно, то отображение j биективно. Действительно, если $j(x) = j(y)$, т. е. $[p_0, x] = [p_0, y]$, то $p_0 a = p_0$ и $x = ay$ для некоторого $a \in \mathcal{G}$. Но в силу свободы действия из равенства $p_0 a = p_0$ вытекает, что $a = e$. А тогда из равенства $x = ay$ следует, что $x = y$. $\square$

Обратное отображение $j^{-1}: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}$ переводит каждую точку $[p, x] \in \mathcal{F}_b$ в точку $ax \in \mathcal{F}$, где a — такой элемент группы $\mathcal{G}$, что $p_0 a = p$. С другой стороны, в случае, когда группа $\mathcal{G}$ действует свободно, равенство $p_0 a = p$ означает, что $a = \tau(p_0, p)$, где τ — отображение сдвига (9). Следовательно,

$$j^{-1}([p, x]) = \tau(p_0, p)x.$$

Поэтому если отображение τ непрерывно, т. е. действие группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{E}$ главное, то отображение j^{-1} непрерывно и, значит, отображение j представляет собой гомеоморфизм. Таким образом, в этом случае расслоение (11) обладает типичным слоем, которым служит пространство $\mathcal{F}$.

Определение 3. Расслоение (11), построенное по главному расслоению $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и левому $\mathcal{G}$ -пространству $\mathcal{F}$ (а также любое изоморфное ему расслоение над $\mathcal{B}$), называется *расслоением со структурной группой $\mathcal{G}$ и слоем $\mathcal{F}$, ассоциированным с главным расслоением ξ* .

Обозначается это расслоение символом $\xi[\mathcal{F}]$.

Подчеркнем, что расслоения со структурной группой определяются не независимо, а только через главные расслоения.

Расслоения со структурной группой $\mathcal{G}$ мы будем называть также $\mathcal{G}$ -расслоениями. (В литературе этот термин употребляется и в другом смысле—для расслоений вида (8), которые мы никак специально не называем.)

Замечание 3. Обратим внимание, что на слоях $\mathcal{F}$, расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ группа $\mathcal{G}$, вообще говоря, никак не действует.

Задача 7. Покажите, что если группа $\mathcal{G}$ абелева, то на слоях $\mathcal{F}$, расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ можно естественным образом определить действие группы $\mathcal{G}$, по отношению к которому все гомеоморфизмы (12) эквивариантны.

Пусть $\xi' = (\mathcal{G}', \pi', \mathcal{B}')$ и $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ —главные расслоения с одной и той же структурной группой $\mathcal{G}$. Для любого левого $\mathcal{G}$ -пространства $\mathcal{F}$ и любого эквивариантного отображения $\varphi: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ формула

$$\varphi[\mathcal{F}]([p, x]) = [\varphi(p), x], \quad p \in \mathcal{G}', x \in \mathcal{F},$$

корректно определяет некоторое послойное отображение

$$\varphi[\mathcal{F}]: \xi'[\mathcal{F}] \rightarrow \xi[\mathcal{F}].$$

Если отображение φ гомеоморфно, то отображение $\varphi[\mathcal{F}]$ также гомеоморфно. Послойные гомеоморфизмы вида $\varphi[\mathcal{F}]$ мы будем называть $\mathcal{G}$ -изоморфизмами расслоений со структурной группой $\mathcal{G}$. Таким образом, два расслоения $\xi'[\mathcal{F}']$ и $\xi[\mathcal{F}]$ со структурной группой $\mathcal{G}$ тогда и только тогда $\mathcal{G}$ -изоморфны, когда $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ -изоморфны главные расслоения ξ' и ξ . Конечно, расслоения $\xi'[\mathcal{F}]$ и $\xi[\mathcal{F}]$ могут быть изоморфны, но не $\mathcal{G}$ -изоморфны.

Примеры расслоений со структурной группой.

Пример 4. Пусть группа $\mathcal{G}$ тривиально действует на $\mathcal{F}$, т. е. $ax = x$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ и любой точки $x \in \mathcal{F}$. Тогда $(p, x) \sim (q, y)$ в $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и $p \sim q$ в $\mathcal{G}$. Поэтому отображение

$$\mathcal{G} \times \mathcal{F} \xrightarrow{\pi \times \text{id}} \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \quad (p, x) \mapsto (p\mathcal{G}, x),$$

индуцирует отображение $\varphi: \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{F}$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} \times \mathcal{F} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{G} \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \times \mathcal{F} \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

Поскольку два остальных отображения этой диаграммы непрерывны и открыты, отображение φ непрерывно и открыто. Кроме того, оно очевидным образом биективно. Следовательно, отображение φ является гомеоморфизмом. С другой стороны, если

$$\text{pr}: \mathcal{B} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (b, x) \mapsto b,$$

— проекция произведения $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ на первый множитель $\mathcal{B}$, то для любой точки $[p, x]$ из $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ будет иметь место равенство

$$(\text{pr} \circ \varphi)[p, x] = p\mathcal{Z} = \pi([p, x]),$$

означающее, что φ является послойным гомеоморфизмом над $\mathcal{B}$ расслоения $\xi[\mathcal{F}] = (\mathcal{E} \times \mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ на расслоение $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$.

Расслоение $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$ (а также любое изоморфное ему расслоение над $\mathcal{B}$) называется *тривиальным*.

Таким образом, мы установили, что *если группа $\mathcal{Z}$ тривиально действует на пространстве $\mathcal{F}$, то для любого главного расслоения ξ расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ тривиально (и, значит, не зависит от ξ и даже от $\mathcal{Z}$)*.

Пример 5. Пусть главное расслоение ξ тривиально, т. е. (см. пример 1) имеет вид $\xi = (\mathcal{B} \times \mathcal{Z}, \pi, \mathcal{B})$. Тогда формула

$$\varphi[p, x] = (b, ax), \quad \text{где } p = (b, a), \quad b \in \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{Z},$$

корректно определяет (проверьте!) послойное непрерывное отображение

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{B} \times \mathcal{Z},$$

являющееся гомеоморфизмом (с обратным отображением $(b, x) \mapsto [(b, e), x]$, где e — единица группы $\mathcal{Z}$). Таким образом, для *тривиального главного $\mathcal{Z}$ -расслоения ξ и любого левого $\mathcal{Z}$ -пространства $\mathcal{F}$ расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ тривиально*.

Расслоения $\xi[\mathcal{F}]$, ассоциированные с тривиальным главным расслоением ξ , мы будем называть *тривиальными $\mathcal{Z}$ -расслоениями*. (Таким образом, в этой терминологии расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ из примера 4, являясь тривиальным расслоением и одновременно $\mathcal{Z}$ -расслоением, тривиальным $\mathcal{Z}$ -расслоением, вообще говоря, не будет.)

Пример 6. Каждый элемент a произвольной группы $\mathcal{G}$ определяет отображение $L_a: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, действующее по формуле

$$L_a b = ab, \quad b \in \mathcal{G},$$

и называемое *левым сдвигом* на a . Соответствие $a \mapsto L_a$ задает левое действие группы $\mathcal{G}$ на множестве ее точек, являющееся в случае топологической группы $\mathcal{G}$ непрерывным действием. (Это действие свободно, но этот факт нам сейчас не нужен.) Поэтому для любого главного $\mathcal{G}$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определено расслоение $\xi[\mathcal{G}]$. По определению тотальным пространством этого расслоения является факторпространство $\mathcal{E} \times \mathcal{G}$ произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{G}$ по действию

$$(p, a)g = (pg, g^{-1}a), \quad p \in \mathcal{E}, a, g \in \mathcal{G},$$

т.е. по отношению эквивалентности, в котором $(p, a) \sim (q, b)$, $p, q \in \mathcal{E}$, $a, b \in \mathcal{G}$, тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \mathcal{G}$, что $q = pg$ и $a = gb$. Поэтому формула $(p, a) \mapsto pa$ корректно определяет — очевидно, непрерывное — отображение $\mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$, обратное к непрерывному отображению

$$\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{G}, \quad p \mapsto [p, e].$$

Поскольку отображение φ послойно (диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E} \times \mathcal{G} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

коммутативна), этим доказано, что расслоение $\xi[\mathcal{G}]$ изоморфно расслоению ξ .

Пример 7. Пусть $\xi = (S^1, \pi, RP^1)$ — главное C_2 -расслоение из примера 3 (при $n=1$) и пусть I — отрезок $[-1, 1]$, на котором группа C_2 действует по формуле $t(x) = -x$ (где t — образующая группы C_2 , а $x \in [-1, 1]$). Тогда тотальным пространством

$$S^1 \times_{C_2} I$$

соответствующего расслоения $\xi[I]$ будет лист Мёбиуса (докажите!).

Определение 4. Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное расслоение. Непрерывное отображение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ называется *сечением* расслоения ξ , если

$$\pi \circ s = \text{id},$$

т.е. если $s(b) \in \mathcal{F}_b$ для любой точки $b \in \mathcal{B}$. (Таким образом, наглядно говоря, сечение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ выбирает в каждом слое $\mathcal{F}_b$ точку $s(b)$.)

Примеры сечений.

Пример 8. Каждое сечение s тривиального расслоения $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$ действует по формуле

$$(13) \quad s(b) = (b, f(b)), \quad b \in \mathcal{B},$$

где $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$ — некоторое непрерывное отображение. Обратно, любое непрерывное отображение $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$ определяет по формуле (13) некоторое сечение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ расслоения $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$. Мы видим, следовательно, что сечения тривиального расслоения $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$ находятся в естественном биективном соответствии с непрерывными отображениями $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$.

Таким образом, сечения можно рассматривать как обобщения непрерывных отображений.

Пример 9 (обобщение примера 8). Пусть расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ с типичным слоем $\mathcal{F}$ ассоциировано с главным $\mathcal{G}$ -расслоением $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$. (В частности, $\mathcal{E} = \mathcal{G} \times \mathcal{F}$; проекции расслоений ξ и $\xi = \xi[\mathcal{F}]$ мы для упрощения формул обозначаем одной и той же буквой.) Пусть, далее, $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольное сечение расслоения ξ . Для каждой точки $p \in \mathcal{G}$ точка $(s \circ \pi)(p)$ единственным образом представляется в виде $[p, f(p)]$, где $f(p) \in \mathcal{F}$. Это задает некоторое отображение $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$. Оказывается, что *отображение f непрерывно*.

[На первый взгляд кажется, что это утверждение очевидно, поскольку отображение f однозначно характеризуется тем, что для него имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{id} \times f} & \mathcal{G} \times \mathcal{F} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{s} & \mathcal{G} \times \mathcal{F} = \mathcal{E}, \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются эписморфными (и даже открытыми) отображениями. Однако на самом

деле эта диаграмма помогает нам мало, поскольку прообраз произвольной точки $(p_0, x_0) \in \mathcal{G} \times \mathcal{F}$ при движении по левой, нижней и правой стрелкам диаграммы состоит (когда он не пуст, т. е. когда $x_0 = f(p_0)$) из всех точек орбиты $p_0\mathcal{S}$, тогда как прообраз точки (p_0, x_0) при верхней стрелке $\text{id} \times f$ исчерпывается лишь точкой p_0 . Поэтому доказательство непрерывности отображения f должно быть более тонким.]

Пусть $p_0 \in \mathcal{G}$ и $x_0 = f(p_0)$. Пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x_0 в пространстве $\mathcal{F}$. Нам надо найти такую окрестность V точки p_0 в пространстве $\mathcal{G}$, что $fV \subset U$. С этой целью мы заметим, что поскольку действие группы $\mathcal{S}$ на пространстве $\mathcal{F}$ непрерывно, в группе $\mathcal{S}$ существует такая окрестность единицы O , а в пространстве $\mathcal{F}$ — такая окрестность U' точки x_0 , что $OU' \subset U$ (т. е. $ax \in U$ для любого элемента $a \in O$ и любой точки $x \in U'$). Аналогично, поскольку отображение сдвига (9) и сечение s непрерывны, в пространстве $\mathcal{G}$ существует такая окрестность V' точки p_0 , что $\tau((V' \times V') \cap \mathcal{G}^*) \subset O$, а в пространстве $\mathcal{B}$ — такая окрестность W точки $b_0 = \pi(p_0)$, что $s(W) \subset \pi(V' \times U')$ (так как отображение π открыто, то множество $\pi(V' \times U')$ открыто в $\mathcal{B} = \mathcal{G} \times \mathcal{F}$). Мы положим $V = \pi^{-1}W \cap V'$.

Если $p \in V$, то $\pi(p) \in W$ и $(s\pi)(p) \in \pi(V' \times U')$, т. е. $(s\pi)(p) = [q, x]$, где $q \in V'$ и $x \in U'$. С другой стороны, по определению $(s\pi)(p) = [p, f(p)]$. Поэтому в группе $\mathcal{S}$ существует такой элемент $a = \tau(q, p)$, что $p = qa$ и $f(p) = ax$. Но, так как $q \in V'$ и $p \in V'$, то $a = \tau(q, p) \in O$, и значит — поскольку $x \in U'$, — что $f(p) \in OU' \subset U$. Следовательно, $fV \subset U$. $\square$

По определению для любой точки $p \in \mathcal{G}$ и любого элемента $a \in \mathcal{S}$ имеет место равенство $(s\pi)(pa) = [pa, f(pa)] = [p, af(pa)]$. С другой стороны, $(s\pi)(pa) = (s\pi)(p) = [p, f(p)]$. Этим доказано, что

$$(14) \quad f(pa) = a^{-1}f(p), \quad p \in \mathcal{G}, a \in \mathcal{S}.$$

Обратно, если f — произвольное непрерывное отображение $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющее соотношению (14), и если $\pi(p) = \pi(q)$, т. е. $q = pa$, то

$$[q, f(q)] = [pa, a^{-1}f(p)] = [p, f(p)].$$

Это показывает, что формула

$$s(b) = [p, f(p)]_{\mathcal{S}}, \quad b = \pi(p),$$

корректно определяет некоторое сечение s расслоения $\xi = \xi[\mathcal{F}]$.

Таким образом, мы видим, что сечения расслоения ξ находятся в естественном биективном соответствии с непрерывными отображениями $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющими соотношению (14). $\square$

Замечание 4. Левое $\mathcal{Z}$ -пространство $\mathcal{F}$ является правым $\mathcal{Z}$ -пространством относительно действия $a \mapsto R_a$, определенного формулой

$$R_a x = a^{-1}x, \quad x \in \mathcal{F}.$$

По отношению к этому действию условие (14) означает, что отображение f эквивариантно.

Если группа $\mathcal{Z}$ тривиально действует на пространстве $\mathcal{F}$ (и, значит, расслоение $\xi = \xi[\mathcal{F}]$ тривиально), условие (14) приобретает вид

$$(15) \quad f(pa) = f(p), \quad p \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{Z},$$

и потому формула

$$(16) \quad \bar{f}(b) = f(p), \text{ если } b = \pi(p) \text{ (т. е. } b = p\mathcal{Z}),$$

корректно определяет отображение $\bar{f}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$, замыкающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{F} \end{array}$$

Поскольку проекция π является эпиморфизмом, отображение $\bar{f}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение f .

Следовательно, формула (16) устанавливает биективное соответствие между непрерывными отображениями $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющими соотношению (15), и произвольными непрерывными отображениями $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$.

С другой стороны, имеющий место в рассматриваемом случае послойный изоморфизм $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ устанавли-

вается соответствием $[p, x] \mapsto (\pi(p), x)$ (см. выше пример 4). Следовательно, этот изоморфизм переводит сечение s расслоения $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, отвечающее отображению f ,

в сечение $b \mapsto (b, \bar{f}(b))$ тривиального расслоения $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \text{pr}, \mathcal{B})$, отвечающее отображению $\bar{f}$.

Таким образом, мы видим, что пример 9 действительно является обобщением примера 8.

Пример 10. Пусть для действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{F}$ существует *неподвижная точка* (т.е. такая точка x_0 , что $ax_0 = x_0$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$). Тогда формула $f(p) = x_0$, $p \in \mathcal{E}$, определяет отображение $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющее соотношению (14). Соответствующее сечение задается формулой

$$s(b) = [p, x_0], \quad b = \pi(p)$$

(эта формула корректно определяет s , так как $[pa, x_0] = [p, x_0]$ для любого $a \in \mathcal{G}$). Таким образом *каждая неподвижная точка $\mathcal{G}$ -пространства $\mathcal{F}$ задает сечение расслоения $\xi = \xi[\mathcal{F}]$.*

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 11. Для тривиального главного расслоения $\xi = (\mathcal{B} \times \mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ формула

$$s(b) = (b, e), \quad b \in \mathcal{B},$$

где e — единица группы $\mathcal{G}$, определяет сечение s этого расслоения. В то же время ξ является, как мы знаем (см. пример 5), расслоением вида $\xi[\mathcal{F}]$, слоем $\mathcal{F}$ которого служит группа $\mathcal{G}$, рассматриваемая как $\mathcal{G}$ -пространство относительно действия левыми сдвигами, и потому вообще не имеющего неподвижных точек.

Интересно, что в классе главных расслоений это является единственным исключением. Действительно, для произвольного главного $\mathcal{G}$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, обладающего сечением $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, формула

$$\varphi(b, a) = s(b)a, \quad b \in \mathcal{B}, a \in \mathcal{G},$$

определяет — очевидно, непрерывное — отображение

$$\varphi: \mathcal{B} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Поскольку $s(b)(ag) = (s(b)a)g$, $g \in \mathcal{G}$, это отображение эквивариантно. С другой стороны, формула

$$\psi(p) = (\pi(p), \tau((\text{sol})p, p)), \quad p \in \mathcal{E},$$

определяет непрерывное отображение $\psi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{G}$, для которого $(\varphi \circ \psi)(p) = (\text{sol})(p)\tau((\text{sol})p, p) = p$ и $(\psi \circ \varphi)(b, a) = (\pi(s(b)a), \tau((\text{sol})(s(b)a), s(b)a)) = (b, a)$, т.е. такое, что $\varphi \circ \psi = \text{id}$ и $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Следовательно, отображение φ является

эквивариантным гомеоморфизмом (изоморфизмом главных $\mathcal{G}$ -расслоений). Таким образом, *главное $\mathcal{G}$ -расслоение тогда и только тогда обладает сечением, когда оно тривиально.*

В силу результатов примеров 9 и 10 (и равенства $\xi = \xi[\mathcal{G}]$) отсюда немедленно следует, что *главное $\mathcal{G}$ -расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ тогда и только тогда тривиально, когда существует непрерывное отображение $j: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, удовлетворяющее соотношению (14).*

Пусть снова $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное расслоение. Для любого подмножества $U \subset \mathcal{B}$ положим $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ и $\pi_U = \pi|_{\mathcal{E}_U}$. Тройка $(\mathcal{E}_U, \pi_U, U)$ называется *частью расслоения ξ над U* и обозначается через $\xi|_U$.

Для главного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ подпространство $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ также является $\mathcal{G}$ -пространством (если $p \in \mathcal{E}_U$, то $pa \in \mathcal{E}_U$ для любого $a \in \mathcal{G}$) и, как легко видеть, главным. Это означает, что для главного расслоения ξ *каждое расслоение вида $\xi|_U$ также главное.* При этом ясно, что для любого левого $\mathcal{G}$ -пространства $\mathcal{F}$ имеет место равенство (естественный $\mathcal{G}$ -изоморфизм)

$$\xi[\mathcal{F}]|_U = \xi|_U[\mathcal{F}].$$

Таким образом, *часть над U произвольного $\mathcal{G}$ -расслоения также является $\mathcal{G}$ -расслоением.*

Определение 5. Расслоение ξ с типичным слоем $\mathcal{F}$ называется *локально тривиальным*, если существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы $\mathcal{B}$, над каждым элементом U_α которого расслоение ξ (точнее — расслоение $\xi|_{U_\alpha}$) тривиально. Это означает, что для $\xi|_{U_\alpha}$ имеет место коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha \\ & \searrow \pi|_{U_\alpha} & \swarrow \pi|_{U_\alpha} \\ & U & \end{array}$$

верхняя строчка φ_α которой является гомеоморфизмом.

Гомеоморфизм φ_α называется *тривиализацией* расслоения ξ над U_α , а окрестность U_α — *тривиализирующей окрестностью*.

В случае, когда расслоение ξ является $\mathcal{G}$ -расслоением от тривиализаций φ_α , дополнительно требуется, чтобы они были $\mathcal{G}$ -изоморфизмами.

Легко видеть (докажите!), что $\mathcal{F}$ -расслоения, ассоциированные с локально тривиальным главным $\mathcal{F}$ -расслоением, локально тривиальны даже и в этом более строгом смысле.

В дальнейшем все рассматриваемые расслоения мы практически всегда будем предполагать локально тривиальными.

В дифференциальной геометрии особую роль играют локально тривиальные расслоения с типичным слоем $\mathbb{R}^n$ и структурной группой $GL(n; \mathbb{R})$ (естественно действующей на $\mathbb{R}^n$). Оказывается, что такие расслоения — они называются *векторными* — допускают прямое определение, не апеллирующее к соответствующему главному расслоению.

Мы рассмотрим эти расслоения в лекции 6.

Лекция 2

Накрытия.— Примеры накрытий.— Замечания о накрытиях.— Теорема о накрывающем пути.— Уточнение этой теоремы.— Расслоения в смысле Гуревича.

Пусть

$$(1) \quad \pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$$

— непрерывное отображение. Говорят, что открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ *равно накрыто* отображением π , если полный прообраз $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ этого множества — когда он не пуст — является дизъюнктивным объединением открытых множеств $V_\nu \subset \mathcal{E}$:

$$\pi^{-1}U = \bigsqcup_\nu V_\nu,$$

обладающих тем свойством, что для любого ν отображение

$$(2) \quad \pi|_{V_\nu}: V_\nu \rightarrow U$$

является гомеоморфизмом.

Пусть пространство $\mathcal{B}$ связно (см. лекцию III.11).

Определение 1. Отображение (1) называется *накрытием* или *накрывающим отображением*, если:

а) пространство $\mathcal{E}$ связно;

б) существует открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$, состоящее из множеств, равно накрытых отображением (1).

Накрытием называют также тройку $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, состоящую из пространств $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ и накрывающего отображения $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Замечание 1. Условие б заведомо выполнено, если ξ является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем $\mathcal{F}$. Обратно, пусть ξ — накрытие, b_0 — произвольная точка пространства $\mathcal{B}$ и пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{b_0}$ — слой накрытия ξ над точкой b_0 . Рассмотрим множество $C \subset \mathcal{B}$, состоящее из всех точек $b \in \mathcal{B}$, для которых слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ равномошен множеству $\mathcal{F}$. Если U_α — такой элемент покрытия $\mathcal{U}$, что $C \cap U_\alpha \neq \emptyset$, то, очевидно, $U_\alpha \subset C$. Поэтому множество C одновременно открыто и замкнуто (если $b \in C$ и $b \in U_\alpha$, то $C \cap U_\alpha \neq \emptyset$ и, значит, $U_\alpha \subset C$). Поскольку оно непусто (ибо $b_0 \in C$), а пространство $\mathcal{B}$ связно, это возможно только при $C = \mathcal{B}$. Следовательно, все слои

отображения (1) равномощны $\mathcal{F}$ и, значит, $\mathcal{F}$ является типичным слоем этого отображения. Это означает, что для любого α множество $\mathcal{G}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ послойно гомеоморфно произведению $U_\alpha \times \mathcal{F}$, т. е., другими словами, что ξ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathcal{F}$. Таким образом, накрытия — это в точности локально тривиальные расслоения над связным пространством, слои которых дискретны, а тотальные пространства связны.

В частности, любое накрытие (1) является надъективным отображением.

Тотальное пространство $\mathcal{G}$ накрытия ξ называется также *накрывающим пространством*.

В случае, когда все слои накрытия конечны (и, следовательно, состоят из одного и того же числа точек), накрытие называется *конечнолистным*, а число точек слоев называется его *числом листов*. (Заметим, что понятие листа накрытия не определяется.)

Примеры накрытий

Пример 1. Формула

$$\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in \mathbb{R},$$

задает накрытие $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ окружности $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ прямой $\mathbb{R}$.

В комплексной координате $z = x + iy$ это накрытие задается формулой

$$\pi(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Наглядно накрытие π состоит в том, что прямая наматывается на окружность. Его слоями являются дискретные подпространства вида $\{t_0 + 2\pi N, N = 0, \pm 1, \dots\}$ (смежные классы группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}$) и любая открытая дуга окружности S^1 (даже с совпадающими концами) ровно накрывается посредством отображения $\mathbb{R} \rightarrow S^1$.

Композиция с π позволяет рассматривать каждую функцию $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ на S^1 как периодическую функцию на $\mathbb{R}$. (Этот переход от S^1 к $\mathbb{R}$ равносильен введению на S^1 угловой координаты; см. лекцию III.20, стр. 325.)

Пример 2. Формула

$$\pi(t_1, t_2) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

задает накрытие

$$\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2,$$

где $T^1 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор. Слоями этого накрытия являются смежные классы группы R^1 по подгруппе $2\pi Z$. Ограничение отображения π на квадрат $I^2 = \{(t_1, t_2); 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$ позволяет представить тор T^1 в виде квадрата I^2 с отождествленными противоположными сторонами.

Конечно, этот пример немедленно обобщается на любое n .

Кроме того, он подсказывает, что для любых двух накрытий $\pi_1: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ и $\pi_2: \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}$ отображение

$$\pi_1 \times \pi_2: \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, \quad (p_1, p_2) \mapsto (\pi_1(p_1), \pi_2(p_2)),$$

также является накрытием.

Задача 1. Докажите последнее утверждение. (Не забудьте доказать, что для связных пространств $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ пространство $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ также связно.)

Примеры 1 и 2 можно обобщить и в другом направлении.

Пример 3. Подгруппа Γ топологической группы $\mathcal{G}$ называется *дискретной*, если существует такая окрестность U единицы e группы $\mathcal{G}$, что $U_a \cap U_b = \emptyset$ для любых двух различных элементов $a, b \in \Gamma$. (Такая подгруппа является дискретным подпространством группы $\mathcal{G}$. Вопрос: верно ли обратное?) Легко видеть (докажител!), что для любой дискретной подгруппы Γ связной топологической группы $\mathcal{G}$ естественная проекция

$$\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\Gamma, \quad g \mapsto g\Gamma, \quad g \in \mathcal{G},$$

является накрытием.

Это накрытие тогда и только тогда конечнолистно, когда группа Γ конечна, и в этом случае число его листов равно порядку группы Γ .

Пример 4. Для любого $n \geq 1$ группа S^1 содержит конечную (и потому дискретную) группу Γ , состоящую из точек вида $e^{2\pi i k/n}$, $k = 1, \dots, n$. При этом отображение

$$S^1/\Gamma \rightarrow S^1, \quad e^{it}\Gamma \mapsto e^{int},$$

является, как легко видеть, гомеоморфизмом. Поэтому его композиция с естественной проекцией $S^1 \rightarrow S^1/\Gamma$ даст нам конечнолистное накрытие

$$(3) \quad \pi: S^1 \rightarrow S^1,$$

число листов которого равно n .

Наглядно это накрытие состоит в том, что окружность S^1 навивается n раз на саму себя.

Задача 2 (обобщение примера 4). Докажите, что

а) для любых линейно независимых целочисленных векторов (m_1, m_2) и (n_1, n_2) все точки тора T^2 вида

$$(e^{2\pi i(m_1 k + m_2 l)/\Delta}, e^{2\pi i(n_1 k + n_2 l)/\Delta}), \quad \Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix},$$

где $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, составляют конечную подгруппу порядка $|\Delta|$;

б) соответствующее факторпространство Γ^2/Γ гомеоморфно тору T^2 .

Тем самым мы получаем $|\Delta|$ -листное накрытие

$$(4) \quad \pi: T^2 \rightarrow T^2$$

тора тором. При $(m_1, m_2) = (1, 0)$ и $(n_1, n_2) = (0, n)$ оно имеет вид

$$(5) \quad \pi' \times \text{id}: T^2 \rightarrow T^2,$$

где $\pi': S^1 \rightarrow S^1$ — накрытие (3), а при $(m_1, m_2) = (m, 0)$ и $(n_1, n_2) = (0, 1)$ — вид

$$(6) \quad \text{id} \times \pi': T^2 \rightarrow T^2,$$

где теперь $\pi': S^1 \rightarrow S^1$ — накрытие (3), построенное для числа m .

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ — два накрытия одного и того же пространства $\mathcal{B}$.

В соответствии с общими определениями лекции 1 гомеоморфизм $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ называется *изоморфизмом* накрытия ξ на накрытие ξ' , если он переводит слои в слои, т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

коммутативна.

Задача 3. Докажите, что любое накрытие вида (4) изоморфно композиции накрытий вида (5) и (6).

Пример 5 (обобщение примера 3). Пусть дискретная группа Γ непрерывно действует слева (см. лекцию 1) на топологическом пространстве $\mathcal{E}$. Это действие называется *дискретным*, если каждая точка $p \in \mathcal{E}$ обладает такой окрестностью V , что

$$\gamma V \cap V = \emptyset \quad \text{для любого элемента } \gamma \neq e \text{ группы } \Gamma,$$

где γV — подмножество пространства $\mathcal{E}$, состоящее из всех точек вида γp , $p \in V$. Ясно, что любое дискретное действие свободно.

Задача 4. Докажите, что *любое дискретное действие является главным* (см. лекцию 1).

Пусть U — образ окрестности V при естественной проекции

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\Gamma, \quad p \mapsto \Gamma p, \quad p \in \mathcal{E}.$$

Так как

$$(7) \quad \pi^{-1}U = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma V$$

и все множества γV открыты, то множество $\pi^{-1}U$ также открыто. Следовательно, по определению фактортопологии множество U открыто. Кроме того, так как ограничение отображения π на каждом множестве γV является гомеоморфизмом этого множества на открытое множество U (докажите!) и имеет место разложение (7), то множество U ровно накрыто отображением π . Поскольку множества вида U составляют базу открытых множеств факторпространства $\mathcal{E}/\Gamma$, этим доказано, что для *любого дискретного действия* $\Gamma \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ проекция $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\Gamma$ является *накрытием*.

Конечно, накрытием будет и проекция $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\Gamma$ для *любого дискретного правого действия* $\mathcal{E} \times \Gamma \rightarrow \mathcal{E}$.

Пример 6. Иной класс накрытий доставляет нам теория функций комплексной переменной.

Напомним, что любую (вообще говоря, многозначную) аналитическую функцию $w = w(z)$, определенную в области G расширенной плоскости комплексной переменной, можно рассматривать как однозначную функцию на ее римановой поверхности $\mathcal{X}$, являющейся одномерным комплексно-аналитическим (и, значит, двумерным вещественно-аналитическим) многообразием, проектирующимся на область G . При этом проекция $\pi: \mathcal{X} \rightarrow G$ ровно накрывает любое открытое множество $U \subset G$, не содержащее так называемых точек ветвления функции w . Поэтому, удалив из G точки ветвления (а из $\mathcal{X}$ их прообразы), мы получим накрытие.

В частном случае, когда функция $w = w(z)$ является функцией, обратной к голоморфной однозначной функции $z = z(w)$, это накрытие осуществляется функцией $z = z(w)$ (после удаления из области определения этой функции всех точек, в которых равна нулю ее производная).

Например, функция $z = w^n$ осуществляет n -листное накрытие $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а функция $z = e^w$ — бесконечно-листное накрытие $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В случае, когда пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ являются гладкими (или комплексно-аналитическими) многообразиями, накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *гладким* (соответственно *комплексно-аналитическим*), если каждая точка $b \in \mathcal{B}$ обладает такой ровно накрытой окрестностью U , что все отображения (2) являются диффеоморфизмами (комплексно-аналитическими гомеоморфизмами).

Конечно, любое гладкое накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является гладким отображением. Однако существуют накрытия, представляющие собой гладкие отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, но, тем не менее, гладкими накрытиями не являющиеся. Примером может служить любое гладкое гомеоморфное отображение, не являющееся диффеоморфизмом.

Накрытия из примеров 1, 2 и 4 (а также накрытия из задачи 2) очевидно гладки.

Задача 5. Докажите, что если для накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ пространство $\mathcal{B}$ является гладким (или комплексно-аналитическим) многообразием, то на $\mathcal{E}$ существует единственная гладкость (комплексно-аналитическая структура), по отношению к которой $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является гладким (соответственно комплексно-аналитическим) накрытием. [Указание. Картами этой гладкости являются пары вида $(V, k \circ \pi)$, где k — координатное отображение произвольной ровно накрытой координатной окрестности $U \subset \mathcal{B}$, а V — такое множество, что отображение $\pi|_V$ является гомеоморфизмом $V \rightarrow U$.]

Условие связности накрываемого пространства исключает из накрытий все тривиальные расслоения $\mathcal{B} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$, для которых множество (дискретное пространство) $\mathcal{F}$ содержит более одной точки.

С другой стороны, тождественное отображение $\text{id}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ является, очевидно, накрытием.

Накрытием будет и произвольный гомеоморфизм $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Такие накрытия называются *тривиальными* (или *однолистными*).

Диаграмма



показывает, что *накрытие тогда и только тогда тривиально, когда оно изоморфно накрытию $\text{id}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$.*

Пространство $\mathfrak{B}$ мы будем называть *ненакрываемым*, если любое его покрытие тривиально.

Нашей основной целью будет описание — с точностью до изоморфизма — всех накрытий данного пространства $\mathfrak{B}$ и, в частности, выяснение того, когда пространство $\mathfrak{B}$ *ненакрываемо*. При этом мы будем требовать, чтобы пространство $\mathfrak{B}$ было хаусдорфовым, линейно связным, локально линейно связным (см. лекцию III.15) и, кроме того, обладало неким свойством *полулокальной односвязности*, которое мы введем ниже в своем месте. Без этих требований теория накрытий сильно усложняется и вместе с тем они выполнены практически во всех геометрически интересных ситуациях (в частности, в случае, когда $\mathfrak{B}$ является связным хаусдорфовым многообразием).

Ясно, что если множество $U \subset \mathfrak{B}$ *равно покрыто* отображением (1), то любое его подмножество $U' \subset U$ также *равно покрыто*. Поэтому все *равно накрытые* открытые множества $U \subset \mathfrak{B}$ составляют базу открытых множеств пространства $\mathfrak{B}$, а если пространство $\mathfrak{B}$ *локально линейно связно*, то базу будут составлять и все *линейно связные, равно накрытые открытые множества*.

Аналогично все *открытые множества $V \subset \mathfrak{E}$, равно накрывающие открытые множества $U \subset \mathfrak{B}$* , составляют базу открытых множеств пространства $\mathfrak{E}$. Если же пространство $\mathfrak{E}$ или — что, очевидно, равносильно — пространство $\mathfrak{B}$, *локально линейно связно*, то базу будут составлять и все *линейно связные, равно накрывающие открытые множества*.

Мы видим, в частности, что *любое покрытие $\pi: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ является локальным гомеоморфизмом* (каждая точка $p \in \mathfrak{E}$ обладает окрестностью V , гомеоморфно отображающейся на некоторую окрестность U точки $\pi(p) = b$) и, значит, *представляет собой открытое отображение*.

Ясно, что любое *локальное свойство пространства $\mathfrak{B}$* наследуется каждым его *накрывающим пространством $\mathfrak{E}$* (мы выше это уже заметили в отношении свойства *локальной линейной связности*). То же самое верно и по отношению к (не локальному!) свойству хаусдорфовости: *если пространство $\mathfrak{B}$ хаусдорфово, то пространство $\mathfrak{E}$ также хаусдорфово*. Действительно, пусть p и q — различные точки пространства $\mathfrak{E}$. Если $\pi(p) = \pi(q)$, то для любой *равно накрытой окрестности U точки $\pi(p)$* точки p и q принадлежат двум различным открытым множествам V_1 и V_2 , *равно*

накрывающим окрестность U . Поэтому в этом случае условие хаусдорфовости для точек p и q заведомо выполнено. Если же $\pi(p) \neq \pi(q)$, то в силу хаусдорфовости пространства $\mathcal{B}$ точки $\pi(p)$ и $\pi(q)$ обладают в $\mathcal{B}$ непересекающимися окрестностями U_1 и U_2 , прообразы $V_1 = \pi^{-1}U_1$ и $V_2 = \pi^{-1}U_2$, которых и будут непересекающимися окрестностями точек p и q в $\mathcal{E}$. $\square$

Для решения задачи об описании всех накрытий мы должны начать довольно издалека.

Напомним (см. лекцию III.11, определение 2), что *путем* в топологическом пространстве $\mathcal{X}$ называется непрерывное отображение

$$u: I \rightarrow \mathcal{X}$$

отрезка $I = [0, 1]$ в пространство $\mathcal{X}$. Точка $p_0 = u(0)$ называется *началом* пути u , а точка $p_1 = u(1)$ — его *концом*. Говорят также, что путь u *соединяет* точку p_0 с точкой p_1 .

Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — пока произвольное непрерывное отображение (расслоение).

Говорят, что путь $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ пространства $\mathcal{E}$ *накрывает* (посредством отображения π) путь $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ пространства $\mathcal{B}$, если $u = \pi \circ v$.

Следующее свойство накрытий лежит в основе всей их теории.

Теорема 1 (о существовании и единственности накрывающего пути). Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное накрытие, p_0 — произвольная точка пространства $\mathcal{E}$ и $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольный путь пространства $\mathcal{B}$, начинающийся в точке $b_0 = \pi(p_0)$. Тогда существует путь $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ пространства $\mathcal{E}$, начинающийся в точке p_0 и накрывающий путь u :

$$u = \pi \circ v, \quad u(0) = p_0.$$

Если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, то путь v единственен.

Доказательство. Единственность. Пусть существуют два пути v и v' , накрывающие путь u и начинающиеся в точке p_0 .

Рассмотрим подмножество C отрезка I , состоящее из таких чисел t , что $v(t) = v'(t)$. Это подмножество содержит нуль и потому непусто.

По условию для любой точки $t_0 \in C$ в $\mathcal{E}$ существует окрестность V точки $v(t_0) = v'(t_0)$, гомеоморфно проектирующаяся на некоторую окрестность U точки $\pi(v(t_0)) =$

$= u(t_0)$. Поскольку отображения v и v' непрерывны, существует такое $\delta > 0$, что $v(t) \in V$ и $v'(t) \in V$ при $|t - t_0| < \delta$.

Но если $v(t), v'(t) \in V$, то в силу биективности отображения π на V необходимо имеет место равенство $v(t) = v'(t)$ и, значит, $t \in C$. Таким образом, для любой точки $t_0 \in I$ существует такое $\delta > 0$, что все точки $t \in I$, для которых $|t - t_0| < \delta$, принадлежат C . По определению это означает, что C открыто в I .

С другой стороны, множество C является не чем иным, как прообразом диагонали $\Delta = \{(p, p); p \in \mathcal{E}\}$ при непрерывном отображении $I \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, переводящем точку $t \in I$ в точку $(v(t), v'(t)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Поэтому, так как пространство $\mathcal{B}$ — а значит и пространство $\mathcal{E}$ — по условию хаусдорфово (и, следовательно, диагональ Δ замкнута), то множество C замкнуто.

Являясь непустым, открытым и замкнутым подмножеством отрезка I , множество C совпадает — в силу связности отрезка I — со всем этим отрезком. Следовательно, $v(t) = v'(t)$ для любого $t \in I$, т. е. $v = v'$.

Существование. Из компактности отрезка I немедленно вытекает, что на этом отрезке существуют такие числа

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

а в пространстве $\mathcal{B}$ — такие ровно накрытые окрестности $U_1, \dots, U_n$,

что для любого $i = 1, \dots$ точки $u(t)$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, принадлежат окрестности U_i . Предположим, что для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, путь v уже построен на отрезке $[0, t_{i-1}]$, т. е. построено такое отображение $v: [0, t_{i-1}] \rightarrow \mathcal{E}$, что $v(0) = p_0$ и $\pi \circ v = u$ на $[0, t_{i-1}]$. (При $i = 1$ это предположение автоматически выполнено.) Так как $u(t_{i-1}) \in U_i$, то в пространстве $\mathcal{E}$ существует окрестность V_i точки $v(t_{i-1})$, ровно накрывающая окрестность U_i .

Пусть s_i — гомеоморфизм $U_i \rightarrow V_i$, обратный к гомеоморфизму $\pi: V_i \rightarrow U_i$. Мы доопределим путь v на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, полагая

$$v(t) = s_i(u(t)) \quad \text{для любого } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Тем самым, накрывающий путь v будет, очевидно, построен и на отрезке $[0, t_i]$, а значит — после n шагов — на всем отрезке I . $\square$

Теорему 1 можно существенно уточнить, но для этого ее нужно предварительно переформулировать.

Для произвольного топологического пространства $\mathcal{X}$ (как правило, линейно связного) символом $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ мы будем обозначать множество всех путей в $\mathcal{X}$. Символом же $\langle K, U \rangle$, где K — замкнутое (= компактное) подмножество отрезка I , а U — открытое подмножество пространства $\mathcal{X}$, мы будем обозначать подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, состоящее из всех путей $u: I \rightarrow \mathcal{X}$, обладающих тем свойством, что

$$u(t) \in U \quad \text{при } t \in K.$$

Всевозможные конечные пересечения множеств вида $\langle K, U \rangle$ мы можем принять за базу некоторой топологии на $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Определение 2. Эта топология называется *компактно-открытой топологией* множества $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

В дальнейшем мы всегда будем считать множество $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ снабженным компактно-открытой топологией.

Определение 3. Коцилиндром $\text{Cocyl } \pi$ непрерывного отображения $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ называется подпространство прямого произведения $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{B})$, состоящее из таких пар (p_0, u) , $p_0 \in \mathcal{E}$, $u: I \rightarrow \mathcal{B}$, что

$$\pi(p_0) = u(0).$$

[На языке теории категорий подпространство $\text{Cocyl } \pi$ является не чем иным, как коамальгамой диаграммы

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(\mathcal{B}) \\ \downarrow \\ \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}, \end{array}$$

вертикальная стрелка которой представляет собой отображение $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$, переводящее произвольный путь u в точку $u(0)$.]

Принадлежность пары $(p_0, u) \in \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{B})$ к подпространству $\text{Cocyl } \pi$ является необходимым условием того, чтобы для пути u существовал накрывающий путь $v: I \rightarrow \mathcal{E}$, начинающийся в точке p_0 . Достаточным же условием является принадлежность пары (p_0, u) к образу — очевидно, непрерывного отображения

$$\pi_1: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Cocyl } \pi,$$

определенного формулой

$$\pi(v) = (v(0), \pi \circ v), \quad v \in \mathcal{P}(\mathcal{E}).$$

Поэтому задача построения накрывающего пути разрешима для любой пары (p_0, u) тогда и только тогда, когда отображение π_1 надъективно. При этом задание для каж-

дой пары $(p, u) \in \text{Cosyl } \pi$ накрывающего пути u означает построение для отображения π_1 некоторого сечения, т. е. — см. лекцию 1 — такого отображения

$$s: \text{Cosyl } \pi \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}),$$

что $\pi_* s = \text{id}$.

Мы видим, следовательно, что теорема 1 — для хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ — равносильна утверждению, что для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ отображение π_1 допускает единственное сечение, т. е. что отображение π_1 биективно. Однако эта теорема ничего не говорит о том, будет ли это сечение непрерывным отображением (и, значит, отображение π_1 гомеоморфизмом). Теперь мы можем заполнить этот пробел.

Предложение 1. Для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ отображение

$$\pi_1: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Cosyl } \pi, \quad v \mapsto (v(0), \pi \circ v),$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого компактного множества $K \subset I$ и любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$ множество $\pi_1 \langle K, V \rangle$ открыто в $\text{Cosyl } \pi$. Но по определению

$$\pi_1 \langle K, V \rangle = (V \times \langle K, U \rangle) \cap \text{Cosyl } \pi,$$

где $U = \pi V$. Поскольку же отображение π открыто, множество U открыто в $\mathcal{B}$, и значит множество $V \times \langle K, U \rangle$ открыто в $\mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Поэтому множество $\pi_1 \langle K, V \rangle$ открыто в $\text{Cosyl } \pi$. $\square$

Определение 4. Непрерывные сечения

$$s: \text{Cosyl } \pi \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

отображения $\pi_1: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Cosyl } \pi$ называются *связностями* (или более распространено — *связностями в смысле Гуревича*). Отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ (или тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$), для которого существует хотя бы одна связность s , называется *расслоением в смысле Гуревича*.

В этой терминологии теорема 1 и предложение 1 утверждают, что любое накрытие связного хаусдорфова пространства является расслоением в смысле Гуревича, обладающим единственной связностью.

Замечание 2. Расслоением в смысле Гуревича (но уже с многими возможными связностями) будет и каждое

тривиальное расслоение $\pi: \mathcal{B} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$. (Связность s для такого расслоения можно задать, например, формулой

$$[s(p_0, u)](t) = (u(t), x_0),$$

если $p_0 = (b_0, x_0)$, $b_0 \in \mathcal{B}$, $x_0 \in \mathcal{F}$,

где $0 \leq t \leq 1$.) Поэтому естественно ожидать, что расслоением в смысле Гуревича будет и любое локально тривиальное расслоение и, более того, любое отображение $\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$, для которого существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$, что каждое отображение

$$\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$$

является расслоением в смысле Гуревича. Как показал немецкий математик Дольд, последнее утверждение — в практически не ограничивающем общности предположении, что покрытие $\{U_\alpha\}$ нумерируемо (см. лекцию III. 24, замечание 4), — действительно верно. Доказательство Дольда, хотя и простое по идее, технически довольно сложно, и мы не можем его здесь изложить. (Читатель — чтобы понять, какие подводные камни здесь появляются и зачем нужна нумерируемость — может попытаться доказать теорему Дольда для случая двухэлементного покрытия.)

Приведем пример не локально тривиального расслоения в смысле Гуревича (широко используемого в разнообразных вопросах топологии).

Пример 7. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное топологическое пространство и пусть $\rho: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ — отображение, сопоставляющее каждому пути u на $\mathcal{X}$ его конечную точку:

$$\rho(u) = u(1), \quad u: I \rightarrow \mathcal{X}.$$

Оказывается, что *отображение ρ является расслоением в смысле Гуревича*. Действительно, коцилиндр $\text{Cocyl } \rho$ этого отображения состоит из пар вида (v, u) , где v и u — такие пути пространства $\mathcal{X}$, что $v(1) = u(0)$. При этом для любой такой пары формула

$$(8) \quad w(t)(\tau) = \begin{cases} v\left(\frac{2\tau}{2-t}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq \frac{2-t}{2}, \\ u(t+2\tau-2), & \text{если } \frac{2-t}{2} \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

определяет (проверьте!) путь $w: t \mapsto w(t)$ в пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, удовлетворяющий соотношениям $w(0)(\tau) = v(\tau)$ и $w(t)(1) = u(t)$ для любых $\tau, t \in I$, т. е. такой, что $w(0) = v$

и $\rho \circ \omega = u$. Поэтому, положив $s(v, u) = \omega$, мы получим непрерывное (проверьте!) сечение отображения ρ_1 . $\square$

Путь ω , определенный формулой (8), обладает тем свойством, что $\omega(t)(0) = v(0)$ для любого $t \in I$. Поэтому если мы, выбрав точку $p_0 \in X$, введем в рассмотрение подпространство $\mathcal{P}(p_0, X)$ пространства $\mathcal{P}(X)$, состоящее из путей $u: I \rightarrow X$, начинающихся в точке p_0 , то отображение

$$\rho: \mathcal{P}(p_0, X) \rightarrow X, \quad u \mapsto u(1),$$

также будет расслоением в смысле Гуревича.

Эти примеры показывают, что расслоение в смысле Гуревича может иметь негомеоморфные слои и даже не быть надъективным отображением (если его база не линейно связна).

Лекция 3

Гомотопические классы путей.— Фундаментальная группа топологического пространства.— Односвязность стягиваемых пространств.— Односвязность сферы.— Фундаментальная группа окружности.

Для любой точки $p \in X$ топологического пространства X формула

$$e_p(t) = p, \quad t \in I,$$

задает некоторый путь $e_p: I \rightarrow X$, называемый *постоянным путем в точке p* (ср. лекцию III.11). Этот путь соединяет точку p с самой собой.

Аналогично для любого пути $u: I \rightarrow X$ формула

$$u^{-1}(t) = u(1-t), \quad t \in I,$$

определяет *обратный путь $u^{-1}: I \rightarrow X$* , соединяющий конец $u(1)$ пути u с его началом $u(0)$.

Если конец $u(1)$ пути u совпадает с началом $v(0)$ пути v , то формула

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет новый путь uv , называемый *произведением путей u и v* . Этот путь соединяет начало $u(0)$ пути u с концом $v(1)$ пути v .

Все это фактически было в лекции III.11. Следующее же определение является новым.

Определение 1. Два пути u и v , соединяющие одни и те же точки p_0 и p_1 (т. е. такие, что $u(0) = v(0) = p_0$ и $u(1) = v(1) = p_1$), называются *гомотопными* (обозначение $u \sim v$), если существует такое непрерывное отображение

$$(1) \quad f: I^2 \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto f(t, \tau), \quad (t, \tau) \in I^2,$$

что

$$f(t, 0) = u(t), \quad f(t, 1) = v(t)$$

и

$$f(0, \tau) = p_0, \quad f(1, \tau) = p_1$$

для любых $t, \tau \in I$. Отображение f называется *гомотопией, связывающей путь u с путем v* .

Предложение 1. *Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$ всех путей пространства X , соединяющих точку p_0 с точкой p_1 .*

Классы гомотопных отображений называются *гомотопическими классами* путей. Гомотопический класс, содержащий путь u , обозначается символом $[u]$.

Мы дадим два доказательства предложения 1. Первое — более поучительное — доказательство использует топологию пространства $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$, тогда как второе не опирается ни на что, кроме определения 1.

Первое доказательство. По формуле

$$w(\tau)(t) = f(t, \tau), \quad t, \tau \in I,$$

каждая гомотопия (1) определяет непрерывное (докажите!) отображение $w: \tau \mapsto w(\tau)$ отрезка I в пространство $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$, удовлетворяющее соотношениям $w(0) = u$ и $w(1) = v$, т. е. некоторый путь этого пространства, соединяющий его точку u с точкой v . Обратно, любой путь $w: I \rightarrow \mathcal{P}(p_0, X, p_1)$ пространства $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$, соединяющий путь u с путем v , определяет по формуле

$$f(t, \tau) = w(\tau)(t), \quad t, \tau \in I,$$

гомотопию (1), связывающую путь u с путем v . Таким образом, *гомотопии являются не чем иным, как путями пространства $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$* , и значит отношение гомотопности является частным случаем отношения «быть связанными путем». Следовательно (см. лекцию III. 11), отношение гомотопности является отношением эквивалентности. $\square$

Мы видим, кроме того, что *гомотопические классы путей пространства X , соединяющих точку p_0 с точкой p_1 , являются не чем иным, как компонентами линейной связности пространства $\mathcal{P}(p_0, X, p_1)$.*

Второе доказательство. (Это доказательство представляет собой просто переизложение на случай гомотопий данного в лекции III. 11 доказательства того, что отношение «быть соединенными путем» является отношением эквивалентности.) Для любого пути $u: I \rightarrow X$ формула

$$f(t, \tau) = u(t), \quad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию, связывающую путь u с самим собой. Следовательно, отношение гомотопности рефлексивно.

Аналогично для любой гомотопии f , связывающей путь u с путем v , формула

$$g(t, \tau) = f(t, 1 - \tau), \quad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию g , связывающую путь v с путем u . Следовательно, отношение гомотопности симметрично.

Наконец, если гомотопия f связывает путь u с путем v , а гомотопия g — путь v с путем w , то гомотопия fg , определенная (очевидно, корректно) формулой

$$(2) \quad (fg)(t, \tau) = \begin{cases} f(t, 2\tau), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ g(t, 2\tau - 1), & \text{если } 1/2 \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

будет связывать путь u с путем w . Следовательно, отношение гомотопности транзитивно. $\square$

Особое значение имеют пути, у которых начало совпадает с концом, т. е. которые, начинаясь в некоторой точке p_0 , кончатся в ней же. Каждый такой путь называется *петлей в точке p_0* . Множество гомотопических классов всех петель в точке p_0 обозначается символом $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$.

Перемножать гомотопии — когда это имеет смысл — можно не только по второму аргументу, как в формуле (2), но и по первому, т. е. по формуле

$$(3) \quad (fg)(t, \tau) = \begin{cases} f(2t, \tau), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1, \tau), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Если гомотопия f связывает путь u_0 с путем u_1 , а гомотопия g — путь v_0 с путем v_1 , то произведение (3) этих гомотопий по первому аргументу определено тогда и только тогда, когда общий конец путей u_0 и u_1 совпадает с общим началом путей v_0 и v_1 , и в этом случае гомотопия (3) будет связывать путь $u_0 v_0$ с путем $u_1 v_1$. Это доказывает — в случае, когда $u(1) = v(0)$, — что формула

$$(4) \quad [u] \cdot [v] = [uv]$$

корректно определяет произведение $[u] \cdot [v]$ гомотопических классов $[u]$ и $[v]$.

В частности, это произведение определено для любых элементов множества $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$.

Предложение 2. Относительно умножения (4) множество $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ является группой. Единицей этой группы служит класс $[e_{p_0}]$ постоянного пути e_{p_0} , а классом $[u]^{-1}$,

обратным к классу $[u]$ петли u , является класс $[u^{-1}]$ обратной петли u^{-1} .

Доказательство этого предложения мы извлечем из некоторых общих соображений, разъясняющих операцию перемножения гомотопических классов путей.

Назовем *обобщенным путем* пространства $\mathcal{X}$ непрерывное отображение $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{X}$. Точку $u(a)$ мы будем называть *началом*, а точку $u(b)$ — *концом* обобщенного пути u .

З а м е ч а н и е 1. Понятие обобщенного пути фактически идентично понятию кривой. В зависимости от контекста — определяемого в основном традицией — мы будем свободно пользоваться обоими терминами.

Если $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ и $v: [c, d] \rightarrow \mathcal{X}$ — такие обобщенные пути, что $u(b) = v(c)$, то формула

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } a \leq t < b, \\ v(t - b + c), & \text{если } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases}$$

определяет обобщенный путь $w: [a, b + d - c] \rightarrow \mathcal{X}$, который мы будем обозначать символом $u * v$ и называть *путем, составленным из путей u и v* .

Например, для любой точки $c \in [a, b]$ каждый обобщенный путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ составлен из пути $u|_{[a, c]}$ и пути $u|_{[c, b]}$.

Ясно, что *операция составления путей ассоциативна*, т. е. если для трех путей u, v, w путь $(u * v) * w$ определен, то определен путь $u * (v * w)$ и имеет место равенство

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Поэтому путь $u_1 * \dots * u_n$, составленный из n путей $u_1, \dots, u_n$, не зависит от последовательности, в которой эти пути составляются и в его обозначении скобки не требуются.

Необобщенные пути $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ и $v: I \rightarrow \mathcal{X}$ можно составить, если $u(1) = v(0)$. Получающийся — уже обобщенный — путь $u * v$ определен на отрезке $[0, 2]$ формулой

$$(5) \quad (u * v)(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ v(t), & \text{если } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

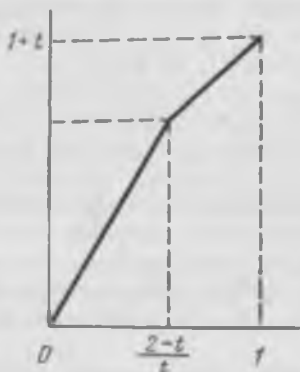
С другой стороны, выбрав произвольную непрерывную функцию $\varphi: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, отображающую точки 0 и 1 в точки a и b соответственно, мы можем каждому обоб-

щенному пути $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$, определенному на отрезке $[a, b]$, сопоставить необобщенный путь

$$u \circ \varphi: I \rightarrow \mathcal{X},$$

соединяющий те же точки. Мы будем говорить, что путь $u \circ \varphi$ получен из пути u *перепараметризацией* φ к *единичному отрезку* I .

Например, путь, определенный формулой (8) лекции 2, является не чем иным, как результатом перепараметризации к единичному отрезку пути $v * u_t$, составленному из пути v , и ограничения $u_t = u|_{[0, t]}$ пути u на отрезке $[0, t]$, посредством функции $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1 + t]$ с графиком



Это делает всю конструкцию, связанную с этим путем, совершенно прозрачной.

Замечательно, что *гомотопический класс* $[u \circ \varphi]$ пути $u \circ \varphi$ не зависит от выбора функции φ . Действительно, если ψ — другая непрерывная функция $[0, 1] \rightarrow [a, b]$, переводящая точки 0 и 1 в точки a и b , то формула

$$f(t, \tau) = u((1 - \tau)\varphi(t) + \tau\psi(t)), \quad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию f , связывающую путь $u \circ \varphi$ с путем $u \circ \psi$. $\square$

В частности, это верно и для пути (5). Но перепараметризация $\varphi: t \mapsto 2t$ этого пути переводит его, очевидно, в произведение uv путей u и v . Поэтому произведение $[u] \cdot [v]$ гомотопических классов $[u]$ и $[v]$ будет гомотопическим классом *произвольной* перепараметризации пути $u * v$.

Если теперь u , v и w — такие пути, что определены произведения $(uv)w$ и $u(vw)$, т. е. такие, что $u(1) = v(0)$

и $v(1) = w(0)$, то оба пути $(uv)w$ и $u(vw)$ будут, очевидно, перепараметризациями одного и того же пути $u * v * w$. Поэтому их гомотопические классы будут совпадать, т. е. будет иметь место равенство

$$([u] \cdot [v]) \cdot [w] = [u] \cdot ([v] \cdot [w]).$$

По определению это означает, что *умножение гомотопических классов путей ассоциативно*.

В частности, ассоциативно и умножение в множестве $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$.

Пусть $[c, d] \subset [a, b]$, т. е. $a \leq c < d \leq b$. Мы скажем, что обобщенный путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ *постоянен на $[c, d]$* , если $u(t) = u(c)$ для любого $t \in [c, d]$. Такой путь определяет на отрезке $[a, b - d + c]$ путь u' , для которого

$$u'(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } a \leq t \leq c, \\ u(t + d - c), & \text{если } c \leq t \leq b - d + c. \end{cases}$$

Это означает, что $u' = u_1 * u_2$, где u_1 и u_2 — ограничения пути u на отрезках $[a, c]$ и $[d, b]$ соответственно. При этом $u = u' \circ \varphi_0$, где φ_0 — функция $[a, b] \rightarrow [a, b - d + c]$, заданная формулой

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} t, & \text{если } a \leq t \leq c, \\ c, & \text{если } c \leq t \leq d, \\ t - d + c, & \text{если } d \leq t \leq b. \end{cases}$$

Поэтому любая перепараметризация φ пути u' задает перепараметризацию $\varphi' = \varphi_0 \circ \varphi$ пути u , обладающую тем свойством, что $u \circ \varphi = u' \circ \varphi'$. Следовательно, *гомотопические классы перепараметризаций путей u и u' совпадают*.

Если теперь u — путь $I \rightarrow \mathcal{X}$, e_0 — постоянный путь в точке $p_0 = u(0)$ и e_1 — постоянный путь в точке $p_1 = u(1)$, то для $u * e_1$ путь $(u * e_1)'$ совпадает с u , для $e_0 * u$ путь $(e_0 * u)'$ получается из u сдвигом параметра. Поэтому

$$[e_0] \cdot [u] = [u] \quad \text{и} \quad [u] \cdot [e_1] = [u].$$

В частности, это доказывает, что *гомотопический класс $[e_{p_0}]$ постоянной петли e_{p_0} является единицей умножения в $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$* .

Обобщенный путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ мы будем называть *симметричным*, если

$$u(t) = u(a + b - t) \quad \text{для любого } t \in [a, b]$$

(и, значит, в частности $u(b) = u(a)$). Для такого пути u

формула

$$f(t, \tau) = \begin{cases} u(c - (c - a)\tau), & \text{если } c - (c - a)\tau \leq t \leq c, \\ u(c + (b - c)\tau), & \text{если } c \leq t \leq c + (b - c)\tau, \\ u(t) & \text{при всех других } t, \end{cases}$$

где $c = \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a, b]$, корректно определяет непрерывное отображение

$$f: [a, b] \times I \rightarrow X,$$

удовлетворяющее для всех $t \in [a, b]$ и $\tau \in I$ соотношениям

$$\begin{aligned} f(t, 0) &= u(t), \\ f(t, 1) &= f(a, \tau) = f(b, \tau) = p_0, \quad \text{где } p_0 = u(a), \end{aligned}$$

и потому для любой перепараметризации φ пути u определяющее гомотопию $f \circ (\varphi \times \text{id})$, связывающую путь $u \circ \varphi$ с постоянным путем e_{p_0} в точке $p_0 = u(a)$. Следовательно,

$$[u \circ \varphi] = [e_{p_0}].$$

В частном случае, когда путь u определен на $[0, 1]$, т. е. является *симметричной петлей*, в перепараметризации φ мы не нуждаемся, и потому $[u] = [e_{p_0}]$. Поскольку для любой петли u в точке p_0 петли uu^{-1} и $u^{-1}u$, очевидно, симметричны, этим доказано, что

$$[u] \cdot [u^{-1}] = [u^{-1}] \cdot [u] = [e_{p_0}]$$

для любого элемента $[u] \in \pi_1(X, p_0)$, т. е. что $[u]^{-1} = [u^{-1}]$.

Тем самым предложение 2 полностью доказано. $\square$

Определение 1. Группа $\pi_1(X, p_0)$ называется *фундаментальной группой пространства X в точке p_0* .

Замечание 2. На языке алгебры установленные при доказательстве предложения 2 алгебраические свойства умножения гомотопических классов путей означают, что по отношению к умножению множество всех этих классов является группоидом. Этот группоид называется *фундаментальным группоидом пространства X* .

Покажем теперь на примерах, как можно вычислять фундаментальные группы конкретных пространств.

Заметим, прежде всего, что так как любая петля пространства X в точке p_0 является, очевидно, петлей компоненты линейной связности X_{p_0} пространства X , содер-

жащей точку p_0 , то

$$\pi_1(\mathcal{X}, p_0) = \pi_1(\mathcal{X}_0, p_0).$$

Поэтому фундаментальные группы достаточно рассматривать лишь для линейно связных пространств.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X}$ является единичным шаром B^n пространства R^n , а точка p_0 — его центром 0. Ясно, что для любой петли $u: I \rightarrow B^n$ в точке 0 формула

$$f(t, \tau) = (1 - \tau)u(t), \quad t, \tau \in I,$$

определяет гомотопию f , связывающую путь u с постоянным путем e_0 . Поэтому $[u] = [e_0]$, и значит группа $\pi_1(B^n, 0)$ тривиальна (состоит только из единицы).

По тем же соображениям тривиальна и группа $\pi_1(B^n, 0)$, где B^n — открытый шар (внутренность шара B^n).

Определение 2. Линейно связное пространство $\mathcal{X}$, для которого группа $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ состоит только из единицы, называется *односвязным* (как мы покажем в следующей лекции, это свойство не зависит от выбора точки p_0).

Таким образом, нами доказано, что шар B^n (а также шар B^n) односвязен (при любом $n \geq 0$).

Этот результат допускает немедленное обобщение.

Говорят, что (необходимо линейно связное) пространство $\mathcal{X}$ *стягиваемо к точке* p_0 , если существует такое непрерывное отображение

$$F: \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{X},$$

что $F(p, 0) = p$, $F(p, 1) = p_0$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и $F(p_0, \tau) = p_0$ для любого $\tau \in I$. Тогда для каждой петли $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ в точке p_0 формула

$$f(t, \tau) = F(u(t), \tau), \quad t, \tau \in I,$$

будет определять гомотопию, связывающую путь u с постоянным путем e_{p_0} . Следовательно, любое стягиваемое пространство односвязно.

Для шара B^n отображение F задается формулой

$$F(x, \tau) = \tau x, \quad x \in B^n.$$

Более сложные примеры требуют некоторой подготовки.

Пусть $\mathcal{X}$ — гладкое многообразие.

Обобщенный путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ называется *гладким*, если он представляет собой гладкое отображение, и ку-

сочно гладким, если он составлен из конечного числа гладких путей.

Лемма 1. Любой путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ на гладком многообразии $\mathcal{X}$ гомотопен кусочно гладкому пути.

Доказательство. В виду компактности отрезка $[a, b]$ (а, значит, и множества $u([a, b])$) в многообразии $\mathcal{X}$ существует конечное число координатных окрестностей (которые для определенности можно считать диффеоморфными открытому единичному шару $\dot{B}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$), покрывающих множество $u([a, b])$.

По определению это означает, что путь u составлен из конечного числа путей, каждый из которых является отображением в некоторую координатную окрестность. Поэтому нам достаточно доказать лемму 1 лишь для путей, обладающих последним свойством, т. е. фактически для путей в шаре $\dot{B}^n$.

Пусть $u: [a, b] \rightarrow \dot{B}^n$ — произвольный путь в шаре $\dot{B}^n$. Мы положим

$$v(t) = (1-t)u(a) + tu(b), \quad t \in I,$$

и

$$f(t, \tau) = (1-\tau)u(t) + \tau v(t), \quad t, \tau \in I.$$

Первая формула определяет гладкий путь $v: [a, b] \rightarrow \dot{B}^n$, а вторая — гомотопию f , связывающую путь u с путем v . $\square$

Задача 1. Докажите, что любой путь $u: [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ гомотопен гладкому пути.

Вернемся теперь к вычислению фундаментальных групп.

Пример 2. Вычислим группу $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ в случае, когда пространство $\mathcal{X}$ является сферой S^n размерности $n \geq 2$ (выбор точки p_0 значения не имеет). Согласно лемме 1 мы без ограничения общности можем рассматривать лишь кусочно гладкие петли $u: I \rightarrow S^n$. Но по следствию из теоремы Сарда (см. следствие из теоремы 1 лекции III. 15) каждая такая петля при $n \geq 2$ заведомо не является надъективным отображением, т. е. существует такая точка $q_0 \in S^n$, что петля u является на самом деле петлей в $S^n \setminus \{q_0\}$ (представляет собой композицию петли в $S^n \setminus \{q_0\}$ и вложения $S^n \setminus \{q_0\} \rightarrow S^n$). Поскольку подпространство $S^n \setminus \{q_0\}$ стягиваемо (оно гомеоморфно шару $\dot{B}^n$), отсюда следует, что петля u гомотопна постоянной петле e_{p_0} .

(в $S^n \setminus \{q_0\}$ и тем более в S^n). Поэтому

$$\pi_1(S^n, p_0) = 1,$$

$$n \geq 2,$$

т. е. при $n \geq 2$ сфера S^n односвязна.

При $n = 1$ теорема Сарда обеспечивает лишь существование точки $q_0 \in S^1$, являющейся регулярным значением всех гладких путей $u_i: [a_i, b_i] \rightarrow S^1$, из которых составлена кусочно гладкая петля u . Для исследования этой ситуации нам удобно будет предварительно обсудить некоторые специальные пути на окружности S^1 .

Любые две различные точки p, q окружности S^1 разбивают окружность на две дуги $C^{(+)}(p, q)$ и $C^{(-)}(p, q)$ (первая дуга характеризуется тем, что мы можем перейти по ней от p к q , двигаясь против часовой стрелки, а вторая — тем, что переход от p к q осуществляется по ней против часовой стрелки). При $p = q$ мы положим

$$C^{(+)}(p, p) = C^{(-)}(p, p) = S^1 \setminus \{p\}.$$

Заметим, что $C^{(+)}(q, p) = C^{(-)}(p, q)$ и $C^{(-)}(q, p) = C^{(+)}(p, q)$ для любых точек p, q окружности S^1 .

На дуге $C^{(+)}(p, q)$ мы введем угловой параметр $\theta^{(+)}$, отсчитываемый против часовой стрелки от точки p до точки q (точке p отвечает значение параметра 0, а точке q — значение $\theta_0^{(+)} > 0$, где $\theta_0^{(+)}$ — радианная мера дуги $C^{(+)}(p, q)$). Аналогично на дуге $C^{(-)}(p, q)$ мы введем угловой параметр $\theta^{(-)}$, отсчитываемый по часовой стрелке от точки p с $\theta^{(-)} = 0$ до точки q с $\theta^{(-)} = \theta_0^{(-)}$, где $\theta_0^{(-)}$ — радианная мера дуги $C^{(-)}(p, q)$. (Таким образом, если $p \neq q$, то $\theta_0^{(-)} = 2\pi - \theta_0^{(+)}$, а если $p = q$, то $\theta_0^{(-)} = \theta_0^{(+)} = 2\pi$.)

Тогда тождественные отображения $[0, \theta_0^{(+)}] \rightarrow [0, \theta_0^{(+)}$, $[0, \theta_0^{(-)}] \rightarrow [0, \theta_0^{(-)}$ будут задавать на окружности обобщенные пути, соединяющие точку p с точкой q . Мы будем обозначать эти пути символами $v^{(+)}(p, q)$ и $v^{(-)}(p, q)$ соответственно.

Заметим, что при $p = q$ эти пути являются взаимно обратными петлями:

$$v^{(-)}(p, p) = v^{(+)}(p, p)^{-1}.$$

(Вообще, $v^{(-)}(q, p) = v^{(+)}(p, q)^{-1}$ и $v^{(+)}(q, p) = v^{(-)}(p, q)^{-1}$ для любых точек $p, q \in S^1$.)

Обобщенный путь $v: [a, b] \rightarrow S^1$, соединяющий точку p с точкой q (случай $p = q$ не исключается), мы будем назы-

вать *специальным*, если равенство $v(t) = p$ имеет место только при $t = a$, а равенство $v(t) = q$ — только при $t = b$. По соображениям связности ясно, что для такого пути либо $v^{(+)}(t) \in C^{(+)}(p, q)$ при любом $t \in (a, b)$, либо $v^{(-)}(t) \in C^{(-)}(p, q)$ при любом $t \in (a, b)$. В обоих случаях путь v задается некоторой непрерывной функцией

$$\bar{v}: [a, b] \rightarrow [0, \theta_0], \quad \text{где } \theta_0 = \theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)},$$

причем $\bar{v}(a) = 0$, а $\bar{v}(b) = \theta_0$ или $\bar{v}(b) = 0$ (последний случай возможен только при $p = q$, т. е. при $\theta_0 = 2\pi$).

При $\bar{v}(b) = \theta_0$ это означает, что функция $\bar{v}$ осуществляет перепараметризацию пути $v^{(+)}(p, q)$ (при $\theta_0 = \theta_0^{(+)}$) или пути $v^{(-)}(p, q)$ (при $\theta_0 = \theta_0^{(-)}$) к пути v . Таким образом, в пространстве $\mathcal{P}(p, S^1, q)$ путей на окружности S^1 , соединяющих точку p с точкой q , каждый специальный путь v , для которого $\bar{v}(b) = \theta_0$, определяет тот же гомотопический класс, что соответственно путь $v^{(+)}(p, q)$ или путь $v^{(-)}(p, q)$.

В случае же, когда $\bar{v}(b) = 0$, формула

$$f(t, \tau) = (1 - \tau)\bar{v}(t), \quad t \in [a, b], \quad \tau \in I,$$

очевидно, определяет гомотопию, связывающую путь v с постоянным путем в точке p . Таким образом, при $\bar{v}(b) = 0$ специальный путь v гомотопен постоянному пути.

Вернемся теперь к кусочно гладкой петле $u: I \rightarrow S^1$ окружности S^1 в точке p_0 , составленной из гладких обобщенных путей $u_i: [a_i, b_i] \rightarrow S^1$. Если q_0 — регулярное значение всех отображений u_i , то для каждого i прообраз $u_i^{-1}(q_0)$ будет нульмерным подмногообразием отрезка $[a_i, b_i]$, т. е. конечной системой точек. Эти точки разбивают отрезок $[a_i, b_i]$ на отрезки, обладающие тем свойством, что на каждом из них путь u_i специален. Это доказывает, что *любая кусочно гладкая петля u может быть составлена из специальных путей*, и значит по доказанному гомотопна либо постоянной петле, либо петле, составленной из путей вида $v^{(+)}(p, q)$ и $v^{(-)}(p, q)$.

Если три точки p, q, r окружности S^1 обладают тем свойством, что при движении от p против часовой стрелки сначала встречается точка q , то, как непосредственно видно из чертежа, путь $v^{(-)}(q, r)$ составлен из путей $v^{(-)}(q, p)$ и $v^{(-)}(p, r)$:

$$v^{(-)}(q, r) = v^{(-)}(q, p) * v^{(-)}(p, r).$$

Если же первой встречается точка r , то аналогично

$$v^{(+)}(p, q) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q).$$

Поэтому в первом случае

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(p, q) * v^{(-)}(p, r),$$

а во-втором

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q) * v^{(-)}(q, r).$$

Но, так как каждый путь вида $v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r)$, очевидно, симметричен, то он гомотопен постоянному пути. Поэтому каждая петля, составленная из путей вида $v^{(+)}(p, q)$, $v^{(-)}(p, q)$ и начинающаяся с пути вида $v^{(+)}(p_0, q)$ (вида $v^{(-)}(p_0, q)$), гомотопна петле, составленной только из путей вида $v^{(+)}(p, q)$ (вида $v^{(-)}(p, q)$).

С другой стороны, ясно, что каждая петля в точке p_0 , составленная из путей вида $v^{(+)}(p, q)$, является комбинацией петель вида $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (несколько раз равномерно обегает окружность S^1 против часовой стрелки), а каждая петля, составленная из путей вида $v^{(-)}(p, q)$, — комбинацией петель $v^{(-)}(p_0, p_0) = v^{(+)}(p_0, p_0)^{-1}$ (несколько раз равномерно обегает окружность S^1 по часовой стрелке).

Этим доказано, что *гомотопический класс* $[u]$ *петли* u *равен* 1^n , где 1 — гомотопический класс перепараметризованной к единичному отрезку петли $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (один раз равномерно обегает окружность S^1 против часовой стрелки), а n — некоторое целое число (положительное, когда петля u гомотопна петле, составленной из петель $v^{(+)}(p_0, p_0)$, отрицательное, когда петля u гомотопна петле, составленной из петель $v^{(-)}(p_0, p_0)$, и равное нулю, когда петля u гомотопна постоянной петле). Это означает, что *группа* $\pi_1(S^1, p_0)$ *является циклической группой с образующей* 1 .

Однако здесь не видно, чему равен порядок этой группы. Поэтому мы изложим другой метод вычисления группы $\pi_1(S^1, p_0)$, лишенный этого недостатка.

Воспользуемся накрытием

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

из примера 1 лекции 2. Пусть p_0 — точка 1 окружности S^1 .

Для любой петли u на окружности S^1 в точке p_0 рассмотрим накрывающий путь $w = s(0, u)$ с началом в точке

$0 \in \mathbb{R}$, где s — связность для накрытия π . Конец $w(1)$ этого пути проектируется в конец p_0 петли u и, значит, является целым числом. С другой стороны, легко видеть (докажите!), что это число непрерывно зависит от пути u , т. е. при любой гомотопии пути u число $w(1)$ меняется непрерывно. Поэтому, являясь целым числом, оно остается прежним. Это означает, что формула $[u] \mapsto w(1)$ корректно определяет некоторое отображение

$$(6) \quad \deg: \pi_1(S^1, p_0) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Оказывается, что отображение (6) является гомоморфизмом. Действительно, пусть $[u], [v] \in \pi_1(S^1, p_0)$ и пусть $\deg[u] = n$ и $\deg[v] = m$, т. е. пусть в $\mathbb{R}$ путь $s(0, u)$ соединяет точку 0 с точкой n , а путь $s(0, v)$ — точку 0 с точкой m . Тогда путь w в $\mathbb{R}$, определенный формулой

$$w(t) = s(0, v)(t) + n, \quad t \in I,$$

будет начинаться в точке n и будет накрывать путь v (т. е. будет путем $s(n, v)$). Поэтому путь $s(0, u)w$, начинающийся в точке 0, будет накрывать путь uv , т. е. его конец $(s(0, u)w)(1)$ будет равен $\deg([u] \cdot [v])$. Но этот конец является, по определению, концом $w(1)$ пути w , т. е. точкой $m + n = \deg[u] + \deg[v]$. Следовательно,

$$\deg([u] \cdot [v]) = \deg[u] + \deg[v]. \quad \square$$

Далее, легко видеть, что гомоморфизм (6) является эпиморфизмом. Действительно, для любого пути $w: I \rightarrow \mathbb{R}$, соединяющего точку 0 с точкой $n \in \mathbb{Z}$, путь $u = \pi \circ w$ будет петлей на окружности S^1 и путь $s(0, u)$, накрывающий эту петлю, будет в силу единственности накрывающего пути совпадать с путем w . Поэтому $s(0, u)(1) = w(1) = n$, т. е. $\deg[u] = n$. $\square$

Наконец, гомоморфизм (6) является мономорфизмом. Действительно, равенство $\deg[u] = 0$ означает, что накрывающий путь $s(0, u)$ является петлей в точке 0. Но прямая $\mathbb{R}$, будучи гомеоморфна интервалу $\mathbb{R}^1$, стягиваема и потому односвязна. Следовательно, в $\mathbb{R}$ существует гомотопия f , связывающая петлю $s(0, u)$ с постоянной петлей e_0 в точке 0. Но тогда композиция $\pi \circ f$ будет, очевидно, гомотопией, связывающей петлю $u = \pi \circ s(0, u)$ с постоянной петлей e_{p_0} в точке p_0 . Поэтому $[u] = e$ в группе $\pi_1(S^1, p_0)$. $\square$

Таким образом, мы видим, что *отображение (6) представляет собой изоморфизм. Следовательно, группа $\pi_1(S^1, p_0)$ является бесконечной циклической группой.*

Так как, очевидно, $\deg \gamma = 1$, то гомотопический класс является образующей группы $\pi_1(S^1, p_0)$.

Видно, насколько метод накрытий превосходит предыдущий элементарно геометрический метод!

В следующей лекции мы обобщим этот метод на произвольные накрытия и на этой основе получим общий способ вычисления фундаментальных групп пространств.

Лекция 4

Независимость фундаментальной группы от выбора начальной точки.— Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный непрерывным отображением.— Точная гомотопическая последовательность накрытия.— Свойства гомотопической последовательности накрытия.— Односвязные накрытия.— Существование и единственность поднятий.— Удобные пространства.

Для любых двух точек p_0, p_1 топологического пространства $\mathcal{X}$ каждый путь a , соединяющий точку p_0 с точкой p_1 , позволяет сопоставить произвольной петле u пространства $\mathcal{X}$ в точке p_1 петлю v в точке p_0 , получающуюся перепараметризацией обобщенной петли $a * u * a^{-1}$. Из установленных при доказательстве предложения 2 лекции 3 свойств умножения гомотопических классов путей немедленно вытекает, что формула

$$\varphi_a[u] = [v]$$

корректно определяет изоморфизм

$$\varphi_a: \pi_1(\mathcal{X}, p_1) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, p_0),$$

зависящий только от гомотопического класса $[a]$ пути a .

Заметим, что если пути a и b , соединяющие точку p_0 с точкой p_1 , не гомотопны, то изоморфизмы φ_a и φ_b , вообще говоря, различны.

Например, ясно, что если $p_1 = p_0$ (и, значит, путь a представляет собой петлю в точке p_0), то изоморфизм φ_a является не чем иным, как внутренним автоморфизмом группы $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$, индуцированным элементом $\alpha = [a]$. Поэтому если α не является элементом центра группы $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$, то $\varphi_a \neq \text{id}$.

Как бы то ни было, но мы видим, что для линейно связного пространства $\mathcal{X}$ группа $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ с точностью до изоморфизма не зависит от точки p_0 .

В частности, если $\pi_1(\mathcal{X}, p_0) = 1$ для одной точки $p_0 \in \mathcal{X}$, то $\pi_1(\mathcal{X}, p_1) = 1$ и для любой другой точки $p_1 \in \mathcal{X}$.

Произвольное непрерывное отображение

$$h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

определяет по формуле

$$u \mapsto h \circ u,$$

$$u: I \rightarrow \mathcal{X},$$

непрерывное (докажите!) отображение

$$h_0: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$$

пространств путей, переводящее каждое подпространство вида $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ в подпространство $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$, где $q_0 = h(p_0)$, $q_1 = h(p_1)$. Поэтому оно индуцирует некоторое отображение h_* множества компонент линейной связности пространства $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ в множество компонент линейной связности пространства $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$. На другом языке это означает, что формула

$$(1) \quad h_*[u] = [h \circ u], \quad u: I \rightarrow \mathcal{X},$$

корректно определяет отображение h_* множества гомотопических классов путей пространства $\mathcal{X}$, соединяющих точку p_0 с точкой p_1 , в множество гомотопических классов путей пространства $\mathcal{Y}$, соединяющих точку q_0 с точкой q_1 . [Корректность формулы (1) можно также установить, не доказывая непрерывность отображения h_0 , а просто заметив, что для любой гомотопии $f: I^2 \rightarrow \mathcal{X}$, связывающей пути u и v из $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$, отображение $h \circ f: I^2 \rightarrow \mathcal{Y}$ будет гомотопией, связывающей пути $h \circ u$ и $h \circ v$ из $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$.]

При $p_1 = p_0$ мы получаем, в частности, отображение

$$(2) \quad h_*: \pi_1(\mathcal{X}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{Y}, q_0), \quad q = h(p_0).$$

Из определения произведения путей непосредственно вытекает, что если $w = uv$, то $h \circ w = (h \circ u)(h \circ v)$. Поэтому

$$h_*([u] \cdot [v]) = h_*([u]) \cdot h_*([v]),$$

т. е. по отношению к умножению гомотопических классов путей отображение h_* является гомоморфизмом группоидов. В частности, для любого непрерывного отображения $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ отображение (2) является гомоморфизмом групп.

Об этом гомоморфизме говорят, что он индуцирован непрерывным отображением h . Когда нужно отметить зависимость этого гомоморфизма от точки p_0 , мы будем обозначать его символом $(h_*)_{p_0}$.

Так как для любых отображений

$$h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$$

и любого пути $u: I \rightarrow \mathcal{X}$ имеет место равенство $(g \circ h) \circ u = g \circ (h \circ u)$, то

$$(3) \quad (g \circ h)_* = g_* \circ h_*.$$

Кроме того, если $h = \text{id}$, то, конечно, $h_* = \text{id}$. [На языке теории категорий эти свойства означают, что сопоставление пространство с отмеченной точкой



фундаментальная группа

является функтором.]

Далее, непосредственное сравнение определений показывает, что для любого пути a пространства $\mathcal{X}$, соединяющего точку p_0 с точкой p_1 , имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{X}, p_1) & \xrightarrow{\varphi_a} & \pi_1(\mathcal{X}, p_0) \\ (h_*)_{p_1} \downarrow & & \downarrow (h_*)_{p_0} \\ \pi_1(\mathcal{Y}, q_1) & \xrightarrow{\varphi_{h \cdot a}} & \pi_1(\mathcal{Y}, q_0), \quad q_0 = h(p_0), q_1 = h(p_1). \end{array}$$

[На языке теории категорий это означает, что соответствие $a \mapsto \varphi_a$ обладает свойством естественности.]

Рассмотрим теперь взаимоотношения фундаментальных групп с накрытиями.

Для любого топологического пространства $\mathcal{X}$, в котором отмечена точка p_0 , мы будем символом $\Omega(\mathcal{X}, p_0)$ или просто $\Omega\mathcal{X}$ обозначать пространство $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_0)$ всех петель в точке p_0 с компактно-открытой топологией. Как мы знаем из лекции 3, элементы группы $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ (гомотопические классы петель) являются не чем иным, как компонентами линейной связности этого пространства. Однако иногда бывает удобно различать эти компоненты, рассматриваемые как элементы группы $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ от них же, но рассматриваемых как подпространства $\Omega\mathcal{X}$. На этом основании компоненту $\alpha \in \pi_1(\mathcal{X}, p_0)$ линейной связности пространства $\Omega\mathcal{X}$ мы будем обозначать также символом $\Omega_\alpha\mathcal{X}$. В частности, $\Omega_\alpha\mathcal{X}$ — это компонента пространства $\Omega\mathcal{X}$, состоящая из петель, гомотопных постоянной петле e_{p_0} . (Символом e мы здесь и в дальнейшем обозначаем единицу группы $\pi_1(\mathcal{X}, p_0)$.)

Пусть теперь $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича и $s: \text{Cosyl } \pi \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ — произвольная связность для π . Пусть, далее, $p_0 \in \mathcal{E}$, $b_0 = \pi(p_0) \in \mathcal{B}$ и $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ — слой расслоения π над точкой b_0 . (Заметим, что $p_0 \in \mathcal{F}_0$.) Так как для любой точки $u \in \Omega(\mathcal{B}, b_0)$ путь $s(p_0, u)$ является путем в $\mathcal{E}$, начинающимся в точке p_0 и проектирующимся в путь u , то конец $s(p_0, u)(1)$ этого пути

принадлежит слою $\mathcal{F}_0$. Таким образом, формула

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1), \quad u \in \Omega\mathcal{B},$$

определяет — очевидно, непрерывное — отображение

$$s_1: \Omega\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}_0.$$

В случае, когда расслоение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ представляет собой накрытие и, значит, пространство $\mathcal{F}_0$ дискретно, отображение s_1 — являясь непрерывным отображением — обладает тем свойством, что для каждой петли $u \in \Omega\mathcal{B}$ точка $s_1(u)$ зависит только от содержащей петлю u компоненты $\Omega_\alpha\mathcal{E}$, т. е. только от гомотопического класса $\alpha = [u]$ этой петли. Это означает, что формула

$$\sigma(\alpha) = s_1(u), \quad \alpha \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0),$$

где u — произвольная петля класса α , корректно определяет некоторое отображение

$$(4) \quad \sigma: \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \mathcal{F}_0.$$

Заметим, что в случае, когда пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, изложенная конструкция определяет отображение (4) *единственным образом*.

Если хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ локально линейно связно, то пространство $\mathcal{E}$ также локально линейно связно и значит — см. лекцию III.11 — линейно связно (вместе с пространством $\mathcal{B}$). Поэтому для любой точки $p \in \mathcal{F}_0$ в $\mathcal{E}$ существует путь v , соединяющий точку p_0 с точкой p . Проекция $u = \pi \circ v$ этого пути является петлей в точке p_0 , а путь $s(p_0, u)$, накрывающий эту петлю, совпадает — в силу единственности накрывающего пути — с путем v . Поэтому $s_1(u) = p$, т. е. $\sigma(\alpha) = p$, где $\alpha = [u]$. Этим доказано, что если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово и локально линейно связно, то для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ отображение σ *надъективно*. Попутно мы также доказали, что для каждого пути $v \in \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E})$ имеет место равенство

$$(5) \quad v = s(p_0, u), \quad \text{где } u = \pi \circ v.$$

[Для справедливости этого утверждения достаточно, чтобы пространство $\mathcal{B}$ было хаусдорфовым.]

Слой $\mathcal{F}_0$ является множеством с отмеченным элементом p_0 . Поэтому для отображения σ имеет смысл говорить о его ядре Кег $\sigma = \sigma^{-1}(p_0)$. По определению это ядро состоит из гомотопических классов $\alpha = [u]$ петель $u \in \Omega\mathcal{B}$, для которых путь $s(p_0, u)$ является петлей. Так как

в силу равенства (5) это в точности петли u , являющиеся проекциями $\pi \circ v$ петель $v \in \Omega \mathcal{E}$, то $\text{Ker } \sigma = \text{Im } \pi_*$, где

$$(6) \quad \pi_*: \pi_1(\mathcal{E}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$$

— гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный накрытием π .

С другой стороны, легко видеть, что гомоморфизм (6) является мономорфизмом (и, следовательно, представляет собой изоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{E}, p_0)$ на ядро $\text{Ker } \sigma = \text{Im } \pi_*$ отображения σ). Действительно, для петли $v \in \Omega \mathcal{E}$ равенство $\pi_*[v] = 0$ означает, что в пространстве $\Omega \mathcal{B}$ существует путь $\tau \mapsto u_\tau$, связывающий постоянную петлю e_{p_0} с петлей $u = \pi \circ v$. Поэтому для любого $\tau \in I$ путь $v_\tau = s(p_0, u_\tau)$ пространства $\mathcal{E}$ будет соединять точку p_0 с точкой $s_1(u_\tau)$ и отображение $\tau \mapsto v_\tau$ отрезка I в пространство $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{E})$ будет (докажите!) непрерывным, т. е. будет представлять собой путь в пространстве $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{E})$, соединяющий путь $s(p_0, e_{p_0}) = e_{p_0}$ с путем $s(p_0, u) = v$. Но тогда точка $s_1(u_\tau) = v_\tau(1)$ также будет непрерывно зависеть от τ . Значит — поскольку эта точка принадлежит дискретному пространству $\mathcal{F}_0$, — она будет одна и та же для всех τ . Это означает, что $s_1(u_\tau) = s_1(u_0) = p_0$, т. е. что все пути v_τ являются петлями в точке p_0 . Поэтому $v \in \Omega_p \mathcal{E}$, т. е. $[v] = e$. $\square$

[Заметим, что последнее рассуждение справедливо без каких-либо общетопологических ограничений на пространство $\mathcal{B}$.]

Последовательность

$$(7) \quad \dots \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow \dots$$

групп и их гомоморфизмов (или, более общо, множеств с отмеченными точками и их отображений, переводящих отмеченные точки в отмеченные) называется *точной в члене B* , если $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$. Последовательность (7) называется *точной*, если она точна в каждом члене.

Пользуясь этим языком, мы можем теперь подытожить все доказанные утверждения в следующем предложении:

Предложение 1. Для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ связного и локально линейно связного хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ имеет место точная последовательность

$$(8) \quad \{e\} \rightarrow \pi_1(\mathcal{E}, p_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}_0 \rightarrow pt,$$

где pt — множество, состоящее из одной точки.

Точность последовательности (8) в члене $\pi_1(\mathcal{E}, p_0)$ означает, что гомоморфизм π_* является мономорфизмом, точность в члене $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ означает выполнение равенства $\text{Ker } \sigma = \text{Im } \pi_*$, а точность в члене $\mathcal{F}_0$ — надъективность отображения σ .

Определение 1. Последовательность (8) называется *точной гомотопической последовательностью* накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Предложение I можно дополнить. Именно, легко видеть, что в последовательности (8) прообраз $\sigma^{-1}(p)$ при отображении σ произвольной точки $p \in \mathcal{F}_0$ является левым смежным классом группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ по подгруппе $\text{Im } \pi_*$ (т. е. для элементов $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ равенство $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha\beta^{-1} \in \text{Im } \pi_*$). Действительно, из единственности накрывающего пути немедленно вытекает, что

$$(9) \quad \begin{aligned} s(p_0, u)^{-1} &= s(p_1, u^{-1}), \\ s(p_0, uv) &= s(p_0, u) s(p_1, v) \end{aligned}$$

для любых путей $u \in \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ и $v \in \mathcal{P}(b_1, \mathcal{B})$, где $p_1 = s_1(u) = s(p_0, u)(1)$. Поэтому если для петель $u, v \in \Omega\mathcal{B}$ имеет место равенство $\sigma[u] = \sigma[v]$ (т. е. равенство $s_1(u) = s_1(v)$), то

$$s(p_0, u) s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, uv^{-1}),$$

и, следовательно,

$$uv^{-1} = (\pi \circ s)(p_0, uv^{-1}) \in \pi \circ (\Omega\mathcal{E}).$$

Значит, $[u] \cdot [v]^{-1} = [uv^{-1}] \in \text{Im } \pi_*$.

Обратно, если $[u] \cdot [v]^{-1} \in \text{Im } \pi_*$, то $uv^{-1} = \pi \circ w$, где $w \in \Omega\mathcal{E}$ и, следовательно,

$$s(p_0, u) s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, \pi \circ w) = w.$$

Поэтому

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1) = (w \cdot s(p_0, u))(1) = s(p_0, v)(1) = s_1(v);$$

откуда $\sigma[u] = \sigma[v]$. $\square$

Для любого гомоморфизма групп $\varphi: A \rightarrow B$ множество $B/\text{Im } A$ смежных классов группы B по подгруппе $\text{Im } A$ называется *коядром* этого гомоморфизма и обозначается символом $\text{Coker } \varphi$. В этой терминологии доказанное утверждение означает, что для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ связанного локально линейно связного и хаусдорфова простран-

ства $\mathcal{B}$ отображение σ индуцирует биективное отображение

$$(10) \quad \text{Coker } \pi_* \rightarrow \mathcal{F}_0.$$

На все это можно посмотреть несколько иначе, если ввести отображение

$$\bar{\sigma}: \mathcal{F}_0 \times \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \mathcal{F}_0,$$

определенное формулой

$$\sigma(p_0, \alpha) = \sigma_{p_0}(\alpha), \quad p_0 \in \mathcal{F}_0, \quad \alpha \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0),$$

где σ_{p_0} — отображение σ , отвечающее точке p_0 .

Из формул (9) непосредственно вытекает, что отображение $\bar{\sigma}$ является правым действием группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ на множестве $\mathcal{F}_0$ и, значит, задает некоторое представление

$$\pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \text{Sym } \mathcal{F}_0$$

группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ в группе $\text{Sym } \mathcal{F}_0$ всех перестановок множества $\mathcal{F}_0$. Это представление называется *представлением монодромии* (или просто *монодромией*) накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, а его образ в $\text{Sym } \mathcal{F}_0$ — *группой монодромии* этого накрытия.

Для любого (правого) действия $\mathcal{F}_0 \times \Pi \rightarrow \mathcal{F}_0$ некоторой группы Π на множестве $\mathcal{F}_0$ и любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_0$ множество Γ всех элементов $\alpha \in \Pi$, для которых $p_0 \alpha = p_0$, является, очевидно, подгруппой группы Π . Эта подгруппа называется *стационарной подгруппой* (или *стабилизатором*) точки p_0 . Отображение $\alpha \mapsto p_0 \alpha$ группы Π на орбиту $p_0 \Pi$ точки p_0 индуцирует — как легко видеть, биективное — отображение

$$\Pi/\Gamma \rightarrow p_0 \Pi$$

множества Π/Γ левых смежных классов группы Π по подгруппе Γ на орбиту $p_0 \Pi$. В случае, когда действие *транзитивно*, т. е. все множество $\mathcal{F}_0$ является орбитой каждого своего элемента, это дает биективное отображение

$$(11) \quad \Pi/\Gamma \rightarrow \mathcal{F}_0.$$

Для действия $\bar{\sigma}$ отображение $\alpha \mapsto p_0 \alpha$ является, конечно, не чем иным, как отображением $\sigma = \sigma_{p_0}$. Поэтому утверждение о надъективности отображения σ означает, что действие σ транзитивно, а утверждение, что $\text{Ker } \sigma = \text{Im } \pi_*$, означает, что $\text{Im } (\pi_*)_{p_0}$ является стационарной подгруппой точки p_0 . Утверждение же о биективности отображения (10)

является поэтому всего лишь специализацией общего утверждения о биективности отображения (11) (и потому в отдельном доказательстве не нуждается).

Определение 2. Накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ называется *односвязным*, если пространство $\mathcal{E}$ односвязно.

Пространство $\mathcal{B}$ называется *односвязно накрываемым*, если для него существует хотя бы одно односвязное накрытие.

Следующее предложение является одним из основных орудий для вычисления фундаментальных групп конкретных пространств. (Фактически мы им и пользовались в лекции 2 при вычислении группы $\pi_1(S^1, p_0)$.)

Предложение 2. Если связное и локально линейно связное хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ односвязно накрываемо, то для любой точки $b_0 \in \mathcal{B}$ группа $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ находится в биективном соответствии со слоем $\mathcal{F}_{b_0}$ над точкой b_0 произвольного односвязного расслоения

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Это соответствие зависит от выбора точки $p_0 \in \mathcal{F}$ и определяется формулой

$$[u] \rightarrow_s (p_0, u) \quad (1), \quad u \in \Omega \mathcal{B}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если $\pi_1(\mathcal{E}, p_0) = 1$, то $\text{Сокет } \pi_* = \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$. $\square$

Предложение 2 ничего не говорит об алгебранческой структуре группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$. В этом отношении его дополняет следующее предложение:

Предложение 3. Пусть для связного и локально линейно связного хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ существует такое связное пространство $\mathcal{E}$ и такая дискретная группа Γ , дискретно действующая справа на пространстве $\mathcal{E}$, что:

а) пространство $\mathcal{E}$ односвязно;

б) пространство орбит $\mathcal{E}/\Gamma$ гомеоморфно пространству $\mathcal{B}$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ изоморфна группе Γ .

Доказательство. отождествив $\mathcal{B}$ с $\mathcal{E}/\Gamma$, рассмотрим естественную проекцию

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}, \quad p \mapsto p\Gamma.$$

Как мы знаем (см. пример 5 лекции 2), тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ является — в силу условия а односвязным — накрытием, слоями которого служат орбиты $p\Gamma$ действия группы Γ

на пространстве $\mathcal{B}$. Поэтому согласно предложению 2 формула

$$\sigma[u] = s(p_0, u)(1),$$

где p_0 — произвольная точка орбиты $b_0 \in \mathcal{B}$, определяет биективное отображение

$$\sigma: \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow p_0\Gamma$$

группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ на орбиту $p_0\Gamma = b_0$. Но, так как дискретное действие свободно, то любая точка p орбиты $p_0\Gamma$ единственным образом представляется в виде $p_0\gamma$, где $\gamma \in \Gamma$. Поэтому, положив $\tau(p) = \gamma^{-1}$ (в введенных в лекции 1 обозначениях $\gamma = \tau(p, p_0)$, где τ — отображение сдвига), мы получим биективное отображение

$$(12) \quad d = \tau \circ \sigma: \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \Gamma.$$

Мы докажем предложение 3, показав, что отображение (12) является гомоморфизмом групп (а значит — в силу биективности — и изоморфизмом), т. е. что

$$d([u] \cdot [v]) = d([u]) \cdot d([v])$$

для любых путей $u, v \in \Omega\mathcal{B}$.

Пусть $d[u] = \gamma^{-1}$ и $d[v] = \delta^{-1}$. По определению

$$p_0\gamma = s(p_0, u)(1) \quad \text{и} \quad p_0\delta = s(p_0, v)(1).$$

Пусть $p_0\gamma = p_1$ и $w = s(p_0, v)$. Определим на пространстве $\mathcal{B}$ путь $w\gamma$ формулой

$$(w\gamma)(t) = w(t)\gamma, \quad t \in I.$$

Путь $w\gamma$ начинается в точке $w(0)\gamma = p_0\gamma = p_1$ и накрывает ту же петлю v , что и путь $w = s(p_0, v)$. Следовательно, $w\gamma = s(p_1, v)$ и потому

$$s(p_0, u) \cdot w\gamma = s(p_0, u) \cdot s(p_1, v) = s(p_0, uv)$$

(см. вторую из формул (9)). Значит,

$$\begin{aligned} \sigma([u] \cdot [v]) &= \sigma[uv] = \\ &= s(p_0, uv)(1) = \\ &= (w\gamma)(1) = \\ &= w(1)\gamma = (p_0\delta)\gamma = p_0(\delta\gamma) \end{aligned}$$

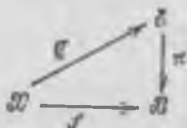
и потому

$$d([u] \cdot [v]) = (\delta\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\delta^{-1} = d[u] \cdot d[v]. \quad \square$$

(Ср. вычисление группы $\pi_1(S^1, p_0)$ в лекции 3.)

Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное отображение.

Определение 3. Говорят, что непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ *поднимаемо* (относительно π), если существует такое непрерывное отображение $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$, что $\pi \circ g = f$, т. е. если диаграмма



коммутативна. Отображение g называется *поднятием* (или *лифтом*) отображения f . Говорят также, что g *накрывает* f .

При $\mathcal{X} = I$, т. е. когда f — путь в $\mathcal{B}$, поднятие g является не чем иным, как накрывающим путем. При $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ поднятия вложения $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ — это сечения отображения π над $\mathcal{X}$.

С другой стороны, в интерпретации отображения π как расслоения (см. лекцию 1) его поднятия — это в точности морфизмы над $\mathcal{B}$ расслоения f в расслоение π .

Мы будем исследовать задачу о поднятии отображения f для случая, когда отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является накрытием.

Задача 1. Докажите, что если пространство $\mathcal{X}$ связно, пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, а отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является накрытием, то для любого отображения $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ и любых точек $x_0 \in \mathcal{X}$ и $p_0 \in \mathcal{E}$, связанных соотношением

$$f(x_0) = \pi(p_0),$$

может существовать не более одного отображения $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$, накрывающего отображение f и такого, что $g(x_0) = p_0$. (Теорема о единственности накрывающего отображения.)

[Эта теорема является обобщением теоремы о единственности накрывающего пути (см. теорему 1 лекции 2) и доказывается почти дословно так же. Впрочем, если предполагать пространство $\mathcal{X}$ линейно связным, то можно не повторять доказательства, а, выбрав для любой точки $x \in \mathcal{X}$ путь u_x , соединяющий точку x_0 с точкой x , и заметив, что путь $g \circ u_x$ накрывает путь $f \circ u_x$, просто сослаться на теорему о единственности накрывающего пути.]

Вопрос о существовании поднятия значительно сложнее и деликатнее.

Напомним (см. пример 7 лекции 2), что для любого топологического пространства $\mathcal{X}$ и любой его точки x_0 формула

$$\rho(u) = u(1), \quad u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}),$$

определяет расслоение в смысле Гуревича

$$\rho: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}.$$

Эта конструкция перестановочна с непрерывными отображениями (естественна в смысле теории категорий), т. е. для любого непрерывного отображения $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{X} \\ \downarrow f \circ \iota & & \downarrow \iota \\ \mathcal{P}(y_0, \mathcal{B}) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{B}, \end{array}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Так как $\rho(e_{x_0}) = x_0$, где, как всегда, e_{x_0} — постоянный путь в точке x_0 , то расслоение ρ индуцирует отображение

$$(14) \quad \rho_*: \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) \rightarrow \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}),$$

переводящее каждый путь $w: I \rightarrow \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ пространства $\mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ в путь $\rho_* w: t \mapsto w(t)(1)$, $t \in I$, пространства $\mathcal{X}$.

Отображение (14) не надо путать с отображением

$$\rho: \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) \rightarrow \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}),$$

которое путь $w: I \rightarrow \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ переводит в путь $w(1): \tau \mapsto w(1)\tau$, $\tau \in I$, пространства $\mathcal{X}$ и, вообще говоря, отлично от отображения (14).

Интересно, однако, что оба отображения ρ_* и ρ допускают одно и то же сечение, т. е. существует такое отображение

$$(15) \quad \#: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})),$$

что для любого пути $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ имеют место равенства

$$(16) \quad \rho_* u^* = u \quad \text{и} \quad \rho(u^*) = u, \quad \text{где} \quad u^* = \#(u).$$

Отображение (15) задается формулой

$$u^*(t)(\tau) = u(t\tau), \quad t, \tau \in I,$$

где $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$.

Лемма 1. Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича. Тогда для любого непрерывного отобра-

жения $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ и любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$ существует отображение $h: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{E}$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \xrightarrow{h} & \mathcal{E} \\ \rho \downarrow & f & \downarrow \pi \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{B}, \end{array}$$

т. е. такое, что

$$f \circ \rho = \pi \circ h.$$

Доказательство. Выбрав точку $p_0 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющую соотношению $f(x_0) = \pi(p_0)$, мы для любого пути $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ положим

$$h(u) = s(p_0, f \circ u)(1),$$

где $s: \text{Cocyl} \pi \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ — произвольное сечение отображения $\pi: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Cocyl} \pi$, $v \mapsto (v(0), \pi \circ v)$ (см. лекцию 2).

Тогда

$$\begin{aligned} (\pi \circ h)(u) &= \pi(s(p_0, f \circ u)(1)) = (f \circ u)(1) = \\ &= f(u(1)) = (f \circ \rho)(u). \quad \square \end{aligned}$$

Из коммутативности диаграммы (17) вытекает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) & \xrightarrow{h_*} & \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E}) \\ \rho_* \downarrow & f_* & \downarrow \pi_* \\ \mathcal{P}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}) \end{array}$$

также коммутативна. Поэтому в силу первого из равенств (16) будет коммутативна и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) & \xrightarrow{h_*} & \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E}) \\ * \uparrow & i_* & \downarrow \pi_* \\ \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}), \end{array}$$

т. е. для любой петли $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ будет иметь место равенство

$$(18) \quad f \circ u = \pi \circ h \circ u^*, \quad u^* = \#(u).$$

В частности, равенство (18) имеет место для каждого накрытия $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Имея это в виду, рассмотрим два пути $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$, кончающиеся в одной и той же точке, т. е. такие, что

$$\rho(u) = \rho(v).$$

Тогда определен путь uv^{-1} , являющийся петлей пространства $\mathcal{X}$ в точке x_0 . Предположим, что в накрывающем пространстве $\mathcal{E}$ существует такая петля w в точке ρ_0 , что петля

$$f \circ (uv^{-1}) = (f \circ u)(f \circ v)^{-1}$$

пространства $\mathcal{B}$ гомотопна петле $\pi \circ w$. Тогда

$$(19) \quad f \circ u \sim (\pi \circ w)(f \circ v),$$

и, значит (см. формулу (18))

$$\pi \circ h \circ u^* \sim (\pi \circ w)(\pi \circ h \circ v^*),$$

т. е.

$$\pi \circ (h \circ u^*) \sim \pi \circ (w \cdot (h \circ v^*)).$$

Поскольку для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ отображение

$$\pi_*: [u] \mapsto [\pi \circ u]$$

является, как мы знаем, мономорфизмом, отсюда следует (рассмотрите петлю $(h \circ u^*)(w \cdot (h \circ v^*))^{-1}$), что

$$h \circ u^* \sim w \cdot (h \circ v^*).$$

Но гомотопность путей, в частности, предполагает, что концы этих путей (так же, как, конечно, и начала) совпадают. Поэтому

$$\rho(h \circ u^*) = \rho(w \cdot (h \circ v^*)) = \rho(h \circ v^*);$$

откуда следует—в силу коммутативности диаграммы (13) для отображения h , — что

$$h(\rho(u^*)) = h(\rho(v^*)),$$

т. е. (см. вторую формулу (16)) что $h(u) = h(v)$.

Тем самым нами доказана следующая лемма:

Лемма 2. Если в диаграмме (17) отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является накрытием и если для путей $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$, удовлетворяющих соотношению

$$\rho(u) = \rho(v),$$

существует такая петля $w \in \Omega \mathcal{E}$, что имеет место

гомотопия (19), то

$$h(u) = h(v). \quad \square$$

Заметим, что существование петли w заведомо обеспечено, если для гомоморфизмов

$$f_*: \pi_1(\mathcal{X}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \quad \text{и} \quad \pi_*: \pi_1(\mathcal{E}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$$

фундаментальных групп, индуцированными непрерывными отображениями f и π , имеет место включение

$$(20) \quad \text{Im } f_* \subset \text{Im } \pi_*.$$

Пусть теперь пространство $\mathcal{X}$ линейно связно. Выбрав для каждой точки $x \in \mathcal{X}$ путь u_x , соединяющий точку x_0 с точкой x , мы определим отображение $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$, положив

$$g(x) = h(u_x).$$

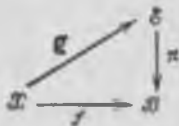
[Таким образом, чтобы построить отображение g , надо, выбрав для каждой точки $x \in \mathcal{X}$ путь u_x , рассмотреть путь $f \circ u_x$, построить для этого пути начинающийся в точке p_0 накрывающий путь $s(p_0, f \circ u_x)$ и взять его конец $s(p_0, f \circ u_x)(1)$.]

Согласно только что сделанному замечанию и лемме 2, если имеет место включение (20), то это построение корректно (точка $g(x)$ не зависит от выбора пути u_x).

По построению $g(x_0) = p_0$, $h = g \circ \rho$, и значит

$$\pi \circ g \circ \rho = \pi \circ h = f \circ \rho.$$

В силу надъективности отображения ρ отсюда следует, что $\pi \circ g = f$, т. е. диаграмма

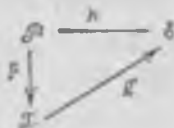


коммутативна.

Однако это еще не означает, что отображение g является поднятием отображения f , поскольку, вообще говоря, это отображение может и не быть непрерывным. Чтобы найти условия, обеспечивающие непрерывность отображения g — и значит тот факт, что оно является поднятием отображения f , — мы напомним (см. лекцию 1), что непрерывное отображение $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ называется *эпиморфным*, если множество $U \subset \mathcal{X}$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $\rho^{-1}U \subset \mathcal{P}$.

Лемма 3. Пусть в коммутативной диаграмме

(21)



отображение h непрерывно, а отображение ρ эпиморфно. Тогда отображение g непрерывно.

Доказательство. Так как диаграмма (21) коммутативна, то

$$\rho^{-1}(g^{-1}U) = h^{-1}U$$

для любого множества $U \subset \mathcal{Z}$. С другой стороны, если множество U открыто, то в силу непрерывности отображения h множество $h^{-1}U$ также открыто. Таким образом, для любого открытого множества $U \subset \mathcal{Z}$ множество $g^{-1}U$ обладает тем свойством, что множество $\rho^{-1}(g^{-1}U)$ открыто. Поэтому в силу эпиморфности отображения ρ множество $g^{-1}U$ открыто. Следовательно, отображение g непрерывно. $\square$

Определение 4. Топологическое пространство $\mathcal{X}$ мы будем называть *удобным*, если оно линейно связно и для любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$ — очевидно, надъективное — отображение

$$\rho: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}, \quad u \mapsto u(1), \quad u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}),$$

эпиморфно.

В силу леммы 3 для такого пространства $\mathcal{X}$ построенное выше отображение g непрерывно.

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное накрытие, $\mathcal{X}$ — удобное топологическое пространство и

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$$

— непрерывное отображение. Если существуют такие точки $x_0 \in \mathcal{X}$ и $p_0 \in \mathcal{E}$, что $f(x_0) = \pi(p_0)$ и имеет место включение (20), то отображение f поднимаемо. При этом существует поднятие

$$g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$$

отображения f , для которого $g(x_0) = p_0$. Если пространство хаусдорфово, то поднятие g единственно. $\square$

Заметим, что условие (20) необходимо для существования поднятия g . Действительно, если $f = \pi \circ g$, то $f_* = \pi_* \circ g_*$

и потому

$$\operatorname{Im} f_* = \pi_*(\operatorname{Im} g_*) \subset \operatorname{Im} \pi_*. \quad \square$$

Задача 2. Покажите, что если условие (20) выполнено при одном выборе точек x_0 и p_0 , то для любой точки $x'_0 \in \mathcal{X}$ существует такая точка $p'_0 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющая соотношению $f(x'_0) = \pi(p'_0)$, что условие (20) выполнено для точек x'_0 и p'_0 , т. е. имеет место включение

$$\operatorname{Im} (f_*)_{x'_0} \subset \operatorname{Im} (\pi_*)_{p'_0}.$$

(Заметим, что принять здесь за p'_0 любую точку пространства $\mathcal{E}$, удовлетворяющую соотношению $f(x'_0) = \pi(p'_0)$, вообще говоря, нельзя.)

Следствие. Для любого накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ и любого односвязного удобного пространства $\mathcal{X}$ каждое непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ поднимаемо. Для любых точек $x_0 \in \mathcal{X}$, $p_0 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих соотношению $f(x_0) = \pi(p_0)$, существует поднятие $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ отображения f , для которого $g(x_0) = p_0$. Если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, то это поднятие единственно.

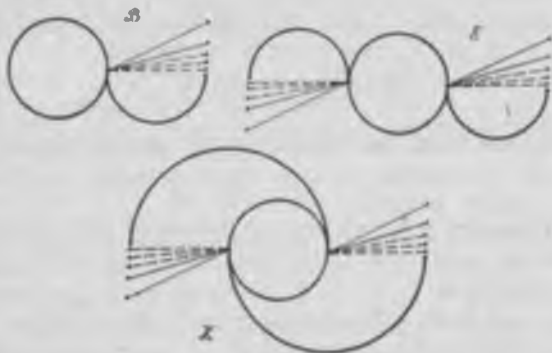
Доказательство. Достаточно заметить, что при $\pi_1(\mathcal{X}, x_0) = 1$ условие (20) автоматически выполнено. $\square$

Это следствие (а иногда и сама теорема 1) называется принципом (или теоремой) о монодромии. На нем основывается бессчетное число разнообразных теорем существования в геометрии и анализе. Как мы увидим в следующей лекции, оно играет существенную роль и в собственно теории накрытий.

Для пространств $\mathcal{X}$, не являющихся удобными, теорема о монодромии, вообще говоря, не верна.

Пример 1. Пусть $\mathcal{B}$ — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из окружности $x^2 + y^2 = 1$, полуокружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$, и отрезков, соединяющих точку $(1, 0)$ со всеми точками вида $(3, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть, далее, $\mathcal{E}$ — результат объединения множества $\mathcal{B}$ с множеством, ему центрально симметричным, а $\mathcal{X}$ — множество, получающееся из множества $\mathcal{E}$ заменой полуокружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $y \leq 0$, и полуокружности, ей симметричной, на полуокружность $(x-1)^2 + y^2 = 4$, $y \leq 0$, и симметричную полуокружность. Пусть, наконец, $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ и $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ — отображения, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ дважды наматывается на себя (при неподвижной точке $p_0 = (1, 0)$), отрезки отображаются на соответствующие отрезки изометрично, а полуокружности из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{X}$ гомео-

морфно отображаются на полуокружность из $\mathcal{B}$. Легко видеть (докажите!), что оба эти отображения являются накрытиями. Отображение же $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ (единственное!), удовлетворяющее соотношению $\log = f$ и оставляющее на месте точку $(1, 0)$, тождественно на окружности $x^2 + y^2 = 1$



и всех отрезках, но нижнюю правую полуокружность из $\mathcal{X}$ оно отображает в верхнюю левую полуокружность из $\mathcal{B}$ (а верхнюю левую — в нижнюю правую). В частности, точку $(3, 0)$ из $\mathcal{X}$ оно отображает в точку $(-3, 0)$ на $\mathcal{B}$. Поскольку концы правых отрезков сходятся в $\mathcal{X}$ и в $\mathcal{B}$ к одной и той же точке $(3, 0)$, это означает, что в точке $(3, 0)$ отображение g терпит разрыв. Следовательно, для отображения f непрерывного поднятия g , переводящего точку $(1, 0)$ в себя, не существует. Вместе с тем условие (20) здесь, как легко видеть, выполнено (докажите!).

Этот пример принадлежит Зиману.

Задача 3. Покажите, что для всех трех пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ из примера 1 вложение окружности индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Таким образом, фундаментальная группа каждого из этих пространств является бесконечной циклической группой с образующей 1, являющейся гомотопическим классом петли, однократно обегавшей окружность. Покажите, что оба гомоморфизма фундаментальных групп $\pi_1(\mathcal{X}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, p_0)$ и $\pi_1(\mathcal{E}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, p_0)$, индуцированные накрытиями f и g , действуют по формуле $i^n \mapsto i^{2n}$.

Обратим внимание, что в примере Зимана пространство $\mathcal{X}$ локально линейно несвязно. (У точек $(3, 0)$ и $(-3, 0)$ все достаточно малые окрестности линейно несвязны.) Это не является случайностью.

Предложение 4. Любое связное и локально линейно связное пространство $\mathcal{X}$ удобно.

Доказательство. Как мы знаем (лекция III. 11), пространство $\mathcal{X}$ линейно связно. Поэтому надо лишь доказать, что для любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$ отображение $\rho: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ эпиморфно. Мы докажем даже большее, а именно (см. задачу 1 лекции 1), что *отображение ρ открыто*.

Пусть u_0 — путь в $\mathcal{X}$, начинающийся в точке x_0 . Для произвольной окрестности W пути u_0 в пространстве $\mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ нам надо доказать, что точка $\rho(u_0) = u_0(1)$ является внутренней точкой образа ρW окрестности W при отображении ρ . При этом ясно, что это достаточно сделать лишь для окрестностей вида

$$W = \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \cap \langle K_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle K_n, U_n \rangle,$$

где $K_1, \dots, K_n$ — компактные (= замкнутые) подмножества отрезка I , а $U_1, \dots, U_n$ — открытые множества пространства $\mathcal{X}$. (Напомним, что символом $\langle K, U \rangle$ мы обозначаем множество всех путей $u: I \rightarrow \mathcal{X}$, для которых $u(K) \subset U$.)

Без ограничения общности мы можем считать, что множества $K_1, \dots, K_n$ занумерованы так, что для некоторого m , $0 \leq m \leq n$, имеют место соотношения

$$1 \in K_1, \dots, 1 \in K_m, 1 \notin K_{m+1}, \dots, 1 \notin K_n.$$

(Равенство $m=0$ означает, что $1 \notin K_i$ для всех i , а равенство $m=n$ — что $1 \in K_i$ для всех i .) Тогда $u_0(1) \in U_1 \cap \dots \cap U_m$, и значит, существует линейно связная окрестность V точки $\rho(u_0) = u_0(1)$, содержащаяся в $U_1 \cap \dots \cap U_m$. (При $m=0$ за окрестность V принимается произвольная линейно связная окрестность точки $\rho(u_0)$.) Выберем число t_0 , $0 < t_0 < 1$, так, чтобы отрезок $[t_0, 1]$ не пересекался с множествами $K_{m+1}, \dots, K_n$ и чтобы для любого t , $t_0 \leq t \leq 1$, имело место включение $u_0(t) \in V$. Ясно, что это всегда можно сделать.

Выбрав теперь для любой точки $x \in v$ путь v_x в v , соединяющий точку $u_0(1)$ с точкой x , рассмотрим путь $u_x \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$, определенный формулой

$$u_x(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ v_x\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), & \text{если } t_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $u_x \in W$, т. е. $u_x(t) \in U_i$, когда $t \in K_i$, $i=1, \dots, n$. (Если $i=1, \dots, m$ и $t \in K_i$, то $u_x(t) =$

$= u(t) \in U_i$ при $0 \leq t \leq t_0$ и $u_x(t) = v\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right) \in V \subset U_i$ при $t_0 \leq t \leq 1$. Значит, в обоих случаях $u_x(t) \in U_i$. Если же $i = m+1, \dots, n$ и $t \in K_i$, то непременно $0 \leq t \leq t_0$ и потому $u_x(t) = u(t) \in U_i$. Поскольку, очевидно, $\rho(u_x) = x$, этим доказано, что $V \subset \rho W$, и значит, точка $\rho(u_0)$ является внутренней точкой множества ρW . $\square$

Таким образом, принцип монодромии применим к любым связным и локально линейно связным пространствам $\mathcal{X}$.

Следствие. Для каждого связного, локально линейно связного и односвязного подпространства $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ и любых точек $b_0 \in \mathcal{X}$, $p_0 \in \mathcal{B}$, удовлетворяющих соотношению $\pi(p_0) = x_0$, произвольное накрытие $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ обладает сечением $s: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$, для которого $s(b_0) = p_0$. Если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, то сечение s единственно.

Лекция 5

Полулокально односвязные пространства.— Существование односвязных накрытий.— Условие изоморфности двух накрытий.— Универсальные накрытия.— Вспомогательная лемма.— Теорема классификации накрытий.— Группа автоморфизмов накрытия.— Регулярные накрытия.— Введение гладкости.

Вычисление фундаментальной группы данного пространства $\mathcal{B}$ с помощью предложений 2 и 3 лекции 4 предполагает умение строить односвязные накрытия этого пространства. На практике такого рода накрытия обычно строятся на основе конкретных свойств пространства $\mathcal{B}$, но для теоретической оценки силы этого метода нужно иметь достаточно общий способ их конструирования, хотя бы на практике и не применимый.

В первую очередь мы укажем простое условие на пространство $\mathcal{B}$, необходимое для того, чтобы оно было односвязно накрываемым.

Определение 1. Топологическое пространство $\mathcal{B}$ называется *локально односвязным*, если каждая его точка b_0 обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из односвязных окрестностей (т. е. таких линейно связных окрестностей U , что $\pi_1(U, b_0) = 1$). Пространство $\mathcal{B}$ называется *полулокально односвязным* (или *микроодносвязным*), если оно может быть покрыто открытыми множествами U , обладающими тем свойством, что для любой точки $b \in U$ каждая петля $\alpha \in \Omega(U, b)$ гомотопна в $\mathcal{B}$ постоянной петле e_b (т. е. такими, что для любой точки $b \in U$ образ группы $\pi_1(U, b)$ в группе $\pi_1(\mathcal{B}, b)$ при гомоморфизме, индуцированном вложением $U \rightarrow \mathcal{B}$, тривиален; для сокращения речи мы будем называть такие множества U *односвязными в $\mathcal{B}$*).

Ясно, что любое подмножество односвязного в $\mathcal{B}$ множества U односвязно в $\mathcal{B}$. Поэтому в полулокально односвязном пространстве $\mathcal{B}$ каждая точка обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из односвязных в $\mathcal{B}$ окрестностей, а если пространство $\mathcal{B}$ еще и локально линейно связано, то эти окрестности можно считать линейно связными.

Конечно, каждое локально односвязное пространство полулокально односвязно. Кроме того, так как шар $\mathbb{B}^n$, как мы знаем, односвязен (см. пример 7 лекции 2), то

любое многообразие локально (и, значит, полулокально) односвязно.

Предложение 1. Любое связное, локально линейно связное и односвязно накрываемое пространство $\mathcal{B}$ полулокально односвязно.

Доказательство. Пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — односвязное накрытие пространства $\mathcal{B}$ и пусть U — произвольное ровно накрываемое открытое подмножество пространства $\mathcal{B}$. Предложение 1 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что для любой точки $b_0 \in U$ каждая петля $u \in \Omega(U, b_0)$ гомотопна в $\mathcal{B}$ постоянной петле e_{b_0} .

С этой целью, произвольно выбрав точку $p_0 \in \pi^{-1}(b_0)$, рассмотрим окрестность V точки p_0 , ровно накрывающую окрестность U . Так как отображение $\pi|_V: V \rightarrow U$ является, по определению, гомеоморфизмом, то в V определена петля

$$v = (\pi|_V)^{-1} \circ u,$$

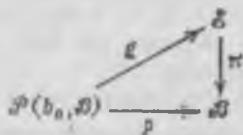
а так как пространство $\mathcal{E}$ по условию односвязно, то эта петля гомотопна в $\mathcal{E}$ постоянной петле e_{p_0} . Поэтому петля $u = \pi \circ v$ также гомотопна (в $\mathcal{B}$) постоянной петле. $\square$

Пример 1. Пространство $\mathcal{B}$, являющееся прямым произведением счетного семейства окружностей S^1 , очевидным образом, не полулокально односвязно. Поэтому для него не существует односвязного накрытия.

Оказывается, что для хаусдорфовых пространств $\mathcal{B}$ это необходимое условие также и достаточно.

Теорема 1. Любое связное, локально линейно связное и полулокально односвязное хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ односвязно накрываемо.

Чтобы догадаться, как можно доказать эту теорему, мы предположим сначала, что односвязное накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ существует. Тогда, выбрав точку $b_0 \in \mathcal{B}$ и применив лемму 1 лекции 4 к накрытию $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ и тождественному отображению $f = \text{id}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, получим отображение $g: \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}$, являющееся поднятием отображения $p: \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$, т. е. такое, что диаграмма



коммутативна.

Задача 1. Докажите, что отображение g надъективно и обладает тем свойством, что для путей $u, v \in \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ тогда и только тогда имеет место равенство $g(u) = g(v)$, когда $u(1) = v(1)$ и петля uv^{-1} пространства $\mathcal{B}$ гомотопна постоянной петле. [Указание. По определению $g(u) = s(p_0, u(1))$.]

Утверждение задачи 1 означает, что пространство $\mathcal{E}$ является—с точностью до топологии—факторпространством пространства $\mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ по отношению эквивалентности $\equiv$, в котором $u \equiv v$ тогда и только тогда, когда $u(1) = v(1)$ и $uv^{-1} \sim e_{b_0}$. Это подсказывает, что пространство $\mathcal{E}$ можно пытаться определить как фактормножество пространства $\mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ по отношению $\equiv$, наделенное подходящей топологией. Так мы и поступим.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{E}$ —множество классов $\langle u \rangle$ путей $u \in \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ по отношению эквивалентности $\equiv$ и пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ —отображение, определенное—очевидно, корректно—формулой

$$\pi \langle u \rangle = u(1).$$

Для каждого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$ и каждого пути $u: I \rightarrow \mathcal{B}$, соединяющего точку b_0 с некоторой точкой из U , мы обозначим через $\langle u, U \rangle$ множество всех точек из $\mathcal{E}$ вида $\langle uv \rangle$, где v —произвольный путь в U с началом в точке $u(1)$.

Таким образом, $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$ тогда и только тогда, когда $u'(1) \in U$ и $u' \sim uv$, где v —некоторый путь в U , соединяющий точку $u(1)$ с точкой $u'(1)$. Но тогда, если w —произвольный путь в U с началом в точке $u'(1)$, то

$$u'w \sim (uv)w \sim u(vw)$$

и, значит, $\langle u'w \rangle \in \langle u, U \rangle$. Это показывает, что $\langle u', U \rangle \subset \langle u, U \rangle$ и, следовательно, по симметрии

$$\langle u', U \rangle = \langle u, U \rangle.$$

(Напомним, что здесь u' —произвольный путь из $\mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$, для которого $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$.)

Поскольку для любого открытого множества U' , содержащего точку $u(1)$, имеет место очевидное включение $\langle u, U' \rangle \subset \langle u, U \rangle$, отсюда следует, что для любых двух пересекающихся множеств $\langle u_1, U_1 \rangle$ и $\langle u_2, U_2 \rangle$ вида $\langle u, U \rangle$ и любой точки $\langle u_0 \rangle \in \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle$ имеет место включение

$$\langle u_0, U_1 \cap U_2 \rangle \subset \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle.$$

Поэтому все множества вида $\langle u, U \rangle$ можно принять за базу некоторой топологии на $\mathcal{E}$. Снабдив $\mathcal{E}$ этой топологией, мы тем самым превратим $\mathcal{E}$ в топологическое пространство.

Если множество U линейно связно, то, конечно,

$$\pi \langle u, U \rangle = U.$$

Поскольку по условию пространство $\mathcal{B}$ локально линейно связно, это доказывает, что отображение π непрерывно и открыто (заметим, что если $\pi \langle u \rangle \in U$, то $\langle u \rangle \in \langle u, U \rangle$).

Более того, если $\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle \in \langle u, U \rangle$ и $\pi \langle u_1 \rangle = \pi \langle u_2 \rangle$, то определена петля $u_1 u_2^{-1}$, причем если $u_1 \sim uv_1$ и $u_2 \sim uv_2$, где v_1, v_2 — пути в U , то

$$u_1 u_2^{-1} \sim u (v_1 v_2^{-1}) u^{-1},$$

где $v_1 v_2^{-1}$ — петля в U . Поэтому если U односвязно в $\mathcal{B}$ и, значит, $v_1 v_2^{-1} \sim e_{a(1)}$ в $\mathcal{B}$, то $u_1 u_2^{-1} \sim e_b$, т. е. $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle$. Это означает, что π биективно — и, значит, гомеоморфно, отображает $\langle u, U \rangle$ на U .

Полный прообраз $\pi^{-1}U$ окрестности U при отображении π состоит, очевидно, из всех множеств вида $\langle u, U \rangle$. При этом, если два таких множества $\langle u_1, U \rangle$ и $\langle u_2, U \rangle$ пересекаются и $\langle u_0 \rangle \in \langle u_1, U \rangle \cap \langle u_2, U \rangle$, то по доказанному выше

$$\langle u_1, U \rangle = \langle u_0, U \rangle = \langle u_2, U \rangle.$$

Таким образом, для любого линейно связного и односвязного в $\mathcal{B}$ открытого множества U множество $\pi^{-1}U$ является дизъюнктивным объединением открытых множеств вида $\langle u, U \rangle$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U . По определению это означает, что множество U ровно накрывается отображением π .

Поскольку такого рода множества U покрывают локально линейно связное и полулокально односвязное пространство $\mathcal{B}$, это доказывает, что отображение π является накрытием.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам осталось доказать, что пространство $\mathcal{B}$ односвязно. Для этого нам понадобится явное выражение для связности s в накрытии $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ (в силу хаусдорфовости пространства $\mathcal{B}$ — единственной).

Напомним (см. лекцию 3), что любой путь $u \in \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$ определяет по формуле

$$u^*(t)(\tau) = u(t\tau),$$

$$t, \tau \in I,$$

некоторый путь u^* в $\mathcal{P}(b_0, \mathcal{B})$. Поэтому для любого $t \in I$ в пространстве $\mathcal{E}$ определена точка $\langle u^*(t) \rangle$.

Пусть $t_0 \in I$ и пусть U — такое открытое множество в $\mathcal{B}$, что $u(t_0) \in U$, т. е. такое, что $u^*(t_0)(1) \in U$. Тогда в $\mathcal{E}$ определено открытое множество $\langle u^*(t_0), U \rangle$. Так как путь u является непрерывным отображением, то существует такое $\delta > 0$, что $u(t) \in U$ при $|t - t_0| < \delta$. В частности, это означает, что при $t_0 \leq t < t_0 + \delta$ ограничение $u|_{[t_0, t]}$ пути u на отрезке $[t_0, t]$ является путем (обобщенным) в U . Поскольку путь $u^*(t)$ составлен, очевидно, из перепараметризованных путей $u^*(t_0)$ и $u|_{[t_0, t]}$, отсюда следует, что

$$\langle u^*(t) \rangle \in \langle u^*(t_0), U \rangle, \quad t_0 \leq t < t_0 + \delta.$$

Задача 2. Докажите, что это включение остается в силе и при $t_0 - \delta < t \leq t_0$.

Это доказывает, что отображение $t \mapsto \langle u^*(t) \rangle$ непрерывно, т. е. является путем в $\mathcal{E}$.

Этот путь начинается в точке $p_0 = \langle e_{b_0} \rangle$ и проектируется в путь

$$t \mapsto u^*(t)(1) = u(t),$$

т. е. в путь u . Следовательно — в силу единственности накрывающего пути — он является накрывающим путем $s(p_0, u)$, в который связность $s: \text{Cosyl } \pi \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ переводит пару (p_0, π) . Таким образом, мы доказали, что *связность s накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ определяется формулой*

$$(1) \quad s(p_0, u)(t) = \langle u^*(t) \rangle, \quad t \in I.$$

Пусть теперь $w \in \Omega(\mathcal{E}, p_0)$ — произвольная петля пространства $\mathcal{E}$ в точке p_0 . Рассмотрим петлю $u = \pi \circ w$ пространства $\mathcal{B}$. Так как $u^*(1) = u$, то согласно формуле (1) накрывающий путь $s(p_0, u)$ соединяет точку p_0 с точкой $\langle u \rangle$. С другой стороны, в силу единственности накрывающего пути должно иметь место равенство $s(p_0, u) = w$. Следовательно, $\langle u \rangle = w(1) = p_0$ и, значит, петля u гомотопна в $\mathcal{B}$ постоянному пути e_{b_0} .

Этим доказано, что $\pi_*[w] = e$ в группе $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ и потому — поскольку гомоморфизм π_* является (см. лекцию 3) мономорфизмом, — что $[w] = e$ в группе $\pi_1(\mathcal{E}, p_0)$. Следовательно, $\pi_1(\mathcal{E}, p_0) = 1$. $\square$

Теперь мы уже можем более или менее вплотную приступить к задаче описания всех накрытий данного связного пространства $\mathcal{B}$.

Пусть пока пространство $\mathcal{B}$ лишь локально линейно связно и хаусдорфово и пусть $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное накрытие пространства $\mathcal{B}$. Как мы знаем (см. лекцию 4), для любой точки $p_0 \in \mathcal{C}$ отображение π индуцирует мономорфизм

$$(\pi_*)_p: \pi_1(\mathcal{C}, p_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$$

группы $\pi_1(\mathcal{C}, p_0)$ в группу $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, где $b_0 = \pi(p_0)$.

Определение 2. Образ $\text{Im}(\pi_*)_p$ мономорфизма $(\pi_*)_p$ мы будем называть *группой накрытия ξ в точке p_0* и будем обозначать его символом $\text{GR}_{p_0}(\xi)$.

Подчеркнем, что группа накрытия по определению является подгруппой группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$. Как абстрактная группа эта группа изоморфна группе $\pi_1(\mathcal{C}, p_0)$.

Накрытие ξ тогда и только тогда односвязно, когда $\text{GR}_{p_0}(\xi) = \{e\}$, где e , как всегда, единица группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

Далее, мы знаем (см. лекцию 4), что для любого пути v пространства $\mathcal{C}$, соединяющего точку p_0 с некоторой точкой p_1 , проектирующей в ту же точку $b_0 \in \mathcal{B}$ (т. е. лежащую в слое $\mathcal{F}_{b_0} = \pi^{-1}(b_0)$) накрытия ξ над точкой b_0 , имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{C}, p_1) & \xrightarrow{\varphi_v} & \pi_1(\mathcal{C}, p_0) \\ (\pi_*)_p \downarrow & & \downarrow (\pi_*)_{p_0} \\ \pi_1(\mathcal{B}, b_0) & \xrightarrow{\varphi_v} & \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой представляют собой изоморфизмы. Следовательно, нижний изоморфизм φ_v этой диаграммы — являющийся, заметим, внутренним автоморфизмом группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ — переводит подгруппу $\text{GR}_{p_1}(\xi) = \text{Im}(\pi_*)_{p_1}$ в подгруппу $\text{GR}_{p_0}(\xi) = \text{Im}(\pi_*)_{p_0}$.

[Заметим, что, так как пространство $\mathcal{C}$, будучи одновременно с пространством $\mathcal{B}$ локально линейно связным, линейно связно, то хотя бы один путь v существует для любой точки p_1 слоя $\mathcal{F}_{b_0}$.]

В теории групп две подгруппы Γ_0 и Γ_1 группы G называются *сопряженными*, если существует внутренний автоморфизм группы G , отображающий подгруппу Γ_0 на подгруппу Γ_1 .

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что группы накрытия ξ в различных точках слоя $\mathcal{F}_{b_0}$ сопряжены.

При этом легко видеть, что если подгруппа Γ группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ сопряжена с подгруппой $GR_{p_0}(\xi)$, то существует такая точка $p_1 \in \mathcal{F}_{b_0}$, что

$$(2) \quad GR_{p_1}(\xi) = \Gamma$$

Действительно, если это сопряжение осуществляется внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом $[u] \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, то равенство (2) будет, очевидно, иметь место для конца $p_1 = v(1)$ пути $v = s(p_0, u)$, начинающегося в точке p_0 и накрывающего путь u . $\square$

Таким образом, мы видим, что все группы $GR_{p_0}(\xi)$, $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, составляют класс сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

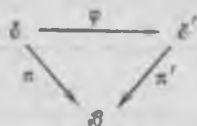
Мы будем обозначать этот класс символом $GR(\xi)$.

Класс $GR(\xi)$ вполне может состоять из одной группы. Так будет тогда и только тогда, когда подгруппа $GR_{p_0}(\xi)$ инвариантна (является нормальным делителем). В этом случае мы будем отождествлять $GR(\xi)$ с $GR_{p_0}(\xi)$. В частности, равенство $GR(\xi) = \{e\}$ будет означать, что $GR_{p_0}(\xi) = \{e\}$, т. е. что накрытие ξ односвязно.

Пусть Δ_0 и Δ_1 — два класса сопряженных подгрупп некоторой группы G . Говорят, что класс Δ_0 подчинен классу Δ_1 и пишут $\Delta_0 \leq \Delta_1$, если для некоторой (а значит, и для любой) подгруппы Γ_0 класса Δ_0 существует такая подгруппа Γ_1 класса Δ_1 , что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие существования для двух данных накрытий ξ и ξ' пространства $\mathcal{B}$ хотя бы одного морфизма $\xi \rightarrow \xi'$ над $\mathcal{B}$.

Предложение 2. Для накрытий $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{B})$ связного и локально линейно связного пространства $\mathcal{B}$ тогда и только тогда существует хотя бы один морфизм



когда $GR(\xi) \leq GR(\xi')$.

Доказательство. Если морфизм φ существует, то для любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ имеет место коммутативная

диаграмма гомоморфизмов групп

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{E}, p_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(\mathcal{E}', p'_0) \\ (\pi_*)_{p_0} \searrow & & \swarrow (\pi'_*)_{p'_0} \\ & \pi_1(\mathcal{B}, b_0) & \end{array}$$

где $p'_0 = \varphi(p_0)$, т. е. выполнено равенство $(\pi'_*)_{p'_0} \circ \varphi_* = (\pi_*)_{p_0}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Im}(\pi_*)_{p_0} &= \text{Im}((\pi'_*)_{p'_0} \circ \varphi_*) = \\ &= (\pi'_*)_{p'_0}(\text{Im} \varphi_*) \subset \\ &\subset (\pi'_*)_{p'_0}(\pi_1(\mathcal{E}', p'_0)) = \text{Im}(\pi'_*)_{p'_0}, \end{aligned}$$

т. е. $\text{GR}_{p_0}(\xi) \subset \text{GR}_{p'_0}(\xi')$.

Обратно, пусть существуют такие точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ и $p'_0 \in \mathcal{F}_{b'_0}$, что

$$(3) \quad \text{GR}_{p_0}(\xi) \subset \text{GR}_{p'_0}(\xi').$$

Так как каждый морфизм $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$ является не чем иным, как поднятием отображения π по отношению к отображению π' , а необходимое и достаточное условие существования поднятия из теоремы 1 лекции 3 состоит в этом случае как раз во включении (3), то согласно этой теореме существует — единственный, если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово — морфизм $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$, для которого $\varphi(p_0) = p'_0$. (Пространство $\mathcal{E}$ удобно в силу предложения 3 лекции 4 и предположенной локальной линейной связности пространства $\mathcal{B}$.) $\square$

Определение 3. Мы будем говорить, что накрытие ξ' подчинено накрытию ξ , и будем писать $\xi \geq \xi'$, если существует хотя бы один морфизм $\xi \rightarrow \xi'$.

В этой терминологии предложение 2 утверждает, что $\xi \geq \xi'$ тогда и только тогда, когда $\text{GR}(\xi) \leq \text{GR}(\xi')$. (Обратите внимание на то, что знаки неравенств здесь обращаются.)

Заметим, что фактически нами доказано следующее более точное предложение:

Предложение 2'. Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ — накрытия связного и локально линейно связного пространства $\mathcal{B}$ и пусть $p_0 \in \mathcal{E}$ и $p'_0 \in \mathcal{E}'$ — та-

кие точки, что $\pi(p_0) = \pi'(p'_0)$. Морфизм

$$\varphi: \xi \rightarrow \xi',$$

для которого $\varphi(p_0) = p'_0$, существует тогда и только тогда, когда

$$GR_{p_0}(\xi) \subset GR_{p'_0}(\xi').$$

Если пространство $\mathcal{B}$ хаусдорфово, то морфизм φ единственен. $\square$

Следствие 1. Два накрытия ξ и ξ' над связным и локально линейно связным хаусдорфовым пространством $\mathcal{B}$ тогда и только изоморфны, когда

$$(4) \quad GR(\xi) = GR(\xi').$$

Доказательство. Равенство (4) означает, что для любой точки $p_0 \in \mathcal{F}$, проектирующейся в точку $b_0 \in \mathcal{B}$, существует такая точка $p'_0 \in \mathcal{F}'$, также проектирующаяся в точку b_0 , что

$$(5) \quad GR_{p_0}(\xi) = GR_{p'_0}(\xi').$$

Но если равенство (5) выполнено, то в силу предложения 2' существуют такие морфизмы

$$\varphi: \xi \rightarrow \xi' \quad \text{и} \quad \psi: \xi' \rightarrow \xi,$$

что $\varphi(p_0) = p'_0$ и $\psi(p'_0) = p_0$. Морфизм $\psi \circ \varphi: \xi \rightarrow \xi$, подобно тождественному морфизму $\text{id}: \xi \rightarrow \xi$, оставляет точку p_0 на месте. Поэтому в силу единственности $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Аналогично доказывается, что $\varphi \circ \psi = \text{id}$. Следовательно, морфизмы φ и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами, и накрытия ξ и ξ' изоморфны.

Обратно, пусть накрытия ξ и ξ' изоморфны и пусть $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$ — произвольный изоморфизм. Тогда согласно предложению 2' для любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ будет иметь место включение

$$GR_{p_0}(\xi) \subset GR_{p'_0}(\xi'), \quad \text{где} \quad p'_0 = \varphi(p_0).$$

С другой стороны, так как имеется обратный изоморфизм $\varphi^{-1}: \xi' \rightarrow \xi$ и так как $\varphi^{-1}(p'_0) = p_0$, то согласно тому же предложению 2' имеет место и обратное включение

$$GR_{p'_0}(\xi') \subset GR_{p_0}(\xi).$$

Поэтому для изоморфных накрытий ξ и ξ' равенство (5) выполнено. $\square$

Фактически нами также доказано более точное утверждение:

Следствие 1. Изоморфизм $\varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, для которого $\varphi(p_0) = p_0^*$, существует тогда и только тогда, когда в группе $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ имеет место равенство (5). $\square$

Накрытия из примера Зимана (см. пример 1 и задачу 1 лекции 3) показывают, что для локально линейно несвязных пространств это следствие неверно.

Следствие 2. Накрытие $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ тогда и только тогда тривиально (изоморфно накрытию $(\mathcal{B}, \text{id}, \mathcal{B})$), когда

$$\text{GR}(\xi) = \pi_1(\mathcal{B}, b_0). \quad \square$$

Класс Δ сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ мы будем называть *реализуемым*, если существует такое накрытие $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$, что $\Delta = \text{GR}(\xi)$. Согласно следствию 1 классы изоморфных накрытий связного локально линейно связного и хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ находятся в биективном соответствии с реализуемыми классами сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

Тем самым, для полного описания всех накрытий пространства надо лишь охарактеризовать реализуемые классы.

Определение 4. Накрытие ξ_0 связного и локально линейно связного пространства $\mathcal{B}$ называется *универсальным*, если $\xi_0 \geq \xi$ для любого накрытия ξ пространства $\mathcal{B}$. Пространство $\mathcal{B}$ называется *универсально накрываемым*, если для него существует хотя бы одно универсальное накрытие.

Согласно предложению 2 накрытие ξ_0 тогда и только тогда универсально, когда

$$(6) \quad \text{GR}(\xi_0) \leq \text{GR}(\xi)$$

для любого накрытия ξ пространства $\mathcal{B}$. Поэтому для любых двух универсальных накрытий ξ_0 и ξ_0^* имеет место равенство

$$\text{GR}(\xi_0) = \text{GR}(\xi_0^*),$$

и значит эти накрытия изоморфны. Таким образом, с точностью до изоморфизма универсальное накрытие пространства $\mathcal{B}$ единственно.

Кроме того, мы видим, что класс $\text{GR}(\xi_0)$ не зависит от выбора универсального накрытия ξ_0 и однозначно

определяется пространством $\mathcal{B}$. Мы будем обозначать его символом $\text{GR}(\mathcal{B})$.

Задача 3. Докажите, что класс $\text{GR}(\mathcal{B})$ состоит из одной подгруппы (автоматически инвариантной).

По определению условие

$$(7) \quad \text{GR}(\mathcal{B}) \leq \Delta$$

необходимо для реализуемости класса Δ сопряженных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

Условие (6) универсальности накрытия ξ_0 заведомо выполнено, когда $\text{GR}(\xi_0) = \{e\}$, т. е. когда накрытие ξ_0 односвязно. Следовательно, *любое односвязное накрытие универсально*, и значит односвязно накрываемые (т. е. — в предположении хаусдорфовости — полулокально односвязные) пространства универсально накрываемы. Односвязно накрываемые пространства $\mathcal{B}$ характеризуются при этом равенством $\text{GR}(\mathcal{B}) = \{e\}$ (и, значит, для них необходимое условие (7) реализуемости класса сопряженных подгрупп всегда выполнено).

Замечание 1. Существуют связные и локально линейно связные — но заведомо не полулокально односвязные — хаусдорфовы пространства, для которых либо не существует универсального накрытия, либо такое накрытие существует, но не является односвязным.

Пример 2 и задача 4. Докажите, что для произведения счетного числа окружностей не существует универсального накрытия.

Пример 3 и задача 5. Пусть $\mathcal{B}$ — подпространство плоскости, являющееся объединением счетного семейства окружностей вида

$$(8) \quad \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots$$

Докажите, что для $\mathcal{B}$ не существует универсального накрытия.

Пример 4 и задача 6. Пусть $\mathcal{C}$ — конус над пространством из задачи 5, т. е. подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из всех прямолинейных отрезков, соединяющих точку $(0, 0, 1)$ со всеми точками окружностей (8), и пусть $\mathcal{C}'$ — образ конуса $\mathcal{C}$ при центральной симметрии $x \rightarrow -x$ пространства $\mathbb{R}^3$. Подпространство $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ пространства $\mathbb{R}^3$, очевидно, связно и локально линейно связно. Докажите, что

а. Пространство $\mathcal{B}$ не односвязно. [Указание. Рассмотрите петлю, поочередно обходящую уменьшающиеся окружности в подпространствах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$.]

б. Любое накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ пространства $\mathcal{B}$ тривиально (пространство $\mathcal{B}$ ненакрываемо в смысле лекции 3). [Указание. Подпространства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ пространства $\mathcal{B}$ стягиваемы, откуда следует, что накрытие π обладает над каждым из них сечением (поднятием

тождественного отображения), переводящим точку 0 в произвольную точку соответствующего слоя.]

В силу свойства б тривиальное накрытие $\text{id}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ универсально, а в силу свойства а это накрытие не односвязно. Таким образом, пространство $\mathcal{B}$ доставляет нам пример связного, линейно связного и хаусдорфова пространства, обладающего универсальным, но не односвязным накрытием.

Задача 7. Для каждого открытого покрытия Π пространства $\mathcal{B}$ обозначим через $[\Pi]$ подгруппу группы $\pi_1(\mathcal{B}, b)$, порожденную гомотопическими классами путей вида uiv^{-1} , где u — произвольный путь пространства $\mathcal{B}$, начинающийся в точке b_0 , а v — произвольная петля в точке $u(1)$, для которой существует такой элемент U накрытия Π , что $v(t) \in U$ для всех $t \in I$. Эта подгруппа, очевидно, инвариантна.

Докажите, что

а. Связное, локально линейно связное и хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ тогда и только тогда универсально накрываемо, когда существует такое открытое покрытие Π_0 пространства $\mathcal{B}$, что для любого покрытия Π имеет место включение

$$[\Pi_0] \subset [\Pi].$$

б. В этом случае $\text{GR}(\mathcal{B}) = [\Pi_0]$.

[Указание. Докажите, что для любого покрытия Π существует такое накрытие ξ пространства $\mathcal{B}$, что $\text{GR}(\xi) = [\Pi]$. Это — обобщение теоремы 1.]

Мы решим задачу о характеризации реализуемых классов сопряженных подгрупп лишь для простейшего — но практически единственно важного! — класса односвязно накрываемых (= полулокально односвязных) пространств $\mathcal{B}$. Для этого нам понадобится следующая простая лемма:

Лемма 1. Пусть в коммутативной диаграмме

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

пространство $\mathcal{B}$ связно и локально линейно связно, а отображения $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ являются накрытиями. Тогда отображение $\pi': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ также будет накрытием.

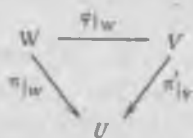
Доказательство. Если открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ линейно связно, то утверждение, что оно ровно накрыто отображением $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, в точности означает, что все компоненты линейной связности множества $\pi^{-1}U$ открыты и каждая из них гомеоморфно проектируется на U . При этом, если пространство $\mathcal{B}$, а значит и пространство $\mathcal{E}$, локально линейно связно, то требование об открытости компонент линейной связности множества $\pi^{-1}U$ автома-

тически выполнено, так как в локально линейно связном пространстве каждая компонента линейной связности произвольного открытого множества является открытым множеством (см. лекцию III.11).

Назовем открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ *отмеченным*, если оно линейно связно и каждая компонента линейной связности V множества $(\pi')^{-1}U$ ровно накрыта отображением $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$. (Заметим, что пространство $\mathcal{E}'$, будучи локально гомеоморфным пространству $\mathcal{E}$, а значит и пространству $\mathcal{B}$, локально линейно связно. Следовательно, компонента V открыта в $\mathcal{E}'$.)

Ясно, что отмеченные множества покрывают пространство $\mathcal{B}$ (они даже составляют базу этого пространства). Поэтому для доказательства леммы 1 достаточно показать, что каждое отмеченное множество U ровно накрыто отображением π' , т. е. — в силу только что сделанных замечаний — что на каждой компоненте линейной связности V множества $(\pi')^{-1}U$ отображение π' является гомеоморфизмом на U .

Но это теперь почти очевидно. Действительно, пусть W — произвольная компонента линейной связности множества $\varphi^{-1}V$. Так как по условию отображение φ ровно накрывает открытое множество V , то отображение $\varphi|_W: W \rightarrow V$ является гомеоморфизмом. С другой стороны, так как, очевидно, $\varphi^{-1}V \subset \pi^{-1}U$, то компонента W содержится в одной из компонент линейной связности W' множества $\pi^{-1}U$. Множество $\varphi W'$ содержится в множестве $(\pi')^{-1}U$, линейно связно и содержит множество $\varphi W = V$. Поэтому $\varphi W' = V$. Поскольку отображения $\pi|_{W'} = \pi'|_V \circ \varphi|_{W'}$ и $\varphi|_W$ являются гомеоморфизмами, это возможно только при $W = W'$. Значит, в коммутативной диаграмме



отображения $\pi|_W$ и $\varphi|_W$ являются гомеоморфизмами. Поэтому отображение $\pi'|_V$ также будет гомеоморфизмом. $\square$

Задача 8. Докажите, что если в коммутативной диаграмме (9) отображения $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\pi': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ являются накрытиями, а связное пространство $\mathcal{B}$ локально линейно связно и хаусдорфово, то отображение $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ также будет накрытием. (*Морфизм накрытий является накрытием.*) (Предупреждение. Не забудьте доказать надъективность отображения φ .)

Замечание 2. Утверждение, что если отображения π' и φ являются накрытиями, то отображение π также будет накрытием, вообще говоря, неверно, т. е. композиция двух накрытий может и не быть накрытием.

Задача 9. Покажите, что композиция $\pi' \circ \varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ накрытий $\varphi: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ и $\pi': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ будет накрытием, если либо накрытие $\pi': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ конечнолистно, либо пространство $\mathcal{B}$ — предполагаемое, как всегда, связным и локально линейно связным — локально односвязно. [У к а з а н и е. Докажите, что любое односвязное открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ ровно накрыто в каждом накрытии $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.]

Изоморфизмы $\alpha: \xi \rightarrow \xi$ накрытия $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ на себя называются, естественно, его *автоморфизмами* (другие названия — *преобразования накрытия* и *скольжения*). Они составляют группу, обозначаемую символом $\text{Aut } \xi$.

По определению группа $\text{Aut } \xi$ действует слева на пространстве $\mathcal{E}$. Легко видеть, что это действие дискретно, т. е. (см. пример 5 лекции 2) для любой точки $p \in \mathcal{E}$ существует такая ее окрестность V , что $\alpha V \cap V = \emptyset$ для любого нетождественного автоморфизма $\alpha \in \text{Aut } \xi$. (Действительно, за V можно, очевидно, принять любую окрестность точки p , ровно накрывающую открытое множество $U = \pi(V)$.) Поэтому дискретно действие и любой подгруппы Γ группы $\text{Aut } \xi$. При этом пространство орбит $\mathcal{E}_\Gamma = \mathcal{E}/\Gamma$ включается в коммутативную диаграмму вида



отображение φ которой является, как мы знаем, накрытием. Поэтому в силу леммы 1 накрытием будет и индуцированное отображение

$$\pi_\Gamma: \mathcal{E}_\Gamma \rightarrow \mathcal{B}, \quad \Gamma p \mapsto \pi(p).$$

Если теперь пространство $\mathcal{E}$ односвязно (т. е. односвязно накрытие ξ), то согласно предложению 3 лекции 3 фундаментальная группа пространства $\mathcal{E}_\Gamma$ будет изоморфна (или, точнее, — из-за того, что группа Γ действует теперь слева — антиизоморфна) группе Γ . Таким образом, если накрытие ξ односвязно, то для любой подгруппы Γ группы $\text{Aut } \xi$ группа накрытия $\xi_\Gamma = (\mathcal{E}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathcal{B})$ антиизоморфна группе Γ .

С другой стороны, для односвязного накрытия ξ группа $\text{Aut } \xi$ транзитивно действует на каждом слое $\mathcal{E}_b$, $b \in \mathcal{B}$

этого накрытия, потому что для односвязного пространства $\mathcal{B}$ условие (5) существования изоморфизма $\xi \rightarrow \xi'$, переводящего точку p_0 в точку p'_0 , выполнено при $\xi' = \xi$ для любых точек p_0 и p'_0 одного слоя. Следовательно, при $\Gamma = \text{Aut } \xi$ отображение π_Γ биективно и потому, являясь накрытием, представляет собой изоморфизм. Таким образом, действие группы $\text{Aut } \xi$ на пространстве $\mathcal{B}$ удовлетворяет всем условиям предложения 2 лекции 4 и, значит, согласно этому предложению для односвязного накрытия ξ группа $\text{Aut } \xi$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ пространства $\mathcal{B}$ в некоторой — произвольно выбранной! — точке $b_0 \in \mathcal{B}$.

Не обращаясь к предложению 3 лекции 3, изоморфизм

$$(10) \quad j: \text{Aut } \xi \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$$

можно построить, если выбрать некоторую точку $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, от которой зависит этот изоморфизм, и для любого автоморфизма $\alpha: \xi \rightarrow \xi$ положить

$$(11) \quad j(\alpha) = [\pi_0 v], \quad \alpha \in \text{Aut } \xi,$$

где v — произвольный путь в пространстве $\mathcal{B}$, соединяющий точку p_0 с точкой $\alpha(p_0)$.

Задача 10. Убедитесь непосредственно, что

а) формула (11) корректно определяет некоторое отображение (10) (не забудьте, что пространство $\mathcal{B}$ по условию односвязно);

б) это отображение является гомоморфизмом;

в) гомоморфизм (10) является изоморфизмом (здесь понадобится предложение 2 и его следствие 1).

Группа $\text{GR}_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma)$ накрытия $\xi_\Gamma = (\mathcal{B}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathcal{B})$ в точке Γp_0 состоит, по определению, из гомотопических классов $[u]$ петель $u \in \Omega \mathcal{B}$, обладающих тем свойством, что накрывающий их в $\mathcal{B}_\Gamma$ путь с началом в точке Γp_0 является петлей, т. е. тем свойством, что накрывающий их в $\mathcal{B}$ путь v с началом в точке p_0 кончается в точке орбиты Γp_0 . Поскольку такие пути v — это в точности пути в $\mathcal{B}$, соединяющие точку p_0 с точками вида $\alpha(p_0)$, где $\alpha \in \Gamma$, мы видим, что

$$\text{GR}_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma) = j\Gamma.$$

В силу следствия 1 предложения 2 этим доказана следующая теорема классификации накрытий, которая и была нашей основной целью.

Теорема 2. Для любого связного, локально линейно связного, полулокально односвязного (= односвязно накрывающего) пространства $\mathcal{B}$ существует единственное накрытие ξ с группой $\text{Aut } \xi$ изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ пространства $\mathcal{B}$ в некоторой точке $b_0 \in \mathcal{B}$.

ваемого) хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ имеет место биективное соответствие

$$(12) \quad [\xi] \Leftrightarrow \text{GR}(\xi)$$

между классами изоморфных (над $\mathcal{B}$) накрытий ξ пространства $\mathcal{B}$ и классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$. $\square$

Следствие 1. Связное, локально линейно связное, полулокально односвязное и хаусдорфово пространство тогда и только тогда ненакрываемо (каждое его накрытие тривиально), когда оно односвязно. $\square$

Следствие 2. Любое односвязно накрываемое хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$ гомеоморфно пространству орбит $\mathcal{E}/\Gamma$, где $\mathcal{E}$ — односвязное накрывающее $\mathcal{B}$ пространство, а Γ — группа автоморфизмов накрытия $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Замечание 3. Теореме 2 можно придать большее формальное совершенство, введя в рассмотрение *пунктированные накрытия*, т. е. пары (ξ, p_0) , состоящие из накрытия $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и произвольной точки $p_0 \in \mathcal{E}$. Пунктированные накрытия (ξ, p_0) и (ξ', p'_0) считаются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$, для которого $\varphi(p_0) = p'_0$ (для этого, конечно, необходимо, чтобы точки p_0 и p'_0 лежали над одной и той же точкой $b_0 \in \mathcal{B}$). Тогда классы изоморфных пунктированных накрытий будут в биективном соответствии

$$(13) \quad [(\xi_0, p_0)] \Leftrightarrow \text{GR}_{p_0}(\xi)$$

с подгруппами группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

В этой форме теорема 2 аналогична основной теореме теории Галуа полей. На этом основании соответствие (13) (а также соответствие (12)) иногда называют соответствием Галуа. [Аналогия с теорией Галуа здесь отнюдь не формальна и в рамках современной абстрактной алгебраической геометрии теория накрытий и теория Галуа выступают как специализации одной единой теории.]

Аналог изоморфизма (10) существует и для произвольных накрытий $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$.

Задача 11. Как мы знаем (см. лекцию 4), группа $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ транзитивно действует справа на каждом слое $\mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 \in \mathcal{B}$, произвольного накрытия $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$. Докажите, что это действие перестановочно с левым действием группы $\text{Aut } \xi$, т. е. для любого автоморфизма $\alpha: \xi \rightarrow \xi'$,

любого элемента $\gamma \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ и любой точки $p \in \mathcal{F}_{b_0}$ имеет место равенство

$$\alpha(p\gamma) = \alpha(p)\gamma.$$

[Указание. Если $\gamma = [u]$, где $u \in \Omega\mathcal{B}$, то $p\gamma = s(p, u)(1)$, где s — связность для ξ .]

На языке теории представлений утверждение задачи 11 означает, что соответствие

$$(14) \quad \alpha \mapsto \alpha|_{\mathcal{F}_{b_0}}$$

определяет гомоморфизм группы $\text{Aut } \xi$ в группу $\text{Aut } \mathcal{F}_{b_0}$, $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ -автоморфизмов правого $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ -пространства $\mathcal{F}_{b_0}$ (эквивариантных биективных отображений $\mathcal{F}_{b_0} \rightarrow \mathcal{F}_{b_0}$).

Задача 12. Докажите, что гомоморфизм (14) является изоморфизмом группы $\text{Aut } \xi$ на группу $\text{Aut } \mathcal{F}_{b_0}$. [Указание. Мономорфность обеспечивается утверждением о единственности из предложения 2, а для доказательства эпиморфности надо выбрать точку $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, построить с помощью предложения 2 для любого автоморфизма $\beta: \mathcal{F}_{b_0} \rightarrow \mathcal{F}_{b_0}$ автоморфизм $\alpha: \xi \rightarrow \xi$, удовлетворяющий соотношению $\alpha(p_0) = \beta(p_0)$, и воспользоваться транзитивностью действия группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.]

В теории представлений доказывается, что если группа G транзитивно действует на множестве $\mathcal{F}$, то группа $\text{Aut } \mathcal{F}$ всех G -автоморфизмов этого множества изоморфна факторгруппе $N\Gamma/\Gamma$, где Γ — стабилизатор (стационарная подгруппа) произвольной точки $p_0 \in \mathcal{F}$, состоящая из всех элементов $\gamma \in G$, для которых $p_0\gamma = p_0$, а $N\Gamma$ — нормализатор подгруппы Γ (наибольшая подгруппа, в которой Γ является нормальным делителем).

Действительно, в силу транзитивности действия группы G для любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{F}$ существует такой элемент $g \in G$, что $\alpha(p_0) = p_0g$. Так как из $p_0g_1 = p_0g_2$ следует, что $p_0g_1g_2^{-1} = p_0$, т. е. $g_1g_2^{-1} \in \Gamma$, то левый смежный класс Γg элемента g по подгруппе Γ не зависит от выбора этого элемента. Кроме того, если $\gamma \in \Gamma$, то]

$$p_0g\gamma = \alpha(p_0)\gamma = \alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0) = p_0g,$$

и наоборот, если $p_0g\gamma = p_0g$, то $\alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0)\gamma = (p_0g)\gamma = p_0g = \alpha(p_0)$, и значит $p_0\gamma = p_0$, т. е. $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $p_0g\gamma = p_0g$, т. е. когда $g\gamma g_0^{-1} \in \Gamma$. Это означает, что $\Gamma = g^{-1}\Gamma g$, т. е. что $g \in N\Gamma$. Следовательно, формула

$$(15) \quad \alpha \mapsto \Gamma g$$

корректно определяет некоторое отображение $\text{Aut } \mathcal{F} \rightarrow N\Gamma/\Gamma$. Если $\alpha, \beta \in \text{Aut } \mathcal{F}$ и $\alpha(p_0) = p_0g$, $\beta(p_0) = p_0h$, то $(\alpha\beta)(p_0) = \alpha(p_0h) =$

$= \alpha(p_0)h = (p_0g)h = p_0(gh)$. Это означает, что отображение (15) является гомоморфизмом. Если $g \in G$, т. е. $g \in \Gamma$, то $\alpha(p_0) = p_0$, и значит $\alpha(p_0g) = \alpha(p_0)g = p_0g$ для любого элемента $g \in G$. Поскольку группа G действует транзитивно, это означает, что $\alpha = \text{id}$. Таким образом, отображение (15) является мономорфизмом. Наконец, если $p_0g = p_0h$, где $g, h \in G$, т. е. если $gh^{-1} \in \Gamma$, то $(\gamma g)(\gamma h)^{-1} \in \Gamma$, и значит $p_0\gamma g = p_0\gamma h$ для любого элемента $\gamma \in N\Gamma$. Поэтому формула

$$\alpha(p) = p_0\gamma g,$$

$$p \in \mathcal{F}.$$

где g — такой элемент группы G , что $p_0g = p$, корректно определяет некоторое — очевидно, биективное и эквивариантное, т. е. являющееся автоморфизмом G -пространства $\mathcal{F}$ — отображение $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Так как по построению $\alpha(p_0) = p_0\gamma$, то мономорфизм (15) является, следовательно, изоморфизмом.

Для подгруппы $\Gamma = \text{GR}_{p_0}(\xi)$ группы $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ факторгруппа $N\Gamma/\Gamma$ называется *группой Вейля* накрытия ξ в точке $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ и обозначается символом $\text{Weyl}_{p_0}(\xi)$. Таким образом, мы видим, что для любого накрытия $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ связного, локально линейно связного и хаусдорфова пространства $\mathcal{B}$ группа $\text{Aut } \xi$ изоморфна группе Вейля $\text{Weyl}_{p_0}(\xi)$ накрытия ξ в произвольной точке $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$.

В этом изоморфизме автоморфизму $\alpha: \xi \rightarrow \xi$ отвечает смежный класс по подгруппе $\text{GR}_{p_0}(\xi)$ элемента $\gamma \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, $b_0 = \pi(p_0)$, являющегося гомотопическим классом петли $\pi \circ \nu$, где ν — произвольный путь в $\mathcal{C}$, соединяющий точку p_0 с точкой $\alpha(p_0)$.

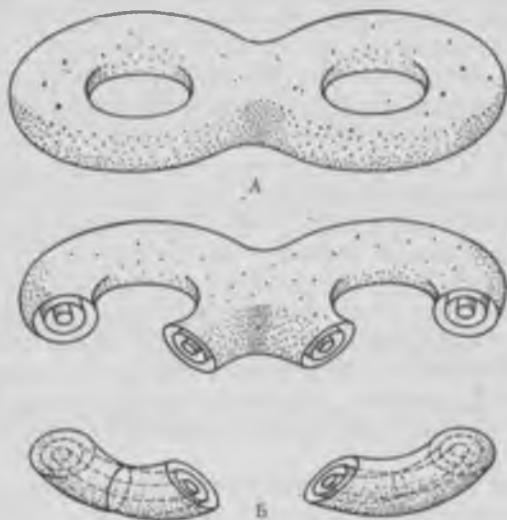
Для односвязного (= универсального) накрытия ξ это снова дает уже известный нам изоморфизм (9).

В теории Галуа особую роль играют так называемые нормальные поля, которым отвечают инвариантные подгруппы. В теории накрытий им соответствуют накрытия ξ , для которых $\text{GR}(\xi)$ является инвариантной подгруппой. Такие накрытия называются *регулярными*. Группа автоморфизмов $\text{Aut } \xi$ регулярного накрытия изоморфна, очевидно, факторгруппе $\pi_1(\mathcal{B}, b_1)/\text{GR}(\xi)$.

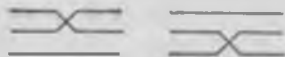
Задача 13. Группа автоморфизмов $\text{Aut } \xi$ произвольного накрытия $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$, очевидно, действует слева на каждом слое $\mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 \in \mathcal{B}$. Покажите — в обычных предположениях на пространство $\mathcal{B}$ — что накрытие ξ тогда и только тогда регулярно, когда это действие транзитивно (для любых точек $p_0, p_1 \in \mathcal{F}_{b_0}$ существует такой автоморфизм $\alpha: \xi \rightarrow \xi$, что $\alpha(p_0) = p_1$). Выведите отсюда, что каждое регулярное накрытие является главным расслоением (см. лекцию 1) с группой $\text{Aut } \xi$.

Задача 14. Докажите, что накрытие $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ тогда и только тогда регулярно, когда для любых точек $p_0, p_1 \in \mathcal{F}_0$ и любой петли γ пространства $\mathcal{E}$ в точке p_0 путь, накрывающий петлю γ и начинающийся в точке p_1 , также является петлей.

Пример 5. Пусть $\mathcal{B}$ — крендель (ориентируемая поверхность с двумя ручками; см. рис. А), а $\mathcal{E}$ — поверхность (см. рис. Б), получающаяся из трех кренделей с рассеченными ручками при склеивании слева первого



и второго экземпляров кренделя, а справа — второго и третьего; условно это склеивание может быть изображено схемой



Ясно, что $\mathcal{E}$ линейно связно, и значит тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — естественная проекция, является накрытием. При этом путь, накрывающий петлю в $\mathcal{B}$, однократно обходящую параллель левой ручки, будет петлей только тогда, когда он начинается на третьем листе. Следовательно, это накрытие не регулярно.

Задача 15. Докажите, что группа автоморфизмов построенного накрытия тривиальна, т. е. что единственным автоморфизмом этого накрытия является тождественное отображение.

Пример 6 и задача 16. Вычислите группу автоморфизмов накрытия кренделя, аналогичным образом получающегося склеиванием по схеме



и, в частности, покажите, что она транзитивно действует на слоях (и, значит, это накрытие регулярно).

Пример 7. Как мы знаем (см. пример 5 лекции 2), для каждого дискретного действия группы Γ на пространстве $\mathcal{E}$ тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B} = \mathcal{E}/\Gamma$ — пространство орбит, а $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — естественная проекция $p \mapsto \Gamma p$, является накрытием. Для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$ отображение $L_\gamma: p \mapsto \gamma p$ является, очевидно, автоморфизмом накрытия ξ . Поскольку группа Γ транзитивно действует на каждой орбите, это доказывает, что накрытие ξ регулярно.

Задача 17. Докажите, что соответствие $\gamma \mapsto \Gamma_\gamma$ является изоморфизмом группы Γ на группу $\text{Aut } \xi$. [Указание. Пусть $p_0 \in \mathcal{E}$. Для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } \xi$ имеет место равенство вида $\varphi(p_0) = \gamma p_0$, где $\gamma \in \Gamma$. Так как $\varphi(p_0) = L_\gamma(p_0)$, то $\varphi(p) = L_\gamma(p)$ для любой точки $p \in \mathcal{E}$.] Докажите также, что эквивариантные отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ (являющиеся, конечно, автоморфизмами накрытия ξ) соответствуют в этом изоморфизме элементам центра группы Γ .

В своем месте нам понадобится следующее предложение (ср. утверждение задачи 5 лекции 2):

Предложение 3. Если для накрытия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ пространство $\mathcal{E}$ является гладким хаусдорфовым многообразием и если

- а) накрытие регулярно;
- б) его группа автоморфизмов состоит из диффеоморфизмов, то на $\mathcal{B}$ существует единственная гладкость $\mathbf{A}$, по отношению к которой накрытие $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ гладко.

Доказательство. Как всегда, сначала докажем утверждение о единственности.

Пусть гладкость $\mathbf{A}$ существует. Рассмотрим произвольную ровно накрытую связную карту (U, h) в $\mathcal{B}$. Тогда, если V — компонента прообраза $\pi^{-1}U$, то

$$(16) \quad U = \pi V \quad \text{и} \quad h = k \circ \sigma,$$

где $k = h \circ \pi$, а $\sigma: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм, обратный к диффеоморфизму $\pi: V \rightarrow U$ (сечение накрытия π над U).

Это означает, что атлас на $\mathfrak{B}$, состоящий из карт вида (U, h) , однозначно восстанавливается по атласу на $\mathfrak{C}$, состоящему из карт вида (V, k) . Поэтому гладкость A единственна.

Чтобы доказать ее существование, мы примем формулы (16) за определение карт (U, h) , т. е., точнее, на любом связном ровно накрытом множестве $U \subset \mathfrak{B}$, обладающим тем свойством, что среди компонент V его прообраза $\pi^{-1}U$ существуют координатные окрестности многообразия $\mathfrak{C}$, мы определим карту (U, h) формулой $h = k \circ \sigma$, где k — координатное отображение на V . Предложение 3 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что любые две карты вида (U, h) согласованы. При этом ясно, что согласованность достаточно доказать лишь для карт (U, h) с одним и тем же U .

Другими словами, нам надо доказать, что если карты (V, k) и (V_1, k_1) в $\mathfrak{C}$ обладают тем свойством, что

1) имеет место равенство $\pi V = \pi V_1$;

2) множество $U = \pi V = \pi V_1$ связно, ровно накрыто отображением π и множества V и V_1 являются компонентами его прообраза $\pi^{-1}U$ (и, следовательно, отображение π на V и V_1 обладает обратными отображениями $\sigma: U \rightarrow V$ и $\sigma_1: U \rightarrow V_1$),

то для отображений $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $h_1: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенных формулами

$$h = k \circ \sigma, \quad h_1 = k_1 \circ \sigma_1,$$

композиция

$$h_1 \circ h^{-1} = h_1 \circ \sigma_1 \circ \pi \circ k^{-1}: kV \rightarrow k_1V_1$$

является диффеоморфизмом. Ясно, что для этого достаточно доказать, что диффеоморфизмом является отображение

$$\sigma_1 \circ \pi: V \rightarrow V_1.$$

С этой целью мы заметим, что в силу регулярности накрытия $\pi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ существует его автоморфизм $\varphi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, переводящий компоненту V в компоненту V_1 . При этом отображение $\varphi \circ \sigma$ будет сечением накрытия $\pi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ над U , переводящим V в V_1 , и потому в силу свойства единственности сечений (см. следствие предложения 3 лекции 4) будет совпадать с отображением σ_1 . Следовательно,

$$\sigma_1 \circ \pi = \varphi|_V.$$

Для завершения доказательства остается вспомнить, что автоморфизм φ является, по условию, диффеоморфизмом. $\square$

Задача 18. Докажите, что группа автоморфизмов произвольного гладкого накрытия состоит из диффеоморфизмов.

Предложение 3 применимо, в частности (см. пример 7), к накрытию вида $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\Gamma$, где Γ — произвольная группа диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{E}$, дискретно действующая на Γ .

Следствие. Для любой группы Γ диффеоморфизмов гладкого связного хаусдорфова многообразия $\mathcal{E}$, дискретно действующей на $\mathcal{E}$, пространство орбит $\mathcal{E}/\Gamma$ обладает естественной структурой гладкого многообразия, по отношению к которой отображение факторизации

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\Gamma$$

является гладким накрытием. $\square$

Лекция 6

Векторные расслоения. — Сечения векторных расслоений. — Морфизмы векторных расслоений. — Комплексные и кватернионные структуры на вещественном векторном расслоении. — Примеры векторных расслоений. — Расслоения ассоциированные с главными $Gl(p; K)$ -расслоениями. — Склеивающие коциклы векторных расслоений. — Векторные расслоения и классы когомологий матричных коциклов.

Пусть K — либо поле R вещественных чисел, либо поле C комплексных чисел.

[Читатель может — и должен! — проверить, что все содержание этой и следующей лекций по существу дословно сохраняется — несмотря на некоммутативность кватернионного умножения — и в случае, когда K является телом кватернионов H (о кватернионах см. лекцию II.24, а также ниже лекцию 9); следует лишь все множители у векторов писать справа, т. е. рассматривать над H *правые линейные*. (Для коммутативных полей R и C различие левых и правых линейных принципиального значения не имеет, но для некоммутативного тела H это уже не так.) На этом основании мы в дальнейшем позволим себе иногда рассматривать и случай $K = H$. Кроме того, когда это удобно, мы будем писать у векторов числовые множители справа и при $K = R$ или C .]

Определение 1. Тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, состоящая из топологических пространств $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ и непрерывного отображения

$$(1) \quad \pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B},$$

называется *векторным расслоением ранга n над K* (при $K = R$ — *вещественным*, при $K = C$ — *комплексным*, а при $K = H$ — *кватернионным* или *симплектическим*), если

а) для любой точки $b \in \mathcal{B}$ множество

$$\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$$

является линейным (векторным) пространством над K ;

б) (условие локальной тривиальности) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ и такие гомеоморфизмы $\varphi_\alpha: U_\alpha \times R^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}$, где $\mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$, что

б₁) для любой точки $(b, x) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение $\varphi_\alpha(b, x) \in \mathcal{F}_b$ (иными словами, коммутативна диаграмма

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{E}_{U_\alpha} \\ & \searrow & \swarrow \\ & U_\alpha & \end{array}$$

в которой левая наклонная стрелка является естественной проекцией $(b, x) \rightarrow b$ прямого произведения $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ на его первый множитель U_α , а правая — ограничением на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ отображения (1));

б₂) для каждой точки $b \in \mathcal{B}$ отображение

$$\varphi_{\alpha, b}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}_b$$

определенное формулой

$$\varphi_{\alpha, b}(x) = \varphi_\alpha(b, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

является изоморфизмом линейных пространств.

В соответствии с общей терминологией лекции 1 пространство $\mathcal{B}$ (обозначаемое также символами $\mathcal{B}^\xi$ или $\mathcal{B}(\xi)$) называется *базой* векторного расслоения ξ , пространство $\mathcal{E}$ (обозначаемое также символами $\mathcal{E}^\xi$ или $\mathcal{E}(\xi)$) — его *тотальным пространством*, а отображение π — (обозначаемое также символами π^ξ или $\pi(\xi)$) — *проекцией*. Очень часто ξ и π не различаются.

Линейное пространство $\mathcal{F}_b$ (обозначаемое также символами $\mathcal{F}^\xi_b$ или $\mathcal{F}_b(\xi)$) называется *слоем* расслоения ξ (проекции π) над точкой $b \in \mathcal{B}$.

Ранг n векторного расслоения ξ называется также *размерностью* этого расслоения и обозначается символом $\dim \xi$ (или $\dim_{\mathbb{K}} \xi$).

Гомеоморфизм φ_α из диаграммы (2) называется *тривиализацией* расслоения ξ над открытым множеством U_α , а открытое множество U_α — *тривиализирующей окрестностью*. Иногда *тривиализацией* называется также пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Покрытие $\{U_\alpha\}$, состоящее из тривиализирующих окрестностей, называется *тривиализирующим покрытием*. Семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ тривиализаций $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется *тривиализирующим атласом*.

Непрерывное отображение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, удовлетворяющее соотношению $\pi \circ s = \text{id}$, называется *сечением* расслоения ξ . Отображение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ тогда и только тогда является сечением, когда $s(b) \in \mathcal{F}_b$ для любой точки $b \in \mathcal{B}$, т. е. когда оно выбирает в каждом слое $\mathcal{F}_b$ вектор $s(b)$. На этом основании сечения расслоения ξ называются также *ξ -векторными полями* на $\mathcal{B}$.

Задача 1. Докажите, что

а) для любых сечений s, s_1, s_2 и любого элемента $\lambda \in K$ формулы

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(b) &= s_1(b) + s_2(b), \\ (\lambda s)(b) &= \lambda s(b),\end{aligned} \quad b \in \mathcal{B},$$

определяют сечения $s_1 + s_2, \lambda s$ расслоения ξ и относительно операций $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2, (\lambda, s) \mapsto \lambda s$ множество $\Gamma\xi$ всех сечений векторного расслоения ξ является линейным пространством над полем K , нулем которого служит нулевое сечение 0, сопоставляющее каждой точке $b \in \mathcal{B}$ нуль линейала $\mathcal{F}_b$.

б) для любой непрерывной K -значной функции f на $\mathcal{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ формула

$$(fs)(b) = f(b)s(b), \quad b \in \mathcal{B},$$

определяет сечение $fs \in \Gamma\xi$, и относительно операции $(f, s) \mapsto fs$ линейал $\Gamma\xi$ является модулем над алгеброй $F_K \mathcal{B}$ всех непрерывных K -значных функций на $\mathcal{B}$.

Для каждого подпространства $U \subset \mathcal{B}$ тройка $(\mathcal{E}_U, \pi_U, U)$, где $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ и $\pi_U = \pi|_U$, является, очевидно, векторным расслоением. Оно называется *частью* расслоения ξ над U и обозначается символом $\xi|_U$.

Если U является тривиализирующей окрестностью, то каждая тривиализация $\varphi: U \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_U$ определяет в $\Gamma(\xi|_U)$ сечения

$$(3) \quad s_1, \dots, s_n,$$

действующие по формулам

$$s_i(b) = \varphi(b, e_i), \dots, s_n(b) = \varphi(b, e_n),$$

где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства K^n . Так как для любой точки $b \in U$ векторы $s_1(b), \dots, s_n(b)$ составляют базис линейного пространства $\mathcal{F}_b$, то каждое

сечение $s: U \rightarrow \mathcal{E}_U$ задает на U функции $s^1, \dots, s^n: U \rightarrow K$, удовлетворяющие для любой точки $b \in \mathcal{B}$ соотношению

$$s(b) = s^1(b)s_1 + \dots + s^n(b)s_n,$$

которое эти функции однозначно определяет.

Задача 2. Покажите, что функции $s^1, \dots, s^n$ непрерывны (принадлежат алгебре $F_K(U)$).

Поэтому в $F_K(U)$ -модуле $\Gamma(\xi|_U)$ имеет место равенство

$$s = s^1s_1 + \dots + s^ns_n, \quad s^1, \dots, s^n \in F_K(U).$$

По определению это означает, что $F_K(U)$ -модуль $\Gamma(\xi|_U)$ является свободным модулем ранга n с базисом (3).

Обратно, пусть U — такое открытое подмножество пространства $\mathcal{B}$, что модуль $\Gamma(\xi|_U)$ является свободным модулем ранга n , и пусть (3) — его произвольный базис. Определим отображение $\varphi: U \times R^n \rightarrow \mathcal{E}_U$ формулой

$$\varphi(b, x) = x^i s_i(b), \quad b \in U, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n.$$

Автоматическая проверка (проведите ее!) показывает, что отображение φ является тривиализацией расслоения ξ над U .

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. Открытое множество $U \subset \mathcal{B}$ тогда и только тогда является тривиализирующей расслоение ξ окрестностью, когда $F_K(U)$ -модуль $\Gamma(\xi|_U)$ является свободным модулем ранга n . При этом базисы (3) этого модуля находятся в естественном биективном соответствии с тривиализациями φ расслоения ξ над U . $\square$

На основании этого предложения базисы (3) модуля $\Gamma(\xi|_U)$ мы также будем называть тривиализациями расслоения ξ над U .

Соглашение. В дальнейшем тривиализации (3) мы будем также называть базисами модуля $\Gamma\xi$ над U . Эта сокращенная терминология часто бывает удобна.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ — два векторных расслоения. Непрерывное отображение $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ называется *послойным*, если из того, что точки $p_1, p_2 \in \mathcal{E}$ принадлежат одному слою (т. е. $\pi(p_1) = \pi(p_2)$), следует, что точки $p'_1 = \varphi(p_1), p'_2 = \varphi(p_2)$ также принадлежат одному слою (т. е. $\pi'(p'_1) = \pi'(p'_2)$).

Задача 3. Докажите, что для каждого послойного отображения $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ формула

$$\bar{\varphi}(b) = \pi'(\varphi(p)), \quad p \in \pi^{-1}(b),$$

корректно определяет непрерывное отображение

$$\bar{\varphi}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}',$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}' \\ \pi \downarrow & \bar{\varphi} & \downarrow \pi' \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B}' \end{array}$$

и для любой точки $b \in \mathcal{B}$ отображение

$$\varphi_b: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_{b'}, \quad b' = \bar{\varphi}(b),$$

индуцированное отображением φ , непрерывно.

Определение 2. Послойное отображение φ , для которого все отображения φ_b , $b \in \mathcal{B}$, линейны, называется *морфизмом* векторного расслоения ξ в векторное расслоение ξ' . В записи: $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$. При $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ морфизм φ , для которого $\bar{\varphi} = \text{id}$, называется *морфизмом над $\mathcal{B}$* . Морфизм над $\mathcal{B}$, являющийся гомеоморфизмом, называется *изоморфизмом*. (Для такого морфизма φ обратный гомеоморфизм $\varphi^{-1}: \xi' \rightarrow \xi$ также является морфизмом над $\mathcal{B}$ — и, значит, изоморфизмом.) Расслоения ξ и ξ' над $\mathcal{B}$, для которых существует хотя бы один изоморфизм $\xi \rightarrow \xi'$, называются *изоморфными*.

Изоморфизмы вида $\xi \rightarrow \xi$ называются *автоморфизмами*.

Задача 4. Докажите, что морфизм расслоений $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$ над $\mathcal{B}$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда для любой точки $b \in \mathcal{B}$ линейное отображение $\varphi_b: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_{b'}$ является изоморфизмом линейных пространств.

Множество всех морфизмов $\xi \rightarrow \xi'$ над $\mathcal{B}$ мы будем обозначать символом $\text{Mor}(\xi, \xi')$. Оно является линейным пространством над полем K (даже при $K = \mathbb{H}$) и модулем над алгеброй $F\mathcal{B}$ относительно очевидным образом определяемых операций.

Каждый морфизм $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$ векторных расслоений над $\mathcal{B}$ определяет по формуле

$$s \mapsto \varphi s,$$

$$s \in \Gamma_{\xi}^{\mathcal{B}},$$

линейное отображение

$$\varphi \circ: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi'$$

линейных пространств сечений.

Так как для любой функции $f \in F_K \mathfrak{B}$

$$(\varphi \circ f s)(b) = \varphi_b(f(b)s(b)) = f(b)\varphi_b(s(b)) = f(\varphi \circ s)(b),$$

то отображение $\varphi \circ$ является $F_K \mathfrak{B}$ -линейным отображением.

Аналогично проверяется, что соответствие $\varphi \rightarrow \varphi \circ$ определяет $F_K \mathfrak{B}$ -линейное отображение $F_K \mathfrak{B}$ -модуля $\text{Mor}(\xi, \xi')$ в $F_K \mathfrak{B}$ -модуль $\text{Hom}_{F_K \mathfrak{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ всех $F_K \mathfrak{B}$ -линейных отображений $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi'$.

Задача 5. Докажите, что любое $F_K \mathfrak{B}$ -линейное отображение $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi'$ имеет вид $\varphi \circ$ для некоторого однозначно определенного морфизма $\varphi: \xi \rightarrow \xi'$. [Указание. См. ниже предложение 3 лекции II.]

Это означает, что модули $\text{Mor}(\xi, \xi')$ и $\text{Hom}_{F_K \mathfrak{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ естественно изоморфны и потому могут быть отождествлены:

$$\text{Mor}(\xi, \xi') = \text{Hom}_{F_K \mathfrak{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi').$$

Подчеркнем, что это верно и при $K = \mathbb{H}$.

Если в вещественном векторном расслоении ξ комплексифицировать все слои $\mathcal{F}_b$, то, очевидно, получится комплексное векторное расслоение того же ранга, которое обозначается символом $\xi^{\mathbb{C}}$ и называется комплексификацией расслоения ξ .

Аналогично, если в комплексном векторном расслоении ξ овеществить все слои $\mathcal{F}_b$, т. е. в силу вложения $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ считать их вещественными линеалами (см. лекцию II.25), то получится вещественное расслоение вдвое большего ранга. Это расслоение называется овеществлением расслоения ξ и обозначается символом $\xi_{\mathbb{R}}$. Операция умножения на i определяет на $\xi_{\mathbb{R}}$ автоморфизм $I: \xi_{\mathbb{R}} \rightarrow \xi_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющий соотношению

$$(4) \quad I^2 = -\text{id}.$$

Обратно, задание на вещественном расслоении η ранга $2n$ автоморфизма $I: \eta \rightarrow \eta$, удовлетворяющего соотношению (4), определяет на каждом слое этого расслоения структуру комплексного линеала, по отношению к которой η ока-

зывается (проверьте!) комплексным векторным расслоением ξ (для которого $\xi_{\mathbb{R}} = \eta$). Таким образом, *комплексные векторные расслоения*—это в точности вещественные расслоения, для которых задан автоморфизм I , удовлетворяющий соотношению (4). (Ср. лекцию II.25.)

На этом основании автоморфизмы I , удовлетворяющие соотношению (4), называются *комплексными структурами*.

Аналогично *кватернионные расслоения*—это вещественные расслоения, на которых заданы два автоморфизма I и J , удовлетворяющие соотношениям

$$I^2 = -\text{id}, \quad J^2 = -\text{id}, \quad IJ = -JI.$$

(Третий автоморфизм K —отвечающий кватернионной единице k —вводить не нужно, так как он выражается через автоморфизмы I и J .)

Примеры векторных расслоений

Пример 1. Для любого топологического пространства $\mathcal{B}$ и любого линейного пространства $\mathcal{V}$ над полем K тройка $(\mathcal{B} \times \mathcal{V}, \pi, \mathcal{B})$, где $\pi: \mathcal{B} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ —проекция прямого произведения на первый множитель, является векторным расслоением. Тривиализирующее покрытие $\{U_\alpha\}$ состоит для этого расслоения из одного элемента $U = \mathcal{B}$, а тривиализация $\varphi: \mathcal{B} \times K^n \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{V}$ определяется выбором в $\mathcal{V}$ базиса $e_1, \dots, e_n$ и задается формулой

$$\varphi(b, x) = (b, \alpha^{-1}(x)), \quad b \in \mathcal{B}, \quad x \in K^n,$$

где $\alpha: \mathcal{V} \rightarrow K^n$ —координатный изоморфизм, отвечающий базису $e_1, \dots, e_n$.

Это векторное расслоение обозначается символом $\theta_{\mathcal{B}}^n$. Оно—и каждое векторное расслоение, ему изоморфное,—называется *тривиальным векторным расслоением ранга n* .

Согласно предложению 1 векторное расслоение ξ тогда и только тогда тривиально, когда $F_K(\mathcal{B})$ -модуль $\Gamma(\xi)$ свободен и его ранг равен рангу n расслоения ξ .

Тривиализации φ векторного расслоения ξ над открытым множеством $U \subset \mathcal{B}$ являются не чем иным, как изоморфизмами расслоения θ_U^n на расслоение $\xi|_U$, а утверждение, что U является тривиализирующей окрестностью, означает, что расслоение $\xi|_U$ тривиально.

Пример 2. Пусть $\mathcal{X}$ —гладкое n -мерное многообразие, $T\mathcal{X}$ —многообразие касательных векторов на $\mathcal{X}$ (см. опре-

деление 3 лекции III.15) и $\pi: T\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — естественная проекция, сопоставляющая каждому вектору $A \in T\mathcal{X}$ точку $p \in \mathcal{X}$ его приложения (т. е. такую, что $A \in T_p\mathcal{X}$). По определению слоем $\pi^{-1}(p)$, $p \in \mathcal{X}$, проекции π является касательное пространство $T_p\mathcal{X}$ и каждая карта (U, h) многообразия $\mathcal{X}$ определяет карту (TU, Th) многообразия $T\mathcal{X}$, для которой

$$TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{X} = \pi^{-1}U,$$

и отображение $Th: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ задается формулой

$$(Th)(A) = (x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^n), \quad A \in TU,$$

где $x^1, \dots, x^n$ — координаты точки $p = \pi(A)$ в карте (U, h) , а $a^1, \dots, a^n$ — координаты вектора A в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

пространства $T_p\mathcal{X}$. Сейчас нам удобно заменить отображение Th отображением $(h^{-1} \times \text{id}) \circ Th: TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, действующим по формуле

$$A \mapsto (p, a), \quad p = \pi(A), \quad a = (a^1, \dots, a^n).$$

Пусть

$$\varphi_h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TU$$

— обратное отображение:

$$\varphi_h(p, a) = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \quad p \in U, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

Отображение φ_h является гомеоморфизмом, замыкающим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_h} & TU \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

т. е. является тривиализацией расслоения $(T\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$ над окрестностью U .

Мы видим, таким образом, что тройка $\tau_{\mathcal{X}} = (T\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$ является векторным расслоением ранга n .

Расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ обозначается также символом $\tau\mathcal{X}$ (или $\tau(\mathcal{X})$).

Это расслоение называется *касательным расслоением над многообразием $\mathcal{X}$* . (Напрашивающийся термин «касательное расслоение многообразия $\mathcal{X}$ », к сожалению, мало приемлем, так как по-русски «расслоение многообразия $\mathcal{X}$ » означает, что расслаивается само $\mathcal{X}$.)

Подчеркнем, что слоями $\pi^{-1}(p)$ касательного расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ являются касательные пространства $T_p\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{X}$.

Расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ является для нас руководящим примером, с которым мы будем соотносить все общие конструкции теории векторных расслоений.

Многообразие $\mathcal{X}$, для которого расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ тривиально, называется *параллелизуемым* (ср. лекцию III.16).

Для комплексно-аналитического многообразия $\mathcal{X}$ расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ является, конечно, расслоением над $\mathbb{C}$, причем

$$(\tau_{\mathcal{X}})_R = \tau_{\mathcal{X}_R},$$

где $\mathcal{X}_R$ — многообразие $\mathcal{X}$, рассматриваемое в силу отождествления $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ как вещественно-аналитическое многообразие (овеществление многообразия $\mathcal{X}$; см. лекцию III.11).

Пример 3. (В этом примере предполагается, что читатель знаком с лекцией 1.) Матричное умножение

$$(A, x) \mapsto Ax$$

квадратных матриц A порядка n на столбцы x высоты n определяет — при условии, что векторы пространства K^n мы записываем в виде столбцов — действие полной линейной группы $GL(n; K)$ на линейном пространстве K^n , являющееся *линейным действием* (в другой терминологии — *представлением*). Это означает, что для любой матрицы $A \in GL(n; K)$ отображение $L_A: x \mapsto Ax$ является линейным оператором (чтобы это действие было линейно при $K = \mathbb{H}$ и нужно считать K^n правым линеалом). Поэтому для любого главного $GL(n; K)$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определено $GL(n; K)$ -расслоение $\xi = \xi[K^n]$ с типичным слоем K^n и (см. формулу (12) лекции 1) для любой точки $b \in \mathcal{B}$ (являющейся, по определению, орбитой правого действия группы $\mathcal{G} = GL(n; K)$ на тотальном пространстве $\mathcal{E}$ расслоения ξ) и любой точки p этой орбиты формула

$$j_p(x) = [p, x]_{\mathcal{E}}, \quad x \in K^n,$$

определяет гомеоморфизм $j = j_p: K^n \rightarrow \mathcal{F}_b$ пространства K^n на слой $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ над точкой b . Если q — другая точка орбиты b и если $p = qA$, где $A \in GL(n; K)$, то

$$(j_q^{-1} \circ j_p)(x) = j_q^{-1}[p, x] = j_q^{-1}[q, Ax] = Ax,$$

т. е. $j_q^{-1} \circ j_p = L_A$, $A \in GL(n; K)$. Поэтому в силу линейности действия группы $GL(n; K)$ на K^n структура линейного пространства в $\mathcal{F}_b$, перенесенная из K^n посредством отображения j_p , т. е. задаваемая формулами

$$[p, x] + [p, y] = [p, x + y], \quad x, y \in K^n, \\ \lambda[p, x] = [p, \lambda x], \quad \lambda \in K, \quad x \in K^n,$$

не зависит от выбора точки p . Таким образом, в каждом слое $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ имеется естественная структура n -мерного линейного пространства над K .

Пусть теперь главное расслоение ξ локально тривиально, т. е. пусть некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ обладает тем свойством, что для любого α существует эквивариантный гомеоморфизм

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times GL(n; K) \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

главных $GL(n; K)$ -пространств. Тогда, как показывает автоматическая проверка (проведите ее!), формула

$$\varphi_\alpha(b, x) = [\varphi(b, E), x], \quad b \in U_\alpha, \quad x \in K^n,$$

(где, как всегда, E — единичная матрица) определяет тривиализацию

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

над U_α расслоения ξ .

Этим доказано, что для любого локально тривиального главного $GL(n; K)$ -расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi = \xi[K^n]$ является векторным расслоением.

Верно и обратное утверждение.

Предложение 2. Для любого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ существует такое локальное тривиальное главное $GL(n; K)$ -расслоение $\tilde{\xi}$, что $\xi = \tilde{\xi}[K^n]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — подпространство прямого произведения

$$\underbrace{\mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}}_{n \text{ раз}}$$

состоящее из точек $p = (p_1, \dots, p_n)$, все компоненты $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{B}$ которых принадлежат одному слою расслоения ξ (т. е. удовлетворяют соотношениям $\pi(p_1) = \dots = \pi(p_n)$) и составляют в этом слое базис. Положив $\pi(p) = \pi(p_1)$, мы получим — очевидно, непрерывное и надъективное — отображение

$$\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}.$$

(Соответствующая тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется *расслоением реперов* векторного расслоения ξ .)

С другой стороны, матричное умножение

$$(5) \quad (p, A) \mapsto pA, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad A = \|a^i_j\|,$$

где pA — строка $(q_1, \dots, q_n)$, состоящая из векторов $q_i = p_j a^i_j$ (заметим, что здесь мы пишем числовые множители справа от векторов; при $K = \mathbb{H}$ это существенно), определяет, очевидно, свободное правое действие группы $GL(n; K)$ на пространстве $\mathcal{E}$, орбитами которого являются как раз слои расслоения ξ . Поэтому, если действие (5)

а) непрерывно;

б) является главным (т. е. соответствующее отображение сдвига непрерывно),

то тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ будет главным расслоением. При этом для ассоциированного векторного расслоения $\xi[K^n]$ формула

$$(6) \quad [p, x] \mapsto px = p_j x^j, \\ p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{E}, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \in K^n,$$

будет, очевидно, корректно, определять некоторый морфизм $\xi[K^n] \rightarrow \xi$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь доказать — кроме утверждений а и б, — что

в) морфизм (6) является изоморфизмом;

г) главное расслоение ξ локально тривиально.

Имея все это в виду, мы в первую очередь заметим, что для любой тривиализирующей расслоение ξ окрестности U каждый базис (3) модуля $\Gamma(\xi|_U)$ (тривиализация ϕ расслоения ξ над U) определяет по формуле

$$s(b) = (s_1(b), \dots, s_n(b)), \quad b \in U,$$

некоторое сечение расслоения ξ над U . (Обратим внимание, что тем самым тривиализации над U расслоения ξ отождествляются с сечениями над U расслоения ξ .) Мы определим отображение

$$\psi: U \times GL(n; K) \rightarrow \mathcal{E}U = \pi^{-1}U,$$

положив

$$\varphi(b, A) = s(b)A, \quad b \in U, A \in GL(n; K).$$

Это отображение, очевидно, непрерывно и обладает непрерывным обратным отображением

$$p \mapsto (b, A), \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{E}_U,$$

где $b = \pi(p)$, а A — матрица, столбцы которой состоят из координат в базисе $s_1(b), \dots, s_n(b)$ линейала $\mathcal{F}_b$ векторов $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{F}_b$. (Контрольный вопрос: почему последнее отображение непрерывно?) Кроме того, по отношению к естественному правому действию

$$(7) \quad (b, A)B = (b, AB), \quad b \in U, A, B \in GL(n; K),$$

группы $GL(n; K)$ на произведении $U \times GL(n; K)$ (см. пример 1 лекции 1) отображение φ эквивариантно (т. е.

$$\varphi(b, A)B = \varphi(b, AB)$$

для любой точки $b \in U$ и любых матриц $A, B \in GL(n; K)$); заметим, что подпространство $\mathcal{E}_U$ инвариантно относительно действия группы $GL(n; K)$ на пространстве $\mathcal{E}$ и потому само является $GL(n; K)$ -пространством. Таким образом, φ является эквивариантным гомеоморфизмом.

Поскольку действие (7) непрерывно, отсюда следует, что действие (5) также непрерывно (на каждом подпространстве $\mathcal{E}_U$, а потому — поскольку окрестности U покрывают $\mathcal{B}$ — и всюду). По аналогичным соображениям, непрерывно и отображение сдвига для действия (5). Следовательно, ξ является главным расслоением. При этом отображение φ будет, очевидно, его тривиализацией над U . Следовательно, главное расслоение ξ локально тривиально.

Этим утверждения а, б и г доказаны. Что же касается утверждения в, то для его доказательства достаточно заметить, что для любой тривиализации (U, φ) расслоения ξ отображение

$$\varphi^{-1}: \mathcal{E}_U \rightarrow U \times K^n$$

переводит каждую точку $p \in \mathcal{E}_U$ в точку (b, x) , где $b = \pi(p)$, а x — столбец координат вектора $p \in \mathcal{F}_b$ в базисе $s_1(b) = \varphi(b, e_1), \dots, s_n(b) = \varphi(b, e_n)$. Потому φ^{-1} индуцирует отображение

$$\xi|_U \rightarrow \xi[K^n]|_U,$$

обратное к ограничению отображения (6) над U .

Следовательно, отображение (6) является изоморфизмом над U , а потому и всюду. $\square$

Замечание 1. Таким образом, введение в рассмотрение векторных расслоений доставляет нам для случая, когда $\mathcal{F} = K^n$ и $\mathcal{G} = GL(n; K)$, прямое определение локально тривиальных $\mathcal{G}$ -расслоений $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, не апеллирующее к главным расслоениям ξ . Аналогичное описание расслоений $\xi[\mathcal{F}]$ возможно всегда, когда пространство $\mathcal{F}$ наделено некоторой структурой, а группа $\mathcal{G}$ является группой всех автоморфизмов пространства $\mathcal{F}$, сохраняющих эту структуру (при условии, что в $\mathcal{G}$ можно ввести достаточно хорошую топологию, обеспечивающую непрерывность всех необходимых отображений). Мы вернемся к этому вопросу — с чуть-чуть иных позиций — в лекции 7.

По определению для любого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ существует открытое покрытие Π пространства $\mathcal{B}$, состоящее из тривиализирующих окрестностей. Пусть U_α и U_β — два пересекающихся элемента этого покрытия. Тогда для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ определено отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}: K^n \rightarrow K^n,$$

где $\varphi_{\alpha, b}$ и $\varphi_{\beta, b}$ — отображения $K^n \rightarrow \mathcal{F}_b$, индуцированные тривиализациями $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}$ и $\varphi_\beta: U_\beta \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\beta}$ (см. пункт 6 определения 1). Это отображение линейно и обратимо, т. е. является элементом группы $GL(n; K)$. Поэтому формула

$$\varphi_{\beta\alpha}: b \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(b)$$

задает некоторое отображение

$$(8) \quad \varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n; K),$$

называемое *отображением* (или *функцией*) *перехода* (подразумевается — от φ_α к φ_β).

Лемма 1. *Отображение*

$$\varphi: U \rightarrow GL(n; K)$$

топологического пространства U в группу $GL(n; K)$ тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывно отображение

$$\bar{\varphi}: U \times K^n \rightarrow K^n,$$

задаваемое формулой

$$\bar{\varphi}(b, x) = \varphi(b)x, \quad b \in U, \quad x \in K^n.$$

Доказательство. Ясно, что если отображение φ непрерывно, то отображение φ также непрерывно (докажете!). Обратно, пусть отображение φ непрерывно. Тогда непрерывны все отображения $U \rightarrow K^n$ вида

$$\varphi_i: b \mapsto \varphi(b) e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где, как всегда, $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства K^n . Значит, непрерывны и все отображения $U \rightarrow K^n$ вида

$$\varphi_j^i: b \mapsto \varphi_j^i(b), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $\varphi_j^i(b)$ — компоненты вектора $\varphi(b) e_i$. Для завершения доказательства остается заметить, что числа $\varphi_j^i(b)$ как раз и составляют матрицу $\varphi(b) \in GL(n; K)$. $\square$

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение φ является не чем иным, как композицией $\text{pr} \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ гомеоморфизма $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: U \times K^n \rightarrow U \times K^n$ и проекции $\text{pr}: U \times K^n \rightarrow K^n$. Поэтому это отображение непрерывно. Следовательно, согласно лемме 1 непрерывно и отображение $\varphi_{\beta\alpha}$.

Таким образом, мы видим, что все отображения перехода $\varphi_{\beta\alpha}$ являются непрерывными отображениями.

Для любого множества U и любой группы G множество всех отображений $U \rightarrow G$ является группой относительно операций

$$\varphi \mapsto \varphi^{-1}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi,$$

определенных формулами

$$\varphi^{-1}(b) = \varphi(b)^{-1}, \quad (\varphi\psi)(b) = \varphi(b)\psi(b), \quad b \in U.$$

(Не путать φ^{-1} с обратным отображением, а $\varphi\psi$ — с композицией отображений!) При этом если U является топологическим пространством, G — топологической группой, а отображения φ и ψ непрерывны, то отображения φ^{-1} и $\varphi\psi$ также непрерывны (докажете!).

В частности, для отображения $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n; K)$ определено отображение $\varphi_{\beta\alpha}^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n; K)$, а для отображений $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi_{\gamma\beta}$ — в случае, когда $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ — определено отображение

$$(\varphi_{\gamma\beta}|_U)(\varphi_{\beta\alpha}|_U): U \rightarrow GL(n; K),$$

где $U = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, которое ради сокращения формул будем обозначать просто через $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}$. При этом из определения отображений $\varphi_{\beta\alpha}$ непосредственно

вытекает, что

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha}^{-1} &= \varphi_{\alpha\beta} \quad \text{на } U_\alpha \cap U_\beta, \\ \varphi_{\gamma\beta} \varphi_{\beta\alpha} &= \varphi_{\gamma\alpha} \quad \text{на } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{aligned}$$

для любых индексов α, β, γ (для которых соответственно $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ и $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$).

Определение 3. Пусть $\mathcal{B}$ — топологическое пространство, $\mathcal{G}$ — топологическая группа и $\Pi = \{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{B}$. Семейство $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ непрерывных отображений

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathcal{G},$$

определенных для любых индексов α, β , для которых $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, называется *коциклом над группой $\mathcal{G}$ покрытия Π* (на самом деле — нерва покрытия Π ; см. лекцию III.21), если оно удовлетворяет соотношениям (9). Коциклы над группой $GL(n; K)$ называются также *матричными коциклами*.

Таким образом, мы видим, что *каждое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определяет для любого тривиализирующего покрытия Π пространства $\mathcal{B}$ некоторый матричный коцикл $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$* .

Мы будем называть этот коцикл *склеивающим коциклом расслоения ξ* и будем обозначать его символом φ_ξ .

Предложение 2. Пусть $\mathcal{B}$ — топологическое пространство, Π — его открытое покрытие и $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ — произвольный матричный коцикл над группой $GL(n; K)$ покрытия Π . Тогда существует — с точностью до изоморфизма единственное — векторное расслоение ξ ранга n с базой $\mathcal{B}$, тривиализирующим покрытием Π и склеивающим коциклом φ .

Доказательство. Единственность. Утверждение о том, что векторные расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ с тривиализирующим покрытием Π имеют один и тот же склеивающий коцикл φ , означает, что для этих расслоений существуют такие тривиализации

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}, \quad \varphi'_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}'_{U_\alpha},$$

что для любых α и β с $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ имеет место равенство

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi'_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n,$$

а значит, и равенство

$$\varphi'_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} = \varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathcal{E}_{U_\alpha \cap U_\beta} \rightarrow \mathcal{E}'_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Поэтому формула

$$f(p) = (\varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(p), \quad \text{если } p \in \mathcal{G}_{U_\alpha} \text{ (т. е. } \pi(p) \in U_\alpha),$$

корректно определяет некоторое отображение $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, являющееся — как показывает очевидная проверка — изоморфизмом $\xi \rightarrow \xi'$.

Существование. Рассмотрим дизъюнктивное объединение

$$E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times K^n)$$

пространств $U_\alpha \times K^n$. Обозначив для любых точек $b \in U_\alpha$ и $x \in K^n$ точку $(b, x) \in U_\alpha \times K^n$ пространства E символом $(b, x)_\alpha$, мы введем в E отношение $\sim$, считая, что $(b, x)_\alpha \sim (c, y)_\beta$ для $b \in U_\alpha$, $c \in U_\beta$, $x, y \in K^n$ тогда и только тогда, когда $c = b$ и $y = \varphi_{\beta\alpha}(b)x$. Из соотношений (9) немедленно вытекает, что это отношение является отношением эквивалентности. Пусть $\mathcal{G}$ — соответствующее факторпространство пространства E (снабженное фактортопологией). Тогда формула

$$\pi[b, x]_\alpha = b, \quad b \in \mathcal{B}, \quad x \in K^n,$$

где α — такой индекс, что $b \in U_\alpha$, а $[b, x]_\alpha$ — класс эквивалентности точки $(b, x)_\alpha$, будет корректно определять некоторое непрерывное (почему?) надъективное отображение

$$\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Для любого α формула

$$\varphi_\alpha(b, x) = [b, x]_\alpha, \quad b \in U_\alpha, \quad x \in K^n,$$

очевидно, определяет непрерывное послыйное отображение

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{G}_{U_\alpha},$$

где $\mathcal{G}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ — подпространство пространства $\mathcal{G}$, состоящее из всех точек вида $[b, x]_\alpha$, $b \in U_\alpha$, $x \in K^n$. Более того, легко видеть, что формула

$$[b, x]_\alpha \mapsto (b, x), \quad b \in U_\alpha, \quad x \in K^n,$$

корректно определяет непрерывное (почему?) отображение $\mathcal{G}_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times K^n$, обратное к отображению φ_α . Следовательно, φ_α является послыйным гомеоморфизмом. Это

означает, что тройка $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ удовлетворяет условию b_1 определения 1.

Чтобы удовлетворить условию a (и условию b_2), заметим, что для любой точки $b \in \mathcal{B}$ слой $\mathcal{F}_b$ отображения π состоит из всех точек вида $[b, x]_\alpha$, где α — произвольный индекс, для которого $b \in U_\alpha$. При этом если кроме того $x \in U_\beta$, то $[b, x]_\alpha = [b, y]_\beta$, где $y = \varphi_{\beta\alpha}(b)x$. Поскольку отображение $\varphi_{\beta\alpha}(b): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ линейно, отсюда следует, что формулы

$$\begin{aligned} [b, x]_\alpha + [b, y]_\alpha &= [b, x + y]_\alpha, & x, y \in \mathbb{K}^n, \\ \lambda [b, x]_\alpha &= [b, \lambda x]_\alpha, & x \in \mathbb{K}^n, \end{aligned}$$

корректно определяют в $\mathcal{F}_b$ структуру линейного пространства. Это дает условие a и одновременно условие b_2 .

Таким образом, ξ является векторным расслоением, а отображения φ_α — его тривиализациями. Кроме того

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, x) = \varphi_\beta^{-1}[b, x]_\alpha = \varphi_\beta^{-1}[b, \varphi_{\beta\alpha}(b)x]_\beta = (b, \varphi_{\beta\alpha}(b)x)$$

для любой точки $(b, x) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n$, и значит склеивающим коциклом φ_ξ этого расслоения является данный коцикл $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$. $\square$

Описанная конструкция объясняет, в частности, почему коцикл φ_ξ называется склеивающим. По аналогичным соображениям составляющие этот коцикл отображения $\varphi_{\beta\alpha}$ называются также *склеивающими функциями* или *функциями склейки*.

Предложение 2 еще не полностью сводит векторные расслоения к матричным коциклам, поскольку коцикл φ_ξ зависит от выбора тривиализаций φ_α и при другом их выборе вполне может оказаться другим.

Однако эта неоднозначность легко контролируется.

Пусть $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}\}$ и $\{\varphi'_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}\}$ — две системы тривиализаций векторного расслоения ξ над одним и тем же тривиализирующим покрытием $\Pi = \{U_\alpha\}$. Тогда для любого α формула

$$\gamma_\alpha(b) = \varphi_{\alpha'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha'} \circ \varphi_{\alpha, b}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad b \in U_\alpha,$$

определяет некоторое отображение

$$\gamma_\alpha: U_\alpha \rightarrow GL(n; \mathbb{K}),$$

связанное с гомеоморфизмом

$$\varphi_{\alpha'}^{-1} \circ \varphi_\alpha: U \times \mathbb{K}^n \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$$

соотношением

$$(\varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\alpha})(b, x) = (b, \gamma_{\alpha}(b)x), \quad b \in U_{\alpha}, x \in K^n,$$

и потому в силу леммы 1 непрерывное.

По построению для любой точки $b \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha}^+(b) &= \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^+ = \\ &= \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\beta, b} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b} \circ \varphi_{\alpha, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^+ = \\ &= \gamma_{\beta}(b)^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b) \circ \gamma_{\alpha}(b), \end{aligned}$$

т. е.

$$(10) \quad \varphi_{\beta\alpha}^+ = \gamma_{\beta}^{-1} \varphi_{\beta\alpha} \gamma_{\alpha}$$

в группе всех непрерывных отображений $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(n; K)$ (где, конечно, под γ_{α} и γ_{β} подразумеваются ограничения этих отображений на $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$).

Мы будем говорить, что два коцикла $\Phi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ и $\Phi' = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$ покрытия $\mathcal{U}$ над группой $\mathcal{G}$ когомологичны, если существуют такие непрерывные отображения

$$(11) \quad \gamma_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow \mathcal{G},$$

что для любых индексов α, β с $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ выполнены соотношения (10). В этой терминологии доказанное утверждение означает, что склеивающие коциклы одного и того же векторного расслоения ξ , отвечающие различным тривиализациям φ_{α} (но одному и тому же тривиализирующему покрытию $\mathcal{U}$) когомологичны.

Отношение когомологичности коциклов является, очевидно, отношением эквивалентности. Соответствующие классы называются классами когомологий покрытия $\mathcal{U}$ над группой $\mathcal{G}$. Класс когомологий цикла Φ мы будем обозначать символом $[\Phi]$, а множество всех классов когомологий покрытия $\mathcal{U}$ над группой $\mathcal{G}$ — символом $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$.

[Обратим внимание, что, вообще говоря, множество $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ не несет никакой естественной групповой структуры.]

В свете всего вышесказанного следующая теорема теперь очевидна:

Теорема 1. Формула

$$\xi \mapsto [\varphi_{\xi}]$$

устанавливает биективное соответствие между множеством классов изоморфных векторных расслоений ξ ранга n над пространством $\mathcal{B}$, имеющих данное тривиализирующее накрытие $\mathcal{U}$, и множеством $H^1(\mathcal{U}; GL(n; K))$. $\square$

В качестве полезного дополнения к этой теореме заметим, что *каждый коцикл* $\varphi' = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$, *когомологичный склеивающему коциклу* φ_ξ *векторного расслоения* ξ , *также является склеивающим коциклом этого расслоения* (ответчающим каким-то новым тривиализациям $\varphi'_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{S}U_\alpha$). Действительно, если коцикл $\varphi = \varphi_\xi$ отвечает тривиализациям $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{S}U_\alpha$ и если имеют место равенства вида (10), где γ_α — отображения (11), то, положив

$$\varphi'_\alpha(b, x) = \varphi_\alpha(b, \gamma_\alpha(b)x), \quad b \in U_\alpha, x \in K^n,$$

мы получим тривиализации $\varphi'_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{S}U_\alpha$, которым отвечает коцикл φ' . $\square$

Стоит также заметить, что в каждом множестве $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{S})$ имеется отмеченный элемент $[e]$, являющийся классом когомологий коцикла e , состоящего из постоянных отображений $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathcal{S}$, каждое из которых переводит все множество $U_\alpha \cap U_\beta$ в единицу e группы $\mathcal{S}$. При этом легко видеть (докажите!), что *при* $\mathcal{S} = GL(n; K)$ *классу* $[e]$ *отвечает тривиальное векторное расслоение* $\theta^n_{\mathcal{U}}$.

Замечание 2. Теорема 1 вместе с конструкцией склеивающих коциклов φ_ξ практически дословно переносится на случай любых $\mathcal{S}$ -расслоений вида $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, где ξ — произвольное локально тривиальное главное $\mathcal{S}$ -расслоение, а группа $\mathcal{S}$ и левое $\mathcal{S}$ -пространство $\mathcal{F}$ фиксированы. (Следует иметь в виду, что по определению каждая тривиализация расслоения ξ над U индуцируется некоторой тривиализацией главного расслоения ξ .) Подчеркнем, что, таким образом, соответствующие множества $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{S})$, описывающие все расслоения вида $\xi[\mathcal{F}]$, тривиализирующиеся над элементами покрытия $\mathcal{U}$, *не зависят от* $\mathcal{F}$. Это устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{S}$ -расслоениями ξ и ξ' , тривиализирующимися над каждым элементом покрытия $\mathcal{U}$ и отвечающим различным $\mathcal{S}$ -пространствам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$. Эти расслоения соответствуют друг другу, если они определяют один и тот же элемент множества $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{S})$. Впрочем, это соответствие фактически нам уже известно, поскольку расслоения ξ и ξ' тогда и только тогда соответствуют друг другу в этом смысле, когда они ассоциированы с одним и тем же главным $\mathcal{S}$ -расслоением ξ .

[Иначе то же самое можно выразить утверждением, что множество $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{S})$ находится в естественном биективном соответствии с классами изоморфных главных $\mathcal{S}$ -расслоений

над $\mathcal{B}$, тривиализирующихся над каждым элементом покрытия Π .]

Замечание 3. Если покрытие Π' вписано в покрытие Π , то операция ограничения отображений определяет инъективное (почему?) отображение $H^1(\Pi; \mathcal{S}) \rightarrow H^1(\Pi'; \mathcal{S})$, которое можно считать вложением. Это понятным образом позволяет ввести в рассмотрение объединение множеств $H^1(\Pi; \mathcal{S})$ по всем открытым покрытиям Π пространства $\mathcal{B}$, которое обозначается символом $H^1(\mathcal{B}; \mathcal{S})$ и находится в естественном биективном соответствии с множеством классов изоморфных локально тривиальных $\mathcal{S}$ -расслоений (при $\mathcal{S} = GL(n; K)$)—векторных расслоений ранга n над пространством $\mathcal{B}$.

Замечание 4. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь гладких векторных расслоений $\xi = (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$, для которых (см. лекцию 9) пространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ являются гладкими многообразиями, а отображение π —субмерсией. В лекции 16 мы покажем, что в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ паракомпактно (см. определение 1 лекции III. 22), на нем существуют покрытия Π , *универсально тривиализирующие* гладкие векторные расслоения, т. е. такие, что любое гладкое векторное расслоение тривиализируется над Π . Поэтому описанный в замечании 3 предельный переход в этом случае фактически не нужен.

Лекция 7

Векторные $\mathcal{G}$ -расслоения. — Линейные $\mathcal{G}$ -пространства. — Кватернионы. — Группа $U^H(n)$. — Векторные расслоения типа $\mathcal{G}$. — Их связь с главными $\mathcal{G}$ -расслоениями. — Условие редуцируемости. — Ориентируемые векторные расслоения. — Метризуемые векторные расслоения.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — векторное расслоение ранга n над полем K и пусть $\mathcal{G}$ — подгруппа группы $GL(n; K)$.

Определение 1. Говорят, что векторное расслоение ξ *редуцируется к группе $\mathcal{G}$* , если для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что для любых α и β и любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ матрица $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ принадлежит группе $\mathcal{G}$ (отвечающий этому атласу склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ является коциклом над группой $\mathcal{G}$). Атласы, обладающие этим свойством, мы будем называть $\mathcal{G}$ -атласами. Два $\mathcal{G}$ -атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также является $\mathcal{G}$ -атласом. Векторное расслоение, для которого задан класс эквивалентных $\mathcal{G}$ -атласов, называется *векторным $\mathcal{G}$ -расслоением*.

Таким образом, векторное расслоение тогда и только тогда редуцируется к группе $\mathcal{G}$, когда в него можно ввести структуру векторного $\mathcal{G}$ -расслоения.

Вообще говоря, эта структура не единственна.

Пример 1. Легко видеть, что векторное расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к единичной подгруппе $\{E\}$, когда оно тривиально. Действительно, если $\varphi_{\beta\alpha}(b) = E$ для всех α, β и всех $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, то формула

$$\varphi(b, x) = \varphi_\alpha(b, x), \quad \text{если } b \in U_\alpha,$$

корректно определяет отображение $\varphi: \mathcal{B} \times K^n \rightarrow \mathcal{B}$, являющееся изоморфизмом над $\mathcal{B}$. $\square$

Пример 2. Для любых векторных расслоений $\xi = (\mathcal{E}^\xi, \pi^\xi, \mathcal{B})$ и $\eta = (\mathcal{E}^\eta, \pi^\eta, \mathcal{B})$ над $\mathcal{B}$ рангов n и m соответственно рассмотрим в прямом произведении $\mathcal{E}^\xi \times \mathcal{E}^\eta$ их тотальных пространств подпространство $\mathcal{E}$, состоящее из таких пар $(p, q) \in \mathcal{E}^\xi \times \mathcal{E}^\eta$, что $\pi^\xi(p) = \pi^\eta(q)$. [На языке теории категорий пространство $\mathcal{E}$ является не чем иным, как коамальгамой диаграммы $\mathcal{E}^\xi \xrightarrow{\pi^\xi} \mathcal{B} \xleftarrow{\pi^\eta} \mathcal{E}^\eta$.] Пусть

$$\zeta = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}),$$

где π — отображение $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$, определенное формулой $\pi(p, q) = \pi^{\xi}(p)$ (или, что равносильно, формулой $\pi(p, q) = \pi^{\eta}(q)$). Для любой точки $b \in \mathcal{B}$ слой $\pi^{-1}(b)$ расслоения $\mathcal{S}$ состоит из пар (p, q) , где $p \in \mathcal{F}_b^{\xi}$, $q \in \mathcal{F}_b^{\eta}$, т. е. является прямой суммой $\mathcal{F}_b^{\xi} \oplus \mathcal{F}_b^{\eta}$ линейных пространств $\mathcal{F}_b^{\xi}$ и $\mathcal{F}_b^{\eta}$ (и значит сам является линейным пространством). При этом для любых тривиализирующих атласов $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}^{\xi})\}$ и $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}^{\eta})\}$ расслоений ξ и η (с одними и теми же тривиализирующими окрестностями U_{α}) отображения

$$\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \times K^{n+m} \rightarrow \mathcal{S}_{U_{\alpha}} = \pi^{-1}U_{\alpha},$$

определенные формулами

$$\varphi_{\alpha}(b, (x, y)) = (\varphi_{\alpha}^{\xi}(b, x), \varphi_{\alpha}^{\eta}(b, y)), \\ b \in U_{\alpha}, \quad x \in K^n, \quad y \in K^m,$$

будут, как легко видеть, удовлетворять условиям б₁ и б₂ определения 1 лекции 6. Значит, расслоение ξ является векторным расслоением ранга $n+m$ (а отображения φ_{α} — его тривиализациями над U_{α}). Это расслоение называется суммой Уитни расслоений ξ и η и обозначается символом $\xi \oplus \eta$. Его тотальное пространство $\mathcal{S}$ обозначается символом $\mathcal{S}^{\xi \oplus \eta}$.

По определению расслоение $\xi \oplus \eta$ является векторным $GL(n, m; K)$ -расслоением, где $GL(n, m; K) \approx GL(n; K) \times GL(m; K)$ — группа всех матриц порядка $n+m$, имеющих вид

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} A \in GL(n; K), \\ B \in GL(m; K). \end{matrix}$$

Задача 1. Покажите, что векторное расслоение ранга $n+m$ тогда и только тогда редуцируется к группе $GL(n, m; K)$, когда оно является суммой Уитни векторных расслоений рангов n и m соответственно.

Чтобы лучше освоить понятие векторного $\mathcal{S}$ -расслоения, нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры.

Пусть по-прежнему $\mathcal{S}$ — произвольная подгруппа группы $GL(n; K)$.

Определение 2. Линейное n -мерное пространство $\mathcal{V}$ над полем K называется линейным $\mathcal{S}$ -пространством, если в нем задан такой класс базисов $\text{Coor } \mathcal{V}$, что

а) если базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ связан с базисом $e =$

$= (e_1, \dots, e_n)$ из $\text{Coog } \mathcal{V}^2$ матрицей перехода $A \in \mathcal{S}$, то $f \in \text{Coog } \mathcal{V}^2$;

б) для любых базисов из $\text{Coog } \mathcal{V}^2$ связывающая их матрица перехода принадлежит подгруппе $\mathcal{S}$.

Пример 3. Приняв за $\text{Coog } K^n$ все базисы в K^n , связанные со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$ матрицей перехода из группы $\mathcal{S}$, мы внесем в K^n структуру линейного $\mathcal{S}$ -пространства. Эта структура называется *стандартной*.

Линейное отображение $\varphi: \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ линейных $\mathcal{S}$ -пространств называется $\mathcal{S}$ -изоморфизмом, если каждый базис из $\text{Coog } \mathcal{V}^2$ оно переводит в базис из $\text{Coog } \mathcal{V}^2$ (и потому, в частности, является линейным изоморфизмом).

Пример 4. Линейный изоморфизм $\mathcal{V}^2 \rightarrow K^n$ тогда и только тогда является $\mathcal{S}$ -изоморфизмом (по отношению к стандартной структуре $\mathcal{S}$ -пространства K^n), когда он является координатным изоморфизмом, отвечающим базису из $\text{Coog } \mathcal{V}^2$.

Пусть $K = R$.

Пример 5. Если $GL^+(n; R)$ — подгруппа группы $GL(n; R)$, состоящая из матриц с положительным определителем, то линейные $GL^+(n; R)$ -пространства — это в точности ориентированные линейные пространства, а $GL^+(n; R)$ -изоморфизмы — это линейные изоморфизмы, сохраняющие ориентацию.

Пример 6. Линейные $O(n)$ -пространства — это евклидовы линейные пространства (пространства с положительно определенным скалярным умножением), а $O(n)$ -изоморфизмы — это их изометрии.

Пример 7. Линейные $SO(n)$ -пространства — это ориентированные евклидовы линейные пространства, а $SO(n)$ -изоморфизмы — это их изометрии, сохраняющие ориентацию.

Пример 8. Аналогично линейные $O(p, q)$ -пространства — это (см. лекцию II.126) псевдоевклидовы пространства типа (p, q) , а $O(p, q)$ -изоморфизмы — это их изометрии.

Пример 9. Линейные $Sp(m; R)$ -пространства — это (см. лекцию II.10) симплектические пространства размерности $n = 2m$, а $Sp(m; R)$ -изоморфизмы — это их симплектические изоморфизмы.

Пример 10. Напомним (см. лекцию II.25), что *комплексной структурой* на вещественном линейном пространстве $\mathcal{V}^2$ размерности $n = 2m$ называется произвольный линейный оператор $I: \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$, для которого $I^2 = -E$.

Согласно результатам лекции II.25 вещественные пространства с комплексной структурой — это в точности линейные $\mathcal{Z}$ -пространства, где $\mathcal{Z}$ — подгруппа группы $GL(n; \mathbb{R})$ (и даже группы $GL^+(n, \mathbb{R})$), состоящая из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

[Эта подгруппа изоморфна группе $GL(n; \mathbb{C})$, а пространства с комплексной структурой — это в точности овеществления комплексных линейных пространств; см. лекцию II.25.]

Заметим, что *любое пространство с комплексной структурой автоматически ориентировано*.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Пример 11. Линейные $U(n)$ -пространства — это унитарные пространства (см. лекцию II.20), а $U(n)$ -изоморфизмы — это их изометрии.

Задача 2. (Ср. задачу 4 лекции III.11.) Покажите, что операция овеществления $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ (см. лекцию II.25) устанавливает биективное соответствие между унитарными m -мерными пространствами и евклидовыми $2m$ -мерными пространствами, являющимися одновременно симплектическими пространствами. [У к а з а н и е. Вещественная часть эрмитова скалярного произведения является евклидовым скалярным произведением, а мнимая — симплектическим. См. лекцию II.25.]

Пример 12. Линейные $Sp(m)$ -пространства, где $Sp(m)$ — унитарная симплектическая группа (см. лекцию III.11), — это унитарные и одновременно симплектические (комплексные) пространства размерности $2m$.

Последний пример может быть элегантно интерпретирован также с точки зрения кватернионных линейных пространств, но для этого мы должны глубже познакомиться с кватернионами.

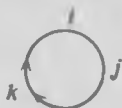
По определению (см. лекцию II.24) каждый кватернион ξ имеет вид

$$(1) \quad \xi = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

где i, j, k — кватернионные единицы с таблицей умножения

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

(Очень удобно изображать эту таблицу схемой



Произведение любых двух единиц, следующих друг за другом в направлении, указанном стрелкой, равно третьей единице. При умножении единиц в другом порядке произведение приобретает множитель -1 .)

Складываются кватернионы покомпонентно (и, следовательно, составляют линейное пространство с базисом $1, i, j, k$).

Кватернионы вида $a_0 + a_1 i$ отождествляются с комплексными числами. Это позволяет каждый кватернион (1) записать в виде

$$(2) \quad \xi = a + bj, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C},$$

и тем самым отождествить линейное пространство H всех кватернионов с линейным пространством $\mathbb{C}^2$ пар (a, b) комплексных чисел. Кватернионы, записанные в виде (2), умножаются по обычным правилам алгебры с дополнительными соотношениями

$$j^2 = -1 \quad \text{и} \quad aj = j\bar{a}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Это означает, что умножение кватернионов задается формулой

$$(3) \quad (a + bj)(x + yj) = (ax - b\bar{y}) + (ay + b\bar{x})j.$$

Задача 3. Проверьте прямым вычислением, что задаваемое формулой (3) умножение ассоциативно и билинейно, т. е. что *линеал* H является *ассоциативной алгеброй*.

Число a_0 называется *вещественной* (или *скалярной*) *частью* кватерниона (1) и обозначается символом $\operatorname{Re} \xi$. Таким образом, если $\xi = a + bj$, $a, b \in \mathbb{C}$, то $\operatorname{Re} \xi = \operatorname{Re} a$.

Если $\xi = \operatorname{Re} \xi$, то кватернион называется *вещественным*. Такой кватернион отождествляется с вещественным числом $\operatorname{Re} \xi = a_0$.

Если $\operatorname{Re} \xi = 0$, то кватернион ξ называется *мнимым*. Все мнимые кватернионы образуют трехмерный *линеал* H' с базисом i, j, k .

Задача 4. Покажите, что кватернион тогда и только тогда перестановочен с любым кватернионом $\xi \in H$ (принадлежит центру алгебры H), когда он вещественен.

Мы введем в линейное пространство $\mathbf{H}$ евклидову метрику, считая базис $1, i, j, k$ ортонормированным. Длина в этой метрике кватерниона ξ обозначается символом $|\xi|$ и называется его *нормой*. По определению

$$(4) \quad |\xi|^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

В частности, $|\xi| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Кватернион $a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ называется *сопряженным* с кватернионом (1) и обозначается символом $\bar{\xi}$. Ясно, что $\bar{\bar{\xi}} = \xi$ тогда и только тогда, когда кватернион ξ вещественен, а $\bar{\xi} = -\xi$ тогда и только тогда, когда кватернион ξ мним.

Для кватерниона (2) кватернион $\bar{\xi}$ выражается формулой

$$\bar{\xi} = \bar{a} - bj.$$

В силу формул (3) и (4) отсюда немедленно следует, что

$$\xi \bar{\xi} = \bar{\xi} \xi = |\xi|^2.$$

Поэтому при $\xi \neq 0$ для кватерниона $\xi^{-1} = |\xi|^{-2} \bar{\xi}$ имеют место равенства

$$\xi \xi^{-1} = \xi^{-1} \xi = 1.$$

(Например, $\xi \xi^{-1} = \xi |\xi|^{-2} \bar{\xi} = |\xi|^{-2} \xi \bar{\xi} = 1$.) По определению это означает, что алгебра $\mathbf{H}$ является телом.

Непосредственное вычисление показывает, что для любых кватернионов $\xi, \eta \in \mathbf{H}$ имеют место равенства

$$\overline{\xi + \eta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}, \quad \overline{\xi \eta} = \bar{\eta} \bar{\xi}$$

(отображение $\xi \mapsto \bar{\xi}$ является антиавтоморфизмом алгебры $\mathbf{H}$). Поэтому, в частности, $|\xi \eta|^2 = \xi \eta \bar{\xi \eta} = \xi \eta \bar{\eta} \bar{\xi} = \xi |\eta|^2 \bar{\xi} = \xi \bar{\xi} |\eta|^2 = |\xi|^2 |\eta|^2$, и значит

$$(5) \quad |\xi \eta| = |\xi| |\eta|.$$

Для произвольного кватерниона $\xi = a + bj$ мы положим

$$(6) \quad A_\xi = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

Задача 5. Покажите, что соответствие $\xi \mapsto A_\xi$ представляет собой гомоморфизм алгебры $\mathbf{H}$ в алгебру $\text{Mat}_2 \mathbb{C}$ комплексных квадратных матриц второго порядка, являющийся изоморфизмом на подалгебру всех матриц вида (6).

Поэтому все свойства кватернионов можно интерпретировать как свойства матриц. Например, квадрат нормы $|\xi|^2 = \bar{a}a + \bar{b}b$ кватернионов ξ является не чем иным, как определителем $\det A_\xi$ матрицы A_ξ (что, кстати сказать, еще раз доказывает формулу (5)), а $\operatorname{Re} \xi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A_\xi$. При желании можно отождествлять кватернион ξ с матрицей A_ξ .

Заметим, что это отождествление отличается от отождествления, описанного в лекции II.24; одно получается из другого преобразованием базиса $i \mapsto -k$, $j \mapsto j$, $k \mapsto -i$.

Скалярным умножением на кватернионном правом линейном пространстве $\mathcal{V}$ называется такое отображение $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow H$, $(a, b) \mapsto ab$, что

$$(a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b, \quad a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$$

для любых векторов $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathcal{V}$;

$$(a\lambda)b = \bar{\lambda}(ab), \quad a(b\lambda) = (ab)\lambda$$

для любых векторов $a, b \in \mathcal{V}$ и любого кватерниона $\lambda \in H$;

$$ba = \overline{ab}$$

для любых векторов $a, b \in \mathcal{V}$.

Кватернионное пространство $\mathcal{V}$ с заданным скалярным произведением $(a, b) \mapsto ab$ называется *кватернионным евклидовым пространством*. (Употребляется также термин *симплектическое пространство*, у нас занятый для пространств с невырожденным кососимметрическим произведением.) Базис $e_1, \dots, e_n$ кватернионного евклидова пространства называется *ортонормированным*, если $e_i e_j = \delta_{ij}$ для любых $i, j = 1, \dots, n$. Линейное отображение $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$ кватернионных евклидовых пространств, сохраняющее скалярные произведения, называется *изоморфизмом* (или *изометрией*).

Примером n -мерного кватернионного евклидова пространства является пространство H^n со скалярным умножением

$$ab = \bar{a}^1 b^1 + \dots + \bar{a}^n b^n,$$

где $a = (a^1, \dots, a^n) \in H^n$ и $b = (b^1, \dots, b^n) \in H^n$. [Мы записываем элементы пространства H^n в виде строк, хотя на самом деле их надо считать столбцами.]

[Обратим внимание, что при $K = \mathbb{C}$ аналогичное определение — см. лекцию II.20 — отличается на комплексное сопряжение (что, конечно, никакого значения не имеет).]

Задача 6. Покажите, что базис $e_1, \dots, e_n$ кватернионного евклидова пространства $\mathcal{V}$ тогда и только тогда ортонормирован, когда соответствующий ему координатный изоморфизм $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{H}^n$ (переводящий вектор $a = e_i a^i$ пространства $\mathcal{V}$ в вектор $(a^1, \dots, a^n)$ пространства $\mathbb{H}^n$) является изометрией.

Все изометрии $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ пространства $\mathbb{H}^n$ на себя составляют группу, обозначаемую символом $U^H(n)$. Отождествив каждую изометрию $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ с матрицей, столбцы которой являются образами векторов стандартного базиса, мы можем считать элементами группы $U^H(n)$ кватернионные матрицы.

Задача 7. Покажите, что кватернионная матрица A тогда и только тогда принадлежит группе $U^H(n)$, когда

$$\bar{A}^T A = E,$$

где $\bar{A}^T$ — матрица, получающаяся из матрицы A транспонированием и заменой всех элементов на кватернионно сопряженные. (Ср. предложение 1 лекции II.22.)

Задача 8. Покажите, что группа $U^H(n)$ является матричной группой Ли (см. лекцию III.11), алгеброй Ли которой служит пространство $\mathfrak{u}^H(n)$ кватернионных матриц B , удовлетворяющих соотношению

$$B + \bar{B}^T = 0.$$

Задача 9. Покажите, что $A \in U^H(n)$ тогда и только тогда, когда A является матрицей перехода, связывающей два ортонормированных базиса пространства $\mathbb{H}^n$.

Это немедленно дает

Пример 13. Кватернионные $U^H(n)$ -пространства $\mathcal{V}$ — это в точности кватернионные евклидовы пространства (с классом всех ортонормированных базисов в качестве $\text{Coor } \mathcal{V}$).

В силу отождествления $\mathbb{H}$ с $\mathbb{C}^2$ и, значит, $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$ скалярное произведение на $\mathbb{H}^n$ определяет по формуле

$$ab = S(a, b) + j\Omega(a, b)$$

два функционала S и Ω на $\mathbb{C}^{2n}$. (Ср. лекцию II.25.)

Задача 10. Покажите, что S является на $\mathbb{C}^{2n}$ эрмитовым скалярным умножением, а Ω — симплектическим. Пользуясь этим, покажите, что n -мерные кватернионные

евклидовы пространства—это в точности комплексные $2n$ -мерные пространства, одновременно унитарные и симплектические. (Ср. выше задачу 2.)

Отсюда, в частности, следует, что группа $U^H(n)$ изоморфна симплектической группе $Sp(n)$.

Задача 11. Постройте изоморфизм $U^H(n) \rightarrow Sp(n)$ в явном виде (ср. задачу 4 лекции III.11).

На основании этого изоморфизма группы $U^H(n)$ и $Sp(n)$ обычно отождествляются. [В частности, группа $U^H(n)$ также называется *симплектической группой* и обозначается символом $\{Sp(n)\}$.]

Вернемся теперь к векторным расслоениям.

Пусть по-прежнему $\mathcal{V}$ —произвольная подгруппа группы $GL(n; K)$.

Определение 3. Векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ ранга n над полем K называется *расслоением типа $\mathcal{V}$* , если

а) каждый слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, расслоения ξ является линейным $\mathcal{V}$ -пространством;

б) существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times K^n & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{F}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha \\ & \searrow & \swarrow \\ & U_\alpha & \end{array}$$

что для любого α и любого $b \in U_\alpha$ отображение

$$(7) \quad \varphi_{\alpha, b}: K^n \rightarrow \mathcal{F}_b, \quad x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \quad x \in K^n,$$

является $\mathcal{V}$ -изоморфизмом.

В частности, мы имеем

1) *ориентированные векторные расслоения* (для которых слои $\mathcal{F}_b$ ориентированы, а изоморфизмы (7) сохраняют ориентации),

2) *евклидовы векторные расслоения* (для которых в слоях $\mathcal{F}_b$ задана евклидова метрика, а изоморфизмы (7) являются изометриями),

3) *псевдоевклидовы векторные расслоения*,

4) *симплектические векторные расслоения*,

5) *унитарные векторные расслоения*,

б) *кватернионные евклидовы векторные расслоения* и т. д. и т. п.

Здесь $K = \mathbb{R}$ для расслоений классов 1), 2) и 3); $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ для расслоений класса 4); $K = \mathbb{C}$ для расслоений класса 5) и $K = \mathbb{H}$ для расслоений класса 6). При этом расслоения класса 5) можно отождествлять с вещественными ($K = \mathbb{R}$) расслоениями, одновременно евклидовыми и симплектическими, а расслоения класса 6) — с комплексными ($K = \mathbb{C}$) расслоениями, одновременно унитарными и симплектическими.

Связь векторных расслоений типа $\mathcal{S}$ с расслоениями, редуцирующимися к группе $\mathcal{S}$, описывается следующим предложением:

Предложение 1. *Векторное расслоение тогда и только тогда редуцируется к группе $\mathcal{S}$, когда в него можно ввести структуру расслоения типа $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Пусть векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ является расслоением типа $\mathcal{S}$ и пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — тривиализирующий атлас, предусмотренный условием б определения 3.

Тогда каждое отображение $\varphi_{\beta\alpha}(b): K^n \rightarrow K^n$, являясь композицией $\mathcal{S}$ -изоморфизмов, будет $\mathcal{S}$ -изоморфизмом, т. е. его матрица будет принадлежать группе $\mathcal{S}$. Это доказывает, что любое векторное расслоение типа $\mathcal{S}$ редуцируется к группе $\mathcal{S}$ (и, значит, является $\mathcal{S}$ -расслоением).

Обратно, пусть векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ редуцируется к группе $\mathcal{S}$ и пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный $\mathcal{S}$ -атлас этого расслоения. Каждая тривиализация φ_α задает в линейном пространстве $\mathcal{F}_b$, $b \in U_\alpha$, базис

$$(8) \quad \varphi_\alpha(b, e_1), \dots, \varphi_\alpha(b, e_n),$$

где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства K^n (см. лекцию 6) и для каждой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ базисы (8), отвечающие тривиализациям φ_α и φ_β , связаны матрицей перехода $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \mathcal{S}$. Поэтому структура $\mathcal{S}$ -пространства, задаваемая в линейном пространстве $\mathcal{F}_b$ базисом (8) (т. е. такая, что $\text{Coor } \mathcal{F}_b$ состоит из всех базисов, связанных с базисом (8) матрицами перехода из $\mathcal{S}$), не зависит от выбора окрестности U_α , содержащей точку b . Так как по отношению к этой структуре отображение $\varphi_{\alpha,b}$ будет, конечно, $\mathcal{S}$ -изоморфизмом, то мы получаем, тем самым, в ξ структуру векторного расслоения типа $\mathcal{S}$. $\square$

Таким образом, на любом векторном расслоении ξ структуры векторного $\mathcal{S}$ -расслоения и расслоения типа $\mathcal{S}$

взаимно однозначно друг другу соответствуют. В дальнейшем мы их различать не будем и термин «векторное $\mathcal{Z}$ -расслоение» будем считать синонимом термина «расслоение типа $\mathcal{Z}$ ».

Векторные $\mathcal{Z}$ -расслоения легко характеризуются в терминах главных $\mathcal{Z}$ -расслоений.

Действительно, ясно (ср. пример 3 лекции 5), что для любого локально тривиального главного $\mathcal{Z}$ -расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[K^n]$ является векторным $\mathcal{Z}$ -расслоением (здесь K^n рассматривается как левое $\mathcal{Z}$ -пространство). Оказывается, что обратное тоже верно, т. е. каждое векторное $\mathcal{Z}$ -расслоение ξ имеет вид $\xi[K^n]$, где ξ — некоторое локально тривиальное главное $\mathcal{Z}$ -расслоение. Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 1 лекции 5.

Задача 12. Докажите последнее утверждение.

Это позволяет указать легко проверяемое необходимое и достаточное условие редуцируемости данного векторного расслоения к группе $\mathcal{Z}$ (или, более общо, данного векторного $\mathcal{Z}$ -расслоения к подгруппе $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{Z}$).

Предполагая подгруппу $\mathcal{H}$ замкнутой, мы введем в рассмотрение пространство $\mathcal{Z}/\mathcal{H}$ левых смежных классов $a\mathcal{H}$ группы $\mathcal{Z}$ по подгруппе $\mathcal{H}$ (ср. пример 2 лекции 1). Группа $\mathcal{Z}$ действует (вообще говоря, не эффективно!) на этом пространстве по формуле

$$g(a\mathcal{H}) = (ga)\mathcal{H}, \quad g, a \in \mathcal{Z},$$

и значит, для любого главного $\mathcal{Z}$ -расслоения ξ определено ассоциированное расслоение $\xi[\mathcal{Z}/\mathcal{H}]$.

Пусть расслоение ξ (а значит, и расслоение $\xi[\mathcal{Z}/\mathcal{H}]$) локально тривиально.

Предложение 2. Если векторное $\mathcal{Z}$ -расслоение $\xi = \xi[K^n]$ редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, то расслоение $\xi[\mathcal{Z}/\mathcal{H}]$ обладает сечением.

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — тривиализирующий $\mathcal{H}$ -атлас расслоения ξ , а $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ — соответствующий скленвающий коцикл. Не теряя общности, мы можем считать, что над окрестностями U_α расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (а потому и расслоение $\xi[\mathcal{Z}/\mathcal{H}]$) также тривиально. Пусть

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{E}|_{U_\alpha}$$

— соответствующие тривиализации, а $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ — отвечающий этим тривиализациям склеивающий коцикл над группой $\mathcal{G}$. По условию этот коцикл когомологичен коциклу $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ (рассматриваемому как коцикл над $\mathcal{G}$), т. е. существуют такие отображения $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathcal{G}$, что

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = h_\beta^{-1}(b) \psi_{\beta\alpha}(b) h_\alpha(b)$$

для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Далее, так как расслоение $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ ассоциировано с расслоением ξ , то по построению оно обладает тривиализующим атласом $\{(U_\alpha, \omega_\alpha)\}$, которому отвечает тот же склеивающий коцикл $\{\psi_{\beta\alpha}\}$. Имея это в виду и обозначая — для сокращения формул — смежный класс $a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, символом $[a]$, мы произвольной точке $b \in \mathcal{B}$ отнесем точку $s(b)$ тотального пространства $\mathcal{E}$ расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$, положив

$$s(b) = \omega_\alpha(b, [h_\alpha(b)]), \quad \text{если } b \in U_\alpha.$$

По определению склеивающего коцикла для любых точек $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $[a] \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ имеет место равенство

$$\omega_\beta(b, \psi_{\beta\alpha}(b)[a]) = \omega_\alpha(b, [a]).$$

С другой стороны, так как по условию $[\varphi_{\beta\alpha}(b)] = [e]$, то

$$[h_\beta(b)] = \psi_{\beta\alpha}(b)[h_\alpha(b)].$$

Поэтому

$$\omega_\beta(b, [h_\beta(b)]) = \omega_\alpha(b, [h_\alpha(b)]),$$

и значит, отображение $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ определено корректно.

Поскольку s , очевидно, является сечением расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$, предложение 2 тем самым полностью доказано. $\square$

Обратное утверждение, вообще говоря, верно только при некоторых дополнительных предположениях.

Задача 13. Докажите, что если каноническое расслоение $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ локально тривиально, то и обратно, из существования для расслоения $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ сечения следует, что расслоение $\xi = \xi[K^n]$ редуцируется к группе $\mathcal{H}$.

Задача 14. Покажите, что если $\mathcal{G}$ является группой Ли, а $\mathcal{H}$ — ее замкнутой подгруппой Ли, то расслоение $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ локально тривиально. [Указание. Замкнутая подгруппа Ли является вложенным подмногообразием; см. ниже лекцию 13.]

При $\mathcal{G} = \text{GL}(n; \mathbb{R})$ и $\mathcal{H} = \text{GL}^+(n; \mathbb{R})$ факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ состоит из двух точек. Поэтому для любого главного $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ -расслоения ξ расслоение $\xi[\text{GL}(n; \mathbb{R})/\text{GL}^+(n; \mathbb{R})]$ либо тривиально, либо — в предположении, что база $\mathcal{B}$

расслоения ξ связна — является двулистным накрытием. В первом случае векторное расслоение $\xi = \xi[R^n]$ редуцируется к группе $GL^+(n; R)$ (такое расслоение называется *ориентируемым*), а во втором случае — нет.

Задача 15. Покажите, что *касательное расслоение τX над гладким многообразием X тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентируемо многообразие X* (в смысле определения 1 лекции III.25).

Векторное K -расслоение ξ называется *метризуемым*, если в него можно ввести структуру евклидова (при $K=R$), унитарного (при $K=C$) или кватернионного евклидова (при $K=H$) расслоения, т. е. если оно редуцируется к группам $O(n)$, $U(n)$ и $U^H(n) = Sp(n)$ соответственно. Каждая такая структура называется *метрикой* на ξ .

Оказывается, что в отличие от свойства ориентируемости свойство метризуемости — при весьма слабых и выполняющихся во всех геометрически интересных случаях предположениях — имеет место для любых векторных расслоений. Этот факт удобно доказывать прямо, не пользуясь предложением 2 (или, точнее, — утверждением задачи 13).

Напомним (см. определение 1 лекции III.22 и замечание 4 лекции III.24), что открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ называется *нумерируемым*, если существует подчиненное ему *разбиение единицы*, т. е. такое семейство непрерывных неотрицательных функций $\eta_\alpha: \mathcal{B} \rightarrow R$, что

1° для любой точки $b \in \mathcal{B}$ найдется окрестность U , в которой только конечное число функций η_α отлично от нуля (свойство локальной конечности);

2° имеет место равенство

$$\sum_{\alpha} \eta_{\alpha} = 1$$

(сумма слева определена ввиду свойства 1°);

3° $\eta_\alpha = 0$ вне U_α для любого α (условие подчиненности).

Мы будем называть топологическое пространство $\mathcal{B}$ *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие нумерируемо. (Это определение несколько сильнее общепринятого, но совпадает с ним для хаусдорфовых пространств; см. замечания 1 и 4 лекции III.24.)

Векторное расслоение ξ называется *нумерируемым*, если для него существует нумерируемое тривиализирующее

покрытие. Таким образом, над паракомпактным пространством $\mathcal{B}$ любое векторное расслоение нумерируемо.

Предложение 3. Каждое нумерируемое векторное расслоение метризуемо.

Доказательству этого предложения мы предпошлим несколько простых замечаний о метриках.

Скалярное умножение (метрика) на линейном пространстве $\mathcal{V}$ однозначно восстанавливается по соответствующему положительно определенному квадратичному функционалу $Q: x \mapsto x^2$, $x \in \mathcal{V}$. (При $K = \mathbb{R}$ и $K = \mathbb{C}$ это известно из семестра II; см. лекции II.11 и II.19. При $K = \mathbb{H}$ доказательство проводится точно так же, как при $K = \mathbb{C}$. Заметим, что для сокращения формулировок мы позволяем себе называть функционал Q «квадратичным» при любом K , хотя, строго говоря, это оправдано только при $K = \mathbb{R}$.)

Обратим внимание, что при любом K функционал Q принимает значения в поле $\mathbb{R}$.

Задача 16. Покажите, что для любого конечного семейства положительно определенных квадратичных функционалов Q_α и любых неотрицательных чисел η_α , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, функционал

$$Q = \sum \eta_\alpha Q_\alpha$$

также является положительно определенным квадратичным функционалом.

Для каждого метризованного векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ формула

$$Q(p) = p^2, \quad p \in \mathcal{E}_b$$

(где p^2 — скалярный квадрат вектора p в линейном пространстве $\mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$), определяет — очевидно, непрерывную — функцию $Q: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую тем свойством, что ее ограничение на каждом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, является положительно определенным квадратичным функционалом на линейном пространстве $\mathcal{F}_b$.

Ключом к доказательству предложения 3 является следующая лемма:

Лемма 1. Каждая непрерывная функция $Q: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которой на любом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, является положительно определенным квадратичным функционалом, возникает из некоторой метрики на ξ .

Доказательство. По условию функция Q на каждом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, задает структуру евклидова (при $K = \mathbb{R}$), унитарного (при $K = \mathbb{C}$) и кватернионного евкли-

дова (при $K = \mathbb{H}$) линейного пространства. Поэтому нужно лишь доказать, что для расслоения ξ существует тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, для которого все отображения (7) являются изометриями.

Пусть $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ — произвольный тривиализирующий атлас расслоения ξ . Как мы знаем (см. лекцию 6), каждая тривиализация φ'_α определяет базис FU_α -модуля $\Gamma(\xi|_{U_\alpha})$, состоящий из сечений

$$s'_i: b \mapsto \varphi'_\alpha(b, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Применив к значениям $s'_1(b), \dots, s'_n(b)$ этих сечений в каждой точке $b \in U_\alpha$ процесс ортогонализации Грама — Шмидта (см. лекцию I.13; этот процесс применим — докажете! — не только при $K = \mathbb{R}$, но при $K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$), мы получим — как легко видеть, также непрерывные — сечения $s_1, \dots, s_n$ расслоения ξ над U_α , составляющие такой базис FU_α -модуля $\Gamma(\xi|_{U_\alpha})$, что для каждой точки $b \in U_\alpha$ векторы $s_1(b), \dots, s_n(b)$ образуют ортонормированный базис линейного пространства $\mathcal{F}_b$.

Для завершения доказательства остается заметить, что последнее свойство в точности означает, что для отвечающей базису $s_1, \dots, s_n$ тривиализации $\varphi_\alpha: U \times K^n \rightarrow \mathcal{F}_{U_\alpha}$ все отображения (7) представляют собой изометрии.

Теперь мы уже можем доказать предложение 3.

Доказательство предложения 3. По условию для расслоения $\xi = (\mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ существуют тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.

Мы определим на $\mathcal{F}$ функцию $Q: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$Q(p) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(\pi(p)) Q_{\alpha}(p), \quad p \in \mathcal{F},$$

где Q_{α} — функция $\mathcal{F}_{U_{\alpha}} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$Q_{\alpha}(p) = x^2, \quad \text{если } \varphi_{\alpha}(b, x) = p.$$

Здесь $b = \pi(p)$, а x^2 — скалярный квадрат вектора $x \in K^n$ в стандартной метрике на K^n .

Легко видеть, что функция Q непрерывна и на каждом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, ее ограничение является — в силу утверждения задачи 10 — положительно определенным квадратичным функционалом. Следовательно, согласно лемме 1 эта функция задает на ξ некоторую метрику. $\square$

Следствие. Любое векторное расслоение над паракомпактным пространством $\mathcal{B}$ метризуемо. $\square$

Лекция 8

Квазикомплексные многообразия. — Многообразие кососимметрических ортогональных матриц. — Условие квазикомплексифицируемости. — Квазикомплексифицируемые сферы. — Алгебра октав. — Квазикомплексифицируемость сферы S^6 — Квазикомплексифицируемые многообразия размерности 6. — Параллелизуемость квазигрупп. — Вещественные алгебры с делением.

Расслоения типа $\mathcal{S}$ для подгруппы $\mathcal{S}$ группы $GL(n; R)$, $n = 2m$, из примера 10 лекции 7 — это в точности вещественные расслоения, являющиеся овеществлениями комплексных расслоений.

Определение 1. Гладкое n -мерное ($n = 2m$) многообразие $\mathcal{X}$ называется *квазикомплексифицируемым*, если его касательное расслоение $\tau\mathcal{X}$ редуцируется к группе $\mathcal{S}$ из примера 10 лекции 7, т. е. если над $\mathcal{X}$ существует такое комплексное расслоение τ ранга m , что

$$\tau\mathcal{X} = \tau^R.$$

Каждое такое расслоение τ называется *квазикомплексной структурой* на $\mathcal{X}$, а многообразие $\mathcal{X}$ с заданным на нем квазикомплексной структурой τ называется *квазикомплексным многообразием*.

Конечно, *каждое квазикомплексифицируемое многообразие ориентируемо* (см. задачу 15 лекции 7).

Очевидным примером квазикомплексного многообразия является (см. лекцию III.11) овеществление $\mathbb{Z}^R$ произвольного комплексно-аналитического многообразия $\mathbb{Z}$ (если $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^R$, то $\tau\mathcal{X} = \tau^R_{\mathbb{Z}}$). Поэтому квазикомплексифицируемость многообразия $\mathcal{X}$ представляет собой необходимое (но, вообще говоря, недостаточное!) условие его *комплексифицируемости*, т. е. существования такого комплексно-аналитического многообразия $\mathbb{Z}$, что $\mathbb{Z}^R = \mathcal{X}$.

Как мы знаем (см. лекцию 6), квазикомплексные структуры на многообразии $\mathcal{X}$ находятся в естественном биективном соответствии с автоморфизмами

$$(1) \quad l: \tau\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

удовлетворяющими соотношению $l^2 = -\text{id}$.

На этом основании автоморфизмы (1), удовлетворяющие соотношению $l^2 = -\text{id}$, или — что равносильно — глад-

кие поля $p \mapsto I_p$, $p \in \mathcal{X}$, операторов $I_p: T_p \mathcal{X} \rightarrow T_p \mathcal{X}$, удовлетворяющих соотношению $I_p^2 = -\text{id}$, также называются *квазикомплексными структурами* на $\mathcal{X}$.

Согласно следствию из предложения 3 лекции 7, если квазикомплексное многообразие $\mathcal{X}$ паракомпактно, то расслоение τ обладает эрмитовой метрикой. Вещественная часть этой метрики будет евклидовой метрикой на $\tau \mathcal{X}$, а мнимая часть — симплектической (ср. лекцию II.25). Поэтому *гладкое паракомпактное многообразие тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда расслоение $\tau \mathcal{X}$ редуцируется к подгруппе $\text{Sp}(m) = \text{SO}(2m) \cap \text{Sp}(m; \mathbb{R})$ группы $\text{SO}(n)$, $n = 2m$ (являющейся образом группы $\text{U}(m)$ при вложении $\text{GL}(m; \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$)*. Следовательно (см. в лекции 8 предложение 2 и утверждения задач 10 и 11), вопрос о квазикомплексифицируемости паракомпактного многообразия $\mathcal{X}$ сводится к вопросу о существовании сечения у расслоения со слоем $\text{SO}(2m)/\text{Sp}(m)$, ассоциированного с векторным расслоением $\tau \mathcal{X}$. Изучим поэтому подробнее факторпространство $\text{SO}(2m)/\text{Sp}(m)$.

Задача 1. Покажите, что пространство $\text{SO}(2m)/\text{Sp}(m)$ обладает структурой гладкого многообразия, по отношению к которой каноническое отображение $\pi: \text{SO}(2m) \rightarrow \text{SO}(2m)/\text{Sp}(m)$ является субмерсией (и, значит, смежные классы группы $\text{SO}(2m)$ по подгруппе $\text{Sp}(m)$ — вложенными подмногообразиями). [Указание. В окрестности единицы группы $\text{SO}(2m)$ существует подмногообразие, трансверсальное к $\text{Sp}(m)$, на котором отображение π является гомеоморфизмом на открытое подмножество пространства $\text{SO}(2m)/\text{Sp}(m)$. Ср. задачу 20 лекции 13.]

Пусть W_m — подмножество группы $\text{SO}(2m)$, состоящее из кососимметрических матриц. Поскольку — см. лекцию II.10 — определитель любой кососимметрической матрицы неотрицателен, *матрица A порядка $2m$ тогда и только тогда принадлежит W_m , когда эта матрица ортогональна и кососимметрична*.

Задача 2. Покажите, что W_m является связным гладким многообразием размерности $m^2 - m$.

Задача 3. Рассмотрите следующие три условия на матрицу A :

а. Матрица A кососимметрична.

б. Матрица A ортогональна.

в. Матрица A удовлетворяет соотношению

$$(2) \quad A^2 = -E.$$

Докажите, что любые два из этих условий влекут за собой третье.

Таким образом, в частности, *любая матрица $A \in W_m$ обладает свойством (2)*.

Для каждой матрицы $A \in SO(2m)$ матрица AJA^T , где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix},$$

ортогональна и кососимметрична. Поэтому формула

$$\varphi(A) = AJA^T$$

определяет некоторое — очевидно, гладкое — отображение

$$(3) \quad \varphi: SO(2m) \rightarrow W_m.$$

По определению (см. лекцию III.11) матрица $A \in SO(2m)$ тогда и только тогда принадлежит подгруппе $Sp(m)$, когда $A^T J A = J$, т. е., поскольку

$$AJA^T = -((A^{-1})^T J A^{-1})^{-1},$$

когда $\varphi(A) = J$. Так как

$$(4) \quad \varphi(AB) = A\varphi(B)A^T$$

для любых матриц $A, B \in SO(2m)$, отсюда непосредственно вытекает, что $\varphi(A) = \varphi(B)$ тогда и только тогда, когда $A^{-1}B \in Sp(m)$. Следовательно, формула

$$\overline{\varphi}[A] = \varphi(A),$$

$$A \in SO(2m), [A] = A Sp(m) \in SO(2m)/Sp(m),$$

корректно определяет некоторое — также гладкое! — отображение

$$\overline{\varphi}: SO(2m)/Sp(m) \rightarrow W_m.$$

Это отображение инъективно, а так как многообразие $SO(2m)/Sp(m)$ компактно, то и монеоморфно (является гомеоморфизмом на свой образ).

Задача 4. Покажите, что касательное пространство $T_E SO(n)$ группы $SO(n)$ в точке E (касательное пространство $T_E Sp(m)$ группы $Sp(m)$) естественным образом отождествляется с линейным алгеброй $\mathfrak{so}(n)$ (линейным алгеброй $\mathfrak{sp}(m)$), состоящим из всех кососимметрических матриц порядка n (из всех кососимметрических матриц порядка $2m$, перестановочных

с матрицей J), т. е. с алгеброй Ли этой группы в смысле лекции III.11. [Указание. Каждая матрица из некоторой окрестности точки E в группе $SO(n)$ имеет вид e^{tA} , где $A \in \mathfrak{so}(n)$, причем $e^{tA} \in Sp(m)$, $n = 2m$, тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{sp}(m)$.]

Аналогичным образом касательное пространство $T_J W_m$ многообразия W_m в точке J отождествляется с подпространством пространства $\mathfrak{so}(n)$, состоящим из кососимметрических матриц A , для которых $AJ + JA = 0$.

Поэтому дифференциал $(d\varphi)_E$ отображения φ в точке E мы можем считать отображением

$$(d\varphi)_E: \mathfrak{so}(n) \rightarrow T_J W_m \subset \mathfrak{so}(n).$$

Поскольку для любой матрицы $A \in \mathfrak{so}(n)$ имеет место равенство

$$\frac{e^{tA} J (e^{tA})^T - J}{t} = \frac{(E + t(A + \dots)) J (E + t(A^T + \dots)) - J}{t} =$$

$$= AJ - JA + \dots,$$

где многоточия обозначают члены порядка ≥ 1 по t (напомним, что $A^T = -A$), отображение $(d\varphi)_E$ действует по формуле

$$(d\varphi)_E A = AJ - JA.$$

Следовательно, его ядром является подпространство $\mathfrak{sp}(m)$, откуда непосредственно вытекает, что отображение φ представляет собой погружение (в точке $[E]$, а потому — как непосредственно вытекает из формулы (4) — и в любой точке из $SO(2m)/Sp(m)$). Значит, его образ $\varphi(SO(2m)/Sp(m))$ представляет собой компактное (и, следовательно, замкнутое) подмногообразие многообразия W_m . При этом размерность этого подмногообразия равна размерности $m^2 - m$ многообразия W_m (см. задачу 14).

Лемма 1. Пусть $\mathcal{Y}$ — замкнутое подмногообразие многообразия $\mathcal{X}$. Если $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}$ и многообразие $\mathcal{X}$ связно, то $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$.

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}$, то вложение $\iota: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ является этальным отображением (локальным диффеоморфизмом). Поэтому для любой точки $p \in \mathcal{Y}$ существует в $\mathcal{Y}$ такая окрестность V , что ее образ $\iota(V) = V$ является в $\mathcal{X}$ окрестностью точки $\iota(p) = p$. Это означает, что $\mathcal{Y}$ открыто в $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X}$ связно, а $\mathcal{Y}$ замкнуто, то это возможно только при $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. $\square$

В силу этой леммы подмногообразие $\bar{\varphi}(SO(2m)/Sp(m))$ совпадает с многообразием W_m , т. е. отображение $\bar{\varphi}$ является диффеоморфизмом.

В дальнейшем мы будем отождествлять многообразия W_m и $SO(2m)/Sp(m)$ посредством диффеоморфизма $\bar{\varphi}$.

Заметим, что в силу этого отождествления левые сдвиги $[B] \mapsto [AB]$ пространства $SO(2m)/Sp(m)$ на элементы $A \in SO(2m)$ переходят в сопряжения $C \mapsto ACA^{-1}$, $C \in W_m$.

Вернемся теперь к n -мерному ($n = 2m$) многообразию $\mathcal{X}$. Предполагая, что многообразие $\mathcal{X}$ паракомпактно, введем на его касательном расслоении $\tau_{\mathcal{X}}$ произвольную евклидову метрику. Как мы знаем, это равносильно редукции расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ к группе $O(n)$. Если многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо, то расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ можно редуцировать даже к группе $SO(n)$. Пусть $\tau_{\mathcal{X}}$ — ассоциированное главное $SO(n)$ -расслоение.

Так как при $n = 2m$ группа $SO(n)$ действует слева на многообразии W_m , то определено расслоение $\tau_{\mathcal{X}}[W_m]$ с типичным слоем W_m .

С другой стороны, так как все касательные пространства $T_p\mathcal{X}$ ориентированы и евклидовы, то над многообразием $\mathcal{X}$ определено расслоение $\sigma_{\mathcal{X}}$, слоем которого над каждой точкой $p \in \mathcal{X}$ является пространство всех ортогональных и кососимметрических операторов $T_p\mathcal{X} \rightarrow T_p\mathcal{X}$, т. е. — ср. задачу 16 — всех унимодулярных и ортогональных операторов $I_p: T_p\mathcal{X} \rightarrow T_p\mathcal{X}$, для которых $I_p^2 = -\text{id}$ (ортогональных комплексных структур на $T_p\mathcal{X}$).

Задача 5. Покажите, что расслоения $\tau_{\mathcal{X}}[W_m]$ и $\sigma_{\mathcal{X}}$ изоморфны.

Поскольку сечения расслоения $\sigma_{\mathcal{X}}$ — это в точности поля $p \mapsto I_p$ ортогональных комплексных структур $I_p: T_p\mathcal{X} \rightarrow T_p\mathcal{X}$, этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. Ориентируемое $2m$ -мерное паракомпактное многообразие $\mathcal{X}$ (для которого на расслоении $\tau_{\mathcal{X}}$ задана евклидова метрика) тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда на нем существует поле $p \mapsto I_p$ ортогональных комплексных структур (ортогональных и кососимметрических операторов $I_p: T_p\mathcal{X} \rightarrow T_p\mathcal{X}$) или, иначе говоря, комплексная структура

$$(5) \quad I: \tau_{\mathcal{X}} \rightarrow \tau_{\mathcal{X}}.$$

являющаяся одновременно изометрией (в каждом слое рас-
слоения $\tau \mathcal{X}$). $\square$

Замечание 1. На первый взгляд кажется, что это предложение может быть доказано значительно проще, поскольку если τ — квазикомплексная структура на $\mathcal{X}$, то соответствующий автоморфизм (2) будет, очевидно, изометрией относительно евклидовой метрики, отвечающей произвольной эрмитовой метрике на τ (см. выше). Однако суть дела здесь в том, что существует автоморфизм (2), являющийся изометрией относительно произвольной наперед заданной евклидовой метрики на $\tau \mathcal{X}$, не получающейся, вообще говоря, ни из какой эрмитовой метрики на τ .

При $n=2$ группа $Sp(1)$ совпадает, как легко видеть, с группой $SO(2)$. Поэтому двумерное паракомпактное многообразие (поверхность) тогда и только тогда квазикомплексифицируемо, когда оно ориентируемо.

В своем месте мы покажем, что на самом деле любая ориентируемая поверхность даже комплексифицируема.

При $n > 2$ ориентируемость квазикомплексифицируемости уже не обеспечивает. Например, для сфер S^n , $n \geq 2$, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Среди всех сфер S^n , $n \geq 2$, квазикомплексифицируемы лишь сферы S^2 и S^4 .

Доказательство этой теоремы мы должны начать довольно издаека.

Координаты точек пространства R^{n+1} нам будет теперь удобно нумеровать нижними индексами от 0 до n , а его координатные орты обозначать символами $e_0, \dots, e_n$. Кроме того, пространство R^n мы будем отождествлять с подпространством пространства R^{n+1} , состоящим из векторов $x = (x_0, \dots, x_n)$ с $x_n = 0$. В соответствии с этим столбцы и строки матриц из $SO(n+1)$ мы будем нумеровать числами от 0 до n и каждую матрицу A из $SO(n)$ будем отождествлять с матрицей

$$A \oplus 11 = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

из $SO(n+1)$.

Введем теперь в рассмотрение отображение

$$(6) \quad p: SO(n+2) \rightarrow S^{n+1},$$

сопоставляющее каждой матрице $A \in SO(n+2)$ ее последний столбец, т. е. точку Ae_{n+1} сферы S^{n+1} . [Это отобра-

жение является не чем иным, как проекцией π главного $\mathcal{S}$ -расслоения $(\Gamma, \pi, \Gamma/\mathcal{S})$ из примера 2 лекции 1 при $\Gamma = \text{SO}(n+2)$ и $\mathcal{S} = \text{SO}(n+1)$; по традиции π заменяется здесь на p .]

Предложение 2. Если сфера S^n , $n=2m$, квазикомплексифицируема, то расслоение $p: \text{SO}(n+2) \rightarrow S^{n+1}$ обладает сечением

$$(7) \quad s: S^{n+1} \rightarrow \text{SO}(n+2).$$

Доказательство. Каждый вектор $x \in S^{n+1}$ единственным образом представляется в виде

$$(8) \quad x = ay + be_{n+1},$$

где $a^2 + b^2 = 1$, $a \geq 0$ и $y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. С другой стороны, если сфера S^n квазикомплексифицируема, то согласно предложению 1 на ней существует поле $y \mapsto I_y$, $y \in S^n$, ортогональных кососимметрических операторов $I_y: T_y S^n \rightarrow T_y S^n$ (относительно метрики в $T_y S^n$, индуцированной вложением $T_y S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$ ортогональное дополнение $(T_y S^n)^\perp$ подпространства $T_y S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Ясно, что это дополнение порождается векторами y и e_{n+1} . Мы распространим I_y до оператора $A_y: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, считая, что на $T_y S^n$ оператор A_y совпадает с оператором I_y , а на $(T_y S^n)^\perp$ действует по формуле

$$A_y(-ay + \beta e_{n+1}) = \beta y - \alpha e_{n+1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что каждый оператор A_y кососимметричен и ортогонален.

Отождествив оператор A_y с его матрицей, мы для любого вектора (8) положим

$$s(x) = aA_y + bE,$$

где E — единичная матрица порядка $n=2$. Так как

$$\begin{aligned} s(x)^T s(x) &= (aA_y^T + bE)(aA_y + bE) = \\ &= a^2 A_y^T A_y + ab(A_y^T + A_y) + b^2 E = \\ &= (a^2 + b^2)E = E, \end{aligned}$$

то матрица $s(x)$ ортогональна, и значит отображение $s: x \mapsto s(x)$ представляет собой отображение $s: S^{n+1} \rightarrow \text{SO}(n+2)$. Кроме того, так как

$$(p \circ s)(x) = s(x)e_{n+1} = aA_y e_{n+1} + be_{n+1} = ay + be_{n+1} = x,$$

то отображение s является сечением отображения p . $\square$

Предложение 2 известно как теорема Кирхгофа.

Преимущество перехода от расслоения $\tau_{S^n}(W_m)$ к расслоению $(SO(n+2), p, S^{n+1})$ состоит в том, что, поскольку последнее расслоение главное, существование сечения (7) равносильно тривиальности этого расслоения (см. лекцию 1).

Задача 6. Докажите, что с расслоением $(SO(n+2), p, S^{n+1})$ ассоциировано касательное расслоение $\tau_{S^{n+1}}$ сферы S^{n+1} (т. е. в введенных в лекции 7 обозначениях это расслоение является главным расслоением $\tau_{S^{n+1}}$). [Указание. Для любой точки $x \in S^{n+1}$ и любого ортонормированного базиса $a_0, \dots, a_n$ пространства $T_x S^{n+1}$ семейство $(a_0, \dots, a_n, x)$ является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{R}^{n+2}$ и любой ортонормированный базис последнего пространства может быть так получен.]

Отсюда следует, что условие существования сечения (7) равносильно тривиальности расслоения $\tau_{S^{n+1}}$, т. е. параллелизуемости сферы S^{n+1} . Таким образом, *если сфера S^n квазикомплексифицируема, то сфера S^{n+1} параллелизуема.*

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что

А. Сферы S^2 и S^4 квазикомплексифицируемы.

Б. Если $n \neq 1, 3, 7$, то сфера S^n непараллелизуема.

[Окружность S^1 параллелизуема очевидным образом, а параллелизуемость сфер S^3 и S^7 вытекает в силу теоремы Кирхгофа из квазикомплексифицируемости сфер S^3 и S^4 . Параллелизуемость сфер S^3 и S^7 легко, впрочем, доказывается и непосредственно (см. ниже). Заметим, что, таким образом, *сфера S^n , $n \geq 2$, квазикомплексифицируема тогда и только тогда, когда параллелизуема сфера S^{n+1} .* Прямое доказательство этого утверждения, по-видимому, не существует.]

Доказательство утверждения Б требует топологических конструкций, по существу выходящих за рамки нашего изложения. Мы обсудим их в лекциях 24—27, а пока займемся утверждением А.

В отношении сферы S^2 никакой проблемы нет: мы знаем, что эта сфера диффеоморфна комплексной проективной прямой (сфере Римана) и потому является не только квазикомплексным, но даже и комплексным многообразием. Для построения же квазикомплексной структуры на сфере S^4 нам понадобятся некоторые сведения из алгебры, имеющие и самостоятельный интерес.

Пусть $\mathcal{C}_a$ — пространство H^3 пар (ξ, η) кватернионов (являющееся естественным образом линейалом над R), в которое введено умножение по формуле

$$(9) \quad (\xi, \eta)(x, y) = (\xi x - \bar{\eta}y, \eta \bar{x} + y\xi), \quad \xi, \eta, x, y \in H.$$

[Это в точности тот же прием, по которому комплексные числа строятся из вещественных, а кватернионы — из комплексных чисел.]

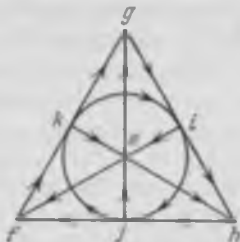
Задача 7. Проверьте, что относительно умножения (9) линейал $\mathcal{C}_a$ является (неассоциативной!) алгеброй над полем R с единицей $(1, 0)$.

Элементы алгебры $\mathcal{C}_a$ называются *октавами* или *числами Кэли*. Октавы вида $(\xi, 0)$ отождествляются с кватернионами ξ , что вкладывает H в $\mathcal{C}_a$ в качестве подалгебры. Любая октава (ξ, η) равна $\xi + \eta e$, где $e = (0, 1)$ и *октавные единицы*

$$(10) \quad i, j, k, e, f = ie, g = je, h = ke$$

вместе с единицей 1 образуют базис алгебры $\mathcal{C}_a$.

Попарные произведения октавных единиц схематически изображаются диаграммой



Произведение любых двух единиц (10) равняется с точностью до знака единице, расположенной на той же прямой (или окружности), а знак определяется направлением стрелок. Например, $eh = k$ и $fj = -h$.

Квадрат каждой единицы (10) равен -1 .

Вещественная часть $\text{Re } \xi$ кватерниона ξ называется *вещественной частью октавы* $u = \xi + \eta e$ и обозначается символом $\text{Re } u$ (употребляется также символ $\text{Sp } u$).

Октава $\bar{\xi} - \eta e$ называется *сопряженной октаве* $u = \xi + \eta e$ и обозначается символом $\bar{u}$. Из формулы (4) непосредственно следует, что число $u\bar{u}$ выражается формулой

$$(11) \quad u\bar{u} = \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = |\xi|^2 + |\eta|^2$$

u , следовательно, вещественно, неотрицательно и равно нулю тогда и только тогда, когда $u = 0$. Арифметический квадратный корень из числа uu обозначается символом $|u|$ и называется *нормой* (или *модулем*) октавы u . Заметим, что $uu = uu$.

Из формулы (11) следует, что при $u \neq 0$ октава $u^{-1} = u/|u|^2$ удовлетворяет соотношению $u^{-1}u = uu^{-1} = 1$. Таким образом, в алгебре Ca любой отличный от нуля элемент u обратим.

Далее, легко видеть, что для любых октав u и v имеет место равенство

$$(12) \quad |uv| = |u| \cdot |v|$$

(в алгебре Ca норма мультипликативна). Действительно, если $u = \xi + \eta e$ и $v = x + y e$, то

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= |\xi x - \bar{\eta} y|^2 + |\eta x + y \xi|^2 = \\ &= (\xi x - \bar{\eta} y)(x \bar{\xi} - \bar{\eta} y) + (\eta x + y \xi)(x \bar{\eta} + \bar{y} \bar{\xi}) \end{aligned}$$

и

$$|u|^2 |v|^2 = (\xi \bar{\xi} + \eta \bar{\eta})(x \bar{x} + y \bar{y}).$$

Поэтому, если $y = \lambda + y'$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\bar{y}' = -y'$, то

$$\begin{aligned} |uv|^2 - |u|^2 |v|^2 &= \\ &= -(\xi x)(\bar{\eta} y) - (\bar{\eta} y)(x \bar{\xi}) + (\eta x)(\bar{y} \bar{\xi}) + (y \xi)(x \bar{\eta}) = \\ &= \lambda(-\xi x \bar{\eta} - \eta x \bar{\xi} + \eta x \bar{\xi} + \xi x \bar{\eta}) - \\ &= (\xi x \bar{\eta} + \eta x \bar{\xi}) y' + y'(\eta x \bar{\xi} + \xi x \bar{\eta}) = 0, \end{aligned}$$

ибо кватернион $\xi x \bar{\eta} + \eta x \bar{\xi}$ вещественен и, значит, перестановочен с кватернионом y' . $\square$

Из формулы (12) непосредственно следует, что алгебра Ca не имеет делителей нуля (т. е. $uv \neq 0$ при $u \neq 0$ и $v \neq 0$).

При отождествлении Ca с $\mathbb{R}^4$, определяемым базисом (10), норма в Ca переходит в обычную евклидову норму в $\mathbb{R}^4$, октавы с нормой 1 отождествляются с точками сферы S^3 , а мнимые октавы (ортогональные 1) с нормой 1 отождествляются с точками ее экватора S^2 . Так как умножение справа на октаву $v \in S^2$ является ортогональным преобразованием $Ca \rightarrow Ca$ (оно линейно над $\mathbb{R}$ и в силу (12) сохраняет длины), то для любой октавы $u \in S^2$ октава uv ортогональна октаве $1v = v$. Это означает, что для любой

точки $v \in S^1$ (а потому и для любой точки $v \in Ca$) умножение $L_u: Ca \rightarrow Ca$ слева на u (также являющееся ортогональным преобразованием) удовлетворяет соотношению $(L_u v, v) = 0$ и, значит, представляет собой кососимметрическое ортогональное преобразование $Ca \rightarrow Ca$. Вектор 1 это преобразование переводит в вектор u , а вектор u — в вектор $u^2 = -1$. Поэтому оно индуцирует (также кососимметрическое и ортогональное) преобразование I_u касательного пространства $T_u S^1$ (являющегося ортогональным дополнением в Ca к векторам 1 и u). Таким образом, мы построили на S^1 поле $u \mapsto I_u$ кососимметрических ортогональных операторов, т. е. квазикомплексную структуру. Это доказывает утверждение А.

Аналогичная конструкция возможна, конечно (с заменой октав кватернионами), и для сферы S^3 .

Задача 8. Докажите, что получающаяся на S^1 квазикомплексная структура совпадает с квазикомплексной структурой, возникающей из отождествления $S^1 = CP^1$.

Вопрос о том, является ли сфера S^6 комплексно-аналитическим многообразием, до сих пор открыт.

Сфера S^6 , конечно же, вложена в R^7 . Поэтому утверждение о ее квазикомплексифицируемости вытекает также из следующего общего предложения:

Предложение 3. Любое ориентируемое шестимерное многообразие, вложимое в пространство R^8 , квазикомплексифицируемо.

Для доказательства этого предложения нам понадобится более внимательно изучить подпространства алгебры Ca .

Для любого двумерного подпространства $\mathcal{P} \subset Ca$ мы введем в рассмотрение множество $Z(\mathcal{P})$ всех октав $u \in Ca$, для которых $\mathcal{P}u \subset \mathcal{P}$. Ясно, что $Z(\mathcal{P})$ является линейным подпространством алгебры Ca .

Так как для каждой октавы $u \in Ca$ с $|u| = 1$ умножение R_u справа на u является ортогональным преобразованием $Ca \rightarrow Ca$ евклидова пространства Ca , то для любой октавы $u \in Ca$, $u \neq 0$, умножение R_u на u будет гомотетией этого пространства. Следовательно, при $u \in Z(\mathcal{P})$ ограничение умножения R_u на $\mathcal{P}$ будет гомотетией двумерного евклидова пространства $\mathcal{P}$. Но, выбрав в $\mathcal{P}$ базис и тем самым отождествив $\mathcal{P}$ с $R^2 = C$, мы можем каждую гомотетию $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ реализовать как линейное преобразование вида $z \mapsto ae^{i\varphi}z$. Это задает некоторое — очевидно, линейное

над R — отображение

$$(13) \quad Z(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto ae^{i\varphi}$$

линеала $Z(\mathcal{P})$ в поле $\mathbb{C}$. Так как алгебра $\mathcal{C}a$ не имеет делителей нуля, то отображение (13) инъективно (является мономорфизмом).

Задача 9. Покажите, что для любых октав $u, v \in \mathcal{C}a$, $u \neq 0$,

1) имеет место равенство

$$u(u^{-1}v) = v;$$

2) существуют такие вещественные числа a и b , что

$$v(u^{-1}v) = au + bv.$$

$$\left[\text{Указание. } a = \frac{2 \operatorname{Re}(\overline{u}v)}{u\overline{u}}, \quad b = -\frac{v\overline{v}}{u\overline{u}}. \right]$$

Отсюда следует, что для любых октав $u, v \in \mathcal{P}$, $u \neq 0$, имеет место включение

$$(14) \quad u^{-1}v \in Z(\mathcal{P}).$$

[Действительно, если октавы u и v линейно зависимы, то включение (14) очевидно, а если эти октавы линейно независимы (и, значит, порождают $\mathcal{P}$), то включение (14) имеет место тогда и только тогда, когда $u(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$ и $v(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$.]

Поэтому $\dim Z(\mathcal{P}) = 2$, и значит отображение (13) является изоморфизмом. При этом линеал $Z(\mathcal{P})$ порождается элементами 1 и $w = u^{-1}v$, где u, v — произвольный базис пространства $\mathcal{P}$.

Задача 10. Докажите, что для любой октавы $w \in \mathcal{C}a$ имеет место равенство

$$(15) \quad w^2 - 2 \operatorname{Re} w \cdot w + |w|^2 = 0.$$

[Указание. Аналог равенства (15) справедлив для комплексных чисел и для кватернионов.]

Из равенства (15) непосредственно следует, что линеал $Z(\mathcal{P})$ (с базисом 1, w) является подалгеброй алгебры $\mathcal{C}a$. [Заметим, что из-за неассоциативности умножения в $\mathcal{C}a$, из включений $\mathcal{P}u \subset \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}v \subset \mathcal{P}$ еще нельзя непосредственно заключить, что $\mathcal{P}(uv) \subset \mathcal{P}$.]

Лемма 1. Для любых октав $u, w \in \mathcal{C}a$ имеет место равенство

$$(uw)w = u(ww).$$

Доказательство. Пусть $u = \xi + \eta e$ и $w = x + ye$. Тогда

$$\begin{aligned}uw &= (\xi x + \bar{\eta} y) + (\eta \bar{x} + y \bar{\xi}) e, \\(uw) w &= (\xi x - \bar{\eta} y) x - \bar{y} (\eta \bar{x} + y \bar{\xi}) + \\&\quad + [(\eta \bar{x} + y \bar{\xi}) \bar{x} + y (\xi x - \bar{\eta} y)] e, \\ww &= (x^2 - \bar{y} y) + (y \bar{x} + y x) e, \\u (ww) &= \xi (x^2 - \bar{y} y) - \overline{(y \bar{x} + y x)} \eta + \\&\quad + [\overline{\eta (x^2 - \bar{y} y)} + (y \bar{x} + y x) \bar{\xi}] e,\end{aligned}$$

а так как кватернионы $\bar{y} y$ и $x + \bar{x}$ вещественны и потому перестановочны с любым кватернионом, то

$$\begin{aligned}\xi (x^2 - \bar{y} y) - \overline{(y \bar{x} + y x)} \eta &= \xi x^2 - \xi \bar{y} y - (x + \bar{x}) \bar{y} \eta = \\&= \xi x^2 - \bar{y} y \bar{\xi} - \bar{\eta} \eta (x + \bar{x}) = \\&= (\xi x - \bar{\eta} y) x - \bar{y} (\eta \bar{x} + y \bar{\xi}), \\\eta \overline{(x^2 - \bar{y} y)} + (y \bar{x} + y x) \bar{\xi} &= \eta x^2 - \eta \bar{y} y + y (\bar{x} + x) \bar{\xi} = \\&= \eta x^2 - \bar{y} y \eta + y \bar{\xi} (\bar{x} + x) = \\&= (\eta \bar{x} + y \bar{\xi}) \bar{x} + y (\xi x - \bar{\eta} y).\end{aligned}$$

Следовательно, $(uw) w = u (ww)$. $\square$

Задача 11. Выведите из леммы 1, что отображение (13) является изоморфизмом алгебр.

Заметим, что этот изоморфизм зависит от выбора в подпространстве $\mathcal{P}$ базиса u, v . Впрочем, эта зависимость довольно слабая, поскольку поле $\mathbb{C}$ имеет над $\mathbb{R}$ только два изоморфизма — тождественный и изоморфизм комплексного сопряжения $z \mapsto \bar{z}$, и значит, любые два изоморфизма $Z(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}$ либо совпадают, либо отличаются на комплексное сопряжение. При этом если два базиса пространства $\mathcal{P}$ непрерывно деформируемы друг в друга (определяют одну и ту же ориентацию этого пространства), то, конечно, должен иметь место первый случай. Следовательно, для любого ориентированного двумерного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}a$ алгебра $Z(\mathcal{P})$ естественно (без какого-либо произвола) изоморфна полю $\mathbb{C}$.

Непосредственное вычисление показывает, что скалярное произведение в $\mathbb{C}a$, отвечающее норме $|u|$, задается формулой

$$(x, u) = \operatorname{Re}(xu).$$

(Заметим, что по отношению к этому произведению базис (10) ортонормирован.) Поэтому произвольное шестимерное подпространство $Q \subset Ca$ можно задать линейными уравнениями вида

$$\operatorname{Re}(xu) = 0,$$

где u пробегает двумерное подпространство $Q^\perp$.

Задача 12. Докажите, что

$$\operatorname{Re}((wx)u) = \operatorname{Re}(w(xu))$$

для любых октав $w, x, u \in Ca$.

Отсюда вытекает, что если $x \in Q$ и $w \in Z(Q^\perp)$, то $wx \in Q$ и, следовательно, что подпространство Q является *линейным над полем $Z(\mathcal{P})$* . Поскольку ортогональное дополнение $Q^\perp$ ориентированного подпространства Q естественным образом ориентировано (мы считаем, что в Ca введена ориентация, по отношению к которой базис (10) положителен) и, значит, поле $Z(Q^\perp)$ может быть отождествлено с полем $\mathbb{C}$, этим доказано, что *каждое ориентированное шестимерное подпространство $Q \subset Ca$ обладает естественной комплексной структурой*.

Теперь мы уже можем доказать предложение 3.

Доказательство предложения 3. Не теряя общности, мы можем считать $\mathcal{X}$ ориентированным подмногообразием алгебры Ca и, значит, каждое касательное пространство $T_p\mathcal{X}$, $p \in \mathcal{X}$, — ориентированным подпространством этой алгебры. Но тогда, согласно только что доказанному утверждению, каждое пространство будет обладать естественной комплексной структурой. Поскольку эти структуры, очевидно, гладко зависят от p , это доказывает предложение 3. $\square$

Множество $\mathcal{S}$ с умножением

$$(16) \quad \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

называется *квазигруппой* (точнее, *правой квазигруппой*), если для любых двух элементов $a, b \in \mathcal{S}$ уравнение $ax=b$ однозначно разрешимо, т. е. если для любого элемента $a \in \mathcal{S}$ левый сдвиг

$$l_a x = ax, \quad x \in \mathcal{S},$$

является биективным отображением $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Если $\mathcal{S}$ является топологическим пространством (гладким многообра-

нием), умножение (16) непрерывно (гладко) и все отображения $L_a: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $a \in \mathcal{G}$, представляют собой гомеоморфизмы (дiffeоморфизмы), то квазигруппа $\mathcal{G}$ называется *топологической квазигруппой* (соответственно *гладкой квазигруппой* или *квазигруппой Ли*).

Выбрав и зафиксировав в $\mathcal{G}$ элемент e , мы для каждого элемента $a \in \mathcal{G}$ обозначим через a' такой элемент из $\mathcal{G}$, что $L_a \cdot e = a$. Если квазигруппа $\mathcal{G}$ гладкая, то для отображения L_a будет определен его дифференциал $(dL_a)_e$ в точке e , являющийся невырожденным линейным отображением

$$T_e \mathcal{G} \rightarrow T_a \mathcal{G}.$$

Поэтому для любого — раз и навсегда выбранного — базиса пространства $T_e \mathcal{G}$ его образ при отображении $(dL_a)_e$ будет базисом пространства $T_a \mathcal{G}$. Тем самым, для любой точки $a \in \mathcal{G}$ в пространстве $T_a \mathcal{G}$ будет определен некоторый базис, гладко зависящий от точки a , т. е. будет построена некоторая тривиализация расслоения $\tau \mathcal{G}$. Это доказывает, что *каждая гладкая квазигруппа является параллелизуемым многообразием*.

Гладкими квазигруппами являются, в частности, сферы S^1 , S^3 и S^7 (соответственно по отношению к умножению комплексных чисел, кватернионов и октав; при этом квазигруппы S^1 и S^3 являются, конечно, группами). Поэтому *сферы S^1 , S^3 и S^7 параллелизуемы* (факт, впрочем, нам уже известный; см. выше).

Посмотрим, нельзя ли конструкцию умножения на сферах S^1 , S^3 и S^7 обобщить на сферы других размерностей.

Алгебра $\mathcal{A}$ над полем K называется *алгеброй с делением*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}^*$, где $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, уравнение $ax = b$ однозначно разрешимо, т. е. если относительно имеющегося в $\mathcal{A}^*$ умножения множество $\mathcal{A}^*$ является квазигруппой.

Задача 13. Докажите, что если алгебра $\mathcal{A}$ конечномерна, то в $\mathcal{A}^*$ уравнение $ax = b$ однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо уравнение $xa = b$. [Указание. Оба условия на алгебру $\mathcal{A}$ равносильны тому, что $\mathcal{A}$ является алгеброй без делителей нуля, т. е. тому, что $ab \neq 0$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.]

Две алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называются *изотопными*, если существуют такие биективные линейные отображения A ,

$B, C: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, что

$$C(xy) = Ax \cdot By$$

для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}_1$.

Ясно, что любая алгебра, изотопная алгебре с делением, также является алгеброй с делением.

Задача 14. Покажите, что любая алгебра с делением $\mathcal{A}$ изотопна алгебре с делением, имеющей единицу. [Указания. Произвольно выбрав отличный от нуля элемент $e \in \mathcal{A}$, примите за A и B отображения $x \mapsto ex$ и $x \mapsto xe$.]

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра с делением над полем R и пусть $n+1$ — ее размерность. Произвольным образом введя в алгебру $\mathcal{A}$ евклидову метрику, обозначим через S^n множество всех ее элементов нормы 1, а через φ — отображение $A^* \rightarrow S^n$, определенное формулой

$$\varphi(a) = \frac{a}{|a|}, \quad a \in \mathcal{A}^*,$$

где $|a|$ — норма элемента a . Если $a, b \in S^n$, то $ab \in \mathcal{A}^*$, потому определен элемент $\varphi(ab) \in S^n$. Мы введем в S^n умножение $*$, положив для любых элементов $a, b \in S^n$

$$a * b = \varphi(ab).$$

По условию для любых элементов $a, b \in S^n$ в $\mathcal{A}^*$ существует такой элемент y , что $ay = b$. Пусть $x = \varphi(y)$. Тогда

$$ax = a \cdot \frac{y}{|y|} = \frac{1}{|y|} ay = \frac{b}{|x|}$$

и, значит, $\varphi(ax) = b$, т. е. $a * x = b$. Следовательно, по отношению к умножению $*$ сфера S^n является квазигруппой и потому параллелизуема.

Таким образом, конструкция умножения на сферах S^1, S^3, S^7 действительно допускает обобщение. Однако она дает не новые параллелизуемые сферы, а в силу утверждения Б — у нас пока не доказанного! — показывает, что алгебры с делением над полем R могут существовать лишь в размерностях 1, 2, 4 и 8. [Примеры алгебр R, C, H и Ca показывают, что в этих размерностях алгебры с делением действительно существуют. Конечно, в этих размерностях существуют и другие алгебры с делением — например, алгебры, изотопные алгебрам R, C, H и Ca .]

Было бы интересно доказать отсутствие над полем $\mathbb{R}$ алгебр с делением размерностей $n \neq 1, 2, 4, 8$ чисто алгебраически (с использованием лишь простейших топологических свойств поля $\mathbb{R}$.) Несмотря на длительные усилия многих математиков, это пока удалось сделать лишь при тех или иных дополнительных ограничениях на алгебру $\mathcal{A}$ (например, в предположении, что эта алгебра является так называемой алгеброй с ассоциативными степенями).

Мы вернемся к обсуждению этих вопросов в лекции 24.

Лекция 9

Геометрии Клейна. — Расслоения типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. — Сравнение $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоений с расслоениями $\xi[\mathcal{F}]$. — Редукция $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоений. — Редукция главных расслоений. — Двухлистное накрытие неориентируемого многообразия.

В этой лекции мы рассмотрим понятие редуцированности для произвольных локально тривиальных расслоений со структурной группой. Для этого нам будет удобно заново определить эти расслоения без апелляции к главным расслоениям. Поэтому в материале лекции 1 мы пока нуждаться не будем.

В первую очередь нам нужно перенести на общий случай понятие линейного $\mathcal{G}$ -пространства.

Пусть группа $\mathcal{G}$ действует слева на множестве $\mathcal{F}$.

Определение 1. Множество $\mathcal{X}$ называется *пространством типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$* , если задано такое множество $\text{Coог } \mathcal{X}$ биективных отображений

$$p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F},$$

что

а) если $p \in \text{Coог } \mathcal{X}$, то $L_a \circ p \in \text{Coог } \mathcal{X}$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$;

б) если $p, q \in \text{Coог } \mathcal{X}$, то существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = L_a \circ p$.

Если группа $\mathcal{G}$ действует на множестве $\mathcal{F}$ эффективно, т. е. — см. лекцию 1 — если $L_a = \text{id}$ только при $a = e$, то элемент a единственен.

Пространства типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ называются также *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -пространствами*. Если множество $\mathcal{X}$ является $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -пространством, то говорят, что в нем определена *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -структура* или что оно несет *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -геометрию*.

Пример 1. Так как для любого линейного пространства $\mathcal{V}$ линейные изоморфизмы $\mathcal{V} \rightarrow K^n$ находятся в естественном биективном соответствии с базисами в $\mathcal{V}$, то для каждой подгруппы $\mathcal{G} \subset \text{GL}(n; K)$ линейные $\mathcal{G}$ -пространства — это в точности пространства типа $(\mathcal{G}, K^n)$.

В частности, пространства типа $(\text{GL}(n; K), K^n)$ — это n -мерные линейные пространства над полем K .

Пример 2. Аналогично, если $\text{Aff}(n; K)$ — группа всех аффинных (неоднородных линейных) преобразований пространства K^n , то $(\text{Aff}(n; K), K^n)$ -пространства — это в точности n -мерные аффинные пространства над полем K .

Пример 3. Пространства типа $(\text{Proj}(n; K), KP^n)$, где $\text{Proj}(n; K)$ — группа всех проективных преобразований $KP^n \rightarrow KP^n$, — это n -мерные проективные пространства над полем K .

Эти три примера мы уже подробно рассматривали в лекции I.30. В каждом из них отображения из $\text{Coog } \mathcal{X}$ — это в точности координатные изоморфизмы. На этом основании и в общем случае произвольного $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -пространства $\mathcal{X}$ отображения из $\text{Coog } \mathcal{X}$ называются *координатными изоморфизмами*.

Пример 4. Само пространство $\mathcal{F}$ будет пространством типа $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$, если мы примем за $\text{Coog } \mathcal{F}$ множество всех отображений $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ вида L_a , $a \in \mathcal{Y}$.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два пространства типа $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$. Биективное отображение

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

называется $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -*изоморфизмом* (или просто *изоморфизмом*), если его можно включить в коммутативную диаграмму вида

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ p \downarrow & L_a & \downarrow q \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \end{array}$$

где $p \in \text{Coog } \mathcal{X}$, $q \in \text{Coog } \mathcal{Y}$ и $a \in \mathcal{Y}$. Если $\mathcal{Y}$ -пространство $\mathcal{F}$ эффективно, то при данных p и q элемент a определяется единственным образом.

Задача 1. Покажите, что в диаграмме (1) координатные изоморфизмы p и q можно задать произвольно: если для данного отображения f элемент $a \in \mathcal{Y}$ существует при одном выборе этих изоморфизмов, то он существует и при любом другом их выборе (но, конечно, будет другим).

Изоморфизмы $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -пространства $\mathcal{X}$ на себя называются его *автоморфизмами*. Они составляют группу $\text{Aut } \mathcal{X}$. В случае, когда группа $\mathcal{Y}$ эффективно действует на $\mathcal{F}$, эта группа изоморфна группе $\mathcal{Y}$.

З а м е ч а н и е 1. Идея характеризовать геометрию группой ее автоморфизмов принадлежит Клейну. (Она была высказана им в так называемой «Эрлангенской программе».) На этом основании $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -геометрии называются также *геометриями Клейна*.

Если $\mathcal{F}$ является топологическим пространством (гладким многообразием), а $\mathcal{Y}$ — топологической (гладкой) группой, непрерывно (гладко) действующей на $\mathcal{F}$, то мы можем

вести в каждое $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -пространство $\mathcal{X}$ топологию (гладкость), перенеся ее в $\mathcal{X}$ посредством произвольного координатного изоморфизма $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$. (Очевидно, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора p .)

Именно этим способом мы и вводили гладкость в вещественные линейные и аффинные пространства; см. лекцию III.11.

Вернемся теперь к расслоениям.

Пусть $\mathcal{S}$ — топологическая группа, непрерывно действующая на топологическом пространстве $\mathcal{F}$.

Определение 2. (Ср. с определением 3 лекции 7.) Расслоение $\xi = (\mathcal{S}, \pi, \mathcal{B})$ называется *расслоением типа $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$* , если

а) слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ над любой точкой $b \in \mathcal{B}$ является пространством типа $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$;

б) существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ и такие послойные гомеоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{F}_b = \pi^{-1}U_\alpha \\ & \searrow \text{pr} & \swarrow \pi|_{U_\alpha} \\ & U_\alpha & \end{array}$$

что для каждой точки $b \in U_\alpha$ отображение

$$(2) \quad \varphi_{\alpha, b}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_b, \quad x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \quad x \in \mathcal{F},$$

является $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -изоморфизмом (т. е. — что равносильно — если обратное отображение $\varphi_{\alpha, b}^{-1}: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}$ является координатным изоморфизмом из $\text{Coor } \mathcal{F}_b$).

Расслоения типа $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ называются также *$(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоениями*.

Гомеоморфизм φ_α называется *тривиализацией $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоения ξ над U_α* . Иногда *тривиализацией* называется пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Множества U_α называются *тривиализирующими окрестностями*, а семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ тривиализаций $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — *тривиализирующим атласом $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоения ξ* .

Векторные $\mathcal{S}$ -расслоения являются частным случаем $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоений, получающимся при $\mathcal{F} = K^n$ и $\mathcal{S} \subset GL(n; K)$.

Другие частные случаи — у нас еще не встречавшиеся — это *аффинные и проективные расслоения*. Для аффинных

расслоений $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$ и $\mathcal{Y} = \text{Aff}(n; \mathbb{K})$, а для проективных — $\mathcal{F} = \mathbb{K}P^n$ и $\mathcal{Y} = \text{Proj}(n; \mathbb{K})$.

Задача 2. Докажите, что для любого $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоения проекция $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ является открытым отображением.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ — два $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоения над пространством $\mathcal{B}$.

Определение 3. Послойный гомеоморфизм

$$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

над $\mathcal{B}$ называется $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -изоморфизмом, если для любой точки $b \in \mathcal{B}$ индуцированное им отображение

$$f_b: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}'_b$$

слоев является $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -изоморфизмом $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -пространств.

Замечание 2. Мы вынуждены ограничиться здесь (в отличие от специального случая векторных расслоений; см. определение 2 лекции 6) лишь изоморфизмами потому, что общее понятие морфизма $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -пространств у нас не определено.

Задача 3. Дайте — по возможности наиболее общее — определение морфизмов аффинных и проективных расслоений.

Если тривиализации $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) из тривиализирующего атласа $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ обладают тем свойством, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ определен $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -автоморфизм

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta,b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,b}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

пространства $\mathcal{F}$. Если действие группы $\mathcal{Y}$ на пространстве $\mathcal{F}$ эффе́ктивно, то этот автоморфизм единственным образом представляется в виде L_a , где $a \in \mathcal{Y}$. Мы будем отождествлять a с $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ и тем самым считать $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ элементом группы $\mathcal{Y}$. В силу этого соглашения формула

$$\varphi_{\beta\alpha}: b \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(b), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

будет задавать некоторое отображение

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathcal{Y}.$$

Для любого топологического пространства U и любого непрерывного отображения $\varphi: U \rightarrow \mathcal{Y}$ отображение

$$\tilde{\varphi}: U \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

определенное формулой

$$\tilde{\varphi}(b, x) = \varphi(b)x, \quad b \in U, x \in \mathcal{F},$$

очевидным образом непрерывно (оно является композицией непрерывного отображения

$$\varphi \times \text{id}: U \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{F}, (b, x) \mapsto (\varphi(b), x),$$

и действия $\mathcal{Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$).

Определение 4. Действие группы $\mathcal{Y}$ на пространстве $\mathcal{F}$ (а также само $\mathcal{Y}$ -пространство $\mathcal{F}$) называется *топологически эффективным*, если отображение вида $\varphi: U \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $\hat{\varphi}: U \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Задача 4. Докажите, что любое топологически эффективное действие непрерывно и эффективно.

Пример 5. Согласно лемме 1 лекции 6 действие группы $\text{GL}(n; K)$ на пространстве K^n топологически эффективно.

Задача 5. Покажите, что действия группы $\text{Aff}(n; K)$ на K^n и группы $\text{Proj}(n; K)$ на KP^n топологически эффективны.

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение $\hat{\varphi}$ является не чем иным, как композицией $\text{pr} \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ гомеоморфизма $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: U \times \mathcal{F} \rightarrow U \times \mathcal{F}$ и проекции $U \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ и потому непрерывно. Следовательно, если $\mathcal{Y}$ действует на $\mathcal{F}$ топологически эффективно, то отображение $\varphi_{\beta\alpha}$ непрерывно.

Задача 6. Покажите, что

а. Отображения $\varphi_{\beta\alpha}$ составляют коцикл φ тривиализирующего покрытия $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}\}$ над группой $\mathcal{Y}$ (см. определение 3 лекции 6).

б. Класс когомологий $[\varphi] \in H^1(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ этого коцикла не зависит от выбора тривиализаций φ_α .

в. Формула $\xi \Leftrightarrow [\varphi]$ устанавливает биективное соответствие между множеством классов изоморфных $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоений над $\mathcal{B}$ с данным тривиализирующим покрытием $\mathcal{U}$ и множеством $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$. (Ср. теорему 1 лекции 6.)

Заметим, что построение $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоения ξ по коциклу $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ может быть осуществлено даже для неэффективных $\mathcal{Y}$ -пространств $\mathcal{F}$. Однако в этом случае некогомологичные коциклы могут давать изоморфные расслоения (и, конечно, не любое $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоение будет задаваться коциклом).

Сравнение задачи 6 с замечанием 2 лекции 6—а также пример 3 лекции 6—подсказывает, что $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоения по существу совпадают с расслоениями вида $\xi[\mathcal{F}]$, где ξ —произвольное локально тривиальное главное $\mathcal{Y}$ -рас-

слоение (и, значит, дают прямое описание локально тривиальных расслоений вида $\xi[\mathcal{F}]$, не апеллирующее к главным расслоениям).

Разберем этот вопрос подробнее (ср. пример 3 лекции 6).

Конечно, знакомство с лекцией 1 теперь предполагается.

Пусть $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное главное $\mathcal{G}$ -расслоение и пусть $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, где $\mathcal{F}$ — пока произвольное левое $\mathcal{G}$ -пространство. Как мы знаем (см. формулу (12) лекции 1), для любой точки $p \in \mathcal{B}$ формула

$$j_p(x) = [p, x]_{\mathcal{F}}, \quad x \in \mathcal{F},$$

определяет гомеоморфизм $j_p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_b$ пространства $\mathcal{F}$ на слой $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ над точкой $b = \pi(p)$ (являющейся орбитой $p\mathcal{G}$ точки p). Если q — другая точка орбиты b и если $p = qa$, где $a \in \mathcal{G}$, то для любой точки $x \in \mathcal{F}$

$$(j_q^{-1} \circ j_p)(x) = j_q^{-1}[p, x] = j_q^{-1}[q, ax] = ax,$$

т. е. $j_q^{-1} \circ j_p = L_a$. Это показывает, что множество всех отображений вида j_p^{-1} удовлетворяет условиям а и б определения 1. Приняв это множество за $\text{Coor } \mathcal{F}_b$, мы тем самым введем в $\mathcal{F}_b$ некоторую $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -структуру.

Пусть главное расслоение ξ локально тривиально, т. е. пусть некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ обладает тем свойством, что для любого α существует эквивариантный гомеоморфизм

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

главных $\mathcal{G}$ -пространств. Рассмотрим отображение

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha,$$

определенное формулой

$$\varphi_\alpha(b, x) = [\varphi_\alpha(b, e), x]_{\mathcal{F}}, \quad b \in U_\alpha, x \in \mathcal{F},$$

где, как всегда, e — единица группы $\mathcal{G}$. Легко видеть, что это отображение является послойным гомеоморфизмом (обратный гомеоморфизм задается формулой

$$[p, x]_{\mathcal{F}} \mapsto (b, ax), \quad p \in \mathcal{G}, x \in \mathcal{F},$$

где $b = \pi(p)$ и $a = \tau(\varphi_\alpha(b, e), p)$ — такой элемент группы $\mathcal{G}$, что $\varphi_\alpha(b, e)a = p$). При этом для любой точки $b \in U_\alpha$ отображение $\varphi_{\alpha, b}: x \mapsto \varphi_\alpha(b, x)$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_b$ будет не чем иным, как отображением j_p при $p = \varphi_\alpha(b, e)$, и значит будет изоморфизмом $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -пространств.

Тем самым доказано, что для любого локально тривиального главного $\mathcal{Y}$ -расслоения ξ расслоение $\xi = \xi[F]$ является $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоением.

Обратное утверждение верно только в предположении, что группа $\mathcal{Y}$ действует на пространстве $\mathcal{F}$ топологически эффективно.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ -расслоение. Рассмотрим множество

$$\mathcal{B} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \text{Coor } \mathcal{F}_b$$

и отображение

$$\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B},$$

определенное формулой

$$\pi(p) = b, \quad \text{если } p \in \text{Coor } \mathcal{F}_b.$$

Пусть $\{U_\alpha\}$ — тривиализирующее покрытие расслоения ξ .

По условию для тривиализации $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha}$ расслоения ξ над U_α и любой точки $b \in U_\alpha$ отображение $\varphi_{\alpha^{-1}b}: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}$ принадлежит множеству $\text{Coor } \mathcal{F}_b$. Поэтому, положив

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_{\alpha^{-1}b}, \quad b \in U_\alpha, \quad a \in \mathcal{Y},$$

мы получим некоторое — очевидно, послойное и биективное — отображение

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha} = \bigcup_{b \in U_\alpha} \text{Coor } \mathcal{F}_b.$$

Введем в множество $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ топологию, считая это отображение гомеоморфизмом (т. е. объявляя множество $O \subset \mathcal{E}_{U_\alpha}$ открытым в том и только в том случае, когда множество $\varphi_\alpha^{-1}O$ открыто в $U_\alpha \times \mathcal{Y}$).

Лемма 1. Пусть множество $\mathcal{X}$ является объединением множеств $\mathcal{X}_\alpha$, в каждое из которых введена топология $\mathcal{T}_\alpha$. Если для любых α и β пересечение $\mathcal{X}_\alpha \cap \mathcal{X}_\beta$ открыто в $\mathcal{X}_\alpha$ (а значит по симметрии — и в $\mathcal{X}_\beta$) и если топологии, индуцированные на $\mathcal{X}_\alpha \cap \mathcal{X}_\beta$ топологиями $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{T}_\beta$, совпадают, то на $\mathcal{X}$ существует единственная топология $\mathcal{T}$, по отношению к которой все множества $\mathcal{X}_\alpha$ открыты и на каждом из них топология $\mathcal{T}$ индуцирует топологию $\mathcal{T}_\alpha$.

Доказательство. Единственность. Если топология $\mathcal{T}$ существует, то множество $O \subset \mathcal{X}$ тогда и только тогда открыто в $\mathcal{X}$, когда для любого α пересе-

чение $O \cap \mathcal{X}_\alpha$ открыто в $\mathcal{X}_\alpha$. Следовательно, топология $\mathbf{T}$ единственна.

Существование. Назовем множество $O \subset \mathcal{X}$ открытым, если для любого α пересечение $O \cap \mathcal{X}_\alpha$ открыто в $\mathcal{X}_\alpha$. Ясно, что все такие множества составляют топологию $\mathbf{T}$ в $\mathcal{X}$. При этом—в силу условия, наложенного на T_α ,—если $O \subset \mathcal{X}_\alpha$, то O тогда и только тогда открыто в $\mathcal{X}$, когда O открыто в $\mathcal{X}_\alpha$. Следовательно, $\mathcal{X}_\alpha$ открыто в $\mathcal{X}$ и топология $\mathbf{T}$ индуцирует на $\mathcal{X}_\alpha$ топологию $\mathbf{T}_\alpha$. $\square$

[Заметим, что топология в гладкое многообразие $\mathcal{X}$ вводится—см. лекцию III.7—фактически на основе этой леммы (с координатными окрестностями U_α в роли подпространств $\mathcal{X}_\alpha$).]

Чтобы применить лемму 1 к множеству $\mathcal{X} = \mathcal{G}$ и топологическим пространствам $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{G}_{U_\alpha}$, мы должны доказать, что для любых α и β пересечение $\mathcal{G}_{U_\alpha} \cap \mathcal{G}_{U_\beta}$ открыто в $\mathcal{G}_{U_\alpha}$ и топологии пространств $\mathcal{G}_{U_\alpha}$ и $\mathcal{G}_{U_\beta}$ индуцируют на нем одну и ту же топологию. Поскольку

$$\mathcal{G}_{U_\alpha} \cap \mathcal{G}_{U_\beta} = \mathcal{G}_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

а $\varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{G}_{U_\alpha \cap U_\beta}) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{Z}$, первое утверждение следует из того, что пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$ открыто в U_α . Что же касается второго утверждения, то оно равносильно утверждению, что отображение

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{Z} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{Z}$$

непрерывно (и значит—по симметрии—является гомеоморфизмом).

Но так как для любых элементов $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a \in \mathcal{Z}$

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1} b = L_a^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} \circ \varphi_\beta^{-1} b = L_{\varphi_{\beta\alpha}(b)}^{-1} a \circ \varphi_\beta^{-1} b,$$

то это отображение действует по формуле

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, a) = (b, \varphi_{\beta\alpha}(b) a), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, a \in \mathcal{Z},$$

и, следовательно, непрерывно (напомним, что $\mathcal{Z}$ -пространство $\mathcal{F}$ мы предполагаем топологически эффективным). Поэтому для множества $\mathcal{G}$ и подпространств $\mathcal{G}_{U_\alpha}$ все условия леммы 1 выполнены, и значит в $\mathcal{G}$ существует единственная топология, по отношению к которой все пространства $\mathcal{G}_{U_\alpha}$ являются открытыми подпространствами.

Поскольку каждое из отображений φ_α представляет собой по отношению к этой топологии постоянный гомео-

морфизм, отображение π непрерывно и открыто (на каждом $\mathcal{G}U_\alpha$, а потому и на всем $\mathcal{G}$).

Мы определим на $\mathcal{G}$ действие справа группы $\mathcal{G}$ формулой

$$pa = L_a^{-1} \circ p, \quad p \in \mathcal{G}, \quad a \in \mathcal{G}$$

(напомним, что $p \in \text{Coog } \mathcal{F}_b$ для некоторого $b \in \mathcal{B}$, и потому композиция $L_a^{-1} \circ p$ определена и принадлежит $\text{Coog } \mathcal{F}_b$). Так как по отношению к этому действию (и стандартному действию группы $\mathcal{G}$ на $U_\alpha \times \mathcal{G}$) отображения φ_α , очевидно, эквивариантны, то это действие непрерывно, свободно и отображение сдвига для него непрерывно (на каждом $\mathcal{G}U_\alpha$, а значит и на всем $\mathcal{G}$). Таким образом, расслоение

$$\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$$

является главным $\mathcal{G}$ -расслоением.

Задача 7. Покажите, что формула

$$[p, x]_\xi \mapsto p^{-1}(x), \quad p \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{F},$$

корректно определяет изоморфизм $\xi[\mathcal{F}] \rightarrow \xi$ ассоциированного расслоения $\xi[\mathcal{F}] = (\mathcal{G} \times \mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ на расслоение ξ .

Таким образом, если $\mathcal{G}$ -пространство $\mathcal{F}$ топологически эффективно, то с точностью до изоморфизма $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоения — это локально тривиальные расслоения со структурной группой $\mathcal{G}$ и слоем $\mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь редуцирование $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоений к подгруппе $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$.

Снабженная индуцированной топологией подгруппа $\mathcal{H}$ является топологической группой, непрерывно действующей на $\mathcal{G}$ -пространстве $\mathcal{F}$ (так что каждое $\mathcal{G}$ -пространство $\mathcal{F}$ автоматически является и $\mathcal{H}$ -пространством). При этом ясно, что если группа $\mathcal{G}$ действует на $\mathcal{F}$ эффективно (или топологически эффективно), то подгруппа $\mathcal{H}$ также действует эффективно (или соответственно топологически эффективно).

Любое $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -пространство $\mathcal{U}$ мы можем единственным образом превратить в $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -пространство с тем же множеством точек, объявив координатными изоморфизмами все отображения вида $L_a \circ q$, где $q \in \text{Coog } \mathcal{U}$, $a \in \mathcal{G}$. (Подчеркнем, что $\mathcal{F}$ здесь с самого начала предполагается $\mathcal{G}$ -пространством.) При этом каждый $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -изоморфизм $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -пространств будет, очевидно, и $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -изоморфизмом соответствующих $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -пространств. Поэтому если в

некотором $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоении мы указанным образом превратим все слои в $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -пространства, то в результате получится $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоение (с теми же самыми тривиализациями $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$).

В этом смысле *каждое $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоение является также и $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоением.*

Обратно, каждое $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -пространство $\mathcal{X}$ мы можем превратить в $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -пространство $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ с тем же множеством точек, выбрав произвольный координатный изоморфизм $\rho_0 \in \text{Coor } \mathcal{X}$ и ограничившись лишь координатными изоморфизмами вида $L_a \circ \rho_0$, где $a \in \mathcal{H}$. Однако, в отличие от предыдущего случая, *эта процедура не однозначна* и зависит от выбора изоморфизма ρ_0 , а $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ -изоморфизмы отнюдь не будут автоматически $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -изоморфизмами.

Задача 8. Покажите, что выбор изоморфизмов $\rho_0, \rho_1 \in \text{Coor } \mathcal{X}$ тогда и только тогда приводит к одному и тому же $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -пространству $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$, когда элемент $a \in \mathcal{S}$, удовлетворяющий соотношению $\rho_1 = L_a \circ \rho_0$, принадлежит подгруппе $\mathcal{H}$.

[Таким образом, различные $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -структуры на $\mathcal{X}$, получающиеся из одной и той же $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -структуры, находятся в биективном соответствии с точками пространства $\mathcal{S}/\mathcal{H}$ левых смежных классов группы $\mathcal{S}$ по подгруппе $\mathcal{H}$.]

Если мы теперь хотим превратить данное $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоение $\xi = (\mathcal{S}, \pi, \mathcal{B})$ в $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоение, то нам нужно ввести $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -структуры во все слои $\mathcal{F}_b, b \in \mathcal{B}$, одновременно и притом так, чтобы хотя бы для одного тривиализующего атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ все отображения (2) оказались $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -изоморфизмами. Как показывает пример векторных расслоений, это удастся сделать не всегда.

Определение 5. Мы будем говорить, что $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -расслоение *редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$* (или к $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоению η), если существует $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоение η , которое после введения в его слои $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ -структуры превращается в расслоение ξ . Расслоение η мы будем называть *$\mathcal{H}$ -редукцией* расслоения ξ , а расслоение ξ соответственно *$\mathcal{S}$ -расширением* расслоения η .

Подчеркнем, что $\mathcal{S}$ -расширение всегда существует (когда в $\mathcal{F}$ задана структура $\mathcal{S}$ -пространства) и определено единственным образом, тогда как $\mathcal{H}$ -редукция существует не

всегда, а когда существует, то, вообще говоря, не единственна.

Подчеркнем также, что тотальные пространства, базы и проекции расслоений ξ и η совпадают, т. е. эти расслоения отличаются лишь $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -структурами.

Легко видеть (ср. предложение 1 лекции 7), что если $\mathcal{G}$ -пространство $\mathcal{F}$ топологически эффективно, то $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, когда для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что соответствующий склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ принимает значения в подгруппе $\mathcal{H}$. Действительно, если $\mathcal{H}$ -редукция η существует, то любой тривиализирующий атлас расслоения η будет обладать этим свойством. Обратно, если такой атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ существует, то $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоение η , построенное по коциклу $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$, рассматриваемому как коцикл над группой $\mathcal{H}$, будет $\mathcal{H}$ -редукцией расслоения ξ . $\square$

Здесь удобно перейти к соответствующим главным расслоениям ξ и η .

Определение 6. Говорят, что локально тривиальное главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, если для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что соответствующий склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ принимает значения в подгруппе $\mathcal{H}$. В этом случае коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ определяет локально тривиальное главное $\mathcal{H}$ -расслоение η , которое называется $\mathcal{H}$ -редукцией расслоения ξ .

Поскольку склеивающие коциклы расслоений ξ и η одинаковы, мы видим, что если $\mathcal{G}$ -пространство $\mathcal{F}$ топологически эффективно, то $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ -расслоение η $\eta[\mathcal{F}]$ тогда и только тогда является $\mathcal{H}$ -редукцией $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоения $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, когда главное $\mathcal{G}$ -расслоение η является $\mathcal{H}$ -редукцией главного $\mathcal{G}$ -расслоения ξ .

Поэтому достаточно рассматривать лишь редукции главных расслоений.

Замечание 3. Обратим внимание, что в отличие от случая $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоений *тотальные пространства расслоений ξ и η различны* (при $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$). Действительно, так как $\xi = \xi[\mathcal{G}]$ (см. пример 6 лекции 1), то тотальное пространство $\mathcal{G}$ -расслоения ξ то же, что и тотальное пространство расслоения $\eta[\mathcal{G}]$ (где $\mathcal{G}$ рассматривается как левое $\mathcal{H}$ -пространство), и потому заведомо отлично от тотального пространства $\mathcal{G}^n$ расслоения $\eta = \eta[\mathcal{H}]$.

По определению пространство $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{E}^1(\mathcal{S})$ является факторпространством пространства $E = \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \mathcal{S})$, а пространство $\mathcal{E}^{\eta} = \mathcal{E}^{\eta}(\mathcal{H})$ — факторпространством его подпространства $H = \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \mathcal{H})$. Следовательно, поскольку эти факторизации на подпространстве H очевидным образом совпадают, вложение $H \subset E$ индуцирует послойное отображение

$$(3) \quad \chi: \mathcal{E}^{\eta} \rightarrow \mathcal{E}^1,$$

которое

- а) является гомеоморфизмом на свой образ;
- б) эквивариантно по отношению к действию группы $\mathcal{H}$, т. е. обладает тем свойством, что

$$\chi(qh) = \chi(q)h$$

для любой точки $q \in \mathcal{E}^{\eta}$ и любого элемента $h \in \mathcal{H}$.

Об отображении (3) мы будем говорить, что оно *редуцирует* расслоение ξ к расслоению η . [Заметим, что, вообще говоря, это отображение зависит от выбора склеивающего коцикла $\{\psi_{\beta\alpha}\}$.]

Легко видеть, что существование редуцирующего отображения (3) не только необходимо, но и достаточно для редуцируемости расслоения ξ к расслоению η , т. е. *главное $\mathcal{H}$ -расслоение η тогда и только тогда является $\mathcal{H}$ -редукцией главного $\mathcal{S}$ -расслоения ξ , когда существует хотя бы одно редуцирующее отображение (3)*. Действительно, легко видеть (докажите!), что для любого редуцирующего отображения (3) формула

$$[q, a]_{\mathcal{H}} \mapsto \chi(q)a, \quad q \in \mathcal{E}^{\eta}, \quad a \in \mathcal{S},$$

корректно определяет $\mathcal{S}$ -изоморфизм $\eta[\mathcal{S}] \rightarrow \xi$. Поэтому склеивающие коциклы расслоений ξ и $\eta[\mathcal{S}]$ можно выбрать одинаковыми. Это все и доказывает, поскольку каждый склеивающий коцикл расслоения $\eta[\mathcal{S}]$ заведомо принимает значения в группе $\mathcal{H}$. $\square$

Теперь мы можем определить $\mathcal{H}$ -редукции и для любых — не обязательно локально тривиальных — главных $\mathcal{S}$ -расслоений.

Определение 7. Говорят, что главное $\mathcal{H}$ -расслоение η является $\mathcal{H}$ -редукцией главного $\mathcal{S}$ -расслоения ξ , если существует хотя бы одно редуцирующее отображение (3).

Согласно доказанному, для локально тривиальных главных расслоений это определение равносильно определению 6. [Однако следует иметь в виду, что локально тривиальное главное $\mathcal{G}$ -расслоение может обладать не локально тривиальными $\mathcal{H}$ -редукциями, не имея локально тривиальных.]

Задача 9. Покажите, что для любого (не обязательно локально тривиального) главного $\mathcal{H}$ -расслоения η существует главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ , для которого расслоение η является $\mathcal{H}$ -редукцией и которое локально тривиально, если локально тривиально расслоение η . [Указание. За тотальное пространство $\mathcal{G}^1$ расслоения ξ примите тотальное пространство $\mathcal{G}^1 \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ расслоения η ($\mathcal{G}$) (где $\mathcal{G}$ естественным образом рассматривается как левое $\mathcal{H}$ -пространство), действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^1$ определите — как легко видеть, корректной — формулой

$$[q, g]_{\mathcal{H}} a = [q, ga]_{\mathcal{H}}, \quad q \in \mathcal{G}^1, g, a \in \mathcal{G},$$

а редуцирующее отображение (3) — формулой

$$\chi(q) = [q, e]_{\mathcal{H}}, \quad q \in \mathcal{G}^1,$$

где, как всегда, e — единица группы $\mathcal{G}$.

Задача 10. Докажите, что главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к единичной подгруппе $\{e\}$, когда оно тривиально. [Указание. При $\mathcal{H} = \{e\}$ отображение (3) является сечением расслоения ξ .]

Так как $\mathcal{H}$ действует на $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1$, то определено факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. При этом, поскольку каждая $\mathcal{H}$ -орбита $p\mathcal{H}$ содержится в единственной $\mathcal{G}$ -орбите $p\mathcal{G}$, соответствие $p\mathcal{H} \rightarrow p\mathcal{G}$ задает отображение $\pi: \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$, и значит возникает расслоение

$$\xi/\mathcal{H} = (\mathcal{G}/\mathcal{H}, \pi, \mathcal{B}).$$

С другой стороны, так как группа $\mathcal{G}$ естественным образом непрерывно действует слева на факторпространстве $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (по формуле

$$a(g\mathcal{H}) = (ag)\mathcal{H},$$

где $a, g \in \mathcal{G}$), то определено расслоение

$$\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}] = (\mathcal{G} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H}), \pi, \mathcal{B}).$$

Задача 11. Покажите, что расслоения $\xi/\mathcal{H}$ и $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ канонически изоморфны. [Указание. Изоморфизм $\mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H})$ определяется формулой

$$p\mathcal{H} \mapsto [p, \mathcal{H}]_{\mathcal{H}}.$$

а обратный изоморфизм $\mathcal{G} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ — формулой

$$[p, g\mathcal{H}]_g \mapsto (pg)\mathcal{H},$$

где $p \in \mathcal{G}$, $g \in \mathcal{G}$.

При $\mathcal{H} = \{e\}$ это утверждение примера 6 лекции 1.

Задача 12 (обобщение задачи 9). Покажите, что главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ тогда и только тогда редуцируется к подгруппе $\mathcal{H}$, когда расслоение $\xi/\mathcal{H} = \xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ обладает сечением.

[Указание. Для любого редуцирующего отображения (3) формула

$$f(p) = \tau(p, \chi(q))\mathcal{H}, \quad p \in \mathcal{G} = \mathcal{G}^\xi,$$

где q — такая точка из $\mathcal{G}^\eta$, что $\pi(q) = \pi(p)$ (а τ , как всегда, отображение сдвига) корректно определяет отображение $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$, удовлетворяющее соотношению (14) лекции 1. Обратно, для любого такого отображения f подпространство $\mathcal{G}^\eta$ пространства $\mathcal{G}$, состоящее из точек $p \in \mathcal{G}$, для которых $f(p) = \mathcal{H}$, является главным $\mathcal{H}$ -пространством, а вложение $\mathcal{G}^\eta \rightarrow \mathcal{G}^\xi$ — редуцирующим отображением.]

(Ср. замечание в скобках к задаче 8.)

Задача 13. Пусть главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ , а также главное $\mathcal{H}$ -расслоение $(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ (см. пример 2 лекции 1) локально тривиальны. Покажите, что если в этих условиях расслоение $\xi/\mathcal{H}$ обладает сечением, то для расслоения ξ существует $\mathcal{H}$ -редукция η , являющаяся локально тривиальным главным $\mathcal{H}$ -расслоением.

Задача 14. Докажите, что если η — редукция расслоения ξ , то для любого левого $\mathcal{G}$ -пространства $\mathcal{F}$ расслоения $\eta[\mathcal{F}]$ и $\xi[\mathcal{F}]$ изоморфны как расслоения без структурной группы (существует послойный гомеоморфизм

$$\varphi: \begin{matrix} \mathcal{G}^\eta \times \mathcal{F} \\ \mathcal{H} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathcal{G}^\xi \times \mathcal{F} \\ \mathcal{G} \end{matrix}.$$

никак, вообще говоря, не связанный с действиями групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$). [Указание. Отображение φ определяется формулой

$$\varphi([q, x]_{\mathcal{H}}) = [\chi(q), x]_{\mathcal{G}}, \quad q \in \mathcal{G}^\eta, x \in \mathcal{F}.$$

где χ — редуцирующее отображение (3). Это отображение очевидным образом непрерывно, биективно и послойно. Поэтому в доказательстве нуждается лишь непрерывность обратного отображения. Для этого достаточно для любой окрестности W произвольной точки $[q_0, x_0]_{\mathcal{H}}$

в $\mathcal{G}^\eta \times \mathcal{F}$ найти такую окрестность U точки $p_0 = \chi(q_0)$ в $\mathcal{G}^\xi$ и такую

окрестность V точки x_0 в $\mathcal{F}$, что $[p, x]_{\mathcal{G}} \in \varphi(W)$ для любых точек

$p \in U$ и $x \in V$. Пусть W_1 — такая окрестность точки q_0 в $\mathcal{G}^\eta$ и W_2 — такая окрестность точки x_0 в $\mathcal{F}$, что $[q, x]_{\mathcal{H}} \in W$ для любых точек

$q \in W_1$ и $x \in W_2$. Примите за V окрестность точки x_0 , для которой в группе $\mathcal{G}$ существует такая симметричная ($O^{-1} = O$) окрестность единицы O , что $OV_2 \subset W_2$, а за U — окрестность точки p_0 , обладающую тем свойством, что $\pi^\xi(U) \subset \pi^\eta(W_1)$ и $\tau((U \times U) \cap \mathcal{G}^\eta) \subset O$, где τ — отображение сдвига для ξ .]

Особое значение имеет случай, когда ξ представляет собой расслоение реперов $\tau_{\mathcal{X}}$, ассоциированное с касательным расслоением $\tau_{\mathcal{X}}$ над паракомпактным хаусдорфовым гладким многообразием $\mathcal{X}$, а $\mathcal{G} = \text{GL}(n; \mathbb{R})$, $\mathcal{H} = \text{GL}^+(n; \mathbb{R})$ (или, что равносильно, $\mathcal{G} = \text{O}(n)$, $\mathcal{H} = \text{SO}(n)$). В этом случае факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является группой второго порядка C_2 , а главное $\mathcal{H}$ -расслоение $(\xi, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ тривиально (а потому и локально тривиально). Следовательно, согласно утверждениям задач 12 и 13 расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ (а значит и расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$) тогда и только тогда редуцируется к группе $\text{SO}(n)$ (многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо), когда расслоение $\tau_{\mathcal{X}}/\text{SO}(n) = \tau_{\mathcal{X}}[C_2]$ обладает сечением.

Задача 15. Дайте прямое доказательство последнего утверждения. (Эта задача предназначена для пропустивших задачи 12 и 13.)

Как легко видеть, расслоение $\tau_{\mathcal{X}}[C_2]$ является главным C_2 -расслоением. Поэтому это расслоение тогда и только тогда обладает сечением, когда оно тривиально.

Пусть многообразие $\mathcal{X}$ связно.

Задача 16. Покажите, что C_2 -расслоение над связным многообразием $\mathcal{X}$ тогда и только тогда тривиально, когда его тотальное пространство связно (и, значит, это расслоение является накрытием).

Таким образом, для любого связного неориентируемого многообразия $\mathcal{X}$ мы сконструировали некоторое вполне определенное двулистное накрытие $\tau_{\mathcal{X}}[C_2] = (\tilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$.

Задача 17. Покажите, что тотальное пространство $\tilde{\mathcal{X}}$ накрытия $\tau_{\mathcal{X}}[C_2]$ является ориентируемым многообразием.

Подводя итоги, мы видим, что справедливо следующее предложение:

Предложение 1. Для любого неориентируемого связного многообразия $\mathcal{X}$ существует ориентируемое многообразие $\tilde{\mathcal{X}}$, двулистно накрывающее многообразие $\mathcal{X}$.

Задача 18. Докажите, что с точностью до изоморфизма накрытия $(\tilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ единственно.

Конечно, многообразие $\mathcal{X}$ (безразлично, ориентируемое или неориентируемое) может иметь много различных двулистных накрывающих многообразий. Если многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо, то все они ориентируемы (почему?), а если многообразие $\mathcal{X}$ неориентируемо, то среди них ориентируемо только одно.

Задача 19. Докажите последнее утверждение.

Прообраз векторного расслоения.— Гладкие векторные расслоения.— Поля горизонтальных подпространств.— Связности и их формы.— Прообраз связности.— Связности на комплексном расслоении и на его овеществлении.— Диагонализация связности.

Вернемся к векторным расслоениям (над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Напомним (см. определение 2 лекции 6), что морфизмом $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ векторного расслоения η в векторное расслоение ξ называется послойное непрерывное отображение $\mathcal{E}^\eta \rightarrow \mathcal{E}^\xi$, линейное на каждом слое. Каждый морфизм $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ индуцирует непрерывное отображение $\bar{\varphi}: \mathcal{B}^\eta \rightarrow \mathcal{B}^\xi$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\eta & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}^\xi \\ \pi^\eta \downarrow & & \downarrow \pi^\xi \\ \mathcal{B}^\eta & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{B}^\xi \end{array}$$

и для любой точки $b \in \mathcal{B}^\eta$ — линейное отображение

$$\varphi_b: \mathcal{F}_b^\eta \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\varphi}(b)}^\xi$$

слоя $\mathcal{F}_b^\eta$ расслоения η на слой $\mathcal{F}_{\bar{\varphi}(b)}^\xi$ расслоения ξ .

Особое значение имеют морфизмы $\varphi: \eta \rightarrow \xi$, для которых все отображения φ_b , $b \in \mathcal{B}^\eta$, являются изоморфизмами. К сожалению, хорошего общепринятого названия такие морфизмы не имеют. За отсутствием лучшего термина мы будем называть их *регулярными морфизмами*.

Согласно утверждению задачи 4 лекции 6 изоморфизмы векторных расслоений над $\mathcal{B}$ — это в точности регулярные морфизмы, являющиеся одновременно морфизмами над $\mathcal{B}$.

Отображения $\bar{\varphi}: \mathcal{B}^\eta \rightarrow \mathcal{B}^\xi$, индуцированные регулярными морфизмами, не подчинены, вообще говоря, никаким условиям.

Предложение 1. Для любого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и любого непрерывного отображения $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ существует векторное расслоение $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ над $\mathcal{B}'$ и регулярный морфизм $\varphi: \xi' \rightarrow \xi$, индуцирующий отображение f :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \end{array}$$

С точностью до изоморфизма расслоение ξ' определено единственным образом.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}'$ — подпространство произведения $\mathcal{D} \times \mathcal{B}'$, состоящее из таких точек (p, b') , $p \in \mathcal{D}$, $b' \in \mathcal{B}'$, что $\pi(p) = f(b')$, и пусть $\pi'(p, b') = b'$, $\varphi(p, b') = p$. Ясно, что отображения π' и φ непрерывны, а диаграмма (1) коммутативна (и, значит, φ является морфизмом расслоения $\xi' = (\mathcal{D}', \pi', \mathcal{B}')$ в расслоение $\xi = (\mathcal{D}, \pi, \mathcal{B})$, индуцирующим данное отображение f).

Далее, для любой точки $b' \in \mathcal{B}'$ слой $(\pi')^{-1}(b') = \mathcal{F}_{b'}$ расслоения ξ' над b' состоит из всех точек вида (p, b') , где p — произвольная точка слоя $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b = f(b')$, расслоения ξ над точкой b , и отображение $\varphi_{b'}: \mathcal{F}_{b'} \rightarrow \mathcal{F}_b$ представляет собой биективное отображение $(p, b') \rightarrow p$. Перенеся с помощью $\varphi_{b'}$ структуру линейного пространства из $\mathcal{F}_b$ в $\mathcal{F}_{b'}$, мы превратим слои $\mathcal{F}_{b'}$ в линейные пространства, отображения $\varphi_{b'}$ — в изоморфизмы, и, следовательно, морфизм φ — в регулярный морфизм.

Задача 1. Докажите, что

а. Для любого тривиализирующего атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ расслоения ξ пары $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$, где $U'_\alpha = f^{-1}U_\alpha$ и $\varphi'_\alpha(b', x) = (\varphi_\alpha(f(b'), x), x)$, $b' \in U'_\alpha$, $x \in K^n$, составляют тривиализирующий атлас расслоения ξ' .

б. Склеивающий коцикл

$$\{\varphi_{\beta\alpha}: U'_\alpha \cap U'_\beta \rightarrow \text{GL}(n; R)\}$$

атласа $\{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ связан со склеивающим коциклом

$$\{\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n; K)\}$$

атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ соотношением

$$(2) \quad \varphi_{\beta\alpha}^* = \varphi_{\beta\alpha} \circ f$$

(которое должно иметь место для любых α и β ; или, точнее, соотношением $\varphi_{\beta\alpha}^* = \varphi_{\beta\alpha} \circ f_{\beta\alpha}$, где $f_{\beta\alpha}$ — ограничение на $U'_\alpha \cap U'_\beta$ отображения f , рассматриваемое как отображение в $U_\alpha \cap U_\beta$).

В силу утверждения а задачи 1 расслоение ξ' локально тривиально и потому является векторным расслоением.

Наконец, если $\psi: \eta \rightarrow \xi$ — произвольный морфизм векторных расслоений, индуцирующий отображение f , то формула

$$\chi(q) = (\pi^\eta(q), \psi(q)), \quad q \in \mathcal{D}^\eta$$

будет, очевидно, определять морфизм $\chi: \eta \rightarrow \xi'$ над $\mathcal{B}'$, удовлетворяющий соотношению $\psi = \varphi \circ \chi$ и потому регулярный (т. е. являющийся изоморфизмом), когда регулярен морфизм ψ . Следовательно, с точностью до изоморфизма расслоение ξ' единственно. $\square$

Определение 1. Построенное расслоение ξ' называется *прообразом* расслоения ξ при отображении f и обозначается символом $f^*\xi$. Морфизм $\varphi: \xi' \rightarrow \xi$ обозначается символом f' .

[Согласно доказанному для любого морфизма $\psi: \eta \rightarrow \xi$ векторных расслоений, индуцирующего отображение f , существует единственный морфизм $\chi: \eta \rightarrow f^*\xi$ над $\mathcal{B}'$, удовлетворяющий соотношению

$$\psi = f' \circ \chi.$$

На языке теории категорий это означает, что коммутативный квадрат (1) является *универсальным квадратом* или — в другой терминологии — что расслоение $f^*\xi$ представляет собой *коамальгаму* диаграммы $\mathcal{B}' \xrightarrow{f'} \mathcal{B} \xleftarrow{\pi} \mathcal{C}$. (В литературе на русском языке можно встретить для $f^*\xi$ название «расслоенное произведение». Эта калька английского термина — уже не употребляющаяся и в английском языке — не очень удачна даже в рамках теории расслоений и уж совсем не годится для произвольных категорий.)]

Задача 2. Докажите, что для любых отображений $g: \mathcal{B}'' \rightarrow \mathcal{B}'$ и $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ расслоение $(f \circ g)^*\xi$ естественно изоморфно расслоению $g^*(f^*\xi)$ (и потому может быть с ним отождествлено).

Пусть $\mathcal{B}$ — гладкое m -мерное многообразие.

Определение 2. Векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ ранга n над многообразием $\mathcal{B}$ называется *гладким*, если существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что отвечающий ему матричный коцикл состоит из гладких отображений

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n; K), \quad K = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{H}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что над хаусдорфовым и паракомпактным гладким многообразием *каждое векторное расслоение изоморфно гладкому расслоению*.

Так как каждое открытое покрытие многообразия $\mathcal{B}$, вписанное в покрытие $\{U_\alpha\}$, является — по отношению к соответствующим ограничениям тривиализаций φ_α — тривиализирующим покрытием, для которого функции перехода либо постоянны (тождественно равны единице группы $GL(n; K)$), либо являются ограничениями функций

перехода $\varphi_{\alpha\beta}$, то без ограничения общности можно предполагать, что покрытие $\{U_\alpha\}$ из определения 2 состоит из координатных окрестностей многообразия $\mathcal{B}$. Более того, если нужно, то эти координатные окрестности можно считать связными (линейно) или даже диффеоморфными шару B^n .

Согласно формуле (2) для любого гладкого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ и любого гладкого отображения $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ индуцированное расслоение $f^*\xi$ также гладко.

В случае, когда пространство $\mathcal{E}$ является гладким многообразием, тривиализацию $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}|_{U_\alpha}$ векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ над открытым множеством $U_\alpha \subset \mathcal{B}$ мы будем называть *гладкой*, если она является диффеоморфизмом гладкого многообразия $U_\alpha \times K^n$ на гладкое многообразие $\mathcal{E}|_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ (где, конечно, K^n рассматривается при $K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ как вещественное многообразие размерности $2n$ или $4n$ соответственно).

Предложение 2. Для любого гладкого K -векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ ранга n над гладким m -мерным многообразием $\mathcal{B}$ пространство $\mathcal{E}$ обладает — очевидно, единственной — структурой гладкого $(m + dn)$ -мерного многообразия, $d = \dim_{\mathbb{R}} K$, по отношению к которой все тривиализации

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}|_{U_\alpha}$$

предусмотренного определением 2 тривиализирующего атласа являются гладкими тривиализациями.

Обратно, если для векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ пространство $\mathcal{E}$ является гладким многообразием U и существует тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, для которого все тривиализации φ_α гладки, то расслоение ξ гладко.

Таким образом, два возможных подхода к определению гладкого векторного расслоения приводят к одному и тому же результату.

Ключом к доказательству предложения 2 служит следующая лемма (ср. лемму 1 лекции 6):

Лемма 1. Отображение

$$\varphi: U \rightarrow GL(n; K)$$

гладкого многообразия U в группу $GL(n; K)$ тогда и только тогда гладко, когда гладко отображение

$$\Phi: U \times K^n \rightarrow K^n,$$

задаваемое формулой

$$\Phi(b, x) = \varphi(b)x, \quad b \in U, x \in K^n.$$

Доказательство. В силу локального характера свойства гладкости эту лемму достаточно доказать лишь для случая, когда U является координатной окрестностью π , значит, лишь для случая, когда U представляет собой открытое множество пространства R^m . Но в этом случае гладкость отображения φ означает, что элементы $\varphi_i(b)$ матрицы $\varphi(b)$, $b \in U$, являются гладкими функциями координат $b^1, \dots, b^m$ вектора b , а гладкость отображения Φ — что гладкими функциями координат $b^1, \dots, b^m, x^1, \dots, x^n$ векторов $b \in U$ и $x \in K^n$ являются координаты $\varphi_i(b)x^i$ вектора $\varphi(b)x$. Остается заметить, что эти два условия очевидным образом равносильны. $\square$

При $U = U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ отображение Φ связано с отображением

$$(3) \quad \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n$$

формулой

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, x) = (b, \Phi(b, x)), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, x \in K^n,$$

и потому гладко или не гладко одновременно с отображением $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$. Следовательно, векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, B)$ тогда и только тогда гладко, когда для него существует такой тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, что все отображения (3) гладки (и, значит, являются диффеоморфизмами).

Доказательство предложения 2. Второе утверждение предложения 2 немедленно вытекает из только что сделанного замечания. Поэтому нам надо доказать лишь первое утверждение. При этом, как уже было замечено выше, мы без ограничения общности можем предполагать, что каждая тривиализирующая окрестность U_α является также и координатной окрестностью.

Пусть $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^m$ — соответствующее координатное отображение и пусть

$$g_\alpha = (h_\alpha \times \text{id}) \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathcal{E}_{U_\alpha} \rightarrow R^m \times K^n = R^{m+n}$$

— отображение, действующее по формуле

$$g_\alpha(p) = (x, a), \\ p \in \mathcal{E}_{U_\alpha}, x \in R^m, a \in K^n = R^{dn},$$

где $x = h_\alpha(b)$ и $(b, a) = \varphi_\alpha(p)$, а $d = \dim_{\mathbb{R}} K$ (т. е. $d = 1$, если $K = \mathbb{R}$, и $d = 2$, если $K = \mathbb{C}$). Ясно, что g_α является гомеоморфным отображением открытого множества $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ на открытое множество $h_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{dn}$ пространства $\mathbb{R}^{n+dn}$, т. е., другими словами, пара $(\mathcal{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ является картой в $\mathcal{E}$, согласованной с топологией пространства $\mathcal{E}$.

Так как $\mathcal{E}_{U_\alpha} \cap \mathcal{E}_{U_\beta} = \mathcal{E}_{U_\alpha \cap U_\beta}$, то $\mathcal{E}_{U_\alpha} \cap \mathcal{E}_{U_\beta} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, и в этом случае

$$(g_\beta \circ g_\alpha^{-1})(x, a) = ((h_\beta \circ h_\alpha^{-1})x, \varphi_{\beta\alpha}(b)a)$$

для любой точки $(x, a) \in h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n = g_\alpha(\mathcal{E}_{U_\alpha} \cap \mathcal{E}_{U_\beta})$, где $b = h_\alpha^{-1}(x)$.

В координатах эта формула записывается в виде равенств

$$(4) \quad \begin{aligned} a^{i'} &= \varphi_{\beta\alpha}(x)_{i'}^{i'} a^i, & i, i' &= 1, \dots, n, \\ x^{k'} &= x^{k'}(x), \end{aligned}$$

где

a^i и x^k — координаты векторов a и x (заметим, что координаты a^i вещественны при $K = \mathbb{R}$ и комплексны при $K = \mathbb{C}$; координаты же x^k всегда вещественны);

$a^{i'}$ и $x^{k'}$ — координаты векторов $\varphi_{\beta\alpha}(b)a$ и $(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})x$; $\varphi_{\beta\alpha}(x)_{i'}^{i'}$ — функции, выражающие через локальные координаты элементы $\varphi_{\beta\alpha}(b)_{i'}^{i'}$ матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in GL(n; K)$;

$x^{k'}(x)$ — функции, выражающие в координатах диффеоморфизм $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$.

Это показывает, что отображения $g_\beta \circ g_\alpha^{-1}$ гладки (и, значит, являются диффеоморфизмами), т. е. карты $(\mathcal{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ и $(\mathcal{E}_{U_\beta}, g_\beta)$ согласованы.

Поскольку открытые множества $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ покрывают пространство $\mathcal{E}$, этим доказано, что карты $(\mathcal{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ составляют атлас, определяющий в $\mathcal{E}$ гладкость, согласованную с топологией. Каждая точка $p \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$ имеет в карте $(\mathcal{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ локальные координаты

$$(5) \quad a^1, \dots, a^n, x^1, \dots, x^m,$$

где $a^1, \dots, a^n$ — компоненты вектора $a = \varphi_{\beta\alpha}(p)$, а $x^1, \dots, x^m$ — координаты точки $b = \pi(p)$ в карте (U_α, h_α) . Те же числа (5) являются координатами на $U_\alpha \times K^n$ и отображение φ_α переводит каждую точку из $U_\alpha \times K^n$ в точку из $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ с теми же координатами (действует по равенству координат). Следовательно, отображение φ_α является диффеоморфизмом

Тем самым, предложение 2 полностью доказано. $\square$

Примером гладкого векторного расслоения (при $K = \mathbb{R}$) является касательное расслоение $\tau_{\mathcal{B}} = (T\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$; см. пример 2 лекции 5.

В дальнейшем, рассматривая гладкое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, мы всегда будем предполагать, что пространство $\mathcal{E}$ снабжено описанной структурой гладкого многообразия. Кроме того, не всегда указывая это явно, мы будем рассматривать лишь гладкие тривиализации $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}|_{U_\alpha}$.

Аналогично все морфизмы $\eta \rightarrow \xi$ между гладкими векторными расслоениями мы будем предполагать *гладкими*, т. е. являющимися гладкими отображениями $\mathcal{E}^\eta \rightarrow \mathcal{E}^\xi$.

Задача 3. Докажите, что

а. Для любого гладкого морфизма $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ гладких векторных расслоений индуцированное отображение $\varphi: \mathcal{E}^\eta \rightarrow \mathcal{E}^\xi$ является гладким отображением.

б. Для любого гладкого отображения $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ и любого гладкого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ морфизм

$$f^!: f^*\xi \rightarrow \xi$$

является гладким морфизмом.

Замечание 2. Можно доказать, что над паракомпактным хаусдорфовым многообразием изоморфные гладкие векторные расслоения гладко изоморфны (ср. замечание 1).

Заметим, что символы $x^1, \dots, x^m$ обозначают у нас не только часть локальных координат (5) в карте $(\mathcal{E}|_{U_\alpha}, g_\alpha)$, но и локальные координаты в карте (U_α, h_α) многообразия $\mathcal{B}$. В силу этого соглашения—при достаточной внимательности к недоразумению не приводящего—проекция π записывается в локальных координатах тавтологическими равенствами

$$(6) \quad x^k = x^k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Это доказывает, что

а. Проекция $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ гладкого векторного расслоения ξ представляет собой гладкое отображение, являющееся в каждой точке $p \in \mathcal{E}$ субмерсией.

б. Все слои $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, гладкого векторного расслоения являются гладкими dn -мерными подмногообразиями многообразия $\mathcal{E}$.

в. Для любой точки $p \in \mathcal{F}_b$ касательное подпространство $T_p \mathcal{F}_b$ слоя $\mathcal{F}_b$ совпадает с ядром $\text{Ker}(d\pi)_p$ линейного

идеального отображения

$$(d\pi)_p: T_p\mathcal{E} \rightarrow T_p\mathcal{B}, \quad b = \pi(p).$$

Более общим образом, мы можем рассматривать произвольное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (в смысле определения 1 лекции 1), для которого пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ являются многообразиями (размерностей $m+n$ и n соответственно), а отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — субмерсией. Мы будем называть такое расслоение *гладким*.

Ясно, что утверждения б и в справедливы для любого гладкого расслоения ξ .

На языке точных последовательностей (см. лекцию 4) утверждение в означает, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$ имеет место точная последовательность

$$(7) \quad 0 \rightarrow T_p\mathcal{F}_p \xrightarrow{(d\iota_p)} T_p\mathcal{E} \xrightarrow{(d\pi)_p} T_p\mathcal{B} \rightarrow 0,$$

где ι_p — вложение $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{E}$.

Заметим, что для векторного расслоения ξ член $T_p\mathcal{F}_p$ этой последовательности — обычно называемый *вертикальным подпространством* линеала $T_p\mathcal{E}$ — естественно отождествляется с линеалом $\mathcal{F}_p$.

Говорят, что на $(m+n)$ -мерном многообразии $\mathcal{E}$ задано *поле m -мерных подпространств H* , если каждой точке $p \in \mathcal{E}$ сопоставлено некоторое m -мерное подпространство H_p пространства $T_p(\mathcal{E})$.

Задача 4. Пусть V — открытое подмножество многообразия $\mathcal{E}$. Покажите, что для поля m -мерных подпространств H следующие условия равносильны:

а. На V существуют такие гладкие линейные дифференциальные формы $\theta^1, \dots, \theta^n$, что для любой точки $p \in V$ подпространство H_p является аннулятором кокасательных $\theta_p^1, \dots, \theta_p^n$:

$$(8) \quad H_p = \text{Ann}(\theta_p^1, \dots, \theta_p^n).$$

б. На V существуют такие гладкие векторные поля $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$, что для любой точки $p \in V$ подпространство H_p порождено векторами $X_p^{(1)}, \dots, X_p^{(m)}$:

$$(9) \quad H_p = [X_p^{(1)}, \dots, X_p^{(m)}].$$

Поле подпространств

$$(10) \quad H: p \mapsto H_p, \quad p \in \mathcal{E}$$

называется *гладким*, если существует открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ многообразия $\mathcal{E}$, над каждым элементом которого поле H удовлетворяет условиям а и/или б.

В случае, когда $\mathcal{E}$ является тотальным пространством гладкого (не обязательно векторного) расслоения ξ (и, значит, в каждой точке $p \in \mathcal{E}$ определено вертикальное подпространство $T_p \mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$) и для любой точки $p \in \mathcal{E}$ имеет место равенство

$$(11) \quad T_p \mathcal{E} = T_p \mathcal{F}_b \oplus H_p$$

(подпространство H_p дополнительно к подпространству $T_p \mathcal{F}_b$), поле (10) называется *полем горизонтальных подпространств*.

Так как $\text{Ker} d\pi_p = T_p \mathcal{F}_b$, то на каждом таком подпространстве H_p линейное отображение $d\pi_p$ является изоморфизмом.

Подчеркнем, что в выборе горизонтальных подпространств H_p имеется значительный произвол, т. е. на $\mathcal{E}$ существует много (даже гладких) полей (10), удовлетворяющих условию (11), в то время как вертикальные подпространства $T_p \mathcal{F}_b$ определяются единственным образом.

Когда задано поле H горизонтальных подпространств, то каждое векторное поле X на $\mathcal{E}$ единственным образом представляется в виде

$$(12) \quad X = X^V + X^H,$$

где X^V и X^H — такие поля на $\mathcal{E}$, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$ вектор X_p^V вертикален, а вектор X_p^H горизонтален.

Задача 5. Докажите, что

а. Поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда гладко, когда для любого гладкого векторного поля X на $\mathcal{E}$ поля X^V и X^H также гладки.

б. Если поле H гладко, то поле X тогда и только тогда гладко, когда гладки поля X^V и X^H .

Как правило, мы будем задавать поля горизонтальных подпространств формулами вида (8), принимая за V открытые множества вида $\mathcal{E}_U$, где $U \subset \mathcal{X}$. Допуская определенную терминологическую вольность, мы будем называть такое поле *аннулятором форм* $\theta^1, \dots, \theta^n$ над U и будем писать

$$H = \text{Ann}(\theta^1, \dots, \theta^n) \text{ над } U.$$

По определению это означает, что для каждой точки $p \in \mathcal{E}_U$ подпространство H_p состоит из таких векторов

$A \in T_p A$, что

$$(13) \quad \theta'_i(A) = 0 \quad \text{для любого } i = 1, \dots, n,$$

Чтобы такое поле было полем горизонтальных подпространств, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in \mathcal{C}_U$ ограничения ковекторов $\theta^1_p, \dots, \theta^n_p$ на вертикальном подпространстве $T_p \mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$, были линейно независимы, т. е. чтобы для вертикального вектора $A \in T_p \mathcal{F}_b$ равенства (11) выполнялись только при $A = 0$.

Кроме того, формы $\theta^1, \dots, \theta^n$ и $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^n$ тогда и только тогда задают одно и то же поле H над U , т. е. в любой точке $p \in \mathcal{C}_U$ удовлетворяют соотношению

$$\text{Ann}(\theta^1_p, \dots, \theta^n_p) = \text{Ann}(\bar{\theta}^1_p, \dots, \bar{\theta}^n_p),$$

когда ковекторы $\theta^1_p, \dots, \theta^n_p$ линейно эквивалентны ковекторам $\bar{\theta}^1_p, \dots, \bar{\theta}^n_p$, т. е. когда существуют такие функции

$$c^j_i: p \mapsto c^j_i(p), \quad p \in \mathcal{C}_U,$$

где $i, j = 1, \dots, n$, что

$$\bar{\theta}^j = c^j_i \theta^i \quad \text{на } \mathcal{C}_U.$$

Предположим теперь, что рассматриваемое гладкое расслоение $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ является векторным и что для него выбран и зафиксирован тривиализирующий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, состоящий из гладких тривиализаций и такой, что все тривиализирующие окрестности U_α являются одновременно координатными окрестностями в многообразии $\mathcal{B}$.

Согласно сказанному выше тривиализации $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}_{U_\alpha}$ и координатные отображения $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяют на $\mathcal{C}_{U_\alpha}$ локальные координаты (5), а значит и соответствующие координатные векторные и ковекторные поля

$$\frac{\partial}{\partial a^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a^n}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$da^1, \dots, da^n, \quad dx^1, \dots, dx^m.$$

При этом, как непосредственно следует из формулы (4), в каждой точке $p \in \mathcal{C}_{U_\alpha}$ выполняются равенства

$$(d\pi_p) \left(\frac{\partial}{\partial a^i} \right)_p = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(d\pi_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_b, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $b = \pi(p)$. Следовательно, векторы $\left(\frac{\partial}{\partial a^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial a^n}\right)_p$ образуют базис вертикального подпространства $\text{Ker } d\pi_p = T_p \mathcal{F}_b$ и, значит, ковекторы $da_p^1, \dots, da_p^n$ (или, точнее, их ограничения на $T_p \mathcal{F}_b$) — базис сопряженного пространства $T_p^* \mathcal{F}_b$.

Поэтому, если

$$(14) \quad \theta^i = f_j^i da^j + g_k^i dx^k \quad \text{на } \mathcal{E}_{U_\alpha},$$

где $i, j = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, m$, то ограничения ковекторов θ_p^i на $T_p \mathcal{F}_b$ тогда и только тогда линейно независимы для любой точки $p \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$, когда матрица $\|f_j^i\|$ невырождена на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$.

Предложение 3. Для любого поля H горизонтальных подпространств на координатной окрестности $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ существуют такие формы

$$(15) \quad \theta^{(\alpha)}_i = da^i + e_k^i dx^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m,$$

где e_k^i — некоторые функции на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, что

$$H = \text{Ann} \left(\theta^{(\alpha)}_1, \dots, \theta^{(\alpha)}_n \right) \text{ над } U_\alpha.$$

Этими условиями формы (15) характеризуются единственным образом.

Доказательство. Существование. Пусть поле H является на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ аннулятором форм (14). Тогда, как мы видели, матрица $\|f_j^i\|$, состоящая из функций f_j^i , невырождена в каждой точке $p \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$. Пусть $\|\tilde{f}_j^i\|$ — обратная матрица. Формы $\tilde{f}_j^i \theta^j$ задают то же поле H и имеют вид (15).

Единственность. Достаточно заметить, что формы $\theta^i = c_j^{(\alpha)} \theta^j$ тогда и только тогда имеют тот же вид (15), когда $c_j^i = \delta_j^i$. $\square$

Очевидно, что поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда гладко, когда для каждой окрестности U_α формы (15), т. е. функции e_k^i , гладки в $\mathcal{E}_{U_\alpha}$.

Среди всех гладких полей H горизонтальных подпространств особое значение имеют поля, для которых коэффициенты e_k^i форм (15) линейно зависят от $a^1, \dots, a^n$, т. е. имеют вид

$$e_k^i = \Gamma_{k,j}^{(\alpha)} a^j,$$

где $\Gamma_{kj}^{(\alpha)}$ — некоторые гладкие функции от $x^1, \dots, x^n$ (т. е., иными словами, гладкие функции на координатной окрестности U_α).

Определение 3. Гладкое поле

$$H: p \mapsto H_p, \quad p \in \mathcal{E},$$

горизонтальных подпространств называется *связностью* на гладком векторном расслоении ξ , если для каждой тривиализирующей координатной окрестности U_α задающие это поле формы (15) имеют вид

$$\theta^i = da^i + \Gamma_{kj}^{(\alpha)} a^j dx^k, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\Gamma_{kj}^{(\alpha)}$ — некоторые гладкие функции на U_α .

Функции $\Gamma_{kj}^{(\alpha)}$ называются *коэффициентами связности* H в окрестности U_α . [Порядок нижних индексов k и j в обозначении коэффициентов связности в литературе еще окончательно не установился. Многие авторы пишут их в обратном порядке.]

Целесообразно ввести в рассмотрение линейные дифференциальные формы

$$\omega_j^{(\alpha)} = \Gamma_{kj}^{(\alpha)} dx^k \quad \text{на } U_\alpha.$$

Эти формы однозначно определяют связность H на U_α (и однозначно ею определяются). Они называются *формами связности* H на U_α . Их удобно располагать в матрицу

$$\omega = \|\omega_j^{(\alpha)}\|, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если формы $\omega_j^{(\alpha)}$ естественно [образом рассматривать как формы на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, то будет иметь место равенство

$$(16) \quad \theta^i = da^i + \omega_j^{(\alpha)} a^j \quad \text{на } \mathcal{E}_{U_\alpha}.$$

Некоторые авторы называют формы (16) *формами связности* H на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$.

[Таким образом, формы $\omega_j^{(\alpha)}$ и θ^i друг друга взаимно определяют. Преимущество форм $\omega_j^{(\alpha)}$ состоит в том, что они определены на открытых множествах многообразия $\mathcal{E}$.]

В дальнейшем для сокращения формул мы будем, как правило, опускать верхний значок (α) и, например, вместо ω_{α}^j будем писать просто ω_j^i . Когда же придется одновременно рассматривать две окрестности U_α и U_β , то значок (β) мы будем заменять штрихами у координат и вместо, скажем, ω_j^i будем писать $\omega_j^{i'}$. Это согласуется с принятым выше (см., например, формулы (4)) обозначением локальных координат в $\mathcal{E}_{U_\beta}$ символами $a^{i'}$ и $x^{k'}$.

Через $\varphi_i^{i'}(x) = \varphi_i^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ или просто $\varphi_i^{i'}$ мы будем обозначать элементы матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, рассматриваемые как функции локальных координат $x^1, \dots, x^n$ карты (U_α, h_α) , а через $\varphi_j^{j'}(x) = \varphi_j^{j'}(x^1, \dots, x^n)$ или просто $\varphi_j^{j'}$ — элементы обратной матрицы $\varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, рассматриваемые как функции локальных координат $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ карты (U_β, h_β) .

Предложение 4. Пусть для каждого α на окрестности U_α задано n -м гладких функций Γ_{kj}^i . Эти функции тогда и только тогда являются коэффициентами некоторой связности H , когда для любых α и β на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ имеют место равенства

$$(17) \quad \Gamma_{k'j'}^{i'} = \varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{kj}^i + \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_j^{j'}}{\partial x^{k'}}.$$

Доказательство. На пересечении $\mathcal{E}_{U_\alpha} \cap \mathcal{E}_{U_\beta}$ локальные координаты a^i, x^k и $a^{i'}, x^{k'}$ связаны соотношениями вида

$$\begin{aligned} a^i &= \varphi_i^{i'}(x) a^{i'}, & i, i' &= 1, \dots, n, \\ x^k &= x^k(x'), & k &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

(ср. формулы (4); мы теперь предпочли выразить координаты на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ через координаты на $\mathcal{E}_{U_\beta}$). Поэтому

$$\begin{aligned} da^i &= \frac{\partial \varphi_i^{i'}}{\partial x^{k'}} a^{i'} dx^{k'} + \varphi_i^{i'} da^{i'}, & i, i' &= 1, \dots, n, \\ dx^k &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'}, & k, k' &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Следовательно, любая форма на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, имеющая вид

$$\theta^i = da^i + \Gamma_{kj}^i a^j dx^k,$$

выражается на $\mathcal{E}_{U_\alpha} \cap \mathcal{E}_{U_\beta}$ через дифференциалы $da^{i'}$ и $dx^{k'}$

по формуле

$$\theta^i = \varphi_i^j da^{i'} + \left(\Gamma_{kj}^i \varphi_j^{i'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial \varphi_j^{i'}}{\partial x^{k'}} \right) a^{i'} dx^{k'}.$$

Отсюда следует, что

$$(18) \quad \varphi_i^{i'} \theta^i = da^{i'} + \varphi_i^{i'} \left(\varphi_j^{i'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{kj}^i + \frac{\partial \varphi_j^{i'}}{\partial x^{k'}} \right) a^{i'} dx^{k'}.$$

Функции Γ_{kj}^i однозначно определяют на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ формы θ^i и, значит, некоторую связность H_α . Аналогично, функции $\Gamma_{k'j'}^i$ определяют на U_β связность H_β . При этом, связности H_α тогда и только тогда склеиваются в единую связность H , определенную на всем $\mathcal{E}$, когда для любых α и β имеет место равенство

$$(19) \quad H_\alpha = H_\beta \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta.$$

Поскольку же формы (18) определяют на $U_\alpha \cap U_\beta$ ту же связность H_α , что и формы θ^i , равенство (19) имеет место тогда и только тогда, когда формы (18) совпадают на $U_\alpha \cap U_\beta$ с формами

$$\theta^{i'} = da^{i'} + \Gamma_{k'j'}^i a^{i'} dx^{k'},$$

определяющими связность H_β . Это, очевидно, доказывает предложение 4. $\square$

Поскольку $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = dx^k$ и $\frac{\partial \varphi_j^{i'}}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = d\varphi_j^{i'}$, формулу (17) можно переписать в следующем более простом виде:

$$(17') \quad \omega_j^{i'} = \varphi_i^{i'} \varphi_j^{i'} \omega_j^i + \varphi_i^{i'} d\varphi_j^{i'}.$$

В матричных обозначениях эти соотношения имеют вид

$$(17'') \quad \omega' = \varphi^{-1} \omega \varphi + \varphi^{-1} d\varphi,$$

т. е. — если мы вернемся к исходным систематическим обозначениям — вид

$$(17''') \quad \omega = \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \omega \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1} d\varphi_{\beta\alpha}.$$

В виде (17'') или (17''') их и нужно запоминать.

Пусть $\varphi: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ — гладкий морфизм K -векторного расслоения $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ в K -векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$. Тогда для любой точки $b' \in \mathcal{B}'$ имеет место

коммутативная диаграмма гладких отображений

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{\mathcal{B}'} & \rightarrow & \mathcal{E}' & \rightarrow & \mathcal{B}' \\ \varphi_{\mathcal{B}'} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{F}_{\mathcal{B}} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{B}, \end{array} \quad b = f(b').$$

где $f = \bar{\varphi}$ — отображение $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$, индуцированное морфизмом φ . Следовательно, для любой точки $p' \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & T_{p'}\mathcal{F}_{\mathcal{B}'} & \rightarrow & T_{p'}\mathcal{E}' & \rightarrow & T_{b'}\mathcal{B}' \rightarrow 0 \\ & & (d\varphi_{\mathcal{B}'})_{p'} \downarrow & & (d\varphi)_p \downarrow & & (df)_{b'} \downarrow \\ 0 & \rightarrow & T_p\mathcal{F}_{\mathcal{B}} & \rightarrow & T_p\mathcal{E} & \rightarrow & T_b\mathcal{B} \rightarrow 0, \quad p = \varphi(p'), \end{array}$$

линейных пространств и их линейных отображений, обладающая тем свойством, что обе ее строки являются точными последовательностями (левые отображения мономорфны, правые эпиморфны и образ левого отображения совпадает с ядром правого).

Предположим, что в расслоении ξ задана связность H .

Задача 6. Докажите, что

а. Для любой точки $p' \in \mathcal{E}'$ в пространстве $T_{p'}\mathcal{E}'$ существует одно и только одно подпространство $H_{p'}$, обладающее тем свойством, что

$$T_{p'}\mathcal{E}' = T_{p'}\mathcal{F}_{\mathcal{B}'} \oplus H_{p'},$$

и изоморфно отображающееся посредством отображения $(d\varphi)_{p'}$ на подпространство $H_p \subset T_p\mathcal{E}$.

б. Подпространства $H_{p'}$ составляют на $\mathcal{E}'$ связность H' .

в. Для любой тривиализирующей окрестности $U \subset \mathcal{B}$ формами связности H' над окрестностью $f^{-1}U \subset \mathcal{B}'$ служат формы $f^*\omega$, где ω — формы связности H над окрестностью U .

Связность H на расслоении ξ' называется *прообразом* связности H при морфизме $\varphi: \xi' \rightarrow \xi$ и обозначается символом φ^*H . В случае, когда $\xi' = f^*\xi$ и $\varphi = f'$, связность φ^*H обозначается символом f^*H и называется *прообразом* связности H при отображении $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$.

Задача 7. Докажите, что для любых гладких отображений $g: \mathcal{B}'' \rightarrow \mathcal{B}$ и $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ связность $(f \circ g)^*H$ на расслоении $(f \circ g)^*\xi = g^*(f^*\xi)$ (см. задачу 2) совпадает со связностью $g^*(f^*H)$.

Понятие прообраза связности полезно, например, для характеристики связностей на овеществлении комплексного векторного расслоения ξ , возникающих из связностей на ξ .

Пусть ξ — комплексное векторное расслоение ξ и ξ_R — его овеществление. (Заметим, что по определению расслоение ξ гладко тогда и только тогда, когда гладко расслоение ξ_R .)

Ясно, что любая связность H на ξ является связностью на ξ_R , и задача состоит в том, чтобы охарактеризовать связности на ξ_R , являющиеся в этом смысле связностями на ξ .

С этой целью мы рассмотрим на ξ_R оператор комплексной структуры

$$I: \xi_R \rightarrow \xi_R$$

(см. лекцию 6). Так как этот оператор является автоморфизмом расслоения ξ_R над $\mathcal{B}$, то для любой связности H на ξ_R определена связность I^*H (также являющаяся связностью на ξ_R). С другой стороны, так как оператор I является, очевидно, гладким отображением, то для любой точки $p \in \mathcal{B}$ определен его дифференциал

$$(dI)_p: T_p\mathcal{B} \rightarrow T_p\mathcal{B},$$

являющийся на вертикальном подпространстве

$$T_p\mathcal{F}_b^{\xi_R} = (T_p\mathcal{F}_b)_R = (\mathcal{F}_b)_R, \\ b = \pi(p), \quad \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b^{\xi},$$

оператором $I_b: (\mathcal{F}_b)_R \rightarrow (\mathcal{F}_b)_R$ комплексной структуры на $(\mathcal{F}_b)_R$.

Задача 8. Докажите, что для связности H на ξ_R следующие условия равносильны:

- а. Связность H является связностью на ξ .
- б. Имеет место равенство

$$I^*H = H.$$

- в. Для любой точки $p \in \mathcal{B}$

$$H_p = (dI)_p H_p.$$

Задача 9. Пусть ω — матрица форм связности H на расслоении ξ (над некоторой тривиализирующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$), а ω_R — матрица форм той же связности, но рассматриваемой как связность на ξ_R . Выразите формы ω_R и ω друг через друга. [Указание. Матрица ω имеет размер $n \times n$ и состоит из линейных дифференциальных форм с комплексными коэффициентами, а матрица ω_R имеет размер $2n \times 2n$ и состоит из форм с вещественными коэффициентами.]

В лекции 21 нам понадобится следующий частный случай конструкции прообраза.

Пусть для любого $s \in \mathcal{B}$ в расслоении ξ задана связность H_s . На каждой тривиализирующей координатной окрестности $U \subset \mathcal{B}$ коэффициенты Γ_k^i связности H_s являются функциями от s и от локальных координат $x = (x^1, \dots, x^m)$, т. е. функциями точки $(s, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{R}^m = \mathcal{R}^{m+1}$. В случае, когда для любой окрестности U функции Γ_k^i являются гладкими функциями от (s, x) , семейство $\{H_s, s \in \mathcal{B}\}$ связностей H_s называется *гладким*.

Задача 10. Пусть $\xi \times I = \{\mathcal{C} \times I, \pi \times \text{id}, \mathcal{B} \times I\}$. Покажите, что

а. Расслоение $\xi \times I$ является векторным расслоением ранга n , изоморфным расслоению $(\text{pr})^* \xi$, где pr — проекция $\mathcal{B} \times I \rightarrow \mathcal{B}$, $(b, s) \mapsto b$.

б. Любое гладкое семейство $\{H_s\}$ связностей на ξ естественным образом задает связность на $\xi \times I$ (которую мы будем обозначать тем же символом $\{H_s\}$).

в. Для любого $s_0 \in I$ имеют место равенства

$$i_{s_0}^*(\xi \times I) = \xi \quad \text{и} \quad i_{s_0}^*\{H_s\} = H_{s_0},$$

где $i_{s_0}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times I$ — вложение $b \mapsto (b, s_0)$.

Для каждой связности H на ξ связность $\text{pr}^* H$ является связностью $\{H_s\}$, где $H_s = H$ при всех $s \in \mathcal{R}$.

Заметим, что связности вида $\{H_s\}$ отнюдь не исчерпывают всех связностей на $\xi \times I$.

Задача 11. Покажите, что связность $\text{App}(\theta^1, \dots, \theta^n)$ на $\xi \times I$ тогда и только тогда имеет вид $\{H_s\}$, когда формы $\theta^1, \dots, \theta^n$ не зависят от ds .

Пусть теперь $\{H'_s\}$ — гладкое семейство связностей на расслоении $\xi \times I$ и пусть Δ — отображение $\mathcal{B} \times I \rightarrow \mathcal{B} \times I \times I$, определенное формулой

$$\Delta(b, t) = (b, t, t), \quad b \in \mathcal{B}, t \in I.$$

Тогда, интерпретируя $\{H'_s\}$ как связность на $\xi \times I \times I$, мы можем построить связность $\Delta^* \{H'_s\}$ на $\xi \times I$. Эту связность мы будем обозначать символом $\{H'_s\}_{s=t}$ и будем называть ее *диагонализацией* связности $\{H'_s\}$.

Задача 12. Докажите, что для любого $t \in I$

$$(18) \quad i_t^* \{H'_s\}_{s=t} = i_t^* H'_t.$$

[Указание. Ср. утверждение в задаче 10.]

Горизонтальные кривые. — Ковариантные производные сечений. — Ковариантное дифференцирование вдоль кривой. — Связности как ковариантные дифференцирования. — Линейные отображения модулей сечений. — Связности на метризованных расслоениях.

Пусть $\pi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — гладкое векторное расслоение со связностью H .

Определение 1. Гладкая кривая $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ на многообразии $\mathcal{E}$, где I — некоторый отрезок оси $\mathbb{R}$ (для определенности можно, например, считать, что $I = [1, 1]$), называется *горизонтальной*, если для любого $t \in I$ ее касательный вектор $\dot{v}(t)$ принадлежит подпространству $H_{v(t)}$. (Дифференцирование по t мы здесь и в дальнейшем обозначаем точкой.)

В локальных координатах

$$(1) \quad a^1, \dots, a^n, x^1, \dots, x^m$$

карты $(\mathcal{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ (см. лекцию 10) каждая кривая v имеет — при условии, что $v(t) \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$ при всех $t \in I$ — параметрические уравнения вида

$$(2) \quad a^i = a^i(t), \quad x^k = x^k(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

где $a^i(t)$ и $x^k(t)$ — некоторые гладкие функции на I . Ее касательный вектор $\dot{v}(t)$ имеет координаты

$$\dot{a}^1(t), \dots, \dot{a}^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^m(t),$$

а условие горизонтальности $\dot{v}(t) \in H_{v(t)}$ (означающее, что выполнены равенства $\theta_{v(t)}^i(\dot{v}(t)) = 0$, $1 \leq i \leq n$, где $\theta^1, \dots, \theta^n$ — формы связности H на $\mathcal{E}_{U_\alpha}$) приобретает вид

$$(3) \quad \dot{a}^i(t) + \Gamma_{kl}^i(x(t)) \dot{x}^k(t) a^l(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$.

Таким образом, кривая v с параметрическими уравнениями (2) тогда и только тогда горизонтальна, когда тождественно по t выполнены соотношения (3).

В соответствии с общим определением 3 лекции 4 кривая $u = \pi \circ v$ на многообразии $\mathcal{B}$ называется *проекцией кривой* v , а кривая v на многообразии $\mathcal{E}$ — *поднятием* (или *лифтом*)

кривой u . Говорят также, что кривая v *накрывает* кривую u . Иногда полезно представлять себе кривую v как векторное поле на кривой u , сопоставляющее каждой точке $u(t)$ этой кривой вектор $v(t)$ линеала $\mathcal{F}_{v(t)}$, т. е., короче, как ξ -векторное поле на u . Горизонтальная кривая v , рассматриваемая как поле на u , называется *полем параллельных векторов на u* (относительно связности H).

В локальных координатах $x^1, \dots, x^m$ на U_α кривая u имеет параметрические уравнения

$$(4) \quad x^k = x^k(t), \quad 1 \leq k \leq m,$$

так что аналитически переход к кривой u состоит в отбрасывании первых n уравнений (2), и наоборот, переход к накрывающей кривой v состоит в добавлении к m уравнениям (4) дополнительных n уравнений

$$(5) \quad a^i = a^i(t), \quad 1 \leq i \leq n,$$

где $a^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, — вообще говоря, произвольные гладкие $\mathbb{K}$ -значные функции на I . В интерпретации кривой v как ξ -векторного поля на u функции $a^i(t)$ называются его *компонентами* (в данной системе локальных координат).

С этой точки зрения соотношения (3) представляют собой при данной кривой u с уравнениями (4) систему линейных дифференциальных уравнений (вообще говоря, с переменными коэффициентами $\Gamma_{kj}^i(x(t)) \dot{x}^k(t)$ для дополнительных функций (5)). Поэтому, задав для некоторой точки $t_0 \in I$ точку p_0 пространства $\mathcal{E}$, проектирующуюся в точку $b_0 = u(t_0)$, т. е. принадлежащую слою $\mathcal{F}_{b_0}$ расслоения ξ , мы — в предположении, что $u(t) \in U_\alpha$ для всех $t \in I$ — получим в силу теоремы о существовании и единственности решений линейных дифференциальных уравнений единственную горизонтальную кривую $v: I \rightarrow \mathcal{E}$, проектирующуюся в кривую u и такую, что $v(t_0) = p_0$ (и $v(t) \in \mathcal{E}_{U_\alpha}$ для всех $t \in I$).

Если же условие $u(t) \in U_\alpha$ для всех $t \in I$ не выполнено, то мы можем разбить отрезок I на конечное число отрезков, на каждом из которых это условие уже имеет место (конечно, при своем α), и следовательно, накрывающая горизонтальная кривая существует. Вместе эти кривые составляют (очевидно, гладкую) кривую v , накрывающую всю кривую u (и такую, что $v(t_0) = p_0$). В предположении, что многообразие $\mathcal{E}$ хаусдорфово, эта кривая будет, как легко видеть, единственна. (Ср. теорему о единственности интегральных кривых векторного поля в лекции III.17.)

Поскольку многообразие $\mathcal{E}$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда хаусдорфово многообразие $\mathcal{B}$, этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. Если многообразие $\mathcal{B}$ хаусдорфово, то для любой гладкой кривой $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ любой точки $t_0 \in I$ и любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 = u(t_0)$, существует единственная горизонтальная кривая $v: I \rightarrow \mathcal{E}$, накрывающая кривую u и такая, что $v(t_0) = p_0$. $\square$

При $I = I$ и $t_0 = 0$ это дает нам некоторое отображение

$$\text{Cocyl}_{\Gamma\mathcal{E}} \pi \rightarrow \mathcal{P}_{\Gamma\mathcal{E}}(\mathcal{E})$$

подпространства $\text{Cocyl}_{\Gamma\mathcal{E}} \pi$ пространства $\text{Cocyl} \pi$, состоящего из пар (p_0, u) , $\pi(p_0) = u(0)$, для которых путь u гладок, в пространство $\mathcal{P}_{\Gamma\mathcal{E}}(\mathcal{E})$ всех гладких путей на $\mathcal{E}$, являющееся сечением отображения

$$\mathcal{P}_{\Gamma\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Cocyl}_{\Gamma\mathcal{E}} \pi, \quad v \mapsto (v(0), \pi \circ v),$$

т. е. представляющее собой «гладкий» аналог связности в смысле Гуревича (см. лекцию 1). Это объясняет термин «связность» применительно к H .

К изучению геометрических свойств горизонтальных накрывающих кривых мы вернемся в лекции 18, а пока применим эти кривые к задаче об инвариантном определении связности, не использующем тривиализирующих координатных окрестностей.

Сечение

$$s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$$

гладкого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (или, в другой терминологии, ξ -векторное поле на $\mathcal{B}$) называется *гладким*, если оно представляет собой гладкое отображение многообразия $\mathcal{B}$ в многообразие $\mathcal{E}$. В отличие от лекции 6 мы будем теперь обозначать символом $\Gamma\xi$ множество лишь гладких сечений. Оно является линейным пространством над полем K и модулем над алгеброй $F_K \mathcal{B}$ гладких K -значных функций на $\mathcal{B}$.

Задача 1. Докажите, что тривиализация $\varphi: U \times K^n \rightarrow \mathcal{E}_U$ расслоения ξ над открытым множеством $U \subset \mathcal{B}$ тогда и только тогда является гладкой тривиализацией, когда отвечающий ей базис $s_1, \dots, s_n$ модуля всех непрерывных сечений над U состоит из гладких сечений.

Замечание 1. Так как $\pi \circ s = \text{id}$, то как само отображение s , так и его дифференциал $(ds)_b$ в каждой точке

$b \in \mathcal{B}$ являются инъективными отображениями. Это означает, что для любого гладкого сечения $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ множество $s(\mathcal{B})$ является подмногообразием многообразия $\mathcal{E}$. Подмногообразия вида $s(\mathcal{B})$ характеризуются, как легко видеть, тем, что проекция π диффеоморфно отображает их на многообразие $\mathcal{B}$ (такие подмногообразия называются обычно *секущими поверхностями* расслоения ξ). При неформальных рассмотренных сечения и секущие поверхности можно отождествлять.

В случае касательного расслоения $\tau_{\mathcal{B}} = (\pi, \mathcal{B})$ сечения представляют собой не что иное, как векторные поля на $\mathcal{B}$. Согласно лекции III.16 модуль $\Gamma_{\tau_{\mathcal{B}}}$ векторных полей на $\mathcal{B}$ обозначается символом $\alpha\mathcal{B}$.

Напомним (см. лекцию III.17), что кривая $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ называется *интегральной кривой* векторного поля $X \in \alpha\mathcal{B}$, если

$$\dot{u}(t) = X_{u(t)} \quad \text{для любого } t \in I.$$

Согласно теореме 1 лекции III.17 для любой точки $b \in \mathcal{B}$ и любого векторного поля X существует интегральная кривая $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ поля X , определенная на некотором интервале I оси $\mathbb{R}$, содержащем точку 0, и такая, что $u(0) = b$. При этом если многообразие X хаусдорфово, то любые две такие кривые совпадают на общей части их областей определения.

Пусть теперь $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольное гладкое сечение расслоения ξ и пусть $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ — горизонтальная кривая, накрывающая интегральную кривую u поля X и удовлетворяющая соотношению

$$v(0) = s(b).$$

Тогда для любого $t \in I$ в слое $\mathcal{F}_{u(t)}$ расслоения будут определены два вектора $s(u(t))$ и $v(t)$, а значит и $v(t) \neq 0$ и вектор

$$(6) \quad \frac{s(u(t)) - v(t)}{t}.$$

Хотя при различных t векторы (6) принадлежат, вообще говоря, различным линейным пространствам $\mathcal{F}_{u(t)}$, но все же имеет смысл говорить об их пределе

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(u(t)) - v(t)}{t}.$$

Этот предел принадлежит слою $\mathcal{F}_{u(0)} = \mathcal{F}_b$ и обозначается символом $(\nabla_X s)(b)$.

Поскольку точка b была произвольной точкой многообразия $\mathcal{B}$, эта конструкция дает нам отображение

$$\nabla_X s: b \mapsto (\nabla_X s)(b)$$

из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{E}$, являющееся, по построению, сечением расслоения ξ .

Определение 2. Сечение $\nabla_X s$ называется *ковариантной производной сечения s по векторному полю X* (в данной связности H).

Первый вопрос, возникающий в связи с сечением $\nabla_X s$, — это вопрос о его гладкости. Мы покажем, что ответ на этот вопрос утвердителен (точнее, что класс гладкости сечения $\nabla_X s$ на единицу ниже класса гладкости сечения s), вычислив в явном виде сечение $\nabla_X s$ в координатах.

Пусть U — произвольная координатная и одновременно тривиализирующая окрестность точки b в многообразии $\mathcal{B}$. Тривиализация $\varphi: U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}_U$ расслоения ξ над U задает (см. лекцию 6) базис

$$(8) \quad s_1, \dots, s_n$$

$F_K U$ -модуля $\Gamma(\xi|_U)$ (для которого $s_i(b) = \varphi(b, e_i)$, $i = 1, \dots, n$), а координатный диффеоморфизм $h: U \rightarrow \mathbb{K}^m$ — базис

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad m = \dim \mathcal{B},$$

$F_R U$ -модуля αU . Пусть s^i , $i = 1, \dots, n$, — координаты сечения s (или, точнее, его ограничения $s|_U$) в базисе (8), а X^k , $k = 1, \dots, m$, — координаты поля X (т. е. его ограничения $X|_U$) в базисе (9):

$$s = s^i s_i, \quad X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Пусть, далее, $x^k = x^k(t)$, $k = 1, \dots, m$, — параметрические уравнения интегральной кривой $u: I \rightarrow \mathcal{B}$, а

$$a^i = a^i(t), \quad x^k = x^k(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m,$$

— параметрические уравнения ее горизонтального поднятия $v: I \rightarrow \mathcal{E}$. (Без ограничения общности мы можем, конечно, предполагать, что $u(t) \in U$ для любого t .) Заметим, что числа $a^i(t)$ выражаются формулой

$$a^i(t) = s^i(x(t)),$$

где, как всегда, $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$, и удовлетворяют соотношению $v(t) = a^i(t) s_i(u(t))$, т. е. являются координа-

тами вектора $v(t) \in \mathcal{F}_{a(t)}$ в базисе $s_1(u(t)), \dots, s_n(u(t))$ линеала $\mathcal{F}_{a(t)}$. По определению

$$\dot{x}^k(t) = X^k(x(t))$$

для любого $k = 1, \dots, m$ и

$$a^i(t) + \Gamma_{kj}^i(x(t)) a^j(t) \dot{x}^k(t) = 0,$$

т. е.

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma_{kj}^i(x(t)) a^j(t) X^k(x(t)) = 0$$

для любого $i = 1, \dots, n$. При этом вектор (6) линеала $\mathcal{F}_{a(t)}$ будет иметь в базисе $s_1(u(t)), \dots, s_n(u(t))$ координаты

$$\frac{s_i(x(t)) - a^i(t)}{t} = \frac{s^i(x(t)) - a_0^i}{t} - \frac{a^i(t) - a_0^i}{t},$$

где $a_0^i = a^i(0) = s^i(x(0))$ — координаты точки $s(b)$ линеала $\mathcal{F}_b$. Поэтому предел (7) будет иметь координаты

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s^i(x(t)) - s^i(x(0))}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^i(t) - a_0^i}{t} = \\ &= \frac{\partial s^i}{\partial x^k}(x(0)) \dot{x}^k(0) - \dot{a}^i(0) = \\ &= \left[\frac{\partial s^i}{\partial x^k} X^k + \Gamma_{kj}^i s^j X^k \right](x(0)). \end{aligned}$$

Поскольку $x(0)$ — это строчка координат точки b , тем самым доказано, что сечение $\nabla_X s$ над U имеет в базисе (8) координаты

$$(10) \quad (\nabla_X s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k,$$

т. е.

$$(11) \quad \nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k s_i \quad \text{над } U.$$

В частности, мы видим, что для гладкого сечения s сечение $\nabla_X s$ также гладко.

Конечно, оператор $\nabla_X: \Gamma(\xi|_U) \rightarrow \Gamma(\xi|_U)$ определен и для любого векторного поля X над U ; например, при $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $k = 1, \dots, n$.

При $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ оператор ∇_X обозначается символом ∇_k и сечение $\nabla_k s$ называется частной ковариантной производной по x_k сечения $s \in \Gamma(\xi|_U)$. Для любого поля X

$$\nabla_X s = X^k \nabla_k s.$$

Согласно формуле (10) координаты $(\nabla_k s)^i$ сечения $\nabla_k s$ в базисе $s_1, \dots, s_n$ выражаются через координаты s^i сечения s по формуле

$$(12) \quad (\nabla_k s)^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j, \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m.$$

В частности,

$$(13) \quad (\nabla_k s_j)^i = \Gamma_{kj}^i, \quad 1 \leq i, j \leq n; 1 \leq k \leq m,$$

и значит

$$(13') \quad (\nabla_X s_j)^i = \omega_j^i(X), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Замечание 2. Формулы (10) и/или (11) можно положить в основу определения сечения $\nabla_X s$. Однако при этом необходимо проверить согласованность конструируемых сечений на пересечениях, т. е. совпадение сечений (11), построенных над двумя окрестностями U и U' на их пересечении $U \cap U'$. Это делается следующим образом.

Объекты, построенные для окрестности U' , мы будем отмечать штрихами при индексах (например, $s_1', \dots, s_n'$ — это базис (8) для модуля $\Gamma(\xi|_{U'})$, а $x^{1'}, \dots, x^{m'}$ — это локальные координаты в U'). Тогда сечение $\nabla_X s$ над окрестностью U' будет задаваться формулой

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \Gamma_{j'k'}^{i'} s^{j'} \right) X^{k'} s_{i'} \quad \text{над } U'$$

и задача состоит в том, чтобы доказать, что над $U \cap U'$ это сечение совпадает с сечением (11).

Но, по определению, над $U \cap U'$ имеют место равенства

$$s_{i'} = \varphi_{i'}^i s_i \quad \text{и} \quad s^{i'} = \varphi_i^{i'} s^i, \quad i, i' = 1, \dots, n,$$

где $\varphi_{i'}^i$ и $\varphi_i^{i'}$ — компоненты взаимно обратных матричных функций перехода $U \cap U' \rightarrow GL(n; K)$ (от U к U' и от U' к U), а также равенства

$$X^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{j'k'}^{i'} &= \varphi_{i'}^i \varphi_j^{i'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ik}^j + \varphi_{i'}^i \frac{\partial \varphi_j^{i'}}{\partial x^{k'}}, \\ k, k' &= 1, \dots, m; \\ i, i', j, j' &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Поэтому над $U \cap U'$

$$\nabla_X s|_{U'} =$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \Gamma_{jk}^i + \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_j^{j'}}{\partial x^{k'}} \right) \varphi_j^{j'} s' \right] \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k s_i = \\ &= \left[\frac{\partial (\varphi_j^{j'} s')}{\partial x^k} + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \Gamma_{jk}^i + \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_j^{j'}}{\partial x^k} \right) \varphi_j^{j'} s' \right] X^k \varphi_i^{i'} s_i = \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_i^{i'}}{\partial x^k} s' \varphi_i^{i'} + \varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \frac{\partial s^j}{\partial x^k} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \varphi_p^{p'} \varphi_q^{q'} \Gamma_{pq}^i + \varphi_i^{i'} \varphi_j^{j'} \varphi_i^{i'} \frac{\partial \varphi_j^{j'}}{\partial x^k} \right) s' \right] X^k s_i = \\ &= \left[\left(\frac{\partial \varphi_j^{j'}}{\partial x^k} \varphi_i^{i'} + \varphi_j^{j'} \frac{\partial \varphi_i^{i'}}{\partial x^k} \right) s' + \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^j s' \right) \right] X^k s_i = \\ &= \left[\frac{\partial (\varphi_j^{j'} \varphi_i^{i'})}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^j s' \right) \right] X^k s_i = \\ &= \left(\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i s' \right) X^k s_i = \nabla_X s|_{U'}. \end{aligned}$$

ибо $\varphi_i^{i'} \varphi_i^{i'} = \delta_i^{i'}$ (и значит, в частности, $\frac{\partial (\varphi_j^{j'} \varphi_i^{i'})}{\partial x^k} = 0$). $\square$

Интересный вариант ковариантного дифференцирования возникает для ξ -векторных полей на кривых.

Пусть $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ — кривая в многообразии $\mathcal{B}$ с локальными уравнениями $x^k = x^k(t)$, $1 \leq k \leq m$, и $v: I \rightarrow \mathcal{G}$ — произвольное ξ -векторное поле на u с компонентами $a^i(t)$, $1 \leq i \leq n$. Мы определим новое ξ -векторное поле на u , которое называется *ковариантной производной поля v вдоль u* и обозначается символом $\frac{\nabla v}{dt}$. По определению это поле имеет компоненты

$$(14) \quad \left(\frac{\nabla v}{dt} \right)^i = \dot{a}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \dot{x}^k(t) a^j(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Задача 2. Предположим, что ξ -векторное поле v является ограничением на u некоторого сечения, т. е. существует такое сечение $s: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ расслоения ξ , что $v(t) = s(u(t))$ для любого $t \in I$. Предположим также, что и поле $t \mapsto \dot{u}(t)$ касательных векторов на кривой u является ограничением некоторого поля на многообразии $\mathcal{B}$, т. е. существует такое векторное поле $X \in \mathfrak{A}(\mathcal{B})$, что $X_u(t) = \dot{u}(t)$ для любого $t \in I$ (кривая u представляет собой интегральную кривую поля X). Покажите, что тогда поле $\frac{\nabla v}{dt}$ на u является ограничением сечения $\nabla_X s$.

[Заметим, что сечение z и поле X заведомо существуют локально, т. е. в окрестности произвольной точки вида $u(t_0)$ (для которой $u(t_0) \neq 0$).]

Пусть $\dot{I}$ — внутренность отрезка I . Так как $\dot{I}$ является гладким многообразием (а $u: \dot{I} \rightarrow \mathcal{B}$ — гладким отображением), то над $\dot{I}$ определено гладкое расслоение $u^*\xi$ со связностью u^*H .

Задача 3. Покажите, что

а. Каждое ξ -векторное поле $v: I \rightarrow \mathcal{B}$ на кривой u естественным образом отождествляется с некоторым сечением расслоения $u^*\xi$ над $\dot{I}$.

б. Ковариантная производная этого сечения по векторному полю $\frac{d}{dt}$ на $\dot{I}$ относительно индуцированной связности u^*H является не чем иным, как ограничением на I ковариантной производной $\frac{\nabla v}{dt}$ поля v вдоль кривой u .

Сравнение формулы (14) с формулой (3) немедленно обнаруживает, что равенство $\frac{\nabla v}{dt} = 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы v было полем параллельных ξ -векторов (в другой интерпретации — горизонтальной кривой).

Таким образом, можно сказать, что векторы, параллельные вдоль кривой, — это в точности векторы, ковариантно постоянные.

Операция ковариантного дифференцирования ∇_X представляет собой отображение

$$\nabla_X: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi$$

модуля $\Gamma\xi$ в себя.

Предложение 2. Операция ∇_X обладает следующими тремя свойствами:

а. Операция ∇_X линейна над полем K , т. е.

$$\nabla_X(s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t,$$

$$\nabla_X(\lambda s) = \lambda \nabla_X s$$

для любых сечений $s, t \in \Gamma\xi$ и любого числа $\lambda \in K$.

б. Для любой функции $f \in F_K \mathcal{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$(15) \quad \nabla_X(fs) = Xf \cdot s + f \nabla_X s$$

(где при $K = \mathbb{C}$ под X справа имеется в виду комплексификация оператора X над $F_{\mathbb{R}} \mathcal{B} = F_{\mathbb{R}} \mathcal{B}$).

в. Операция ∇_X линейно над $F\mathcal{B}$ зависит от X , т. е.

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ и любых функций $f, g \in F\mathcal{B}$.

Доказательство. Свойства а и в непосредственно вытекают из формулы (10) и/или (11). (Правые части этих формул K -линейно зависят от s и $F\mathcal{B}$ -линейно от X .) Свойство б проверяется простой выкладкой:

$$\begin{aligned} [\nabla_X (fs)]^i &= \left[\frac{\partial (fs^i)}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i \cdot fs^j \right] X^k = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x^k} s^i + f \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + f \Gamma_{kj}^i s^j \right] X^k = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} X^k \right) s^i + f \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k = \\ &:= Xf \cdot s^i + f \cdot (\nabla_X s)^i \end{aligned}$$

(напомним, что $Xf = \frac{\partial f}{\partial x^k} X^k$ на U). $\square$

Формула (15) аналогична известной формуле Лейбница дифференцирования произведения (и переходит в нее, если Xf обозначить через $\nabla_X f$).

Снова предположим, что гладкое (класса C^∞) многообразие $\mathcal{B}$ хаусдорфово.

Теорема 1. Пусть каждому полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ поставлен в соответствие оператор

$$(16) \quad \nabla_X: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi,$$

обладающий свойствами а, б и в из предложения 2. Тогда на расслоении ξ существует единственная связность H , по отношению к которой операторы (16) являются ковариантными производными.

Таким образом, для хаусдорфова многообразия $\mathcal{B}$ связности на гладком векторном расслоении $\xi = (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ находятся в естественном биективном соответствии с $F\mathcal{B}$ -линейными отображениями $\nabla: X \mapsto \nabla_X$, сопоставляющими каждому векторному полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ линейный оператор

$$\nabla_X: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi,$$

удовлетворяющий формуле Лейбница (15). На этом основании связности часто определяются как такого рода отображения ∇ (которые также называются *ковариантными дифференцированиями*). Недостатком этого определения является отсутствие геометрической наглядности, а

преимуществом — инвариантность (в нем не используются тривиализирующие координатные окрестности).

В дальнейшем мы, как правило, будем отождествлять связность H и соответствующее дифференцирование ∇ . В частности, вместо «связность, которой отвечает ковариантное дифференцирование ∇ » мы будем говорить «связность ∇ ».

Теорема 1 аналогична теореме 1 лекции III.16 и доказывается сходным образом.

Лемма 1. Для любого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$, любой точки $b_0 \in U$ и любого сечения $s \in \Gamma(\xi|_U)$ существуют такое сечение $s' \in \Gamma\xi$ и такая окрестность W точки b_0 , что $\overline{W} \subset U$ и

$$s = s' \text{ на } W.$$

Кроме того, $s' = 0$ вне U .

(Ср. лемму 1 лекции III.16.)

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции III.13 в $\mathcal{B}$ найдутся такие открытые множества V и W , что

$$b_0 \in W, \quad \overline{W} \subset V, \quad \overline{V} \subset U,$$

и для пары (V, W) существует функция Урысона φ . Для любой точки $b \in \mathcal{B}$ положим

$$s'(b) = \begin{cases} \varphi(b)s(b), & \text{если } b \in U \\ 0, & \text{если } b \notin U. \end{cases}$$

Ясно, что s' является гладким сечением (принадлежит $\Gamma\xi$), совпадает с s на W и обращается в нуль вне U . $\square$

Будем говорить, что сечения $s', s'' \in \Gamma\xi$ совпадают вблизи точки $b_0 \in \mathcal{B}$, если они принимают одинаковые значения в некоторой окрестности этой точки.

Лемма 2. Если сечения $s', s'' \in \Gamma\xi$ совпадают вблизи точки $b_0 \in \mathcal{B}$, то для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ сечения $\nabla_X s'$ и $\nabla_X s''$ также совпадают вблизи точки b_0 .

(Ср. следствие 2 леммы 1 лекции III.16.)

Доказательство. Пусть $s' = s''$ на окрестности U точки b_0 . Согласно следствию 1 леммы 1 лекции III.16 существуют такая окрестность $W \subset U$ точки b_0 и такая гладкая на $\mathcal{B}$ функция φ , что

$$\varphi(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } b \in W, \\ 0, & \text{если } b \notin W. \end{cases}$$

Рассмотрим сечение $\varphi \cdot (s' - s'')$. Ясно, что это сечение равно нулю на всем $\mathfrak{B}$, т. е. является нулем линейала $\Gamma\xi$. Поэтому — в силу линейности оператора ∇_X — нулем будет и сечение

$$(17) \quad \nabla_X(\varphi \cdot (s' - s'')) = X\varphi \cdot (s' - s'') + \varphi \cdot (\nabla_X(s' - s'')).$$

Поскольку $s' = s''$ и $\varphi = 1$ на W , отсюда следует, что

$$\nabla_X(s' - s'') = 0 \quad \text{на } W,$$

т. е. $\nabla_X s' = \nabla_X s''$ на W . $\square$

Это свойство операторов ∇_X называется их *локальностью по s*.

Аналогично доказывается локальность операторов ∇_X по X , т. е. тот факт, что для любых векторных полей $X', X'' \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$, совпадающих вблизи точки $b_0 \in \mathfrak{B}$, операторы $\nabla_{X'}$ и $\nabla_{X''}$ совпадают вблизи этой точки (обладают тем свойством, что $\nabla_{X'} s = \nabla_{X''} s$ вблизи b_0 для каждого сечения $s \in \Gamma\xi$). [Для доказательства достаточно рассмотреть поле $\varphi \cdot (X' - X'')$.]

Лемма 3. Для любого открытого множества $U \subset \mathfrak{B}$ операторы (16), обладающие свойствами а, б и в из предложения 2, индуцируют единственные операторы

$$(18) \quad (\nabla|_U)_X: \Gamma(\xi|_U) \rightarrow \Gamma(\xi|_U), \quad X \in \mathfrak{a}U,$$

также обладающие свойствами а, б и в (по отношению к алгебре FU) и такие, что для каждого поля $X \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma\xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{(\nabla|_U)_X} & \Gamma(\xi|_U). \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения, т. е. такие, что

$$(19) \quad ((\nabla|_U)_X|_U) s = (\nabla_X s)|_U$$

для любого сечения $s \in \Gamma\xi$.

(Ср. предложение 1 лекции III.16.)

Доказательство. Как всегда, докажем сначала единственность. Пусть операторы (18) существуют и пусть $s \in \Gamma(\xi|_U)$, $X \in \mathfrak{a}U$. Согласно лемме 1 и замечанию 1 лекции III.16 для любой точки $b_0 \in U$ существует сечение

$s' \in \Gamma\xi$ и векторное поле $X' \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, совпадающие вблизи этой точки с сечением s и полем X соответственно. При этом согласно свойству (19)

$$(20) \quad [(\nabla|_U)_X(s)](b_0) = [\nabla_{X'}s'](b_0).$$

Это доказывает единственность операторов $(\nabla|_U)_X$, так как в силу локальности операторов ∇_X по s и по X правая часть этой формулы не зависит от выбора сечения s' и поля X' .

Для доказательства существования операторов $(\nabla|_U)_X$ мы примем формулу (20) за определение сечения $(\nabla|_U)_X(s)$. Другими словами, если $X = X'$ и $s = s'$ на W , то мы положим

$$(\nabla|_U)_X(s) = \nabla_{X'}(s') \text{ на } W.$$

Без труда проверяется (сделайте это!), что эта формула корректно определяет операторы (18), обладающие всеми нужными свойствами. $\square$

Для упрощения формул мы, как правило, вместо $\nabla|_U$ будем в дальнейшем писать просто ∇ .

Теперь мы уже можем доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть связность H существует.

Рассмотрим произвольную тривиализирующую окрестность $U \subset \mathcal{B}$ и на ней сечения $s_1, \dots, s_n$, составляющие базис $F_K U$ -модуля $\Gamma(\xi|_U)$, а также векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

составляющие базис FU -модуля $\mathfrak{a}U$. Согласно формуле (13) при любых $i, j = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, m$ для коэффициентов Γ_{kj}^i связности H имеет место равенство

$$(21) \quad \Gamma_{kj}^i = (\nabla_k s_j)^i.$$

Это доказывает единственность связности H (на U , а потому — в силу произвольности U — и на всем $\mathcal{B}$).

Для доказательства существования этой связности мы определим коэффициенты Γ_{kj}^i на U посредством формулы (21). Пусть U' — другая тривиализирующая координатная окрестность и пусть

$$\Gamma_{k'j'}^{i'} = (\nabla_{k'} s_{j'})^{i'} \text{ на } U'$$

(мы используем обозначения, подробно объясненные в лекции 10). Тогда на пересечении $U \cap U'$ будет иметь место

равенство

$$\begin{aligned}\nabla_{k'} s_{j'} &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla (\varphi_{j'}^i s_j) = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi_{j'}^i}{\partial x^k} s_j + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi_{j'}^i \nabla s_j\end{aligned}$$

(напомним, что $\frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k}$ и $s_{j'} = \varphi_{j'}^i s_i$), а значит, и равенство

$$\Gamma_{k'j'}^i \varphi_{j'}^i = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi_{j'}^i}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi_{j'}^i \Gamma_{kj}^i.$$

Поскольку последнее равенство полностью равносильно тождеству (17) лекции 10, этим доказано, что функции Γ_{kj}^i являются коэффициентами некоторой связности H . При этом, как непосредственно следует из формулы (21) и свойств а, б и в операторов ∇_x на окрестности U , для операторов ∇_x имеют место те же формулы (11), что и для ковариантных производных относительно связности H . Поэтому эти операторы совпадают с ковариантными производными относительно связности H . $\square$

В доказательстве леммы 3 мы фактически пользовались лишь свойством локальности операторов ∇_x . Поэтому эта лемма справедлива для произвольного, обладающего свойством локальности линейного отображения $D: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi$ и даже отображения $D: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$, где ξ и η — векторные расслоения с одной и той же базой $\mathcal{B}$. Таким образом, для любого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$ каждое такое отображение D индуцирует (очевидно, тоже линейное) отображение

$$(22) \quad D|_U: \Gamma(\xi|_U) \rightarrow \Gamma(\eta|_U),$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}\Gamma\xi & \xrightarrow{D} & \Gamma\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{D|_U} & \Gamma(\eta|_U),\end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения.

С другой стороны, легко видеть, что *каждое* $F_K\mathcal{B}$ -линейное отображение $D: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$ обладает свойством локаль-

ности. (Доказательство леммы 2 полностью сохранится и в этом случае; лишь в формуле (17) будет отсутствовать член с $X\varphi$.) Поэтому для любого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$ каждое такое отображение индуцирует отображение (22).

Задача 4. Докажите, что для $F_K\mathcal{B}$ -линейного отображения D отображение (22) $F_K\mathcal{B}$ -линейно.

Примером $F_K\mathcal{B}$ -линейного отображения $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$ является отображение

$$(23) \quad \varphi_0: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta, \quad s \mapsto \varphi_0 s,$$

индуцированное произвольным гладким морфизмом расслоений $\varphi: \xi \rightarrow \eta$ (ср. лекцию 6). Отображение $D = \varphi_0$ обладает не только свойством локальности, но и следующим более сильным свойством:

1. Если $s'(b_0) = s''(b_0)$, где $b_0 \in \mathcal{B}$, $s', s'' \in \Gamma\xi$, то $(Ds')(b_0) = (Ds'')(b_0)$.

Оказывается, что свойством 1 обладает каждое $F_K\mathcal{B}$ -линейное отображение $D: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$. Действительно, пусть $s_1, \dots, s_n$ — тривиализация расслоения ξ над окрестностью U точки b_0 и пусть $s'' - s' = f' s_i$ над U (где $f'(b_0) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$). Тогда

$$(Ds'' - Ds')(b_0) = f'(b_0)(Ds_i) = 0$$

(где справа D обозначает $D|_U$). Следовательно, $(Ds')(b_0) = (Ds'')(b_0)$. $\square$

Теперь уже без труда доказывается следующее предложение (ср. задачу 5 лекции 6):

Предложение 3. Для любого $F_K\mathcal{B}$ -линейного отображения $D: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$ существует такой единственный морфизм $\varphi: \xi \rightarrow \eta$, что $D = \varphi_0$.

Доказательство. Если $D = \varphi_0$, то $(Ds)(b) = \varphi(s(b))$ для любого сечения $s \in \Gamma\xi$ и любой точки $b \in \mathcal{B}$. Это означает, что для каждой точки $p \in \mathcal{B}$

$$(24) \quad \varphi(p) = (Ds)(b),$$

где $b = \pi(p)$, а s — такое сечение, что $s(b) = \varphi p$. Поскольку в силу свойства 1 правая часть этого соотношения не зависит от выбора сечения s , это доказывает единственность морфизма φ .

Для доказательства существования морфизма φ мы определим его формулой (24). Ясно, что это определение корректно задает послойное отображение $\varphi: \mathcal{B}^1 \rightarrow \mathcal{B}^n$, линейное на каждом слое и такое, что $D = \varphi_0$. Поэтому

нам нужно только доказать, что это отображение гладко. Но это очевидно, поскольку над любой окрестностью $U \subset \mathcal{B}$, тривиализирующей для обоих расслоений ξ и η одновременно, отображение φ в координатах задается той же самой, состоящей из гладких на U функций, прямоугольной матрицей, что и отображение $D|_U$ в соответствующих базисах свободных $F_K U$ -модулей $\Gamma(\xi|_U)$ и $\Gamma(\eta|_U)$. $\square$

Предложение 3 означает, что $F_K \mathcal{B}$ -модуль $\text{Mor}(\xi, \eta)$ всех гладких морфизмов $\xi \rightarrow \eta$ естественным образом отождествляется с $F_K \mathcal{B}$ -модулем $\text{Hom}_{F_K \mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta)$ всех $F_K \mathcal{B}$ -линейных отображений $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma\eta$:

$$(25) \quad \text{Mor}(\xi, \eta) = \text{Hom}_{F_K \mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta).$$

(Ср. замечания, сделанные после задачи 5 в лекции 6.)

Напомним—см. лекцию 7—, что метрики на K -векторном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ естественным образом отождествляются с непрерывными функциями $Q: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которых на любом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, является метрикой на $\mathcal{F}_b$ (положительно определенным квадратичным функционалом). Метрика на гладком расслоении ξ называется *гладкой*, если функция Q гладка.

Задача 5. Докажите, что на каждом гладком нумерируемом K -векторном расслоении ξ существует гладкая метрика (ср. предложение 2 лекции 7).

Пусть K -векторное расслоение ξ метризовано. Тогда формула

$$(s, s')(b) = (s(b), s'(b)), \quad s, s' \in \Gamma\xi, b \in \mathcal{B},$$

определяет на $F\mathcal{B}$ -модуле $\Gamma\xi$ функционал $s, s' \mapsto (s, s')$, принимающий значения в алгебре $F_K \mathcal{B}$ и обладающий тем свойством, что для любого сечения $s \in \Gamma\xi$ функция $(s, s) \in F_K \mathcal{B}$ принимает вещественные неотрицательные значения и равна нулю в тех и только тех точках $b \in \mathcal{B}$, в которых $s(b) = 0$. При $K = \mathbb{R}$ этот функционал билинеен (над алгеброй $F\mathcal{B}$) и симметричен, а при $K = \mathbb{C}$ —полуторалинеен и эрмитов. Допуская вольность, мы будем этот функционал называть *скалярным умножением* на $\Gamma\xi$.

Задача 6. Докажите, что над каждой тривиализирующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ модуль $\Gamma_K(\xi|_U)$ обладает ортонормированным базисом $s_1, \dots, s_n$ (таким, что $(s_i, s_j) = \delta_{ij}$ для любых $i, j = 1, \dots, n$). [Указание. Выбрав

произвольный базис, примените к нему процесс ортогонализации Грама—Шмидта.]

Определение 3. Связность ∇ на метризованном расслоении ξ называется *согласованной с метрикой* (или *метрической*), если для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ и любых сечений $s, s' \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$(26) \quad X(s, s') = (\nabla_X s, s') + (s, \nabla_X s').$$

Предложение 4. Связность ∇ на расслоении ξ тогда и только тогда согласована с метрикой, когда для любой тривиализирующей окрестности U матрица $\omega = \|\omega_j^i\|$ форм связности, отвечающих ортонормированному базису $s_1, \dots, s_n$ $F_K U$ -модуля $\Gamma(\xi|_U)$, кососимметрична при $K = \mathbb{R}$ и косоэрмитова при $K = \mathbb{C}$, т.е. если для любых $i, j = 1, \dots, n$

$$\omega_j^i + \omega_i^j = 0 \quad \text{при } K = \mathbb{R},$$

$$\omega_j^i + \overline{\omega_i^j} = 0 \quad \text{при } K = \mathbb{C}.$$

Доказательство. Ясно, что соотношение (26) тогда и только тогда выполнено для любых сечений $s, s' \in \Gamma\xi$, когда над произвольной тривиализирующей окрестностью U оно выполнено для элементов произвольного базиса $s_1, \dots, s_n$ над U , т.е. если

$$(27) \quad X(s_i, s_j) = (\nabla_X s_i, s_j) + (s_i, \nabla_X s_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

С другой стороны, если базис $s_1, \dots, s_n$ ортонормирован, то соотношение (27) имеет вид

$$0 = (\nabla_X s_i)' + (\nabla s_j)' \quad \text{при } K = \mathbb{R},$$

$$0 = (\nabla_X s_i)' + \overline{(\nabla s_j)'} \quad \text{при } K = \mathbb{C},$$

где $(\nabla_X s_j)'$ — координаты сечения s_j . Для завершения доказательства остается вспомнить, что согласно формуле (13')

$$(\nabla_X s_j)' = \omega_j^i(X). \quad \square$$

Задача 7. Докажите, что на любом нумерируемом метризованном векторном расслоении ξ существует связность, согласованная с метрикой. [Указание. Из предложения 4 следует, что на тривиальном расслоении такая связность существует. Общий случай сводится к этому с помощью разбиения единицы. Ср. доказательство предложения 3 лекции 7.]

Лекция 12

ξ -тензорные поля.— Полилинейные функционалы и ξ -тензорные поля.— Ковариантное дифференцирование ξ -тензорных полей.— Случай ξ -ковекторных полей.— Общий случай.— Кронекерово произведение матриц и тензорное произведение линейных операторов.— Функторы.— Тензорное произведение векторных расслоений.— Обобщение.— Тензорное произведение сечений.

Пусть, как и выше, $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — гладкое K -векторное ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) расслоение ранга n над m -мерным хаусдорфовым многообразием $\mathcal{B}$ и пусть для любой точки $b \in \mathcal{B}$ в линейном пространстве $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b^*$ задан тензор S_b , причем во всех точках $b \in \mathcal{B}$ тензоры S_b имеют один и тот же тип (r, s) . Пусть, далее, $s_1, \dots, s_n$ — гладкая тривиализация расслоения ξ над окрестностью $U \subset \mathcal{B}$. Поскольку для любой точки $b \in U$ векторы $s_1(b), \dots, s_n(b)$ образуют базис линейного пространства $\mathcal{F}_b$, то для тензора S_b будет иметь место формула

$$(1) \quad S_b = S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(b) s^{i_1}(b) \otimes \dots \otimes s^{i_r}(b) \otimes s_{j_1}(b) \otimes \dots \otimes s_{j_s}(b),$$

где $s^1(b), \dots, s^n(b)$ — двойственный базис сопряженного пространства $\mathcal{F}_b^*$, а $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ — некоторые функции, определенные на U .

Определение 1. Если для любой гладкой тривиализации $(U, s_1, \dots, s_n)$ функции $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ гладки, то соответствие

$$S: b \mapsto S_b$$

называется ξ -тензорным полем (или просто ξ -тензором) на $\mathcal{B}$, а функции $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ называются его компонентами (в данной тривиализации).

В частности, при $(r, s) = (0, 1)$ мы получаем уже известные нам ξ -векторные поля (сечения расслоения ξ).

При $(r, s) = (1, 0)$ поле S называется ξ -ковекторным полем. Примером ξ -ковекторного поля (определенного на окрестности U) является поле $s^i: b \mapsto s^i(b)$, $1 \leq i \leq n$.

При $\xi = \tau \mathcal{X}$, где $\tau \mathcal{X}$ — касательное расслоение гладкого многообразия $\mathcal{X}$, ξ -тензорные поля являются не чем иным, как тензорными полями на $\mathcal{X}$ в смысле лекции III.16.

Замечание 1. По традиции вместо того, чтобы говорить о тензоре S , часто говорят о *тензоре* $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$; конечно,

это словоупотребление (которым мы также будем пользоваться) предполагает, что тривиализация $(U, s_1, \dots, s_n)$ раз и навсегда выбрана и фиксирована.

Задача 1. Покажите, что на пересечении $U \cap U'$ двух тривиализирующих окрестностей U и U' компоненты $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ и $S_{i'_1 \dots i'_r}^{j'_1 \dots j'_s}$ одного и того же тензора S связаны соотношениями

$$(2) \quad S_{i'_1 \dots i'_r}^{j'_1 \dots j'_s} = \varphi_{i'_1}^{i_1} \dots \varphi_{i'_r}^{i_r} \varphi_{j_1}^{j'_1} \dots \varphi_{j_s}^{j'_s} S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s},$$

где $[\varphi_i^{j'}]$ и $[\varphi_j^i]$ — взаимно обратные матрицы перехода (см. лекцию 10).

Для касательного расслоения формула (2) нам уже известна из лекции III.16.

Очевидно, все ξ-тензорные поля данного типа (r, s) образуют модуль над алгеброй $F_K \mathcal{B}$ гладких K -значных функций на $\mathcal{B}$. Мы будем обозначать этот модуль символом $\Gamma_K^s \xi$.

Для любых ξ-тензорных полей S и T (типов (r, s) и (r_1, s_1) соответственно) формула

$$S \otimes T: b \mapsto S_b \otimes T_b, \quad b \in \mathcal{B},$$

корректно определяет ξ-тензорное поле $S \otimes T$ типа $(r+r_1, s+s_1)$, для которого

$$(S \otimes T)_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+s_1}}^{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+s_1}} = S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} T_{i_{r+1} \dots i_{r+s_1}}^{j_{s+1} \dots j_{s+s_1}}.$$

Это поле называется *тензорным произведением* полей S и T .

Аналогично определяется тензорное произведение $S \otimes T \otimes \dots \otimes R$ любого числа ξ-тензорных полей.

Используя тензорные произведения

$$(3) \quad s^{i_1} \otimes \dots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \dots \otimes s_{j_s}$$

(являющиеся ξ-тензорными полями над U), мы можем переписать формулу (1) в следующем виде:

$$S = S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} s^{i_1} \otimes \dots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \dots \otimes s_{j_s}.$$

Это означает, что *тензоры* (3) *составляют базис* $F_K U$ -модуля $\Gamma_K^s(\xi|_U)$ (или, как мы будем говорить, *базис* $F_K \mathcal{B}$ -модуля $\Gamma_K^s \xi$ над U).

Например, при $(r, s) = (1, 0)$ базис модуля $\Gamma_1^0 \xi$ (обозначаемого также символом $\Gamma \xi^0$) над U составляют ξ-ковекторные поля $s^1, \dots, s^n$.

Особое значение имеют ξ -тензорные поля типа $(r, 0)$.

Пусть S — такое поле и пусть $t_1, \dots, t_r \in \Gamma\xi$. Тогда для любой тривиализации $(U, s_1, \dots, s_n)$ расслоения ξ на открытом множестве U будет определена функция

$$(4) \quad S(t_1, \dots, t_r) = S_{i_1 \dots i_r} t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r},$$

где $t_1^{i_1}, \dots, t_r^{i_r}$ — компоненты ξ -векторных полей $t_1, \dots, t_r$ на U , а $S_{i_1 \dots i_r}$ — компоненты ξ -тензорного поля S .

Задача 2. Покажите, что функции (4), построенные на двух тривиализирующих окрестностях U и U' , совпадают на их пересечении $U \cap U'$.

Это означает, что формула (4) корректно определяет функцию $S(t_1, \dots, t_r)$ на всем многообразии $\mathcal{B}$.

Функция $S(t_1, \dots, t_r)$ называется *сверткой* тензора S с полями $t_1, \dots, t_r$.

По аналогии со случаем линейных пространств отображение

$$(5) \quad S: \underbrace{\Gamma\xi \times \dots \times \Gamma\xi}_{r \text{ раз}} \rightarrow F_K \mathcal{B}$$

называется $F_K \mathcal{B}$ -полилинейным функционалом, если оно $F_K \mathcal{B}$ -линейно по каждому аргументу.

Ясно, что определенное формулой (4) отображение (5) является $F_K \mathcal{B}$ -полилинейным функционалом.

Задача 3. Покажите, что соответствие

$$тензор \ S \Rightarrow функционал \ (5)$$

представляет собой изоморфизм $F_K \mathcal{B}$ -модуля $\Gamma_r \xi = \Gamma_r^* \xi$ на $F_K \mathcal{B}$ -модуль всех $F_K \mathcal{B}$ -полилинейных функционалов (5). [Указание. См. замечание 2 лекции III.18.]

В дальнейшем мы будем посредством этого изоморфизма отождествлять ξ -тензорные поля типа $(r, 0)$ на $\mathcal{B}$ с $F_K \mathcal{B}$ -полилинейными функционалами (5).

В частности, в силу этого отождествления ξ -ковекторные поля $c \in \Gamma_1^* \xi = \Gamma_1^* \xi$ являются не чем иным, как $F_K \mathcal{B}$ -линейными функционалами вида

$$c: \Gamma\xi \rightarrow F_K \mathcal{B}.$$

Значение $c(s)$ такого поля на сечении $s \in \Gamma\xi$ (являющееся, подчеркнем, функцией на $\mathcal{B}$) обозначается также символом $\langle s, c \rangle$.

Мы будем говорить, что на $\Gamma_r^* \xi$ задано ковариантное дифференцирование ∇ , если каждому векторному полю

$X \in \mathfrak{L}\mathfrak{B}$ сопоставлен линейный (над K) оператор

$$(6) \quad \nabla_X: \Gamma_r^s \xi \rightarrow \Gamma_r^s \xi,$$

$F_K \mathfrak{B}$ -линейно зависящий от X и удовлетворяющий тождеству Лейбница:

$$\nabla_X (fS) = Xf \cdot S + f \nabla_X S, \quad f \in F_K \mathfrak{B}, S \in \Gamma_r^s \xi.$$

Операторы ∇_X называются *ковариантными дифференцированиями по X* .

Задача 4. Покажите, что для операторов (6) имеют место аналоги лемм 2 и 3 лекции 11.

Это значит, в частности, что операторы ∇ определены над любой тривиализирующей координатной окрестностью U и действуют на тензорах $S \in \Gamma_r^s(\xi|_U)$ по формуле

$$\nabla_X S = X^k \nabla_k S,$$

где X^k , $1 \leq k \leq m$, — компоненты поля X над U , а

$$(7) \quad \nabla_k S = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} S, \quad 1 \leq k \leq m,$$

— частные ковариантные производные ξ -тензорного поля S .

Следовательно, операторы (6) однозначно восстанавливаются по частным производным (7) и, значит, по их компонентам $(\nabla_k S)_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$.

При $(r, s) = (1, 0)$ операторы (6) имеют вид

$$(8) \quad \nabla_X: \Gamma \xi^* \rightarrow \Gamma \xi^*$$

и для любой тривиализирующей координатной окрестности U переводят ξ -ковекторное поле $c = c_i s^i$ на U в ξ -ковекторное поле

$$\nabla_X c = X^k (\nabla_k c)_i s^i,$$

где $(\nabla_k c)_i$ — компоненты ξ -ковекторного поля $\nabla_k c$.

Пусть теперь на ξ задана некоторая связность H .

Предложение 1. На $F_K \mathfrak{B}$ -модуле $\Gamma \xi^*$ существует единственное ковариантное дифференцирование ∇ , обладающее тем свойством, что для любого векторного поля $X \in \mathfrak{L}\mathfrak{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma \xi$ для каждого ξ -ковекторного поля $c \in \Gamma \xi^*$ имеет место равенство

$$(9) \quad X \langle s, c \rangle = \langle \nabla_X s, c \rangle + \langle s, \nabla_X c \rangle,$$

где в первом члене справа символ ∇ обозначает ковариантное дифференцирование относительно связности H .

При $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ компоненты ξ -ковекторного поля $\nabla_X c = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} c$ в каждой тривиализирующей координатной окрестности U выражаются формулой

$$(10) \quad (\nabla_X c)_i = \frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^j c_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

где Γ_{ki}^j — коэффициенты связности H .

Доказательство. Ясно, что равенство (9) тогда и только тогда имеет место для любых s, c и X , когда на произвольной тривиализирующей координатной окрестности U оно имеет место при $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ и $s = s_i$, т. е. — поскольку $\langle s_i, c \rangle = c_i$ и $\nabla_X s_i = \Gamma_{ki}^j s_j$ — когда

$$\frac{\partial c_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^j c_j + (\nabla_X c)_i.$$

Это доказывает формулу (10) и вместе с тем единственность дифференцирования ∇ на $\Gamma\xi'$. Чтобы доказать существование, мы определим операторы (8) формулами (10), т. е. для любого векторного поля $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ на U и любого ξ -ковекторного поля $c = c_i s^i$ на U положим

$$(11) \quad \nabla_X c = \left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^j c_j \right) X^k s^i \quad \text{на } U.$$

Задача 5. Докажите, что

а. Для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ и любого ξ -ковекторного поля $c \in \Gamma\xi^0$ формулы (11) корректно определяют ξ -ковекторное поле $\nabla_X c$. [Указание. Если U' — другая тривиализирующая координатная окрестность, то на пересечении $U \cap U'$ имеют место равенства

$$X^k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^{k'}, \quad c_i = \varphi_i^{j'} c_{j'}, \quad s^{i'} = \varphi_i^{j'} s^j,$$

$$\Gamma_{ki}^j = \varphi_i^{j'} \varphi_j^{l'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{k'l'}^{j'} + \varphi_i^{j'} \frac{\partial \varphi_j^{l'}}{\partial x^k},$$

где $[\varphi_i^{j'}]$ и $[\varphi_j^{i'}]$ — взаимно обратные матрицы перехода.]

б. Получающиеся отображения $\nabla_X: \Gamma\xi^0 \rightarrow \Gamma\xi^0$ составляют дифференцирование. [Указание. Линейность по X

над $F_{\kappa\mathfrak{B}}$ и линейность по s над K очевидны. Тождество Лейбница вытекает из того, что оно справедливо для операторов $\frac{\partial}{\partial x^k}$ обычного частного дифференцирования.]

в. Имеет место формула (9). [Указание. По построению справедлива формула (10).]

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

Предложение 2. На $F_{\kappa\mathfrak{B}}$ -модулях $\Gamma_r^s\xi$, $r, s \geq 0$, существуют такие дифференцирования ∇ , что

1° Для любых двух ξ -тензоров S и T и любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ имеет место равенство

$$(12) \quad \nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T.$$

2° При $(r, s) = (0, 1)$ дифференцирование ∇ совпадает с дифференцированием ∇ на $\Gamma_0^1\xi = \Gamma_0^1\xi$ относительно связности H , а при $(r, s) = (1, 0)$ — с дифференцированием ∇ на $\Gamma_1^0\xi = \Gamma_1^0\xi$ из предложения 1.

Эти дифференцирования единственны и на любой тривиализующей координатной окрестности U компоненты $(\nabla_\kappa S)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ частной производной $\nabla_\kappa S$ произвольного ξ -тензора S выражаются через его компоненты $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ по формуле

$$(13) \quad (\nabla_\kappa S)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x^\kappa} + \\ + \Gamma_{k\rho}^{j_1} S_{i_1 i_2}^{p j_2 \dots j_s} \dots \dots + \Gamma_{k\rho}^{j_s} S_{i_1 i_2}^{j_1 \dots j_{s-1} p} - \\ - \Gamma_{k i_1}^\rho S_{p i_2}^{j_1 \dots j_s} \dots \dots - \Gamma_{k i_2}^\rho S_{p i_1}^{j_1 \dots j_s} \dots \dots - \dots - \Gamma_{k i_r}^\rho S_{p i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_s}.$$

(Каждому индексу отвечает справа одно слагаемое со знаком плюс, если индекс верхний, и со знаком минус, если индекс нижний.)

Доказательство. Из соотношения (12) очевидной индукцией вытекает аналогичное соотношение для любого числа сомножителей. Например, для трех ξ -тензорных полей S , R и T мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla_X(S \otimes T \otimes R) &= \nabla_X(S \otimes T) \otimes R + (S \otimes T) \otimes \nabla_X R = \\ &= (\nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T) \otimes R + (S \otimes T) \otimes \nabla_X R, \end{aligned}$$

т. е.

$$\nabla_X(S \otimes T \otimes R) = \nabla_X S \otimes T \otimes R + S \otimes \nabla_X T \otimes R + S \otimes T \otimes \nabla_X R.$$

В частности, для любых $s, t \in \Gamma_{\xi}^r$ и $c \in \Gamma_{\xi}^s$

$$\nabla_X (s \otimes t \otimes c) = \nabla_X s \otimes t \otimes c + s \otimes \nabla_X t \otimes c + s \otimes t \otimes \nabla_X c.$$

Для компонент частных производных ξ -тензорного поля $S = s \otimes t \otimes c$, отсюда следует формула

$$\begin{aligned} (\nabla_k S)_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} &= (\nabla_k s)_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} c_{j_1 j_2} + s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} (\nabla_k t)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} (\nabla_k c)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \\ &= \left(\frac{\partial s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1 j_2} s^p \right) t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \left(\frac{\partial t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{i_1 i_2} t^p \right) c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + \\ &+ s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \left(\frac{\partial c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^p c_p \right) = \\ &= \frac{\partial s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}}{\partial x^k} t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \frac{\partial t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}}{\partial x^k} c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \frac{\partial c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}}{\partial x^k} + \\ &+ \Gamma_{kp}^{j_1 j_2} s^p t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} + \Gamma_{kp}^{i_1 i_2} s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} t^p c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} - \Gamma_{ki}^p s_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} c_p, \end{aligned}$$

т. е. формула

$$(\nabla_k S)_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \frac{\partial S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1 j_2} S_{i_1 i_2}^{p j_1 j_2} + \Gamma_{kp}^{i_1 i_2} S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} p - \Gamma_{ki}^p S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} p.$$

Этим доказано, что если дифференцирования ∇ существуют, то при $(r, s) = (2, 1)$ для полей вида $S = s \otimes t \otimes c$ (такие поля обычно называются *разложимыми*) имеет место формула (13).

Но над каждой тривиализирующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ каждое ξ -тензорное поле является $F_K \mathcal{B}$ -линейной комбинацией разложимых полей (ибо любой тензор над линейным пространством является K -линейной комбинацией разложимых тензоров; см. предложение 1 лекции II.6), и, с другой стороны, ясно, что если формула (13) справедлива для полей S и T , то она справедлива и для любой их $F_K \mathcal{B}$ -линейной комбинации (единственное сомнение может возникнуть в отношении поля вида fS , когда слева возникает дополнительное слагаемое $\frac{\partial f}{\partial x^k} S_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \dots$, но точно такое же слагаемое отщепляется и от первого члена справа). Это доказывает, что формула (13) справедлива для любого ξ -тензорного поля S типа $(2, 1)$, и значит, для этих полей операция ∇ — если она существует — единственна.

Аналогичным образом формула (13) и единственность дифференцирования ∇ доказываются и для любых r и s .

Для доказательства существования мы определим ξ -тензорное $\nabla_X S$ как поле, имеющее на каждой тривиализирующей координатной окрестности U компоненты $(\nabla_k S)_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \dots$

где X^a — компоненты поля X на U , а $(\nabla_k S)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ — функции (13).

Задача 6. Докажите, что тем самым

а. Поле $\nabla_X S$ корректно определено на всем многообразии.

б. Отображения $\nabla_X: \Gamma_{\mathbb{R}}^r \rightarrow \Gamma_{\mathbb{R}}^s$ составляют дифференцирование.

в. Для любых ξ -тензорных полей S и T имеет место формула (12).

Это доказывает предложение 4. $\square$

Поле $\nabla_X S$ называется ковариантной производной относительно связности H ξ -тензорного поля S по векторному полю $X \in \mathfrak{L}\mathfrak{B}$.

Замечание 2. Компоненты $(\nabla_k S)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ поля $\nabla_k S$ обозначаются также символами $S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}|_k$, причем вместо разделительной черты $|$ употребляются и другие знаки (запятая, точка с запятой и т. п.).

Конструкции ковариантных производных $\nabla_X S$ можно придать большее формальное совершенство и концептуальную простоту (даже для случая $(r, s) = (0, 1)$), если воспользоваться некоторыми, имеющими и самостоятельный интерес, конструкциями над векторными расслоениями.

Начнем с необходимых сведений из линейной алгебры.

Пусть $n \geq 1$, $m \geq 1$. Раз и навсегда зафиксировав некоторый способ нумерации элементов $(n \times m)$ -матриц числами от 1 до nm , мы можем линейное пространство всех $(n \times m)$ -матриц над полем K отождествить с пространством K^{nm} . В соответствии с этим мы будем обозначать векторы стандартного базиса пространства K^{nm} символами e_{ik} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$, а элементы квадратных матриц порядка nm — являющиеся матрицами линейных операторов $K^{nm} \rightarrow K^{nm}$ — символами c_{ik}^{jl} , где $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq k, l \leq m$.

Эти соглашения позволяют любым двум квадратным матрицам $A = \|a_i^j\|$ и $B = \|b_k^l\|$ порядков соответственно n и m поставить в соответствие матрицу $C = \|c_{ik}^{jl}\|$ порядка nm , для которой

$$c_{ik}^{jl} = a_i^j b_k^l.$$

Определение 2. Матрица $C = \|a_i^j b_k^l\|$ называется кронекеровым произведением матриц A и B . Обозначается эта матрица символом $A \otimes B$.

Чтобы истолковать это умножение на языке линейных операторов, мы напомним (см. замечание 4 в лекции II.5),

что для любых линейных пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ определено линейное пространство $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, называемое их *тензорным произведением*. Векторами этого пространства являются билинейные функционалы, первый аргумент которых пробегает пространство $\mathcal{V}^*$, сопряженное к пространству $\mathcal{V}$, а второй — пространство $\mathcal{W}^*$, сопряженное к пространству $\mathcal{W}$. Произвольные векторы $a \in \mathcal{V}$ и $b \in \mathcal{W}$ определяют по формуле

$$(a \otimes b)(\xi, \eta) = \xi(a) \eta(b), \quad \xi \in \mathcal{V}^*, \eta \in \mathcal{W}^*,$$

вектор $a \otimes b \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, называемый *тензорным произведением* векторов a и b . Этот вектор *линейно зависит от векторов a и b* в том смысле, что для любых векторов $a_1, a_2, a \in \mathcal{V}, b_1, b_2, b \in \mathcal{W}$ и любого элемента $\lambda \in K$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \\ a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2, \\ \lambda a \otimes b &= a \otimes \lambda b = \lambda(a \otimes b). \end{aligned}$$

Для произвольного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$ и произвольного базиса $f_1, \dots, f_m$ пространства $\mathcal{W}$ векторы

$$e_i \otimes f_k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

образуют, очевидно, базис пространства $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Поэтому, в частности, каждый вектор пространства $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ может быть представлен — вообще говоря, не единственным способом — в виде линейной комбинации векторов вида $a \otimes b$ (т. е. векторы вида $a \otimes b$ образуют в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ полное семейство векторов).

В случае, когда $\mathcal{V} = K^n$ и $\mathcal{W} = K^m$, базис $e_i \otimes f_k$ естественным образом отождествляется с базисом e_{ik} пространства K^{nm} и, значит, тензорное произведение $K^n \otimes K^m$ — с пространством K^{nm} :

$$(14) \quad K^n \otimes K^m = K^{nm}.$$

Произвольные линейные отображения $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$ и $\psi: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1$ естественным образом определяют линейное отображение

$$(15) \quad \varphi \otimes \psi: \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{W}_1,$$

которое называется их *тензорным произведением* и обладает тем свойством, что

$$(16) \quad (\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi a \otimes \psi b$$

для любых векторов $a \in \mathcal{V}$, $b \in \mathcal{W}$. [Отображение $\varphi \otimes \psi$ можно определить как — очевидно, единственное! — линейное отображение $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{W}_1$, для которого справедлива формула (16), но на этом пути возникает проблема доказательства его существования. Более концептуальный путь построения этого отображения основывается непосредственно на определении векторов пространства $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ как билинейных функционалов.]

Задача 7. Постройте отображение (15) каждым из указанных двух способов. [Не забудьте проверить, что получающееся отображение линейно.]

В частном случае, когда $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$ и, значит, линейные отображения φ и ψ являются линейными операторами $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $B: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, тензорное произведение $\varphi \otimes \psi$ будет линейным оператором:

$$A \otimes B: \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}.$$

При этом если оператор A имеет в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$ матрицу $A = \|a_{ij}\|$ (т. е. $Ae_i = a_{ij}e_j$), а оператор B имеет в базисе $f_1, \dots, f_m$ пространства $\mathcal{W}$ матрицу $B = \|b_{kl}\|$ (т. е. $Bf_k = b_{kl}f_l$), то

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(e_i \otimes f_k) &= Ae_i \otimes Bf_k = \\ &= a_{ij}e_j \otimes b_{kl}f_l = \\ &= (a_{ij}b_{kl})(e_j \otimes f_l). \end{aligned}$$

Это означает, что *матрицей оператора $A \otimes B$ является кронекерово произведение $A \otimes B$ матриц A и B .*

На этом основании кронекерово произведение $A \otimes B$ называется также *тензорным произведением* матриц A и B .

Подчеркнем, что в отличие от тензорного произведения операторов кронекерово произведение матриц включает в себе определенный произвол — выбор нумерации пар (i, k) .

Вернемся теперь к общему случаю произвольных линейных отображений φ и ψ .

Из формулы (16) непосредственно вытекает, что

а. Если $\varphi = \text{id}$ и $\psi = \text{id}$ ($a: \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$ и $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$), то $\varphi \otimes \psi = \text{id}$.

б. Для любых линейных отображений

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi: \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}_1, & \varphi_1: \mathcal{V}_1 &\rightarrow \mathcal{V}_2, \\ \psi: \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{W}_1, & \psi_1: \mathcal{W}_1 &\rightarrow \mathcal{W}_2, \end{aligned}$$

имеет место формула

$$(\varphi_1 \otimes \psi_1) \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi_1 \circ \varphi) \otimes (\psi_1 \circ \psi).$$

Здесь уместно ввести общее определение:

Определение 3. Пусть любым двум линейным пространствам $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ (как всегда у нас — конечномерным) поставлено в соответствие линейное пространство $\Phi(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, а любым двум линейным отображениям $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$ и $\psi: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1$ — линейное отображение

$$\Phi(\varphi, \psi): \Phi(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \Phi(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1).$$

Если

а) $\Phi(\text{id}, \text{id}) = \text{id};$

б) для любых линейных отображений (17) имеет место формула

$$\Phi(\varphi_1, \psi_1) \circ \Phi(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi, \psi_1 \circ \psi),$$

то говорят, что Φ представляет собой *двуместный функтор* (из категории конечномерных линейных пространств в себя).

Пример 1. Установленные выше свойства операции $\otimes$ означают, что, положив

$$\Phi(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi,$$

мы получим двуместный функтор. Этот функтор называется *функтором тензорного умножения*.

Пример 2. Положив

$$\Phi(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \oplus \psi$$

(по определению $(\varphi \oplus \psi)(a, b) = (\varphi a, \psi b)$ для любых векторов $a \in \mathcal{V}$, $b \in \mathcal{W}$), мы, очевидно, также получим двуместный функтор. Этот функтор называется *функтором прямого суммирования*.

Аналогично определяются *k-местные функторы* для любого $k \geq 1$. Например, *одноместный функтор* Φ ставит в соответствие каждому линейному пространству $\mathcal{V}$ линейное пространство $\Phi(\mathcal{V})$ и каждому линейному отображению $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ — линейное отображение

$$\Phi(\varphi): \Phi(\mathcal{V}) \rightarrow \Phi(\mathcal{W}),$$

причем

а) $\Phi(\text{id}) = \text{id};$

б) $\Phi(\varphi_1) \circ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi)$ для любых линейных отображений $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ и $\varphi_1: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1$.

Пример 3 и задача 8. Пусть $\Lambda^p \mathcal{V}$ — пространство всех кососимметрических тензоров степени $p \geq 0$ на пространстве $\mathcal{V}$. (См. лекцию II.8.) Определите для любого линейного отображения $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ линейное отображение

$$\Lambda^p \varphi: \Lambda^p \mathcal{V} \rightarrow \Lambda^p \mathcal{W}$$

так, чтобы получился одноместный функтор. Этот функтор называется *функтором p -й внешней степени*.

Введенные функторы называются также *ковариантными функторами*, поскольку существуют *функторы контравариантные*. Например, одноместный *контравариантный функтор* Φ сопоставляет каждому линейному пространству $\mathcal{V}$ линейное пространство $\Phi(\mathcal{V})$ и каждому линейному отображению $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ — линейное отображение

$$\Phi(\varphi): \Phi(\mathcal{W}) \rightarrow \Phi(\mathcal{V})$$

(обратите внимание на обратное направление стрелки!), причем

$$a) \Phi(\text{id}) = \text{id};$$

$$b) \Phi(\varphi) \circ \Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi) \text{ для любых линейных отображений } \varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \text{ и } \varphi_1: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1.$$

Пример 4. Одноместным контравариантным функтором является *функтор сопряжения*

$$\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^*, \quad \varphi \mapsto \varphi^*,$$

ставящий в соответствие линейному пространству $\mathcal{V}$ *сопряженное пространство* $\mathcal{V}^*$, а линейному отображению $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ — *сопряженное отображение* $\varphi^*: \mathcal{W}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$ (действующее по формуле $\varphi^*(\eta)(a) = \xi(\varphi a)$, $a \in \mathcal{V}$, $\xi \in \mathcal{W}^*$; ср. определение 2 лекции II.15).

Самым общим образом можно определить многоместные смешанные функторы, ковариантные по одним аргументам и контравариантные по другим.

Задача 9. Сформулируйте подробно соответствующее определение.

Пример 5. Функтор Hom , сопоставляющий пространствам $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ линейное пространство $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ всех линейных отображений $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ и любым двум линейным отображениям $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$, $\psi: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1$ — линейное отображение

$$\text{Hom}(\varphi, \psi): \text{Hom}(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1),$$

определенное формулой

$$\text{Hom}(\varphi, \psi)(\alpha) = \psi \circ \alpha \circ \varphi, \quad \alpha: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{W},$$

является двуместным функтором, контравариантным по первому аргументу и ковариантным по второму.

Можно рассматривать также функторы, перерабатывающие линейалы над одним полем в линейалы над другим. Например, *функтор комплексификации* $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ переводит произвольный линейал $\mathcal{V}$ над полем $\mathbb{R}$ в его комплексификацию $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$, являющуюся линейалом над полем $\mathbb{C}$, а *функтор овеществления* $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ переводит произвольный линейал $\mathcal{W}$ над полем $\mathbb{C}$ в его овеществление $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$.

Задача 10. Докажите, что

$$(\mathcal{V}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \quad \text{и} \quad (\mathcal{W}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}},$$

где $\overline{\mathcal{W}}$ — пространство, комплексно-сопряженное пространству $\mathcal{W}$ (см. лекцию II.19).

Заметим, что *любой функтор перерабатывает изоморфизмы в изоморфизмы*, т. е. — для определенности мы ограничиваемся двуместными функторами — если отображения φ и ψ являются изоморфизмами, то отображение $\Phi(\varphi, \psi)$ также будет изоморфизмом.

Как правило, мы будем рассматривать функторы, для которых при $\mathcal{V} = K^n$ и $\mathcal{W} = K^m$ — мы снова формулируем условие только для двуместных функторов — пространство $\Phi(K^n, K^m)$ отождествлено с пространством K^N , где N — некоторое число, зависящее от n и m . Например, для функтора прямого суммирования $N = n + m$, для функтора тензорного умножения $N = nm$, а для одноместного функтора сопряжения $N = n$.

В силу этого условия для любых изоморфизмов $A: K^n \rightarrow K^n$ и $B: K^m \rightarrow K^m$, т. е. матриц $A \in GL(n; K)$ и $B \in GL(m; K)$, изоморфизм $\Phi(A, B)$ является матрицей из $GL(N; K)$, так что соответствие $(A, B) \mapsto \Phi(A, B)$ представляет собой некоторое отображение

$$(18) \quad GL(n; K) \times GL(m; K) \rightarrow GL(N; K).$$

Мы будем называть функтор Φ *непрерывным*, если отображение (18) непрерывно, и при $K = \mathbb{R}$ — *гладким*, если отображение (18) гладко.

Все функторы из примеров 1—5 очевидным образом непрерывны, а при $K = \mathbb{R}$ — и гладки.

Пусть теперь $\xi = (\mathcal{E}^\xi, \pi^\xi, \mathcal{B})$ и $\eta: (\mathcal{E}^\eta, \pi^\eta, \mathcal{B})$ — векторные расслоения над полем K рангов n и m соответственно с одной и той же базой $\mathcal{B}$ (которую пока можно считать произвольным топологическим пространством) и пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{B}$, состоящее из окрестностей, тривиализирующих каждое из этих расслоений (очевидно, что такое покрытие всегда существует). Пусть, далее,

$$\varphi_\alpha^\xi: U_\alpha \times K^n \rightarrow \mathcal{E}^\xi_\alpha \quad \text{и} \quad \varphi_\alpha^\eta: U_\alpha \times K^m \rightarrow \mathcal{E}^\eta_\alpha$$

— тривиализации расслоений ξ и η над U_α , а

$$\varphi_{\beta\alpha}^\xi: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n; K) \quad \text{и} \quad \varphi_{\beta\alpha}^\eta: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(m; K)$$

— соответствующие отображения перехода.

Определим отображения

$$\varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(nm; K),$$

положив для любой точки $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$(\varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta)(b) = \varphi_{\beta\alpha}^\xi(b) \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta(b).$$

Эти отображения, очевидно, непрерывны (и гладки, если — в предположении, что $\mathcal{B}$ является многообразием — гладки отображения $\varphi_{\beta\alpha}^\xi$ и $\varphi_{\beta\alpha}^\eta$), а автоматическая проверка (использующая только функторные свойства операции $\otimes$) показывает, что они составляют коцикл покрытия $\{U_\alpha\}$ над группой $GL(nm; K)$. Поэтому (см. предложение 2 лекции 6) существует такое векторное расслоение ζ ранга nm над полем K с тривиализирующим покрытием $\{U_\alpha\}$, что

$$\varphi_{\beta\alpha}^\zeta = \varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta$$

для любых α и β . Это расслоение гладко, если гладки расслоения ξ и η .

В построении векторного расслоения ζ участвует тривиализирующее покрытие $\{U_\alpha\}$. Поэтому надо рассмотреть вопрос, в какой мере расслоение ζ зависит от выбора этого покрытия.

По построению (см. лекцию 6) расслоение ζ возникает вместе с некоторыми тривиализациями

$$\varphi_\alpha^\zeta: U_\alpha \times K^{nm} \rightarrow \mathcal{E}^\zeta_\alpha,$$

связанными с отображениями $\varphi_{\beta\alpha}^\zeta = \varphi_{\beta\alpha}^\xi \otimes \varphi_{\beta\alpha}^\eta$ формулами

$$\varphi_{\beta\alpha}^\zeta(b) = (\varphi_{\beta\alpha}^\zeta)^{-1} \circ \varphi_{\alpha\alpha}^\zeta(b),$$

где, скажем, $\varphi_{\alpha, b}^{\xi}$ — изоморфизм $K^{nm} \rightarrow \mathcal{F}_b^{\xi}$, $b \in U_{\alpha}$, определенный формулой

$$\varphi_{\alpha, b}^{\xi}(x) = \varphi_{\alpha}^{\xi}(b, x), \quad x \in K^{nm}.$$

Аналогично

$$\varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b) = (\varphi_{\beta, b}^{\xi})^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^{\xi} \quad \text{и} \quad \varphi_{\beta\alpha}^{\eta} = (\varphi_{\beta, b}^{\eta})^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^{\eta},$$

где, скажем,

$$\varphi_{\alpha, b}^{\xi}(x) = \varphi_{\alpha}^{\xi}(b, x), \quad x \in K^n.$$

Поэтому для отображения

$$(\varphi_{\alpha, b}^{\xi} \otimes \varphi_{\alpha, b}^{\eta}) \circ (\varphi_{\alpha, b}^{\xi})^{-1}: \mathcal{F}_b^{\xi} \rightarrow \mathcal{F}_b^{\xi} \otimes \mathcal{F}_b^{\eta}$$

при $b \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha, b}^{\xi} \otimes \varphi_{\alpha, b}^{\eta}) \circ (\varphi_{\alpha, b}^{\xi})^{-1} &= \\ &= [(\varphi_{\beta, b}^{\xi} \circ \varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b)) \otimes (\varphi_{\beta, b}^{\eta} \circ \varphi_{\beta\alpha}^{\eta}(b))] \circ [(\varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b))^{-1} \circ (\varphi_{\beta, b}^{\xi})^{-1}] = \\ &= (\varphi_{\beta, b}^{\xi} \otimes \varphi_{\beta, b}^{\eta}) \circ [(\varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b) \otimes \varphi_{\beta\alpha}^{\eta}(b)) \circ (\varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b))^{-1}] \circ (\varphi_{\beta, b}^{\xi})^{-1} = \\ &= (\varphi_{\beta, b}^{\xi} \otimes \varphi_{\beta, b}^{\eta}) \circ (\varphi_{\beta, b}^{\xi})^{-1} \end{aligned}$$

(напомним, что по определению $\varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b) = \varphi_{\beta\alpha}^{\xi}(b) \otimes \varphi_{\beta\alpha}^{\eta}(b)$).

Это показывает, что формула

$$f(p) = (\varphi_{\alpha, b}^{\xi} \otimes \varphi_{\alpha, b}^{\eta}) \circ (\varphi_{\alpha, b}^{\xi})^{-1}(p),$$

в которой $p \in U_{\alpha}$, $b = \pi(p)$, корректно определяет — очевидно, биективное — отображение

$$f: \mathcal{E}^{\xi} \rightarrow \mathcal{E}^{\eta},$$

где

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_b^{\xi} \otimes \mathcal{F}_b^{\eta}$$

— дизъюнктное объединение линейных пространств $\mathcal{F}_b^{\xi} \otimes \mathcal{F}_b^{\eta}$, $b \in \mathcal{B}$. (Заметим, что каждый слой $\mathcal{F}_b^{\xi}$ отображение f изоморфно отображает на пространство $\mathcal{F}_b^{\xi} \otimes \mathcal{F}_b^{\eta}$.)

Посредством отображения f мы можем перенести из $\mathcal{E}^{\xi}$ в $\mathcal{E}$ топологию (а когда расслоения ξ и η гладки — и гладкость). Ясно, что тогда тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — естественная проекция, будет векторным расслоением (с тривиализациями вида $f \circ \varphi_{\alpha}^{\xi}$), а отображение f — изоморфизмом векторных расслоений.

В пространстве $\mathcal{E}$ множество открыто тогда и только тогда, когда открыто (в $\mathcal{E}|_{U_\alpha}$) его пересечение с каждым из множеств $\mathcal{E}|_{U_\alpha} = (\pi^\sharp)^{-1}U_\alpha$, и значит (докажите!) тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$, над которым тривиальны оба расслоения ξ и η , открыто в $\mathcal{E}|_U = (\pi^\sharp)^{-1}U$ его пересечение с $\mathcal{E}|_U$. Поэтому в пространстве $\mathcal{E}$ множество открыто тогда и только тогда, когда для любого такого U открыто в $\mathcal{E}|_U = \pi^{-1}U$ его пересечение с $\mathcal{E}|_U$.

Поскольку топология пространства $\mathcal{E}|_U$ является (докажете!) прямым произведением топологий пространства U и K^n , этим доказано, что топология в пространстве $\mathcal{E}$ не зависит от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$. Следовательно — так как все остальное в расслоении $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ заведомо обладает этим свойством, — *расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определено корректно* (не зависит от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$).

Определение 4. Векторное расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ обозначается символом $\xi \otimes \eta$ и называется *тензорным произведением* расслоений ξ и η . Оно гладко, если гладки расслоения ξ и η .

Слоем расслоения $\xi \otimes \eta$ над произвольной точкой $b \in \mathcal{B}$ является тензорное произведение слоев расслоений ξ и η :

$$\mathcal{F}_b^{\xi \otimes \eta} = \mathcal{F}_b^\xi \otimes \mathcal{F}_b^\eta.$$

Построенное выше расслоение ζ изоморфно расслоению $\xi \otimes \eta$, и значит его отображения перехода $\psi_{i\alpha}^\zeta$ являются также и отображениями перехода расслоения $\xi \otimes \eta$.

Конструкция расслоения $\xi \otimes \eta$ немедленно обобщается на любые непрерывные функторы.

Задача 11. Для произвольного k -местного непрерывного функтора Φ на категории линейных пространств (по одним аргументам ковариантного, а по другим — контравариантного) и любых векторных расслоений $\xi_1, \dots, \xi_k$ над $\mathcal{B}$ постройте векторное расслоение $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_k)$, слоem которого над произвольной точкой $b \in \mathcal{B}$ является линейное пространство $\Phi(\mathcal{F}_b^{\xi_1}, \dots, \mathcal{F}_b^{\xi_k})$. Специально рассмотрите расслоения ξ^* , $\Lambda^p \xi$, $\xi \oplus \eta$ и $\text{Hom}(\xi, \eta)$, для которых соответственно

$$\mathcal{F}_b^{\xi^*} = (\mathcal{F}_b^\xi)^*, \quad \mathcal{F}_b^{\Lambda^p \xi} = \Lambda^p \mathcal{F}_b^\xi, \quad \mathcal{F}_b^{\xi \oplus \eta} = \mathcal{F}_b^\xi \oplus \mathcal{F}_b^\eta$$

и

$$\mathcal{F}_{\xi}^{\text{Hom}(\xi, \eta)} = \text{Hom}(\mathcal{F}_{\xi}, \mathcal{F}_{\eta}).$$

Докажите, что расслоение $\xi \oplus \eta$ является не чем иным, как суммой Уитни расслоений ξ и η , построенной в примере 2 лекции 7.

Пример 6. Для произвольного гладкого многообразия $\mathcal{X}$ определено гладкое векторное расслоение

$$\tau_{\mathcal{X}}^{\circ} = \tau^{\circ} \mathcal{X} = (T^{\circ} \mathcal{X}, \pi, \mathcal{X}),$$

слоями которого являются кокасательные пространства $T_p^{\circ} \mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{X}$. Это расслоение называется *кокасательным расслоением над $\mathcal{X}$* . Каждая карта $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ определяет тривиализацию $\varphi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^{\circ} U$ расслоения $\tau_{\mathcal{X}}^{\circ}$ над U , для которой

$$\varphi(p, a) = a_i (dx^i)_p,$$

где $p \in U$ и $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Сечениями этого расслоения являются линейные дифференциальные формы на $\mathcal{X}$.

Пример 7. Более общим образом, мы для каждого $r \geq 0$ можем рассмотреть над $\mathcal{X}$ расслоение $\Lambda^r \tau^{\circ} \mathcal{X}$.

Задача 12. Покажите, что сечения расслоения $\Lambda^r \tau^{\circ} \mathcal{X}$ — это в точности дифференциальные формы на $\mathcal{X}$ степени r .

Задача 13. Покажите, что расслоения $\Lambda^r \tau^{\circ} \mathcal{X}$ и $(\Lambda^r \tau^{\circ} \mathcal{X})^{\circ}$ естественно изоморфны. [Указание. Для любого линейного алгебраического линейала $\Lambda^r \mathcal{V}$ естественно изоморфен линейалу $(\Lambda^r \tau^{\circ} \mathcal{X})^{\circ}$.]

Пример 8. Пусть $r \geq 0$ и $s \geq 0$ — целые неотрицательные числа. Расслоение

$$\underbrace{\tau_{\mathcal{X}}^{\circ} \otimes \dots \otimes \tau_{\mathcal{X}}^{\circ}}_{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{\tau_{\mathcal{X}} \otimes \dots \otimes \tau_{\mathcal{X}}}_{s \text{ раз}}$$

обозначается символом $\tau_{\mathcal{X}}^{r,s}$ и называется *тензорным расслоением типа (r, s) над $\mathcal{X}$* . Его сечениями являются тензорные поля типа (r, s) на $\mathcal{X}$ (см. лекцию III.16).

Более общим образом, для любого векторного расслоения ξ полагают

$$T_{\mathcal{X}}^{r,s} \xi = \underbrace{\xi^{\circ} \otimes \dots \otimes \xi^{\circ}}_{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{\xi \otimes \dots \otimes \xi}_{s \text{ раз}}.$$

Таким образом, $\tau_{\mathcal{X}}^{r,s} = T_{\mathcal{X}}^{r,s} \tau_{\mathcal{X}}$.

Замечание 3. Сечения расслоения $T^*\xi$ —это в точности введенные выше ξ -тензорные поля типа (r, s) на многообразии $\mathcal{B}$. Поэтому введенные там же модули Γ^s_ξ —это модули сечений $\Gamma T^*\xi$ расслоения $T^*\xi$:

$$\Gamma^s_\xi = \Gamma T^s_\xi,$$

а дифференцирования ∇ на этих модулях—это ковариантные дифференцирования в смысле лекции 12 (что, в частности, делает очевидной—и ненужной!—задачу 4).

С этой точки зрения предложения 1 и 2 представляют собой утверждения о существовании (и единственности) связностей на расслоениях ξ^* и $T^*\xi$, находящихся с данной связностью ∇ на ξ в соотношениях (9) и (12).

Задача 14. Каждое сечение s расслоения $\text{Hom}(\xi, \eta)$ произвольной точке $b \in \mathcal{B}$ ставит в соответствие линейное отображение $s(b): \mathcal{F}^{\xi}_b \rightarrow \mathcal{F}^{\eta}_b$, и потому формула

$$s^*(p) = s(b)p, \quad p \in \mathcal{F}^{\xi}_b,$$

где $b = \pi(p)$, определяет отображение $s^*: \mathcal{F}^{\xi} \rightarrow \mathcal{F}^{\eta}$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{\xi} & \xrightarrow{s^*} & \mathcal{F}^{\eta} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Покажите, что отображение s^* непрерывно (и гладко, если сечение s гладко), т. е. что оно является морфизмом $\xi \rightarrow \eta$. Покажите также, что *соответствие*

$$s \mapsto s^*$$

определяет изоморфизм $F_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ -модуля $\Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta))$ всех сечений расслоения $\text{Hom}(\xi, \eta)$ на $F_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ -модуль $\text{Mor}(\xi, \eta)$ всех морфизмов $\xi \rightarrow \eta$.

Таким образом,

$$(19) \quad \text{Mor}(\xi, \eta) = \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta))$$

и морфизмы $\xi \rightarrow \eta$ являются не чем иным, как сечениями расслоения $\text{Hom}(\xi, \eta)$.

Для любых двух сечений $s^{\xi}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}^{\xi}$ и $s^{\eta}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}^{\eta}$ расслоений ξ и η формула

$$(s^{\xi} \otimes s^{\eta})(b) = s^{\xi}(b) \otimes s^{\eta}(b), \quad b \in \mathcal{B},$$

определяет сечение

$$s^{\xi} \otimes s^{\eta}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}^{\xi} \otimes \eta$$

расслоения $\xi \otimes \eta$, называемое *тензорным произведением* сечений s^{ξ} и s^{η} .

Если расслоения ξ и η тривиальны над открытым множеством U , то для любых базисов

$$s_1^{\xi}, \dots, s_n^{\xi} \text{ и } s_1^{\eta}, \dots, s_m^{\eta}$$

$F_k \mathcal{B}$ -модулей $\Gamma \xi$ и $\Gamma \eta$ над U сечения

$$s_i^{\xi} \otimes s_k^{\eta}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

образуют, очевидно, базис $F_k \mathcal{B}$ -модуля $\Gamma(\xi \otimes \eta)$ над U . Поэтому любое сечение расслоения $\xi \otimes \eta$ над U единственным образом представляется в виде

$$s^k \otimes s_k^{\eta}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где s^k — некоторые сечения расслоения ξ над U .

Задача 15. Покажите, что последнее утверждение остается справедливым и в случае, когда расслоение ξ нетривиально над U .

Лекция 13

Ковариантный дифференциал.— Сравнение различных определений связности.— Группы Ли.— Примеры групп Ли.— Алгебра Ли группы Ли.— Касательное пространство в единице.— Формула для коммутатора.

Пусть $\xi = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное гладкое K -векторное расслоение ранга n над m -мерным гладким многообразием и пусть $\tau_{\mathcal{B}}^* = (T^*\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ при $K = \mathbb{R}$ — кокасательное расслоение над $\mathcal{B}$, а при $K = \mathbb{C}$ — его комплексификация. Рассмотрим гладкое K -векторное расслоение $\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi$ и $F_K \mathcal{B}$ -модуль $\Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi)$ его гладких сечений.

Определение 1. Линейное (над полем K) отображение

$$\nabla: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi)$$

называется *ковариантным дифференцированием*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница, т. е. если для любой функции $f \in F_K \mathcal{B}$ и любого сечения $s \in \Gamma\xi$ имеет место равенство

$$(1) \quad \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

(Напомним, что df является сечением расслоения $\tau_{\mathcal{B}}^*$, и потому $df \otimes s$ — сечение расслоения $\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi$.)

Сечение ∇s расслоения $\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi$ называется *ковариантным дифференциалом* сечения s .

Из формулы (1) уже известным нам способом следует — в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ хаусдорфово, — что *отображение ∇ обладает свойством локальности*, т. е. если сечения s_1 и s_2 равны вблизи точки $b_0 \in \mathcal{B}$, то сечения ∇s_1 и ∇s_2 также равны вблизи b_0 . [Действительно, если $s_1 = s_2$ на окрестности U точки b_0 и если φ — гладкая функция на $\mathcal{B}$, равная единице на некоторой окрестности $W \subset U$ точки b_0 и равная нулю вне U , то сечение $\varphi \cdot (s_2 - s_1)$ тождественно равно нулю и, значит,

$$d\varphi \cdot (s_2 - s_1) + \varphi \cdot \nabla(s_2 - s_1) = 0 \text{ на } \mathcal{B}.$$

Поэтому $\nabla(s_2 - s_1) = 0$ на W .] В свою очередь, из свойства локальности следует (ср. лекцию 11), что для любого открытого множества $U \subset \mathcal{B}$ дифференцирование $\nabla|_U$ для расслоения $\xi|_U$,

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^{\circ} \otimes \xi) \\ \downarrow & \searrow \nabla|_U & \downarrow \\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma((\tau_{\mathcal{B}}^{\circ} \otimes \xi)|_U) = \Gamma(\tau_U^{\circ} \otimes (\xi|_U)), \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются отображениями ограничения. При этом для любого открытого покрытия $\{U_{\alpha}\}$ многообразия $\mathcal{B}$ дифференцирование ∇ однозначно восстанавливается по дифференцированиям $\nabla|_{U_{\alpha}}$.

С другой стороны, если U — тривиализирующая координатная окрестность в $\mathcal{B}$ и $\{s_i; 1 \leq i \leq n\}$ — базис $F_K U$ -модуля $\Gamma(\xi|_U)$, то $\{dx^k \otimes s_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ — базис $F_K U$ -модуля $\Gamma((\tau_{\mathcal{B}}^{\circ} \otimes \xi)|_U)$ и для каждого $j = 1, \dots, n$ имеет место равенство вида

$$(2) \quad \nabla s_j = \Gamma_{kj}^i dx^k \otimes s_i, \quad \Gamma_{kj}^i \in F_K U,$$

т. е. равенство

$$(2') \quad \nabla s_j = \omega_j^i \otimes s_i, \quad \omega_j^i = \Gamma_{kj}^i dx^k \in \Omega^1 U$$

(для сокращения формул мы вместо $\nabla|_U$ пишем ∇). При этом формы ω_j^i (или, что равносильно, функции Γ_{kj}^i) однозначно определяют (по формуле

$$(3) \quad \nabla s = (ds^i + \omega_j^i s'^j) \otimes s_i,$$

где $s = s^i s_i$) дифференцирование ∇ (или, точнее, $\nabla|_U$).

Задача 1. Докажите, что для произвольных форм ω_j^i на U отображение ∇ , определенное формулой (3), является ковариантным дифференцированием на U .

Если U' — другая тривиализирующая координатная окрестность (с тривиализацией $s_1, \dots, s_n$) и

$$(2'') \quad \begin{array}{ll} \nabla s_{j'} = \omega_{j'}^{i'} \otimes s_{i'} & \text{на } U', \\ s_{i'} = \varphi_i^{i'} s_i, \quad s_i = \varphi_i^{i'} s_{i'} & \text{на } U \cap U', \end{array}$$

то

$$\begin{aligned} \nabla s_{j'} &= d\varphi_{j'}^{i'} \otimes s_{i'} + \varphi_{j'}^{i'} \nabla s_i = \\ &= d\varphi_{j'}^{i'} \otimes s_{i'} + \varphi_{j'}^{i'} \omega_i^{i'} \otimes s_{i'} = \\ &= (d\varphi_{j'}^{i'} + \varphi_{j'}^{i'} \omega_i^{i'}) \otimes (\varphi_i^{i'} s_{i'}) = \\ &= \varphi_i^{i'} (d\varphi_{j'}^{i'} + \varphi_{j'}^{i'} \omega_i^{i'}) \otimes s_{i'}, \end{aligned}$$

и значит

$$(4) \quad \omega_j^i = \psi_i^j \psi_j^i \omega_j^i + \psi_i^j d\psi_j^i.$$

Обратно, если на окрестностях U и U' заданы ковариантные дифференцирования, действующие соответственно по формулам (2') и (2''), и если имеют место соотношения (4), то на пересечении $U \cap U'$ эти дифференцирования совпадают (т. е., точнее, совпадают их ограничения на $U \cap U'$).

Это означает, что справедливо следующее предложение:

Предложение 1. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие хаусдорфова многообразия $\mathcal{B}$, состоящее из тривиализирующих координатных окрестностей. Тогда каждое ковариантное дифференцирование ∇ определяет для любого α

формы $\omega_j^i = \omega_j^{(\alpha)i}$ на окрестности U_α , причем для любых α и β эти формы на окрестностях $U = U_\alpha$ и $U' = U_\beta$ связаны на $U \cap U'$ соотношениями (4).

Обратно, задание для любого α форм $\omega_j^i = \omega_j^{(\alpha)i}$, связанных соотношениями (4), однозначно определяет ковариантное дифференцирование ∇ , действующее на каждой окрестности U_α по формуле (3). $\square$

Но формулы (4) — это в точности формулы (17') из лекции 10! Поэтому, сравнив предложение 1 с предложением 3 лекции 10, мы немедленно получим, что ковариантные дифференцирования ∇ находятся в естественном биективном соответствии со связностями на расслоении ξ (и потому могут быть с ними отождествлены).

Таким образом, фактически мы имеем три определения связности на гладком векторном расслоении ξ — как поля горизонтальных подпространств, как семейства операторов ∇_X и как дифференцирования ∇ .

Взаимоотношения этих определений описываются формулами

$$H = \text{Ann}(\theta^1, \dots, \theta^n),$$

где $\theta^i = da^i + \omega_j^i a^j = da^i + \Gamma_{kj}^i a^j dx^k$;

$$(5) \quad \nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k s_i,$$

где $s = s^i s_i$ и $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

и

$$\begin{aligned}\nabla s &= (ds^i + \omega_j^i s^j) \otimes s_j = \\ &= (ds^i + \Gamma_{kj}^i s^j dx^k) \otimes s_j = \\ &= \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) dx^k \otimes s_j,\end{aligned}$$

имеющими место в произвольной тривиализирующей координатной окрестности U .

В одних вопросах удобнее одно определение, в других—другое, а в третьих—третье. Поэтому надо уметь легко и быстро переходить от каждого из этих определений к любому другому.

Задача 2. Покажите, что для любых линейных пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ каждый элемент тензорного произведения $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}$, где $\mathcal{V}^*$ —пространство сопряженное к $\mathcal{V}$, естественным образом интерпретируется как линейное отображение $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$. [Например, для элемента вида $\theta \otimes c$, $\theta \in \mathcal{V}^*$, $c \in \mathcal{W}$ это делается по формуле

$$(\theta \otimes c)(x) = \theta(x)c,$$

где $x \in \mathcal{V}$.] В частности, значение $(\nabla s)_b$ сечения $\nabla s \in \Gamma(\tau_B^* \otimes \xi)$ в точке $b \in B$ является в силу этой интерпретации линейным отображением $T_b B \rightarrow \mathcal{F}_b^*$, и значит для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}_B$ формула

$$(\nabla s)(X)_b = (\nabla s)_b(X_b), \quad b \in B,$$

определяет некоторое—очевидно, гладкое—сечение $(\nabla s)(X)$ расслоения ξ . Покажите, что

$$(6) \quad (\nabla s)(X) = \nabla_X s.$$

Формула (6) устанавливает прямое—не использующее горизонтальных подпространств и тривиализирующих координатных окрестностей—соответствие между дифференцированиями ∇ и операторами ∇_X .

Задача 3. Пусть ξ —комплексное векторное расслоение и $l: \xi_R \rightarrow \xi_R$ —оператор комплексной структуры на его оветествлении ξ_R (см. лекцию 6). Пусть, далее, H —связность на расслоении ξ_R , а $\nabla_X: \Gamma \xi_R \rightarrow \Gamma \xi_R$, $\nabla: \Gamma \xi_R \rightarrow \Gamma(\tau_B^* \otimes \xi_R)$ —соответствующие ковариантные дифференцирования. Покажите, что следующие условия равносильны:

- Связность H является связностью на ξ (см. лекцию 10).
- Для любого векторного поля X имеет место коммутативная

диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xi_R & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma \xi_R \\ I_* \downarrow & & \downarrow I_* \\ \Gamma \xi_R & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma \xi_R; \end{array}$$

в. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau_B^* \otimes \xi_R) \\ I_* \downarrow & & \downarrow (\text{id} \otimes I) \\ \Gamma \xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau_B^* \otimes \xi_R) \end{array}$$

коммутативна.

[Указание. Условие б равносильно линейности над $\mathbb{C}$ оператора ∇_X , а условие в — линейности над $\mathbb{C}$ оператора ∇ .]

Более глубокая теория связностей на векторных расслоениях опирается на простейшие факты теории групп Ли и их подгрупп. Мы поэтому отставим временно в сторону дифференциальную геометрию и займемся группами Ли.

Напомним (см. лекцию 1), что группой Ли (или гладкой группой) называется группа $\mathcal{G}$, являющаяся одновременно гладким многообразием, в которой отображение умножения

$$(7) \quad m: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad m(a, b) = ab, \quad a, b \in \mathcal{G},$$

гладко. (В этом случае отображение обращения

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad a \mapsto a^{-1}, \quad a \in \mathcal{G},$$

также гладко; см. задачу 1 лекции 1.)

Задача 4. Покажите, что отображение (7) тогда и только тогда гладко, когда оно гладко в точке (e, e) , где e — единица группы $\mathcal{G}$.

Гладкость отображения (7) в точке (e, e) означает следующее. Во-первых, в $\mathcal{G}$ существуют такая карта $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$, содержащая точку e , и такая окрестность $V \subset U$ точки e , что

$$ab \in U \quad \text{для любых элементов } a, b \in V.$$

Во-вторых, отображение (7) записывается в этой карте гладкими функциями, т. е. существует такая гладкая вектор-функция

$$(8) \quad c = m(a, b),$$

где

$$a = (a^1, \dots, a^n), \quad b = (b^1, \dots, b^n) \quad c = (c^1, \dots, c^n),$$

осуществляющая отображение открытого множества $h(V) \times h(V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ в открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$, что если a и b — строки координат элементов $a, b \in V$, то c — строка координат элемента $c = ab$.

Для определенности мы всегда будем предполагать, что карта (U, h) центрирована в e , т. е. что

$$h(e) = 0.$$

Так как $m(a, e) = a$ и $m(e, b) = b$ для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$, то вектор-функция (8) удовлетворяет соотношениям $m(a, 0) = a$ и $m(0, b) = b$ и, следовательно, имеет вид

$$m(a, b) = a + b + \dots,$$

где многоточие обозначает члены векторного ряда Тейлора степени ≥ 2 , ни один из которых не зависит только от a или b . (Для простоты класс гладкости мы предполагаем здесь равным C^∞ . При меньшей гладкости следует вместо ряда Тейлора рассматривать соответствующий многочлен Тейлора.)

Сумму членов степени 2 ряда Тейлора функции $m(a, b)$ мы будем обозначать символом $a * b$. Согласно сказанному эта сумма билинейно зависит от a и b , т. е. операция $*$ является умножением на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Мы будем называть операцию $*$ *главной билинейной частью* умножения (7) в группе Ли $\mathcal{S}$.

Таким образом, по определению

$$(9) \quad m(a, b) = a + b + a * b + \dots,$$

где многоточие обозначает члены степени ≥ 3 .

Если a^{-1} — строка координат элемента a^{-1} (для элемента a , достаточно близкого к e), то $m(a, a^{-1}) = 0$ и, значит, $a + a^{-1} + a * a^{-1} + \dots = 0$. Следовательно,

$$(10) \quad a^{-1} = -a + a * a + \dots,$$

где снова многоточие обозначает члены степени ≥ 3 .

Примеры групп Ли.

Пример 1. Полная линейная группа $GL(n; \mathbb{R})$, будучи открытым подмножеством линейного пространства $Mat_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц порядка n , является гладким многообразием. Центрированными в единице E этой группы координатами матрицы $A \in GL(n; \mathbb{R})$ являются элементы

матрицы $A - E$. Поскольку

$$AB - E = (A - E) + (B - E) + (A - E)(B - E),$$

мы видим, что для группы $GL(n; R)$ функция (8) выражается формулой

$$m(a, b) = a + b + a * b,$$

где a , b и $a * b$ — развернутые в строки матрицы $A - E$, $B - E$ и $(A - E)(B - E)$. Следовательно, эта функция гладка, и значит группа $GL(n; R)$ является группой Ли.

Группой Ли будет и ее компонента единицы $GL^+(n; R)$, состоящая из матриц с положительным определителем.

Пример 2. (Ср. замечание 1 лекции III.15.) Согласно определению 1 лекции III.11 подгруппа $\mathcal{G}$ группы $GL(n; R)$ является *матричной группой Ли*, если существует такое линейное подпространство $\mathfrak{g} \subset \text{Mat}_n(R)$, что

1° $e^B \in \mathcal{G}$ для любой матрицы $B \in \mathfrak{g}$;

2° если $e^B \in \mathcal{G}$ и $|B| < \ln 2$, то $B \in \mathfrak{g}$ (здесь $|B| = n \cdot \max\{|b_j|\}, B = \|b_j\|$).

Такая группа является гладким многообразием (предложение 1 лекции III.11) с картами вида (CU_0, h_C) , где $C \in \mathcal{G}$, U_0 — окрестность единичной матрицы E в группе $\mathcal{G}$, состоящая из матриц $e^B \in \mathcal{G}$, для которых $|B| < \ln 2$, а h_C — отображение $CU_0 \rightarrow \text{Mat}_n(R) = R^{n^2}$, определенное формулой

$$h_C(CA) = \ln A, \quad A \in U_0.$$

Так как для любых матриц $A_1, A_2 \in U_0$ матрица $\ln(A_1 A_2)$ является гладкой функцией матриц $B_1 = \ln A_1$ и $B_2 = \ln A_2$ (докажит!), то по отношению к этой гладкости умножение (7) гладко.

Следовательно, любая матричная группа Ли является группой Ли.

В частности (см. лекцию III.11), группами Ли будут группы $O(n)$, $SO(n)$, $Sp(m; R)$, $O(p, q)$, а также группы $U(n)$, $SU(n)$ и $Sp(m)$. Группы же $O(n; C)$ и $Sp(m; C)$ будут *комплексными группами Ли* (комплексно-аналитическими многообразиями, являющимися одновременно группами, для которых отображение (7) комплексно-аналитично).

Группа Ли $\mathcal{H}$ называется *подгруппой Ли* (или *гладкой подгруппой*) группы Ли $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ является подгруппой группы $\mathcal{G}$ (т. е. $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ и $ab^{-1} \in \mathcal{H}$ для любых элементов $a, b \in \mathcal{H}$) и одновременно подмногообразием (вообще говоря, погруженным) многообразия $\mathcal{G}$. Иначе говоря, группа

Ли $\mathcal{H}$ представляет собой подгруппу Ли, если $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ и вложение $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ является гомоморфизмом и одновременно погружением (в каждой точке $a \in \mathcal{H}$).

Задача 5. Пусть подгруппа $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ снабжена гладкостью, относительно которой она является группой Ли, и пусть вложение $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ гладко в единице e группы $\mathcal{G}$ и является в e погружением. Покажите, что тогда $\mathcal{H}$ будет гладкой подгруппой группы $\mathcal{G}$. [Указание. Для любого элемента $a \in \mathcal{H}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{L_a} & \mathcal{H} \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{L_a} & \mathcal{G} \end{array}$$

горизонтальные стрелки L_a которой представляют собой диффеоморфизмы $x \mapsto ax$, где $x \in \mathcal{H}$ для верхней стрелки и $x \in \mathcal{G}$ для нижней.]

Пример 3 (продолжение примера 2). Для матричной группы Ли $\mathcal{G}$ вложение $\mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ в окрестности единичной матрицы E задается в координатах отображением $B \rightarrow e^B$, где матрица B координат матрицы $A \in \mathcal{G}$ равна $\ln A$. Так как

$$\left(\frac{\partial e^B}{\partial b_j^i} \right)_e = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tE_j^i} - E}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tE_j^i + O(t^2)}{t} = E_j^i,$$

где E_j^i — матричная (i, j) -единица (матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента на пересечении i -й строки и j -го столбца, который равен единице), то это вложение в точке E является погружением. Поэтому группа $\mathcal{G}$ является гладкой подгруппой группы Ли $\text{GL}(n; \mathbb{R})$.

Пример 4 (обобщение примера 1). Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная конечномерная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{R}$ с единицей e , т. е. конечномерное линейное пространство, одновременно являющееся ассоциативным кольцом с единицей e , умножение в котором однородно (удовлетворяет соотношению

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$). Если a^i, b^i и c^i , $1 \leq i \leq n$, — координаты элементов a, b и $c = ab$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ линейала $\mathcal{A}$, то

$$(12) \quad c^i = \gamma_{jk}^i a^j b^k,$$

где γ_{jk}^i — некоторые числа (называемые *структурными константами* алгебры $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$).

Каждый элемент a алгебры $\mathcal{A}$ определяет линейный оператор

$$L_a: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad x \mapsto ax, \quad x \in \mathcal{A}$$

(имеющий в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицу $\|\gamma(a')\|$) и формула $a \mapsto L_a$ задает гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\text{End } \mathcal{A}$ всех линейных операторов на пространстве $\mathcal{A}$, являющийся, очевидно, мономорфизмом (если $L_a = 0$, то $a = L_a e = 0$).

В частности, элемент $a \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда обратим (существует такой элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$), когда обратим (невырожден) оператор L_a . Поэтому множество $\mathcal{A}^\circ$ всех обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$, — являющееся, очевидно, группой по умножению, — открыто в $\mathcal{A}$ и, значит, является гладким многообразием. А так как центрированными в e координатами элемента $a \in \mathcal{A}$ являются координаты в базисе $e_1, \dots, e_n$ элемента $a - e$ и так как

$$(13) \quad ab - e = (a - e) + (b - e) + (a - e)(b - e),$$

то группа $\mathcal{A}^\circ$ является группой Ли.

При $\mathcal{A} = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ мы возвращаемся к группе $\text{GL}(n; \mathbb{R})$.

Для группы $\mathcal{A}^\circ$ координатами $a^1, \dots, a^n$ элемента $a \in \mathcal{A}^\circ$ являются линейные координаты элемента $a - e$. Поэтому строчку a координат $a^1, \dots, a^n$ мы можем отождествлять с элементом $a - e$. В силу этого отождествления главная билинейная часть умножения в $\mathcal{A}^\circ$ будет выражаться формулой

$$a * b = ab - a - b.$$

Эта операция играет важную роль в теории алгебр и называется *умножением Джекобсона*.

Заметим, что для алгебры $\mathcal{A}^\circ$ в формуле (9) члены первой степени отсутствуют. (Но в формуле (10) они присутствуют!)

Так как для каждого элемента a произвольной группы Ли $\mathcal{Z}$ отображение (11) является диффеоморфизмом, то для любого векторного поля X на $\mathcal{Z}$ определено векторное поле

$$L_a X: b \mapsto (dL_a)_b^{-1} X_{ab}, \quad b \in \mathcal{Z}$$

(см. формулу (9) лекции III.17).

Определение 2. Векторное поле $X \in \mathfrak{X}$ называется *левоинвариантным*, если

$$L_a X = X \quad \text{для любого элемента } a \in \mathcal{Z},$$

т. е. если

$$(14) \quad X_{ab} = (dL_a)_b X_b \quad \text{для любых элементов } a, b \in \mathfrak{g}.$$

Ясно, что множество $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных векторных полей на $\mathfrak{g}$ является линейным подпространством алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ всех векторных полей на $\mathfrak{g}$. Более того, так как для любых векторных полей X и Y на $\mathfrak{g}$

$$L_a^*[X, Y] = [L_a^*X, L_a^*Y]$$

(см. замечание 1 лекции III.17), то это подпространство является даже подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ и, следовательно, алгеброй Ли.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли группы Ли $\mathfrak{g}$* .

Для обозначения этой алгебры мы будем использовать также символ $l(\mathfrak{g})$ (или $l\mathfrak{g}$).

Пример 5. Так как для любой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ группа Ли $\mathcal{A}^\circ$ является открытым подмногообразием линейного пространства $\mathcal{A}$, то касательное пространство $T_a\mathcal{A}$ этой группы в произвольной точке $a \in \mathcal{A}^\circ$ естественным образом отождествляется с $\mathcal{A}$, причем, если $x^1, \dots, x^n$ — координаты в $\mathcal{A}$ относительно базиса $e_1, \dots, e_n$, то в этом отождествлении базису

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$$

пространства $T_a\mathcal{A}$ отвечает как раз базис $e_1, \dots, e_n$. Следовательно, каждое векторное поле X на $\mathcal{A}^\circ$ можно интерпретировать как отображение

$$(15) \quad X: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{A}.$$

Так как отображение $L_a: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{A}^\circ$, $x \mapsto ax$, $a \in \mathcal{A}^\circ$, в координатах $x^1, \dots, x^n$ записывается формулами

$$y^i = \gamma_{jk}^i a^j x^k$$

и так как

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \gamma_{jk}^i a^j,$$

то отображение $(dL_a)_b: T_b\mathcal{A}^\circ \rightarrow T_{ab}\mathcal{A}^\circ$, рассматриваемое в силу отождествлений $T_b\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}$ и $T_{ab}\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}$ как отображение $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, будет совпадать с отображением L_a (главная линейная часть линейной функции совпадает с ней самой). Поэтому условие (14) левоинвариантности поля (15)

имеет вид

$$X \circ L_a = L_a \circ X,$$

т. е. вид

$$(16) \quad X(ab) = aX(b), \quad a, b \in \mathcal{A}^0.$$

Положив $c = X(e)$, получим

$$(17) \quad X(a) = ac, \quad c \in \mathcal{A}.$$

Поскольку любое отображение вида (17) удовлетворяет, очевидно, соотношению (16), этим доказано, что *левоинвариантные векторные поля на группе Ли $\mathcal{A}^0$ находятся в естественном биективном соответствии с элементами алгебры $\mathcal{A}$* . Элементу $c \in \mathcal{A}$ соответствует при этом поле X , для которого

$$(18) \quad X_a = (ac)^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a$$

в любой точке $a \in \mathcal{A}^0$, где $(ac)^i$ — координаты элемента ac .

Формула (18) означает, что компоненты X^i векторного поля X в карте $(\mathcal{A}^0, x^1, \dots, x^n)$ выражаются формулами

$$X^i = (xc)^i = \gamma_{jk}^i x^j c^k,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \gamma_{jk}^{il} c^k.$$

Поэтому если Y — другое левоинвариантное векторное поле на $\mathcal{A}$ и если оно отвечает элементу $d \in \mathcal{A}$, то (см. формулу (22) лекции III.16) для компонент $[X, Y]^i$ поля $[X, Y]$ будет иметь место формула

$$\begin{aligned} [X, Y]^i &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \\ &= \gamma_{jk}^i x^j c^k \gamma_{ls}^i d^s - \gamma_{jk}^i x^j d^k \gamma_{ls}^i c^s = \\ &= \gamma_{js}^i (xc)^j d^s - \gamma_{js}^i (xd)^j c^s = \\ &= (xcd)^i - (xdc)^i = (x[c, d])^i, \end{aligned}$$

где $[c, d] = cd - dc$. Следовательно, полю $[X, Y]$ будет отвечать элемент $[c, d]$.

Относительно операции $c, d \mapsto [c, d]$ линейное пространство $\mathcal{A}$ является (проверьте!) алгеброй Ли. Эта алгебра называется *коммутаторной алгеброй Ли* ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ и обозначается символом $[\mathcal{A}]$.

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что алгебра Ли $I(\mathcal{A}^\circ)$ группы Ли $\mathcal{A}^\circ$ естественным образом отождествляется с алгеброй Ли $[\mathcal{A}]$:

$$I(\mathcal{A}^\circ) = [\mathcal{A}].$$

В частности $I(\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})) = [\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$.

На этом основании алгебра Ли $[\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$ обычно обозначается символом $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ или просто $\mathfrak{gl}(n)$; ср. лекцию III.11.

[Обратим внимание, что в лекции III.11 алгебры Ли вводились — только для матричных групп! — совсем другим способом. Мы видим, что для группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ оба способа приводят к одному результату. Ниже мы покажем, что будет и для произвольных матричных групп Ли.]

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $T_e\mathcal{G}$ — касательное пространство к $\mathcal{G}$ в точке $e \in \mathcal{G}$. Рассмотрим отображение

$$(19) \quad \mathfrak{g} \rightarrow T_e\mathcal{G}, \quad X \mapsto X_e,$$

сопоставляющее каждому векторному полю $X \in \mathfrak{g}$ его значение X_e в e . Очевидно, что это отображение линейно.

Предложение 2. *Отображение (19) является изоморфизмом линейных пространств.*

Доказательство. Пусть A — произвольный вектор из $T_e\mathcal{G}$. Для каждой точки $a \in \mathcal{G}$ положим

$$X_a = (dL_a)_e A.$$

Предложение 2 будет доказано, если мы докажем, что а. Отображение $a \mapsto X_a$ гладко, и, значит, (поскольку $X_a \in T_a\mathcal{G}$) является векторным полем на $\mathcal{G}$.

б. Это поле левинвариантно (принадлежит $\mathfrak{g}$).

в. Отображение

$$(20) \quad T_e\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad A \mapsto X,$$

обратно отображению (19).

Для доказательства утверждения в достаточно заметить, что, во-первых, по построению $X_e = A$ и, во-вторых, что для любого левинвариантного векторного поля X

$$X_a = (dL_a)_e X_e.$$

Утверждение б также проверяется без труда: так как $L_a \circ L_b = L_{ab}$ и, значит, $(dL_a)_b \circ (dL_b)_e = (dL_{ab})_e$, то

$$(dL_a)_b X_b = (dL_a)_b ((dL_b)_e A) = (dL_{ab})_e A = X_{ab}.$$

Для проверки утверждения а найдем компоненты вектора X_a в локальных координатах.

Пусть U и V — рассмотренные выше координатные окрестности, в которых умножение в $\mathcal{S}$ записывается вектор-функцией (8). Тогда при $a \in V$ отображение L_a на V будет задаваться функцией $b \mapsto m(a, b)$, и значит отображение $(dL_a)_e$ будет действовать по формуле

$$(dL_a)_e \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_e = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j} \right)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $m^i = m^i(a, b)$ — компоненты вектор-функции $m(a, b)$.

Следовательно, компоненты X^i поля X на окрестности V будут задаваться формулами

$$(21) \quad X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j} \right)_a A^j,$$

где A^j — компоненты вектора A в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a$, $i = 1, \dots$

$\dots, n$, и, значит, будут гладкими функциями от a . Это доказывает, что на окрестности V поле X гладко.

С другой стороны, для любого элемента $g \in \mathcal{S}$ множество $gV = L_g V$ открыто и пара $(gV, h \circ L_g^{-1})$ является картой. При этом, в силу левонинвариантности, если X^i — компоненты поля X в карте (V, h) , то $X^i \circ L_g$ — компоненты поля X в карте $(gV, h \circ L_g^{-1})$. Поэтому поле X гладко и на любом множестве вида gV . Для завершения доказательства остается заметить, что множества вида gV , $g \in \mathcal{S}$, покрывают всю группу $\mathcal{S}$. $\square$

Для групп Ли вида $\mathcal{A}^\circ$ предложение 2 непосредственно вытекает также из результатов примера 5.

Следствие. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = l(\mathcal{S})$ конечномерна и ее размерность равна размерности n группы $\mathcal{S}$.

Мы перенесем лиеву операцию в линеал $T_e \mathcal{S}$, положив для любых векторов $A, B \in T_e \mathcal{S}$

$$(22) \quad [A, B] = [X, Y]_e,$$

где X и Y — такие левонинвариантные векторные поля на $\mathcal{S}$, что $X_e = A$ и $Y_e = B$.

В силу этого соглашения пространство $T_e \mathcal{S}$ будет алгеброй Ли, естественно изоморфной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Как правило, мы будем отождествлять ее с $\mathfrak{g}$.

Замечательно, что для произведения (22) векторов $A, B \in T_e \mathcal{S}$ существует простая явная формула, выражающая

его через умножение (7) в группе Ли $\mathcal{L}$ или — точнее — через его главную билинейную часть $a * b$.

По определению действующая в пространстве R^n операция $*$ строится с помощью некоторой центрированной в e карты $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$. От этой же карты зависит и базис

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_e, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_e$$

пространства $T_e \mathcal{L}$, т. е. координатный изоморфизм $T_e \mathcal{L} \rightarrow R^n$ (являющийся в силу отождествления $T_0 R^n = R^n$ не чем иным, как дифференциалом $(dh)_e$ в точке e координатного отображения $h: U \rightarrow R^n$). Мы перенесем посредством изоморфизма $(dh)_e$ операцию $*$ из пространства R^n в пространство $T_e \mathcal{L}$, т. е. для любых векторов $A, B \in T_e \mathcal{L}$ примем за $A * B$ вектор, имеющий в базисе (23) координаты, составляющие строку $a * b$, где a и b — строки координат векторов A и B соответственно.

Подчеркнем, что операция $*$ и в пространстве $T_e \mathcal{L}$ зависит от выбора карты (U, h) .

Оказывается, что операция (22) очень просто выражается через операцию $*$ в $T_e \mathcal{L}$.

Предложение 3. Для любых векторов $A, B \in T_e \mathcal{L}$ имеет место равенство

$$(24) \quad [A, B] = A * B - B * A.$$

Доказательство. По определению $[A, B] = [X, Y]_e$, где X и Y — такие левоинвариантные векторные поля, что $X_e = A$ и $Y_e = B$. При этом согласно формуле (21) компоненты X^i и Y^i полей X и Y в произвольной карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ задаются формулами

$$X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j} \right)_e A^j, \quad Y^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j} \right)_e B^j,$$

где $\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j} \right)_e$ — значения в точке $(0, 0)$ частных производных компонент $m^i(a, b)$ вектор-функции $m(a, b)$ по компонентам b^j вектора b . Следовательно (см. формулу (22) лекции III.16), для компонент $[X, Y]_e^i = [A, B]^i$ вектора $[A, B]$ будет иметь место формула

$$\begin{aligned} [A, B]^i &= \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^k} \right)_e A^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l} \right)_e B^l - \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^k} \right)_e B^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l} \right)_e A^l = \\ &= (A^k B^l - B^k A^l) \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^k} \right)_e \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l} \right)_e. \end{aligned}$$

Но, согласно формуле (9)

$$m^i(a, b) = a^i + b^i + \gamma_{ki}^i a^k b^i + \dots,$$

где $\gamma_{ki}^i a^k b^i$ — компоненты вектора $a * b$. Следовательно,

$$\frac{\partial m^i}{\partial b^i} = \delta_i^i + \gamma_{ki}^i a^k + \dots, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k \partial b^i} = \gamma_{ki}^i + \dots$$

и потому

$$\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^i} \right)_0 = \delta_i^i, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k \partial b^i} = \gamma_{ki}^i.$$

Значит,

$$\begin{aligned} [A, B]^i &= (A^k B^i - B^k A^i) \delta_{ki}^i \gamma_{ji}^i = \\ &= \gamma_{ki}^i A^k B^i - \gamma_{ki}^i B^k A^i = \\ &= (A * B)^i - (B * A)^i, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (24). $\square$

Замечание 1. Операция $*$ единственным образом представляется в виде суммы двух операций

$$A * B = A \underset{1}{*} B + A \underset{2}{*} B,$$

первая из которых коммутативна, а вторая антикоммутативна. Предложение 3 означает, что антикоммутативная часть $\underset{2}{*}$ операции выражается через операцию Ли:

$$A \underset{2}{*} B = \frac{i}{2} [A, B],$$

и поэтому не зависит от выбора карты (U, h) . [Напротив как мы покажем ниже, карту (U, h) можно выбрать так, чтобы коммутативная часть $A \underset{1}{*} B$ произведения $A * B$ была тождественно равна нулю.]

Задача 6. Исследуйте, как меняется операция $*$ при замене карты (U, h) , и, в частности, проверьте, что антикоммутативная часть этой операции при замене карты (U, h) остается прежней.

Лекция 14

Однопараметрические подгруппы. — Экспоненциальное отображение и нормальные координаты. — Выражение умножения в группе Ли через умножение в ее алгебре Ли. — Дифференциал присоединенного представления. — Операции в алгебре Ли группы Ли и однопараметрические подгруппы. — Подгруппы Ли групп Ли. — Распределения и их интегральные подмногообразия. — Теорема Фробениуса. — Подмногообразия многообразий, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. — Единственность структуры подалгебры Ли.

Определение 1. Гладкая кривая

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G},$$

определенная на всей оси $\mathbb{R}$, называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли $\mathcal{G}$, если она является гомоморфизмом групп, т. е. если для любых $s, t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\beta(s + t) = \beta(s)\beta(t).$$

Конечно, $\beta(0) = e$.

Подчеркнем, что однопараметрическая подгруппа является не множеством, а отображением.

Задача 1. Покажите, что любой гомоморфизм $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ является гладким отображением (и, значит, однопараметрической подгруппой). [Указание. Записав гомоморфизм β в локальных координатах, докажите сначала, что он является гладким отображением в точке 0.]

Пример 1. Однопараметрической подгруппой является постоянное отображение

$$\text{const}_e: t \mapsto e, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Пусть $\mathcal{G}$ — матричная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — линейное подпространство пространства $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$, предусмотренное определением 1 лекции III.11 (см. пример 2 лекции 13). Тогда для любой матрицы $B \in \mathfrak{g}$ отображение

$$(1) \quad \beta: t \mapsto e^{tB}, \quad t \in \mathbb{R},$$

будет, очевидно, однопараметрической подгруппой группы $\mathcal{G}$.

Задача 2. Покажите, что любая однопараметрическая подгруппа матричной группы Ли $\mathcal{G}$ имеет вид (1).

Задача 3. Покажите, что

а. Для любого элемента b конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ ряд

$$e^b = e + b + \frac{b^2}{2!} + \dots + \frac{b^n}{n!} + \dots$$

сходится.

б. Отображение

$$(2) \quad \beta: t \mapsto e^{tb}, \quad b \in \mathcal{A},$$

является однопараметрической подгруппой группы $\text{Ли } \mathcal{A}^\circ$.

в. Каждая однопараметрическая подгруппа группы $\mathcal{A}^\circ$ имеет вид (2).

Оказывается, что аналогичное описание однопараметрических подгрупп возможно и для любых групп $\text{Ли } \mathcal{G}$. Из-за недостатка места мы изложим соответствующую конструкцию в серии задач.

Задача 4. Пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — произвольное гладкое отображение гладких многообразий. Покажите, что для любой кривой $\gamma: I \rightarrow \mathcal{X}$ в каждой точке $t \in I$ имеет место равенство

$$(3) \quad (f \circ \gamma)'(t) = (df)_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t).$$

[Указание. Если в локальных координатах отображение f задается вектор-функцией $y = y(x)$, а кривая γ — вектор-функцией $x = x(t)$, то

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \frac{dy^j(x(t))}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{(f \circ \gamma)(t)} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{(f \circ \gamma)(t)} = \\ &= \frac{dx^i}{dt} (df)_{\gamma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} = (df)_{\gamma(t)} \left(\frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)} \right) = (df)_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

для всех $t \in I$.]

Задача 5. Покажите, что каждая однопараметрическая подгруппа β группы $\text{Ли } \mathcal{G}$ является (очевидно, максимальной) интегральной кривой некоторого левоинвариантного векторного поля $X \in \mathcal{G}$, т. е.

$$\beta(t) = X_{\beta(t)} \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

[Указание. Поле X характеризуется условием $X_e = \beta'(0)$. Из формулы (2), примененной к отображению $L_a: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ и кривой β , следует, что

$$X_a = (dL_a)_e X_e = (dL_a)_e \beta'(0) = (L_a \circ \beta)'(0)$$

для любой точки $a \in \mathcal{G}$. С другой стороны, если $a = \beta(t)$, то $L_a \circ \beta: s \mapsto \beta(s + t)$ и, значит, $(L_a \circ \beta)'(0) = \beta'(t)$.]

Задача 6. Покажите, что каждая группа Ли $\mathfrak{G}$ является хаусдорфовым многообразием. [Указание. Диагональ Δ произведения $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ является прообразом единицы e группы $\mathfrak{G}$ при непрерывном отображении $(a, b) \mapsto \mapsto ab^{-1}$.]

Поэтому (см. теорему 1 лекции III.17) для каждого векторного поля X на $\mathfrak{G}$ и любого элемента $a \in \mathfrak{G}$ существует единственная максимальная интегральная кривая $\beta_a: I_a \rightarrow \mathfrak{G}$ поля X , проходящая при $t=0$ через точку a . Пусть $I = I_e$ и $\beta = \beta_e$.

Задача 7. Покажите, что если поле X левинвариантно, то $\beta_a = L_a \circ \beta$. [Указание. Так как

$$\begin{aligned}(L_a \circ \beta)^\circ(t) &= (dL_a)_{\beta(t)} \dot{\beta}(t) = \\ &= (dL_a)_{\beta(t)} X_{\beta(t)} = X_{a\beta(t)} = \\ &= X_{(L_a \circ \beta)(t)},\end{aligned}$$

то $L_a \circ \beta$ является — очевидно, максимальной — интегральной кривой поля X , проходящей при $t=0$ через точку a .]

Задача 8. Докажите, что если $s, t, s+t \in I$, то

$$(4) \quad \beta(s+t) = \beta(s)\beta(t).$$

[Указание. Обе кривые $t \mapsto \beta(s+t)$ и $t \mapsto \beta(s)\beta(t)$ являются интегральными кривыми левинвариантного поля X , проходящими при $t=0$ через точку $\beta(s)$.]

Задача 9. Для любого числа $t \in \mathbb{R}$ существует такое целое число $n > 0$, что $\frac{t}{n} \in I$. Покажите, что формула

$$(5) \quad \gamma(t) = \beta\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

корректно определяет гладкую кривую $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{G}$, являющуюся однопараметрической подгруппой. [Указание. Если $\frac{t}{n} \in I$ и $\frac{t}{m} \in I$, то $\frac{t}{nm} \in I$, и потому согласно формуле (4)

$$\beta\left(\frac{t}{n}\right) = \beta\left(\frac{t}{mn}\right)^m \quad \text{и} \quad \beta\left(\frac{t}{m}\right) = \beta\left(\frac{t}{mn}\right)^n.$$

Это дает корректность. Кроме того, если $\frac{t_0}{n_0} \in I$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $\frac{t}{n_0} \in I$ для любого t такого, что $|t - t_0| < \varepsilon$. Это дает гладкость.]

Задача 10. Покажите, что кривая (5) является — очевидно, максимальной — интегральной кривой левоинвариантного поля X . [Указание. Так как кривая (5) является однопараметрической подгруппой, то для любой точки $a = \gamma(t)$ кривая $L_a \circ \gamma: s \mapsto a\gamma(s)$ совпадает с кривой $s \mapsto \gamma(s+t)$, и потому

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (L_a \circ \gamma)^*(0) = (dL_a)_e \dot{\gamma}(0) = \\ &= (dL_a)_e \dot{\gamma}(0) = (dL_a)_e X_e = X_a = X_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$.]

Поскольку $\gamma(0) = e$ это доказывает, что $\gamma = \beta$ (и, в частности, — что $I = \mathbb{R}$).

В итоге мы получаем следующее предложение:

Предложение 1. Однопараметрические подгруппы группы Ли $\mathcal{G}$ — это в точности проходящие при $t = 0$ через точку e максимальные интегральные кривые левоинвариантных векторных полей на $\mathcal{G}$. $\square$

Следствие. Для любого вектора $A \in T_e \mathcal{G}$ существует единственная однопараметрическая подгруппа β , для которой

$$\dot{\beta}(0) = A. \quad \square$$

Таким образом, однопараметрические подгруппы группы Ли $\mathcal{G}$ находятся в естественном биективном соответствии с элементами алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathcal{G})$.

Однопараметрическую подгруппу, отвечающую элементу $X \in \mathfrak{g}$, мы будем обозначать символом β_X или β_A , где $A = X_e$. Таким образом, по определению

$$\dot{\beta}_A(0) = A$$

для любого вектора $A \in T_e \mathcal{G}$.

Определение 2. Отображение

$$\exp: T_e \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

определенное формулой

$$\exp A = \beta_A(1), \quad A \in T_e \mathcal{G},$$

называется экспоненциальным отображением.

Очевидно, что для кривой $t \mapsto \beta_A(\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, касательным вектором в точке 0 является вектор $\lambda \dot{\beta}_A(0) = \lambda A$, и эта кривая также является однопараметрической под-

группой. Следовательно,

$$(6) \quad \beta_A(\lambda t) = \beta_{\lambda A}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

При $t = 1$ из формулы (6) следует, что $\beta_A(\lambda) = \beta_{\lambda A}(1)$, т. е. — после замены λ на t , — что

$$(7) \quad \beta_A(t) = \exp tA.$$

В свете примера 2 это означает, что отображение $\exp$ является обобщением на любые группы Ли $\mathcal{G}$ матричного отображения $A \mapsto e^A$. Это объясняет как его название, так и обозначение.

Так как согласно формуле (7) $\beta_A(-1) = \exp(-A)$ и $\beta_A(-1)\beta_A(1) = \beta_A(0) = e$, то $\exp(-A) = \beta_A(1)^{-1}$, т. е.

$$(8) \quad \exp(-A) = (\exp A)^{-1}, \quad A \in T_e \mathcal{G}.$$

В дальнейшем для упрощения формул вместо $(\exp A)^{-1}$ мы будем писать $\exp A^{-1}$.

Как мы знаем из лекции III.17, каждое векторное поле X определяет некоторый максимальный поток $\{\varphi_t\}$, для которого $\varphi_t(a) = \beta_a(t)$, где β_a — максимальная интегральная кривая поля X , проходящая при $t = 0$ через точку a . Так как для левоинвариантного поля X кривые β_a определены на всей оси $\mathbb{R}$, то для каждого левонинвариантного поля X на группе Ли $\mathcal{G}$ поток $\{\varphi_t\}$ состоит из диффеоморфизмов $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ (является, как говорят, *полным потоком*). Так как $\beta_a(t) = a\beta_X(t)$, то эти диффеоморфизмы действуют по формуле

$$\varphi_t(a) = a \cdot \exp tA, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{G},$$

где $A = X_e$, т. е. являются диффеоморфизмами $R_{\exp tA}$.

Так как $\beta_A(0) = e$ и $\dot{\beta}_A(0) = A$, то в произвольной карте $(U, x^1, \dots, x^n)$, центрированной в точке e , кривая β_A задается вектор-функцией $x(t)$ вида

$$x(t) = at + c_2(a)t^2 + \dots + c_m(a)t^m + \dots,$$

где a — строка координат вектора A в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

пространства $T_e \mathcal{G}$, а $c_2(a), \dots, c_m(a), \dots$ — некоторые вектор-функции от a (гладкие в силу теоремы о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от

начальных данных). При этом, если $|\lambda|$ достаточно мало (чтобы в U существовала точка с координатами $x^i(\lambda t)$, $1 \leq i \leq n$), то согласно формуле (6) тождественно по t должно иметь место равенство

$$(\lambda a) t + c_1(\lambda a) t^2 + \dots + c_m(\lambda a) t^m + \dots = \\ = a(\lambda t) + c_1(a)(\lambda t)^2 + \dots + c_m(a)(\lambda t)^m + \dots$$

Отсюда следует, что

$$c_2(\lambda a) = \lambda^2 c_2(a), \dots, c_m(\lambda a) = \lambda^m c_m(a),$$

т. е. что для любого $m \geq 2$ функция $c_m(a)$ является однородной функцией от a степени m .

Задача 11. Покажите, что функции $c_m(a)$ являются многочленами от a (т. е. многочленами от $a^1, \dots, a^n$ являются все их компоненты).

Поскольку

$$\lambda^m \frac{\partial c_m(a)}{\partial a^i} = \frac{\partial [\lambda^m c_m(a)]}{\partial a^i} = \lambda \frac{\partial c_m}{\partial a_i}(\lambda a),$$

все частные производные первого порядка каждой из функций c_m являются однородными функциями степени $m-1 \geq 1$, и значит их значения в точке 0 равны нулю:

$$(9) \quad \left(\frac{\partial c_m}{\partial a^i} \right)_0 = 0 \text{ для любого } m \geq 2 \text{ и любого } i = 1, \dots, n.$$

С другой стороны, если вектор a достаточно мал (чтобы в U существовала точка с координатами $x^i(1)$), то точка $\exp A$ будет принадлежать окрестности U и согласно формуле (8) ее координаты x^i будут выражаться формулой

$$(10) \quad x^i = a^i + c_1^i(a) + \dots + c_m^i(a) + \dots,$$

где $a^i, c_1^i(a), \dots, c_m^i(a), \dots$ — координаты векторов $a, c_1(a), \dots, c_m(a)$. По определению это означает, что в некоторой окрестности точки $0 \in T_e \mathcal{S}$ отображение $\exp$ ~~записывается~~ в координатах функциями (10).

Поскольку в силу формул (9) значения частных производных функций (10) в точке 0 выражаются формулой

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right)_0 = \delta_j^i,$$

т. е. составляют единичную матрицу E , отсюда следует, что дифференциал $d \exp$, отображения $\exp$ в точке $0 \in T_e \mathcal{S}$, рассматриваемый в силу отождествления $T_0(T_e \mathcal{S}) = T_e \mathcal{S}$

как отображение

$$d \exp_e: T_e \mathfrak{G} \rightarrow T_e \mathfrak{G},$$

является тождественным отображением.

Поэтому отображение

$$\exp: T_e \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$$

в точке 0 этально, т. е. диффеоморфно отображает окрестность точки 0 в алгебре Ли $T_e \mathfrak{G} = \mathfrak{g}$ на окрестность точки e в группе Ли $\mathfrak{G}$.

Эти окрестности называются *нормальными окрестностями* (точек 0 и e соответственно). [Впрочем, от нормальных окрестностей $U^{(e)}$ в $T_e \mathfrak{G}$ обычно еще требуется выполнения условия *звездности* (если $A \in U^{(e)}$, то $\lambda A \in U^{(e)}$ для любого λ , $0 \leq \lambda \leq 1$).]

Для любой нормальной окрестности U точки e в группе $\mathfrak{G}$ композиция h отображения $\exp^{-1}: U \rightarrow T_e \mathfrak{G}$ и произвольного координатного изоморфизма $T_e \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является диффеоморфным отображением окрестности U на открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$. По определению это означает, что пара (U, h) является картой в точке e группы Ли $\mathfrak{G}$.

Карты такого вида называются *нормальными картами*, а соответствующие локальные координаты — *нормальными координатами*. (Употребляется также термин — *канонические координаты первого рода*.)

Нормальные координаты характеризуются, очевидно, тем, что однопараметрические подгруппы задаются в них линейными функциями.

Задача 12. Докажите, что связная топологическая группа порождается любой окрестностью единицы U . [Указание. Множество, состоящее из всевозможных произведений элементов из U , одновременно замкнуто и открыто.]

В частности, если группа Ли $\mathfrak{G}$ связна, то она порождается любой нормальной окрестностью единицы U . Поскольку $U \subset \exp \mathfrak{g}$, отсюда следует, что каждая связная группа Ли $\mathfrak{G}$ порождается множеством $\exp \mathfrak{g}$. (Заметим, что, вообще говоря, $\exp \mathfrak{g} \neq \mathfrak{G}$.)

Задача 13. Опишите множество $\exp \mathfrak{g}$ для алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}(n)$ и удостоверьтесь, что группы $GL^+(n; \mathbb{R})$ и $SO(n)$ действительно порождаются этими множествами (при этом $\exp \mathfrak{so}(n) = SO(n)$).

Произвольная нормальная окрестность U , точки $0 \in T_e \mathfrak{G}$ содержит (докажите!) такую окрестность V , что для лю-

бых векторов $A, B \in V_0$, точка $\exp A \cdot \exp B$ принадлежит окрестности $U = \exp U_0$ точки $e \in \mathcal{G}$ и, значит, имеет вид $\exp C$, где $C \in U_0$. Мы положим

$$(11) \quad C = m(A, B).$$

Таким образом, по определению

$$\exp A \cdot \exp B = \exp m(A, B)$$

для любых векторов $A, B \in U_0$.

Образ a вектора A при произвольном координатном изоморфизме $T_e \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является не чем иным, как вектором нормальных координат точки $a = \exp A$ в соответствующей нормальной карте (U, h) . Поэтому вектор-функция $m(a, b)$, выражающая в карте (U, h) умножение в группе $\mathcal{G}$ (см. формулу (8) лекции 13), выражает в координатах операцию (11). Следовательно,

$$m(A, B) = A + B + A * B + \dots,$$

где $*$ — операция $*$ из формулы (9) лекции 13, перенесенная в $T_e \mathcal{G}$ посредством изоморфизма $(dh)_e: T_e \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (т. е. операция из предложения 3 лекции 13, построенная с помощью нормальной карты (U, h)).

Как мы знаем (см. формулу (10) лекции 13), для любой карты (U, h) , центрированной в точке e , вектор a^{-1} координат точки a^{-1} выражается формулой

$$a^{-1} = -a + a * a + \dots$$

С другой стороны, согласно формуле (8), если карта (U, h) нормальна, то $a^{-1} = -a$. Это доказывает, что $a * a = 0$, т. е. что построенная с помощью нормальных координат операция $*$ антикоммутативна (в пространстве $\mathbb{R}^n$, а, значит, и в пространстве $T_e \mathcal{G}$) и потому (см. замечание 1 лекции 13) выражается через умножение в алгебре Ли:

$$A * B = \frac{1}{2} [A, B].$$

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1. Для любых векторов $A, B \in T_e \mathcal{G}$ из некоторой окрестности нулевого вектора имеет место формула

$$(12) \quad \exp A \cdot \exp B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots \right),$$

где многоточие обозначает члены степени ≥ 3 . $\square$

Согласно этой теореме умножение в группе $\mathcal{L} \mathfrak{G}$ вблизи точки e однозначно восстанавливается—по крайней мере, с точностью до членов порядка ≥ 3 —по умножению в ее алгебре $\mathfrak{L} \mathfrak{G}$.

Замечание 1. На самом деле *это восстановление полное*, т. е. члены всех степеней в формуле (12) выражаются через операцию $[\cdot, \cdot]$, но доказательство требует вычислений, далеко выходящих за рамки этого курса.

Теорема 1 имеет много важных следствий. За недостатком места мы изложим их в виде серии задач.

Для каждого элемента a группы $\mathfrak{G}$ —очевидно, гладкое—отображение

$$(13) \quad \text{int}_a: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}, \quad x \mapsto axa^{-1}, \quad x \in \mathfrak{G},$$

является автоморфизмом группы $\mathfrak{G}$, называемым *внутренним автоморфизмом, порожденным элементом a* . Дифференциал $d(\text{int}_a)_e$ автоморфизма int_a в точке e представляет собой обратимый линейный оператор $T_e \mathfrak{G} \rightarrow T_e \mathfrak{G}$ и обозначается символом $\text{Ad } a$. Отображение

$$(14) \quad \text{Ad}: a \mapsto \text{Ad } a$$

является—очевидно, гомоморфным—отображением группы $\mathfrak{G}$ в группу $\text{Aut } \mathfrak{g}$ всех обратимых линейных операторов линейного алгебры $\mathfrak{g} = T_e \mathfrak{G}$. Оно называется *присоединенным представлением группы $\mathfrak{L} \mathfrak{G}$* .

Задача 14. Покажите, что отображение Ad гладко.

Дифференциал отображения Ad в точке e обозначается символом ad . Он является линейным отображением

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$$

линейного алгебры $\mathfrak{g}$ в линейный алгебру $I(\text{Aut } \mathfrak{g}) = \text{End } \mathfrak{g}$ всех линейных отображений $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Задача 15. Покажите, что для любых элементов $A, B \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$(15) \quad (\text{ad } A) B = [A, B].$$

[Указание. Так как отображение $s \mapsto \text{Ad}(\beta_A(s)) B$ является кривой в линейном пространстве, то

$$[(\text{Ad} \circ \beta_A)'(0)] B = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{Ad}(\beta_A(s)) B - \text{Ad } e B}{s},$$

а в силу общей формулы (3) $\text{ad } A = (\text{Ad} \circ \beta_A)'(0)$,

$$\text{Ad}(\beta_A(s)) B = (\text{int}_{\beta_A(s)} \circ \beta_B)'(0).$$

С другой стороны, согласно формуле (12)

$$(16) \quad (\text{int}_{\beta_A(s)} \circ \beta_B)(t) = (\exp sA)(\exp tB)(\exp sA)^{-1} = \\ = \exp(tB + st[A, B] + \dots)$$

и, значит, $\text{Ad}(\beta_A(s))B = B + s[A, B] + \dots$

Задача 16. Выведите отсюда, что

$$(17) \quad \text{Ad}(\exp A) = e^{\text{ad } A}$$

для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$. [Указание. Обе кривые

$$t \mapsto \text{Ad}(t \exp A) \text{ и } t \mapsto e^{t \text{ad } A}$$

являются однопараметрическими подгруппами группы Ли $\text{Aut } \mathfrak{g}_{\text{Лин}}$, имеющими при $t=0$ один и тот же касательный вектор $(d \text{Ad})_e A = \text{ad } A$.]

Задача 17. Пусть u_A и u_B — кривые в группе $\mathcal{G}$, проходящие при $t=0$ через точку e и имеющие при $t=0$ касательные векторы A и B соответственно. Покажите, что кривая

$$t \mapsto u_A(t) u_B(t)$$

имеет при $t=0$ касательный вектор $A+B$, а кривая

$$t \mapsto u_A(\tau) u_B(\tau) u_A(\tau)^{-1} u_B(\tau)^{-1},$$

где $\tau = \text{sign } t \cdot \sqrt{|t|}$, — касательный вектор $[A, B]$ (и, значит, является в точке $t=0$ гладкой — класса C^1 — кривой). [Указание. По условию

$$u_A(t) = \exp(tA + \dots) \text{ и } u_B(t) = \exp(tB + \dots).$$

Следовательно, согласно формуле (12)

$$u_A(t) u_B(t) = \exp(t(A+B) + \dots)$$

и

$$u_A(\tau) u_B(\tau) u_A(\tau)^{-1} u_B(\tau)^{-1} = \exp(t[A, B] + \dots).]$$

В частности, отсюда следует, что для любых элементов $A \in \mathfrak{g}$ и $B \in \mathfrak{g}$ элементы $A+B$ и $[A, B]$ являются касательными векторами в точке $t=0$ к кривым

$$t \mapsto \beta_A(t) \beta_B(t) \text{ и } t \mapsto \beta_A(\tau) \beta_B(\tau) \beta_A(\tau)^{-1} \beta_B(\tau)^{-1},$$

где β_A и β_B — однопараметрические подгруппы, отвечаю-

щие элементам A и B . Это (вместе с формулой (5)) описывает операции в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в терминах однопараметрических подгрупп.

Напомним (см. лекцию 13), что группа Ли $\mathcal{H}$ называется *подгруппой Ли* (или *гладкой подгруппой*) группы Ли $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ содержится в $\mathcal{G}$ и является в $\mathcal{G}$ подгруппой и одновременно подмногообразием, т. е. иными словами, если вложение $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ гомоморфно, гладко и является погружением.

При обсуждении этого понятия удобно иметь специальное название для подмножеств группы Ли $\mathcal{G}$, являющихся ее подгруппами как абстрактной группы, безотносительно к топологии и гладкости. За отсутствием лучшего термина мы будем называть такие подмножества *абстрактными подгруппами*.

Таким образом, по определению подмножество $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда представляет собой подгруппу Ли, когда оно является

- а) абстрактной подгруппой;
- б) подмногообразием, т. е. лежащим в $\mathcal{G}$ многообразием, для которого вложение $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ представляет собой
 - б₁) гладкое отображение,
 - б₂) погружение (обладает тем свойством, что для любой точки $p \in \mathcal{H}$ линейное отображение $(d\iota)_p: T_p \mathcal{H} \rightarrow T_p \mathcal{G}$ монотонно);
- в) группой Ли (умножение $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ является гладким отображением).

Оказывается, что эти условия не независимы и некоторые из них могут быть выведены из других (или существенно ослаблены). Например, мы знаем (см. задачу 5 лекции 13), что выполнения условий б₁ и б₂ можно требовать лишь в единице e группы $\mathcal{G}$ (абстрактная подгруппа $\mathcal{H}$, являющаяся группой Ли, будет подгруппой Ли, если вложение $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ гладко в точке e и является в этой точке погружением).

Задача 18. Докажите, что абстрактная подгруппа, являющаяся связным подмногообразием, будет подгруппой Ли (в предположении связности условие в вытекает из условий а и б). [Указание. Ср. предложение 2 лекции 15.]

Задача 19. Докажите, что условие б₂ вытекает из условий а, б₁ и в. [Указание. Ясно, что для любой однопараметрической подгруппы $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{H}$ отображение $\iota \circ \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ представляет собой — при выполнении условия б₁ — однопараметрическую подгруппу группы Ли $\mathcal{G}$. Отсюда следует, что имеет место

коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_e \mathcal{H} & \xrightarrow{(d\iota)_e} & T_e \mathcal{G} \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G} \end{array}$$

Поэтому если отображение $(d\iota)_e$ не мономорфно, то существует вектор $A \neq 0$, принадлежащий нормальной окрестности нуля линейала $T_e \mathcal{H}$, для которого $\text{exp } A = e$, что невозможно.]

Как всегда, мы будем считать мономорфизм $(d\iota)_e: T_e \mathcal{H} \rightarrow T_e \mathcal{G}$ вложением, т. е. будем считать, что $T_e \mathcal{H} \subset T_e \mathcal{G}$.

Задача 20. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{h} = T_e \mathcal{H}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G}$.

Если $\mathcal{H}_e$ — компонента единицы группы Ли $\mathcal{H}$ (и, значит, связная группа Ли), то, конечно, $T_e \mathcal{H}_e = T_e \mathcal{H}$. Таким образом, если подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G}$ является алгеброй Ли некоторой подгруппы Ли, то она будет алгеброй Ли и некоторой связной подгруппы.

Оказывается, что связные подгруппы Ли группы Ли $\mathcal{G}$ и подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G}$ взаимно однозначно друг другу соответствуют.

Теорема 2. Соответствие

подгруппа Ли $\Rightarrow$ ее алгебра Ли

между множеством связных подгрупп Ли группы Ли $\mathcal{G}$ и множеством всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{G}$ биективно.

Иными словами, для любой подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ существует — и только одна! — связная подгруппа Ли $\mathcal{H}$, для которой $T_e \mathcal{H} = \mathfrak{h}$.

Доказательство теоремы 2, хотя идейно и простое, технически довольно сложно. Поэтому мы изложим лишь его основные этапы, относя подробности в задачи и мелкий шрифт.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное гладкое многообразие. Гладкое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ называется *подрасслоением* гладкого векторного расслоения $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{X})$, если $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ и $\pi = \pi'|_{\mathcal{E}}$. Подрасслоение однозначно определено многообразием $\mathcal{E}$ и, как правило, с ним отождествляется.

Особое значение имеют подрасслоения касательного расслоения $\tau \mathcal{X} = (T\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$. Они называются *распределениями на $\mathcal{X}$* . Слой произвольного распределения $\mathcal{E}$ над точкой $p \in \mathcal{X}$ представляет собой подпространство $T_p \mathcal{X} \cap \mathcal{E}$.

касательного пространства $T_p\mathcal{X}$. Мы будем обозначать его символом $\mathcal{E}_p$.

В соответствии с общей терминологией теории векторных расслоений (см. лекцию 6) размерность пространств $\mathcal{E}_p$ (одна и та же для всех p) называется *рангом* распределения $\mathcal{E}$.

Каждое распределение $\mathcal{E}$ определяет на $\mathcal{X}$ поле $p \mapsto \mathcal{E}_p$ подпространств $\mathcal{E}_p \subset T_p\mathcal{X}$.

Задача 21. Покажите, что это устанавливает биективное соответствие между распределениями ранга l и гладкими полями l -мерных подпространств.

Таким образом, *распределения и гладкие поля подпространств* — это фактически одно и то же. [Например, каждую связность мы можем рассматривать как распределение (на тотальном пространстве $\mathcal{E}$ расслоения ξ).]

Подмногообразие $\mathcal{U}$ многообразия $\mathcal{X}$ (вообще говоря, лишь погруженное) называется *интегральным многообразием* распределения $\mathcal{E}$, если $T_p\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_p$ для любой точки $p \in \mathcal{U}$. Связное интегральное многообразие называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком большем связном интегральном многообразии. Распределение $\mathcal{E}$ ранга n называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия $\mathcal{X}$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие $\mathcal{U}$ этого распределения, имеющее размерность n (т. е. такое, что $T_p\mathcal{U} = \mathcal{E}_p$).

Пусть $\mathfrak{h}$ — произвольная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$. Так как $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, то элементами алгебры $\mathfrak{h}$ мы можем считать левоинвариантные векторные поля на группе $\mathcal{G}$. Поэтому, для любой точки $p \in \mathcal{G}$ в касательном пространстве $T_p\mathcal{G}$ будет определено подпространство $\mathfrak{h}_p$, состоящее из всех векторов вида X_p , где $X \in \mathfrak{h}$. (При интерпретации $\mathfrak{h}$ как подпространства касательного пространства $T_e\mathcal{G}$ подпространство $\mathfrak{h}_p$ будет не чем иным, как образом $(dL_p)_e \mathfrak{h}$ подпространства $\mathfrak{h} \subset T_e\mathcal{G}$ при отображении $(dL_p)_e: T_e\mathcal{G} \rightarrow T_p\mathcal{G}$.)

Задача 22. Докажите, что объединение $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ всех подпространств $\mathfrak{h}_p$ является распределением на $\mathcal{G}$ (со слоями $\mathfrak{h}_p$).

Если $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли связной подгруппы Ли $\mathcal{H}$, то подгруппа $\mathcal{H}$ и все ее смежные классы $a\mathcal{H}$ будут, очевидно, максимальными интегральными многообразиями распределения $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ и, значит, в этом случае распределение $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ вполне интегрируемо.

Ниже мы докажем, что

А. Распределение $\mathcal{G}(\mathfrak{h})$ вполне интегрируемо для любой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Имея это в виду, рассмотрим максимальное интегральное подмногообразие $\mathcal{H}$ распределения $\mathcal{G}(\mathfrak{h})$, содержащее точку e .

Так как для любого элемента $a \in \mathcal{H}$ подмногообразие $a\mathcal{H} = L_a\mathcal{H}$ является максимальным интегральным подмногообразием распределения $\mathcal{G}(\mathfrak{h})$, содержащим элемент a , то в силу единственности максимальных интегральных подмногообразий вполне интегрируемых распределений должно иметь место равенство $a\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Это означает, что $\mathcal{H}$ является абстрактной подгруппой группы Ли $\mathcal{G}$.

Подмногообразие $\mathcal{Y}$ многообразия $\mathcal{X}$ называется консервативным, если для любого гладкого многообразия $\mathcal{Z}$ каждое отображение $\varphi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ гладко тогда и только тогда, когда оно гладко как отображение в $\mathcal{X}$ (т. е. гладко отображение $\iota \circ \varphi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, где $\iota: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ — вложение).

Ясно, что каждое вложенное подмногообразие консервативно, но существуют и консервативные погруженные подмногообразия. Именно, ниже мы докажем, что

Б. В любой группе Ли $\mathcal{G}$ каждое максимальное интегральное подмногообразие произвольного [вполне интегрируемого] распределения консервативно.

В частности, консервативным подмногообразием является подгруппа $\mathcal{H}$. Следовательно, умножение

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

является гладким отображением (потому что гладким отображением является его композиция с вложением $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$), т. е. подгруппа $\mathcal{H}$ является подгруппой Ли.

Так как по построению алгеброй Ли группы $\mathcal{H}$ является подалгебра $\mathfrak{h}$, то это, очевидно, доказывает теорему 2. $\square$

Таким образом, нам остается лишь доказать утверждения А и Б.

Мы начнем с утверждения А.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное распределение на гладком многообразии $\mathcal{X}$ и пусть $\alpha[\mathcal{G}]$ — совокупность всех векторных полей $X \in \alpha\mathcal{X}$, обладающих тем свойством, что $X_p \in \mathcal{G}_p$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$. Ясно, что $\alpha[\mathcal{G}]$ является подмодулем алгебры Ли $\alpha\mathcal{X}$ всех векторных полей на $\mathcal{X}$. Распределение $\mathcal{G}$ называется инволютивным, если $\alpha[\mathcal{G}]$ яв-

ляется подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}[\mathcal{X}]$, т. е. если $[X, Y] \in \mathfrak{a}[\mathcal{E}]$ для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}[\mathcal{E}]$.

Задача 23. Покажите, что для любой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$ распределение $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ инволютивно.

Задача 24. Покажите, что для любого распределения $\mathcal{E}$ ранга n модуль $\mathfrak{a}[\mathcal{E}]$ является локально свободным модулем ранга n , т. е. многообразие $\mathcal{X}$ обладает открытым покрытием $\{U\}$, над любым элементом U которого $\mathbf{F}_K U$ -модуль $\mathfrak{a}[\mathcal{E}|_U]$, где $\mathcal{E}|_U$ — ограничение распределения $\mathcal{E}$ над U , является свободным модулем ранга n над алгеброй $\mathbf{F}_K U$. [Указание. Примите за U окрестности, тривиализирующие расслоение $\mathcal{E}$.]

Базисы $\mathbf{F}_K U$ -модуля $\mathfrak{a}[\mathcal{E}|_U]$ называются базисами над U модуля $\mathfrak{a}[\mathcal{E}]$.

Задача 25. Докажите, что следующие свойства распределения $\mathcal{E}$ равносильны:

а. Распределение $\mathcal{E}$ вполне интегрируемо.

б. Многообразие $\mathcal{X}$ обладает атласом, состоящим из таких карт $(U, x^1, \dots, x^m)$, $m = \dim \mathcal{X}$, что каждое подмногообразие в U , задаваемое уравнениями

$$(18) \quad x^{n+1} = \text{const}, \dots, x^m = \text{const},$$

является интегральным многообразием распределения $\mathcal{E}$.

в. Многообразие $\mathcal{X}$ обладает атласом, состоящим из таких карт $(U, x^1, \dots, x^m)$, что векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

составляют базис над U модуля $\mathfrak{a}[\mathcal{E}]$.

[Указание. Утверждения б и в являются очевидными переформулировками один другого. Импликация $\text{а} \Rightarrow \text{б}$ легко вытекает из установленных в лекции III.13 общих свойств подмногообразий. Для доказательства импликации $\text{б} \Rightarrow \text{а}$ введите на $\mathcal{X}$ топологию, база открытых множеств которой состоит из интегральных многообразий распределения $\mathcal{E}$, и рассмотрите компоненты многообразия $\mathcal{X}$ в этой топологии.]

Задача 26. Покажите, что распределение $\mathcal{E}$ тогда и только тогда инволютивно, когда существует открытое покрытие $\{U\}$ многообразия $\mathcal{X}$, над каждым элементом U которого модуль $\mathfrak{a}[\mathcal{E}]$ обладает таким базисом $X_1, \dots, X_n$, что

$$(19) \quad [X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \text{ на } U,$$

где f_{ij}^k — некоторые гладкие функции на U .

Утверждения задач 23 и 24 показывают, что, как свойство быть вполне интегрируемым, так и свойство быть инволютивным, являются *локальными свойствами* (верными всюду, если они верны в окрестности каждой точки).

Задача 27. Докажите, что *любое вполне интегрируемое распределение инволютивно*. [У к а з а н и е. Если поля X и Y касаются подмногообразия, то и поле $[X, Y]$ обладает этим свойством.]

Оказывается, что обратное утверждение также верно.

Теорема 3. *Каждое инволютивное распределение вполне интегрируемо.*

Эта теорема известна как теорема Фробениуса. Нужное нам утверждение А является ее непосредственным следствием (см. задачу 23). Поэтому нам остается только доказать теорему 3.

Так как свойства полной интегрируемости и инволютивности являются локальными свойствами, то для доказательства теоремы 3 достаточно доказать следующее утверждение чисто аналитического характера:

(★) Пусть в области U пространства R^m , содержащей точку 0, задано n векторных полей $X_1, \dots, X_n$, линейно независимых над алгеброй FU и удовлетворяющих условию (19). Тогда в некоторой окрестности $V \subset U$ точки 0 существуют такие координаты $x^1, \dots, x^m$, что на V поля $X_1, \dots, X_n$ линейно выражаются (над FV) через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Доказательство. Предположим, что в U существуют такие координаты $x^1, \dots, x^m$, что

а. Поля $X_1, \dots, X_{n-1}$ выражаются лишь через поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}.$$

б. При $x^m = 0$ компоненты $X_1^k, \dots, X_{n-1}^k$ этих полей с $n \leq k \leq m$ тождественно равны нулю.

в. Для поля X_n имеет место равенство

$$X_n = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Оказывается, что тогда поля $X_1, \dots, X_n$ линейно выражаются (над FU) через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Действительно, так как согласно в $X_n^i = \delta_m^i$, то

$$[X_n, X_j]^k = X_n^i \frac{\partial X_j^k}{\partial x^i} - X_j^i \frac{\partial X_n^k}{\partial x^i} = \frac{\partial X_j^k}{\partial x^m}, \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n-1, \\ 1 \leq k \leq m, \end{matrix}$$

а так как согласно а и в

$$[X_n, X_j] = f_{nj}^1 X_1 + \dots + f_{nj}^{n-1} X_{n-1},$$

то компоненты X_j^k , $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq k \leq m$, полей $X_1, \dots, X_{n-1}$ удовлетворяют (как функции от x_m) системе однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial X_j^k}{\partial x_m} = f_{nj}^1 X_1^k + \dots + f_{nj}^{n-1} X_{n-1}^k.$$

Но согласно б при $x^m = 0$ эти функции с $n \leq k \leq m$ равны нулю. Поэтому они равны нулю тождественно. Значит, поля $X_1, \dots, X_{n-1}$

линейно выражаются через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$, а потому поля $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n$ — через поля $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Таким образом, для доказательства утверждения (★) достаточно доказать существование координат $x^1, \dots, x^m$, обладающих свойствами а, б и в (и затем x^m обозначить через x^n). Мы сделаем это индукцией по n .

При $n=1$ условия а, б бессодержательны (так же как и условие инволютивности (19)). Поэтому в этом случае надо лишь доказать, что для произвольного поля X , отличного от нуля в точке 0, существует такая центрированная в точке 0 карта $(V, x^1, \dots, x^m)$, что

$$X = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Пусть $x^1, \dots, x^m$ — произвольные координаты на R^m (или хотя бы на U). Без ограничения общности можно предполагать, что m -я компонента X^m поля X отлична от нуля в точке 0. Выбрав число $\varepsilon > 0$, рассмотрим такую окрестность W точки 0 пространства R^{m-1} (отождествленного с подпространством $x^m = 0$ пространства R^m), что $W \subset R^{m-1} \cap U$ и для любой точки $w \in W$, $w = (w^1, \dots, w^{m-1})$, интегральная кривая γ_w поля X , проходящая при $t=0$ через точку $(w, 0) \in R^m$, определена при $|t| < \varepsilon$. (Окрестность W существует в силу стандартных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений.) Отображение $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R^m$, переводящее точку (w, t) в точку $\gamma(t)$, гладко и его якобиева матрица в точке $(0, 0)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \cdot & X^1(0) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ E & \cdot \\ \cdot & X^{m-1}(0) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \dots 0 & X^m(0) \end{vmatrix}.$$

Поэтому в силу условия $X^m(0) \neq 0$ отображение $(w, t) \mapsto \gamma_w(t)$ этакно в точке $(0, 0)$, и, значит, в $\mathbb{R}^m$ существует окрестность V точки 0 , в которой числа $w^1, \dots, w^{m-1}, t$ являются локальными координатами. При этом в V будет иметь место равенство $X = \frac{\partial}{\partial t}$.

Для завершения доказательства остается теперь лишь соответствующим образом переобозначить координаты $w^1, \dots, w^{m-1}, t$.

[Фактически мы воспроизвели стандартное доказательство теоремы о выпрямляемости траекторий векторного поля в окрестности любой точки, в которой оно отлично от нуля.]

Предположив теперь, что для $n-1$ полей утверждение $(\star)$ уже доказано, докажем, что для n полей $X_1, \dots, X_n$ существуют координаты $x^1, \dots, x^m$, удовлетворяющие условиям а, б и в.

Применив к полю X_n уже доказанный случай теоремы, мы немедленно можем добиться выполнения условия в. Заменяя затем поля $X_1, \dots, X_{n-1}$ полями

$$X_1 - X_1^m \frac{\partial}{\partial x^m} = X_1 - X_1^m X_n, \dots, X_{n-1} - X_{n-1}^m \frac{\partial}{\partial x^m} = X_{n-1} - X_{n-1}^m X_n,$$

мы добьемся выполнения и условия а. Следовательно, без ограничения общности мы с самого начала можем считать условия а и в выполненными, и задача состоит только в том, чтобы добиться выполнения условия б.

Пусть $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ — ограничения полей $X_1, \dots, X_{n-1}$ на $U \cap \mathbb{R}^{m-1}$ (т. е. их значения при $x^m = 0$). Так как эти поля, очевидно, удовлетворяют (на $U \cap \mathbb{R}^{m-1}$) условию (19), то по предположению индукции существует такая карта $(W, y^1, \dots, y^{m-1})$ с $W \subset U \cap \mathbb{R}^{m-1}$, что поля $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ линейно выражаются на W через поля

$$\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}} \text{ и, значит, их компоненты } Y_1^k, \dots, Y_{n-1}^k \text{ в координатах } y^1, \dots, y^{m-1} \left(\text{т. е. в базисе } \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{m-1}} \right) \text{ при}$$

$n \leq k \leq m-1$ тождественно равны нулю. Для полей $X_1, \dots, X_{n-1}$ это означает, что компоненты $X_1^k, \dots, X_{n-1}^k$, $n \leq k \leq m-1$, в координатах $y^1, \dots, y^{m-1}, x^m$ (определенных на множестве V вида $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число) равны нулю при $x^m = 0$, т. е. что для координат $y^1, \dots, y^{m-1}, X^n$ условие б выполнено. Поскольку условия а и в для координат $y^1, \dots, y^{m-1}, x^m$ остаются, очевидно, выполненными, теорема Фробениуса тем самым полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Поскольку в условии инволютивности речь идет о подалгебрах алгебр $\text{Ли } \mathcal{X}$, многообразие $\mathcal{X}$ в теореме Фробениуса мы предполагали многообразием класса C^∞ . Однако теорема Фробениуса справедлива и для

многообразий класса C^r , $r \geq 2$; нужно только под инволютивностью понимать выполнение условия (19) с функциями f_{ij}^k класса C^{r-1} .

Обратимся теперь к утверждению Б.

Задача 28. Докажите, что *максимальное интегральное многообразие $\mathcal{U}$ вполне интегрируемого распределения, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, консервативно.*

[Указание. Каждая точка $p \in \mathcal{U}$ обладает в $\mathcal{X}$ такой координатной окрестностью, что компоненты пересечения $U \cap \mathcal{U}$ (в топологии многообразия $\mathcal{U}$) задаются уравнениями вида (18), причем число этих компонент не более чем счетно. Поэтому они являются компонентами пересечений $U \cap \mathcal{U}$ и в топологии многообразия $\mathcal{X}$.]

Задача 29. Докажите, что *любая связная группа Ли удовлетворяет второй аксиоме счетности.* [Указание. Выбрав в некоторой окрестности единицы U счетное всюду плотное множество C , рассмотрите всевозможные окрестности вида gV , где $V \subset U$, а g — произвольное произведение элементов из C .]

Из утверждений задач 28 и 29 немедленно вытекает, что для доказательства утверждения Б достаточно доказать следующее предложение, имеющее, конечно, и самостоятельный интерес:

Предложение 2. Пусть $\mathcal{U}$ — подмногообразие многообразия $\mathcal{X}$. Если

а) подмногообразие $\mathcal{U}$ связно;

б) многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то подмногообразие $\mathcal{U}$ также удовлетворяет этой аксиоме.

Конечно, центр тяжести этого предложения — это случай погруженного подмногообразия $\mathcal{U}$, поскольку для вложенных подмногообразий оно тривиально (каждое подпространство пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, очевидным образом также удовлетворяет этой аксиоме). Мы также разобьем доказательство предложения 2 в серию задач.

Задача 30. Докажите, что если связное топологическое пространство $\mathcal{X}$ обладает таким открытым покрытием $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, что

1° каждое множество U_α удовлетворяет в индуцированной топологии второй аксиоме счетности;

2° для любого α семейство всех элементов покрытия $\mathcal{U}$, пересекающихся с U_α , счетно (или конечно),

то пространство $\mathcal{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. [Указание. Произвольно выберите в $\mathcal{U}$ элемент U_α , и рассмотрите всевозможные конечные последовательности $U_\alpha, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ элементов покрытия $\mathcal{U}$, обладающих тем свойством, что $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i-1}} \neq \emptyset$ для любого $i = 1, \dots, n$. Покажите, что объединение всех элементов всех таких последовательностей удовлетворяет второй аксиоме счетности и совпадает с $\mathcal{X}$.]

Задача 31. Докажите, что если связное топологическое пространство $\mathcal{X}$ обладает счетным открытым покрытием $\{U_i\}$, каждый элемент U_i которого является объединением непересекающихся открытых множеств U_{i, α_j} , удовлетворяющих второй аксиоме счетности, то само пространство $\mathcal{X}$ также удовлетворяет этой аксиоме. [Указание. Покрытие $\{U_{i, \alpha_j}\}$, состоящее из всех множеств U_{i, α_j} , удовлетворяет условиям задачи 30.]

Замечание 3. Отсюда немедленно следует, что любое пространство $\mathcal{E}$, накрывающее пространство $\mathcal{B}$, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, также удовлетворяет этой аксиоме. (Прообразы элементов счетного покрытия пространства $\mathcal{B}$, состоящего из равно накрытых множеств, составляют покрытие пространства $\mathcal{E}$, обладающее указанными в задаче 31 свойствами.)

Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *локально гомеоморфным*, если пространство $\mathcal{X}$ обладает таким открытым покрытием $\{U_\alpha\}$, что для любого α

а) множество $f(U_\alpha)$ открыто в $\mathcal{Y}$;

б) отображение f на U_α является гомеоморфизмом $U_\alpha \rightarrow f(U_\alpha)$.

Задача 32. Докажите, что если для связного топологического пространства $\mathcal{X}$ существует локально гомеоморфное отображение

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

то пространство $\mathcal{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. [Указание. Пусть $\{V_i\}$ — счетная база пространства $\mathbb{R}^n$, состоящая из связных открытых множеств, и пусть U_i — подмножество пространства $\mathcal{X}$ (возможно, пустое), являющееся объединением множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается посредством f на V_i . Подмножества U_i составляют покрытие пространства $\mathcal{X}$, удовлетворяющее условиям задачи 31.]

Задача 33. Пользуясь утверждением задачи 32, покажите предложение 1 сначала при $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, а затем в общем случае. [Указание. В последнем выводе воспользуйтесь утверждением задачи 30.]

Тем самым утверждения А и Б, и вместе с ними теорема 3, полностью доказаны. $\square$

Из того, что каждая подгруппа Ли является интегральным многообразием вполне интегрируемого распределения, немедленно вытекает также следующее утверждение, которое мы для удобства ссылок выделим в качестве отдельного предложения:

Предложение 3. Каждая имеющая не более чем счетное множество компонент подгруппа Ли является консервативным подмногообразием. $\square$

Пример взятой в дискретной топологии подгруппы R группы R^1 показывает, что условие счетности множества компонент здесь необходимо.

Отметим два непосредственных следствия этого предложения.

Следствие 1 (теорема единственности). Если в абстрактную подгруппу $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ можно ввести структуру подмногообразия, имеющего не более счетного множества компонент, относительно которой $\mathcal{H}$ является подгруппой Ли, то это можно сделать только одним способом.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — две подгруппы Ли, совпадающие как подмножества с $\mathcal{H}$ и имеющие счетное (или конечное) множество компонент. Нам нужно доказать, что $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, т. е. что гладкости на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ одинаковы. Для этого достаточно доказать, что оба тождественных отображения $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ гладки. Но это немедленно обеспечивается предложением 3.

Следствие 2. Отображение $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ тогда и только тогда является однопараметрической подгруппой подгруппы Ли $\mathcal{H}$, когда отображение $\iota \circ \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ представляет собой однопараметрическую подгруппу группы Ли. $\square$

Задача 34. Дайте прямое доказательство последнего утверждения. [Указание. Воспользуйтесь нормальными координатами.]

Замкнутые подгруппы групп Ли.— Теорема Картана.— Алгебраические группы.— Карты, согласованные с подгруппой Ли.— Слабейшая гладкость на подгруппе группы Ли.— Теорема Фрейденшталя.— Теорема Адо и третья теорема Ли.— Локально изоморфные группы Ли.— Групповые накрытия.— Существование универсального группового накрытия.

Подгруппы Ли группы Ли, являющиеся вложенными подмногообразиями, имеют, конечно, наиболее важное значение. Мы будем называть такие подгруппы *замкнутыми*. Основанием этой терминологии служит следующее предложение:

Предложение 1. Каждая замкнутая подгруппа Ли $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ является замкнутым подмножеством в $\mathcal{G}$.

Доказательство. Так как $\mathcal{H}$ вложено в $\mathcal{G}$, то точка $e \in \mathcal{H}$ обладает в $\mathcal{G}$ такой окрестностью U , что пересечение $U \cap \mathcal{H}$ замкнуто в U . Без ограничения общности можно считать, что $U^{-1} = U$. Пусть $a \in \mathcal{H}$. Тогда $aU^{-1} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ и, значит, существует такая точка $b \in \mathcal{H}$, что $b \in aU^{-1}$. Так как левый сдвиг $q \mapsto bq$ является диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{G}$, то множество $b(U \cap \mathcal{H}) = bU \cap \mathcal{H}$ замкнуто в bU , т. е. $bU \cap \overline{bU \cap \mathcal{H}} = bU \cap \mathcal{H}$. С другой стороны, $a \in bU$ и потому $a \in bU \cap \mathcal{H} \subset \overline{bU \cap \mathcal{H}}$. Следовательно, $a \in bU \cap \mathcal{H}$ и, значит, $a \in \mathcal{H}$. $\square$

Оказывается, что обратное утверждение также верно: если подгруппа Ли $\mathcal{H}$ является в $\mathcal{G}$ замкнутым множеством, то она замкнута (представляет собой вложенное подмногообразие). Мы докажем даже большее:

Теорема 1. Если подмножество $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ является одновременно

- 1) абстрактной подгруппой группы $\mathcal{G}$,
 - 2) замкнутым подмножеством топологического пространства $\mathcal{G}$,
- то $\mathcal{H}$ будет вложенным подмногообразием и, значит, замкнутой подгруппой Ли группы Ли $\mathcal{G}$.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько общих замечаний и лемм.

Пусть $\mathcal{G}$ — группа Ли и $\mathcal{H}$ — ее абстрактная подгруппа.

Мы скажем, что подгруппа $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию (F), если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $\mathcal{G}$ существует такое подмножество $\mathfrak{h}$, что

а) подмножество $\mathfrak{h}$ является линейным подпространством;

б) если $A \in \mathfrak{h}$, то $\exp A \in \mathcal{H}$;

в) существует такая нормальная окрестность U_0 нуля линейала $\mathfrak{g}$, что для вектора $A \in U_0$ включение $A \in \mathfrak{h}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\exp A \in \mathcal{H}$.

Для каждой замкнутой (вложенной) подгруппы Ли $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ точка e обладает в $\mathcal{G}$ нормальной окрестностью U , пересечение $V = U \cap \mathcal{H}$ которой с $\mathcal{H}$ является нормальной окрестностью точки e в $\mathcal{H}$. Поэтому, приняв за $\mathfrak{h}$ алгебру Ли группы $\mathcal{H}$ и положив $U_0 = \exp^{-1} U$, мы немедленно получим, что подгруппа $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию (F).

Для случая $\mathcal{G} = \text{GL}(n; \mathbb{R})$ подгруппы, удовлетворяющие условию (F), — это в точности матричные группы Ли в смысле определения 1 лекции III.11. Как мы знаем (см. предложение 1 лекции III.11 и замечание 1 лекции III.1), каждая такая подгруппа является гладкой подгруппой и одновременно вложенным подмногообразием, т. е. представляет собой замкнутую подгруппу Ли (с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$; см. замечание 2 лекции III.16). Но просмотрев заново доказательство предложения 1 лекции III.15, мы немедленно убедимся, что специфика группы $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ в нем фактически не используется и что оно практически дословно проходит для произвольной группы Ли $\mathcal{G}$. Поэтому каждая подгруппа $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$, удовлетворяющая условию (F), является замкнутой подгруппой Ли.

Задача 1. Докажите аккуратно последнее утверждение. Докажите также, что $\mathfrak{h}$ будет алгеброй Ли группы Ли $\mathcal{H}$.

Таким образом, замкнутые подгруппы Ли — это в точности подгруппы, удовлетворяющие условию (F). Поэтому для доказательства теоремы 1 нам нужно только доказать, что подгруппа $\mathcal{H}$ из этой теоремы удовлетворяет условию (F). Для этого мы должны найти подмножество $\mathfrak{h}$, окрестность U_0 (или, что равносильно, окрестность $U = \exp U_0$) и проверить для них свойства а, б и в.

Если теорема 1 верна, то множеством $\mathfrak{h}$ должна быть алгебра Ли подгруппы $\mathcal{H}$, т. е. множество всех векторов $A \in \mathfrak{g}$, для которых $\exp tA \in \mathcal{H}$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Имея это в виду, мы определим $\mathfrak{h}$ как подмножество алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящее из всех таких векторов A .

Конечно, при таком определении выполнение условия а требует доказательства. Это доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма 1. Пусть $\{C_m\}$ — сходящаяся последовательность векторов линейного алгебры $\mathfrak{g}$ и пусть $C = \lim_{m \rightarrow \infty} C_m$ — ее предел.

Если существуют такие отличные от нуля числа t_m , что $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 0$ и $\exp t_m C_m \in \mathcal{H}$ для любого $m \geq 1$, то $C \in \mathfrak{h}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t_m > 0$. Имея это в виду, мы для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через n_m целое число, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{t}{t_m} - 1 < n_m \leq \frac{t}{t_m}$$

(целую часть числа t/t_m). Так как $t - t_m < n_m t_m \leq t$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} n_m t_m = t$ и, значит,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \exp(n_m t_m C_m) = \exp tC,$$

а так как

$$\exp(n_m t_m C_m) = (\exp t_m C_m)^{n_m},$$

то $\exp(n_m t_m C) \in \mathcal{H}$. Поскольку группа $\mathcal{H}$ по условию замкнута, откуда следует, что $\exp tC \in \mathcal{H}$. Значит, $C \in \mathfrak{h}$. $\square$

Проверка условия а. Ясно, что если $A \in \mathfrak{h}$, то $\lambda A \in \mathfrak{h}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (ибо $\exp t(\lambda A) = \exp(t\lambda)A$). Поэтому нам надо лишь доказать, что $A + B \in \mathfrak{h}$ для любых векторов $A, B \in \mathfrak{h}$. Но согласно формуле (12) лекции 14 для любых векторов $A, B \in \mathfrak{g}$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\exp tA \cdot \exp tB = \exp t(A + B + X_t),$$

где $X_t = o(t)$. Пусть $t_m = 1/m$, $C = A + B$ и

$$C_m = A + B + X_{t_m}, \quad 1 \leq m < \infty.$$

Тогда $t_m \rightarrow 0$, $C_m \rightarrow C$ и

$$\begin{aligned} \exp t_m C_m &= \exp t_m (A + B + X_{t_m}) = \\ &= \exp t_m A \exp t_m B \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

(напомним, что по условию $\exp tA, \exp tB \in \mathcal{H}$ для любого $t \in \mathbb{R}$). Поэтому применима лемма 1, согласно которой $C \in \mathcal{H}$, т. е. $A + B \in \mathcal{H}$. $\square$

Задача 2. Докажите аналогичным образом, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. (Для доказательства теоремы 1 этот факт не нужен.)

Так как условие б выполнено по определению, то для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось проверить лишь условие в. Для этого нам понадобится еще одна общая конструкция.

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разложена в прямую сумму

$$(1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{f}$$

своих подпространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{f}$. Тогда любой элемент $C \in \mathfrak{g}$ единственным образом представляется в виде $C = A + B$, где $A \in \mathfrak{h}$ и $B \in \mathfrak{f}$, и потому формула

$$\varphi(C) = \exp A \exp B$$

корректно определяет — очевидно гладкое — отображение

$$(2) \quad \varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}.$$

Лемма 2. Отображение (2) этактно в точке $0 \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Согласно формуле (12) лекции 14

$$\exp A \exp B = \exp(A + B + \dots) = \exp(C + \dots),$$

где многоточие означает члены степени ≥ 2 по A и B . Поэтому дифференциал отображения (2) в точке 0 совпадает с дифференциалом отображения $\exp$ и, следовательно, является изоморфизмом (даже тождественным отображением). $\square$

Нас, естественно, будет интересовать разложение (1) в случае, когда $\mathfrak{h}$ является построенным выше по подгруппе $\mathcal{H}$ подпространством алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (а $\mathfrak{f}$ — произвольным дополнительным подпространством). Оказывается, что в этом случае справедлива следующая лемма:

Лемма 3. В $\mathfrak{g}$ существует такая окрестность U точки 0, что

$$\exp B \notin \mathcal{H}$$

для любого отличного от нуля вектора $B \in U \cap \mathfrak{f}$.

Доказательство. Если утверждение леммы 3 не верно, то в $\mathfrak{f}$ существуют такие элементы B_n , что $B_n \rightarrow 0$ и $\exp B_n \in \mathcal{H}$. Выбрав в $\mathfrak{f}$ некоторую норму $|\cdot|$ (скажем, евклидову), найдем такие целые числа $n_n \rightarrow \infty$, что

$$1 \leq |n_n B_n| \leq 2$$

для любого $m = 1, 2, \dots$ (ясно, что это всегда можно сделать). Пусть $C_m = p_m B_m$ и $t_m = \frac{1}{p_m}$. Так как множество всех векторов C , для которых $1 \leq \|C\| \leq 2$, компактно, то без ограничения общности можно считать — перейдя, если нужно, к подпоследовательности, — что последовательность $\{C_m\}$ сходится. Поскольку $t_m \rightarrow 0$ и $\exp t_m C_m = \exp B_m \in \mathcal{H}$, эта последовательность удовлетворяет всем условиям леммы 1, и, значит, ее предел $C = \lim C_m$ принадлежит $\mathfrak{h}$. Но это невозможно, так как одновременно $C \in \mathfrak{f}$ (ибо $\mathfrak{f}$ замкнуто) и $C \neq 0$ (ибо $1 \leq \|C\| \leq 2$). Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Согласно сказанному выше нам осталось проверить лишь условие в. Мы покажем, что этому условию удовлетворяет нормальная окрестность U_0 , на которой отображение (2) диффеоморфно и которая одновременно является окрестностью U_0 из леммы 3.

Пусть $A \in U_0$ и $\exp A \in \mathcal{H}$. Нам надо доказать, что $A \in \mathfrak{h}$. С этой целью мы заметим, что поскольку на U_0 отображение (1) является диффеоморфизмом, точку $\exp A \in U$ можно представить в виде $\exp A_1 \cdot \exp B_1$, где $A_1 \in \mathfrak{h}$ (и потому $\exp A_1 \in \mathcal{H}$), а $B_1 \in \mathfrak{f}$. Но если $\exp A = \exp A_1 \cdot \exp B_1$ и $\exp A \in \mathcal{H}$, то $\exp B_1 \in \mathcal{H}$, что согласно лемме 3 возможно только при $B_1 = 0$. Поэтому $\exp A = \exp A_1$, и, значит, поскольку окрестность U_0 нормальна, $A = A_1$. Следовательно, $A \in \mathfrak{h}$. $\square$

Таким образом, *замкнутые подгруппы Ли группы Ли $\mathcal{G}$ — это в точности ее подгруппы, являющиеся замкнутыми множествами*. Это полностью оправдывает нашу терминологию.

Теорема 1 принадлежит Картану. Она является одним из самых мощных орудий установления лиевости конкретных групп.

Пример 1. Подгруппа группы $GL(n; R)$ (или группы $GL(n; C)$) называется *алгебраической группой*, если она является множеством всех невырожденных матриц, обращающих в нуль некоторую систему многочленов от их элементов. Так как такое множество заведомо замкнуто (в $GL(n; K)$), то согласно теореме Картана *любая алгебраическая группа является матричной группой Ли*.

Пример 2. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная конечномерная алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (вообще говоря, не ассоциативная и не лиева) и пусть $e_1, \dots, e_n$ — ее базис. Ясно, что обратимое линейное отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ тогда и только тогда является автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$, когда $\varphi(e_i e_j) = \varphi(e_i) \varphi(e_j)$ для любых $i, j = 1, \dots, n$. Следовательно, если $\varphi(e_i) = x_i^p e_k$ и $e_i e_j = c_{ij}^k e_k$ и, значит,

$$\begin{aligned}\varphi(e_i e_j) &= \varphi(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k x_k^q e_l, \\ \varphi(e_i) \varphi(e_j) &= x_i^p e_p \cdot x_j^q e_q = c_{pq}^l x_i^p x_j^q e_l,\end{aligned}$$

то φ тогда и только тогда является автоморфизмом, когда

$$c_{ij}^k x_k^q = c_{pq}^l x_i^p x_j^q$$

для любых $i, j, l = 1, \dots, n$. Это означает, что матрицы $[x_i^p]$, отвечающие автоморфизмам алгебры $\mathcal{A}$, составляют алгебраическую, а потому и лиеву группу. Это вносит в группу $\text{Aut } \mathcal{A}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ структуру группы Ли, не зависящую, очевидно, от выбора базиса.

Таким образом, группа $\text{Aut } \mathcal{A}$ автоморфизмов произвольной конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ является группой Ли.

Задача 3. Докажите, что алгебра Ли группы Ли $\text{Aut } \mathcal{A}$ естественно изоморфна алгебре $\text{Der } \mathcal{A}$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ (таких линейных отображений $D: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, что $D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db$ для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$).

Вернемся теперь к произвольным (не обязательно замкнутым) подгруппам Ли $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$. Пусть $m = \dim \mathcal{H}$ и $n = \dim \mathcal{G}$.

Карту $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ в группе Ли $\mathcal{G}$ мы назовем согласованной с подгруппой $\mathcal{H}$, если она согласована в смысле лекции III.13 со всеми подмногообразиями вида $L_a \mathcal{H} = a \mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, т. е. если для любого $a \in \mathcal{G}$ существует — в случае, когда пересечение $U \cap a \mathcal{H}$ непусто — такое открытое в $a \mathcal{H}$ множество $V_a \subset U \cap a \mathcal{H}$, что, во-первых, функции

$$y^1 = x^1|_{V_a}, \dots, y^m = x^m|_{V_a}$$

являются локальными координатами на V_a в $a \mathcal{H}$, а, во-вторых, множество V_a (но не $a \mathcal{H}$!) задается в U уравнениями вида

$$(3) \quad x^{m+1} = c^1, \dots, x^n = c^{n-m},$$

где $c^1, \dots, c^{n-m}$ — некоторые постоянные числа (зависящие только от a).

Из утверждения 6 задачи 25 лекции 14 немедленно следует, что для любой точки $a \in \mathcal{G}$ существует в $\mathcal{G}$ согласованная с $\mathcal{H}$ карта (U, h) , центрированная в a .

Другое доказательство. Ясно, что такую карту достаточно построить только при $a = e$ (если карта (U, h) согласована с $\mathcal{H}$ и центрирована в e , то карта $(aU, h \circ L_a^{-1})$ согласована с $\mathcal{H}$ и центрирована в a). Имея это в виду, рассмотрим отображение (2), построенное для разложения (1), где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы Ли $\mathcal{H}$, а $\mathfrak{f}$ — произвольное дополнительное подпространство. Так как согласно лемме 2 это отображение этактно в 0, то точка $e \in \mathcal{G}$ обладает окрестностью U , на которой определено отображение $\varphi^{-1}: U \rightarrow \mathfrak{g}$. Пусть $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — композиция отображения φ^{-1} и координатного изоморфизма $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}^n$, согласованного с разложением (1), т. е. отвечающего такому базису линейала $\mathfrak{g}$, что первые m векторов его принадлежат подалгебре $\mathfrak{h}$, а остальные $n-m$ векторов — подпространству $\mathfrak{f}$. Тогда пара (U, h) будет центрированной в e картой, согласованной с $\mathcal{H}$. $\square$

Если подгруппа $\mathcal{H}$ замкнута (является вложенным подмногообразием), то карту (U, h) можно выбрать так, чтобы уравнения вида (3) задавали в U все пересечение $U \cap a\mathcal{H}$.

Задача 4. Пользуясь этим, докажите, что для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (множество смежных классов $a\mathcal{H}$) обладает естественной гладкостью, по отношению к которой каноническая проекция

$$\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}, \quad a \mapsto a\mathcal{H}, \quad a \in \mathcal{G},$$

является гладким отображением, а тройка $(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ гладким локально тривиальным расслоением.

Задача 5. Докажите, что

а. Для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ компонента единицы $\mathcal{H}_e$ также замкнута.

б. Если группа Ли $\mathcal{G}$ связна, то естественное отображение

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_e \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H},$$

индуцированное вложением смежных классов, является накрытием.

Задача 6 (обобщение и уточнение задач 4 и 5). Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ — замкнутые подгруппы группы Ли $\mathcal{G}$ и пусть $\mathcal{K}_0$ — наибольшая инвариантная подгруппа, содержащаяся в $\mathcal{K}$. Докажите, что индуцированное вложением смежных классов отображение

$$\pi: \mathcal{G}/\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

гладко и является проекцией гладкого и локально тривиального расслоения со слоем $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ и со структурной группой $\mathcal{H}/\mathcal{K}_0$, действующей в $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ посредством левых сдвигов.

Превратить в подгруппу Ли можно, собственно говоря, любую абстрактную подгруппу $\mathcal{H}$ — достаточно ввести в нее структуру нульмерного многообразия (с дискретной топо-

логией). Однако на практике интересна, конечно, более содержательная — и желательно, единственная — гладкость, топология которой по возможности наиболее близка к индуцированной. (Напомним — см. лекцию III.13, — что топология подмногообразия единственным образом определяет его гладкость.)

Мы будем говорить, что гладкость (топология) подмногообразия $\mathcal{H}$ является *слабейшей*, если для любой другой гладкости на $\mathcal{H}$, т. е. для любого подмногообразия $\mathcal{H}_1$ с тем же множеством точек, тождественное отображение $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ гладко. Слабейшая гладкость, конечно, единственна, но существует не всегда. Если $\mathcal{H}$ допускает гладкость, по отношению к которой оно является консервативным (в частности, вложенным) подмногообразием, то эта гладкость будет слабейшей.

В индуцированной топологии каждая абстрактная подгруппа $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ является, конечно, топологической группой. Пусть $\mathcal{H}_e$ — компонента линейной связности группы $\mathcal{H}$, содержащая единицу e . По определению элемент $a \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{H}_e$, когда в $\mathcal{G}$ существует путь $u: I \rightarrow \mathcal{G}$, соединяющий e с a и целиком лежащий в $\mathcal{H}$ (т. е. такой, что $u(t) \in \mathcal{H}$ для любого $t \in I$).

Задача 7. Покажите, что $\mathcal{H}_e$ является инвариантной подгруппой (нормальным делителем) в $\mathcal{H}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактная подгруппа группы Ли $\mathcal{G}$. Если факторгруппа $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$ счетна (или конечна), то подгруппа $\mathcal{H}$ обладает слабейшей гладкостью и по отношению к этой гладкости является подгруппой Ли. Компоненты линейной связности относительно этой гладкости совпадают с компонентами линейной связности в индуцированной топологии (т. е. со смежными классами $a\mathcal{H}_e$ по $\mathcal{H}_e$). В частности, подгруппа $\mathcal{H}_e$ является компонентой единицы группы Ли $\mathcal{H}$ и, значит, представляет собой связную подгруппу Ли группы Ли $\mathcal{G}$.

Эта теорема в литературе обычно называется теоремой Ямабе.

Общий случай теоремы Ямабе легко сводится к частному случаю линейно связной подгруппы $\mathcal{H}$. Действительно, пусть в этом случае теорема уже доказана. Это означает, что для любой подгруппы $\mathcal{H}$ мы можем ввести в компоненту $\mathcal{H}_e$ структуру связного подмногообразия, по отношению к которой $\mathcal{H}_e$ будет подгруппой Ли и, значит, максимальным инвариантным многообразием соответствующей

щего распределения $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$. Тогда каждый смежный класс $a\mathcal{H}_e$, $a \in \mathcal{H}$, также будет максимальным интегральным подмножеством распределения $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$. Поскольку $\mathcal{H}$ является дизъюнктивным объединением смежных классов $a\mathcal{H}_e$, это вместе с условием, что каждый из этих классов является компонентой, однозначно определяет в $\mathcal{H}$ некоторую топологию и гладкость. (Заметим, что условие счетности факторгруппы $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$ для построения этой гладкости не требуется.)

По отношению к построенной гладкости $\mathcal{H}$ является, очевидно, подгруппой Ли (проверьте!) с компонентами вида $a\mathcal{H}_e$, $a \in \mathcal{H}$. Так как, по условию, множество $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$ всех этих компонент не более чем счетно, то согласно предложению 3 лекции 14 гладкость на $\mathcal{H}$ консервативна и, значит, является слабой гладкостью. $\square$

Таким образом теорему Ямабе достаточно доказать лишь для линейно связной подгруппы $\mathcal{H}$. Мы сделаем это в следующем ослабленном варианте, известном как теорема Фрейденталю и, как правило, вполне достаточном для всех геометрических рассуждений.

Предложение 2. Если каждый элемент a абстрактной подгруппы $\mathcal{H}$ групп Ли $\mathcal{G}$ можно соединить с e гладкой (или хотя бы кусочно гладкой) кривой $u: I \rightarrow \mathcal{G}$, целиком лежащей в $\mathcal{H}$, то $\mathcal{H}$ обладает слабой гладкостью и по отношению к этой гладкости является связной подгруппой Ли.

Для доказательства предложения 2 естественно ввести в рассмотрение подмножество $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e \mathcal{G}$, состоящее из векторов $A \in \mathbf{T}_e \mathcal{G}$, для которых существует такая гладкая кривая $u: I \rightarrow \mathcal{G}$, проходящая при $t=0$ через точку e и целиком лежащая в $\mathcal{H}$, что $u'(0) = A$. (Если $\mathcal{H}$ является подгруппой Ли, то, конечно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(\mathcal{H})$.)

Лемма 4. Подмножество $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Доказательство. Если проходящая при $t=0$ через точку e кривая u целиком лежит в $\mathcal{H}$, то для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ кривая $t \mapsto u(\lambda t)$ также лежит в $\mathcal{H}$ (и при $t=0$ проходит через точку e). При этом ее касательный вектор при $t=0$ равен λA , где A — касательный вектор $u'(0)$ кривой u . Таким образом, если $A \in \mathfrak{h}$, то $\lambda A \in \mathfrak{h}$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Если проходящие при $t=0$ через точку e кривые u и v целиком принадлежат $\mathcal{H}$, то кривые $t \mapsto u(t)v(t)$ и

$t \mapsto u(\tau)v(\tau)u(\tau)^{-1}v(\tau)^{-1}$, где $\tau = \text{sign } t \cdot \sqrt{|t|}$, также проходят при $t=0$ через точку e и принадлежат $\mathcal{H}$. С другой стороны, согласно утверждению задачи 17 лекции 14 касательными векторами при $t=0$ к этим кривым служат векторы $A+B$ и $[A, B]$, где $A = \dot{u}(0)$ и $B = \dot{v}(0)$. Следовательно, если $A, B \in \mathfrak{h}$, то $A+B \in \mathfrak{h}$ и $[A, B] \in \mathfrak{h}$. $\square$

Пусть $\mathcal{K}$ — связная подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Предложение 2 будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. Для этого нам понадобятся еще две леммы.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — произвольный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$ и пусть $u_1, \dots, u_n$ — такие гладкие кривые в $\mathcal{G}$, что $u_i(0) = e$ и $\dot{u}_i(0) = A_i$ для любого $i = 1, \dots, n$. (Таким образом, $u_i(t) = \exp(tH_i + \dots)$, где многоточие обозначает члены степени ≥ 2 по t .)

Тогда формула

$$\varphi(A) = u_1(a^1)u_2(a^2)\dots u_n(a^n), \quad A \in \mathfrak{g},$$

где $a^1, \dots, a^n$ — координаты вектора A в базисе $A_1, \dots, A_n$ (т. е. такие числа, что $A = a^1A_1 + \dots + a^nA_n$), определяет — очевидно гладкое — отображение

$$(4) \quad \varphi: U_0 \rightarrow \mathcal{G}$$

некоторой окрестности U_0 нуля линейала $\mathfrak{g}$ в группу $\mathcal{G}$. (Если кривые u_i , $i = 1, \dots, n$, определены для всех i , то $U_0 = \mathfrak{g}$).

Лемма 5. *Отображение (4) этакно в точке $0 \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство (ср. доказательство леммы 2). Так как $u_i(t) = \exp(tA_i + \dots)$, то согласно формуле (12) лекции 14

$$\varphi_*(A) = \exp(a^1A_1 + \dots + a^nA_n + \dots) = \exp(A + \dots),$$

где многоточие обозначает члены степени ≥ 2 по $a^1, \dots, a^n$. Поэтому дифференциал отображения (4) в точке 0 совпадает с дифференциалом отображения $\exp$ и, значит, является изоморфизмом. $\square$

Из леммы 5 следует, что числа $a^1, \dots, a^n$ являются локальными координатами на группе $\mathcal{G}$, центрированными в точке e .

Обычно рассматривается случай, когда кривые u_i являются однопараметрическими подгруппами β_i : $t \mapsto \exp tA_i$. В этом случае координаты $a^1, \dots, a^n$ называются каноническими координатами второго рода.

Вторая нужная нам лемма относится к произвольной подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$ (трактуемой как множество левоинвариантных векторных полей). Для каждой точки $a \in \mathcal{G}$ мы, как и при доказательстве теоремы 1, обозначим через $\mathfrak{h}_a$ подпространство касательного пространства $T_a\mathcal{G}$, состоящее из всех векторов вида X_a , где X — левоинвариантное векторное поле на группе $\mathcal{G}$, принадлежащее $\mathfrak{h}$. [Если $\mathcal{K}^*$ — подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}_a = T_a\mathcal{K}^*$ при $a \in \mathcal{K}^*$ (и, в частности, $\mathfrak{h} = T_e\mathcal{K}^*$), но $\mathfrak{h}_a$ определено и при $a \notin \mathcal{K}^*$.] При этом в силу левоинвариантности полей X для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$\mathfrak{h}_a = (dl_a)_e T_e\mathcal{K}^* = T_a(a\mathcal{K}^*).$$

Лемма 6. Пусть $u: I \rightarrow \mathcal{G}$ — такая гладкая кривая в группе Ли $\mathcal{G}$, проходящая при $t=0$ через точку e , что

$$(5) \quad \dot{u}(t) \in \mathfrak{h}_{u(t)} \quad \text{для любого } t \in I.$$

Тогда $u(t) \in \mathcal{K}^*$ для всех $t \in I$ (т. е. кривая u целиком лежит в подгруппе Ли $\mathcal{K}^*$).

Доказательство. Пусть C — множество всех точек $t \in I$, для которых $u(t) \in \mathcal{K}^*$. По условию $0 \in C$.

Пусть $t_0 \in I$ и $a_0 = u(t_0)$. Рассмотрим центрированную в точке a_0 карту $(U, x^1, \dots, x^n)$, согласованную с подгруппой Ли $\mathcal{K}^*$. Поскольку отображение u непрерывно, существует такое $\delta > 0$, что $u(t) \in U$ при $|t - t_0| < \delta$. Пусть $x^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, — функции, задающие в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ ограничение кривой u на интервале $|t - t_0| < \delta$. Так как для любой точки $a \in U$ окрестность V_a точки a в подмногообразии $a\mathcal{K}$ задается уравнениями вида

$$x^{m+1} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const},$$

то пространство $\mathfrak{h}_a = T_a(a\mathcal{K}^*)$ пространства $T_a\mathcal{G}$ натянуто на первые m векторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$$

координатного базиса пространства $T_a\mathcal{G}$. В частности, это означает, что при $|t - t_0| < \delta$ вектор $\dot{u}(t)$ выражается только через векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{u(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{u(t)}.$$

Поэтому $\dot{x}^{m+1}(t) = 0, \dots, \dot{x}^n(t) = 0$ при $|t - t_0| < \delta$ и, значит, $x^{m+1}(t) = 0, \dots, x^n(t) = 0$ при $|t - t_0| < \delta$ (напомним, что по условию $x^{m+1}(t_0) = 0, \dots, x^n(t_0) = 0$).

Если теперь $t_0 \in C$, т. е. $a_0 \in \mathcal{H}$, то уравнения $x^{m+1}=0, \dots, x^n=0$ будут задавать в U некоторую окрестность $V \subset U \cap \mathcal{H}$ точки a_0 в $\mathcal{H}$. Следовательно, при $|t-t_0| < \delta$ будет иметь место включение $u(t) \in V \subset \mathcal{H}$. Поэтому $t \in C$. Это означает, что точка t_0 является внутренней точкой множества C , т. е. — в силу произвольности точки t_0 , — что множество C открыто.

Пусть $t_0 \in \bar{C}$. Тогда $t_0 = \lim t_k$, где $t_k \in C$. В частности, существует такое k_0 , что $|t_{k_0} - t_0| < \delta$. Тогда

$$x^{m+1}(t_{k_0}) = 0, \dots, x^n(t_{k_0}) = 0.$$

В силу согласованности карты $(U, x^1, \dots, x^n)$ с подгруппой $\mathcal{H}$ это означает, что уравнения $x^{m+1}=0, \dots, x^n=0$ определяют некоторую окрестность точки $u(t_{k_0})$ в $u(t_{k_0}) \cdot \mathcal{H}$. Но поскольку $u(t_{k_0}) \in \mathcal{H}$, смежный класс $u(t_{k_0}) \cdot \mathcal{H}$ совпадает с $\mathcal{H}$. Следовательно, все точки из U , для которых $x^{m+1}=0, \dots, x^n=0$, принадлежат $\mathcal{H}$. В частности, $a_0 \in \mathcal{H}$ и, значит, $t_0 \in C$. Этим доказано, что $\bar{C} \subset C$, т. е. что множество C замкнуто.

Являясь непустым замкнутым и одновременно открытым подмножеством интервала I , множество C совпадает со всем I . Следовательно, $u(t) \in \mathcal{K}^*$ для любого $t \in I$. $\square$

Теперь мы уже можем доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Нам надо доказать, что $\mathcal{H} = \mathcal{K}^*$. Мы докажем сначала включение $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}^*$, а затем включение $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{H}$.

Включение $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}^*$. Пусть $a \in \mathcal{H}$. По условию в $\mathcal{S}$ существует гладкая кривая $u: I \rightarrow \mathcal{S}$, соединяющая e с a и целиком лежащая в $\mathcal{H}$. Пусть для определенности $I = [0, 1]$. Для любого $t \in I$ кривая

$$v(s) = u(t)^{-1} u(s+t), \quad -t \leq s \leq 1-t,$$

проходит при $s=0$ через точку e и целиком лежит в $\mathcal{H}$. Следовательно, по определению, $v(0) \in \mathfrak{h}$, или, точнее, — поскольку мы сейчас трактуем $\mathfrak{h}$ как множество левоинвариантных векторных полей, — $\dot{v}(0) \in \mathfrak{h}_e = T_e \mathcal{K}^*$.

С другой стороны, легко видеть (см. формулу (3) лекции 14), что

$$\dot{u}(t) = (dL_{u(t)})_e \dot{v}(0).$$

Следовательно, $\dot{u}(t) \in (dL_{u(t)})_e T_e \mathcal{K}^* = \mathfrak{h}_{u(t)}$, т. е. кривая u удовлетворяет условию (5) леммы 6. Следовательно, со-

гласно этой лемме $u(t) \in \mathcal{K}$ для всех $t \in I$. В частности, $u(1) \in \mathcal{K}$, т. е. $a \in \mathcal{K}$. Значит, $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$.

Включение $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Выбрав в $\mathfrak{h}$ базис $A_1, \dots, A_m$ (мы теперь трактуем $\mathfrak{h}$ как подпространство в $T_e \mathcal{Z}$), рассмотрим в $\mathcal{Z}$ соответствующие кривые $u_1, \dots, u_m$ (т. е. такие кривые, целиком лежащие в $\mathcal{H}$, что $u_i(0) = e$ и $u_i'(0) = A_i$, $i = 1, \dots, m$). Поскольку $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, мы можем рассматривать эти кривые как кривые в группе Ли $\mathcal{K}$. (Контрольный вопрос: Почему кривые $u_1, \dots, u_m$, рассматриваемые как кривые в $\mathcal{K}$, будут гладки?) Пусть φ — отображение (4), построенное с помощью кривых $u_1, \dots, u_m$ (т. е. по формуле

$$\varphi(A) = u_1(a^1) \dots u_m(a^m),$$

где $A = a^i A_i$ — вектор из $\mathfrak{h}$, достаточно близкий к 0). Согласно лемме 5 на некоторой окрестности U_0 точки $0 \in \mathfrak{h}$ это отображение является диффеоморфизмом на окрестность $U = \varphi U_0$ точки e в $\mathcal{K}$. При этом, так как группа Ли $\mathcal{K}$, по построению, связна, то она порождается окрестностью U (см. задачу 12 лекции 14). С другой стороны, так как все кривые $u_1, \dots, u_m$ лежат в $\mathcal{H}$, то $U = \varphi U_0 \subset \mathcal{H}$. Значит, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. $\square$

В заключение этой лекции мы вкратце обсудим два вопроса, естественно возникающих в связи с соответствием (6) группа Ли $\Rightarrow$ ее алгебра Ли.

Любая ли (конечномерная) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем R изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли $\mathcal{G}$? Как связаны между собой группы Ли, алгебры Ли которых изоморфны?

Если алгебра $\mathfrak{g}$ является матричной алгеброй Ли (под-алгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(n; R)$), то существование группы Ли $\mathcal{G}$ обеспечивается теоремой 1 лекции 14 (и эта группа будет подгруппой матричной группы $GL(n; R)$). С другой стороны, в теории алгебр Ли доказывается теорема Адо, согласно которой *любая конечномерная алгебра Ли изоморфна некоторой матричной алгебре Ли* (имеет, как говорят, точное матричное представление). Поэтому ответ на первый вопрос утвердителен — *для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует группа Ли $\mathcal{G}$, алгебра Ли $\mathcal{G}$ которой изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$.* (Этот факт впервые был доказан Картаном, но по традиции обычно называется третьей теоремой Ли.) Однако теорема Адо доказы-

вается весьма сложно, и все остальные подходы к доказательству существования группы $\mathcal{G}$ — их пока известно еще только два — если и проще, то незначительно. Вместе с тем хотя теорема Ли безусловно играет в теории групп Ли основополагающую роль, но в приложениях ее значение ограничено тем, что на практике алгебры Ли возникают обычно вместе с соответствующими группами Ли, беспокоиться о существовании которых поэтому не приходится. Например, в этом семестре теорема Ли нам ни разу не понадобится. Поэтому заниматься ею мы здесь не будем.

Ответ на второй вопрос существенно проще. Однако он нам тоже пока не понадобится и поэтому мы изложим его, опуская почти все доказательства.

Поскольку алгебры Ли группы Ли $\mathcal{G}$ и ее компоненты единицы $\mathcal{G}_e$ совпадают, мы без ограничения общности можем считать все рассматриваемые группы Ли связными.

Определение 1. Две группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ называются *локально изоморфными*, если существуют такие окрестности единицы $U \subset \mathcal{G}$ и $V \subset \mathcal{H}$ и такой диффеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V$, что для любых элементов $a, b \in U$, удовлетворяющих соотношению $ab \in U$, элемент $\varphi(a)\varphi(b)$ принадлежит V и имеет место равенство

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab).$$

Ясно, что алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны (изоморфизм осуществляется отображением $(d\varphi)_e$).

Оказывается, что и обратно, группы Ли локально изоморфны, если изоморфны их алгебры Ли.

[Это является точным выражением сделанного в замечании 1 лекции 14 утверждения о полной восстанавливаемости умножения в окрестности единицы группы Ли по операции $[\cdot, \cdot]$ в ее алгебре Ли. По указанной там причине мы его здесь не доказываем.]

Таким образом, алгебры Ли двух групп Ли тогда и только тогда одинаковы (= изоморфны), когда эти группы локально изоморфны.

Конечно, это еще не ответ на наш вопрос, а лишь его редукция к вопросу о том, когда группы Ли локально изоморфны.

Может случиться, что предусмотренный определением 1 диффеоморфизм φ является ограничением на U некоторого

гомоморфизма $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ (который мы будем обозначать той же буквой φ).

Задача 8. Докажите, что в этом случае гомоморфизм φ является накрытием в смысле определения 1 лекции 2. (Напомним, что группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ предполагаются связными.)

Гомоморфизмы $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, являющиеся одновременно накрытиями, называются *групповыми накрытиями*. Ясно, что если окрестность U единицы группы $\mathcal{G}$ равно покрывает окрестность V единицы группы $\mathcal{H}$, то ограничение накрытия φ на U будет диффеоморфизмом $U \rightarrow V$, обладающим указанными в определении 1 свойствами. Таким образом, для любого группового накрытия $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ локально изоморфны.

Задача 9. Докажите, что гомоморфизм $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ топологических групп тогда и только тогда является накрытием, когда его ядро K дискретно.

Задача 10. Докажите, что каждая дискретная инвариантная подгруппа K топологической группы $\mathcal{G}$ принадлежит центру этой группы (и, следовательно, абелева). [Указание. Пусть $a \in \mathcal{G}$ и пусть U и V — такие окрестности единицы группы $\mathcal{G}$, что $U \cap K = \{e\}$ и $VaV^{-1} \subset U$. Тогда V порождает $\mathcal{G}$ (задача 12 лекции 14), и вместе с тем, если $a \in K$, то $VaV^{-1} \subset U \cap K = \{e\}$, и, значит, любой элемент из V перестановочен с a .]

Таким образом, для любого группового накрытия $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ группа $\mathcal{H}$ изоморфна факторгруппе группы $\mathcal{G}$ по абелевой инвариантной подгруппе центра.

Оказывается, что

А. Для любой связной группы Ли $\mathcal{G}$ существует групповое накрытие $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ с односвязной группой $\mathcal{G}$.

Б. Если связные группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ локально изоморфны и группа $\mathcal{G}$ односвязна, то существует групповое накрытие $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, являющееся распространением диффеоморфизма φ из определения 1.

Задача 11. Докажите, что с точностью до изоморфизма группа $\mathcal{G}$ из утверждения А единственна.

Эта группа называется *универсально накрывающей группой* группы Ли $\mathcal{G}$. Она локально изоморфна группе $\mathcal{G}$. Поэтому связные группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, имеющие изоморфные универсально накрывающие группы, локально изоморфны.

Обратно, если группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ локально изоморфны, то группа $\mathcal{H}$ локально изоморфна универсально накрывающей группе $\mathcal{G}$ и, значит, согласно утверждению Б существует

групповое накрытие $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{H}$, т. е. $\tilde{\mathcal{G}}$ универсально накрывает и группу $\mathcal{H}$.

Таким образом, *связные группы Ли тогда и только тогда локально изоморфны, когда изоморфны их универсально накрывающие группы.*

Резюмируя, мы видим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Соответствие (6) между (рассматриваемыми с точностью до изоморфизма) связными и односвязными группами Ли и конечномерными вещественными алгебрами Ли биективно.*

Две связные группы Ли тогда и только тогда имеют изоморфные алгебры Ли, когда их универсально накрывающие группы изоморфны.

Из утверждений, на которые опирается эта теорема, мы докажем здесь лишь утверждение А, как самое простое. (Доказательство утверждения Б, хотя по идее и просто, но аккуратное его проведение требует слишком много хлопот.)

Утверждение, что отображение $\varphi: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ является гомоморфизмом, равносильно утверждению о коммутативности диаграммы

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \tilde{\mathcal{G}} \\ \varphi \times \varphi \downarrow & \swarrow & \downarrow \varphi \\ \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{m} & \mathcal{G} \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой представляют собой умножения в группах $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\mathcal{G}$ соответственно. С другой стороны, коммутативность диаграммы (7), по определению, означает, что умножение $\tilde{m}$ является поднятием на $\tilde{\mathcal{G}}$ отображения

$$(8) \quad m \circ (\varphi \times \varphi): \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$$

(изображенного на диаграмме (7) пунктирной стрелкой). Таким образом, для любого группового накрытия $\varphi: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ умножение $\tilde{m}$ является поднятием отображения (8). Это поднятие удовлетворяет соотношению $\tilde{m}(\bar{e}, \bar{e}) = \bar{e}$, где $\bar{e}$ — единица группы $\tilde{\mathcal{G}}$, которое его однозначно характеризует.

Аналогично показывается, что отображение $\bar{v}: \bar{a} \mapsto \bar{a}^{-1}$ группы $\bar{\mathcal{G}}$ на себя является удовлетворяющим соотношению $\bar{v}(\bar{e}) = \bar{e}$ поднятием отображения

$$(9) \quad v \circ \varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

где $v: a \mapsto a^{-1}$, $a \in \mathcal{G}$.

Обратно, пусть для некоторого (не группового) гладкого накрытия $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ группы Ли $\mathcal{G}$ существуют поднятия $\bar{m}$ и $\bar{v}$ отображений (8) и (9), удовлетворяющие соотношениям $\bar{m}(\bar{e}, \bar{e}) = \bar{e}$ и $\bar{v}(\bar{e}) = \bar{e}$, где $\bar{e}$ — некоторая точка из $\varphi^{-1}(e)$.

Задача 12. Докажите, что отображения $\bar{m}$ и $\bar{v}$ гладки.

Рассмотрим отображения

$$f, g: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

определенные соответственно формулами

$$f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{m}(\bar{m}(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{a}_3),$$

$$g(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{m}(\bar{a}_1, \bar{m}(\bar{a}_2, \bar{a}_3)).$$

Оба отображения f и g являются, очевидно, поднятиями одного и того же отображения

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 a_2 a_3,$$

где $a_i = \varphi(\bar{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$, с одним и тем же начальным условием $(e, e, e) \mapsto e$. Поэтому в силу свойства единственности поднятий (см. теорему 1 лекции 4) эти отображения совпадают. Таким образом, умножение $\bar{m}$ ассоциативно.

Аналогично доказывается, что по отношению к умножению $\bar{m}$ отображение $\bar{v}$ является отображением обращения. Следовательно, относительно этого умножения многообразие $\bar{\mathcal{G}}$ является группой Ли (с единицей $\bar{e}$), а накрытие $\varphi: \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ — групповым накрытием.

С другой стороны, мы знаем (см. ту же теорему 1 лекции 4), что для существования поднятий $\bar{m}$ и $\bar{v}$ необходимо и достаточно, чтобы имели место включения

$$(10) \quad (m \circ (\varphi \times \varphi))_* (\pi_1(\mathcal{G} \times \mathcal{G})) \subset \varphi_* (\pi_1 \bar{\mathcal{G}}),$$

$$(11) \quad (v \circ \varphi)_* (\pi_1 \bar{\mathcal{G}}) \subset \varphi_* (\pi_1 \bar{\mathcal{G}}),$$

где $\pi_1(\bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}}) = \pi_1(\bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}}, (\bar{e}, \bar{e}))$ и $\pi_1 \bar{\mathcal{G}} = \pi_1(\bar{\mathcal{G}}, \bar{e})$.

Пользуясь этим, мы теперь можем доказать следующее основное предложение:

Предложение 3. Пусть $\varphi: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ — произвольное гладкое накрытие связной группы Ли $\mathcal{Z}$ с единицей e и пусть $\bar{e} \in \varphi^{-1}(e)$. Тогда в $\mathcal{Z}$ существует единственное умножение с единицей $\bar{e}$, по отношению к которому $\mathcal{Z}$ является группой Ли, а отображение φ — групповым накрытием.

Доказательство. Согласно сказанному, для доказательства предложения 3 достаточно доказать включения (10) и (11).

Задача 13. Проверьте, что для любых двух петель $u, v: I \rightarrow \mathcal{Z}$ в точке e формула

$$(12) \quad F(t, \tau) = \begin{cases} u\left(\frac{t}{1-t}(1-t+2\tau t)\right)v(t(1-2\tau)), & \text{если } 0 \leq t, \tau \leq 1/2, \\ u(t+2\tau(1-t))v\left(\frac{(1-2\tau)t^2+2\tau(2t-1)}{t}\right), & \text{если } 0 \leq \tau \leq 1/2 \leq t \leq 1, \\ u\left(\frac{2t}{1-t}(t+\tau-2\tau t)\right), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2 \leq \tau \leq 1, \\ v\left(\frac{2t-1}{t}(2-t-2\tau(1-t))\right), & \text{если } 1/2 \leq t, \tau \leq 1, \end{cases}$$

корректно определяет гомотопию в $\mathcal{Z}$, связывающую петлю

$$(13) \quad t \mapsto u(t)v(t), \quad t \in I,$$

с петлей $uv: I \rightarrow \mathcal{Z}$, определенной формулой

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Задача 14. Формула (12) получена на основе простой элементарно геометрической конструкции. Найдите эту конструкцию.

При $v = v \circ u$ (т. е. при $v(t) = u^{-1}(t)$) петля (13) является постоянной петлей. Поэтому в этом случае $[u] \cdot [v] = 1$ в группе $\pi_1 \mathcal{Z}$. Поскольку же $[v] = v_*[u]$, это доказывает, что гомоморфизм

$$v_*: \pi_1 \mathcal{Z} \rightarrow \pi_1 \mathcal{Z}$$

является отображением обращения $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ в группе $\pi_1 \mathcal{Z}$.

В частности, отсюда следует, что гомоморфизм v_* переводит любую подгруппу группы $\pi_1 \mathcal{Z}$ в себя. Примени-

тельно к подгруппе $\varphi_*(\pi_1 \mathcal{Z})$ это — в силу равенства $(v \circ \varphi)_* = v_* \circ \varphi_*$ — немедленно дает включение (11).

Любая петля $w: I \rightarrow \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ в группе $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ задается формулой

$$w(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

где $u: I \rightarrow \mathcal{Z}$, $v: I \rightarrow \mathcal{Z}$ — некоторые петли в группе $\mathcal{Z}$.

Задача 15. Покажите, что формула

$$\Delta[w] = ([u], [v])$$

корректно определяет изоморфизм

$$\Delta: \pi_1(\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}) \rightarrow \pi_1 \mathcal{Z} \times \pi_1 \mathcal{Z}.$$

(Впрочем, нам нужно лишь утверждение о корректности определения гомоморфизма Δ .)

Из утверждения задачи 13 следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}) & \xrightarrow{m_*} & \pi_1 \mathcal{Z} \\ \Delta \downarrow & & \parallel \\ \pi_1 \mathcal{Z} \times \pi_1 \mathcal{Z} & \xrightarrow{\mu} & \pi_1 \mathcal{Z}, \end{array}$$

где μ — умножение в группе $\pi_1 \mathcal{Z}$. Поэтому

$$(m \circ (\varphi \times \varphi))_* = m_* \circ (\varphi \times \varphi)_* = \mu \circ \Delta \circ (\varphi \times \varphi)_*.$$

С другой стороны, если $w: I \rightarrow \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ — петля в $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ и

$w(t) = (u(t), v(t))$, где $u, v: I \rightarrow \mathcal{Z}$ — петли в $\mathcal{Z}$, то

$$((\varphi \times \varphi) \circ w)(t) = ((\varphi \circ u)(t), (\varphi \circ v)(t)), \quad t \in I,$$

и, значит,

$$(\Delta \circ (\varphi \times \varphi)_*)[w] = (\varphi_*[u], \varphi_*[v]).$$

Так как φ_* является гомоморфизмом, отсюда следует, что

$$(m \circ (\varphi \times \varphi))_*[w] = \varphi_*([u]) \cdot \varphi_*([v]) = \varphi_*([u] \cdot [v]) \in \varphi_*(\pi_1 \mathcal{Z}).$$

Этим доказано и включение (10). $\square$

Применив предложение 3 к универсальному накрытию $\varphi: \tilde{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{Z}$ (существующему в силу общей теоремы 1 лекции 5), мы и получим утверждение А.

Замечание 1. Коммутативность диаграммы (14) означает, что умножение в группе $\pi_1 \mathcal{Z}$ индуцировано умножением в группе $\mathcal{Z}$.

Связности на расслоении реперов.— Сравнение со связностями на векторных расслоениях.— Явное построение связности на векторном расслоении.— Гладкие главные расслоения.— Фундаментальные вертикальные поля.— Горизонтальные формы.— Векторнозначные дифференциальные формы

Напомним (см. пример 3 лекции 6), что каждое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ ассоциировано с главным расслоением реперов $\tilde{\xi} = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, тотальное пространство $\mathcal{E}$ которого состоит из реперов (базисов) вида

$$(1) \quad p = (p_1, \dots, p_n),$$

где $p_1, \dots, p_n$ — линейно независимые (и, следовательно, составляющие базис) векторы некоторого слоя $\mathcal{F}_b$ расслоения $\tilde{\xi}$. При этом $\pi(p) = b$.

Если расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ гладко, то в $\mathcal{E}$ определены карты вида $(\mathcal{E}_U, h)$, где U — тривиализирующая координатная окрестность в $\mathcal{B}$, а h — отображение множества $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ в $\mathbb{R}^{n^2+m} = \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$(2) \quad \begin{aligned} h(p) &= (C, h(b)), \\ p &= (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{E}, \quad b = \pi(p). \end{aligned}$$

Здесь $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — координатное отображение окрестности U , а C — матрица, столбцы которой состоят из координат векторов $p_1, \dots, p_n$ в тривиализирующем базисе $s(b) = (s_1(b), \dots, s_n(b))$ слоя $\mathcal{F}_b$. (Пространство квадратных матриц порядка n отождествляется здесь с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$.)

В карте $(\mathcal{E}_U, h)$ локальными координатами точки $p \in \mathcal{E}_U$ являются числа $c_i^j, x^k, 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq m$, где x^k — локальные координаты точки $b = \pi(p)$ в карте (U, h) многообразия $\mathcal{B}$, а c_i^j — элементы матрицы C , т. е. такие числа, что

$$p_i = c_i^j s_j(b)$$

для любого $i = 1, \dots, n$. (Заметим, что матрица C невырождена.)

Таким образом, координаты точки p составляют пару (C, x) , где C — матрица $[c_i^j]$, а x — строка $(x^1, \dots, x^m)$.

Ясно, что все карты вида $(\mathcal{E}_U, h)$ согласованы и, следовательно, определяют на $\mathcal{E}$ структуру $(n^2 + m)$ -мерного

гладкого многообразия. При этом точку $p \in \mathcal{E}$ с координатами (C, x) отображение π переводит в точку $b \in \mathcal{B}$ с координатами x , и, значит, является сублимерсией. Это означает, что для гладкого векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ расслоение реперов $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ также гладко.

В частности, мы видим, что для любой точки $b \in \mathcal{B}$ слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ расслоения ξ представляет собой вложенное подмногообразие, и все сказанное в лекции 10 о вертикальных и горизонтальных подпространствах автоматически применимо к расслоению ξ .

Задача 1. Покажите, что для любого поля

$$(3) \quad H: p \mapsto H_p, \quad p \in \mathcal{E},$$

горизонтальных подпространств на расслоении ξ в каждой карте $(\mathcal{E}_U, h)$ существуют такие однозначно определенные формы

$$(4) \quad \theta_j^i = dc_j^i + f_{jk}^i dx^k, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

где f_{jk}^i — некоторые функции на координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ (гладкие, если гладко поле H), что для любой точки $p \in \mathcal{E}_U$ подпространство H_p является аннулятором векторов $(\theta_j^i)_p$. [Указание. Ср. предложение 3 лекции 10.]

Локальные координаты (C, x) карты $(\mathcal{E}_U, h)$ определяют в каждом касательном пространстве $T_p \mathcal{E}$, $p \in \mathcal{E}_U$, базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial c_j^i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p, \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq m.$$

Поэтому любой вектор из $T_p \mathcal{E}$ единственным образом представляется в виде

$$a_j^i \left(\frac{\partial}{\partial c_j^i} \right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p, \quad \text{где } a_j^i, u^k \in \mathbb{R}.$$

Мы будем отождествлять этот вектор с парой (A, u) , где A — матрица $\|a_j^i\|$, а u — строка $(u^1, \dots, u^m)$. Вектор (A, u) вертикален тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Ясно, что значения форм (4) на векторе (A, u) составляют матрицу

$$A + u^k F_k,$$

где $F_k = F_k(C, x)$ — матрицы $\|f_k^i\|$, $k = 1, \dots, m$. Поэтому $(A, u) \in H_p$ тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad A + u^k F_k = 0.$$

В частности, отсюда следует, что

$$(6) \quad (A, u)^V = (A + u^k F_k, 0), \quad (A, u)^H = (-u^k F_k, u)$$

для любого вектора (A, u) из $T_p \mathcal{E}$.

Каждый слой $\mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$, $b_0 \in \mathcal{B}$, расслоения ξ является орбитой правого действия

$$(p, B) \mapsto pB, \quad p \in \mathcal{E}, B \in GL(n; R),$$

группы $GL(n; R)$ на пространстве $\mathcal{E}$, определенного формулой

$$pB = q, \quad q = (q_1, \dots, q_n),$$

где

$$q_i = p_j b_j^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

при $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $B = \|b_j^i\|$. В координатах это действие записывается формулой

$$(7) \quad (C, x) \mapsto (CB, x)$$

и, следовательно, является гладким действием. В частности, для любого элемента $B \in GL(n; R)$ отображение

$$R_B: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad p \mapsto pB, \quad p \in \mathcal{E}.$$

многообразия $\mathcal{E}$ в себя является диффеоморфизмом.

Так как диффеоморфизм R_B переводит каждый слой $\mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$ в себя, то его дифференциал

$$(dR_B)_p: T_p \mathcal{E} \rightarrow T_{pB} \mathcal{E}$$

в каждой точке $p \in \mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$ переводит вертикальное подпространство $T_p \mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$ в вертикальное подпространство $T_{pB} \mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$. Поэтому для любого поля H горизонтальных подпространств, любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любого элемента $B \in GL(n; R)$ отображение $(dR_B)_p$ переводит горизонтальное подпространство H_p в подпространство $(dR_B)_p H_p$, дополнительное к подпространству $T_{pB} \mathcal{F}_{b_0}^{\xi}$. Если

$$(8) \quad (dR_B)_p H_p = H_{pB},$$

то поле H горизонтальных подпространств называется *эквиариантным*.

Определение 1. *Связностью на главном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется произвольное гладкое и эквивариантное поле H горизонтальных подпространств.*

Заметим, что в отличие от связности на векторном расслоении ξ связность на главном расслоении ξ определяется без обращения к тривиализирующим координатным окрестностям.

Предложение 1. *Связности H на главном расслоении ξ находятся в естественном биективном соответствии со связностями H на ассоциированном векторном расслоении $\xi = \xi[\mathbb{R}^n]$.*

Доказательство. Согласно формуле (7), если точка p координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ имеет координаты (C, x) , то точка $q = R_B p$ имеет координаты (CB, x) .

Задача 2. Выведите отсюда, что линейное отображение $(dR_B)_p$ действует по формуле

$$(dR_B)_p(A, u) = (AB, u), \quad (A, u) \in T_p \mathcal{E}.$$

В силу формулы (5) отсюда следует, что если поле H является на $\mathcal{E}_U$ аннулятором форм (4), то подпространство $(dR_B)_p H_p$ состоит из векторов вида (AB, u) , где u — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, а

$$A = -F_k(C, x)u^k.$$

С другой стороны, так как точка $q = R_B p$ имеет координаты (CB, x) , то согласно той же формуле (5) подпространство H_q состоит из векторов вида $(-F_k(CB, x)u^k, u)$. Следовательно, поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда эквивариантно (является связностью), когда для любых элементов B, C группы $GL(n; \mathbb{R})$ и любых векторов $x, u \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$-F_k(C, x)Bu^k = -F_k(CB, x)u^k.$$

В силу произвольности вектора u последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$(9) \quad F_k(C, x)B = F_k(CB, x) \quad \text{для любого } k = 1, \dots, n.$$

Полагая здесь $C = E$ и обозначая матрицу B через C , мы немедленно получим, что

$$(10) \quad F_k(C, x) = \Gamma_k C, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\Gamma_k = \Gamma_k(x)$ — матрица $F_k(E, x)$, т. е. что

$$f'_{jk} = \Gamma'_{ks} c'_j, \quad \|\Gamma'_{ks}\| = \Gamma_k.$$

Поскольку матрицы вида (10) удовлетворяют — при любых матрицах Γ_k — соотношениям (9), мы получаем, следовательно, что поле H тогда и только тогда является связностью на ξ , когда на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ оно представляет собой аннулятор форм вида

$$(11) \quad \theta_j = dc'_j + \Gamma'_{ks} c'_j dx^k,$$

где Γ'_{ks} — некоторые гладкие функции на окрестности U .

Задача 3. Покажите, что функции Γ'_{ks} удовлетворяют соотношениям (17) лекции 10 и, значит, являются коэффициентами некоторой связности H на векторном расслоении ξ .

Таким образом, по данной связности H на ξ мы построили связность H на ξ . Обратно, если H — произвольная связность на ξ , то по ее коэффициентам Γ'_{ks} мы можем на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ построить формы (11) и, значит, некоторую связность H_U .

Задача 4. Покажите, что связности H_U согласованы на пересечениях $\mathcal{E}_U \cap \mathcal{E}_{U'}$ и, значит, определяют связность H на всем ξ .

Это, очевидно, доказывает предложение 1. $\square$

По ходу дела мы также доказали, что на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ связности на ξ задаются формами вида (11). Можно, конечно, вместо этих форм использовать линейно эквивалентные формам (11) формы

$$(12) \quad \theta_j = 'c'_i dc'_j + 'c'_i \Gamma'_{ks} c'_j dx^k, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $'c'_i$ — элементы матрицы C^{-1} , обратной к матрице $C = \|c'_j\|$. (Поскольку формы (11) нам больше не нужны, мы, чтобы не вводить новых обозначений, обозначаем формы (12) теми же символами θ'_j , что и формы (11).) Матрицу $\theta = \|\theta'_j\|$, состоящую из форм (12), можно условно записать в виде

$$(12') \quad \theta = C^{-1} dC + C^{-1} \omega C,$$

где dC — матрица $\|dc'_j\|$, а ω — матрица $\|\omega'_j\| = \|\Gamma'_{ks} dx^k\|$. На любой другой координатной тривиализирующей окрестностью U' связность будет задаваться формами θ'_j , составляющими матрицу

$$\theta' = C'^{-1} dC' + C'^{-1} \omega' C'.$$

При этом, если $\varphi = \varphi_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'}$ — соответствующее отображение перехода, то на $U \cap U'$ будет иметь место равенство

$$\omega' = \varphi^{-1} \omega \varphi + \varphi' d\varphi$$

(см. формулу (17') лекции 10), а также равенство

$$C' = \varphi^{-1} C$$

(докажител!). Поэтому на $U \cap U'$

$$\begin{aligned} \theta' &= C^{-1} \varphi d(\varphi^{-1} C) + C^{-1} \varphi (\varphi^{-1} \omega \varphi + \varphi^{-1} d\varphi) \varphi^{-1} C = \\ &= C^{-1} \varphi (d\varphi^{-1}) C + C^{-1} (\varphi \varphi^{-1}) dC + C^{-1} \omega C + C^{-1} d\varphi \varphi^{-1} C = \\ &= -C^{-1} \varphi (\varphi^{-1} d\varphi \varphi^{-1}) C + C^{-1} dC + C^{-1} \omega C + C^{-1} d\varphi \varphi^{-1} C = \\ &= C^{-1} dC + C^{-1} \omega C = \\ &= \theta \end{aligned}$$

(как известно, $d\varphi^{-1} = -\varphi^{-1} d\varphi \varphi^{-1}$). Значит, формы (12) согласованы на пересечениях и, следовательно, составляют глобальные формы θ_i^j , определенные на всем многообразии $\mathcal{G}$. Таким образом, мы видим, что *любая связность на ξ является аннулятором форм θ_i^j , $1 \leq i, j \leq n$, определенных на всем многообразии $\mathcal{G}$ (и в каждой карте $(\mathcal{G}_U, h)$ имеющих вид (12))*. Это выгодно отличает связности на ξ от связностей на ξ , для которых аналогичные формы θ_i^j , $1 \leq i \leq n$, определены лишь локально.

Изложенное выше доказательство предложения 1 обладает тем недостатком, что в нем не дается прямой геометрической конструкции связности H по связности H . Это можно исправить (и тем самым фактически получить еще одно доказательство предложения 1).

Так как компоненты $p_1, \dots, p_n$ произвольной точки $p = (p_1, \dots, p_n)$ пространства $\mathcal{G}$ принадлежат, по определению, одному слою $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ , то для любого вектора $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ определена точка $p_i y^i \in \mathcal{F}_b$. Следовательно, формула

$$f_y(p) = p_i y^i,$$

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad y = (y^1, \dots, y^n),$$

определяет — очевидно, гладкое, — отображение

$$f_y: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}.$$

Пусть

$$(df_y)_p: T_p \mathcal{G} \rightarrow T_p \mathcal{G}, \quad p = p_i y^i,$$

— дифференциал этого отображения в точке $p \in \mathcal{G}$.

Предложение 2. Для произвольной связности H на ξ формула

$$(13) \quad H_p = (df_y)_p H_p, \quad p \in f_y(p),$$

корректно определяет некоторую связность H на ξ .

Доказательство. В первую очередь надо проверить корректность формулы (13), т. е. что ее правая часть зависит только от точки p . Для этого нам надо доказать, что если

$$(14) \quad f_y(p) = f_z(q), \quad y, z \in \mathbb{R}^n, \quad p, q \in \xi,$$

то

$$(df_y)_p H_p = (df_z)_q H_q.$$

Равенство (14) возможно, конечно, лишь тогда, когда p и q принадлежат одному слою расслоения ξ и, значит, в группе $GL(n; \mathbb{R})$ существует такой элемент $B = \|b_i^j\|$, что $q = pB$, т. е. $q_i = p_j b_i^j$. Но тогда

$$f_z(q) = q_i z^i = p_j b_i^j z^i, \quad z = (z^1, \dots, z^n),$$

и потому равенство (13) означает — напомним, что векторы $p_1, \dots, p_n$ линейно независимы —, что $y^j = b_i^j z^i$, т. е. что $y = Bz$ (где y и z рассматриваются как столбцы). Следовательно, мы можем записать равенство (14) в следующем виде:

$$f_{Bz}(p) = (f_z \circ R_B)(p).$$

Здесь важно отметить, что для любых B и z это равенство имеет место тождественно по p . Поэтому для данного p

$$(15) \quad (df_y)_p = (df_{Bz})_p = (df_z)_q \circ (dR_B)_p, \quad q = pB, \quad y = Bz,$$

и, значит, как и утверждалось,

$$(df_y)_p H_p = (df_z)_q ((dR_B)_p H_p) = (df_z)_q H_q,$$

так как в силу эквивариантности $(dR_B)_p H_p = H_{pB} = H_q$.

Задача 5. Напомним, что вектор

$$u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p,$$

$$1 \leq i, \quad j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n,$$

пространства $T_p \xi$ мы условились обозначать через (A, u) , где $A = \|a_i^j\|$ и $u = (u^1, \dots, u^n)$. Аналогично вектор

$$v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_p + v^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)_p, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m,$$

пространства $T_p \mathcal{E}$ мы будем обозначать через (c, u) , где $c = (c^1, \dots, c^n)$ и $u = (u^1, \dots, u^n)$. Покажите, что в этих обозначениях дифференциал

$$(df_y)_p: T_p \mathcal{E} \rightarrow T_p \mathcal{B}, \quad p = f_y(p).$$

отображения f_y действует по формуле

$$(df_y)_p(A, u) = (Au, u),$$

где u и Au рассматриваются как столбцы. Выведите отсюда формулу (14).

Таким образом, для каждой связности H на ξ формула (13) корректно определяет на ξ поле подпространств H_p .

Задача 6. Покажите, что это поле гладко.

Ясно, что $\pi \circ f_y = \pi$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f_y} & \mathcal{E} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

коммутативна (отображение f_y является морфизмом расслоений). Поэтому для любых точек $p \in \mathcal{E}$ и $y \in \mathbb{R}^n$ коммутативна и диаграмма дифференциалов

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathcal{E} & \xrightarrow{(df_y)_p} & T_p \mathcal{E} \\ & \searrow (d\pi)_p & \swarrow (d\pi)_p \\ & T_b \mathcal{B} & \end{array}, \quad b = \pi(p) = \pi(p)$$

Задача 7. Выведите отсюда, что поле H является полем горизонтальных подпространств.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 2 нам надо лишь доказать, что поле H задается формами, линейно зависящими от координат по слою. Для этого мы вычислим его в координатах (что, в частности, немедленно даст нам решение задач 6 и 7).

Пусть, как всегда, U — тривиализирующая координатная окрестность в многообразии $\mathcal{B}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что для точек $p \in \mathcal{E}_U$ подпространство H_p задается формулой

$$H_p = (df_a)_p H_p,$$

где $p_0 = s(b)$, $b = \pi(p)$ (и, значит, a — столбец координат точки p в базисе $s_1(b), \dots, s_n(b)$ слоя $\mathcal{F}_b$). Так как $(d\pi)_p$ на H_p является изоморфизмом на $T_b\mathcal{B}$, то подпространство H_p обладает базисом вида

$$(16) \quad (A_1, e_1), \dots, (A_m, e_m)$$

и, следовательно, подпространство H_p — базисом

$$(A_1 c, e_1), \dots, (A_m c, e_m),$$

где

$$A_i = \|a_{ij}^i\|, \dots, A_m = \|a_{mj}^i\|, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

— некоторые квадратные матрицы порядка n , гладко зависящие от точки $b \in U$.

Рассмотрим на $\mathcal{E}_U$ — очевидно, гладкие — дифференциальные формы

$$\theta^i = da^i - a_{kj}^i a^j dx^k, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Так как в любой точке $p \in \mathcal{E}_U$ ковекторы $[(da^i)_p]^t$ и $a_{kj}^i a^j (dx^k)_p$ принимают на векторах

$$(A_k c, e_k) = a_{kj}^i c^j \left(\frac{\partial}{\partial a^j} \right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p$$

пространства H_p одно и то же значение $a_{kj}^i c^j$, то все ковекторы θ_p^i , $p \in \mathcal{E}_U$, равны нулю на H_p , и, значит, $H_p \subset \text{Ann}(\theta_p^1, \dots, \theta_p^n)$. Поскольку же эти ковекторы, очевидно, линейно независимы, а $\dim H_p = m$, то здесь имеет место не включение, а равенство. Таким образом,

$$H = \text{Ann}(\theta^1, \dots, \theta^n) \quad \text{на } \mathcal{E}_U$$

и, значит, поле $H: p \mapsto H_p$ действительно является связностью (с коэффициентами $\Gamma_{kj}^i = -a_{kj}^i$). $\square$

Поскольку векторы (16) составляют базис подпространства H_{p_1} , то (см. задачу 2) для любого элемента $B \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ векторы

$$(A_1 B, e_1), \dots, (A_m B, e_m)$$

будут составлять базис подпространства H_p , $p = p_0 A$.

Задача 8. Выведите отсюда, что подпространство H_p является аннулятором в точке p форм

$$\theta_j^i = dc^i - a_{ks}^i c^s dx^k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Это, очевидно, доказывает, что построенное в предложении 2 соответствие $H \Rightarrow H$ совпадает с соответствием из

предложения 1 (и тем самым дает новое доказательство предложения 1).

Согласно предложению 1 связности на ξ можно отождествлять со связностями на ξ .

Это не только дает новое (и инвариантное!) определение связностей на векторных расслоениях, но и открывает возможность немедленных широких обобщений.

Пусть группа Ли $\mathcal{G}$ гладко действует справа на гладком многообразии $\mathcal{E}$:

$$(17) \quad \mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Предположим, что

а) пространство $\mathcal{B} = \mathcal{E}/\mathcal{G}$ является гладким многообразием;

б) отображение

$$(18) \quad \pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}, \quad p \mapsto p\mathcal{G}, \quad p \in \mathcal{E},$$

гладко;

в) для некоторого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ существуют эквивариантные (и, значит, послойные) диффеоморфизмы

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$$

(удовлетворяющие соотношению $\varphi_\alpha(b, a)g = \varphi_\alpha(b, ag)$ для любых точек $b \in U_\alpha$ и $a, g \in \mathcal{G}$).

Задача 9. Докажите, что гладкое действие (17) тогда и только тогда является главным действием в смысле определения 2 лекции 1, когда оно обладает свойствами а, б и в. (Основную трудность здесь представляет, конечно, доказательство свойства локальной тривильности в.)

Не имея в виду явно пользоваться этим утверждением, мы не мудрствуя лукаво будем в дальнейшем называть гладкое действие (17), обладающее свойствами а, б и в, *главным*. В соответствии с этим тройку $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, где π — отображение (18), мы будем называть *гладким главным $\mathcal{G}$ -расслоением*. [Таким образом, согласно этому определению *каждое гладкое главное расслоение локально тривиально*.]

Задача 10. Покажите, что для любого гладкого главного расслоения ξ отображение сдвига

$$\tau: \xi^* \rightarrow \xi$$

(см. лекцию 1, стр. 19) является гладким отображением

Задача 11. Покажите, что рассмотренное выше расслоение реперов является гладким главным $GL(n; K)$ -расслоением.

Так как в силу условия в отображение $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ является субмерсией, то каждое гладкое главное расслоение $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ является гладким расслоением в смысле лекции 10 и потому для него мы можем говорить о вертикальных векторах и гладких полях горизонтальных подпространств.

Займемся сначала вертикальными векторами.

Векторное поле X на $\mathcal{G}$, состоящее из вертикальных векторов, т. е. такое, что для любой точки $p \in \mathcal{G}$ вектор X_p вертикален, мы будем называть *вертикальным полем*.

Для каждой точки $p \in \mathcal{G}$ отображение

$$L_p: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{G}, \quad a \mapsto pa, \quad a \in \mathcal{S},$$

является, очевидно, диффеоморфизмом группы $\mathcal{S}$ на слой $p\mathcal{S} = \mathcal{F}_b^1$, $b = \pi(p)$ расслоения ξ , переводящим единицу e группы $\mathcal{S}$ в точку p . Поэтому для любого вектора $A \in \mathfrak{g}$ формула

$$(19) \quad A_p^* = (dL_p)_e A, \quad p \in \mathcal{G},$$

определяет на $\mathcal{G}$ некоторое вертикальное векторное поле

$$A^*: p \mapsto A_p^*.$$

Задача 12. Покажите, что поле A^* гладко.

Поле A^* называется *фундаментальным вертикальным полем*, отвечающим вектору $A \in \mathfrak{g}$.

Так как отображение L_p является диффеоморфизмом, то при $A \neq 0$ все векторы A_p^* отличны от нуля:

$$A_p^* \neq 0 \quad \text{в каждой точке } p \in \mathcal{G}.$$

В частности, мы видим, что — очевидно, линейное — отображение

$$(20) \quad \#: \mathfrak{g} \rightarrow A^*$$

представляет собой мономорфизм линейного алгебры $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{S}$ в линейное пространство A^* всех векторных полей на многообразии $\mathcal{G}$.

Задача 13. Покажите, что для любого вертикального вектора $B \in T_p \mathcal{G}$ существует единственный элемент $A \in \mathfrak{g}$, обладающий тем свойством, что

$$A_p^* = B.$$

Задача 14. Пусть $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{H})$ — расслоение реперов векторного расслоения ξ . Так как касательные векторы в точке e к группе $\mathcal{G} \subset GL(n; \mathbb{R})$ естественным образом отождествляются с квадратными матрицами порядка n , то каждая матрица $A \in \text{Mat}_n \mathbb{R}$ определяет на пространстве $\mathcal{G}$ вертикальное векторное поле A^* . Покажите, что в каждой карте $(\mathcal{G}_U, h)$ это поле задается формулой

$$A_p^* = (AC, 0),$$

где (C, x) — координаты точки p .

Легко видеть, что для каждой точки $p_0 \in \mathcal{G}$ кривая

$$\beta: t \mapsto p_0 \exp tA = R_{\exp tA} p_0,$$

— $-\infty < t < +\infty$, является интегральной кривой поля A^* , проходящей при $t = 0$ через точку p_0 . Действительно, пусть $t_0 \in \mathbb{R}$. Так как

$$\begin{aligned} \beta(t) &= p_0 \exp t_0 A \exp (t - t_0) A = \\ &= L_{p_0 \exp t_0 A} (\exp (t - t_0) A) = \\ &= L_{\beta(t_0)} (\exp (t - t_0) A) \end{aligned}$$

и так как касательным вектором к кривой $t \mapsto \exp (t - t_0) A$ в точке t_0 является вектор A , то

$$\beta(t_0) = (dL_{\beta(t_0)})_e A = A_{\beta(t_0)}^*. \quad \square$$

Поскольку $[A^*, X] = \xi_{A^*} X$ (см. формулу (18) лекции III.17), отсюда следует, что

$$(21) \quad [A^*, X] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_{\exp tA}^* X - X}{t}$$

для каждого векторного поля $X \in \mathfrak{X}$. [Напомним — см. лекцию III.17, — что символом $\varphi^* X$, где X — векторное поле на гладком многообразии $\mathcal{X}$, а φ — произвольный диффеоморфизм $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, обозначается векторное поле на $\mathcal{X}$, определенное формулой $(\varphi^* X)_p = (d\varphi)_p^{-1} X_{\varphi(p)}$, $p \in \mathcal{X}$.]

Пусть, в частности, $X = B^*$, где $B \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$X_{p \exp tA} = (dL_{p \exp tA})_e B$$

и потому

$$\begin{aligned} (R_{\exp tA}^* X)_p &= (dR_{\exp tA})_p^{-1} (dL_{p \exp tA})_e B = \\ &= d(R_{\exp tA}^{-1} \circ L_{p \exp tA})_e B. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как для любой точки $x \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} (R_{\exp tA}^{-1} \circ L_{p \exp tA})x &= p(\exp tA)x(\exp(-tA)) = \\ &= p(\text{int}_{\exp tA} x) = (L_p \circ \text{int}_{\exp tA})x, \end{aligned}$$

то

$$R_{\exp tA}^{-1} \circ L_{p \exp tA} = L_p \circ \text{int}_{\exp tA},$$

и потому

$$\begin{aligned} d(R_{\exp tA}^{-1} \circ L_{p \exp tA})_e &= (dL_p)_e \circ d(\text{int}_{\exp tA})_e = \\ &= (dL_p)_e \circ \text{Ad}(\exp tA) = (dL_p)_e \circ e^{t \text{ad } A} \end{aligned}$$

(напомним — см. лекцию 14, — что по определению $\text{Ad } a = d(\text{int}_a)_e$) для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ и $\text{Ad } a = e^{\text{ad } A}$ при $a = \exp A$; см. формулу (17) лекции 14).

Следовательно,

$$(R_{\exp tA}^* B^*)_p - B_p^* = [(dL_p)_e \circ (e^{t \text{ad } A} - \text{id})] B$$

и, значит (см. формулу (21) и формулу (15) лекции 14),

$$\begin{aligned} [A^*, B^*]_p &= (dL_p)_e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \text{ad } A} - \text{id}}{t} B = \\ &= (dL_p)_e (\text{ad } A) B = (dL_p)_e [A, B] = [A, B]_p^*. \end{aligned}$$

Этим доказано, что

$$(22) \quad [A^*, B^*] = [A, B]^*$$

для любых векторов $A, B \in \mathfrak{g}$, т. е. что *линейное отображение (20) является гомоморфизмом алгебр Ли* (мономорфно вкладывающим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}^*$).

Дифференциальную форму ω степени $r > 0$ на многообразии $\mathfrak{g}$ мы будем называть *горизонтальной*, если для любой точки $p \in \mathfrak{g}$ полилинейный функционал ω_p на $T_p \mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что

$$\omega_p(A_1, \dots, A_r) = 0,$$

когда хотя бы один из векторов $A_1, \dots, A_r$ вертикален.

Из утверждения задачи 13 непосредственно следует, что *дифференциальная форма ω степени $r > 0$ на $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда горизонтальна, когда для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$ форма $A^* \lrcorner \omega$ степени $r-1$ (см. лекцию III.18) тождественно равна нулю:*

$$(23) \quad A^* \lrcorner \omega = 0.$$

В частности, *линейная дифференциальная форма θ на $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда горизонтальна, когда для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$ функция $\theta(A^*)$ на $\mathfrak{g}$ тождественно равна нулю:*

$$(24) \quad \theta(A^*) = 0.$$

Заметим, что для любой формы α на $\mathcal{B}$ форма $\pi^*\alpha$ на $\mathcal{E}$ горизонтальна.

Задача 15 (продолжение задачи 14). Для расслоения реперов $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ покажите, что линейная форма θ на $\mathcal{E}$ тогда и только тогда горизонтальна, когда в каждой карте $(\mathcal{E}_U, h)$ она имеет вид

$$(25) \quad \theta = g_k dx^k,$$

где $g_k, k = 1, \dots, m$, — функции на $\mathcal{E}_U$.

Это, в частности, показывает, что, вообще говоря, горизонтальные формы на $\mathcal{E}$ не исчерпываются формами вида $\pi^*\alpha$. (Форма (25) тогда и только тогда имеет вид $\pi^*\alpha$, когда функции g_k постоянны на слоях.)

Прежде чем переходить к полям горизонтальных подпространств, нам надо предварительно несколько усовершенствовать наш формализм.

Пусть $\mathcal{X}$ — гладкое многообразие и $\mathcal{V}$ — линейное пространство.

Определение 2. Предположим, что каждой точке $p \in \mathcal{X}$ и любым векторам $A_1, \dots, A_r \in T_p \mathcal{X}$ сопоставлен вектор

$$(26) \quad \omega_p(A_1, \dots, A_r)$$

линейного пространства $\mathcal{V}$. Функция

$$\omega: (p, A_1, \dots, A_r) \mapsto \omega_p(A_1, \dots, A_r)$$

называется $\mathcal{V}$ -значной дифференциальной формой степени r на многообразии $\mathcal{X}$, если для любого линейного функционала $l: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ функция

$$(27) \quad l \circ \omega: (p, A_1, \dots, A_r) \mapsto l(\omega_p(A_1, \dots, A_r))$$

является обыкновенной ($\mathbb{R}$ -значной) гладкой дифференциальной формой степени r на $\mathcal{X}$ (т. е. для каждой точки $p \in \mathcal{X}$ представляет собой гладко зависящий от p полилинейный функционал степени r на $T_p \mathcal{X}$).

Если в $\mathcal{V}$ выбран базис $e_1, \dots, e_n$, то каждая такая форма ω определяет n обыкновенных форм

$$\omega^1 = e^1 \circ \omega, \dots, \omega^n = e^n \circ \omega,$$

где $e^1, \dots, e^n$ — векторы сопряженного базиса пространства линейных функционалов $\mathcal{V}^*$ (удовлетворяющие соотношению $e^i(e_j) = \delta_j^i$). При этом разложение вектора (26)

по векторам базиса $e_1, \dots, e_n$ будет иметь вид

$$(28) \quad \omega_p(A_1, \dots, A_r) = \omega_p^i(A_1, \dots, A_r) e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В соответствии с общими обозначениями теории функций последнюю формулу надо было бы записывать в виде

$$(29) \quad \omega = \omega^i e_i.$$

Однако обычно здесь используется специальный знак $\otimes$ и вместо (29) пишут

$$(30) \quad \omega = \omega^i \otimes e_i.$$

Основания к этому выясняются в следующей серии задач.

Задача 16. Покажите, что $\mathcal{V}^r$ -значные дифференциальные формы степени r на $\mathcal{X}$ — это в точности сечения расслоения $\text{Hom}(\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}})$, где $\theta_{\mathcal{V}}$ — тривиальное расслоение $(\mathcal{X} \times \mathcal{V}, \pi, \mathcal{X})$.

Задача 17. Покажите, что для любых векторных расслоений ξ и η расслоение $\text{Hom}(\xi, \eta)$ естественно изоморфно расслоению $\xi^* \otimes \eta$. [Указание. Учтите, что для любых линейалов $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$ линейал $\text{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ естественно изоморфен линейалу $\mathcal{W}^* \otimes \mathcal{V}$. Воспользуйтесь также утверждением задачи 14 лекции 12.]

В частности, $\text{Hom}(\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}}) = \Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}^* \otimes \eta$. (Напомним, что $\Lambda^r \xi^* = (\Lambda^r \xi)^*$.)

Задача 18. Покажите, что каждое сечение расслоения $\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}^* \otimes \theta_{\mathcal{V}}$ единственным образом представляется в виде $\omega^i \otimes e_i$, где ω^i , $1 \leq i \leq n$, — сечения расслоения $\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}^*$ (дифференциальные формы степени r на $\mathcal{X}$), а e_i , $1 \leq i \leq n$, — сечения расслоения $\theta_{\mathcal{V}}$, определенные формулой

$$e_i(p) = (p, e_i), \quad p \in \mathcal{X},$$

где справа e_i , $1 \leq i \leq n$, — векторы данного базиса пространства $\mathcal{X}$. [Указание. См. задачу 12 лекции 12.]

Таким образом, переход от формулы (29) к формуле (30) можно интерпретировать как переход от сечений расслоения $\text{Hom}(\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}, \theta_{\mathcal{V}})$ к сечениям изоморфного расслоения $\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}^* \otimes \theta_{\mathcal{V}}$.

Результат задачи 17 подсказывает возможность дальнейших обобщений. Именно, для любого векторного расслоения η над $\mathcal{X}$ мы можем ввести в рассмотрение сечения расслоения

$$\text{Hom}(\Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}, \eta) = \Lambda^r \tau_{\mathcal{X}}^* \otimes \eta$$

(дифференциальные формы со значениями в η). [При $r = 1$ эти сечения у нас уже фактически встречались в лекции

13—как значения оператора ковариантного дифференцирования ∇ .]

Еще более общим образом мы можем для любых $r \geq 0$, $s \geq 0$ рассмотреть (см. пример 8 лекции 12) сечения расслоения $\tau_r^* \mathcal{X} \otimes \eta$ (тензорные поля типа (r, s) со значениями в η).

Задача 19. Покажите, что для любых векторных расслоений ξ и η над $\mathcal{X}$ имеют место естественные изоморфизмы

$$\text{Hom}(\xi, \eta) = \text{Hom}(\eta^*, \xi^*), \quad (\xi \otimes \eta)^* = \eta^* \otimes \xi^*.$$

Отсюда, в частности, следует, что $(\tau_r^* \mathcal{X})^* = \tau_r^* \mathcal{X}$ и

$$(31) \quad \tau_r^* \mathcal{X} \otimes \eta = \text{Hom}(\tau_r^* \mathcal{X}, \eta) = \text{Hom}(\eta^*, \tau_r^* \mathcal{X}).$$

Поэтому тензорными полями типа (r, s) на $\mathcal{X}$ со значениями в η можно считать сечения каждого из расслоений (31).

При желании формулу (30) можно, конечно, рассматривать как всего лишь графический вариант формулы (29) и, следовательно, — подобно формуле (29) — как условную, сокращенную запись соотношений (28). Имея в виду именно эту интерпретацию, формы $\omega^1, \dots, \omega^n$ называют обычно *координатами* $\mathcal{V}$ -значной формы ω в базисе $e_1, \dots, e_n$. При изменении базиса они подвергаются тому же преобразованию, что и координаты векторов из $\mathcal{V}$.

Для любых векторных полей $X_1, \dots, X_r$ на $\mathcal{X}$ каждая $\mathcal{V}$ -значная дифференциальная форма ω степени r определяет по формуле

$$\omega(X_1, \dots, X_r)(p) = \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_r)_p), \quad p \in \mathcal{X},$$

некоторую $\mathcal{V}$ -значную функцию $\omega(X_1, \dots, X_r)$ на $\mathcal{X}$ (гладкую, если гладки поля $X_1, \dots, X_r$ и форма ω).

Задача 20. Пусть $F_{\mathcal{V}, \mathcal{X}}$ — линейное пространство всех $\mathcal{V}$ -значных гладких функций на $\mathcal{X}$. Покажите, что
а. *Отображение*

$$(32) \quad \begin{aligned} \alpha \mathcal{X} \times \dots \times \alpha \mathcal{X} &\rightarrow F_{\mathcal{V}, \mathcal{X}}, \\ (X_1, \dots, X_r) &\mapsto \omega(X_1, \dots, X_r), \end{aligned}$$

кососимметрично и $F\mathcal{X}$ -полилинейно.

б. Если многообразие $\mathcal{X}$ хаусдорфово, то соответствие
форма $\omega \Rightarrow$ отображение (32)

задает изоморфное отображение $F\mathcal{X}$ -модуля $\mathcal{V}$ -значных дифференциальных форм степени r на $F\mathcal{X}$ -модуль всех

кососимметрических $\mathbf{F}\mathcal{X}$ -полилинейных отображений

$$\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \dots \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{F}_{q^2}\mathcal{X}.$$

(Ср. лекцию III.18.)

Задача 21. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для дифференциальных форм и тензорных полей со значениями в произвольном векторном расслоении η над $\mathcal{X}$. [Указание. Вместо $\mathbf{F}_{q^2}\mathcal{X}$ появится $\Gamma\eta$.]

Как правило, мы будем отождествлять форму ω с соответствующим отображением (32).

Определение 3. Внешним дифференциалом $d\omega$ формы (30) называется форма

$$(33) \quad d\omega = d\omega^i \otimes e_i.$$

Задача 22. Покажите, что это определение корректно, т. е. что форма (33) не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$.

Задача 23. Покажите, что для векторнозначных форм остается в силе предложение 2 лекции III.19 (по отношению к естественному действию векторных полей $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ на алгебре $\mathbf{F}_{q^2}\mathcal{X}$).

В частности, если $\deg \omega = 1$, то

$$(34) \quad d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y],$$

а если $\deg \omega = 2$, то

$$(35) \quad d\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) + \\ + \omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y])$$

для любых полей $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Фундаментальные формы и поля горизонтальных подпространств.—Связности на гладком главном расслоении.—Проекторы, индуцированные связностями.—Горизонтальные векторные поля.—Связности на ассоциированных расслоениях.—Связности на ассоциированных векторных расслоениях.

Введенные в конце предыдущей лекции общие понятия мы применим к случаю, когда многообразие $\mathcal{X}$ является тотальным многообразием $\mathcal{E}$ гладкого главного $\mathcal{G}$ -расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{G})$, а линейное пространство $\mathcal{V}$ — касательным пространством $\mathfrak{g} = T_e \mathfrak{g}$ группы $\mathcal{G}$ в точке e (ее алгеброй Ли).

Определение 1. Линейная $\mathfrak{g}$ -значная дифференциальная форма θ на $\mathcal{E}$ называется *фундаментальной формой*, если для любого вектора $A \in T_p \mathcal{E}$ в каждой точке $p \in \mathcal{E}$ имеет место равенство

$$(1) \quad \theta(A^*)(p) = A.$$

Пример 1. Так как $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) = \text{Mat}_n \mathbb{R}$, то $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ -значные формы — это просто матрицы $\omega = [\omega_j^i]$, элементами которых являются обычные дифференциальные формы ω_j^i . В частности, линейные $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ -значные формы — это матрицы $\theta = [\theta_j^i]$, состоящие из линейных дифференциальных форм θ_j^i . В карте $(\mathcal{E}_U, h)$ тотального многообразия $\mathcal{E}$ расслоения реперов ξ векторного расслоения ξ каждая форма θ_j^i имеет вид

$$\theta_j^i = f_{jr}^i dc_r^s + g_{jk}^i dx^k,$$

где f_{jr}^i и g_{jk}^i — некоторые функции на $\mathcal{E}_U$. Значение формы θ_j^i на касательном векторе (A, u) (мы продолжаем использовать обозначения, введенные в лекции 14) равно

$$f_{jr}^i a_r^s + g_{jk}^i u^k = \text{Tr}(F_j^i A) + G_k^i u^k,$$

где F_j^i и G_k^i — матрицы $\|f_{jr}^i\|$ и $\|g_{jk}^i\|$ соответственно. В частности, значение этой формы на векторе вида $(AC, 0)$ равно $\text{Tr}(F_j^i AC)$. Поэтому — см. задачу 14 лекции 14 — форма θ тогда и только тогда фундаментальна, когда

$$\text{Tr}(F_j^i AC) = a_j^i$$

для любой матрицы $A = \|a_j^i\|$. Но легко видеть (докажите!), что матрицы F_j^i тогда и только тогда обладают этим свой-

ством, когда $F'_j C = E'_j$, где E'_j — матричные единицы (все элементы матрицы E'_j равны нулю, за исключением (i, j) -го, который равен 1), т. е. когда $F'_j = E'_j C^{-1}$ (и значит, $f'_j = 'c'_i \delta_{ij}$, где $'c'_i$ — элементы матрицы C^{-1}). Этим доказано, что $q^1(n; R)$ -значная форма $\theta = [\theta^i]$ на расслоении реперов тогда и только тогда фундаментальна, когда в каждой карте $(\mathcal{E}_U, h)$ составляющие ее формы θ^i_j имеют вид

$$\theta^i_j = 'c'_i dc'_j + g^i_k dx^k,$$

т. е. когда

$$(2) \quad \theta = C^{-1} dC + G_k dx^k,$$

где dC — матрица $[dc'_j]$, а $G_k = [g^i_k]$, $1 \leq k \leq m$.

Каждая q -значная линейная дифференциальная форма θ задает по формуле

$$H_p = \{B \in T_p \mathcal{E}; \theta_p(B) = 0\}, \quad p \in \mathcal{E}.$$

некоторое поле подпространств H . Мы будем обозначать это поле символом $\text{Ann } \theta$ и будем называть его *аннулятором формы* θ .

Легко видеть, что *аннулятор H каждой фундаментальной формы θ является полем горизонтальных подпространств*. Действительно, пусть $\theta^1, \dots, \theta^n$ — координаты формы θ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства $T_p \mathcal{E}$. Из формулы (1) непосредственно следует, что для любых чисел $c_1, \dots, c_n$ значение формы $c_i \theta^i$ на векторном поле A^* равно $c(A)$, где c — ковектор на линейном пространстве $T_p \mathcal{E}$, имеющий в базисе $e_1, \dots, e_n$ коэффициенты $c_1, \dots, c_n$. Поэтому, если в некоторой точке $p \in \mathcal{E}$ имеет место равенство $c_i \theta^i_p = 0$, то $c(A) = 0$ для любого вектора $A \in T_p \mathcal{E}$ и, значит, $c = 0$, т. е. $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$. Это показывает, что во всех точках $p \in \mathcal{E}$ формы $\theta^1, \dots, \theta^n$ линейно независимы. Поскольку, очевидно, $\text{Ann } \theta = \text{Ann}(\theta^1, \dots, \theta^n)$, этим доказано, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$

$$\dim H_p = m.$$

С другой стороны, если B — произвольный вертикальный вектор в некоторой точке $p \in \mathcal{E}$, то согласно той же формуле (1)

$$\theta_p(B) = A,$$

где A — такой вектор из $T_p \mathcal{E}$, что $A^* = B$. Поэтому, если

$B \in H_p$, то $A = 0$ и, значит, $B = 0$. Таким образом,

$$T_p \mathcal{F}_b \cap H_p = 0$$

и, значит, $T_p \mathcal{E} = T_p \mathcal{F}_b \oplus H_p$ (поскольку $\dim H_p = m = \dim T_p \mathcal{E} - \dim T_p \mathcal{F}_b$). Следовательно, поле H является полем горизонтальных подпространств.

Обратно, любое поле H горизонтальных подпространств является аннулятором единственной фундаментальной g -значной формы θ . Действительно, если $H = \text{Ann } \theta$ и форма θ фундаментальна, то в каждой точке $p \in \mathcal{E}$ для любого вектора $B \in T_p \mathcal{E}$ будет иметь место равенство

$$(3) \quad \theta_p(B) = A,$$

где A — такой вектор из $T_p \mathcal{Z}$, что $A^* = B^V$. Это доказывает единственность формы θ . Для доказательства существования мы определим форму θ на $\mathcal{E}$ формулой (3). Так как $(A^*)^V = A^*$ для любого $A \in T_p \mathcal{Z}$, то эта форма фундаментальна. Кроме того, $\theta_p(B) = 0$ тогда и только тогда, когда $B^V = 0$, т. е. когда $B \in H_p$. Следовательно, $H = \text{Ann } \theta$. $\square$

Так как действие группы $\mathcal{Z}$ на многообразии $\mathcal{E}$ гладко, то для любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ отображение

$$R_a: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad p \rightarrow pa, \quad p \in \mathcal{E},$$

является диффеоморфизмом.

По аналогии со случаем расслоения реперов мы будем говорить, что заданное на $\mathcal{E}$ поле H горизонтальных подпространств *эквивариантно*, если

$$(4) \quad (dR_a)_p H_p = H_{pa}$$

для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ (ср. формулу (8) лекции 14). Гладкое эквивариантное поле горизонтальных подпространств мы по-прежнему будем называть *связностью*. (Ср. определение 1 лекции 14.)

Задача 1. Покажите, что поле H горизонтальных подпространств тогда и только тогда эквивариантно (является связностью), когда для любого вектора $B \in T_p \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ имеет место одно из равенств

$$[(dR_a)_p B]^V = (dR_a)_p B^V, \quad [(dR_a)_p B]^H = (dR_a)_p B^H$$

(а значит, и оба).

Напомним (см. лекцию 14), что каждый элемент a группы Ли $\mathcal{Z}$ определяет линейное отображение

$$\text{Ad } a: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g} = T_e \mathcal{Z}$$

являющееся не чем иным, как дифференциалом в точке e внутреннего автоморфизма

$$\text{int}_a: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad x \mapsto axa^{-1}, \quad x \in \mathcal{G}.$$

Пример 2. Для любой матрицы $X \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ автоморфизм $\text{int}_X: A \mapsto XAX^{-1}$ линеен по A . Поэтому его дифференциал совпадает с ним самим. Значит,

$$(\text{Ad } X)C = XCX^{-1}$$

для каждой матрицы C из $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) = \text{Mat}_n \mathbb{R}$.

Дифференциальная $\mathfrak{g}$ -значная линейная форма θ на $\mathcal{G}$ называется *эквивариантной*, если

$$R_a^* \theta = (\text{Ad } a^{-1}) \theta,$$

для любого элемента $a \in \mathcal{G}$, т. е. если в каждой точке $p \in \mathcal{G}$ для любого вектора $B \in T_p \mathcal{G}$ имеет место равенство

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = (\text{Ad } a^{-1})(\theta_p^\vee(B)).$$

Пример 3. В точке p с координатами (C, x) форма (2) принимает на векторе $B = (A, u)$ значение $C^{-1}A + G_k u^k$, где $G_k = G_k(C, x)$. Поэтому для любой матрицы $X \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ матрица $(\text{Ad } X^{-1})(\theta_p(B))$ равна $X^{-1}(C^{-1}A + G_k((A, x)u^k))X$ (см. выше пример 2). С другой стороны, $(dR_X)_p B = (AX, u)$ (см. задачу 4 лекции 10) и, значит,

$$\theta_{pX}((dR_X)_p B) = (CX)^{-1}AX + G_k(CX, x)u^k$$

(напомним, что точка pX имеет координаты (CX, x)). Следовательно, форма (2) эквивариантна тогда и только тогда, когда

$$X^{-1}C^{-1}AX + X^{-1}G_k(C, x)Xu^k = X^{-1}C^{-1}AX + G_k(CX, x)u^k,$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$X^{-1}G_k(C, x)X = G_k(CX, x), \quad 1 \leq k \leq m,$$

для всех матриц $X, C \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ (и любого x). Но легко видеть (докажите!), что матрицы G_k тогда и только тогда удовлетворяют этому условию, когда

$$G_k(C, x) = C^{-1}\Gamma_k C, \quad 1 \leq k \leq m,$$

где $\Gamma_k = \Gamma_k(x)$ — матрицы, зависящие только от x (т. е. состоящие из функций на координатной окрестности $U \subset \mathcal{B}$). Этим доказано, что *эквивариантные фундаментальные формы на расслоении реперов на каждой координатной окрест-*

ности $\mathcal{E}_U$ имеют вид

$$\theta = C^{-1}dC + C^{-1}\omega C,$$

где $\omega = \Gamma_{\mu} dx^{\mu}$ — некоторая матрица линейных форм на U .

Заметим, что это — в точности формы (12) лекции 16, задающие связности на расслоении реперов. Это не является случайным совпадением, поскольку, как нетрудно показать, аннулятор $H = \text{Ann } \theta$ фундаментальной формы θ тогда и только тогда эквивариантен (является связностью), когда форма θ эквивариантна. Действительно, если аннулятор H эквивариантен, то для любого вектора $B \in T_p \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{G}$ будет иметь место равенство

$$[(dR_a)_p B]^V = (dR_a)_p B^V$$

(см. выше задачу 1). С другой стороны, по определению

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = \bar{A},$$

где $\bar{A}$ — такой вектор из $T_a \mathcal{Z}$, что $\bar{A}_{pa}^* = [(dR_a)_p B]^V$. Следовательно,

$$\bar{A}_{pa}^* = (dR_a)_p B^V = (dR_a)_p A_p^*,$$

где A — такой вектор из $T_a \mathcal{Z}$, что $A_p^* = B^V$.

Задача 2. Докажите, что если

$$\bar{A}_{pa}^* = (dR_a)_p A_p^*,$$

то $\bar{A} = (\text{Ad } a^{-1}) A$. [У к а з а н и е. По определению, $(dj_p)_e \bar{A} = \bar{A}_p^*$, где $j_p: x \mapsto px$, $x \in \mathcal{G}$. Поэтому $(dj_{pa})_e \bar{A} = \bar{A}_{pa}^* = (dR_a)_p \bar{A}_p^* = (dR_a)_p (dj_p)_e A$, т. е. $(dj_{pa})_e \bar{A} = d(R_a \circ j_p)_e A$. С другой стороны, $j_{pa} \circ \text{int}_{a^{-1}} = R_a \circ j_p$.]

Поскольку $\theta_p(B) = A$, откуда следует, что

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = (\text{Ad } a^{-1})(\theta_p(B)),$$

т. е. что форма θ эквивариантна.

Обратно, если форма θ эквивариантна и $\theta_p(B) = 0$, то

$$\theta_{pa}((dR_a)_p B) = (\text{Ad } a^{-1})(\theta_p(B)) = 0,$$

и, значит, $(dR_a)_p B \in H_{pa}$. Это доказывает, что $(dR_a)_p H_p \subset H_{pa}$. Заменяя здесь p на pa , а a — на a^{-1} , мы получим и обратное включение. Следовательно, поле H эквивариантно. $\square$

Резюмируя, мы видим, что нами доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Связности H на главном $\mathcal{E}$ -расслоении ξ находятся в естественном биективном соответствии с g -значными эквивариантными фундаментальными формами θ на многообразии $\mathcal{E}$. При этом форме θ отвечает связность $H = \text{Ann } \theta$, а связности H — форма (3). $\square$*

Определение 2. Форма θ называется *формой связности H* .

Иногда связностью называют не поле H , а форму θ .

Таким образом, на гладких главных расслоениях связности можно определять и как поля горизонтальных подпространств, и как g -значные линейные дифференциальные формы.

Возможны и другие подходы к определению связности. Например, каждая связность H на гладком главном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ определяет в линейном пространстве $a\mathcal{E}$ всех гладких векторных полей на $\mathcal{E}$ линейный оператор

$$H: a\mathcal{E} \rightarrow a\mathcal{E}, \quad X \mapsto X^H,$$

сопоставляющий векторному полю $X \in a\mathcal{E}$ его горизонтальную составляющую X^H . Этот оператор

а) является проектором (т. е.

$$H^2 = H);$$

б) перестановочен со всеми операторами вида R_a^* (т. е.

$$R_a^* \circ H = H \circ R_a^*);$$

в) аннулирует все вертикальные векторные поля: если поле X вертикально, то $HX = 0$.

Задача 3. Покажите, что любой оператор H , обладающий свойствами а, б, в, порождается единственной связностью.

Таким образом, связности на ξ можно отождествлять с такого рода операторами.

Аналогичное построение возможно, конечно, и для связности на векторном расслоении ξ , нужно лишь заменить условие б требованием, чтобы оператор H линейно зависел (в понятном смысле) от координат по слою.

Векторное поле $Y \in a\mathcal{E}$, для которого $Y^H = Y$, т. е. такое, что $Y_p \in H_p$ для любой точки $p \in \mathcal{E}$, называется *горизонтальным*. Все горизонтальные поля образуют подпространство $\text{Im } H$ линейала $a\mathcal{E}$.

Так как на подпространстве H_p отображение

$$(d\pi)_p: T_p \mathcal{E} \rightarrow T_p \mathcal{B}, \quad b = \pi(p),$$

является изоморфизмом, то на многообразии $\mathcal{E}$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ существует такое горизонтальное векторное поле $\tilde{X}$, что

$$(d\pi)_p X_p = X_{\pi(p)} \quad \text{для любой точки } p \in \mathcal{E}.$$

Поле $\tilde{X}$ называется *горизонтальным поднятием* поля X .

Задача 4. Докажите, что для гладкого поля X поле $\tilde{X}$ также гладко. [Указание. Постройте гладкое поле $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{E}$, для которого $(d\pi)_p(Y_p) = X_{\pi(p)}$ в любой точке $p \in \mathcal{E}$, и затем примените оператор H .]

Таким образом, соответствие $X \rightarrow \tilde{X}$ является (очевидно, мономорфным и линейным) отображением $\mathfrak{a}\mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{a}\mathcal{E}$, вкладывающим $\mathfrak{a}\mathcal{B}$ в $\text{Im } H$.

Задача 5. Докажите, что горизонтальное поле $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{E}$ тогда и только тогда является горизонтальным поднятием $\tilde{X}$ некоторого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, когда для любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ имеет место равенство

$$R_a^* Y = Y.$$

Задача 6. Докажите, что для любого горизонтального вектора $A \in T_p \mathcal{E}$ существует такое поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, что

$$\tilde{X}_p = A.$$

Задача 7. Докажите, что

$$[\widetilde{X}, Y] = [\tilde{X}, Y]^H$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$.

Предложение 2. Для любого элемента $A \in \mathfrak{g}$ и любого горизонтального поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{E}$ поле $[A^*, Y]$ горизонтально. Если $Y = \tilde{X}$, то $[A^*, Y] = 0$.

Доказательство. Согласно формуле (21) лекции 16

$$[A^*, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_{\exp tA}^* Y - Y}{t}.$$

Но ясно, что если поле Y горизонтально, то для любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ поле $R_a^* Y$ также горизонтально. Поэтому поле $R_{\exp tA}^* Y - Y$ горизонтально. Следовательно, горизонтально и поле $[A^*, Y]$.

Если же $Y = \bar{X}$, то $Y = R_{\exp tA}^* Y$, и значит, $[A^*, Y] = 0$. $\square$

Описанный в предложении 2 лекции 16 переход от связностей на расслоении реперов к связностям на соответствующем векторном расслоении может быть осуществлен и в общем случае.

Пусть $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ — произвольное гладкое главное расслоение, $\mathcal{G}$ — его структурная группа Ли и $\mathcal{F}$ — гладкое многообразие, на котором гладко действует группа $\mathcal{G}$. Тогда определено (см. лекцию 1) ассоциированное расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ со слоем $\mathcal{F}$. По построению, точками тотального пространства $\mathcal{B}$ этого расслоения являются орбиты $[p, x]_p$ естественного действия группы $\mathcal{G}$ на прямом произведении $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

Задача 8. Докажите, что расслоение $\xi[\mathcal{F}]$ гладко и локально тривиально как гладкое расслоение (обладает тривиализирующим атласом, состоящим из тривиализаций, являющихся диффеоморфизмами). Докажите также, что естественное отображение факторизации $\mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$ гладко.

Поэтому для расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ можно говорить о вертикальных векторах и полях горизонтальных подпространств.

Произвольной точке $y \in \mathcal{F}$ мы отнесем — очевидно, гладкое — отображение

$$(5) \quad f_y: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B},$$

определенное формулой

$$f_y(p) = [p, y]_p, \quad p \in \mathcal{G}.$$

Задача 9. Докажите, что равенство

$$f_y(p) = f_z(q), \quad p, q \in \mathcal{G}, y, z \in \mathcal{F},$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in \mathcal{G}$, что $q = pa$ и $y = az$.

Выведите отсюда, что для любой связности H на ξ формула

$$(6) \quad H_p = (df_y)_p H_p, \quad p = f_y(p), p \in \mathcal{G}, y \in \mathcal{F},$$

корректно определяет на $\mathcal{B}$ некоторое поле $H: p \mapsto H_p$ горизонтальных подпространств. [Ср. доказательство предложения 2 лекции 16.]

Поля вида (6) называются связностями на $\xi[\mathcal{F}]$. Для случая $\mathcal{G} = \text{GL}(n; \mathbb{R})$ и $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ это определение согласуется

(см. предложение 2 лекции 16) с исходным определением 3 лекции 10 связностей на векторных расслоениях.

Конечно, поля вида (6) хочется охарактеризовать в терминах самого расслоения $\xi[\mathcal{F}]$ без обращения к главному расслоению ξ , подобно тому как это мы сделали для связностей на векторных расслоениях в лекции 10. Это можно сделать, если воспользоваться $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -структурой на $\xi[\mathcal{F}]$ (см. лекцию 9). Осуществление этой возможности мы оставим инициативе читателя.

Важный частный случай возникает, когда типичный слой $\mathcal{F}$ является линейным пространством $\mathcal{V}$, а группа $\mathcal{G}$ линейно действует на $\mathcal{V}$, т. е. когда мы имеем дело о *линейном представлении*

$$\alpha: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{V}$$

группы $\mathcal{G}$ в группе $\text{Aut } \mathcal{V}$ линейных автоморфизмов пространства $\mathcal{V}$.

Задача 10 (ср. задачу 3 лекции 1). Докажите, что в этом случае ассоциированное расслоение $\xi[\mathcal{V}]$ является векторным расслоением. Это расслоение обозначается символом $\xi[\alpha]$ (а его тотальное пространство $\mathcal{G} \times \mathcal{V}$ — символом $\mathcal{G} \times \mathcal{V}$).

В случае, когда $\mathcal{G} = \text{GL}(n; \mathbb{R})$, а расслоение ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ , расслоение $\xi[\alpha]$ обозначается символом $\xi[\alpha]$.

Конечно, если $\alpha = \text{id}$, то $\xi[\alpha] = \xi$.

Задача 11. Пусть представление

$$(7) \quad \alpha: \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$$

определено формулой

$$\alpha(A) = (A^T)^{-1}, \quad A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}).$$

Покажите, что для любого векторного расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[\alpha]$ изоморфно расслоению ξ^* (где ξ^* — см. задачу 11 лекции 12 — векторное расслоение со слоями $(\mathcal{F}^b)^*$, $b \in \mathcal{B}$). [Указание. Изоморфизм $\xi[\alpha] \rightarrow \xi^*$ ставит в соответствие точке $[p, y]$ пространства $\mathcal{G} \times \mathcal{V}$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{G}$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (обратите внимание на положение индексов!), точку $q = y_i p^i$ пространства $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*$, где $p^1, \dots, p^n$ — базис линейала $(\mathcal{F}^b)^* = \mathcal{F}^b$, сопряженный базису $p_1, \dots, p_n$ линейала $\mathcal{F}^b$.]

Задача 12. (Обобщение задачи 11.) Пусть $T'_i \mathcal{V}^2$ — линейное пространство тензоров типа (r, s) над линейалом $\mathcal{V}^2$ (полилинейных функционалов от r векторов и s ковекторов; см. лекцию II.6). Выбрав в $\mathcal{V}^2$ базис, рассмотрим представление

$$\alpha: \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(T'_i \mathcal{V}^2),$$

ставящее в соответствие матрице $A \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ линейный оператор $\alpha(A): T'_i \mathcal{V}^2 \rightarrow T'_i \mathcal{V}^2$, определенный формулой

$$\begin{aligned} (\alpha(A)S)(x_1, \dots, x_r, \xi^1, \dots, \xi^s) = \\ = S(Ax_1, \dots, Ax_r, (A^*)^{-1}\xi^1, \dots, (A^*)^{-1}\xi^s), \end{aligned}$$

где A — оператор $\mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ с матрицей A . Покажите, что для любого векторного расслоения ξ ассоциированное расслоение $\xi[\alpha]$ изоморфно расслоению $T'_i \xi$ (см. пример 8 лекции 13).

Предположим теперь, что на векторном расслоении ξ задана связность H . На главном расслоении реперов ξ этой связности отвечает связность H , а последней — некоторая связность $H[\alpha]$ на расслоении $\xi[\alpha] = \xi[\alpha]$.

Вычислим связность $H[\alpha]$ для случая, когда α представляет собой представление (7), и, значит, $\xi[\alpha]$ является расслоением ξ^* .

Каждому базису $s = (s_1, \dots, s_n)$ модуля $\Gamma(\xi|_U)$ над тривиализирующей расслоение ξ координатной окрестностью U отвечает сопряженный базис $c = (c^1, \dots, c^n)$ модуля $\Gamma(\xi^*|_U)$, обладающий тем свойством, что в любой точке $b \in U$ ковекторы $c^1(b), \dots, c^n(b)$ составляют базис линейала $\mathcal{F}_b^*$, сопряженный базису $s(b) = (s_1(b), \dots, s_n(b))$ линейала $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b^*$. (Контрольный вопрос: почему сечения $c^1, \dots, c^n$ расслоения $\xi^*|_U$ гладки?) Базис s (вместе с координатным отображением $U \rightarrow \mathbb{R}^n$) определяет на множестве $\mathcal{E}_U = \cup \mathcal{F}_b$, $b \in U$, координаты a^i, x^k , где x^k — координаты в U точки $b = \pi(p)$, $p \in \mathcal{E}_U$, а a^i — координаты вектора $p \in \mathcal{F}_b$ в базисе $s(b)$. В свою очередь базис c определяет на множестве $\mathcal{E}_U^* = \cup \mathcal{F}_b^*$, $b \in U$, координаты a_i, x^k , где x^k — координаты в U точки $b = \pi(q)$, $q \in \mathcal{E}_U^*$, а a_i — координаты ковектора $q \in \mathcal{F}_b^*$ в базисе $c(b)$. Мы вычислим коэффициенты связности $H^* = H[\alpha]$ в координатах a_i, x^k по коэффициентам Γ_{ij}^k связности H в координатах a^i, x^k .

По определению $H = \text{Ann}(\theta^1, \dots, \theta^n)$ над U , где

$$\theta^i = da^i + \Gamma_{kj}^i a^j dx^k.$$

Аналогично $H^* = \text{Ann}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ над U , где

$$(8) \quad \theta_i = da_i + C_{kj}^i a^j dx^k, \quad i = 1, \dots, n,$$

и задача состоит в том, чтобы выразить функции C_{kj}^i через функции Γ_{ij}^k .

Согласно введенным в лекции 16 обозначениям каждая точка $p = (p_1, \dots, p_n)$ пространства $\mathcal{E}$ записывается в виде пары (A, x) , где A — матрица $\|a_i^j\|$, состоящая из координат векторов $p_i \in \mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$, в базисе $s(b)$ (так что $p_i = a_i^j s_j(b)$ для любого $i = 1, \dots, n$), а x — строка $(x^1, \dots, x^n)$ координат точки b . В частности, точка $p_0 = s(b)$ будет иметь вид (E, x) , где E — единичная матрица.

Аналогично символом (C, u) , где $C = \|c_j^i\|$, $1 \leq i, j \leq n$, и $u = (u^1, \dots, u^n)$ мы обозначаем вектор

$$c_j^i \left(\frac{\partial}{\partial a_j^i} \right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p$$

пространства $T_p \mathcal{E}$. При этом согласно произведенным в лекции 16 вычислениям (см., в частности, формулы (5) и (10) лекции 16) вектор $(C, u) \in T_p \mathcal{E}$ тогда и только тогда будет принадлежать пространству H_p , $p = (A, x)$, когда

$$C = -u^k F_k, \quad \text{где } F_k = \|\Gamma_{ik}^j\|.$$

В частности, векторы $(-F_1, e_1), \dots, (-F_m, e_m)$ составляют базис пространства H_p .

При $p = p_0$ мы получаем отсюда, что векторы

$$(9) \quad (-\Gamma_1, e_1), \dots, (-\Gamma_m, e_m), \quad \text{где } \Gamma_k = \|\Gamma_{ik}^j\|,$$

составляют базис пространства H_{p_0} .

Отображение (5) является в рассматриваемом случае — в силу указанного в задаче 7 отождествления — отображением

$$f_y: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

и задается формулой

$$f_y(p) = y_i p^i,$$

где p^i , $1 \leq i \leq n$, — базис пространства $\mathcal{F}_b^*$, сопряженный базису p пространства $\mathcal{F}_b$. В частности, отсюда следует, что точка $f_a(p_0)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, имеет координаты a_i , x^k (где, как всегда, x^k — координаты точки $b = \pi(p_0)$).

Для каждой точки $p \in \mathcal{E}_U$ дифференциал $(df_y)_p$ отображения f_y в точке p представляет собой линейное отображение $T_p \mathcal{E} \rightarrow T_p \mathcal{E}^*$, где $q = f_y(p) = y_i p^i$. Условимся обозначать вектор

$$c_i^j \left(\frac{\partial}{\partial a_i^j} \right)_q + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_q$$

пространства $T_p \mathcal{E}^*$ символом (c, u) , где $c = (c_1, \dots, c_n)$, $u = (u^1, \dots, u^n)$.

Задача 13. Докажите (ср. задачу 5 лекции 14), что при $p = (A, x)$

$$(df_y)_{p^*}(C, u) = (-yA^{-1}CA^{-1}, u)$$

для любого вектора $(C, u) \in T_p \mathcal{E}$. [Указание. Как известно, $dA^{-1} = -A^{-1}dAA^{-1}$.]

При $p_0 = p$, когда $A = E$, отсюда следует, что векторы базиса (9) пространства H_p , отображение $(df_a)_p$ переводит в векторы

$$(10) \quad (a\Gamma_1, e_1), \dots, (a\Gamma_m, e_m).$$

Этим доказано, что для точки $q \in \mathcal{E}_U^*$ с координатами a_i , x^k векторы (10), где $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $\Gamma_k = [\Gamma_{kj}]$, $1 \leq k \leq m$, составляют базис пространства H_q^* .

Поскольку формы (8) принимают на векторах (10) значения $a_j\Gamma_{ki} + C_{ki}a_j$ и поскольку эти значения должны быть равны ∇ нулю, мы получаем отсюда, что $C_{ki} = -\Gamma_{ki}'$, т. е. что

$$\theta_i = da_i - \Gamma_{ki}' a_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это доказывает, что связность H^* совпадает со связностью на ξ^* , отвечающей ковариантному дифференцированию ∇ из предложения 1 лекции 12.

Задача 14. Покажите, что аналогично, связности, отвечающие ковариантным дифференцированиям из предложения 2 лекции 12, являются не чем иным, как связностями $\tilde{H}[\alpha]$ для представления α из задачи 12. (См. замечание 3 лекции 12.)

Таким образом, оба подхода к связностям на $T'_\xi \xi$ приводят к одному и тому же результату.

Параллельный перенос вдоль кривой.— Группа голономии и ее компонента единицы.— Лемма о разложении гомотопных нулю петель в произведение малых лассо.— Доказательство связности суженной группы голономии.— Изоморфизм групп голономии в различных точках.— Счетность фундаментальной группы.— Теорема редукции.— Доказательство существования связности и универсально тривиализирующих покрытий.— Аффинное пространство связностей.

Рассмотрим более систематически введенные в лекции 11 горизонтальные кривые.

Пусть $\xi = (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ — гладкое векторное расслоение ранга n над гладким хаусдорфовым m -мерным многообразием $\mathcal{B}$ и пусть H — произвольная связность в ξ . Пусть, далее, $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ — гладкая кривая в $\mathcal{B}$, начинающаяся в точке $b_0 \in \mathcal{B}$, а p_0 — такая точка многообразия $\mathcal{B}$, что $\pi(p_0) = b_0$. Тогда, как было показано в лекции 10, в $\mathcal{B}$ существует единственная горизонтальная кривая $v: I \rightarrow \mathcal{B}$, накрывающая кривую u и начинающаяся в точке p_0 . Конец p_1 кривой v принадлежит слою $\mathcal{F}_{b_1}$ над концом b_1 кривой u , и соответствие $p_0 \mapsto p_1$ задает отображение

$$(1) \quad \Pi_u: \mathcal{F}_{b_0} \rightarrow \mathcal{F}_{b_1},$$

зависящее только от кривой u .

Определение 1. Отображение (1) называется *параллельным переносом* слоя $\mathcal{F}_{b_0}$ на слой $\mathcal{F}_{b_1}$ вдоль кривой u . В соответствии с этим о векторе $p_1 = \Pi_u p_0$ линеала $\mathcal{F}_{b_1}$ иногда говорят, что он *параллелен вектору p_0 вдоль кривой u* .

Заметим, что согласно этому определению вектор $v(t) \in \mathcal{F}_{u(t)}$ параллелен вектору p_0 для любого $t \in I$. Это объясняет, почему кривую v называют также полем параллельных векторов на кривой u (см. лекцию 10).

Замечание 1. В контексте произвольных векторных расслоений термин «параллельный перенос», безусловно, мало оправдан. Гораздо лучше было бы называть отображение Π_u , скажем, *горизонтальным переносом*. Быть может, с течением времени терминология здесь усовершенствуется, но пока приходится пользоваться тем, что есть.

Пусть отрезок $I = [a, b]$ разбит на два отрезка: $I_1 = [a, c]$ и $I_2 = [c, b]$. Тогда для любой (не обязательно

гладкой) кривой $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ определены кривые $u_1 = u|_{I_1}$ и $u_2 = u|_{I_2}$. Мы будем говорить, что кривая u *составлена* из кривых u_1 и u_2 , и будем писать $u = u_1 u_2$. (Это специальный случай отношения составленности для обобщенных путей; см. лекцию 3.)

Аналогичный смысл имеет равенство $u = u_1 \dots u_m$ при $m > 2$.

Ясно, что если гладкая кривая u составлена из кривых u_1 и u_2 (автоматически гладких), то

$$(2) \quad \Pi_u = \Pi_{u_2} \circ \Pi_{u_1}, \quad u = u_1 u_2$$

(и аналогично для любого числа сомножителей).

Если $u = u_1 \dots u_m$ и кривые $u_1, \dots, u_m$ гладки, то кривая u называется *кусочно гладкой* (ср. определение кусочно гладкого пути в лекции 2). Для такой кривой u мы положим по определению

$$(3) \quad \Pi_u = \Pi_{u_m} \circ \dots \circ \Pi_{u_1}, \quad u = u_1 \dots u_m$$

Задача 1. Докажите, что *определение (3) корректно*, т. е. отображение Π_u не зависит от разложения $u = u_1 \dots u_m$ кривой u на гладкие кривые $u_1, \dots, u_m$. [Указание. Формула (3) справедлива для гладкой кривой u .]

Задача 2. Покажите, что формула (2) справедлива и для кусочно гладких кривых u_1 и u_2 (а формула (3) — для кусочно гладких кривых $u_1, \dots, u_m$).

[Хотя нам фактически нужны лишь гладкие кривые, но введение в рассмотрение более широкого класса кусочно гладких кривых существенно упрощает многие рассуждения, позволяя избежать утомительной и надоедливой процедуры сглаживания углов.]

О кривой $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ мы будем говорить, что она *сохраняется в карте* $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^m)$, если $u(t) \in U$ для любого $t \in I$. Такая кривая задается уравнениями вида

$$x^k = x^k(t), \quad 1 \leq k \leq m, \quad t \in I,$$

а ее накрытие $v: I \rightarrow \mathcal{B}$ в предположении, что U является не только координатной, но тривиализирующей окрестностью, — кроме того, еще и уравнениями

$$(4) \quad a^i = a^i(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in I.$$

При этом, если кривая u (а, значит, и кривая v) гладка, то кривая v тогда и только тогда горизонтальна, когда

$$(5) \quad \dot{a}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t)) a^j(t) \dot{x}^k(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in I$$

(см. формулы (3) лекции 10).

Поскольку уравнения (5) линейны по $a^i(t)$, конечная точка (вектор) $p_1 \in \mathcal{F}_b$, пути v (имеющая в слое $\mathcal{F}_b$, координаты $a^i(1)$, $1 \leq i \leq n$) линейно зависит от его начальной точки (вектора) $p_0 \in \mathcal{F}_b$. Это означает, что *параллельный перенос* Π_a является *линейным отображением* $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b$.

Если $\varphi: I' \rightarrow I$ — монотонная гладкая функция со всюду отличной от нуля положительной производной (сохраняющий ориентацию диффеоморфизм), то для любой горизонтальной кривой $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ с уравнениями (5) перепараметризованная кривая $v \circ \varphi: I' \rightarrow \mathcal{E}$ будет иметь уравнения $a^i = a^i(\varphi(s))$, $x^k = x^k(\varphi(s))$, $s \in I'$, где

$$\begin{aligned} a^i(\varphi(s))' + \Gamma_{jk}^i(x(\varphi(s))) a^j(\varphi(s)) x^k(\varphi(s))' = \\ = \varphi(s) [\dot{a}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t)) a^j(t) \dot{x}^k(t)]_{t=\varphi(s)} = 0, \end{aligned}$$

и, значит, будет горизонтальной кривой, накрывающей перепараметризованную кривую $u \circ \varphi: I \rightarrow \mathcal{B}$. Отсюда следует, что *отображение* Π_a *не меняется при перепараметризации кривой* $u: I \rightarrow \mathcal{B}$.

Поэтому без ограничения общности мы всегда можем предполагать, например, что $I = I$, где $I = [0, 1]$ (т. е. что кривая u является путем).

Если же диффеоморфизм φ меняет ориентацию (переводит начало отрезка I' в конец отрезка I , а конец отрезка I' в начало отрезка I), то кривая $v \circ \varphi$ по-прежнему будет горизонтальной кривой, накрывающей кривую $u \circ \varphi$, но последняя кривая будет соединять точку b_1 с точкой b_0 (а кривая $v \circ \varphi$ — точку p_1 с точкой p_0). Поэтому *отображение* Π_a *является изоморфизмом* (с обратным изоморфизмом $\Pi_{a \circ \varphi}$).

Так как отрезок I компактен, то любая кусочно гладкая кривая u имеет вид $u_1 \dots u_m$, где каждая из кривых $u_1, \dots, u_m$ гладка и содержится в некоторой карте. Поэтому в силу равенства (3) *отображение* Π_a *является изоморфизмом* $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b$, *и для любой кусочно гладкой кривой* u .

Кроме того, мы видим, что для каждой кусочно гладкой кривой u имеет место формула

$$\Pi_{u^{-1}} = \Pi_u^{-1},$$

где, как всегда, u^{-1} — кривая, пробегаемая в обратном направлении.

Особо интересен случай, когда кусочно гладкая кривая u является *петлей* в точке b_0 , т. е. когда $b_1 = b_0$. В этом случае отображение Π_a является автоморфизмом линейного пространства $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ (невыврожденным линейным оператором) и все автоморфизмы вида Π_a составляют некоторую подгруппу $\Phi = \Phi(b_0)$ группы $\text{Aut } \mathcal{F}_0$ (т. е. — в предположении, что в $\mathcal{F}_0$ выбран некоторый базис — подгруппу группы $\text{GL}(n; \mathbb{R})$).

Заметим, что $\Pi_a p_0 = p_0$ тогда и только тогда, когда горизонтальная кривая v , начинающаяся в точке p_0 и накрывающая петлю u , также является *петлей*.

Определение 2. Подгруппа Φ группы Ли $\text{Aut } \mathcal{F}_0$ (или $\text{GL}(n; \mathbb{R})$) называется *группой голономии* связности H в точке b_0 .

Конечно, эта группа зависит только от содержащей точку b_0 компоненты связности многообразия $\mathcal{B}$. Поэтому без ограничения общности мы можем в дальнейшем считать многообразие $\mathcal{B}$ связным.

Напомним (см. определение 1 лекции 3), что две петли $u_0: I \rightarrow \mathcal{B}$ и $u_1: I \rightarrow \mathcal{B}$ в точке b_0 называются *гомотопными*, если существует связывающая их *гомотопия*, т. е. такое непрерывное отображение $F: I^2 \rightarrow \mathcal{B}$, что

$$F(t, 0) = u_0(t), \quad F(t, 1) = u_1(t)$$

и

$$F(0, \tau) = F(1, \tau) = b_0$$

для всех $t, \tau \in I$.

Для любого $\tau \in I$ формула

$$u_\tau(t) = F(t, \tau), \quad t \in I,$$

определяет некоторую петлю $u_\tau: I \rightarrow \mathcal{B}$. О петлях u_τ , $\tau \in I$, говорят, что они *составляют* гомотопию F , и их семейство $\{u_\tau\}$ часто отождествляется с F .

Как мы знаем из лекции 3, отношение гомотопности петель является отношением эквивалентности.

Гомотопия F называется *гладкой*, если она представляет собой гладкое отображение $I^2 \rightarrow \mathcal{B}$, и *кусочно гладкой*, если квадрат I^2 можно разбить на прямоугольники вида $I' \times I''$, где $I' \subset I$, $I'' \subset I$, на каждом из которых отображение F гладко. Петли, связанные гладкой (или кусочно гладкой) гомотопией, называются *гладко гомотопными* (соответственно *кусочно гладко гомотопными*).

Задача 3. Докажите, что если *гладкие* (кусочно *гладкие*) *петли* u_0 и u_1 *гомотопны*, то они и *гладко* (кусочно *гладко*) *гомотопны*.

[Указание. Воспользуйтесь теоремой Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами. Ср. предложение 2 лекции III.26.]

Петля u называется *гомотопной нулю*, если существует гомотопия F , связывающая эту петлю с постоянной петлей $e_{b_0}: t \mapsto b_0$. Согласно утверждению задачи 3 для кусочно гладкой петли u гомотопию F также можно считать кусочно гладкой.

Ясно (см. лекцию 3), что петля, обратная петле, гомотопной нулю, а также петля, составленная из гомотопных нулю петель, гомотопна нулю. Отсюда следует, что отображения Π_u , отвечающие гомотопным нулю петлям u , составляют подгруппу Φ_e группы Φ . Эта подгруппа называется *суженной* (или *ограниченной*) *группой голономии* связности H в точке b_0 .

Предложение 1. *Группа Φ обладает естественной структурой группы Ли, по отношению к которой она является подгруппой Ли группы $\text{Li Aut } \mathcal{F}_0$, а группа Φ_e — ее компонентой единицы. Если многообразие $\mathcal{Z}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то эта гладкость на Φ является слабой гладкостью (и как таковая единственна).*

Доказательство. Ниже мы докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Каждый элемент $a \in \Pi_u$ группы Φ_e можно соединить с единицей гладким путем группы $\text{Li Aut } \mathcal{F}_0$, целиком лежащим в Φ_e .*

Замечание 2. Петли u_τ , составляющие гомотопию F , которая связывает петлю u с постоянной петлей, определяют в Φ_e путь

$$(6) \quad \Pi_F: \tau \mapsto \Pi_{u_\tau}, \quad \tau \in I,$$

соединяющий элемент a с тождественным отображением (единицей группы Φ_e). Поэтому для доказательства леммы 1 достаточно доказать, что для гладкой гомотопии F отображение Π_F является гладким путем в $\text{Aut } \mathcal{F}_0$. Однако этот естественный подход к доказательству встречается с определенными трудностями, и ниже мы построим — фактически тот же путь Π_F — другим способом, тривиально обеспечивающим его гладкость.

Лемма 1 означает, что подгруппа Φ_e удовлетворяет условиям предложения 2 лекции 15. Следовательно, согласно этому предложению группа Φ_e обладает слабой топологией, по отношению к которой она является связ-

ной подгруппой Ли группы Ли $\text{Aut } \mathcal{F}_0$. Поэтому группа Φ будет подгруппой Ли с компонентой единицы Φ_0 по отношению к гладкости, в которой все смежные классы $a\Phi_0$ являются компонентами связности (см. доказательство теоремы 2 лекции 15). Это доказывает первое утверждение предложения 1.

Для доказательства второго утверждения нам в силу теоремы 2 лекции 15 достаточно доказать, что для многообразия $\mathcal{B}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, факторгруппа Φ/Φ_0 счетна (или конечна). С этой целью мы рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ многообразия $\mathcal{B}$ в точке b_0 . Согласно утверждению задачи 3 каждый элемент $\alpha \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ содержит кусочно гладкую петлю u (имеет вид $\alpha = [u]$). Соответствующий элемент Π_u группы Φ определен с точностью до элемента из Φ_0 , так что формула $\alpha \rightarrow [\Pi_u]$, где $[\Pi_u]$ — смежный класс элемента Π_u по подгруппе Φ_0 , корректно определяет некоторое отображение

$$(7) \quad \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \Phi/\Phi_0.$$

Лемма 2. Для любого связного многообразия $\mathcal{B}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности (и любой точки $b_0 \in \mathcal{B}$) группа $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ не более чем счетна.

Поскольку отображение (7), очевидно, эпиморфно, это доказывает предложение 1. $\square$

Для доказательства леммы 1 нам понадобятся некоторые дополнительные сведения о петлях вообще и о петлях, гомотопных нулю, в частности.

Координатную окрестность U в многообразии $\mathcal{B}$ мы будем называть шаровой, если она диффеоморфна открытому шару пространства $\mathbb{R}^m$. Ясно, что шаровые координатные окрестности составляют базу открытых множеств многообразия $\mathcal{B}$.

Петлю в точке b_0 мы будем называть лассо с петлей v , если она имеет вид ww^{-1} , где w — некоторый путь, начинающийся в точке b_0 , а v — петля в его концевой точке b_1 .

Петлю u мы будем называть малой, если она целиком содержится в некоторой шаровой координатной окрестности. Лассо ww^{-1} с малой петлей v мы будем называть малым лассо.

В силу односвязности шаров (см. лекцию 3) каждая малая петля гомотопна нулю. Поэтому гомотопно нулю и каждое малое лассо.

Петлю вида $u, uv^{-1}u$, мы будем называть *элементарным преобразованием* петли u, u . Две петли мы будем называть *комбинаторно эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой конечной последовательностью элементарных преобразований и преобразований, им обратных. (Иначе говоря, две петли комбинаторно эквивалентны, если одна получается из другой вставками и удалениями фрагментов вида uv^{-1} .)

Так как $\Pi_{\sigma^{-1}} = \Pi_{\sigma}^{-1}$, то комбинаторно эквивалентные петли u определяют один и тот же элемент Π_u группы Φ .

Рассмотрим на плоскости R^2 квадрат Q_N с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 2^N)$, $(2^N, 0)$ и $(2^N, 2^N)$. Прямые, параллельные осям координат, делят этот квадрат на 2^{2N} квадратов единичной площади. Обход границы каждого из этих квадратов против часовой стрелки вместе с некоторой ломаной, соединяющей в Q_N точку $(0, 0)$ с какой-то вершиной этого квадрата, задает в Q_N лассо. Мы будем называть такие лассо *элементарными*.

Пусть q_N — петля в точке $(0, 0)$, получающаяся при обходе границы квадрата Q_N против часовой стрелки.

Лемма 3. Петля q_N комбинаторно эквивалентна произведению элементарных лассо.


 Петля q_1

 Разложение петли q_1

Доказательство. При $N=1$ петля q_1 является ломаной 123698741, где, например, 1 — точка $(0, 0)$, а 2 — точка $(1, 0)$ (см. рис.), и комбинаторно эквивалентна произведению элементарных лассо

$$(8) \quad \begin{array}{cc} 12541, & 145236541, \\ 145698541, & 1458741. \end{array}$$

[Строго говоря, петля 12541 не является лассо, поскольку отсутствует путь ω . Чтобы превратить эту петлю в лассо, достаточно ввести путь 121.]

Пусть лемма уже доказана для петли q_{N-1} . Гомотетия с параметром 2^{N-1} отображает квадрат Q_1 на квадрат Q_N и переводит единичные квадраты, составляющие квадрат Q_1 , в четыре квадрата со стороной 2^{N-1} , составляющие квадрат Q_N . Поэтому согласно уже доказанному петля q_N комбинаторно эквивалентна произведению четырех лассо, гомотетичных лассо (8). С другой стороны, по предположению индукции, петли последних лассо комбинаторно эквивалентны произведениям элементарных лассо (начинающихся в соответствующих точках квадрата Q_N). Но ясно, что если петля u лассо $\omega u \omega^{-1}$ комбинаторно эквивалентна произведению петель $u_1, \dots, u_n$, то само лассо $\omega u \omega^{-1}$ будет комбинаторно эквивалентно произведению петель

$$(9) \quad \omega u_1 \omega^{-1}, \dots, \omega u_n \omega^{-1},$$

причем если петли $u_1, \dots, u_n$ были элементарными лассо (в концевой точке пути ω), то петли (9) также будут элементарными лассо (в начальной точке пути ω). Это, очевидно, доказывает лемму 3. $\square$

Следствие 1. В многообразии $\mathcal{B}$ каждая гомотопная нулю петля u комбинаторно эквивалентна произведению малых лассо.

Доказательство. Гомотопию F , связывающую петлю u с постоянной петлей, мы без ограничения общности можем считать отображением вида $Q_N \rightarrow \mathcal{B}$, где N — любое наперед заданное число. Если N достаточно велико, то каждый единичный квадрат, на которые разделен квадрат Q_N , гомотопия F будет отображать в некоторую шаровую координатную окрестность многообразия $\mathcal{B}$, и, значит, каждое элементарное лассо — в некоторое малое лассо многообразия $\mathcal{B}$. С другой стороны, граничную петлю q_N гомотопия F переводит, по условию, в петлю, являющуюся произведением петли u и постоянной петли, и,

следовательно, комбинаторно эквивалентную петле u . Значит, согласно лемме 3 петля u комбинаторно эквивалентна произведению малых лассо. $\square$

Из следствия 1 вытекает, что любой элемент группы Φ , является произведением элементов Π , отвечающим малым лассо u . Поэтому лемму 1 достаточно доказать лишь для таких элементов.

Эту редукцию можно усилить.

Пусть b_0 и b_1 — две точки многообразия $\mathcal{B}$, соединенные путем w . Тогда каждая петля u_1 в b_1 определяет петлю (лассо) wu_1w^{-1} в b_0 , а каждая петля u_0 в b_0 — петлю $w^{-1}u_0w$ в b_1 , причем с точностью до комбинаторной эквивалентности эти соответствия взаимно обратны. Поэтому они индуцируют изоморфизм группы голономии $\Phi(b_1)$ в точке b_1 на группу голономии $\Phi(b_0)$ в точке b_0 . Более того, если в пространствах $\mathcal{F}_{b_0}$ и $\mathcal{F}_{b_1}$ выбраны базисы и соответственно этому группы $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ интерпретированы как подгруппы группы $GL(n; R)$, то в предположении, что базис в $\mathcal{F}_{b_1}$ получается из базиса в $\mathcal{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль пути w , этот изоморфизм будет, как легко видеть, тождественным отображением. Поэтому если некоторый элемент группы $\Phi(b_1)$ (отвечающий, скажем, петле u) соединяется с единицей гладким (в $\text{Aut } \mathcal{F}_{b_1}$) путем, целиком лежащим в $\Phi(b_1)$, то соответствующий элемент группы $\Phi(b_0)$ (отвечающий лассо с петлей u) будет соединяться с единицей гладким (в $\text{Aut } \mathcal{F}_{b_0}$) путем, лежащим в $\Phi(b_0)$.

Следовательно, лемму 1 достаточно доказать лишь для элементов $a = \Pi$, отвечающих малым петлям u (целиком лежащим в некоторой шаровой координатной окрестности U точки b_0).

К таким элементам мы уже можем применить конструкцию из замечания 1.

Доказательство леммы 1. Как только что было доказано, мы без ограничения общности можем считать, что петля u целиком содержится в некоторой шаровой координатной и одновременно тривиализирующей окрестности U .

Пусть $x^k = x^k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 1, \dots, m$, — параметрические уравнения петли u в центрированных в b_0 локальных координатах. Тогда формулы

$$(10) \quad x^k = \tau x_i^k(t), \quad 0 \leq t, \tau \leq 1, 1 \leq k \leq m,$$

будут задавать гомотопию $F: I^2 \rightarrow \mathcal{B}$, связывающую постоянную петлю в точке b_0 с петлей u . Соответствующие

петли u_τ будут, следовательно, иметь параметрические уравнения (10) (с постоянным τ) и, значит, будут покрываться кривыми (не петлями!) $v_\tau: I \rightarrow \mathcal{S}$ с параметрическими уравнениями (10) и $a^i = a_\tau^i(t)$, где $a_\tau^i(t)$ — решения уравнений

$$\ddot{a}_\tau^i(t) + \tau \Gamma_{kj}^i(\tau x(t)) \dot{a}_\tau^k(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Но согласно известной из курса дифференциальных уравнений теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, решения $a_\tau^i(t)$ этих уравнений (при данных начальных условиях $a_\tau^i(0) = a_0^i$) гладко зависят от параметра τ . В частности, от параметра τ гладко зависят их конечные значения $a_\tau^i(1)$.

С другой стороны, если a_0^i — координаты точки $p_0 \in \mathcal{F}_0$, то, по определению, числа $a_\tau^i(1)$ будут координатами точки $\Pi_{\tau\tau}(p_0)$. Следовательно, эта точка гладко зависит от τ , т. е. отображение $\mathcal{F}_0 \times I \rightarrow \mathcal{F}_0$, заданное формулой $(p_0, \tau) \mapsto \Pi_{\tau\tau}(p_0)$, будет гладко. Но тогда, как легко видеть (ср. лемму 1 лекции 6), гладким будет и отображение $\tau \mapsto \Pi_{\tau\tau}$ из I в $\text{Aut } \mathcal{F}_0$, т. е. отображение (6) будет гладким путем. $\square$

Обратим внимание, что в процессе доказательства леммы 1 мы также доказали, что группы голономии $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ в различных точках $b_0, b_1 \in \mathcal{B}$ изоморфны друг другу (в предположении, что многообразие $\mathcal{B}$ связно). Изоморфизм $\Phi(b_1) \rightarrow \Phi(b_0)$ зависит от выбора пути w , соединяющего точку b_0 с точкой b_1 , и задается соответствием $u \mapsto w^{-1}uw$. Если в слоях $\mathcal{F}_{b_0}, \mathcal{F}_{b_1}$ выбраны базисы $\mathbf{n}$, следовательно, группы $\Phi(b_0), \Phi(b_1)$ интерпретированы как подгруппы группы $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ и если базис в $\mathcal{F}_{b_1}$ получается из базиса в $\mathcal{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль пути w , то этот изоморфизм будет тождественным отображением. Поэтому он во всяком случае будет гладким отображением $\Phi(b_0) \rightarrow \Phi(b_1)$ (напомним, что гладкость на каждой группе $\Phi(b)$ является слабой) и, значит, будет диффеоморфизмом. Этим доказано, что группы голономии $\Phi(b_0)$ и $\Phi(b_1)$ в различных точках $b_0, b_1 \in \mathcal{B}$ изоморфны как группы Ли.

Обратимся теперь к лемме 2.

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное гладкое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и пусть $b_0 \in \mathcal{B}$.

Задача 4. Покажите, что многообразие $\mathcal{B}$ тогда и только тогда удовлетворяет второй аксиоме счетности, когда оно обладает счетным открытым покрытием $\{U_i\}$, состоящим из шаровых координатных окрестностей U_i .

Напомним, что подмножество C топологического пространства $\mathcal{B}$ называется *всюду плотным* (в $\mathcal{B}$), если $\bar{C} = \mathcal{B}$.

Задача 5. Покажите, что в каждом многообразии $\mathcal{B}$, удовлетворяющем второй аксиоме счетности, существует счетное всюду плотное подмножество C . [Указание. Положите $C = \bigcup C_i$, где C_i — подмножество в U_i (см. задачу 4), состоящее из точек с рациональными координатами.]

Ясно, что без ограничения общности можно считать, что множество C содержит точку b_0 .

Зафиксировав раз и навсегда счетный атлас $\{(U_i, h_i)\}$ и подмножество C , назовем путь u в многообразии $\mathcal{B}$ *элементарным*, если

- а) его начальная и конечная точки принадлежат C ;
- б) путь u целиком расположен в некоторой окрестности U_i ;

в) путь $h_i \circ u$ пространства R^n является прямолинейным отрезком (в его естественной параметризации).

Путь, составленный из элементарных путей, мы будем называть — за отсутствием лучшего термина — *специальным путем*.

Ясно, множество всех специальных путей счетно. Поэтому для доказательства леммы 2 достаточно доказать, что каждая петля в точке b_0 многообразия $\mathcal{B}$ гомотопна специальной петле.

Это утверждение мы и будем доказывать.

Для доказательства нам понадобится обобщить понятие гомотопии путей.

Гомотопией с подвижными концами мы будем называть произвольное непрерывное отображение $F: I^2 \rightarrow \mathcal{B}$ квадрата I^2 в многообразие или, более общо, топологическое пространство $\mathcal{B}$. Для каждой такой гомотопии формулы

$$\begin{aligned} u_0(t) &= F(t, 0), & u_1(t) &= F(t, 1), & t &\in I, \\ v_0(\tau) &= F(0, \tau), & v_1(\tau) &= F(1, \tau), & \tau &\in I, \end{aligned}$$

определяют четыре пути

$$u_0, u_1, v_0, v_1: I \rightarrow \mathcal{B}.$$

Мы будем говорить, что *гомотопия F связывает путь u_0 с путем u_1 при начальном пути v_0 и конечном пути v_1* .

Заметим, что

$$(11) \quad \begin{aligned} u_0(0) &= v_0(0), & v_0(1) &= u_1(0), \\ u_0(1) &= v_1(0), & v_1(1) &= u_1(1). \end{aligned}$$

Гомотопии в смысле определения 1 лекции 3—это в точности гомотопии F , для которых пути v_0 и v_1 постоянны.

Лемма 4. *Линейно связное топологическое пространство $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда односвязно, когда для любых путей u_0, u_1, v_0, v_1 в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих соотношениям (11), существует гомотопия F , связывающая путь u_0 с путем u_1 при начальном пути v_0 и конечном пути v_1 .*

Доказательство. По определению, односвязность пространства $\mathfrak{B}$ означает, что для любой петли u существует гомотопия F , для которой $u_0 = u$, а пути u_1, v_0 и v_1 постоянны. Следовательно, условие леммы 4 достаточно для односвязности пространства $\mathfrak{B}$.

Покажем, что оно и необходимо.

Пусть в односвязном пространстве $\mathfrak{B}$ заданы пути u_0, u_1, v_0, v_1 , удовлетворяющие условиям (11). Тогда формула

$$f(t, \tau) = \begin{cases} u_0(t), & \text{если } \tau = 0, \\ u_1(t), & \text{если } \tau = 1, \\ v_0(\tau), & \text{если } t = 0, \\ v_1(\tau), & \text{если } t = 1, \end{cases}$$

корректно определяет некоторое непрерывное отображение $f: \partial I^2 \rightarrow \mathfrak{B}$ границы ∂I^2 квадрата I^2 в пространство $\mathfrak{B}$. и проблема состоит в том, чтобы распространить это отображение на весь квадрат I^2 , т. е. построить такое отображение $F: I^2 \rightarrow \mathfrak{B}$, что $F|_{\partial I^2} = f$.

Задача 6. Постройте непрерывное отображение $\varphi: I^2 \rightarrow I^2$ квадрата I^2 на себя,

а) гомеоморфно отображающее на себя внутренность квадрата I^2 ;

б) отображающее верхнюю сторону $I \times 1$ квадрата I^2 на его границу ∂I^2 ;

в) переводящее остальные три стороны квадрата I^2 в точку $(0, 0)$.

Пусть g —отображение $\partial I^2 \rightarrow \mathfrak{B}$, являющееся композицией отображения φ (или, точнее, его ограничения $\varphi|_{\partial I^2}$) и отображения f .

На всех сторонах квадрата I^2 , кроме верхней, это отображение определяет постоянные пути, а на верхней

стороне $I \times I$ — петлю, являющуюся (вообще говоря, лишь с точностью до перепараметризации) произведением $u_0 u_1 u_1^{-1} u_0^{-1}$ путей u_0 , u_1 , u_1^{-1} и u_0^{-1} .

Так как пространство $\mathcal{B}$ односвязно, то последняя петля гомотопна нулю и потому существует гомотопия $G: I^2 \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющая соотношению $G|_{\partial I^2} = g$ (являющаяся распространением отображения g). Поскольку стороны квадрата I^2 , которые отображение φ переводит в точку, отображение G также переводит в точку, существует (очевидно, единственное и непрерывное) отображение $F: I^2 \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющее соотношению $G = F \circ \varphi$. Но тогда $g = (F|_{\partial I^2}) \circ \varphi$, откуда в силу равенства $g = f \circ \varphi$ следует, что $F|_{\partial I^2} = f$.

Этим лемма 4 полностью доказана. $\square$

Следствие 1. *Линейно связное топологическое пространство $\mathcal{B}$ тогда и только тогда односвязно, когда для любых двух точек $b_0, b_1 \in \mathcal{B}$ все пути, соединяющие точку b_0 с точкой b_1 , гомотопны друг другу.*

Задача 7. Выведите следствие 1 из установленных в лекции 3 алгебраических свойств умножения гомотопических классов.

В лекции 3 (см. формулы (10) и (11) лекции 3) были введены операции перемножения гомотопий по первому или второму аргументу. Ясно, что операции имеют смысл — при соответствующих условиях — и для гомотопий с подвижными концами. В частности, произведение FG двух гомотопий по второму аргументу определено тогда и только тогда, когда конечный путь гомотопии F совпадает с начальным путем гомотопии G , и в этом случае FG будет гомотопией, начальным путем которой является начальный путь гомотопии F , а конечным путем — конечный путь гомотопии G .

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству леммы 2.

Доказательство леммы 2. Пусть u — произвольная петля многообразия $\mathcal{B}$ в точке b_0 . Нам нужно доказать, что эта петля гомотопна некоторой специальной петле.

Так как отрезок I компактен, то в заданном счетном атласе многообразия $\mathcal{B}$ существует конечная система карт (U_i, h_i) , $1 \leq i \leq N$, обладающая тем свойством, что петля u имеет вид $u_1, \dots, u_N$, где для каждого $i = 1, \dots, N$ путь u_i целиком лежит в шаровой координатной окрест-

ности U_i . Пусть b_{i-1} — начало пути u_i и, следовательно, b_i — его конец. (Таким образом, $b_N = b_0$.)

Так как $b_i \in U_i \cap U_{i+1}$ для каждого $i = 1, \dots, N-1$, а множество C всюду плотно, то для любого $i = 1, \dots, N-1$ существует точка $c_i \in C$, принадлежащая той же компоненте линейной связности множества $U_i \cap U_{i+1}$, что и точка b_i . (При $i=0$ и $i=N$ мы дополнительно требуем, чтобы $c_0 = c_N = b_0$.)

Пусть v_i — произвольный путь, соединяющий в $U_i \cap U_{i+1}$ точку b_i с точкой c_i . (При $i=0$ и $i=N$ за путь v_i мы принимаем постоянный путь в точке b_0 .)

Так как $c_{i-1}, c_i \in U_i$, $i = 1, \dots, N$, то в U_i определен элементарный путь w_i , соединяющий точку c_{i-1} с точкой c_i .

Для каждого $i = 1, \dots, N$ пути $u_i, w_{i-1}, v_{i-1}, v_i$ целиком лежат в односвязном множестве U_i и удовлетворяют, очевидно, условиям леммы 4. Поэтому согласно этой лемме существует гомотопия F_i (в U_i , а потому и в $\mathcal{B}$), связывающая путь u_i с путем w_i при начальном пути v_{i-1} и конечном пути v_i . Тогда гомотопия $F_1 \dots F_N$ определена, связывает петлю $u = u_1 \dots u_N$ со специальной петлей $\omega = w_1 \dots w_N$ и — ввиду выбора путей v_0 и v_N — является гомотопией с неподвижными концами.

Таким образом, петля u гомотопна специальной петле ω . $\square$

Роль групп голономии в теории векторных расслоений во многом определяется следующей теоремой.

Теорема 1. (Теорема редукции.) *Векторное расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, на котором существует связность с группой голономии Φ , редуцируется к группе Φ (рассматриваемой как подгруппа в $GL(n; \mathbb{R})$).*

Доказательство. Пусть U — произвольная шаровая координатная окрестность в многообразии $\mathcal{B}$ и пусть b^U — ее центр, а p^U — некоторый базис линейала $\mathcal{F}_b U$. Для любой точки $b \in U$ мы обозначим через w_b^U элементарный путь, соединяющий в U точку b^U с точкой b , через Π_b^U — соответствующий параллельный перенос $\mathcal{F}_{b^U} \rightarrow \mathcal{F}_b$, а через $s(b) = (s_1(b), \dots, s_n(b))$ — базис $\Pi_b^U p^U$ линейала $\mathcal{F}_b$, $b \in U$ (так что $s(b^U) = p^U$).

Задача 8. Докажите, что базис $s(b)$ гладко зависит от b , т. е. что сечения $s_i: b \mapsto s_i(b)$, $i = 1, \dots, n$, принадлежат $\Gamma(\xi|_U)$ (и, значит, составляют базис этого FU -модуля).

Отсюда следует, что формула

$$\varphi_1(b, a) = a^t s_i(b), \quad b \in U, a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n,$$

определяет гладкую тривиализацию

$$(12) \quad \varphi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{G}_U$$

расслоения ξ над U . [Подчеркнем, что эта тривиализация зависит от выбора базиса p^U .]

Чтобы единообразно выбрать базисы p^U для всех окрестностей U , вспомним, что в многообразии $\mathcal{B}$ у нас фиксирована точка b_0 (по отношению к которой определяется группа голономии Φ). Имея это в виду, выберем в линейном пространстве $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ произвольный базис p_0 (и тем самым зададим группу Φ как подгруппу группы $GL(n, \mathbb{R})$), а для каждой шаровой координатной окрестности U — некоторый путь v^U в $\mathcal{B}$, соединяющий точку b_0 с центром b^U окрестности U . Затем примем за базис p^U результат $\Pi_{p_0} p_0$ параллельного переноса базиса p_0 вдоль пути $v = v^U$.

Тем самым над каждой шаровой координатной окрестностью U многообразия $\mathcal{B}$ у нас будет построена тривиализация (12), т. е. будет построен некоторый тривиализирующий атлас расслоения ξ . [Заметим, что этот атлас зависит только от базиса p_0 линейного пространства $\mathcal{F}_0$ и путей v^U , соединяющих точку b_0 с центрами b^U окрестностей U .]

Пусть теперь U_1 и U_2 — две пересекающиеся шаровые координатные окрестности, φ_1 и φ_2 — соответствующие тривиализации (12), а φ_{21} — связывающее эти тривиализации отображение перехода $U_1 \cap U_2 \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$. Отождествив с помощью базиса p_0 группу $GL(n; \mathbb{R})$ с группой $\text{Aut } \mathcal{F}_0$, мы можем считать, что

$$\varphi_{21}: U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{Aut } \mathcal{F}_0,$$

т. е. что $\varphi_{21}(b): \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ для каждой точки $b \in U_1 \cap U_2$.

Аналогичным образом мы можем считать, что отображения $\varphi_{1,b}$ и $\varphi_{2,b}$ (для точек b из U_1 и U_2 соответственно) действуют из $\mathcal{F}_0$ в $\mathcal{F}_b$:

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_{1,b}} \mathcal{F}_b \xleftarrow{\varphi_{2,b}} \mathcal{F}_0.$$

Но, расшифровывая определения, мы тогда немедленно получим, что

$$\varphi_{1,b} = \Pi_b^{U_1} \circ \Pi_{p^{U_1}} = \Pi_{p^{U_1} \circ \varphi_{1,b}^{-1}},$$

$$\varphi_{2,b} = \Pi_b^{U_2} \circ \Pi_{p^{U_2}} = \Pi_{p^{U_2} \circ \varphi_{2,b}^{-1}}.$$

и, значит, что

$$\varphi_{21}(b) = \varphi_{2,b}^{-1} \circ \varphi_{1,b} = \Pi_v^{-1} v_{,b} \circ \Pi_v v_{,b} = \Pi_w,$$

где w — петля $v^U w_b^{U_1} (w_b^{U_1})^{-1} (v^{U_1})^{-1}$ в точке b_0 .

Таким образом, отображение перехода φ_{21} принимает значения в подгруппе Φ группы $\text{Aut } \mathcal{F}_b$.

По определению это означает, что матричный коцикл φ , отвечающий построенному тривиализирующему атласу, является коциклом над Φ . Следовательно (см. определение 1 лекции 7), векторное расслоение ξ редуцируется к группе Φ . $\square$

Заметим, что по ходу дела мы доказали, что *векторное расслоение ξ тривиализируется над каждой шаровой координатной окрестностью многообразия $\mathcal{B}$* .

Конечно, это заключение опирается на существование в расслоении ξ связности H . Рассмотрим поэтому вопрос об условиях, обеспечивающих существование в ξ хотя бы одной связности. Для этого мы воспользуемся установленным в лекции 12 биективным соответствием между связностями и ковариантными дифференцированиями

$$(13) \quad \nabla: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi).$$

Пусть E — линейное пространство (даже $F\mathcal{B}$ -модуль) всевозможных линейных над R отображений $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi)$, а H — его подпространство ($F\mathcal{B}$ -подмодуль), состоящее из отображений, линейных над $F\mathcal{B}$. Множество D всех ковариантных дифференцирований (13) содержится в E , но не является в E подпространством (хотя бы потому, что сумма $\nabla_1 + \nabla_2$ двух дифференцирований из D заведомо не принадлежит D). Однако, как показывает непосредственная проверка, для любых двух дифференцирований ∇_1 и ∇_2 и любой функции $f \in F\mathcal{B}$ отображение

$$(14) \quad \nabla = (1 - f)\nabla_1 + f\nabla_2$$

также будет дифференцированием.

Более того, если $\{\eta_\alpha\}$ произвольное разбиение единицы (см. лекцию III.22), то для любого семейства $\{\nabla_\alpha\}$ дифференцирований отображение

$$(15) \quad \nabla = \sum_\alpha \eta_\alpha \nabla_\alpha$$

(имеющее смысл в силу свойства локальной конечности семейства $\{\eta_\alpha\}$) также будет дифференцированием. Если разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$ подчинено покрытию $\{U_\alpha\}$, то отображение (15) будет, очевидно, определено (и будет дифференцированием) даже в случае, когда каждое ∇_α определено лишь над U_α (для расслоения $\xi|_{U_\alpha}$).

С другой стороны, ясно, что если расслоение $\xi|_{U_\alpha}$ тривиально, то хотя бы одно дифференцирование ∇_α над U_α заведомо существует. Поэтому в этом случае над всем $\mathcal{B}$ существует дифференцирование (15) и, значит, существует соответствующая связность. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. На каждом гладком нумерируемом (см. лекцию 7) векторном расслоении ξ существует хотя бы одна связность.

Конечно, это предложение мы могли (и, собственно говоря, должны были) сформулировать и доказать еще в лекции 13. Мы отложили его потому, что только теперь из него получаются содержательные следствия.

Следствие 1. Каждое гладкое векторное расслоение $\xi \in (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ над паракомпактным многообразием $\mathcal{B}$ обладает хотя бы одной связностью.

Следствие 2. Каждое гладкое векторное расслоение $\xi = (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ над паракомпактным многообразием $\mathcal{B}$ тривиализируется над любой шаровой координатной окрестностью U .

Это означает, что каждое покрытие $\Pi = \{U_\alpha\}$ многообразия $\mathcal{B}$, состоящее из шаровых координатных окрестностей, является универсально тривиализирующим покрытием (см. замечание 4 лекции 6).

Множество дифференцирований (=связностей) вида (14) допускает интересную интерпретацию с точки зрения общей теории аффинных пространств.

Напомним (см. определение 3 лекции I.4), что (непустое!) множество $\mathcal{A}$ называется аффинным пространством над линеалом $\mathcal{V}$, если задано такое отображение

$$(16) \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (A, B) \mapsto \overline{AB},$$

что

а) для любого вектора $a \in \mathcal{V}$ и любой точки $A \in \mathcal{A}$ существует единственная точка B , для которой $\overline{AB} = a$;

б) для любых трех точек $A, B, C \in \mathcal{A}$ имеет место равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Нам сейчас важно подчеркнуть, что в этом определении нигде не используется наличие в основном поле K деления. Следовательно, оно имеет смысл и тогда, когда $\mathcal{V}$ является не линеалом, а лишь модулем над некоторым кольцом K .

Для множества D роль кольца K играет кольцо функций $F\mathcal{B}$, роль модуля $\mathcal{V}$ — подмодуль H , а отображение (16) определяется формулой

$$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in D.$$

[Включение $\gamma_2 - \gamma_1 \in H$ вытекает из того, что при вычитании друг из друга формул Лейбница для $\gamma_2(fs)$ и $\gamma_1(fs)$ члены $Xf \cdot s$ сокращаются. Аксиома б сводится к тривиальному тождеству

$$\gamma_2 - \gamma_1 = (\gamma_2 - \gamma_2) + (\gamma_2 - \gamma_1),$$

а аксиома а — к автоматически проверяемому утверждению, что для любого дифференцирования γ и любого $F\mathcal{B}$ -линейного отображения $\delta \in H$ отображение $\gamma + \delta$ является дифференцированием.]

Таким образом, мы видим, что множество D всех ковариантных дифференцирований (или что равносильно — всех связностей) на гладком векторном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ является (когда оно непусто) аффинным пространством над $F\mathcal{B}$ -модулем H .

С этой точки зрения множество дифференцирований (14) является не чем иным, как прямой аффинного пространства D .

Вычисление параллельного переноса вдоль петли.— Оператор кривизны в данной точке.— Перенесение вектора по бесконечно малому параллелограмму.— Тензор кривизны.— Формула преобразования компонент тензора кривизны.— Выражение оператора кривизны через ковариантные производные.— Структурное уравнение Картана.— Тождество Бианки.

Пусть $\xi = (\mathcal{B}, \pi, \mathcal{B})$ — гладкое векторное расслоение ранга n над m -мерным многообразием $\mathcal{B}$ с отмеченной точкой b_0 и пусть H — связность на ξ . Тогда — см. лекцию 18 — каждая гладкая петля $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ в точке b_0 определяет отображение

$$\Pi_u: \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0},$$

являющееся тождественным отображением id , когда петля u постоянна.

Раз и навсегда мы зафиксируем тривиализирующую координатную окрестность U точки b_0 в многообразии $\mathcal{B}$, координаты $x^1, \dots, x^m$ в окрестности U , центрированные в точке b_0 , и тривиализацию $s = (s_1, \dots, s_n)$ расслоения ξ над U (базис $F\mathcal{B}$ -модуля $\Gamma\xi$ над U). Тогда каждая петля u , целиком расположенная в U , будет иметь векторное параметрическое уравнение вида

$$(1) \quad x = x(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ — такая гладкая вектор-функция, что $x(0) = 0$ и $x(1) = 0$, а соответствующее отображение Π_u будет переводить точку $p_0 \in \mathcal{F}_0$, имеющую в базисе $s(b_0)$ линейала $\mathcal{F}_0$ координаты $a_0 = (a_0^1, \dots, a_0^n)$, в точку $p_1 = \Pi_u p_0$, имеющую в том же базисе координаты $a_1 = (a^1(1), \dots, a^n(1))$. Здесь $a^i(1)$, $1 \leq i \leq n$, — значения при $t=1$ функций $a^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, являющихся решениями дифференциальных уравнений

$$(2) \quad \dot{a}^i(t) + \Gamma_{kj}^i(x(t)) \dot{x}^k(t) a^j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

с начальными условиями $a^i(0) = a_0^i$, $1 \leq i \leq n$. (Отсюда, в частности, непосредственно следует, что отображение Π_u линейно и биективно, т. е. является невырожденным линейным оператором на $\mathcal{F}_0$; ср. лекцию 18.)

Вместо дифференциальных уравнений (2) удобно рассматривать равносильные интегральные уравнения

$$(3) \quad a^i(t) = a_0^i - \int_0^t \Gamma_{kj}^i(x(t)) \dot{x}^k(t) a^j(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Преимущество этих уравнений состоит в том, что к их решению применим метод последовательных приближений.

Без ограничения общности можно считать, что замыкание $\bar{U}$ окрестности U компактно. Тогда гладкие функции Γ_{kj}^i будут ограничены на U , т. е. будет существовать такая константа $C > 0$, что

$$(4) \quad |\Gamma_{kj}^i| < C \text{ на } U$$

для всех i, j и k .

О петле (1) мы будем говорить, что она имеет размер $\leq s$, если

$$(5) \quad |\dot{x}^k(t)| \leq s$$

для всех t , $0 \leq t \leq 1$, и всех $k = 1, \dots, m$.

Заметим, что для любой такой петли

$$(6) \quad |x^k(t)| \leq s$$

для всех t , $0 \leq t \leq 1$, и всех $k = 1, \dots, m$.

Действительно, так как $x^k(0) = 0$, то

$$|x^k(t)| = \left| \int_0^t \dot{x}^k(t) dt \right| \leq \int_0^t |\dot{x}^k(t)| dt \leq st \leq s. \quad \square$$

Лемма 1. Существуют такие константы C_1 и C_2 , что для любой гладкой (и даже кусочно гладкой) петли и размера $\leq s$ для решений $a^i(t)$ уравнений (3) имеет место оценка

$$(7) \quad |a^i(t)| \leq C_2 e^{C_1 st}$$

для всех t , $0 \leq t \leq 1$, и всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть

$$a(t)^2 = \sum_{i=1}^n (a^i(t))^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(t) \dot{a}(t) &= \sum_{i=1}^n a^i(t) \dot{a}^i(t) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \Gamma_{kj}^i(x(t)) \dot{x}^k(t) a^j(t) a^i(t) \end{aligned}$$

и, значит,

$$a(t) |\dot{a}(t)| \leq mCs \sum_{i,j=1}^n |a^i(t)| |a^j(t)|,$$

где C — константа из оценки (4). С другой стороны, так как для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$ab \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

(ибо $(a-b)^2 \geq 0$), то

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n |a^i(t)| |a^j(t)| &\leq \\ &\leq \frac{n}{2} \left(\sum_{i=1}^n (a^i(t))^2 + \sum_{j=1}^n (a^j(t))^2 \right) = na(t)^2. \end{aligned}$$

После сокращения на $a(t)$ мы получаем, что

$$|\dot{a}(t)| \leq C_1 sa(t), \quad \text{где } C_1 = nmC,$$

т. е.

$$\left| \frac{d \ln a(t)}{dt} \right| \leq C_1 s.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} |\ln a(t) - \ln a(0)| &= \left| \int_0^t \frac{d \ln a(t)}{dt} dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^t \left| \frac{d \ln a(t)}{dt} \right| dt \leq C_1 st, \end{aligned}$$

и потому

$$a(t) \leq a(0) e^{C_1 st}.$$

Поскольку $|a^i(t)| \leq a(t)$, это доказывает (7). $\square$

Зафиксировав число $s_0 > 0$, будем считать, что $0 \leq s \leq s_0$.

Следствие. Существует такая константа C , что для любой петли и размера $\leq s$ имеет место оценка

$$(8) \quad |a^i(t)| \leq C$$

для всех t , $0 \leq t \leq 1$, и всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Согласно формуле (7)

$$|a^i(t)| \leq C_2 e^{C_1 s_0 t}. \quad \square$$

Теперь мы можем непосредственно приступить к решению системы (3) для петли u размера $\leq s$ методом последовательных приближений.

Первое приближение. Из неравенств (4), (5) и (6) следует, что при некоторой константе C имеет место оценка

$$|a^i(t) - a_b^i| \leq Cst,$$

т. е.

$$a^i(t) = a_b^i + O(st),$$

где $O(st)$ — такая функция, что при $0 \leq t \leq 1$ и $0 < s \leq s_0$ отношение $\frac{O(st)}{st}$ ограничено.

Второе приближение. Из формулы конечных приращений Лагранжа и неравенств (5) следует, что

$$\Gamma_{kj}^i(x(t)) = \Gamma_{kj}^i(0) + O(st),$$

где $\Gamma_{kj}^i(0)$ — значения функций Γ_{kj}^i в точке b_0 (при $x=0$). Поэтому

$$\begin{aligned} a^i(t) &= a_b^i - \int_0^t [\Gamma_{kj}^i(0) + O(st)] [a_b^j + O(st)] \dot{x}^k(t) dt = \\ &= a_b^i - \Gamma_{kj}^i(0) a_b^j \int_0^t \dot{x}^k(t) dt + O(s^2t), \end{aligned}$$

т. е.

$$a^i(t) = a_b^i - \Gamma_{kj}^i(0) a_b^j x^k(t) + O(s^2t).$$

Третье приближение. Из формулы Тейлора с остаточным членом и неравенств (5) и (6) следует, что

$$\Gamma_{kj}^i(x(t)) = \Gamma_{kj}^i(0) + \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0) x^l(t) + O(s^2t)$$

(напомним, что множество $\bar{U}$ мы предполагаем компактным). Поэтому

$$\begin{aligned} a^i(t) &= a_b^i - \int_0^t \left[\Gamma_{kj}^i(0) + \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0) x^l(t) + O(s^2t) \right] \times \\ &\times [a_b^j - \Gamma_{qp}^j(0) a_b^p x^q(t) + O(s^2t)] \dot{x}^k(t) dt = \\ &= a_b^i - \Gamma_{kj}^i(0) a_b^j x^k(t) + \Gamma_{kj}^i(0) \Gamma_{qp}^j(0) a_b^p \int_0^t x^q(t) \dot{x}^k(t) dt - \\ &- \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0) a_b^j \int_0^t x^l(t) \dot{x}^k(t) dt + O(s^3t), \end{aligned}$$

т. е.

$$a^i(t) = a_0^i - \Gamma_{kj}^i(0) a_0^k x^j(t) + \left[\Gamma_{kp}^i(0) \Gamma_{lj}^p(0) - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}(0) \right] a_0^l \int_0^t x^k(t) \dot{x}^j(t) dt + O(s^2 t).$$

Дальнейшие приближения нам не понадобятся.

Так как $x^k(1) = 0$, то при $t=1$ мы в понятных обозначениях получаем отсюда равенство

$$(9) \quad a^i(1) = a_0^i + \left[\Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} \right]_0 a_0^l \int_0^1 x^k(t) \dot{x}^j(t) dt.$$

Чтобы вычислить интеграл справа, наложим на петлю u дополнительные условия.

Условие 1. Функции (1) имеют вид

$$(10) \quad x^k(t) = x^k(\alpha(t), \beta(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $x^k(\alpha, \beta)$ — функции двух переменных, определенные в некоторой окрестности V точки $(0, 0)$ на (α, β) -плоскости R^2 и такие, что ранг матрицы частных производных

$$(11) \quad \begin{vmatrix} x_\alpha^1 & \dots & x_\alpha^m \\ x_\beta^1 & \dots & x_\beta^m \end{vmatrix}$$

в точке $(0, 0)$ равен двум, а

$$(12) \quad \alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

— уравнения некоторой кусочно гладкой петли γ в V .

Наглядно это условие означает, что петля u расположена на некоторой регулярной элементарной поверхности

$$(13) \quad x^k = x^k(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \in V.$$

Поскольку

$$(14) \quad \dot{x}^k = x_\alpha^k \dot{\alpha} + x_\beta^k \dot{\beta}, \quad k = 1, \dots, m$$

(для упрощения формул мы опускаем аргументы; символы x_α^k и x_β^k обозначают частные производные), интеграл из формулы (9) записывается теперь в виде контурного интеграла по кривой γ :

$$(15) \quad \int_0^1 x^i \dot{x}^k dt = \int_0^1 x^i (x_\alpha^k \dot{\alpha} + x_\beta^k \dot{\beta}) dt = \\ = \oint_\gamma x^i x_\alpha^k d\alpha + x^i x_\beta^k d\beta.$$

Условие 2. Для функций (12) (или, точнее,— их производных) имеют место оценки

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq \frac{s}{M}, \quad |\dot{\beta}(t)| \leq \frac{s}{M}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$(16) \quad M = \max_k \max_{(\alpha, \beta)} (|x_{\alpha}^k(\alpha, \beta)| + |x_{\beta}^k(\alpha, \beta)|), \\ (\alpha, \beta) \in V, \quad k = 1, \dots, m.$$

Это условие обеспечивает справедливость оценки (5) (см. формулы (14)).

Условие 3. Петля u (или — что равносильно — петля γ) является простой замкнутой кривой (не имеет самопересечений).

Из этого условия следует, что кривая γ ограничивает на (α, β) -плоскости некоторую область G . Поэтому к контурному интегралу (15) применима формула Грина, согласно которой этот интеграл равен

$$(17) \quad \iint_G \left(\frac{\partial (x'_{\alpha} x_{\beta}^k)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (x'_{\beta} x_{\alpha}^k)}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta = \\ = \iint_G (x'_{\alpha} x_{\beta}^k - x'_{\beta} x_{\alpha}^k) d\alpha d\beta.$$

С другой стороны, из условия 2 следует (см. выше вывод оценки (6) из оценок (5)), что кривая γ , а потому и область G целиком расположены в квадрате

$$|\alpha| \leq \frac{s}{M}, \quad |\beta| \leq \frac{s}{M}.$$

Поэтому для площади этой области имеет место оценка

$$\iint_G d\alpha d\beta = cs^2 + O(s^3),$$

а для интеграла по G от произвольной непрерывной на $\bar{G}$ функции f — оценка

$$(18) \quad \iint_G f d\alpha d\beta = cf(0, 0)s^2 + O(s^3),$$

где c — некоторое число (зависящее от формы области G).

Условие 4. Число c отлично от нуля.

Геометрически это условие означает, что область G ни в одном направлении сильно не сплюснута.

Применение к интегралу (17) оценки (18) дает нам теперь равенство

$$\int_0^1 \dot{x}^i x^k dt = -s^2 x_0^{ki} + O(s^3),$$

где

$$(19) \quad x_0^{ki} = (x_\alpha^k x_\beta^i - x_\alpha^i x_\beta^k)_0 c.$$

Подставив это выражение в формулу (9), мы, следовательно, получим, что

$$a^i(1) = a_0^i + s^2 \left[\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^j} - \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p \right]_0 x_0^{ki} a_0^l + O(s^3).$$

Переставив немые индексы суммирования k и l , эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$a^i(1) = a_0^i + s^2 \left[\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kj}^p \right]_0 x_0^{lk} a_0^j + O(s^3).$$

Так как $x_0^{lk} = -x_0^{kl}$, то, сложив две последние формулы и разделив на 2, мы получим следующую окончательную формулу:

$$(20) \quad a^i(1) = a_0^i - \frac{1}{2} s^2 (R_{j,kl}^i)_0 x_0^{kl} a_0^j + O(s^3),$$

где $(R_{j,kl}^i)_0$ — значение в точке b_0 функции

$$(21) \quad R_{j,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kj}^p.$$

Обсудим полученную формулу подробнее.

Участвующие в формуле (20) числа (19) представляют собой не что иное, как компоненты бивектора $(c x_\alpha \wedge x_\beta)_0$, являющегося с точностью до множителя $c \neq 0$ внешним произведением координатных векторов x_α и x_β поверхности (12) в точке $(0, 0)$ и потому, в силу условия на ранг матрицы (11), отличного от нуля. Чтобы не привязывать слишком тесно этот бивектор к по существу случайной поверхности (12), мы будем обозначать его символом $A \wedge B$, где A и B — произвольные векторы пространства $T_{b_0} \mathcal{B}$, обладающие тем свойством, что $A \wedge B = (c x_\alpha \wedge x_\beta)_0$, а его компоненты x_0^{ki} — символом $(A \wedge B)^{ki}$; так что

$$(A \wedge B)^{ki} = \begin{vmatrix} A^k & A^i \\ B^k & B^i \end{vmatrix} = A^k B^i - A^i B^k,$$

где A^k и B^k — координаты [векторов A и B в рассматриваемой системе локальных координат.

Положим

$$R(A, B)_j^i = \frac{1}{2} (R_{j, kl}^i)_0 (A \wedge B)^{kl}.$$

(Заметим, что эта формула имеет смысл для *любых* векторов $A, B \in T_{x_0} \mathcal{B}$.)

Легко видеть, что

$$(22) \quad R(A, B)_j^i = (R_{j, kl}^i)_0 A^k B^l.$$

Действительно, так как $R_{j, kl}^i = -R_{j, lk}^i$ и $(A \wedge B)^{kl} = A^k B^l - A^l B^k$, то

$$\begin{aligned} R_{j, kl}^i (A \wedge B)^{kl} &= R_{j, kl}^i A^k B^l - R_{j, kl}^i A^l B^k = \\ &= R_{j, kl}^i A^k B^l - R_{j, lk}^i A^k B^l = \\ &= 2R_{j, kl}^i A^k B^l \end{aligned}$$

(для упрощения формул мы вместо $(R_{j, kl}^i)_0$ пишем здесь просто $R_{j, kl}^i$; подобную вольность мы будем позволять себе и впредь).

Формулу (20) мы можем теперь переписать в следующем виде:

$$(23) \quad a^i(1) = a_0^i - s^2 R(A, B)_j^i a_0^j + O(s^3).$$

По определению числа $a_0^i = a^i(0)$ являются координатами некоторого вектора $p_0 \in \mathcal{F}_0$, а числа $a^i(1)$ — координатами параллельно перенесенного вектора $\Pi_u p_0$. Что же касается чисел (22), то они составляют матрицу некоторого линейного оператора $R(A, B)$, переводящего вектор p_0 в вектор $R(A, B)p_0$ с координатами $R(A, B)_j^i a_0^j$. Таким образом, в векторной форме равенство (23) имеет вид

$$(23') \quad \Pi_u p_0 = p_0 - s^2 R(A, B)p_0 + O(s^3),$$

а в операторной — вид

$$(23'') \quad \Pi_u = \text{id} - s^2 R(A, B) + O(s^3).$$

Оператор $R(A, B)$ называется *оператором кривизны* связности H , отвечающим бивектору $A \wedge B$.

Пусть для каждого s , $0 < s < s_0$, задана петля u , размера $\leq s$, удовлетворяющая условиям 1—4, гладко зависящая от s (в том смысле, что функции, задающие эту петлю в координатах, являются также гладкими функциями от s) и такая, что бивектор $A \wedge B \neq 0$, отвечающий петле u ,

один и тот же для всех s . Тогда из формулы (23) следует, что для линейного оператора $R(A, B)$ будет иметь место равенство

$$(24) \quad R(A, B) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Pi_{u_s} - \text{id}}{s^2}.$$

Поскольку правая часть этой формулы не зависит от выбора координат $a^1, \dots, a^n$ и $x^1, \dots, x^m$ (если петли u_s удовлетворяют условиям 1—4 по отношению к одной системе координат, то они будут, очевидно, удовлетворять этим условиям и по отношению к любой другой), этим доказано—в предположении, что для бивектора $A \wedge B$ существуют петли u_s ,—что оператор кривизны

$$(25) \quad R(A, B): \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$$

определен корректно (зависит только от связности H и бивектора $A \wedge B$).

Но для любого ли бивектора $A \wedge B \neq 0$ можно построить петли u_s , $0 < s < s_0$?

Оказывается, что это возможно только при некоторых условиях на бивектор $A \wedge B$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть A и B —произвольные линейно независимые векторы пространства $T_{b_0}\mathcal{B}$. Определим функции $x^k(\alpha, \beta)$ формулой

$$(26) \quad x^k(\alpha, \beta) = \alpha A^k + \beta B^k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Геометрически это означает, что за элементарную поверхность (13) мы принимаем поверхность, являющуюся в координатах $x^1, \dots, x^m$ плоскостью с направляющим бивектором $A \wedge B$. Координатными векторами x_α и x_β этой поверхности являются векторы A и B . На (α, β) -плоскости этим векторам соответствуют единичные орты координатных осей $i = (1, 0)$ и $j = (0, 1)$.

Пусть G_s —квадрат (α, β) -плоскости, построенный на векторах si, sj (и имеющий, следовательно, площадь s^2), а γ_s —его граница, пробегаемая в положительном направлении (против часовой стрелки). Петля u_s на поверхности (13), отвечающая петле γ_s , удовлетворяет, очевидно, условиям 1, 3 и 4 (с $c=1$). Что же касается условия 2, то функции (12) для петли γ_s имеют вид

$$\alpha(t) = s\gamma(t), \quad \beta(t) = s\gamma(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } 0 \leq t \leq 1/4, \\ 1, & \text{если } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ 3-4t, & \text{если } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ 0, & \text{если } 3/4 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и, значит, удовлетворяют неравенствам

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq 4s, \quad |\dot{\beta}(t)| \leq 4s.$$

Поэтому условие 2 будет выполнено при $4M \leq 1$, где

$$(27) \quad M = \max_k (|A^k| + |B^k|).$$

Мы видим, таким образом, что если для векторов A и B имеет место неравенство $M \leq 1/4$, где M — число (27), то построенные петли u , удовлетворяют условиям 1—4 и потому для них будет иметь место формула (24). Следовательно, для таких векторов оператор $R(A, B)$ определен корректно.

Однако, поскольку для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$R(\lambda A, B) = R(A, \lambda B) = \lambda R(A, B),$$

мы все же получаем, что оператор $R(A, B)$ определен корректно для любых векторов $A, B \in T_{b_0}\mathfrak{B}$.

Если $A \wedge B = 0$, то, по определению, $R(A, B) = 0$.

Наглядно каждую петлю u , можно представлять себе как результат обхода параллелограмма, построенного на векторах sA, sB . Поэтому на традиционном языке анализа результат произведенного исследования означает, что при параллельном перенесении вектора $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ по бесконечно малому параллелограмму, задаваемому бивектором $s^2(A \wedge B)$, вектор p_0 приобретает приращение с точностью до бесконечно малых высшего порядка, равное $-s^2 R(A, B) p_0$.

Пусть X и Y — произвольные векторные поля на многообразии $\mathfrak{B}$. Тогда в каждой точке $b \in \mathfrak{B}$ определен линейный оператор

$$R(X_b, Y_b): \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b,$$

и, значит, для каждого сечения $s \in \Gamma$ расслоения ξ вектор $R(X_b, Y_b)s(b \in \mathcal{F}_b)$.

Поэтому формула

$$[R(X, Y)s](b) = R(X_b, Y_b)s(b), \quad b \in \mathfrak{B},$$

определяет на $\mathfrak{B}$ некоторое сечение $R(X, Y)s$ расслоения ξ . В каждой карте координаты этого сечения выражаются формулой

$$(28) \quad [R(X, Y)s]^i = R^i_{jkl} X^j Y^k s^l,$$

откуда, в частности, следует, что сечение $R(X, Y)s$ гладко (принадлежит $\Gamma\xi$). Таким образом, мы видим, что для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ определено отображение

$$(29) \quad R(X, Y): \Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi$$

$\mathbf{FB}$ -модуля $\Gamma\xi$ в себя. При этом легко видеть (например, из формулы (28)), что отображение (29) $\mathbf{FB}$ -линейно.

Следовательно, соответствие $(X, Y) \mapsto R(X, Y)$ задает некоторое отображение

$$(30) \quad R: \mathfrak{a}\mathfrak{B} \times \mathfrak{a}\mathfrak{B} \rightarrow \text{End}_{\mathbf{FB}} \Gamma\xi$$

прямого произведения $\mathfrak{a}\mathfrak{B} \times \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ в модуль $\text{End}_{\mathbf{FB}} \Gamma\xi$ всех $\mathbf{FB}$ -линейных отображений $\Gamma\xi \rightarrow \Gamma\xi$, очевидным образом линейное (и даже $\mathbf{FB}$ -линейное) по каждому из аргументов.

Заметим, что

$$(31) \quad R(Y, X) = -R(X, Y)$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$.

Отображение (29) называется *оператором кривизны*, отвечающим векторным полям X и Y . Что же касается отображения (30), то в силу отождествлений

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathbf{FB}} \Gamma\xi &= \text{Hom}_{\mathbf{FB}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi) = \text{Mor}(\xi, \xi) = \\ &= \Gamma(\text{Hom}(\xi, \xi)) = \Gamma(\text{End } \xi) \end{aligned}$$

(см. формулу (19) лекции 11) оно представляет собой $\mathbf{FB}$ -линейное отображение

$$(32) \quad R: \mathfrak{a}\mathfrak{B} \times \mathfrak{a}\mathfrak{B} \rightarrow \Gamma(\text{End } \xi)$$

и, следовательно, является (см. задачу 21 лекции 16 и соотношение (31)) дифференциальной формой степени 2 (кососимметрическим тензорным полем типа $(2,0)$) на многообразии $\mathfrak{B}$ со значениями в векторном расслоении $\text{End } \xi$. Эта дифференциальная форма (тензорное поле) называется *тензором кривизны связности* H .

Обратим внимание, что сечениями расслоения $\text{End } \xi = \xi^* \otimes \xi$ являются ξ -тензорные поля над $\mathcal{B}$ типа $(1,1)$.

Замечание 1. В литературе можно встретить другое определение тензора кривизны, отличающейся от нашего знаком. Обозначения также варьируются — вместо $R^i_{j,kl}$ пишут R^i_{jkl} , $R_{j,kl}^i$, R^i_{jkl} и т. д. и т. п.

Задача 1. Для любой формы R на $\mathcal{B}$ со значениями в $\text{End } \xi$ и любого гладкого отображения $f: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ определите форму f^*R на $\mathcal{B}'$ со значениями в $\text{End } f^*\xi$ и покажите, что в случае, когда R является тензором кривизны связности H , форма f^*R будет тензором кривизны связности f^*H .

Формула (21) определяет гладкие функции $R^i_{j,kl}$ на произвольной координатной тривиализирующей окрестности U . Эти функции называются *компонентами* тензора R над U .

Пусть $R^i_{j,kl}$ — компоненты тензора R над другой координатной тривиализирующей окрестностью U' . Оказывается, что на пересечении $U \cap U'$ имеет место соотношение

$$(33) \quad R^i_{j,kl} = \varphi^i_{i'} \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} R^i_{j,kl}$$

(мы используем стандартные обозначения, введенные в лекции 10; см., в частности, формулу (17) лекции 10). Доказательство этого соотношения можно провести автоматической выкладкой, использующей формулу (17) лекции 10. Однако эта выкладка довольно канительна, и мы поступим по-другому. (Тем не менее читателю будет очень полезно — чтобы хотя бы набить руку в тензорных вычислениях — провести все же ее самому.)

Именно, мы воспользуемся тем, что для произвольной точки $b_0 \in U \cap U'$ и любых векторов $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$ у нас корректно определен линейный оператор (25), причем в базисе линеала $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$, отвечающего заданной на U тривиализации, этот оператор имеет матрицу $\|R(A, B)^i_j\| = \|R^i_{j,kl} A^k B^l\|$, а в базисе, отвечающем тривиализации, заданной на U' , — матрицу $\|R(A, B)^i_{j'}\| = \|R^i_{j',kl} A^k B^l\|$. Следовательно, согласно общему правилу о связи матриц одного и того же оператора в различных базисах (см. лекцию II.15), для этих матриц имеет место формула

$$R(A, B)^i_{j'} = \varphi^i_{i'} \varphi^j_{j'} R(A, B)^i_j,$$

т. е. формула

$$R^i_{j',kl} A^k B^l = \varphi^i_{i'} \varphi^j_{j'} R^i_{j,kl} A^k B^l$$

(где, конечно, под $R_{j,k}^{i'}$, $\varphi_i^{i'}$, $\varphi_j^{j'}$ и $R_{j,k}^i$ имеются в виду значения этих функций в точке b_0). Поскольку

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A^{k'} \quad \text{и} \quad B^l = \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} B^{l'},$$

это — в силу произвольности чисел $A^{k'}$ и $B^{l'}$ — доказывает формулу (33) (в точке b_0 , а потому и на всем пересечении $U \cap U'$).

Это рассуждение фактически использует только тот факт, что формулы (28) корректно определяют по функциям $R_{j,k}^i$ тензор (30). Поэтому формула (33) справедлива для компонент любого тензора типа $(2, 0)$ со значениями в $\text{End } \xi$.

Задача 2. Покажите, что если над каждой координатной тривиализирующей окрестностью U заданы функции $R_{j,k}^i$, причем для любых двух окрестностей U и U' на пересечении $U \cap U'$ имеет место формула (33), то формулы (28) корректно определяют некоторый тензор (30) типа $(2, 0)$ со значениями в $\text{End } \xi$.

Следовательно, такого рода тензоры мы можем отождествлять с наборами функций $R_{j,k}^i$, преобразующихся по формуле (33).

Этот факт позволяет нам ввести тензор R , просто задавая его компоненты формулой (21) (без каких-либо объяснений ее происхождения). Конечно, тогда проверка соотношений (33) на основе формулы (17) лекции 10 делается обязательной. Впрочем, эту проверку можно обойти (или, точнее, сдвинуть в другое более удобное место), если выразить оператор $R(X, Y)$ через операторы ковариантных производных

$$\nabla_X, \nabla_Y: \Gamma_\xi^1 \rightarrow \Gamma_\xi^1,$$

отвечающие векторным полям X и Y .

В координатах производные ∇_X и ∇_Y выражаются (см. формулу (10) лекции 11) формулами

$$(\nabla_X s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) X^k,$$

$$(\nabla_Y s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i s^j \right) Y^k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X \nabla_Y s)^i &= \left(\frac{\partial (\nabla_Y s)^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i (\nabla_Y s)^j \right) X^k = \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left[\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \Gamma_{lp}^i s^p \right) Y^l \right] + \Gamma_{kl}^i \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} + \Gamma_{lp}^j s^p \right) Y^l \right] X^k = \\
 &= \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^k \partial x^l} X^k Y^l + \frac{\partial s^i}{\partial x^l} X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{lp}^i}{\partial x^k} s^p X^k Y^l + \\
 &+ \Gamma_{lp}^i \frac{\partial s^p}{\partial x^k} X^k Y^l + \Gamma_{lp}^i s^p X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i \frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^k Y^l + \\
 &+ \Gamma_{kl}^i \Gamma_{lp}^j s^p X^k Y^l.
 \end{aligned}$$

Аналогичное выражение для $(\nabla_Y \nabla_X s)^i$ получается перестановкой символов X и Y или—после переименования индексов суммирования—перестановкой индексов k и l . Поэтому при вычитании $(\nabla_Y \nabla_X s)^i$ из $(\nabla_X \nabla_Y s)^i$ первые члены этих выражений—ввиду свойства симметричности вторых смешанных частных производных—сократятся. Кроме того, так как четвертый и шестой члены каждого выражения получаются друг из друга—после переименования индексов суммирования—перестановкой k и l , то эти члены также сократятся (четвертый—с шестым, а шестой—с четвертым). Разность же третьих и седьмых членов будет равна

$$R_{j,kl}^i s^j X^k Y^l = [R(X, Y) s]^i$$

(см. формулу (21)). Наконец, оставшиеся члены дадут нам сумму

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^l} \left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k} \right) + \Gamma_{lp}^i s^p \left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k} \right),$$

в силу формулы (24) лекции III.16 равную

$$\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^i s^j \right) [X, Y]^l = (\nabla_{[X, Y]} s)^i.$$

Этим доказано, что $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = R(X, Y) + \nabla_{[X, Y]}$ (на каждой координатной тривиализующей окрестности, а потому и всюду), т. е.

$$\begin{aligned}
 (34) \quad R(X, Y) &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} = \\
 &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}.
 \end{aligned}$$

Формулу (34) можно принять за определение операторов $R(X, Y)$. Это определение, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и краткости, имеет.

однако, формальный характер и не вскрывает геометрического смысла этих операторов.

Конечно, принимая формулу (34) за определение, мы должны, во-первых, проверить, что эта формула задает $F\mathcal{B}$ -линейное отображение $R(X, Y): \Gamma\dot{\xi} \rightarrow \Gamma\dot{\xi}$, а во-вторых — что соответствующее отображение (30) также $F\mathcal{B}$ -линейно.

Задача 3. Сделайте это.

Наиболее просто и экономно тензор кривизны строится, исходя из ковариантного дифференцирования

$$\nabla: \Gamma\dot{\xi} \rightarrow \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}).$$

отвечающего связности H (см. лекцию 13).

Пусть θ — линейная дифференциальная форма на $\mathcal{B}$ (элемент модуля $\Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}}) = \Gamma(\Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}})$), а ψ — сечение расслоения $\tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}$ (линейная дифференциальная форма на $\mathcal{B}$ со значениями в $\dot{\xi}$). В каждой точке $b \in \mathcal{B}$ элемент ψ_b слоя $T_b \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_b^{\dot{}} = \Lambda^1 T_b \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_b^{\dot{}}$ расслоения $\tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi} = \Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}$ имеет вид $\sum a_i \otimes p_i$, где $a_i \in T_b \mathcal{B}$, $p_i \in \mathcal{F}_b^{\dot{}}$.

Задача 4. Докажите, что формула

$$(\theta \wedge \psi)_b = \sum_i (\theta_b \wedge a_i) \otimes p_i$$

корректно определяет элемент $(\theta \wedge \psi)_b$ слоя $\Lambda^1 T_b \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_b^{\dot{}}$ расслоения $\Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}$ и, значит, формула

$$b \mapsto (\theta \wedge \psi)_b, \quad b \in \mathcal{B},$$

— некоторое сечение $\theta \wedge \psi$ расслоения $\Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}$.

Если расслоение $\dot{\xi}$ тривиально над окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ и $s_1, \dots, s_n$ — соответствующая тривиализация (базис FU -модуля $\Gamma(\dot{\xi}|_U)$), то форма ψ над U единственным образом представляется в виде $\sum \alpha_i \otimes s_i$, где α_i — линейные дифференциальные формы на U , а форма $\theta \wedge \psi$ будет задаваться формулой

$$\theta \wedge \psi = \sum (\theta \wedge \alpha_i) \otimes s_i \quad \text{над } U.$$

Это, в частности, показывает, что сечение $\theta \wedge \psi$ гладко (принадлежит $\Gamma(\Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi})$).

Задача 5. Докажите, что существует единственное K -линейное отображение

$$\hat{r}: \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \tau_{\mathcal{B}}^{\dot{}} \otimes \dot{\xi}).$$

удовлетворяющее тождеству

$$\bar{\nabla}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge \nabla s, \quad \theta \in \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^*), \quad s \in \Gamma(s).$$

Докажите, что это отображение удовлетворяет также тождеству Лейбница

$$\bar{\nabla}(f\psi) = df \wedge \psi + f\bar{\nabla}\psi, \quad f \in F\mathcal{B}, \quad \psi \in \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi).$$

[Указание. Над произвольной тривиализующей окрестностью $U \subset \mathcal{B}$ отображение $\bar{\nabla}$ задается формулой

$$\bar{\nabla}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes s_i\right) = \sum_{i=1}^n (d\alpha_i \otimes s_i - \alpha_i \wedge \nabla s_i),$$

где $\alpha_i \in \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^*|_U)$, а $s_1, \dots, s_n$ — базис FU -модуля $\Gamma(\xi|_U)$.]

Таким образом, мы имеем два отображения

$$\Gamma\xi \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\tau_{\mathcal{B}}^* \otimes \xi) \xrightarrow{\bar{\nabla}} \Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi)$$

и можем рассмотреть их композицию

$$\bar{\nabla} \circ \nabla: \Gamma\xi \rightarrow \Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi).$$

Легко видеть, что последнее отображение $F\mathcal{B}$ -линейно:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla} \circ \nabla)(fs) &= \bar{\nabla}(df \otimes s + f\nabla s) = \\ &= ddf \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s - f(\bar{\nabla} \circ \nabla)s = \\ &= f(\bar{\nabla} \circ \nabla)s. \quad \square \end{aligned}$$

Поэтому (см. предложение 3 лекции 11) существует такой морфизм

$$(35) \quad R: \xi \rightarrow \Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi$$

векторных расслоений (т. е. — см. задачу 14 лекции 12 — сечение расслоения $\text{Hom}(\xi, \Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi)$), что

$$(36) \quad \bar{\nabla} \circ \nabla = R \circ.$$

Задача 6. Докажите, что для любых трех векторных расслоений ξ, η, ζ имеет место естественный изоморфизм

$$\text{Hom}(\xi, \eta \otimes \zeta) = \eta \otimes \text{Hom}(\xi, \zeta).$$

В частности,

$$\text{Hom}(\xi, \Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \xi) = \Lambda^2 \tau_{\mathcal{B}} \otimes \text{End } \xi,$$

откуда следует, что морфизм (35) мы можем интерпретировать как дифференциальную форму степени 2 на $\mathcal{B}$ со значениями в расслоении $\text{End } \xi$. Мы будем называть эту

форму *формой кривизны* связности H . Сравним ее с тензором кривизны (32).

Пусть U — произвольная координатная тривиализующая окрестность и $s_1, \dots, s_n$ — базис FU -модуля $\Gamma(\xi|_U)$. Тогда для любого $j = 1, \dots, n$ должны иметь место равенства вида

$$R \circ s_j = \Omega_j^i \otimes s_i,$$

где

$$\Omega_j^i = \sum_{k < l} R_{j, kl}^i dx^k \wedge dx^l = 2R_{j, kl}^i dx^k \wedge dx^l$$

— некоторые дифференциальные формы степени 2 на U , составляющие матрицу

$$(37) \quad \Omega = |\Omega_j^i|.$$

Коэффициенты $R_{j, kl}^i$ пока никак не связаны с тензором (кривизны.)

Матрица Ω называется *матрицей форм кривизны* (или просто *матрицей кривизны*) связности H над окрестностью U . (Употребляется также термин *матричнозначная форма кривизны*.)

Пусть $\omega = |\omega_j^i|$ — матрица форм связности H на окрестности U .

По определению

$$\begin{aligned} \Omega_j^i \otimes s_i &= \hat{\nabla}(\nabla s_j) = \bar{\nabla}(\omega_j^i \otimes s_i) = \\ &= d\omega_j^i \otimes s_i - \omega_j^i \wedge \nabla s_i = \\ &= (d\omega_j^i - \omega_j^p \wedge \omega_p^i) \otimes s_i = \\ &= (d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p) \otimes s_i \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(38) \quad \Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_p^i \wedge \omega_j^p.$$

В матричной форме это равенство имеет вид

$$(38') \quad \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

а в координатной — вид

$$\begin{aligned} \sum_{k < l} R_{j, kl}^i dx^k \wedge dx^l &= \\ &= \sum_{k < l} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} \right) dx^k \wedge dx^l + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p dx^k \wedge dx^l. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что

$$R_{j, kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p - \Gamma_{jp}^i \Gamma_{kl}^p$$

(при $k < l$, а потому—в силу кососимметричности коэффициентов $R^j_{i,kl}$ по k и l —и для любых k и l), т. е., как и подсказывают обозначения, коэффициенты $R^i_{j,kl}$ являются не чем иным, как компонентами тензора кривизны.

Кроме того, мы видим, что значения $\Omega^i_j(A, B)$ форм Ω^i_j на векторах $A, B \in T_b \mathcal{B}$ —это в точности числа $R(A, B)^i_j$ из формулы (22). В соответствии с этим матрицу $\|R(A, B)\|$ мы будем в дальнейшем обозначать также символом $\Omega(A, B)$ (или—если нужно указать точку b —символом $\Omega_b(A, B)$).

Формула (38') называется структурным уравнением Картана.

Замечание 2. В некоторых учебниках дифференциальной геометрии структурное уравнение пишется в виде

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Причина изменения знака состоит в том, что в этих учебниках используются транспонированные матрицы Ω и ω (т. е. считается, что верхний индекс нумерует не строки, а столбцы). Конечно, никакого принципиального значения это не имеет.

Таким образом, для тензора кривизны мы имеем четыре различных определения. Первое обладает преимуществом геометричности, но приводит к длинным выкладкам. Второе (даваемое формулой (21)) слишком формально, а третье (даваемое формулой (34)) слишком сильно привязано к векторным полям, которые приходится все время волочить за собой. Наиболее элегантно четвертое определение (даваемое формулой (36) или, если хотите, формулой (38)), которое хотя и требует некоторой предварительной работы, но оказывается на практике наиболее удобным, позволяющим использовать гибкий и эффективный аппарат дифференциальных форм. В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться им.

Преимущества, доставляемые дифференциальными формами, ярко демонстрируются на примере доказательства следующего предложения.

Предложение 1 (тождество Бианки). На каждой окрестности U имеет место равенство

$$(39) \quad d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

Доказательство. Согласно формуле (38') $d\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$ и

$$d\Omega = dd\omega + d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega.$$

Поэтому

$$d\Omega = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \quad \square$$

В развернутом виде соотношение (39) имеет вид

$$d\Omega_j^i = \Omega_p^i \wedge \omega_j^p - \omega_p^i \wedge \Omega_j^p,$$

где

$$\omega_j^i = \Gamma_{kl}^i dx^k, \quad \Omega_j^i = \sum_{k < l} R_{j,kl}^i dx^k \wedge dx^l,$$

и потому

$$d\Omega_j^i = \sum_{k < l < s} \left(\frac{\partial R_{j,kl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial R_{j,ks}^i}{\partial x^l} + \frac{\partial R_{j,sl}^i}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s,$$

$$\Omega_p^i \wedge \omega_j^p =$$

$$= \sum_{k < l < s} (R_{p,kl}^i \Gamma_{js}^p - R_{p,ls}^i \Gamma_{jk}^p + R_{p,sk}^i \Gamma_{jl}^p) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s,$$

$$\omega_p^i \wedge \Omega_j^p =$$

$$= \sum_{k < l < s} (\Gamma_{pk}^i R_{j,ls}^p - \Gamma_{pl}^i R_{j,ks}^p + \Gamma_{ps}^i R_{j,kl}^p) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s.$$

Здесь удобно ввести подходящие сокращенные обозначения.

Пусть A_{kls} — массив величин, зависящих от трех индексов (пространственная матрица). Мы положим

$$(40) \quad A_{(kls)} = A_{kls} + A_{lsk} + A_{slk}.$$

Говорят, что $A_{(kls)}$ получается из A_{kls} циклированием.

Ясно, что $A_{(kls)}$ не меняется при циклической перестановке индексов:

$$A_{(kls)} = A_{(lks)} = A_{(skl)}.$$

Аналогичные обозначения употребляются, когда A_{kls} зависят еще от других индексов. (При этом, в случае необходимости, индексы, по которым циклирование не происходит, выделяются прямыми черточками. Например, запись $A_{(kl|p|q)}$ означает результат циклирования по k, l и q при неизменном p .)

Обозначая дифференцирование по x^k символом ∂_k и учитывая кососимметричность функций $R_{j,kl}^i$ по k и l , мы теперь видим, что коэффициентами форм $d\Omega_j^i, \omega_p^i \wedge \Omega_j^p$ и

$\omega^i_p \wedge \Omega^p_j$ являются соответственно функции

$$\partial_{(k} R^i_{|j|l, ls)}, R^i_{p, (kl} \Gamma^p_{|j|ls)} = \Gamma^p_{j(k} R^i_{|p|l, ls)}, \Gamma^i_{p(k} R^p_{|j|l, ls)}, \\ k < l < s.$$

Это означает, что тождество (39) равносильно тождеству

$$(41) \quad \partial_{(k} R^i_{|j|l, ls)} - \Gamma^p_{j(k} R^i_{|p|l, ls)} + \Gamma^i_{p(k} R^p_{|j|l, ls)} = 0.$$

Для любых фиксированных l и s функции $R^i_{j, ls}$ являются компонентами некоторого ξ -тензорного поля R_{ls} типа $(1,1)$, определенного на U . Согласно общей формуле (13) лекции 11 компоненты частных ковариантных производных $\nabla_k R_{ls}$ этого поля выражаются формулой

$$(\nabla_k R_{ls})^i_j = \partial_k R^i_{j, ls} - \Gamma^p_{jk} R^i_{p, ls} + \Gamma^i_{pk} R^p_{j, ls}.$$

Сравнив эту формулу с формулой (41), мы немедленно получим, что формула (41) равносильна соотношению

$$(42) \quad (\nabla_{(k} R_{ls)})^i_j = 0,$$

т. е. соотношению $\nabla_{(k} R_{ls)} = 0$.

Это есть тождество Бианки, записанное в тензорном виде.

Лекция 20

Тензор кривизны и группа голономии.— Выражение алгебры голономии через тензор кривизны.— Случай плоской связности.— Ковариантно постоянные тривиализации.— Связности, обладающие абсолютным параллелизмом.— Переход к главным расслоениям.— Параллельный перенос и группа голономии для главных расслоений.— Теорема редукции для главных расслоений.— Форма кривизны связности на главном расслоении.— Теорема Амброза—Сингера.— Применение теоремы Амброза—Сингера к векторным расслоениям.

В этой лекции мы изучим взаимоотношение тензора кривизны R с суженной группой голономии Φ_e связности H в точке $b_0 \in \mathcal{B}$.

Выкладки предыдущей лекции, на основе которых мы ввели тензор кривизны, показывают, что знание тензора R в точке b_0 (т. е. знание всех операторов $R(A, B)$, $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$) позволяет вычислить с точностью до бесконечно малых высшего порядка параллельный перенос вдоль любых бесконечно малых петель, начинающихся и кончающихся в точке b_0 . Следовательно, знание этого тензора на всем многообразии $\mathcal{B}$ позволяет вычислить—с той же точностью—параллельный перенос вдоль любого лассо с бесконечно малой петлей. Но мы знаем (см. следствие 1 леммы 3 лекции 18), что каждая гомотопная нулю петля u комбинаторно эквивалентна произведению сколь угодно малых лассо i , следовательно, что параллельный перенос Π_u является произведением параллельных переносов по этим лассо. Заменяя параллельные переносы по лассо их главными частями, мы получим для Π_u аналог интегральной суммы (в которой роль сложения играет умножение линейных операторов), причем пределом этой суммы будет отображение Π_u . Это показывает, что *тензор R полностью определяет группу Φ_e* . (Заметим, что знания тензора R только в точке b_0 для определения группы Φ_e недостаточно.)

Конечно, чтобы привести эти соображения в аккуратный вид и получить явные формулы для вычисления элементов группы Φ_e надо, вообще говоря, предварительно построить соответствующую теорию операторного интегрирования. Это построение, хотя в принципе и очевидное, необходимо должно быть весьма громоздким (хотя бы из-за некоммутативности умножения операторов). Поэтому стоит

поискать обходный путь. Первое, что здесь приходит в голову, — это заменить интеграционный подход равносильным дифференциальным и выразить через тензор R не группу Ли Φ_e , а ее алгебру Ли $\mathfrak{f}$, являющуюся подалгеброй алгебры Ли $[\text{End } \mathcal{F}_{b_0}]$. (Эта алгебра называется, кстати сказать, алгеброй голономии связности H в точке b_0 .)

С этой целью мы, возвращаясь к формуле (24) лекции 19, введем в рассмотрение кривую $t \mapsto v(t)$ в группе Φ_e , определенную на отрезке $[0, t_0]$, $t_0 = s_0^2$, формулой

$$(1) \quad v(t) = \begin{cases} \Pi_{s_0}, & \text{если } 0 < t \leq t_0, \text{ где } s = \sqrt{t}, \\ \text{id}, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Из формулы (24) лекции 19 непосредственно следует, что эта кривая гладка в точке $t=0$ и ее касательным вектором в этой точке является — с точностью до знака — оператор $R(A, B)$.

Таким образом, все операторы вида $R(A, B)$, $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$, принадлежат алгебре голономии $\mathfrak{f}$.

Однако этими операторами (и их линейными комбинациями) алгебра Ли $\mathfrak{f}$, вообще говоря, отнюдь не исчерпывается. Действительно, как мы знаем, произвольный путь w , соединяющий точку b_0 с некоторой точкой $b \in \mathcal{B}$, определяет изоморфизм группы $\Phi_e(b)$ на группу $\Phi_e = \Phi_e(b_0)$ и, значит, алгебры $\mathfrak{f}(b)$ на алгебру $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(b_0)$. Обозначим последний изоморфизм символом w^* . Тогда в алгебре $\mathfrak{f}$ для любых векторов $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$ будет определен элемент $w^*R(A, B)$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{f}$ содержит также все операторы вида $w^*R(A, B)$, $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$, а значит, и все их линейные комбинации.

Предложение 1. Алгебра $\mathfrak{f}$ состоит из всех линейных комбинаций элементов вида $w^*R(A, B)$, $A, B \in T_{b_0}\mathcal{B}$, $b \in \mathcal{B}$.

Таким образом, зная тензор R , мы можем вычислить алгебру Ли $\mathfrak{f}$, а по ней восстановить и группу Ли Φ_e .

Можно предложить следующий путь доказательства предложения 1.

Каждый элемент алгебры $\mathfrak{f}$ является касательным вектором в точке $t=0$ к некоторой гладкой кривой в группе Φ_e , проходящей при $t=0$ через точку e . Естественно предположить, что на некотором отрезке вида $[0, t_0]$ эту кривую можно представить в виде (1), где u_s — семейство гомотопных нулю петель, гладко зависящих от параметра $s = \sqrt{t}$ (и такое, что $\Pi_{u_s} = \text{id}$). Согласно следствию 1

леммы 3 лекции 18 каждый элемент Π_{u_s} можно разложить в произведение вида $\Pi_{u_s^{(1)}} \dots \Pi_{u_s^{(m)}}$, где $\bar{u}_s^{(1)}, \dots, \bar{u}_s^{(m)}$ — малые лассо. Наглядно очевидно, что это можно сделать так, чтобы m было одним и тем же для всех достаточно малых s и чтобы каждое лассо $\bar{u}_s^{(k)}$ имело вид $\omega_k u_s^{(k)} \omega_k^{-1}$, где пути ω_k не зависят от s , а $u_s^{(k)}$ представляют собой малые петли, гладко зависящие от s (и удовлетворяющие условиям 1—4 из лекции 19). Тогда касательный вектор в точке $s=0$ к кривой (1) будет (см. задачу 17 лекции 14) суммой касательных векторов к кривым (1), отвечающим петлям $u_s^{(k)}$, т. е. будет суммой элементов вида $\omega_k^* R(A_k, B_k)$, где $A_k, B_k \in T_{\omega_k(1)} \mathfrak{B}$. Таким образом, каждый элемент алгебры $\mathfrak{f}$ действительно является линейной комбинацией элементов вида $\omega^* R(A, B)$.

Конечно, хотя это эвристическое рассуждение и делает предложение 1 достаточно убедительным, но чтобы превратить его в формальное доказательство, требуется очень много технической работы. Поэтому ниже мы докажем предложение 1 совсем другим способом.

Ситуация значительно упрощается при $R=0$ (т. е. когда $R_{j,kl}^i=0$ на каждой окрестности U). В этом случае каждый член указанной выше интегральной суммы (или, лучше сказать, интегрального произведения) будет с точностью до величин высшего порядка малости тождественным оператором id , и потому ее предел (независимо от порядка слагаемых — сомножителей) будет равен id . Таким образом, если $R=0$, то $\Phi_e = \{e\}$. Поскольку обратное утверждение (если $\Phi_e = \{e\}$, то $R=0$) очевидно, мы видим, что справедливо следующее предложение (являющееся, конечно, всего лишь частным случаем предложения 1):

Предложение 2. Равенство $R=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Phi_e = \{e\}$:

$$R=0 \Leftrightarrow \Phi_e = \{e\}.$$

Связность, для которой $R=0$, называется *плоской*.

Хотя при $R=0$ изложенные выше «интегральные» соображения можно без труда превратить в четкое доказательство (сделайте это!), мы все же дадим сейчас предложению 2 независимое «дифференциальное» доказательство, которое послужит нам образцом для более сложного доказательства предложения 1.

Напомним, что векторное поле X на тотальном пространстве $\mathcal{E}$ расслоения ξ называется *горизонтальным* по отношению к связности H , если $X_p \in H_p$ для любой точки $p \in \mathcal{E}$, т. е. если $X^H = X$ (см. лекцию 10). Все горизонтальные поля составляют подпространство пространства $\mathfrak{a}\mathcal{E}$ всех векторных полей на $\mathcal{E}$. Мы будем обозначать это подпространство символом $\mathfrak{a}[H]$ (ср. обозначения, введенные в лекции 14; напомним—см. задачу 21 лекции 14—что гладкие поля подпространств и распределения—это одно и то же).

Локально (над координатными тривиализующими окрестностями U) горизонтальные поля характеризуются равенствами

$$\theta^1(X) = 0, \dots, \theta^n(X) = 0,$$

где (см. лекцию 10) θ^i , $1 \leq i \leq n$,—такие дифференциальные формы на U , что

$$\theta^i = da^i + \omega_j^i a^j, \quad i = 1, \dots, n$$

(где, конечно, формы связности ω_j^i рассматриваются как формы на $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$, т. е., иными словами, представляют собой на самом деле формы $\pi^*\omega_j^i$).

Но при $R = 0$ (т. е. при $\Omega = 0$) формы ω_j^i удовлетворяют соотношению

$$d\omega_j^i = -\omega_p^i \wedge \omega_j^p, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и потому

$$\begin{aligned} d\theta^i &= dda^i + (d\omega_j^i) a^j - \omega_j^i \wedge da^j = \\ &= -(\omega_p^i \wedge \omega_j^p) a^j - \omega_j^i \wedge (\theta^j - \omega_p^j a^p) = \\ &= -\omega_j^i \wedge \theta^j, \end{aligned}$$

т. е.

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i \quad (\text{при } R = 0).$$

Следовательно, если $X, Y \in \mathfrak{a}[H]$ (и, значит, $\theta^i(X) = 0$, $\theta^i(Y) = 0$), то (см.—с учетом замечания 2 лекции II.96—формулу (1) лекции II.8)

$$\begin{aligned} d\theta^i(X, Y) &= (\theta^i \wedge \omega_j^i)(X, Y) = \\ &= \theta^i(X) \omega_j^i(Y) - \omega_j^i(X) \theta^i(Y) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны (см. формулу (6) лекции III.19),

$$d\theta^i(X, Y) = X\theta^i(Y) - Y\theta^i(X) - \theta^i[X, Y] = -\theta^i[X, Y].$$

Поэтому $\theta^i[X, Y] = 0$, т. е. $[X, Y] \in \mathfrak{a}[H]$.

Это доказывает, что при $R = 0$ подпространство $\alpha[H]$ является подалгеброй алгебры Ли $\alpha\mathcal{G}$, т. е., иными словами, что каждая плоская связность H представляет собой инволютивное распределение.

Следовательно, согласно теореме Фробениуса (см. лекцию 14) связность H вполне интегрируема, т. е. через любую точку $p_0 \in \mathcal{G}$ проходит одно и только одно ее максимальное интегральное многообразие $\mathcal{X}$. По определению многообразие $\mathcal{X}$ характеризуется тем, что в любой его точке p имеет место равенство $T_p \mathcal{X} = H_p$. Поэтому ограничение $\pi|_{\mathcal{X}}$ проекции π на $\mathcal{X}$ этально и, значит, является локальным диффеоморфизмом (даже накрытием). В частности, это означает, что точка $b_0 = \pi(p_0)$ обладает в $\mathcal{B}$ окрестностью U , над которой существует такое сечение $s: U \rightarrow \mathcal{G}$ расслоения ξ , что $s(b_0) = p_0$ и $s(U) = \mathcal{X} \cap \pi^{-1}U$. (Можно сказать, что s осуществляет горизонтальный подъем в $\mathcal{G}$ всей окрестности U .)

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к доказательству предложения 2.

Доказательство предложения 2. Для произвольной петли u в точке b_0 , целиком расположенной в окрестности U , композиция $s \circ u$, где s — только что построенное сечение $U \rightarrow \mathcal{G}$, будет петлей в точке p_0 , лежащей на многообразии $\mathcal{X}$ и поэтому горизонтальной. Поскольку $(s \circ u)(1) = p_0$, это доказывает, что для любой такой петли u имеет место равенство $\Pi_u = \text{id}$.

Поэтому равенство $\Pi_u = \text{id}$ имеет место и для любого малого лассо, а значит, в силу следствия 1 из леммы 3 лекции 18, и для любой петли u , гомотопной нулю. Следовательно, $\Phi_e = \{e\}$. $\square$

Сечение s обладает также тем свойством, что $\nabla s = 0$ (достаточно заметить, что $\nabla_X s = 0$ для любого векторного поля X на $\mathcal{B}$). С другой стороны, если $p_1, \dots, p_n$ — базис линейала $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ и $s_1, \dots, s_n$ — соответствующие (т. е. такие, что $s_1(b_0) = p_1, \dots, s_n(b_0) = p_n$) сечения, то над некоторой окрестностью точки b_0 (которую мы снова обозначим через U) сечения $s_1, \dots, s_n$ будут, очевидно, образовывать базис FU -модуля $\Gamma(\xi|_U)$. Обратно, если U — такая окрестность точки p_0 , что FU -модуль $\Gamma(\xi|_U)$ обладает базисом $s_1, \dots, s_m$, для которого $\nabla s_1 = 0, \dots, \nabla s_n = 0$, то, конечно, $R = 0$ на U . Этим доказано следующее предложение:

Предложение 3. *Связность H на векторном расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ тогда и только тогда является плоской связностью, когда многообразие $\mathcal{B}$ может быть покрыто открытыми множествами U , обладающими тем свойством, что в FU -модуле $\Gamma(\xi|_U)$ существует базис $s_1, \dots, s_n$, для которого*

$$\nabla s_1 = 0, \dots, \nabla s_n = 0. \quad \square$$

Такой базис $s_1, \dots, s_n$ называется ковариантно постоянной тривиализацией расслоения ξ над U .

Связности, для которых тривиальна полная группа голономии Φ , называются связностями с абсолютным параллелизмом.

Задача 1. Докажите, что связность тогда и только тогда является связностью с абсолютным параллелизмом, когда для любых точек $b_0, b_1 \in \mathcal{B}$ отображение $\Pi_a: \mathcal{F}_{b_0} \rightarrow \mathcal{F}_{b_1}$ одно и то же для всех путей u , соединяющих точку b_0 с точкой b_1 .

Заметим, что согласно теореме редукции из лекции 18 связность с абсолютным параллелизмом может существовать только на тривиальном расслоении ξ .

Существование эпиморфного отображения (6) лекции 18 доказывает, что в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ односвязно, группа Φ совпадает с группой Φ_a . Поэтому в силу предложения 2 связность в векторном расслоении над односвязным многообразием тогда и только тогда обладает абсолютным параллелизмом, когда эта связность плоская (а расслоение тривиально).

В частности, если в расслоении над односвязным многообразием существует плоская связность, то это расслоение тривиально.

Этот дифференциально-геометрический критерий тривиальности гладкого векторного расслоения на удивление часто полезен.

В общем случае предложения 1 доказательство осложняется необходимостью следить за изоморфизмами ω^a . Однако оказывается, что эти изоморфизмы можно формально элиминировать, если, выбрав в каждом слое $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, некоторый базис $p = (p_1, \dots, p_n)$, перейти от линейных операторов $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b$ к их матрицам в этом базисе.

Пусть $\mathfrak{f}_p$ — матричная алгебра Ли, состоящая из матриц элементов алгебры голономии $\mathfrak{f}_b$, и пусть $R_p(A, B)$,

$A, B \in T_b \mathcal{B}$, — матрица оператора кривизны $R(A, B)$ в базисе p .

Из лекции 18 мы знаем, что если базис p линейала $\mathcal{F}_b$ получается из базиса p_0 линейала $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ параллельным переносом вдоль соединяющего точку b_0 с точкой b пути ω , то индуцированный этим путем изоморфизм $\Phi(b) \rightarrow \Phi(b_0)$ переводит каждый элемент группы $\Phi(b)$ в элемент группы $\Phi(b_0)$ с той же матрицей. В частности, это означает, что матрицей в базисе p_0 элемента $\omega^* R(A, B)$, $A, B \in T_b \mathcal{B}$, алгебры $Li \dot{f}_0 = \dot{f}_{p_0}$ служит матрица $R_p(A, B)$.

Следовательно, на матричном языке предложение 1 утверждает, что для любого базиса p_0 линейала $\mathcal{F}_0$ матричная алгебра $Li \dot{f}_0 = \dot{f}_{p_0}$ состоит из линейных комбинаций матриц вида $R_p(A, B)$, где p — всевозможные базисы слоев расслоения ξ , которые можно получить из базиса p_0 параллельными переносами, а A и B — произвольные векторы пространства $T_b \mathcal{B}$, $b = \pi(p)$.

Поскольку базисы p являются не чем иным, как точками главного расслоения реперов $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, ассоциированного с векторным расслоением ξ (и, как мы знаем, — см. лекцию 16 — гладкого, если гладко расслоение ξ), эта переформулировка наводит на мысль о справедливости аналогичного утверждения для любых главных $\mathcal{G}$ -расслоений ξ . Чтобы убедиться в этом, мы должны сначала перенести на главные расслоения понятие параллельного переноса и группы (алгебры) голономии.

Пусть $\mathcal{G}$ — группа Ли, $\mathcal{B}$ — гладкое хаусдорфово многообразие, $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ — гладкое главное $\mathcal{G}$ -расслоение над $\mathcal{B}$ и H — связность на расслоении ξ .

Кривая $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ называется горизонтальной, если $\dot{v}(t) \in H_{v(t)}$ для любого $t \in I$. Говорят, что кривая $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ накрывает кривую $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ (является поднятием кривой u), если $u = \pi \circ v$. (Ср. в лекции 10 аналогичные определения для векторных расслоений.)

Предложение 4. Для любой гладкой кривой $u: I \rightarrow \mathcal{B}$, любой точки $t_0 \in I$ и любой точки $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 = \pi(p_0)$, существует единственная горизонтальная кривая $v: I \rightarrow \mathcal{E}$, накрывающая кривую u и такая, что $v(t_0) = p_0$.

Мы докажем это предложение в следующей лекции. Пока же мы лишь заметим, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ , это предложение непосредственно вытекает из соответствующего предложения для векторных расслоений (предложение 1

лекции 11). [Действительно, чтобы построить v , достаточно параллельно перенести вдоль u каждый вектор базиса p_* .]

Как правило, мы будем применять предложение 4 в случае, когда кривая u является путем (определена на отрезке $I = [0, 1]$), а $t_0 = 0$.

Так же, как и для векторных расслоений, точка $p_1 = v(1)$ обозначается символом $\Pi_u p_0$ и отображение

$$\Pi_u: \mathcal{F}_{b_0} \rightarrow \mathcal{F}_{b_1}, \quad p_0 \mapsto \Pi_u p_0,$$

где $b_1 = u(1)$ называется *параллельным переносом* вдоль пути u . При композиции путей эти переносы перемножаются; если $u = u_1 u_2$, то

$$(1) \quad \Pi_u = \Pi_{u_2} \circ \Pi_{u_1}.$$

(Ср. формулу (2) лекции 18.)

Задача 2. Определите отображение Π_u для кусочно гладких путей u и покажите, что формула (1) остается в силе и в этом случае. (Ср. лекцию 18.)

Так как связность H является эквивариантным полем подпространств, то для любого горизонтального пути $v: I \rightarrow \mathcal{E}$ и любого элемента $a \in \mathcal{Z}$ путь

$$R_a \circ v: t \mapsto v(t)a, \quad t \in I,$$

также горизонтален. Этот путь покрывает тот же путь $u: I \rightarrow \mathcal{B}$, но начинается в точке $p_0 a$, а кончается в точке $p_1 a$. Следовательно,

$$(2) \quad \Pi_u(p_0 a) = (\Pi_u p_0)a, \quad a \in \mathcal{Z},$$

т. е.

$$\Pi_u \circ R_a = R_a \circ \Pi_u$$

(отображение Π_u перестановочно с действиями группы $\mathcal{Z}$ на слоях $\mathcal{F}_{b_0}$ и $\mathcal{F}_{b_1}$ соответственно).

Отображения Π_u , отвечающие петлям u в точке b_0 , составляют группу преобразований слоя $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$. Эта группа называется *группой голономии* главного расслоения π со связностью H в точке $b_0 \in \mathcal{B}$ и обозначается символом $\Phi^H(b_0)$.

Выбрав в слое $\mathcal{F}_0$ точку p_0 , мы произвольному элементу Π_u группы $\Phi^H(b_0)$ поставим в соответствие элемент a_u группы $\mathcal{Z}$, удовлетворяющий соотношению

$$\Pi_u p_0 = p_0 a_u.$$

Так как группа $\mathcal{Z}$ свободно и транзитивно действует на $\mathcal{F}_0$, то элемент a_u существует и единственен.

Из формулы (2) следует, что для любых двух петель u_1, u_2 в точке b_0 имеет место равенство

$$\begin{aligned} (\Pi_{u_1} \circ \Pi_{u_2}) p_0 &= \Pi_{u_1}(p_0 a_{u_2}) = \\ &= (\Pi_{u_2} p_0) a_{u_1} = p_0 a_{u_1} a_{u_2}, \end{aligned}$$

показывающее, что отображение $\Pi_{u_1} \mapsto a_{u_1}$ является гомоморфизмом. Более того, так как $a_e = e$ тогда и только тогда, когда $\Pi_e = \text{id}$, то отображение $\Pi_u \mapsto a_u$ является мономорфизмом. Его образ обозначается символом $\Phi^{\sharp}(p_0)$ (или просто $\Phi(p_0)$) и называется *группой голономии в точке p_0* .

Задача 3. Докажите, что группа $\Phi(p_0)$ состоит из таких элементов a группы $\mathcal{G}$, что точка $p_0 a$ соединима с точкой p_0 горизонтальным путем.

По построению группы $\Phi(b_0)$ и $\Phi(p_0)$ изоморфны, но первая является группой преобразований слоя $\mathcal{F}_0$ (перестановочных с действием группы $\mathcal{G}$), а вторая — подгруппой самой структурной группы $\mathcal{G}$.

В случае, когда ξ представляет собой расслоение реперов векторного расслоения ξ , элементами группы $\Phi^{\sharp}(b_0)$ являются преобразования многообразия Штифеля $V(n, \mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$ базисов линейала $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$, индуцированные элементами группы голономии $\Phi^{\sharp}(b_0)$ расслоения ξ . В этом смысле группы $\Phi(b_0)$ для расслоений ξ и ξ одни и те же.

Что же касается группы $\Phi^{\sharp}(p_0)$, то она, очевидно, является не чем иным, как матричной группой, состоящей из матриц группы $\Phi^{\sharp}(b_0)$ в базисе p_0 .

Задача 4. Докажите, что для любого главного расслоения ξ группа $\Phi^{\sharp}(p_0)$ обладает естественной гладкостью, по отношению к которой она является подгруппой группы Ли $\mathcal{G}$, причем в случае, когда многообразие $\mathcal{B}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, эта гладкость слабейшая. [Указание. См. предложение 1 лекции 18.]

Покажите также, что перенесенная в группу $\Phi^{\sharp}(b_0)$, эта гладкость не зависит от выбора точки $p_0 \in \mathcal{F}_0$ (что дает тем самым естественную структуру группы Ли на $\Phi^{\sharp}(b_0)$).

Алгебру Ли $T_p \Phi^{\sharp}(p_0)$ группы Ли $\Phi^{\sharp}(p_0)$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{f}_{p_0}^{\sharp}$ (или просто $\mathfrak{f}_{p_0}$). По построению алгебра $\mathfrak{f}_{p_0}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_p \mathcal{G}$.

В случае, когда ξ является расслоением реперов, алгебра $\mathfrak{f}_{p_0}$ — это в точности введенная выше матричная алгебра Ли $\mathfrak{f}_0$.

На главные расслоения переносится и теорема о редукции (теорема 1 лекции 18).

Предложение 5. *Главное расслоение ξ , на котором существует связность с группой голономии Φ , редуцируется к группе Φ .*

Доказательство. Для главного $GL(n; R)$ -расслоения реперов ξ , ассоциированного с векторным расслоением ξ , предложение 5 немедленно вытекает из теоремы 1 лекции 18, поскольку редуцируемость векторного расслоения ξ к подгруппе $\Phi \subset GL(n; R)$ равносильна, очевидно, редуцируемости к Φ главного расслоения ξ . В общем случае доказательство по существу повторяет доказательство теоремы 1 лекции 18.

Пусть $\Phi = \Phi^*(p_0)$.

Мы построим тривиализующий атлас $\{(U, \varphi)\}$ расслоения ξ , принимая за U произвольную шаровую координатную окрестность в многообразии $\mathcal{B}$ и следующим образом определив тривиализацию $\varphi: U \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}_U$ (или, точнее, соответствующее сечение $s^U: U \rightarrow \mathcal{E}$, связанное с тривиализацией φ соотношением $\varphi(b, a) = s^U(b) a$, $a \in \mathcal{S}$, $b \in U$).

Произвольно выбрав путь v^U , соединяющий точку $b_0 = \pi(p_0)$ с центром b^U окрестности U , и обозначив для любой точки $b \in U$ через v_b^U композицию $v^U \omega_b^U$ пути v^U и радиального пути ω_b^U , соединяющего в U точку b^U с точкой b , мы примем за $s^U(b)$ конец $\Pi_{v_b^U}(p_0)$ горизонтального пути, начинающегося в точке p_0 и накрывающего путь v_b^U . Ясно, что $s^U(b) \in \mathcal{F}_b$, т. е. что отображение $s^U: U \rightarrow \mathcal{E}_U$ является сечением расслоения ξ над U .

Задача 5. Покажите, что сечение $s^U: U \rightarrow \mathcal{E}_U$ гладко (принадлежит $\Gamma(\xi|_U)$).

Построив таким образом атлас $\{(U, \varphi)\}$, найдем отвечающий этому атласу склеивающий коцикл.

Пусть U_α и U_β — две пересекающиеся шаровые координатные окрестности, а φ_α и φ_β — соответствующие тривиализации. Тогда связывающее эти тривиализации отображение перехода

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathcal{S}$$

будет задаваться формулой

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \tau(s^{U_\alpha}(b), s^{U_\beta}(b)), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

где τ — отображение сдвига для расслоения ξ (см. задачу 10 лекции 16). Но по определению

$$s^{U_\alpha}(b) = \Pi_{v_b^\alpha} p_0 \quad \text{и} \quad s^{U_\beta}(b) = \Pi_{v_b^\beta} p_0,$$

где $v_b^\alpha = v_b^{U_\alpha}$ и $v_b^\beta = v_b^{U_\beta}$, и потому

$$\tau(s^{U_\alpha}(b), s^{U_\beta}(b)) = a_w,$$

где a_w — элемент группы Φ , отвечающий петле

$$w = v_\beta^\alpha (v_b^\beta)^{-1} = v^{U_\alpha} w_b^{U_\alpha} (w_b^{U_\beta})^{-1} (v^{U_\beta})^{-1}.$$

Таким образом, $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \Phi$ и, значит, склеивающий коцикл $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ является коциклом над группой Φ . Следовательно, расслоение ξ редуцируется к группе Φ . $\square$

Согласно общим результатам лекции 9, если η — редукция расслоения ξ , то пространство $\mathcal{E}^\eta$ вкладывается в пространство $\mathcal{E}^\xi$.

Задача 6. Пусть гладкое главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ редуцируется к подгруппе, являющейся подгруппой Ли группы $\mathcal{G}$. Покажите, что редуцированное расслоение η также гладко и его тотальное пространство $\mathcal{E}^\eta$ является подмногообразием многообразия $\mathcal{E}^\xi$.

В частности, для любой точки $p \in \mathcal{E}^\eta$ пространство $T_p \mathcal{E}^\eta$ является подпространством пространства

$$T_p \mathcal{E}^\xi = T_p \mathcal{F}_b^\xi \oplus H_p, \quad b = \pi(p).$$

Задача 7. Покажите, что $H_p \subset T_p \mathcal{E}^\eta$ и что

$$T_p \mathcal{E}^\eta = T_p \mathcal{F}_b^\eta \oplus H_p.$$

Отсюда следует, что соответствие $p \mapsto H_p$, $p \in \mathcal{E}^\eta$, определяет на η некоторую связность H^η . Об этой связности говорят, что она индуцирована связностью H .

Задача 8. Покажите, что если $H = \text{App } \theta$ (см. лекцию 17), то $H^\eta = \text{App } \theta^\eta$, где θ^η — ограничение формы θ на подмногообразие $\mathcal{E}^\eta$.

Таким образом, для любой точки $p \in \mathcal{E}^\eta$ вектор $A \in T_p \mathcal{E}^\eta$ тогда и только тогда горизонтален относительно связности H^η , когда он горизонтален (как вектор из $T_p \mathcal{E}^\xi$) относительно связности H .

Перенесем теперь на главные расслоения конструкцию тензора кривизны R , или, точнее, матричной формы кривизны Ω . Для этого мы должны записать структурное уравнение (38') лекции 19 в виде, удобном для обобщения.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathfrak{A})$ — расслоение реперов, ассоциированное с векторным расслоением ξ , и пусть $H = \text{App } \theta$ — связность на ξ , отвечающая связности H на ξ . Здесь θ — линейная $\mathfrak{gl}(n; R)$ -значная дифференциальная форма на $\mathcal{E}$,

т. е. матрица θ , состоящая из обычных дифференциальных форм θ^i_j на $\mathcal{E}$, которая на каждой координатной окрестности $\mathcal{E}_U$ имеет вид

$$\theta = C^{-1}dC + C^{-1}\omega C,$$

где ω — матрица $[\omega^i_j]$ форм связности H на окрестности U , поднятая в $\mathcal{E}_U$ (см. формулу (12') лекции 16). Поэтому

$$\omega = C\theta C^{-1} - dCC^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} d\omega &= dC \wedge \theta C^{-1} + C d\theta C^{-1} - C\theta \wedge dC^{-1} + dC \wedge dC^{-1}, \\ \omega \wedge \omega &= C\theta \wedge \theta C^{-1} - dC \wedge \theta C^{-1} - C\theta C^{-1} \wedge dCC^{-1} + \\ &\quad + dCC^{-1} \wedge dCC^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $dC^{-1} = -C^{-1}dCC^{-1}$, отсюда следует, что

$$d\omega + \omega \wedge \omega = C(d\theta + \theta \wedge \theta)C^{-1},$$

т. е. что

$$(3) \quad d\theta + \theta \wedge \theta = C^{-1}\Omega C \text{ на } \mathcal{E}_U.$$

Символ Ω обозначает здесь матричную форму из формулы (38') лекции 19, рассматриваемую как форма на $\mathcal{E}_U$ (т. е., строго говоря, — форму $\pi^*\Omega$, где π — проекция $\mathcal{E}_U \rightarrow U$).

Полученная формула означает, что $g_l(n; \mathbb{R})$ -значная форма

$$(4) \quad \Omega = d\theta + \theta \wedge \theta$$

(определенная, подчеркнем, на всем $\mathcal{E}$) имеет на каждой окрестности $\mathcal{E}_U$ вид $C^{-1}\Omega C$ и потому является полноценной заменой форм Ω . Преимущество формы (4) состоит в том, что, в отличие от форм Ω , она определена на всем многообразии $\mathcal{E}$.

Формулу (4) еще нельзя непосредственно перенести на случай произвольного главного расслоения, поскольку в ней участвует операция $\wedge$, определенная только для матричных форм. Поэтому она нуждается в дополнительном преобразовании.

Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ модуль $F_{\mathfrak{g}}\mathcal{X}$ всех гладких $\mathfrak{g}$ -значных функций на гладком многообразии $\mathcal{X}$ является, очевидно, алгеброй Ли относительно операции $(f, g) \mapsto [f, g]$, определенной формулой

$$[f, g](p) = [f(p), g(p)], \quad p \in \mathcal{X}.$$

Имея это в виду, мы для любых линейных $\mathfrak{g}$ -значных дифференциальных форм α и β на многообразии $\mathcal{X}$ (интер-

претированных как линейные отображения $a\mathcal{X} \rightarrow F_a\mathcal{X}$; см. лекцию 16) определим q -значную форму $[\alpha, \beta]$ степени 2 на $\mathcal{X}$, положив для любых полей $X, Y \in a\mathcal{X}$

$$[\alpha, \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)].$$

Замечание 1. Аналогичным образом форма $[\alpha, \beta]$ определяется для q -значных форм α и β произвольных степеней. [Надо взять обычное определение формы $\alpha \wedge \beta$ и всюду заменить умножение чисел на операцию в алгебре q .]

При $q = qI(n; R)$ формы α, β и $[\alpha, \beta]$ мы можем отождествить с матрицами $[\alpha_k^j], [\beta_k^j]$ и $[[\alpha, \beta]_k^j]$, составленными из обычных дифференциальных форм (степени 1 и 2 соответственно), и тогда для любых полей $X, Y \in a\mathcal{X}$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]_k^j(X, Y) &= \\ &= (\alpha_k^i(X) \beta_j^i(Y) - \beta_k^i(Y) \alpha_j^i(X)) - (\alpha_k^i(Y) \beta_j^i(X) - \beta_k^i(X) \alpha_j^i(Y)) = \\ &= (\alpha_k^i(X) \beta_j^i(Y) - \alpha_k^i(Y) \beta_j^i(X)) + (\beta_k^i(X) \alpha_j^i(Y) - \beta_k^i(Y) \alpha_j^i(X)) = \\ &= (\alpha_k^i \wedge \beta_j^i)(X, Y) + (\beta_k^i \wedge \alpha_j^i)(X, Y). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$[\alpha, \beta]_k^j = \alpha_k^i \wedge \beta_j^i + \beta_k^i \wedge \alpha_j^i,$$

т. е. в матричных обозначениях

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha.$$

В частности, при $\alpha = \beta = \theta$ мы получаем, что

$$[\theta, \theta] = 2\theta \wedge \theta.$$

Следовательно, формулу (3) можно теперь переписать в следующем виде:

$$(5) \quad \Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta].$$

В этом виде она имеет смысл для любой связности $H = \text{Ann } \theta$ на произвольном главном $\mathcal{Z}$ -расслоении $\mathcal{E}$.

Определение 1. Форма (5) называется *формой кривизны* связности H .

Подчеркнем, что для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любых векторов $A, B \in T_p\mathcal{E}$ значение $\Omega_p(A, B)$ этой формы является элементом алгебры Ли q группы Ли $\mathcal{G}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог предложения 1 для произвольных главных расслоений.

Теорема 1. Для любой связности H на главном $\mathcal{G}$ -расслоении $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ и любой точки $p_0 \in \mathcal{G}$ алгебра голономии $\dot{p}_0$ состоит из линейных комбинаций всевозможных элементов вида $\Omega_p(A, B)$, где p — произвольная точка, которую можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем, а $A, B \in H_p$ — произвольные горизонтальные векторы в точке p .

Доказательство. Согласно предложению 2 расслоение ξ редуцируется к расслоению η с группой Φ . При этом в силу утверждения задачи 6 форма кривизны Ω^η расслоения η будет ограничением на $\mathcal{G}^\eta$ формы кривизны Ω и, значит, значения форм Ω и Ω^η на горизонтальных векторах будут одни и те же. Поэтому, если теорема 1 верна для расслоения η , то она будет верна и для расслоения ξ . Следовательно, эту теорему достаточно доказать лишь в предположении, что группа голономии Φ совпадает со всей структурной группой $\mathcal{G}$ (и, значит, алгебра $\dot{p}_0$ — с алгеброй $\mathfrak{g}$). Поскольку при $\Phi = \mathcal{G}$ любую точку $p \in \mathcal{G}$ можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем, мы видим, следовательно, что нам достаточно доказать, что при $\Phi = \mathcal{G}$ линейал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $\Omega_p(A, B)$, где $p \in \mathcal{G}$ и $A, B \in H_p$.

С другой стороны, так как $\theta_p(A) = 0$ для любого вектора $A \in H_p$, то $\Omega_p(A, B) = d\theta_p(A, B)$ для любых векторов $A, B \in H_p$. Таким образом, нам нужно доказать, что при $\Phi = \mathcal{G}$ линейал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $d\theta_p(A, B)$, $p \in \mathcal{G}$, $A, B \in H_p$, т. е. вида $d\theta(\bar{X}, \bar{Y})(p)$, где X и Y — произвольные векторные поля на $\mathcal{B}$, а $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — их горизонтальные подъемы (см. лекцию 17).

Но согласно общей формуле (34) лекции 16

$$d\theta(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{X}\theta(\bar{Y}) - \bar{Y}\theta(\bar{X}) - \theta([\bar{X}, \bar{Y}]),$$

где $\theta(\bar{X}) = 0$ и $\theta(\bar{Y}) = 0$ (так как поля $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ горизонтальны), и, значит, $d\theta(\bar{X}, \bar{Y})(p) = -\theta([\bar{X}, \bar{Y}](p))$. Следовательно, мы должны доказать, что при $\Phi = \mathcal{G}$ линейал $\mathfrak{g}$ порождается элементами вида $\theta([\bar{X}, \bar{Y}](p))$, $p \in \mathcal{G}$, $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$, т. е. что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — подпространство линейала $\mathfrak{g}$, порожденное всеми такими элементами.

Так как форма θ эквивариантна, то для любого эле-

мента $a \in \mathfrak{G}$

$$\begin{aligned} (\text{Ad } a)(\theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](p)) &= (\text{Ad } a)(\theta_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p)) = \\ &= \theta_{pa}((dR_a)_p[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) = \theta_{pa}((R_{a^{-1}}^*[\tilde{X}, \tilde{Y}])_{pa}) = \\ &= \theta(R_{a^{-1}}^*[\tilde{X}, \tilde{Y}])(pa) = \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])_{pa} = \\ &= \theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](pa) \in \mathfrak{h} \end{aligned}$$

(см. задачу 5 лекции 17), откуда следует, что $(\text{Ad } a)B \in \mathfrak{h}$ для любого элемента $B \in \mathfrak{h}$.

При $a = \exp tA$ это означает (см. задачу 16 лекции 14), что $e^{t \text{ad } A} B \in \mathfrak{h}$ и, поэтому

$$(\text{ad } A)B = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \text{ad } A} - \text{id}}{t} B \in \mathfrak{h},$$

т. е. (см. задачу 15 лекции 14) что $[A, B] \in \mathfrak{h}$.

Так как это верно для любых элементов $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{h}$ (и, значит, для любых элементов $A, B \in \mathfrak{h}$), то, следовательно, $\mathfrak{h}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для каждой точки $p \in \mathfrak{G}$ обозначим через $\mathcal{D}_p$ подпространство пространства $T_p \mathfrak{G}$, состоящее из всех векторов вида $(\tilde{X} + A*)_p$, где $X \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{h}$ (A^* — фундаментальное поле, отвечающее элементу A ; см. лекцию 17).

Пусть $(U, x^1, \dots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathfrak{B}$ и $X_1, \dots, X_m$ — горизонтальные подъемы в $\mathfrak{G}_U$ базисных координатных полей $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ на U . Пусть, далее, $r = \dim \mathfrak{h}$ и $A_1, \dots, A_r$ — произвольный базис алгебры $\mathfrak{h}$, а $A_1^*, \dots, A_r^*$ — соответствующие фундаментальные поля. Тогда для любой точки $p \in \mathfrak{G}_U$ значения в p полей

$$(6) \quad X_1, \dots, X_m, A_1^*, \dots, A_r^*$$

будут составлять базис подпространства $\mathcal{D}_p$, откуда непосредственно следует (см. задачу 4 лекции 10), что поле подпространств $p \mapsto \mathcal{D}_p$ гладко, т. е. (см. задачу 21 лекции 14) отвечает некоторому распределению $\mathcal{D}$ на $\mathfrak{G}$ (со слоями $\mathcal{D}_p$).

Кроме того, мы видим, что соответствующий распределению $\mathcal{D}$ подмодуль $\mathfrak{a}[\mathcal{D}]$ алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathfrak{G}$ (состоящий из таких векторных полей W на $\mathfrak{G}$, что $W_p \in \mathcal{D}_p$ для любой точки $p \in \mathfrak{G}$) локально порождается полями (6), т. е. для любого поля $W \in \mathfrak{a}[\mathcal{D}]$ его ограничение $W|_U$ на U является линейной комбинацией полей (6) (с коэффициентами

из алгебры FU). Поэтому этот подмодуль тогда и только тогда является подалгеброй (распределение $\mathcal{D}$ инволютивно), когда коммутатор любых двух полей (6) линейно выражается через поля (6).

С другой стороны, мы знаем (см. формулу (22) лекции 16 и предложение 2 лекции 17), что

$$[A_i^*, A_j^*] = [A_i, A_j]^*$$

и $[A_i^*, X_k] = 0$ для любых i, j и k . Поэтому поля $[A_i^*, A_j^*]$ и $[A_i^*, X_k]$ линейно выражаются через поля (6). Что же касается полей $[X_k, X_l]$, $k, l = 1, \dots, m$, то по определению формы θ (см. формулу (3) лекции 17), если $A_{kl} = \theta([X_k, X_l])$, то $A_{kl}^* = [X_k, X_l]^*$ и, значит, $[X_k, X_l] = A_{kl}^*$, так как согласно утверждению задачи 7 лекции 17 $[X_k, X_l] = [X_k, X_l]^*$, потому что $\left[\frac{\partial}{\partial X^k}, \frac{\partial}{\partial X^l}\right] = 0$. Но так как для произвольных горизонтальных полей X и Y

$$(d\theta)(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) = \theta([X, Y])$$

и, значит, $\theta([X, Y]) = -\Omega(X, Y)$, то элемент A_{kl} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ принадлежит подалгебре $\mathfrak{h}$ и, значит, поле $[X_k, X_l] = A_{kl}^*$ также выражается через поля (6).

Таким образом, мы видим, что *распределение $\mathcal{D}$ инволютивно* и, значит, согласно теореме Фробениуса (см. лекцию 14) вполне интегрируемо. Пусть $\mathcal{X}$ — максимальное интегральное подмногообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через точку $p_0 \in \mathcal{G}$. Так как все горизонтальные поля принадлежат подалгебре $\mathfrak{a}[\mathcal{D}]$, то каждый горизонтальный путь, начинающийся в p_0 , лежит в $\mathcal{X}$, а так как любую точку $p \in \mathcal{G}$ можно соединить с точкой p_0 горизонтальным путем (ибо, по условию, $\Phi = \mathcal{G}$), то, следовательно, $\mathcal{X} = \mathcal{G}$.

Поэтому, в частности,

$$m + r = \dim \mathcal{D}_{p_0} = \dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{G} = m + n$$

и, значит, $r = n$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. $\square$

Теорема 1 известна как теорема Амброза — Сингера, хотя Амброз и Сингер (в другой транскрипции — Зингер) доказали ее лишь в некотором ослабленном

варианте (а полное доказательство впервые было получено Одзэки).

Предложение 1, с которого мы начали настоящую лекцию, является тривиальным следствием этой теоремы, примененной к расслоению реперов ξ векторного расслоения ξ и к связности H на ξ , индуцированной данной связностью H на ξ . Действительно, согласно формуле (3) форма кривизны Ω связности H имеет в каждой карте $\mathcal{E}_U$ вид $C^{-1}\Omega C$, где Ω — перенесенная в $\mathcal{E}_U$ форма кривизны связности H на U . По определению это означает, что для любой точки $p \in \mathcal{E}_U$ с координатами (C, x) , $C \in GL(n; \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, и любых векторов $A, B \in T_p \mathcal{E}$ имеет место равенство

$$\Omega_p(A, B) = C^{-1}\Omega_b(A', B')C,$$

где $b = \pi(p)$, а A' и B' — образы векторов A и B при отображении

$$(d\pi)_p: T_p \mathcal{E} \rightarrow T_p \mathcal{B}.$$

С другой стороны, в лекции 19 мы уже отмечали, что для любых векторов $A', B' \in T_b \mathcal{B}$ матрица $\Omega_b(A', B')$ является не чем иным, как матрицей $\|R(A', B')\|$ линейного оператора $R(A', B'): \mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b$ в базисе $s(b)$ линейала $\mathcal{F}_b$. Поэтому матрица $\Omega_p(A, B)$ будет матрицей того же оператора $R(A', B')$, но в базисе, связанном с базисом $s(b)$ матрицей перехода C . Поскольку, по определению (см. лекцию 16), последним базисом является в точности базис p , этим доказано, что

$$\Omega_p(A, B) = R_p(A', B'),$$

где $R_p(A', B')$ — матрица оператора $R(A', B')$ в базисе p . Поэтому теорема 1 для связности H в точности равносильна переформулированному выше на матричный язык предложению 1. $\square$

Заметим, что, несмотря на то, что предложение 4, необходимое для теоремы 1, мы докажем только в следующей лекции, доказательство предложения 1 тем не менее является уже сейчас абсолютно полным, поскольку справедливость предложения 4 для расслоения реперов, как мы выше уже отмечали, очевидна.

Лемма о касательном пространстве прямого произведения и ее следствия. — Об одном дифференциальном уравнении. — Существование горизонтальных накрытий для главных расслоений. — Альтернативное определение формы кривизны. — Тожество Бианки для формы кривизны главного расслоения. — Структурное уравнение Картана. — Эквивариантные горизонтальные формы. — Мнимые кватернионы. — Формы $F_{\lambda, \delta}$.

Доказательству предложения 4 лекции 20 мы должны предпослать ряд замечаний общего характера, которые, собственно говоря, можно и нужно было бы сделать еще в предыдущем семестре.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — гладкие многообразия и $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ — их прямое произведение. Тогда для любой точки $(p_0, q_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ формулы

$$i_{q_0}(p) = (p, q_0), \quad j_{p_0}(q) = (p_0, q), \quad p \in \mathcal{X}, \quad q \in \mathcal{Y},$$

определяют гладкие отображения

$$(1) \quad i_{q_0}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad j_{p_0}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

связанные с проекциями

$$\pi_1: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \pi_2: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

соотношениями

$$\pi_1 \circ i_{q_0} = \text{id}, \quad \pi_2 \circ j_{p_0} = \text{id}.$$

Эти отображения инъективны, монотоморфны и являются погружениями. Их образы

$$i_{q_0}\mathcal{X} = \{(p, q_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; p \in \mathcal{X}\}, \\ j_{p_0}\mathcal{Y} = \{(p_0, q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; q \in \mathcal{Y}\}$$

представляют собой вложенные подмногообразия многообразия $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, диффеоморфные соответственно многообразиям $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Дифференциалы

$$(2) \quad (di_{q_0})_{p_0}: T_{p_0}\mathcal{X} \rightarrow T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \\ (dj_{p_0})_{q_0}: T_{q_0}\mathcal{Y} \rightarrow T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$

отображений (1) являются мономорфизмами, и мы будем считать, что линейалы $T_{p_0}\mathcal{X}$ и $T_{q_0}\mathcal{Y}$ вложены в линейал $T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ посредством этих мономорфизмов.

Лемма 1. *Линеал $T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ является прямой суммой линеалов $T_{p_0}\mathcal{X}$ и $T_{q_0}\mathcal{Y}$:*

$$T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = T_{p_0}\mathcal{X} \oplus T_{q_0}\mathcal{Y}.$$

Доказательство. По определению (см. лекцию III.15), если $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, k) = (V, y^1, \dots, y^m)$ — карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, центрированные в точках p_0 и q_0 соответственно, то пара $(U \times V, h \times k)$ будет картой многообразия $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, центрированной в точке (p_0, q_0) . Локальными координатами последней карты будут функции $x^1 \circ \pi_1, \dots, x^n \circ \pi_1, y^1 \circ \pi_2, \dots, y^m \circ \pi_2$, которые для упрощения формул обозначаются просто через $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m$. Отображение i_{q_0} в этих координатах задается формулами

$$(3) \quad \begin{aligned} x^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ y^j &= 0, & j &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

а отображение j_{p_0} — формулами

$$(4) \quad \begin{aligned} x^i &= 0, & i &= 1, \dots, n, \\ y^j &= y^j, & j &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Карте (U, h) отвечает в пространстве $T_{p_0}\mathcal{X}$ базис, состоящий из векторов $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}$, $1 \leq i \leq n$, карте (V, k) отвечает в пространстве $T_{q_0}\mathcal{Y}$ базис, состоящий из векторов $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{q_0}$, $1 \leq j \leq m$, а карте $(U \times V, h \times k)$ отвечает в пространстве $T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ базис, состоящий из векторов $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1 \leq i \leq n$, и $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1 \leq j \leq m$. При этом, как немедленно следует из формул (3) и (4) (см. в лекции III.12 определение дифференциала гладкого отображения), дифференциалы (2) отображений (1) действуют по формулам

$$\begin{aligned} (di_{q_0})_{p_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{p_0} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p_0, q_0)}, & i &= 1, \dots, n, \\ (dj_{p_0})_{q_0} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{q_0} &= \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{(p_0, q_0)}, & j &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Это, очевидно, доказывает лемму 1. $\square$

Для любых векторов $A \in T_{p_0}\mathcal{X}$, $B \in T_{q_0}\mathcal{Y}$ мы будем вектор

$$(di_{q_0})_{p_0} A + (dj_{p_0})_{q_0} B$$

обозначать символом (A, B) .

Пусть $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ — гладкое отображение многообразия $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ в некоторое многообразие $\mathcal{Z}$ и пусть

$$df_{(p_0, q_0)}: T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow T_{r_0} \mathcal{Z}, \quad r_0 = f(p_0, q_0),$$

— его дифференциал в точке (p_0, q_0) . Пусть, далее, отображения

$$R_{q_0}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}, \quad L_{p_0}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$$

определены формулами

$$R_{q_0} p = f(p, q_0), \quad L_{p_0} q = f(p_0, q).$$

(Если отображение f рассматривать как умножение, то R_{q_0} — это умножение справа на q_0 , а L_{p_0} — умножение слева на p_0 .)

Следствие 1. Для любого вектора $C \in T_{(p_0, q_0)}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ имеет место равенство

$$(5) \quad (df)_{(p_0, q_0)} C = (dR_{q_0})_{p_0} A + (dL_{p_0})_{q_0} B,$$

где $A \in T_{p_0} \mathcal{X}$ и $B \in T_{q_0} \mathcal{Y}$ — такие векторы, что $C = (A, B)$.

Доказательство. В развернутом виде равенство $C = (A, B)$ означает, что

$$C = (di_{q_0})_{p_0} A + (dj_{p_0})_{q_0} B.$$

Поэтому

$$df_{(p_0, q_0)} C = d(f \circ i_{q_0})_{p_0} A + d(f \circ j_{p_0})_{q_0} B.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$R_{q_0} = f \circ i_{q_0} \quad \text{и} \quad L_{p_0} = f \circ j_{p_0}. \quad \square$$

Пусть $\mathcal{S}$ — еще одно гладкое многообразие.

Задача 1. Докажите, что

а) для любых гладких отображений $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ и $v: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Y}$ отображение

$$u \times v: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

определенное формулой

$$(u \times v)(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in \mathcal{S},$$

гладко;

б) каждое гладкое отображение $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ единственным образом представляется в виде $u \times v$;

в) в каждой точке $t \in \mathcal{S}$ для любого вектора $D \in T_t \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$(6) \quad d(u \times v)_t D = (du)_t D + (dv)_t D.$$

Пусть $\omega: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ — отображение

$$f \circ (u \times v): \mathcal{S} \xrightarrow{u \times v} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{Z}.$$

Следствие 2. Для любого вектора $D \in T_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$(7) \quad (d\omega)_t D = d(R_{v(t)} \circ u)_t D + d(L_{u(t)} \circ v)_t D. \quad \square$$

В частном случае, когда $\mathcal{S}$ является отрезком I оси $\mathbb{R}$ и, значит, u , v и ω — кривыми $I \rightarrow \mathcal{X}$, $I \rightarrow \mathcal{Y}$ и $I \rightarrow \mathcal{Z}$, а D представляет собой вектор $\left(\frac{d}{dt}\right)_t$, формула (7) приобретает вид

$$(8) \quad \dot{\omega}(t) = (dR_{v(t)})_{u(t)} \dot{u}(t) + (dL_{u(t)})_{v(t)} \dot{v}(t).$$

(Действительно, по определению $\dot{\omega}(t) = (d\omega)_t \left(\frac{d}{dt}\right)_t$, и аналогично для кривых u и v .)

Нам понадобится также следующая лемма:

Лемма 2. Пусть $A: t \mapsto A(t)$, $t \in I$, — гладкий путь в алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_e \mathcal{S}$. Тогда в группе Ли $\mathcal{S}$ существует единственный гладкий путь $a: t \mapsto a(t)$, $t \in I$, начинающийся в точке e , для которого

$$(9) \quad \dot{a}(t) = (dR_{a(t)})_e A(t)$$

при любом $t \in I$.

Доказательство. По определению путь A является ограничением некоторой гладкой кривой $I \rightarrow \mathcal{S}$, определенной на открытом интервале $I \supset I$. Без ограничения общности можно считать, что $I = \mathbb{R}$. Имея это в виду, рассмотрим гладкое многообразие $\mathcal{X} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$. Так как

$$T_{(a,s)} \mathcal{X} = T_a \mathcal{S} \oplus T_s \mathbb{R}$$

для любой точки $(a, s) \in \mathcal{X}$, то формула

$$X_{(a,s)} = (dR_a)_e A(s) + \left(\frac{d}{dt}\right)_s$$

корректно определяет на $\mathcal{X}$ некоторое векторное поле X . Ясно, что интегральная кривая этого поля, проходящая при $t = 0$ через точку $(e, 0)$, имеет вид $t \mapsto (a(t), t)$, где $t \mapsto a(t)$ — кривая в $\mathcal{S}$, удовлетворяющая соотношению (9)

и такая, что $a(0) = e$. Поэтому для доказательства леммы 2 нужно только показать, что кривая $t \mapsto (a(t), t)$ определена для всех $t \in I$.

Пусть $\{\varphi_t\}$ — максимальный поток на многообразии $\mathcal{X}$, индуцированный векторным полем X (см. лекцию III.13). Тогда на I существует такая непрерывная положительная функция $\delta(s)$, что для любой точки вида (e, s) , $s \in \mathbb{R}$, точка $\varphi_t(e, s)$ заведомо определена для всех t с $|t| < \delta(s)$ (причем $\varphi_0(e, s) = (e, s)$). В силу компактности отрезка I отсюда следует, что существует такое число $\delta_0 > 0$, что при $|t| < \delta_0$ точка $\varphi_t(e, s)$ определена для любого $s \in I$.

Пусть T_0 — верхняя грань таких чисел T , что при $0 \leq t < T$ точка $\varphi_t(e, 0) = (a(t), t)$ определена. Лемма 2 будет доказана, если мы покажем, что $T_0 \geq 1$.

Пусть $T_0 < 1$. Согласно определению верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $t_0 \in I$, что $t_0 < T_0 < t_0 + \varepsilon$ и точка $\varphi_{t_0}(e, 0)$ определена. Рассмотрим точку $\varphi_t(e, t_0)$. Так как $t_0 \in I$, то точка $\varphi_t(e, t_0)$ определена при $|t| < \delta_0$ и имеет вид $(b(t), t + t_0)$, где $b(t) = (dR_{b(t)})_e A(t + t_0)$ и $b(0) = e$. Поэтому кривая $t \mapsto (b(t - t_0), a(t_0) + t)$ определена при $t_0 - \delta_0 < t < t_0 + \delta_0$, является интегральной кривой поля X и начинается в точке $(a(t_0), t_0) = \varphi_{t_0}(e, 0)$. Следовательно, эта кривая является ограничением на $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ интегральной кривой $t \mapsto \varphi_t(e, 0)$ (здесь мы пользуемся максимальной кривой $t \mapsto \varphi_t(e, 0)$). Значит, точка $\varphi_t(e, 0)$ определена при $0 \leq t < t_0 + \delta_0$, что при $\varepsilon < \delta_0$ противоречит выбору T_0 . Поэтому неравенство $T_0 < 1$ невозможно. $\square$

Теперь у нас уже все готово для доказательства предложения 4 лекции 20.

Доказательство предложения 4 лекции 20. Пусть $\omega: I \rightarrow \mathcal{G}$ — произвольное поднятие пути u в пространство $\mathcal{G}$, начинающееся в точке p_0 . (Так как расслоение ξ локально тривиально, а отрезок I компактен, то хотя бы одно поднятие ω существует.) Тогда любое другое поднятие v пути u , начинающееся в точке p_0 , будет иметь вид $t \mapsto \omega(t) a(t)$, где $a: t \mapsto a(t)$ — некоторый путь в группе Ли $\mathcal{G}$, начинающийся в единице e . Нам нужно показать, что путь a можно выбрать так, чтобы путь v был горизонтален.

Согласно формуле (8) (в которой u, v, ω и $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ заменены соответственно на ω, a, v и $\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}$, а за f принято действие $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$) для касательного вектора $v(t)$

пути v имеет место равенство

$$\dot{v}(t) = (dR_{a(t)})_{w(t)} \dot{w}(t) + (dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t).$$

Последнее слагаемое справа допускает следующее преобразование:

$$\begin{aligned} (dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t) &= \\ &= [(dL_{w(t)})_{a(t)} \circ (dL_{a(t)})_e] ((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)) = \\ &= (dL_{w(t)})_e ((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)) = \\ &= ((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t))^*_{w(t)} \end{aligned}$$

(см. формулу (19) лекции 16), где во второй строчке $L_{a(t)}$ рассматривается как левый сдвиг в группе $\mathcal{G}$ и, значит, вектор $(dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)$ — как вектор из $T_e \mathcal{G} = \mathfrak{g}$. Поэтому для любой $\mathfrak{g}$ -значной фундаментальной формы θ на $\mathcal{G}$

$$\theta_{w(t)}((dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t)) = (dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t).$$

С другой стороны, если форма θ эквивариантна, то

$$\begin{aligned} \theta_{w(t)}((dR_{a(t)})_{w(t)} \dot{w}(t)) &= (\text{Ad } a(t)^{-1}) \theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) = \\ &= (dL_{a(t)})_e^{-1} [(dR_{a(t)})_e \theta_{w(t)}(\dot{w}(t))]. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство $\theta_{w(t)}(\dot{v}(t)) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$(dR_{a(t)})_e \theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) + \dot{a}(t) = 0.$$

При $H = \text{Ann } \theta$ этим доказано, что *путь $v: t \mapsto w(t)a(t)$ тогда и только тогда горизонтален, когда*

$$(10) \quad \dot{a}(t) = -(dR_{a(t)})_e \theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) \quad \text{для любого } t \in I.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что соотношение (10) имеет вид (9) (при $A(t) = -\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))$) и воспользоваться леммой 2. $\square$

Форму кривизны Ω связности H на главном расслоении ξ мы в лекции 20 ввели так, чтобы возможно проще вывести из теоремы Амброза—Сигнера предложение 1 лекции 20. Сейчас мы дадим этой форме другое определение, во многих отношениях более удобное.

Связность H мы при этом будем интерпретировать как проектор $H: \mathfrak{a}\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{a}\mathcal{G}$ (см. лекцию 17).

Предложение 1. Имеет место формула

$$(11) \quad \Omega = d\theta \circ (H \times H).$$

Доказательство. Формула (11) означает, что

$$\Omega(X, Y) = d\theta(X^H, Y^H)$$

для любых векторных полей X, Y на $\mathcal{E}$, т. е., другими словами, что

$$(12) \quad \Omega_p(A, B) = (d\theta)_p(A^H, B^H)$$

для любой точки $p \in \mathcal{E}$ и любых векторов $A, B \in T_p \mathcal{E}$. В этом виде мы и будем ее доказывать.

Поскольку обе стороны формулы (12) линейны по A и B , нам достаточно доказать эту формулу лишь в предположении, что каждый из векторов A и B либо горизонтален, либо вертикален.

Случай 1. Векторы A и B горизонтальны (т. е. $\theta_p(A) = 0$ и $\theta_p(B) = 0$). Тогда $[\theta, \theta]_p(A, B) = 0$ и, значит, $\Omega_p(A, B) = (d\theta)_p(A, B)$. Поскольку $A^H = A$ и $B^H = B$, это доказывает (12).

Случай 2. Векторы A и B вертикальны (т. е. $A^H = 0$ и $B^H = 0$). В этом случае правая часть формулы (12) равна нулю, а левая равна значению в точке p g -значной функции

$$(13) \quad \Omega(X, Y) = d\theta(X, Y) + \frac{1}{2}[\theta, \theta](X, Y),$$

где X и Y — такие векторные поля на $\mathcal{E}$, что $X_p = A$ и $Y_p = B$. При этом, как мы знаем (см. задачу 13 лекции 16), поля X и Y можно выбрать среди фундаментальных векторных полей, т. е. можно считать, что $X = C^*$ и $Y = D^*$, где C и D — некоторые (однозначно определенные) элементы алгебры Ли g . Так как $\theta(C^*) = C = \text{const}$ и $\theta(D^*) = D = \text{const}$, то (см. формулы (22) и (34) лекции 16) при $X = C^*$ и $Y = D^*$

$$\begin{aligned} (d\theta)(X, Y) &= X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta[X, Y] = -\theta[X, Y] = \\ &= -\theta[C^*, D^*] = -\theta[C, D]^* = -[C, D]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [\theta, \theta](X, Y) &= [\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)] = \\ &= 2[\theta(X), \theta(Y)] = 2[C, D]. \end{aligned}$$

Поэтому функция (13) тождественно равна нулю. Значит, равно нулю и ее значение в точке p .

Случай 3. Один из векторов A, B вертикален, а другой горизонтален. Пусть для определенности вектор A вертикален, а вектор B горизонтален. Тогда $A^H = 0$ и правая часть формулы (12) равна нулю. Кроме того, так как $\theta(B) = 0$, то левая часть равна $(d\theta)_p(A, B)$ и, значит, равна значению в точке p функции

$$(14) \quad d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]),$$

где X — такое поле вида C^* , $C \in \mathfrak{g}$, что $C_p^* = A$, а Y — горизонтальное поле, для которого $Y_p = B$. Но согласно предложению 2 лекции 17 поле $[X, Y] = [C^*, Y]$ в этом случае горизонтально, и потому $\theta([X, Y]) = 0$. Так как, кроме того, $\theta(Y) = 0$ и $\theta(X) = C = \text{const}$, то, следовательно, функция (14) тождественно равна нулю. Поэтому равно нулю и ее значение в точке p .

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

Следствие. Форма Ω горизонтальна. $\square$

Для произвольной (вообще говоря, $\mathcal{V}$ -значной) дифференциальной формы ω степени r на многообразии $\mathcal{E}$ форма

$$D\omega = d\omega \circ \underbrace{(H \times \dots \times H)}_{r+1 \text{ раз}},$$

т. е. форма

$$(D\omega)(X_0, X_1, \dots, X_r) = (d\omega)(X_0^H, X_1^H, \dots, X_r^H), \\ X_0, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g},$$

называется *внешним ковариантным дифференциалом* формы ω .

Заметим, что для любой формы ω форма $D\omega$ горизонтальна.

Предложение 1 означает теперь, что форма кривизны Ω является *внешним ковариантным дифференциалом формы связности*:

$$(15) \quad \Omega = D\theta.$$

Предложение 2 (тождество Бианки). Внешний ковариантный дифференциал формы кривизны равен нулю:

$$(16) \quad D\Omega = 0.$$

Доказательство. Так как $d \circ d = 0$, то $D \circ d = 0$ и, значит,

$$D\Omega = \frac{1}{2} D[\theta, \theta] = \frac{1}{2} d[\theta, \theta] \circ (H \times H \times H).$$

С другой стороны, согласно общей формуле (35) лекции 16 для любой $\mathfrak{g}$ -значной формы ω степени 2 и любых векторных полей X, Y, Z имеет место равенство

$$d\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) - \\ - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y).$$

Поэтому, если форма ω на $\mathcal{G}$ вертикальна (равна нулю, когда хотя бы один из ее аргументов является горизонтальным полем), то

$$d\omega \circ (H \times H \times H) = 0.$$

Следовательно, нам нужно лишь доказать, что форма $[\theta, \theta]$ вертикальна. Но это немедленно вытекает из определения: так как

$$[\theta, \theta](X, Y) = [\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)],$$

то $[\theta, \theta](X, Y) = 0$, если, скажем, поле X горизонтально (и, значит, $\theta(X) = 0$). $\square$

Заметим, что, вообще говоря, $D \circ D \neq 0$.

Задача 2. Покажите, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ , тождество (16) равносильно тождеству Бианки из предложения 1 лекции 19 (см. формулу (39) лекции 19).

Дифференциальная $\mathfrak{g}$ -значная форма ω степени r на многообразии $\mathcal{G}$ называется *эквивариантной*, если

$$R_a^* \omega = (\text{Ad } a^{-1}) \omega$$

для любого элемента $a \in \mathcal{G}$, т. е. если в каждой точке $p \in \mathcal{G}$ для любых векторов $A_1, \dots, A_r \in T_p \mathcal{G}$ имеет место равенство

$$\omega_{pa}((dR_a)_p A_1, \dots, (dR_a)_p A_r) = (\text{Ad } a^{-1}) \omega_p(A_1, \dots, A_r).$$

Задача 3. Докажите, что форма кривизны Ω эквивариантна. [Указание. Пользуясь тем, что $R_a \circ H = H \circ R_a$ на векторных полях и $R_a^* d = d \circ R_a^*$ на дифференциальных формах, докажите, что если форма ω эквивариантна, то формы $\omega \circ (H \times \dots \times H)$ и $d\omega$ (а значит, и форма $D\omega$) эквивариантны.]

Задача 4. Докажите, что

$$(17) \quad D\omega = d\omega + [\omega, \theta]$$

для любой эквивариантной горизонтальной формы ω на $\mathcal{G}$. [Указание. Рассмотрите сначала случай $r = 2$.]

Формула (17) называется *структурным уравнением Картана*. При $\omega = \theta$ она переходит в формулу (5)

лекции 20, которая поэтому также называется структурным уравнением.

Так как Ad является представлением структурной группы $\mathcal{G}$ в линейном пространстве $\mathfrak{g}$, то определено (см. лекцию 17) ассоциированное векторное расслоение $\xi[\text{Ad}]$, и, значит (см. лекцию 16), можно говорить о $\xi[\text{Ad}]$ -значных дифференциальных формах на $\mathcal{B}$ степени $r \geq 0$.

По определению каждая такая форма ω любой точке $b \in \mathcal{B}$ и любым векторам $A_1, \dots, A_r \in T_b \mathcal{B}$ ставит в соответствие элемент $\omega_b(A_1, \dots, A_r)$ слоя $\mathcal{F}_b(\xi[\text{Ad}])$ расслоения $\xi[\text{Ad}]$. С другой стороны (см. лекцию 1), точки этого слоя являются орбитами $[p, A]$, $p \in \mathcal{F}$, $A \in \mathfrak{g}$, действия группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$, определенного формулой

$$(p, A)a = (pa, (\text{Ad } a^{-1})A), \quad a \in \mathcal{G},$$

и для любой точки $p \in \mathcal{F}$ формула $j_p(A) = [p, A]$, $A \in \mathfrak{g}$, определяет изоморфизм линейного пространства $\mathfrak{g}$ на слой $\mathcal{F}_p(\xi[\text{Ad}])$. Поэтому формула

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_p(A_1, \dots, A_r) &= j_p^{-1}(\omega_b((d\pi)_p A_1, \dots, (d\pi)_p A_r)), \\ A_1, \dots, A_r &\in T_p \mathcal{G}, \end{aligned}$$

корректно определяет на $\mathcal{G}$ некоторую $\mathfrak{g}$ -значную дифференциальную форму $\hat{\omega}$.

Задача 5. Покажите, что

- форма $\hat{\omega}$ гладка, горизонтальна и эквивариантна;
- формула $\omega \mapsto \hat{\omega}$ устанавливает изоморфизм между $F\mathcal{B}$ -модулем $\Gamma(\text{Hom}(\Lambda^r T_{\mathcal{B}} \otimes \xi[\text{Ad}]))$ всех $\xi[\text{Ad}]$ -значных дифференциальных форм степени r на $\mathcal{B}$ и $F\mathcal{B}$ -модулем горизонтальных эквивариантных форм степени r на пространстве $\mathcal{G}$.

Это означает, что горизонтальные эквивариантные формы на $\mathcal{G}$ естественным образом отождествляются с $\xi[\text{Ad}]$ -значными формами на $\mathcal{B}$.

В частности, мы видим, что связности на главном расслоении $\xi(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ (или, точнее, их формы связности) — это в точности $\xi[\text{Ad}]$ -значные линейные формы на $\mathcal{B}$.

Еще одно определение связности!

Форма же кривизны Ω каждой такой связности — это $\xi[\text{Ad}]$ -значная форма степени 2 на $\mathcal{B}$.

Задача 6. Покажите, что в случае, когда ξ является расслоением реперов векторного расслоения ξ , расслоение $\xi[\text{Ad}]$ естественно изоморфно расслоению $\text{End } \xi$. [Указание. Каждая точка простран-

ства $\mathcal{G}(\xi[\text{Ad}]) = \mathcal{G} \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ имеет вид $[p, A]$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — репер в некотором слое $\mathcal{F}_b$ расслоения ξ , а A — элемент алгебры $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, причем $[p, A] = [p', A']$ тогда и только тогда, когда существует такая матрица $C \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$, что $p' = pC$ и $A' = C^{-1}AC$. Поэтому линейный оператор $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_b$, имеющий в базисе p матрицу A , зависит только от точки $[p, A]$.

Задача 7. Докажите, что указанный в задаче 6 изоморфизм переводит форму кривизны связности H на расслоении ξ в форму кривизны соответствующей связности H на расслоении ξ .

Таким образом, для связностей на расслоении реперов мы, как и следовало ожидать, не получаем ничего нового.

Мы заключим эту лекцию, построив некоторые специальные $SU(2)$ -связности на пространстве $\mathbb{R}^4$. Роль и значение этих связностей будут выяснены в следующей лекции.

Напомним (см. задачу 5 лекции 7), что кватернионы $\xi = a + bj$ естественным образом отождествляются с матрицами вида

$$(18) \quad A_\xi = \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{vmatrix}.$$

Поскольку унимодулярные унитарные матрицы второго порядка (элементы групп $SU(2)$) — это в точности матрицы вида (18) с $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, мы, в частности, видим, что это отождествление индуцирует отождествление группы $SU(2)$ с группой S^3 кватернионов с нормой 1 (единичной сферой евклидова пространства $\mathbb{H}$):

$$SU(2) = S^3.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{S}^3$ группы S^3 (касательное пространство к сфере S^3 в точке 1) естественным образом отождествляется при этом с ортогональным дополнением в $\mathbb{H}$ элемента 1, т. е. с линейным $\mathbb{H}'$ мнимых кватернионов. Соответствующие матрицы A_ξ имеют вид

$$\begin{vmatrix} ia & b \\ -\bar{b} & -ia \end{vmatrix}, \quad a \text{ вещественно,}$$

т. е. являются косоэрмитовыми бесследными матрицами. Поскольку последние матрицы составляют алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$ группы Ли $SU(2)$ (см. лекцию III.11), мы видим, таким образом, что при $\xi \in \mathbb{H}'$ соответствие $\xi \mapsto A_\xi$ является изоморфизмом линейного $\mathbb{H}'$ на алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$.

Это позволяет все $\mathfrak{su}(2)$ -значные дифференциальные формы (например, формы связности на главных $SU(2)$ -расслоениях) считать формами, принимающими значения в $\mathbb{H}'$.

[Контрольный вопрос. Изоморфизм $H' \approx \mathfrak{su}(2)$ позволяет перенести операцию Ли в линейал H' . Что это за операция?

В частности, $SU(2)$ -связности, заданные на пространстве R^4 , являются не чем иным, как H' -значными линейными дифференциальными формами вида

$$(19) \quad A(x) = A_\alpha(x) dx^\alpha,$$

где $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и α пробегает индексы от 0 до 3. Пространство R^4 удобно при этом отождествлять с линейалом H , т. е. считать в (19) аргумент x кватернионом. (Обратите внимание на смену обозначений для формы связности.)

Рассмотрим, например, форму вида (19), заданную формулой

$$(20) \quad A(x) = \operatorname{Im} \frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2} = \frac{1}{2} \frac{x d\bar{x} - d\bar{x} x}{1 + |x|^2}, \quad x \in H.$$

Здесь мы пользуемся условными, но понятными обозначениями. В развернутом виде форма (20) записывается формулой

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{1 + |x|^2} dx_0 + \frac{-x_0 i - x_2 j + x_3 k}{1 + |x|^2} dx_1 + \\ &+ \frac{x_0 i - x_1 j - x_3 k}{1 + |x|^2} dx_2 + \frac{-x_1 i + x_2 j - x_0 k}{1 + |x|^2} dx_3 = \\ &= \frac{x_1 dx_0 - x_0 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3}{1 + |x|^2} i + \\ &+ \frac{x_2 dx_0 - x_3 dx_1 - x_0 dx_2 + x_1 dx_3}{1 + |x|^2} j + \\ &+ \frac{x_3 dx_0 + x_2 dx_1 - x_1 dx_2 - x_0 dx_3}{1 + |x|^2} k. \end{aligned}$$

Ее можно записать также в виде

$$A(x) = \operatorname{Im} \{f(x) d\bar{x}\}, \quad \text{где } f(x) = \frac{x}{1 + |x|^2}.$$

Форма кривизны связности (20), которую мы обозначим символом F , задается формулой

$$F = dA + A \wedge A =$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Im} \{df(x) \wedge d\bar{x} + f(x) d\bar{x} \wedge f(x) d\bar{x}\} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{(1 + |x|^2) dx - x(d\bar{x}x + x d\bar{x})}{(1 + |x|^2)^2} \wedge d\bar{x} + \frac{x d\bar{x} \wedge x d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2} \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}, \end{aligned}$$

т. е. — поскольку под знаком Im стоит, очевидно, мнимый кватернион — формулой

$$(21) \quad F = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Более общим образом можно рассмотреть форму

$$(22) \quad A_{\lambda, b}(x) = \text{Im} \frac{(x-b) d\bar{x}}{\lambda^2 + |x-b|^2},$$

где $b \in \mathbb{H}$ и λ — произвольное положительное число. Эта форма получается из формы (20) преобразованием

$$x \mapsto \lambda x + b, \quad b \in \mathbb{H},$$

являющимся композицией гомотетии $x \mapsto \lambda x$ и трансляции $x \mapsto x + b$.

Задача 8. Покажите, что форма кривизны связности (22) выражается формулой

$$(23) \quad F_{\lambda, b} = \frac{\lambda^2 dx \wedge d\bar{x}}{\lambda^2 + |x-b|^2}.$$

Оказывается, что среди всех форм вида (19) формы (22) выделяются двумя важными свойствами. Первое из этих свойств относится к поведению формы (22) при $|x| \rightarrow \infty$.

Мы будем говорить, что функция (форма и т. п.) *определена вблизи* ∞ , если существует такое $R_0 > 0$, что эта функция (форма) определена при $|x| > R_0$.

Напомним, что две числовые функции f и g , определенные вблизи ∞ , называются *асимптотически равными* при $|x| \rightarrow \infty$ (в записи $f \sim g$ при $|x| \rightarrow \infty$), если

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Для функций f и g , принимающих значения в $\mathbb{H}'$ (или в любом другом линейном пространстве $\mathcal{V}$), формула $f \sim g$ при $|x| \rightarrow \infty$ по определению означает, что при $|x| \rightarrow \infty$ асимптотически равны все их координаты (т. е. — в более инвариантных терминах — что $l \circ f \sim l \circ g$ для любого линейного функционала $l: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$). Аналогично, для двух дифференциальных форм $A = A_\alpha dx^\alpha$ и $B = B_\alpha dx^\alpha$, определенных вблизи ∞ , формула $A \sim B$ при $|x| \rightarrow \infty$ по определению означает, что $A_\alpha \sim B_\alpha$ для всех $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Пусть гладкое отображение $g: \mathbb{H} \rightarrow S^3$ определено при $|x| > R_0$. Тогда для любого $R > R_0$ композиция гомотетии $x \mapsto Rx$ и ограничения функции g на сфере $|x| = R$ будет

гладким отображением $S^3 \rightarrow S^3$, и потому будет определена степень этого отображения. (См. лекцию III.26.) Эту степень, взятую с обратным знаком, мы обозначим через k (ср. ниже стр. 383).

Задача 9. Покажите, что число k не зависит от выбора числа R .

Теперь мы уже можем сформулировать первое свойство формы (22).

Свойство 1. Существует такое гладкое отображение $g: \mathbb{H} \rightarrow S^3$, определенное вблизи ∞ , что

$$(24) \quad A_{\lambda, b}(x) \sim g^{-1}(x) dg(x) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty$$

для любых λ и b . Число k для этого отображения равно 1.

Доказательство. Ясно, что $A_{\lambda, b} \sim A$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $A = A_{1, 0}$ — форма (20). Поэтому соотношение (24) достаточно доказать лишь для формы A .

Но ясно, что

$$\frac{x}{1+|x|^2} = \bar{x}^{-1} \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \sim \bar{x}^{-1} \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty$$

и

$$d|x| = d\sqrt{x\bar{x}} = \frac{d\bar{x}x + \bar{x}dx}{2|x|},$$

$$d\left(\frac{\bar{x}}{|x|}\right) = \frac{d\bar{x}|x| - d|x|\bar{x}}{|x|^3} = \frac{|x|^2 d\bar{x} - \bar{x}dx}{2|x|^3} = \bar{x} \frac{x d\bar{x} - dx\bar{x}}{2|x|^3}.$$

Следовательно,

$$A(x) \sim \text{Im} \bar{x}^{-1} d\bar{x} = \text{Im} \frac{x d\bar{x}}{|x|^3} =$$

$$= \frac{x d\bar{x} - dx\bar{x}}{2|x|^3} = g^{-1}(x) dg(x) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где $g(x) = \frac{\bar{x}}{|x|}$. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение g переводит сферу S^3 в себя и является на S^3 симметрией $x \mapsto \bar{x}$. $\square$

Перейдем теперь ко второму свойству.

Так как пространство $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ обладает стандартной евклидовой структурой и ориентацией, то (см. теорему 1 лекции II.96) для кососимметрических тензоров на нем определен оператор Ходжа $*$. Поскольку же касательное пространство пространства $\mathbb{R}^4$ в любой его точке естественным образом отождествляется с $\mathbb{R}^4$, этот оператор опре-

делен для кососимметрических тензоров в каждой точке пространства R^4 , т. е. для дифференциальных форм на R^4 . При этом на базисных дифференциальных формах степени 2 этот оператор действует, как легко видеть, по формулам

$$(25) \quad \begin{aligned} *(dx^0 \wedge dx^1) &= dx^2 \wedge dx^3, & *(dx^1 \wedge dx^2) &= dx^0 \wedge dx^3, \\ *(dx^0 \wedge dx^2) &= -dx^1 \wedge dx^3, & *(dx^1 \wedge dx^3) &= -dx^0 \wedge dx^2, \\ *(dx^0 \wedge dx^3) &= dx^1 \wedge dx^2, & *(dx^2 \wedge dx^3) &= dx^0 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

По линейности оператор $*$ распространяется на формы со значениями в произвольном линейном пространстве (и, в частности, на H' -значные формы).

Заметим (см. формулу (17) лекции II.96), что $*^2 = I$.

Дифференциальная форма F степени 2 на пространстве R^4 называется *автодуальной*, если

$$*F = F$$

(и *антиавтодуальной*, если $*F = -F$).

Свойство 2. Каждая форма (23) автодуальна.

Доказательство. Из формул (25) следует, что базис пространства автодуальных форм состоит из форм

$$\begin{aligned} dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3, \\ dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3, \\ dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} dx \wedge d\bar{x} &= \\ &= (dx^0 + dx^1 i + dx^2 j + dx^3 k) \wedge (dx^0 - dx^1 i - dx^2 j - dx^3 k) = \\ &= -2 \{ (dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3) i + \\ &+ (dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3) j + (dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2) k \}, \end{aligned}$$

это доказывает свойство 2. $\square$

Как уже было сказано, роль и значение этих свойств будут объяснены в следующей лекции.

Лекция 22

Уравнения Максвелла электромагнитного поля. — Операторная интерпретация. — Калибровочные поля. — Инстантоны. — Формула для топологического заряда. — Функционал Янга — Миллса. — Инвариантные многочлены на пространстве матриц. — Характеристические классы векторных расслоений.

Кажущиеся произвольными построения конца предыдущей лекции находят себе оправдание в современной теории физических полей.

Из физики известно, что электромагнитное поле описывается двумя векторами электрической и магнитной напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющими в вакууме уравнениям Максвелла

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

В четырехмерном формализме специальной теории относительности эти векторы объединяются в один кососимметрический тензор F , имеющий в координатах $x^0 = ict$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ компоненты

$$\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & iE_x & iE_y & iE_z \\ -iE_x & 0 & H_z & -H_y \\ -iE_y & -H_z & 0 & H_x \\ -iE_z & H_y & -H_x & 0 \end{vmatrix},$$

т. е. в другой системе понятий — в дифференциальную форму

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= c(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + \\ &+ H_z dx \wedge dy - H_y dx \wedge dz + H_x dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Внешний дифференциал этой формы выражается формулой

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
& + \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \\
& + \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \\
& = \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz - \\
& - c \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) dt \wedge dy \wedge dz - \\
& - c \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz - \\
& - c \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy,
\end{aligned}$$

и, значит, первая пара (1) уравнений Максвелла равносильна тождественному обращению в нуль этого дифференциала:

$$(3) \quad dF = 0,$$

т. е. замкнутости формы F .

При формальных преобразованиях удобно считать все переменные x^α , $0 \leq \alpha \leq 4$ (в том числе и переменную x^0 !), вещественными, т. е. рассматривать форму F на пространстве R^4 (это равносильно введению в рассмотрение мнимого времени it ; физики называют переход от t к it *викоуским поворотом*). Тогда к форме F можно будет применить оператор Ходжа $*$, получив тем самым форму

$$\begin{aligned}
*F &= F_{01} dx^2 \wedge dx^3 - F_{02} dx^1 \wedge dx^3 + F_{03} dx^1 \wedge dx^2 + \\
&+ F_{12} dx^0 \wedge dx^3 - F_{13} dx^0 \wedge dx^2 + F_{23} dx^0 \wedge dx^1 = \\
&= -ic(H_x dx + H_y dy + H_z dz) \wedge dt + \\
&+ i(E_x dy \wedge dz - E_y dx \wedge dz + E_z dx \wedge dy)
\end{aligned}$$

(см. формулы (25) лекции 21). Так как

$$\begin{aligned}
d*F &= \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
&+ \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
&+ \left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^2} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \\
& = i \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\
& + ic \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) dt \wedge dy \wedge dz + \\
& + ic \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) dt \wedge dx \wedge dz + \\
& + ic \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) dt \wedge dx \wedge dy,
\end{aligned}$$

то, следовательно, вторая пара (2) уравнений Максвелла равносильна уравнению

$$(4) \quad d * F = 0.$$

[В присутствии зарядов уравнение (3) сохраняется, а уравнение (4) приобретает вид $d * F = * 4\pi i \varphi$, где $\varphi = \rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$ (здесь ρ — плотность заряда, а j_x, j_y, j_z — компоненты вектора плотности тока).]

Согласно лемме Пуанкаре (см. лекцию III.20) из (3) следует, что на пространстве R^4 существует потенциал, т. е. такая линейная форма

$$(5) \quad A = A_\alpha(x) dx^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

что

$$(6) \quad F = dA.$$

Для коэффициентов это означает выполнение равенств

$$(7) \quad F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Потенциал A должен удовлетворять уравнению второго порядка

$$(8) \quad d * dA = 0,$$

получающегося подстановкой $F = dA$ в уравнение (4). Он определен с точностью до преобразований вида

$$(9) \quad A \mapsto A + df,$$

где f — произвольная функция. Преобразования (9) называются калибровочными преобразованиями.

В трехмерном формализме 4-вектор A распадается на скалярный потенциал φ и векторный потенциал A . Пользуясь преобразованиями (9), можно всегда обратить потенциал φ и дивергенцию $\operatorname{div} A$

потенциала A в нуль (это — так называемая *лоренцева калибровка* потенциала). В лоренцевой калибровке уравнение (8) превращается, в волновое уравнение д'Аламбера

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A,$$

а равенство (6) приобретает вид

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \text{rot } A.$$

Отсюда следует, что поля E и H удовлетворяют тому же уравнению д'Аламбера. Физически это означает, что электромагнитное поле в пустоте имеет вид электромагнитных волн.

Каждая гладкая функция f определяет на линейном пространстве F всех гладких функций на R^4 линейный оператор

$$(10) \quad T_f: \psi \mapsto f\psi, \quad \psi \in F.$$

умножения на f . Этот оператор тогда и только тогда обратим, когда функция f нигде не обращается в нуль.

Наряду с операторами (10) мы будем рассматривать на F также операторы частного дифференцирования

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

по координатам и их суммы $\partial_\alpha + T_f$ с оператором (10). Впрочем, удобно вместо T_f писать f и, следовательно, вместо $\partial_\alpha + T_f$ писать $\partial_\alpha + f$.

Имея это в виду, мы каждому потенциалу (5) поставим в соответствие операторный 4-вектор ∇ с компонентами

$$(11) \quad \nabla_\alpha = \partial_\alpha + A_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Для любых двух операторов $\nabla_\alpha, \nabla_\beta$ вида (11) их коммутатор $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ выражается формулой

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Это показывает, во-первых, что этот коммутатор является оператором умножения на функцию, а во-вторых — см. формулу (7) — что эта функция представляет собой не что иное, как коэффициент $F_{\alpha\beta}$ формы F . Таким образом,

$$(12) \quad F_{\alpha\beta} = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$$

для любых $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ (что является, конечно, лишь другой записью соотношения (6)).

Чтобы получить в операторной интерпретации калибровочные преобразования (9), мы для произвольной всюду отличной от нуля функции g рассмотрим составной оператор $\Gamma_\alpha \circ T_g$, т. е. оператор

$$\psi \mapsto \Gamma_\alpha(g\psi) = (\partial_\alpha + A_\alpha)(g\psi) = (\partial_\alpha g)\psi + (\partial_\alpha + A_\alpha)\psi = g(\Gamma_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g)\psi.$$

Видно, что

$$\Gamma_\alpha \circ T_g = T_g \circ \Gamma'_\alpha,$$

где $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g$ — операторы (11), отвечающие потенциалу A' с компонентами

$$A'_\alpha = A_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g = A_\alpha + \partial_\alpha \ln g,$$

т. е. потенциалу, получающемуся из потенциала A преобразованием (9) с $f = \ln g$. Таким образом, калибровочные преобразования — это в точности преобразования $A \mapsto A'$, отвечающие преобразованиям вида $\Gamma_\alpha \mapsto T_g^{-1} \circ \Gamma_\alpha \circ T_g$, т. е. — в другой записи — вида

$$(13) \quad \Gamma_\alpha \mapsto g^{-1} \circ \Gamma_\alpha \circ g$$

(трансформациям посредством операторов $g = T_g$).

Резюмируя, мы получаем, что потенциал электромагнитного поля мы можем интерпретировать как операторный 4-вектор с компонентами (11), само поле F — как дифференциальную форму на R^4 с операторными коэффициентами (12), а калибровочные преобразования — как трансформации вида (13). (При этом функции ψ , на которых действуют операторы, физически интерпретируются как компоненты электронно-позитронного поля Дирака.)

Эта формулировка допускает немедленное обобщение, состоящее в том, что в операторах (11) функции A_α считаются принимающими значения в некоторой матричной алгебре Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n; K)$, т. е. потенциал (5) считается линейной $\mathfrak{g}$ -значной дифференциальной формой на R^4 . Тогда из-за некоммутативности матричного умножения коммутаторы (12) будут выражаться формулой

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].$$

Иными словами, форма

$$F = \sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

будет g -значной дифференциальной формой второй степени, выражающейся через форму A по формуле

$$(14) \quad F = dA + A \wedge A.$$

Физическое поле, описываемое формой вида (14), называется *калибровочным полем с потенциалом A* . Таким образом, в этой терминологии электромагнитное поле является не чем иным, как калибровочным полем с $gl(1; \mathbb{R})$ -значным потенциалом. (Впрочем, чтобы не выходить за рамки алгебр Ли компактных групп—что часто бывает удобно—целесообразно все умножить на мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$ и считать, что потенциал электромагнитного поля принимает значения в алгебре Ли $i\mathbb{R} = \mathfrak{u}(1)$ унитарной группы $U(1)$).

Что же касается калибровочных преобразований, то для матричных потенциалов они определяются как преобразования $A \mapsto A'$, отвечающие трансформациям вида (13), где g —произвольная функция на $\mathbb{R}^4$, принимающая значения в матричной группе Ли $\mathcal{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

Являясь матрицами порядка n , коэффициенты форм A и F действуют на n -компонентных векторных полях ψ на $\mathbb{R}^4$. Так как для любого такого поля ψ и любой $\mathcal{G}$ -значной матричной функции g имеют место тождества

$$(\partial_\alpha \circ g) \psi = \partial_\alpha (g\psi) = (\partial_\alpha g) \psi + g (\partial_\alpha \psi),$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3,$$

где $\partial_\alpha g$ при $g = \|g^i_j\|$ —матрица $\|\partial_\alpha g^i_j\|$, то (мы, как и выше, опускаем знак $\circ$)

$$(g^{-1} \nabla_\alpha g) \psi = (g^{-1} \partial_\alpha g) \psi + \partial_\alpha \psi + (g^{-1} A_\alpha g) \psi =$$

$$= (\partial_\alpha + g^{-1} A_\alpha g + g^{-1} \partial_\alpha g) \psi.$$

Это означает, что для матричных потенциалов калибровочные преобразования имеют вид

$$(15) \quad A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1} dg.$$

При каждом таком преобразовании форма F переходит в форму

$$d(g^{-1} A g + g^{-1} dg) + (g^{-1} A g + g^{-1} dg) \wedge (g^{-1} A g + g^{-1} dg) =$$

$$= dg^{-1} \wedge A g + g^{-1} dA g - g^{-1} A \wedge dg + dg^{-1} \wedge dg +$$

$$+ g^{-1} A \wedge A g + g^{-1} A \wedge dg + g^{-1} dg \wedge g^{-1} A g +$$

$$+ g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg = g^{-1} (dA + A \wedge A) g = g^{-1} F g$$

(напомним, что $dg^{-1} = -g^{-1}dg g^{-1}$). Преобразование $F \rightarrow g^{-1}Fg$ также называется калибровочным.

Сравнив теперь формулу (14) с формулой (38') лекции 19 (структурным уравнением Картана), мы немедленно обнаружим, что калибровочное поле является не чем иным, как формой (тензором) кривизны некоторой связности, а его потенциал — формой этой связности! Калибровочные же преобразования (14) представляют собой не что иное, как преобразование форм связности в различных тривиализациях (см. формулу (17'') лекции 10).

Появление в этом контексте связностей можно пояснить следующим образом.

В принципе каждое калибровочное поле F связано с некоторым полем материи ψ . Например, для электромагнитного поля таким полем будет биспинорное поле Дирака, частицами которого являются электроны и позитроны. В общем случае в конструкцию поля материи входит задание некоторой матричной группы Ли $\mathcal{G}$, называемой группой внутренних симметрий. (Для электронно-позитронного поля Дирака группой $\mathcal{G}$ является группа $U(1)$ фазовых преобразований $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$.) Имеется в виду, что частицы поля обладают некоей внутренней структурой, на которую действует группа $\mathcal{G}$. Для нуклонного (протонно-нейтронного) поля внутренняя структура частиц описывается изотопическим спином, а группой $\mathcal{G}$ является группа $SU(2)$ (группа изотопической симметрии). Для кваркового поля внутренняя структура задается тройкой цветов, а группой $\mathcal{G}$ является группа $SU(3)$ (группа цветовой симметрии) и т. д. При движении частицы из точки x пространства Минковского в точку y по двум разным мировым линиям, частица приходит в точку y , вообще говоря, с разными внутренними состояниями. Физически это изменение означает, что на частицу подействовало соответствующее калибровочное поле, а геометрически — что вектор внутреннего состояния частицы подвергся преобразованию из группы голономии $\mathcal{G}$.

Аналогом уравнения Максвелла (3) (напомним, тождественно выполняющегося в силу равенства (6)) является уравнение Бианки

$$dF = F \wedge A - A \wedge F \quad (\text{или } DF = 0),$$

тождественно выполняющееся в силу равенства (14), а аналогом уравнения Максвелла (4) — уравнение

$$(16) \quad D \star F = 0,$$

называемое уравнением Янга—Миллса. (Таким образом,

калибровочные поля — это не любые связности на R^4 , а лишь удовлетворяющие уравнению (16).)

При $\mathcal{G} = \text{SU}(2)$ калибровочные поля называются *полями Янга — Миллса*.

Так как равенство (14) означает (см. формулу (15) лекции 21), что $F = DA$, то для потенциала A уравнение (16) приобретает вид

$$(17) \quad D * DA = 0,$$

полностью аналогичный уравнению (8).

По физическим соображениям каждое калибровочное поле должно, кроме того, обращаться в бесконечности в нуль, т. е. быть таким, что для любых α, β

$$(18) \quad F_{\alpha\beta}(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Удобный технический способ учесть условие (18) состоит в переходе к компактифицированному пространству $R^4 \cup \{\infty\}$, получающемуся из пространства R^4 добавлением одной точки ∞ . (Поле F продолжается в точку ∞ нулем.) Здесь хорошо воспользоваться стереографической проекцией и перейти от пространства $R^4 \cup \{\infty\}$ к сфере S^4 . Тогда в стереографических координатах с полюсом e_4 потенциал A будет линейной дифференциальной формой на проколотой сфере $U^{(+)} = S^4 \setminus \{e_4\}$, а условие (18) будет выполнено тогда и только тогда, когда на проколотой сфере $U^{(-)} = S^4 \setminus \{-e_4\}$ будет существовать потенциал B , равный нулю в точке e_4 и калибровочно эквивалентный вне точек $\pm e_4$ потенциалу A . На R^4 потенциал B определен вне точки 0 и вне этой точки связан с потенциалом A соотношением

$$(19) \quad A = g^{-1}Bg + g^{-1}dg,$$

где g — некоторое гладкое отображение $R^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{G}$.

Трактуемое как отображение $S^4 \setminus \{-e_4, e_4\} \rightarrow \mathcal{G}$ отображение g является не чем иным, как коциклом над группой $\mathcal{G}$ двухэлементного покрытия $\{U^{(-)}, U^{(+)}\}$ сферы S^4 и, значит, определяет над S^4 некоторое главное $\mathcal{G}$ -расслоение ξ . При этом потенциалы A и B будут формами некоторой связности Γ на этом расслоении, а поле F — формой кривизны этой связности (над $U^+ = S^4 \setminus \{e_4\}$; в точке e_4 форма кривизны связности Γ по условию равна нулю).

Так как в точке e_4 потенциал B равен нулю, то на R^4 условие (19) равносильно асимптотическому равенству

$$(19') \quad A \sim g^{-1}dg \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Задание такого равенства однозначно определяет расслоение ξ и потенциал B , а значит, и связность Γ .

Таким образом, мы имеем два равносильных языка. На одном языке потенциалы калибровочных полей с группой $\mathcal{G}$ — это q -значные линейные дифференциальные формы (5) на R^4 , удовлетворяющие соотношению (19') с некоторой $\mathcal{G}$ -значной функцией g , определенной на R^4 вблизи ∞ . На другом языке — это связности на главных $\mathcal{G}$ -расслоениях с базой S^4 . Функции g являются при этом не чем иным, как склеивающими коциклами этих расслоений.

Два поля (потенциала) называются *калибровочно эквивалентными*, если они переходят друг в друга при некотором автоморфизме расслоения ξ над S^4 .

Подчеркнем, что это сведение калибровочных полей к связностям нельзя считать полным, поскольку поле должно, помимо всего прочего, удовлетворять уравнению Янга—Миллса (16), не имеющего пока геометрической интерпретации.

Все же некоторую пользу для физики извлечь можно. Например, мы видим, что каждое калибровочное поле обладает неким инвариантом, являющимся гомотопическим классом отображений $S^3 \rightarrow \mathcal{G}$. Для группы $SU(2) = S^3$ этот инвариант характеризуется целым числом k (степенью). Взятый с обратным знаком, он называется физиками *топологическим зарядом*.

С другой стороны, существует способ вообще полностью элиминировать таинственные уравнения (16). Он состоит в том, что мы ограничиваемся лишь автодуальными или антиавтодуальными полями, т. е. — см. лекцию 21 — полями F , для которых

$$(20) \quad *F = \pm F.$$

Для этих полей уравнение (16) сводится к уравнению Бианки $DF = 0$ и, значит, заведомо выполнено. Таким образом, *потенциалы (анти)автодуальных полей на R^4 — это в точности связности в главных расслоениях над S^4 с (анти)автодуальными формами кривизны (обращающиеся в нуль в точке e_4)*.

Здесь уже редукция к геометрии вполне адекватна.

Заметим, что понятие (анти)автодуальных полей имеет смысл только над евклидовым пространством R^4 . [Хотя над пространством Минковского и можно определить оператор Ходжа $*$, но для этого оператора будет иметь

место равенство $*^2 = -1$, и потому уравнения (20) будут удовлетворяться только при $F = 0$.]

При $\mathcal{G} = \text{SU}(2)$ автодуальные поля, имеющие положительный заряд, и антиавтодуальные поля, имеющие отрицательный заряд, называются *мультиинстантонами*. Мультиинстантон с зарядом k называется *k-инстантоном*. Таким образом, *k-инстантоны* — это поля Янга—Миллса F с зарядом k , для которых

$$*F = (\text{sign } k) F.$$

[Ниже мы увидим, что равенство $*F = -(\text{sign } k) F$ возможно только при $F = 0$.] Мультиинстантоны с $k = 1$ называются просто *инстантонами*, а с $k = -1$ — *антиинстантонами*.

Теперь мы понимаем, что, собственно говоря, было сделано в конце лекции 21. Это было явное построение целой серии инстантонов $F_{\lambda, b}$. Впервые оно было осуществлено в 1975 г. в пионерской работе Белавина, Полякова, Шварца и Тюткина. Позже в 1978 г. Атья, Дринфельд, Хитчин и Манин доказали, что любой инстантон калибровочно эквивалентен одному и только одному инстантону $F_{\lambda, b}$. Мы лишены возможности изложить здесь их доказательство.

Аналоги инстантонов $F_{\lambda, b}$ можно построить для любого k (и для них также будет верна теорема Атья, Дринфельда, Хитчина и Манина), но при $|k| > 1$ это описание не дает явных формул (при $k > 1$ роль λ и b играют кватернионный вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и кватернионная симметрическая $k \times k$ -матрица B , но не любые, а связанные определенными зависимостями, нуждающимися в дополнительном исследовании).

Эти зависимости следующие:

- а) матрица $\bar{B}B + \bar{\lambda}^T \lambda$ вещественна и диагональна;
- б) для любого кватерниона $x \in \mathbb{H}$ уравнения

$$B\xi = x\xi, \quad \lambda\xi = 0,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)^T$ — столбец кватернионов, имеют единственное решение $\xi = 0$.

Изменение знака у k сводится к перестановке dx и $d\bar{x}$.

В связи с понятием топологического заряда поля Янга—Миллса естественным образом возникает вопрос о его явном вычислении непосредственно по полю F , минуя потенциал A . Оказывается, что на этот вопрос существует красивый ответ.

Для любых двух форм

$$F = \sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad G = \sum_{\alpha < \beta} G_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

степени 2 на R^4 форма $F \wedge *G$ имеет максимальную степень 4 и выражается, как легко видеть, формулой

$$(21) \quad F \wedge *G = \left(\sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right) dx,$$

где $dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$. Если формы F и G удовлетворяют условию (18) и, значит, могут рассматриваться как формы на S^4 , то форма $F \wedge *G$ также будет формой на S^4 , и потому—в силу компактности сферы S^4 —будет существовать интеграл

$$\int_{S^4} F \wedge *G = \int_{S^4} \left(\sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right) dx.$$

В случае, когда коэффициенты форм F и G являются числовыми (вещественными) функциями, этот интеграл обозначается символом $\langle F, G \rangle$ и называется *скалярным произведением* форм F и G . Из формулы (21) непосредственно следует, что это умножение задает на пространстве форм $\Omega^2(S^4)$ структуру евклидова пространства (или в другой, более предпочтительной из-за бесконечномерности пространства $\Omega^2(S^4)$ терминологии—структуру предгильбертова пространства).

В случае форм с коэффициентами из алгебры матриц $\mathfrak{u}(2)$ нужно предварительно перейти к следу. Кроме того, чтобы получилось положительно определенное скалярное умножение, нужно все умножить на -1 . Таким образом, для $\mathfrak{u}(2)$ -значных форм мы полагаем

$$(22) \quad \langle F, G \rangle = - \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge *G).$$

В интерпретации $\mathfrak{u}(2)$ -значных форм как форм с коэффициентами из H' след переходит в операцию 2Re и, значит,

$$(22') \quad \langle F, G \rangle = -2 \int_{S^4} \text{Re}(F \wedge *G).$$

Задача 1. Покажите, что для любого поля Янга—Миллса F его топологический заряд k выражается формулой

$$(23) \quad k = \frac{1}{8\pi^2} \langle F, *F \rangle,$$

т. е. формулой

$$(23') \quad k = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr} (F \wedge F).$$

Неожиданным образом формула (23) позволяет также охарактеризовать мультинстантоны как точки минимума некоторого функционала. Действительно, ясно, что по отношению к скалярному умножению (22) оператор Ходжа * самосопряжен (симметричен). Поэтому его собственные подпространства, принадлежащие собственным значениям ± 1 (т. е. пространства автодуальных и антиавтодуальных форм), ортогональны и приводят этот оператор. Это означает, что любая форма F единственным образом представляется в виде

$$F = F^{(+)} + F^{(-)},$$

где формы $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ ортогональны, причем форма $F^{(+)}$ автодуальна, а форма $F^{(-)}$ антиавтодуальна. Поэтому для квадрата нормы $\|F\|^2 = \langle F, F \rangle$ этой формы имеет место формула

$$\|F\|^2 = \|F^{(+)}\|^2 + \|F^{(-)}\|^2,$$

а для топологического заряда k — формула

$$k = \frac{1}{8\pi^2} (\|F^{(+)}\|^2 - \|F^{(-)}\|^2).$$

Поэтому

$$(24) \quad \|F\| \geq 8\pi^2 |k|,$$

причем равенство может иметь место только при $*F = (\text{sign } k)F$, т. е. для мультинстантонов. (Кроме того, мы видим, что равенство $*F = -(\text{sign } k)F$ возможно только при $F = 0$; см. выше.)

С другой стороны, непосредственное вычисление, использующее явные формулы Белавина, Полякова, Шварца и Тюпкина, указанные в лекции 21, показывает, что для мультинстантонов неравенство (24) переходит в равенство.

Задача 2. Проверьте это утверждение при $k = 1$.

Функционалом Янга—Миллса называется функционал на пространстве всех $\mathfrak{su}(2)$ -значных потенциалов A , определенный формулой

$$(25) \quad A \mapsto \|F_A\|,$$

где F_A —форма кривизны связности A . Мы видим, таким образом, что *мультиинстантоны (или, точнее, их потенциалы)—это в точности точки минимума функционала Янга—Миллса.*

Замечание 1. В нелинейном функциональном анализе (вариационном исчислении) имеется понятие стационарной точки функционала (аналогичное понятию стационарной точки функции конечного числа переменных). Оказывается, что *поля Янга—Миллса—это в точности стационарные точки функционала Янга—Миллса.*

Впрочем, существуют ли такие поля, не являющиеся мультиинстантонами, до сих пор неизвестно. (Для группы $SU(3)$ —случай глюонного поля—они построены.)

Ключевая формула (23') является примером весьма общих интегральных формул, относящихся к произвольным главным или—что в принципе равносильно—к произвольным векторным расслоениям ξ и выражающих топологические инварианты этих расслоений (а точнее—классы когомологий некоторых замечательных дифференциальных форм на их базах) через формы кривизны связностей на ξ .

Чтобы построить такие формы, мы должны начать сравнительно издалека.

Пусть $\text{Mat}_n K$ —линейное пространство всех квадратных матриц порядка n над полем K , где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и пусть

$$(26) \quad F: \text{Mat}_n K \rightarrow K$$

—функция $A \mapsto F(A)$, $A \in \text{Mat}_n K$, являющаяся многочленом от элементов a_{ij} матрицы $A = \|a_{ij}\|$.

Определение 1. Функция (26) называется *инвариантным многочленом*, если

$$F(AB) = F(BA)$$

для любых матриц $A, B \in \text{Mat}_n K$.

Задача 3. Покажите, что функция (26) тогда и только тогда является инвариантным многочленом, когда

$$F(C^{-1}AC) = F(A)$$

для любой невырожденной матрицы $C \in GL(n; K)$ (и любой матрицы $A \in \text{Mat}_n(K)$).

Примерами инвариантных многочленов являются след $\text{Tr } A$, определитель $\det A$ и все элементарные симметрические функции $\sigma_k(A)$, $1 \leq k \leq n$, от характеристических корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A (т. е.—с точностью до знака

$(-1)^k$ — коэффициенты характеристического многочлена $f_A(\lambda) = \det |A - \lambda E|$ матрицы A).

Заметим, что $\sigma_1 = \text{Tr}$ и $\sigma_n = \det$.

Задача 4. Докажите, что любой инвариантный многочлен F может быть представлен в виде многочлена от многочленов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. [Указание. Докажите, что значение многочлена F на произвольной диагональной матрице $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является симметрическим многочленом от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и, значит, — согласно так называемой основной теореме теории симметрических функций — многочленом от $\sigma_1(D), \dots, \sigma_n(D)$. Затем воспользуйтесь тем, что матрицы вида $C^{-1}DC$, $C \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$, всюду плотны в $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$.]

Задача 5. Докажите, что если многочлен F инвариантен, то

$$F(A^T) = F(A)$$

для любой матрицы A . [Указание. Матрицы A и A^T имеют одни и те же характеристические корни.]

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать лишь однородные инвариантные многочлены.

Задача 6. Докажите, что однородные составляющие произвольного инвариантного многочлена также являются инвариантными многочленами.

Таким образом, каждый инвариантный многочлен является суммой однородных инвариантных многочленов.

Пусть $F_i^j = \frac{\partial F}{\partial a_j^i}$ — частные производные многочлена F по его аргументам a_j^i . Для любой матрицы $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ значения $F_i^j(A)$ этих производных в свою очередь составляют матрицу $[F_i^j(A)]$. Мы обозначим эту матрицу символом $F'(A)$.

Заметим, что классическая формула $dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$ для дифференциала в случае функции (26) имеет вид

$$dF = F_i^j da_j^i.$$

В матричных обозначениях эту формулу можно переписать так:

$$(27) \quad dF(A) = \text{Tr}(F'(A) dA).$$

Содержательный смысл формулы (27) состоит в том, что для любой гладкой матричной функции $t \mapsto A(t) = [a_j^i(t)]$

имеет место равенство

$$(28) \quad \frac{dF(A(t))}{dt} = \text{Tr} \left(F'(A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \right),$$

где $\frac{dA(t)}{dt}$ — матрица производных $\left\| \frac{da_j^i(t)}{dt} \right\|$.

Лемма 1. Если многочлен F инвариантен, то для произвольной матрицы $A \in \text{Mat}_n(K)$ матрицы $F'(A)$ и A перестановочны:

$$(29) \quad AF'(A) = F'(A)A.$$

Доказательство. Пусть E_k^l — матричная единица $\|\delta_k^i \delta_j^l\|$ (все элементы этой матрицы равны нулю, за исключением элемента в k -й строке и l -м столбце, который равен единице). В силу инвариантности многочлена F для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$(30) \quad F((E + tE_k^l)A) = F(A(E + tE_k^l)).$$

Так как матрица

$$\frac{d(E + tE_k^l)A}{dt} = E_k^l A$$

выражается формулой

$$E_k^l A = \|\delta_k^i a_j^l\|$$

(все ее строки равны нулю, за возможным исключением k -й, которая совпадает с l -м столбцом матрицы A), а матрица

$$\frac{dA(E + tE_k^l)}{dt} = AE_k^l$$

— формулой

$$AE_k^l = \|a_i^l \delta_j^k\|$$

(все ее столбцы равны нулю, за возможным исключением l -го, который совпадает с k -й строкой матрицы A), то, продифференцировав с помощью формулы (28) равенство (30) и положив $t = 0$, мы получим соотношение

$$F_k^l(A) a_j^l = F_l^l(A) a_k^l,$$

в точности равносильное тождеству (29). $\square$

Пусть теперь $\xi = (\mathcal{G}, \pi, \mathcal{X})$ — гладкое векторное расслоение ранга n над гладким многообразием $\mathcal{X}$. Произвольно

задав на ξ некоторую связность H , рассмотрим ее тензор кривизны R и матричные формы Ω , задающие тензор R на тривиализирующих окрестностях $U \subset \mathcal{X}$ (см. лекцию 19).

Каждая функция (26) очевидным образом распространяется на матрицы A , элементы которых являются не числами, а элементами произвольной коммутативной алгебры над полем K . В частности, поскольку умножение дифференциальных форм четной степени коммутативно, то для произвольного однородного многочлена (26) определена на каждой тривиализирующей окрестности U дифференциальная форма $F(\Omega)$ (чтобы вычислить эту форму, надо в F вместо переменных a_i^j подставить формы Ω_i^j и все умножения понимать как внешние умножения $\wedge$). Матрица Ω зависит от выбора тривиализации расслоения ξ над U и для другой тривиализации заменяется матрицей $C^{-1}\Omega C$, где C — матрица перехода над алгеброй FU , связывающая эти тривиализации (базисы FU -модуля $\Gamma(\xi|_U)$). Поэтому, если многочлен F инвариантен, то форма $F(\Omega)$ не зависит от выбора тривиализации над U и, значит, формы $F(\Omega)$, построенные для всевозможных окрестностей U , согласованы на пересечениях. Следовательно, они определяют некоторую дифференциальную форму (над полем K) на всем многообразии $\mathcal{X}$.

Мы будем обозначать эту форму символом $F(R)$.

Заметим, что степень формы $F(R)$ равна $2r$, где r — степень многочлена F (напомним — однородного и инвариантного).

Предложение 1. Для любого однородного инвариантного многочлена F форма $F(R)$ замкнута:

$$dF(R) = 0.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $dF(\Omega) = 0$ на любой окрестности U . Так как на формах четной степени оператор d является дифференцированием (удовлетворяет обычному правилу дифференцирования произведения), то для вычисления формы $dF(\Omega)$ пригодна формула (27), принимающая при $A = \Omega$ вид

$$dF(\Omega) = \text{Tr}(F'(\Omega) \wedge d\Omega).$$

С другой стороны, согласно тождеству Бианки (формула (39) лекции 19)

$$F'(\Omega) \wedge d\Omega = F'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega - F'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega,$$

а согласно лемме 1 (примененной к матрице $A = \Omega$)

$$F'(\Omega) \wedge \Omega = \Omega \wedge F'(\Omega).$$

Поэтому

$$F'(\Omega) \wedge d\Omega = \Xi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Xi,$$

где $\Xi = F'(\Omega) \wedge \omega$, и, значит,

$$\text{Tr}(F'(\Omega) \wedge d\Omega) = \text{Tr}(\Xi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Xi) = 0. \quad \square$$

Напомним (см. лекцию III.20), что для любого многообразия $\mathcal{X}$ и каждого $k \geq 0$ определена группа когомологии де Рама $H^k \mathcal{X}$ (на самом деле $\mathbb{R}$ -линейное пространство), элементами которой являются классы когомологий $[\omega]$ замкнутых форм ω степени k на $\mathcal{X}$. Если рассматривать формы с комплексными коэффициентами, то аналогичным образом возникнут комплексные группы когомологии $H_{\mathbb{C}}^k \mathcal{X}$.

Задача 7. Покажите, что линеал $H_{\mathbb{C}}^k \mathcal{X}$ является комплексификацией линеала $H^k \mathcal{X}$. [Указание. Если $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — формы с вещественными коэффициентами, то $d\omega = d\omega_1 + i d\omega_2$, где $d\omega_1$ и $d\omega_2$ — также формы с вещественными коэффициентами.]

Для однообразия линеал $H^k \mathcal{X}$ обозначается также символом $H_{\mathbb{R}}^k \mathcal{X}$.

Так как согласно предложению 1 форма $F(R)$ замкнута, то в группе $H_{\mathbb{R}}^k \mathcal{X}$ определен ее класс когомологий $[F(R)]$. Оказывается, что этот класс не зависит от выбора связности H .

Предложение 2. Пусть H_0 и H_1 — две связности на $\mathbb{K}$ -векторном расслоении ξ и пусть R_0 и R_1 — их тензоры кривизны. Тогда для любого однородного инвариантного многочлена F в группе $H_{\mathbb{R}}^k \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$[F(R_0)] = [F(R_1)].$$

Доказательство. Пусть $\text{pr}^* H_0$ и $\text{pr}^* H_1$ — прообразы связностей H_0 и H_1 при проекции $\text{pr}: \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{X}$. Так как (см. лекцию 18) связности на любом векторном расслоении составляют аффинное пространство, то для каждого $s \in \mathbb{R}$ на расслоении $\xi \times I$ определена связность

$$H'_s = (1-s) \text{pr}^* H_0 + s \text{pr}^* H_1.$$

Ясно, что связности H'_s составляют гладкое семейство связностей на $\xi \times I$ и потому определяют связность $\{H'_s\}$ на $(\xi \times I) \times I$. Пусть $H' = \{H'_s\}_{s=0}^1$ — ее диагонализация (см.

лекцию 10), а R' — форма кривизны связности H' . Тогда для любого $t \in I$ будет иметь место формула

$$i_t H' = i_t H'_t$$

(см. формулу (18) лекции 10), где $i_t: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times I$ — вложение $b \mapsto (b, t)$, $b \in \mathcal{X}$. Но так как $\text{pr} \circ i_t = \text{id}$ для любого $t \in I$, то в рассматриваемом случае $i_t H'_t = (1-s) H_0 + s H_1$, и, значит, $i_t H'_t = (1-t) H_0 + t H_1$. Следовательно,

$$i_t H' = (1-t) H_0 + t H_1$$

и, в частности, $i_0 H' = H_0$, $i_1 H' = H_1$. Поэтому $R_0 = i_0^* R'$, $R_1 = i_1^* R'$ (см. задачу 1 лекции 19) и, значит,

$$F(R_0) = i_0^* F(R'), \quad F(R_1) = i_1^* F(R').$$

Но мы знаем (см. предложение 3 лекции III.20), что для любого k соответствие $\omega \mapsto (\text{pr})^* \omega$ индуцирует изоморфизм групп когомологий $H^k \mathcal{X} \rightarrow H^k(\mathcal{X} \times I)$ (а значит, и изоморфизм $H_C^k \mathcal{X} \rightarrow H_C^k(\mathcal{X} \times I)$).

Поскольку $\text{pr} \circ i_t = \text{id}$ для любого $t \in I$, обратный изоморфизм будет задаваться соответствием $\omega \mapsto i_t^* \omega$, откуда следует, что для произвольной замкнутой формы ω на $\mathcal{X} \times I$ класс когомологий $i_t^* [\omega] = [i_t^* \omega]$ на $\mathcal{X}$ не зависит от $t \in I$. В частности, при $t=0,1$ мы получим, что $[i_0^* \omega] = [i_1^* \omega]$. При $\omega = F(R')$ это дает искомое равенство $[F(R_0)] = [F(R_1)]$. $\square$

Таким образом, для любого однородного инвариантного многочлена F формула

$$c^F(\xi) = [F(R)]$$

корректно определяет в группе $H_{\mathbb{C}}^{2r} \mathcal{X}$ некоторый элемент $c^F(\xi)$.

Определение 2. Элемент $c^F(\xi)$ называется *характеристическим классом* векторного расслоения ξ , отвечающим инвариантному многочлену F .

Чтобы классы $c^F(\xi)$ были определены, необходимо и достаточно, чтобы на расслоении $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ существовала хотя бы одна связность. Следовательно (см. предложение 2 лекции 18), классы $c^F(\xi)$ определены для любого нумерируемого векторного расслоения ξ . В частности, они определены, если многообразие $\mathcal{X}$ паракомпактно.

Во избежание надоедливых оговорок будем в дальнейшем считать, что многообразие $\mathcal{X}$ паракомпактно.

Пусть $K = \mathbb{C}$. Поскольку линеал $H_{\mathbb{C}}^{2r} \mathcal{X}$ является комплексификацией линеала $H_{\mathbb{R}}^{2r} \mathcal{X} = H^{2r} \mathcal{X}$, имеет смысл вопрос, при каких F характеристический класс $c^F(\xi)$ является вещественным (принадлежит $H^{2r} \mathcal{X}$) или чисто мнимым (имеет вид $i[\omega]$, где $[\omega] \in H^{2r} \mathcal{X}$)?

Пусть F — однородный инвариантный многочлен степени r с вещественными коэффициентами.

Предложение 3. Для любого комплексного векторного расслоения ξ характеристический класс $c^F(\xi)$ вещественен при r четном и чисто мним при r нечетном.

Доказательство. Поскольку многообразие $\mathcal{X}$ паракомпактно и, следовательно, расслоение ξ нумерируемо, на ξ существует метрика и связность H , согласованная с этой метрикой (задача 7 лекции 11). Над каждой тривиализирующей окрестностью U матрица Ω форм кривизны этой связности в ортонормированном базисе модуля $\Gamma(\xi|_U)$ косоэрмитова (предложение 4 лекции 11), т. е. удовлетворяет соотношению

$$(31) \quad \Omega^T = -\Omega.$$

Но мы знаем (задача 4), что $F(\Omega^T) = F(\Omega)$, а так как коэффициенты многочлена F вещественны, то

$$F(\overline{\Omega}) = \overline{F(\Omega)}.$$

Поскольку

$$F(-\Omega) = (-1)^r F(\Omega),$$

этим доказано, что

$$F(\Omega) = F(\Omega^T) = F(-\overline{\Omega}) = (-1)^r \overline{F(\Omega)}.$$

При r четном это означает, что форма $F(R)$ вещественна (и, значит, ее класс когомологий $[F(R)]$ в $H_{\mathbb{C}}^{2r} \mathcal{X}$ принадлежит $H^{2r} \mathcal{X}$), а при r нечетном — что она имеет вид $i\omega$, где ω — вещественная форма (и, значит, ее класс когомологий имеет вид $i[\omega]$, где $[\omega] \in H^{2r} \mathcal{X}$). $\square$

Пусть $K = \mathbb{R}$.

Предложение 4. Для любого однородного инвариантного многочлена F нечетной степени r и любого вещественного векторного расслоения ξ характеристический класс $c^F(\xi)$ равен нулю:

$$c^F(\xi) = 0.$$

Доказательство этого предложения во всем подобно доказательству предложения 3. Единственное отличие состоит в том, что свойство косоэрмитовости (31) заменяется свойством кососимметричности:

$$\Omega^T = -\Omega.$$

Поэтому $F(\Omega) = (-1)^r F(\Omega)$, откуда при r нечетном следует, что $F(\Omega) = 0$ и, значит, что $F(R) = 0$. Следовательно,

$$c^F(\xi) = 0. \quad \square$$

Мы продолжим изучение классов $c^F(\xi)$ в следующей лекции.

Характеристические классы Чженя и Понтрягина.— Характеристические числа Чженя и Понтрягина.— Свойства классов Чженя и Понтрягина.— Полные классы Чженя и Понтрягина.— Характеры Чженя и Понтрягина.— Характеристический класс Эйлера.— $\bar{K}$ -функтор.— Расслоения и пространства конечного типа.

Напомним (см. предложение 1 лекции III.19), что для любых дифференциальных форм ω_1 и ω_2 имеет место формула

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

где r — степень формы ω_1 . Следовательно,

а) если формы ω_1 и ω_2 замкнуты, то форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ также замкнута;

б) если хотя бы одна из замкнутых форм ω_1 и ω_2 точна, то форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ также точна.

Поэтому для любых классов когомологий $c_1 = [\omega_1]$ и $c_2 = [\omega_2]$ формула

$$c_1 \wedge c_2 = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

корректно определяет их произведение $c_1 \wedge c_2$. Это умножение классов когомологий ассоциативно и косокоммутативно ($c_1 \wedge c_2 = (-1)^{r_1 r_2} c_2 \wedge c_1$, где $r_1 = \deg c_1$, $r_2 = \deg c_2$). В частности, умножение классов когомологий четной степени коммутативно.

Как правило, вместо $c_1 \wedge c_2$ мы будем писать просто $c_1 c_2$.

Замечание 1. В литературе употребляется также обозначение $c_1 \cup c_2$.

Теперь из утверждения задачи 3 лекции 22 немедленно вытекает, что каждый характеристический класс $c^F(\xi)$ является многочленом от характеристических классов

$$(1) \quad c^1(\xi), \dots, c^{2n}(\xi),$$

отвечающих элементарным инвариантным многочленам $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Этим объясняется особое положение классов (1).

Определение 1. При $K = \mathbb{C}$ характеристические классы

$$c_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^r} c^{2r}(\xi), \quad r = 1, \dots, n,$$

называются классами Чженя комплексного векторного расслоения ξ .

Замечание 2. По-английски фамилия Чжень пишется Chen. Транслитерация этого написания на русский язык привела к «классам Черна», которые до сих пор можно встретить в литературе.

Согласно предложению 3 лекции 22 все классы Чжень вещественны.

Степень класса $c_r(\xi)$ равна $2r$. Значит, если $2r > m$, где $m = \dim \mathcal{X}$, то $c_r(\xi) = 0$. Поэтому классы $c_r(\xi)$ интересны только при $2r \leq m$.

Определение классов $c_r(\xi)$ удобно распространить на $r = 0$, считая по определению, что

$$c_0(\xi) = 1$$

для любого расслоения ξ . (Здесь 1 — элемент группы $H^0 \mathcal{X}$, отвечающей функции, тождественно равной единице; см. предложение 1 лекции III.20.)

Определение 2. При $K = \mathbb{R}$ характеристические классы

$$p_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2r}} c^{2ar}(\xi), \quad r = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right],$$

называются *классами Понтягина* вещественного векторного расслоения ξ . (Согласно предложению 4 лекции 22 классы $c^{2r+1}(\xi)$ равны нулю.)

По определению дополнительно полагается

$$p_0(\xi) = 1$$

для любого расслоения ξ .

Степень класса $p_r(\xi)$ равна $4r$. Поэтому эти классы могут быть отличны от нуля только при $4r \leq m$.

Замечание 3. В алгебраической топологии характеристические классы Чженя и Понтягина определяются иначе, как элементы так называемых *групп когомологий над $\mathbb{Z}$* , которые, вообще говоря, имеют элементы конечного порядка. Группы когомологий над $\mathbb{Z}$ естественным образом отображаются в группы когомологий де Рама $H^* \mathcal{X}$, причем все элементы конечного порядка переходят, естественно, в нуль и этот гомоморфизм отображает характеристические классы над $\mathbb{Z}$ в классы, определенные здесь (которые называются в этом контексте *характеристическими классами над $\mathbb{R}$*).

Если размерность m многообразия $\mathcal{X}$ четна, $m = 2l$, и многообразие $\mathcal{X}$ компактно и ориентируемо, то для любого комплексного расслоения ξ над $\mathcal{X}$ и любого разбиения $l = i_1 + \dots + i_k$ числа l в сумму неотрицательных слагаемых определено (с точностью до знака, зависящего от выбора

ориентации многообразия $\mathcal{X}$) число

$$c_l(\xi) = \int_{\mathcal{X}} c_{l_1}(\xi) \wedge \dots \wedge c_{l_k}(\xi), \quad l = (i_1, \dots, i_k),$$

называемое l -м числом Чженя комплексного расслоения ξ .

Аналогично, если $m = 4l$, то для любого вещественного расслоения ξ над $\mathcal{X}$ определено l -е число Понтрягина

$$p_l(\xi) = \int_{\mathcal{X}} p_{l_1}(\xi) \wedge \dots \wedge p_{l_k}(\xi),$$

$$l = (i_1, \dots, i_k), \quad i_1 + \dots + i_k = l.$$

Замечательный факт—непосредственно вытекающий из сказанного в замечании 3, но не имеющий, по-видимому, прямого аналитического доказательства—состоит в том, что все числа $c_l(\xi)$ и $p_l(\xi)$ являются целыми числами.

Пример 1. При $\dim \mathcal{X} = 4$ для любого комплексного расслоения ξ над $\mathcal{X}$ определены два числа Чженя $c_{(1,1)}(\xi)$ и $c_{(2)}(\xi)$, выражающиеся (при соответствующем выборе ориентации многообразия $\mathcal{X}$) формулами

$$c_{(1,1)}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{X}} \text{Tr } \Omega \wedge \text{Tr } \Omega, \quad c_{(2)}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{X}} \det \Omega.$$

Если ξ является $SU(n)$ -расслоением и, значит, форма Ω принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{su}(n)$ бесследных косозермитовых матриц, то $\text{Tr } \Omega = 0$, и потому $c_{(1,1)}(\xi) = 0$. Пусть $n = 2$. Поскольку, как показывает элементарное вычисление, для любой бесследной косозермитовой матрицы A второго порядка имеет место равенство $\det A = -\frac{1}{2} \text{Tr } A^2$, то в этом случае

$$c_{(2)}(\xi) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathcal{X}} \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega).$$

С точностью до обозначений правая часть этой формулы совпадает (при $\mathcal{X} = S^4$) с правой частью формулы (23') лекции 22. Следовательно, топологический заряд k произвольного поля Янга—Миллса F равен числу Чженя $c_{(2)}(\xi)$ соответствующего векторного расслоения (ассоциированного с главным $SU(2)$ -расслоением, на котором F является формой кривизны).

Таким образом, действительно, понятие топологического заряда подпадает под общую теорию характеристических классов.

Кроме того, мы видим, что в рассматриваемом случае число $c_{(2)}(\xi)$ на самом деле является целым числом.

Задача 1. Докажите, что для любого $r \geq 0$

$$p_r(\xi) = (-1)^r c_{2r}(\xi^C),$$

где ξ^C — комплексификация (см. лекцию 6) вещественного векторного расслоения ξ .

Теорема 1. Характеристические классы Чженя и Понтрягина обладают следующими свойствами:

а. Для любого гладкого отображения $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ и всех $r \geq 0$

$$c_r(f^*\xi) = f^*c_r(\xi), \quad p_r(f^*\xi) = f^*p_r(\xi).$$

б. Для тривиального расслоения $\theta = \theta_{\mathcal{X}}^n$ все классы положительной степени равны нулю:

$$c_r(\theta) = 0, \quad p_r(\theta) = 0, \quad r \geq 0.$$

в. Для любых двух векторных расслоений ξ и η над одним и тем же многообразием $\mathcal{X}$ и всех $r \geq 0$

$$\begin{aligned} c_r(\xi \oplus \eta) &= \sum_{i+j=r} c_i(\xi) c_j(\eta) = \\ &= c_r(\xi) + c_{r-1}(\xi) c_1(\eta) + \dots + c_1(\xi) c_{r-1}(\eta) + c_r(\eta), \\ p_r(\xi \oplus \eta) &= \sum_{i+j=r} p_i(\xi) p_j(\eta) = \\ &= p_r(\xi) + p_{r-1}(\xi) p_1(\eta) + \dots + p_1(\xi) p_{r-1}(\eta) + p_r(\eta). \end{aligned}$$

Доказательство. Свойство а очевидным образом вытекает из соответствующих свойств связностей и форм кривизны. Для доказательства свойства б достаточно заметить, что на тривиальном расслоении θ существует связность, для которой все формы ω_j^i , а потому и все формы Ω_j^i , тождественно равны нулю. Докажем свойство в.

Пусть H^ξ и H^η — произвольные связности на расслоениях ξ и η соответственно. В каждой карте вида $\mathcal{G}_U^\zeta$, где $\zeta = \xi$ или η , связность H^ζ является аннулятором форм

$$(2) \quad \theta^{\zeta} = da^i + \Gamma_{jk}^i a^j dx^k, \quad i = 1, \dots, n_\zeta = \dim \zeta,$$

где a^i , x^k — координаты на $\mathcal{G}_U^\zeta$, отвечающие данной тривиализации расслоения ζ над U и данной системе локальных координат на U (см. лекцию 10). С другой стороны,

тривиализации расслоений ξ и η над U естественным образом определяют тривиализацию расслоения $\xi \oplus \eta = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ над U , которой в $\mathcal{E}_U$ отвечают координаты

$$\overset{(\xi)}{a^i}, \overset{(\eta)}{a^j}, x^k,$$

где $1 \leq i \leq n_\xi$, $1 \leq j \leq n_\eta$ и $1 \leq k \leq m$.

Поэтому формы (2) мы можем также рассматривать, как формы над $\mathcal{E}_U$, и ясно, что их аннулятором будет некоторая связность расслоения $\xi \oplus \eta$ над U . Над различными окрестностями U эти связности согласованы на пересечениях (докажите!) и потому определяют единую связность H на всем расслоении $\xi \oplus \eta$. Матрица форм этой связности над окрестностью U является, по построению, блочной матрицей вида

$$\begin{vmatrix} \omega^\xi & 0 \\ 0 & \omega^\eta \end{vmatrix},$$

где ω^ξ и ω^η — матрицы форм связностей H^ξ и H^η , т. е. — в другой терминологии — прямой суммой $\omega^\xi \oplus \omega^\eta$ матриц ω^ξ и ω^η . Но тогда — как непосредственно вытекает из структурного уравнения Картана — матрица Ω форм кривизны связности H также будет прямой суммой $\Omega^\xi \oplus \Omega^\eta$ матриц форм кривизны связностей H^ξ и H^η .

Задача 2. Покажите, что для любых двух матриц A и B порядков n_1 и n_2 имеет место равенство

$$(3) \quad \sigma_r(A \oplus B) = \sum_{i+j=r} \sigma_i(A) \sigma_j(B), \quad \sigma_0(A) = \sigma_0(B) = 1,$$

где, конечно, σ_r слева и σ_i, σ_j справа обозначают элементарные инвариантные многочлены от матриц порядков $n_1 + n_2$ и n_1, n_2 соответственно. [У к а з а н и е. Пусть $\sigma_i(\lambda)$ и $\sigma_j(\mu)$ — элементарные симметрические функции переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$ и $\mu_1, \dots, \mu_{n_2}$ соответственно, а $\sigma_r(\lambda, \mu)$ — элементарные симметрические функции переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1-1}, \mu_1, \dots, \mu_{n_2}$. Так как имеют место тождества

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sigma_i(\lambda) t^i = \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \lambda_i t)$$

и аналогичные тождества для $\sigma_i(\lambda)$ и $\sigma_r(\lambda, \mu)$, то

$$\left(\sum_{i=0}^{n_1} \sigma_i(\lambda) t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n_2} \sigma_j(\mu) t^j \right) = \sum_{r=0}^{n_1+n_2} \sigma_r(\lambda, \mu) t^r$$

и, значит,

$$\sigma_r(\lambda, \mu) = \sum_{i+j=r} c_i(\lambda) \sigma_j(\mu).$$

Это доказывает формулу (3) для диагональных матриц, а потому и для матриц вида $C^{-1}DC$, где D —диагональная матрица. Общий случай вытекает теперь по непрерывности (ср. задачу 4 лекции 22).]

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось применить формулу (3) к матрицам $A = \Omega^{\frac{1}{2}}$ и $B = \Omega^n$ (и при $K = \mathbb{R}$ учесть, что классы $c^{2r+1}(\xi)$ равны нулю). $\square$

На языке теории категорий свойство a характеристических классов означает, что эти классы обладают свойством ф у н к т о р и а л ь н о с т и. Оно имеет место, конечно, не только для классов Чженя или Понтрягина, но и для любых классов $c^F(\xi)$. Из него следует, что для изоморфных расслоений ξ, ξ' и любого инвариантного многочлена F имеет место равенство $c^F(\xi) = c^F(\xi')$. Поэтому c^F можно рассматривать как отображение множества $\text{Vect}_K^n \mathcal{X}$ всех классов изоморфных векторных расслоений ранга n над $\mathcal{X}$ в группу когомологий $H_K^{2r} \mathcal{X}$.

Отображение c^F также называется—не слишком удачно—*характеристическим классом*.

Свойство v классов Чженя и Понтрягина подсказывает ввести в рассмотрение прямые суммы

$$H_K^{2*} \mathcal{X} = H_K^0 \mathcal{X} \oplus H_K^2 \mathcal{X} \oplus \dots \oplus H_K^{2r} \mathcal{X} \oplus \dots$$

линеалов $H_K^{2*} \mathcal{X}$. Элементами линеала $H_K^{2*} \mathcal{X}$ являются формальные суммы вида

$$a = a_0 + a_2 + \dots + a_{2r} + \dots$$

(обрывающиеся при $2r > n$), где a_{2r} —произвольный элемент линеала $H_K^{2r} \mathcal{X}$ (называемый *однородной составляющей* элемента a). Очевидным образом распространив на такие суммы операцию умножения, мы превратим $H_K^{2*} \mathcal{X}$ в коммутативную алгебру с единицей над полем K .

Теперь характеристический класс $c^F(\xi) \in H^2 \mathcal{X}$ мы можем ввести для любого не обязательно однородного инвариантного многочлена F , положив по определению

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + c^{F_1}(\xi) + \dots + c^{F_r}(\xi) + \dots,$$

где F_r , $r \geq 0$,—однородные составляющие многочлена F .

Определение 3. Элементы

$$c(\xi) = \sum_{r=0}^n c_r(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi) \quad \text{при } K = \mathbb{C},$$

$$p(\xi) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p_r(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \dots + p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi) \quad \text{при } K = \mathbb{R}$$

алгебры $H^{\bullet\bullet}\mathcal{X}$ называются соответственно *полным классом Чжэня* комплексного расслоения ξ и *полным классом Понтрягина* вещественного расслоения ξ .

Заметим, что класс $p(\xi)$ принадлежит на самом деле подалгебре

$$H^{\bullet\bullet}\mathcal{X} = H^0\mathcal{X} \oplus H^1\mathcal{X} \oplus \dots \oplus H^{n/2}\mathcal{X} \oplus \dots$$

алгебры $H^{\bullet\bullet}\mathcal{X}$.

Свойство б из теоремы 1 означает теперь, что для тривиального расслоения θ

$$(4) \quad c(\theta) = 1 \quad \text{и} \quad p(\theta) = 1,$$

а свойство в — что для любых расслоений ξ и η

$$(5) \quad c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta) \quad \text{и} \quad p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta).$$

Отображения $c: \xi \mapsto c(\xi)$ и $p: \xi \mapsto p(\xi)$ из $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^n\mathcal{X}$ и $\text{Vect}_{\mathbb{R}}^n\mathcal{X}$ (векторное расслоение и его класс изоморфизма мы обозначаем для простоты одним и тем же символом) в $H^{\bullet\bullet}\mathcal{X}$ и $H^{\bullet\bullet}\mathcal{X}$ соответственно также называются *полными классами Чжэня и Понтрягина*.

Обратим внимание, что отображения c и p определены для любого $n \geq 0$ и, следовательно, могут рассматриваться как отображения

$$c: \text{Vect}_{\mathbb{C}}\mathcal{X} \rightarrow H^{\bullet\bullet}\mathcal{X}, \quad p: \text{Vect}_{\mathbb{R}}\mathcal{X} \rightarrow H^{\bullet\bullet}\mathcal{X},$$

где

$$\text{Vect}_K\mathcal{X} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \text{Vect}_K^n\mathcal{X}$$

— дизъюнктное объединение множеств $\text{Vect}_K^n\mathcal{X}$.

Замечание 4. В случае, когда многообразие $\mathcal{X}$ не связно, целесообразно за $\text{Vect}_K\mathcal{X}$ принимать дизъюнктное объединение множеств $\text{Vect}_K^n\mathcal{X}'$ по всем $n \geq 0$ и всем компонентам $\mathcal{X}'$ многообразия $\mathcal{X}$ (т. е. допускать к рассмотрению векторные расслоения, имеющие на различных

компонентах многообразия $\mathcal{X}$ различные ранги). Это приводит к большей формальной красоте, но утяжеляет изложение тривиальными оговорками. Поэтому мы сохраним прежнее определение. Читатель может—и должен!—самостоятельно выяснить, что меняется, когда ранг расслоений на различных компонентах может быть различным.

Если в расслоении, являющемся прямой суммой расслоений, слагаемые заменить изоморфными расслоениями, то все расслоение также заменится изоморфным расслоением. Это означает, что операция $\oplus$ фактически определена на множестве $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ и ясно, что относительно этой операции множество $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ является абелевой группой.

Формулы (5) означают теперь, что характеристические классы s и p являются аддитивно-мультипликативными (переводящими сумму в произведения) гомоморфизмами полугрупп $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$ и $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \mathcal{X}$ в мультипликативные полугруппы алгебр $H^{**} \mathcal{X}$ и $H^{*0} \mathcal{X}$ (состоящие из всех их отличных от нуля элементов).

[На самом деле, конечно, характеристические классы s и p являются гомоморфизмами в мультипликативные группы $1 + (H^{**} \mathcal{X})^+$ и $1 + (H^{*0} \mathcal{X})^+$, состоящие из элементов алгебр $H^{**} \mathcal{X}$ и $H^{*0} \mathcal{X}$, однородная составляющая степени 0 которых равна 1.]

Замечание 5. Для характеристических классов над $\mathbb{Z}$ (см. замечание 2) первая формула (5) остается в силе, тогда как вторая верной быть перестает (добавляются элементы конечного порядка).

Инвариантным формальным рядом мы будем называть формальную сумму вида

$$(6) \quad F = F_0 + F_1 + \dots + F_r + \dots$$

где F_r — однородные инвариантные многочлены степени r на $\text{Mat}_n K$ (однородные составляющие ряда F). Так как $c^{Fr}(\xi) = 0$ при $2r > t$, то для каждого такого ряда сумма

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + \dots + c^{F_r}(\xi) + \dots$$

конечна и представляет собой некоторый элемент алгебры $H_K^{**} \mathcal{X}$. Этот элемент (а также отображение $c^F: \xi \mapsto c^F(\xi)$, $\xi \in \text{Vect}_K \mathcal{X}$) называется *характеристическим классом*, отвечающим инвариантному ряду F .

Чтобы построить ряд (6) при $K = C$, можно взять формальный ряд вида

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_r + \dots,$$

где F_r — произвольные симметрические многочлены степени r от n переменных, и для любой матрицы $A \in \text{Mat}_n C$ положить

$$(7) \quad F(A) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические корни матрицы A . Если многочлены F_r выбраны так, что для вещественных матриц A числа (7) вещественны, то эта конструкция дает инвариантный ряд (6) и при $K = R$.

Пусть, например,

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \dots + e^{\lambda_n/2\pi i},$$

т. е.

$$(8) \quad F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^r} \frac{s_r}{r!},$$

где $s_r = \lambda_1^r + \dots + \lambda_n^r$.

В теории симметрических многочленов доказывается формула Варинга, согласно которой

$$s_r = r \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots} \frac{(i_1+i_2+\dots+i_n-1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \dots \sigma_n^{i_n},$$

где суммирование распространено на все неотрицательные целые числа $i_1, i_2, \dots, i_n$, удовлетворяющие условию $i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = r$.

Определение 4. Отвечающий ряду (8) характеристический класс на $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^n \mathcal{X}$ обозначается символом ch и называется *характером Чжэня* (или Черна; см. выше замечание 2). Его однородные составляющие ch_r представляют собой отображения

$$\text{ch}_r: \text{Vect}_{\mathbb{C}}^n \mathcal{X} \rightarrow H^{2r} \mathcal{X}.$$

Из формулы Варинга следует, что для любого комплексного расслоения ξ класс $\text{ch}_r \xi$ выражается через классы Чжэня по формуле

$$(9) \quad \text{ch}_r \xi = \frac{1}{(r-1)!} \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots} \frac{(i_1+i_2+\dots+i_n-1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!} \times \\ \times c_1(\xi)^{i_1} c_2(\xi)^{i_2} \dots c_n(\xi)^{i_n}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \text{ch}_0 \xi &= n \quad (n = \dim \xi), \\ \text{ch}_1 \xi &= c_1(\xi), \\ \text{ch}_2 \xi &= c_1(\xi)^2 - 2c_2(\xi), \\ \text{ch}_3 \xi &= \frac{c_1(\xi)^3 - 3c_1(\xi)c_2(\xi) + 3c_3(\xi)}{2} \end{aligned}$$

и т. д.

Обратим внимание, что, подобно классам Чженя, характер Чженя определен для всех $n \geq 0$ и потому может рассматриваться как отображение

$$\text{ch}: \text{Vect}_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \rightarrow H^{**} \mathcal{X},$$

а его однородные составляющие ch_r — как отображения

$$\text{ch}_r: \text{Vect}_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \rightarrow H^{2r} \mathcal{X}.$$

Аналогично, исходя из инвариантного ряда $e^{\lambda_1/2\pi} + \dots + e^{\lambda_n/2\pi}$ определяется характер Понтрягина

$$\text{ph}: \text{Vect}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} \rightarrow H^{**} \mathcal{X}$$

с однородными составляющими

$$\text{ph}_r: \text{Vect}_{\mathbb{R}} \mathcal{X} \rightarrow H^{4r} \mathcal{X}.$$

На расслоениях ξ ранга n однородные составляющие ph_r характера Понтрягина выражаются через классы Понтрягина по формуле

$$(10) \quad \text{ph}_r \xi = \frac{1}{(2r-1)!} \sum (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_l} \times \\ \times \frac{(k_1+k_2+\dots+k_l-1)!}{k_1!k_2!\dots k_l!} p_1(\xi)^{k_1} p_2(\xi)^{k_2} \dots p_l(\xi)^{k_l},$$

где $l = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и суммирование распространено на все неотрицательные целые числа $k_1, k_2, \dots, k_l$, удовлетворяющие условию $k_1 + 2k_2 + \dots + lk_l = r$.

Предложение 1. Отображения c и p удовлетворяют соотношениям

$$\text{ch}(\xi \oplus \eta) = \text{ch} \xi + \text{ch} \eta, \quad \text{ph}(\xi \oplus \eta) = \text{ph} \xi + \text{ph} \eta,$$

т. е. являются гомоморфизмами полугрупп $\text{Vect}_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$ и $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \mathcal{X}$ в аддитивные группы алгебр $H^{**} \mathcal{X}$ и $H^{**} \mathcal{X}$ соответственно (а следовательно, отображения ch_r и ph_r — гомоморфизмами в линейные пространства $H^{2r} \mathcal{X}$ и $H^{4r} \mathcal{X}$).

Доказательство. Пусть $F(\lambda)$ — ряд (8) от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_2}$, $F(\mu)$ — ряд (8) от переменных $\mu_1, \dots, \mu_{n_1}$ и $F(\lambda, \mu)$ — ряд (8) от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_2}, \mu_1, \dots, \mu_{n_1}$. Достаточно доказать, что

$$F(\lambda, \mu) = F(\lambda) + F(\mu)$$

Но это очевидно, так как

$$F(\lambda) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \dots + e^{\lambda_{n_2}/2\pi i}, \quad F(\mu) = e^{\mu_1/2\pi i} + \dots + e^{\mu_{n_1}/2\pi i}$$

и

$$F(\lambda, \mu) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \dots + e^{\lambda_{n_2}/2\pi i} + e^{\mu_1/2\pi i} + \dots + e^{\mu_{n_1}/2\pi i}. \quad \square$$

Поскольку аддитивная структура алгебр $H^{**}\mathcal{X}$ и $H^{**}\mathcal{X}'$ контролируется существенно проще ее мультипликативной структуры, характеры Чженя и Понтрягина значительно удобнее соответствующих полных классов. [К сожалению, из-за знаменателей в формулах (9) и (10) эти характеры нельзя определить над $\mathbb{Z}$; см. выше замечание 2.]

Другое преимущество характеристических классов ch и ph состоит в том, что они являются также гомоморфизмами и по отношению к тензорному умножению, т. е. для любых векторных расслоений ξ и η имеет место равенство

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{ch}(\xi \otimes \eta) &= \text{ch } \xi \text{ ch } \eta & \text{при } K = \mathbb{C}, \\ \text{ph}(\xi \otimes \eta) &= \text{ph } \xi \text{ ph } \eta & \text{при } K = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Ничего подобного для характеристических классов c и r места не имеет.)

К сожалению, доказательство этих формул далеко выходит за рамки наших возможностей. (См., впрочем, замечание 3 лекции 24.)

Задача 3. Докажите формулы (11) при $\dim \xi = 1$ и $\dim \eta = 1$.

Кроме классов вида c^F для вещественных расслоений можно определить еще один замечательный характеристический класс.

Напомним (см. лекцию 11.10), что для любой кососимметрической матрицы A четного порядка определен ее пфаффиан $\text{Pf } A$, являющийся многочленом от элементов матрицы A , удовлетворяющим соотношениям

$$(\text{Pf } A)^2 = \det A \quad \text{и} \quad \text{Pf}(C^T A C) = \det C \cdot \text{Pf } A,$$

где C — произвольная матрица.

Имея это в виду, предположим, что вещественное векторное расслоение ξ

а) ориентировано (см. лекцию 7),

б) метризовано,

в) имеет четный ранг $n = 2l$.

Пусть $U \subset \mathcal{X}$ — тривиализирующая расслоение ξ окрестность, $s_1, \dots, s_n$ — положительно ориентированный ортонормированный базис модуля $F(\xi|_U)$ и $\Omega = \|\Omega^i_j\|$ — матрица форм кривизны в базисе $s_1, \dots, s_n$ некоторой согласованной с метрикой связности на расслоении ξ . Тогда на U определена дифференциальная форма $\text{Pf } \Omega$. При изменении базиса $s_1, \dots, s_n$ форма Ω заменяется формой $C^{-1}\Omega C$, где C — матрица перехода. Так как матрица C ортогональна ($C^T = C^{-1}$) и собственна ($\det C = 1$), то $\text{Pf}(C^{-1}\Omega) = \text{Pf } \Omega$. Это показывает, что формы $\text{Pf } \Omega$ согласованы на пересечениях и, значит, составляют некоторую дифференциальную форму $\text{Pf } R$ степени n на всем многообразии $\mathcal{X}$.

Задача 4. Докажите, что $d \text{Pf } R = 0$. [Указание. Докажите, что для любой кососимметрической матрицы A матрицы $\text{Pf}' A = \left| \frac{\partial \text{Pf } A}{\partial a_j} \right|$ и A перестановочны; см. лемму 1 лекции 22.]

Задача 5. Докажите, что класс когомологий $[\text{Pf } R]$ формы $\text{Pf } R$ не зависит от выбора метрики и метрической связности на ξ . [Указание. Для любых двух метрик Q_0 и Q_1 на ξ функция $(1-t)Q_0 + tQ_1$, где $0 \leq t \leq 1$, также является метрикой.]

Определение 5. Класс когомологий

$$e(\xi) = \frac{(-1)^l}{(2\pi)^l} [\text{Pf } R], \quad l = \frac{n}{2},$$

называется *классом Эйлера* ориентированного вещественного векторного расслоения ξ ранга $n = 2l$.

Его степень равна n , и

$$e(\xi)^2 = p_l(\xi).$$

При n нечетном условно считается, что $e(\xi) = 0$.

Подчеркнем, что, в отличие от характеристических классов Понтрягина, класс Эйлера определен только для ориентированного расслоения ξ .

Задача 6. Пусть $-\xi$ — противоположно ориентированное расслоение ξ . Покажите, что

$$e(-\xi) = -e(\xi).$$

Для любого комплексного расслоения ξ ранга n его овеществление $\xi_{\mathbb{R}}$ (см. лекцию 6) является вещественным ориентированным (задача 6 лекции 7) векторным расслоением четного ранга $2n$, и потому для него определен класс Эйлера $e(\xi_{\mathbb{R}})$.

Задача 7. Покажите, что

$$e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi).$$

Класс Эйлера обладает, конечно, свойством функториальности (свойство а из теоремы 1) и равен нулю для тривиального расслоения θ (свойство б из теоремы 1). Имеет место и аналог свойства в.

Задача 8. Докажите, что для любых ориентированных векторных расслоений ξ и η имеет место равенство (12)

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) e(\eta),$$

где, конечно, предполагается, что ориентация расслоения $\xi \oplus \eta$ индуцирована ориентациями расслоений ξ и η . [Указание. Докажите, что $Pf(A \oplus B) = Pf A \cdot Pf B$ для любых кососимметрических матриц A и B .]

Подчеркнем, что формула (12) справедлива для расслоений ξ и η произвольных (не обязательно четных) рангов. Поэтому, в частности, если расслоение ξ имеет прямое слагаемое нечетного ранга, то $e(\xi) = 0$.

Так, например, дело обстоит, если расслоение ξ обладает сечением, ни в одной точке не равным нулю (поскольку такое сечение порождает — докажите! — прямое слагаемое ранга 1). Следовательно, если $e(\xi) \neq 0$, то каждое сечение расслоения ξ хотя бы в одной точке обращается в нуль.

На этом утверждении основывается доказательство неожиданно большого числа элегантных и трудных геометрических теорем.

Пример 2. В своем месте мы прямым вычислением покажем, что для касательного расслоения τ над двумерной сферой S^2 класс Эйлера $e(\tau)$ отличен от нуля. Следовательно, на сфере S^2 не существует всюду отличного от нуля гладкого поля касательных векторов. Наглядно это утверждение означает, что идеализированного (всюду покрытого иголками) ежа невозможно гладко причесать или, иначе, что на покрытой волосами голове обязательно должна быть макушка. На этом основании оно известно как теорема о еже и теорема о макушке.

Из формул (4) и (5) немедленно следует, что для каждого векторного расслоения $\xi \in \text{Vect}_k X$ и любого $h \geq 0$

имеют место равенства

$$(13) \quad \begin{aligned} c(\xi + \theta^h) &= c(\xi) && \text{при } K = \mathbb{C}, \\ p(\xi + \theta^h) &= p(\xi) && \text{при } K = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где θ^h — тривиальное расслоение ранга h .

[Заметим, что аналог формул (13) для класса Эйлера $e(\xi)$ места не имеет. Для характеров Чженя и Понтрягина он имеет место только по отношению к однородным составляющим положительной степени:

$$\text{ch}_r(\xi + \theta^h) = \text{ch}_r(\xi), \quad \text{ph}_r(\xi + \theta^h) = \text{ph}_r(\xi)$$

при $r > 0$.]

Формулы (13) наводят на мысль ввести следующее определение:

Определение 6. Векторные расслоения ξ и η с одной и той же базой $\mathcal{X}$ называются *стационарно эквивалентными*, если существуют такие числа h и k , что расслоения $\xi \oplus \theta^h$ и $\eta \oplus \theta^k$ изоморфны, т. е., иными словами, в группе $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\xi + \theta^h = \eta + \theta^k$$

(при этом, конечно, $\dim \xi + h = \dim \eta + k$).

Очевидно, что это отношение является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле.

Основным полем K здесь можно считать не только поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, но и тело кватернионов $\mathbb{H}$.

Замечание 6. Для несвязных многообразий $\mathcal{X}$ определение 6 не очень удобно. (Ср. замечание 4.) Но все же мы его менять не будем.

Класс стационарной эквивалентности расслоения ξ мы будем обозначать символом $[\xi]$, а множество всех классов стационарной эквивалентности K -векторных расслоений над $\mathcal{X}$ — символом $\bar{K}_K \mathcal{X}$. [В литературе вместо $\bar{K}_R \mathcal{X}$ часто пишут $\bar{K}_O \mathcal{X}$ или $\bar{K}O(\mathcal{X})$, вместо $\bar{K}_\mathbb{C} \mathcal{X}$ пишут $\bar{K}_U \mathcal{X}$ или $\bar{K}U(\mathcal{X})$, а вместо $\bar{K}_\mathbb{H} \mathcal{X}$ пишут $\bar{K}_{Sp} \mathcal{X}$ или $\bar{K}Sp(\mathcal{X})$. Предупреждение! Вместо $\bar{K}_\mathbb{C} \mathcal{X}$ часто пишут $\bar{K}(\mathcal{X})$.]

Ясно, что формула

$$[\xi] + [\eta] = [\xi \oplus \eta]$$

корректно определяет в множестве $\bar{K}_K \mathcal{X}$ операцию сложения, по отношению к которой оно является абелевым моноидом.

дом (полугруппой с нулем). Нулем этого моноида служит класс $[0]$, состоящий из тривиальных расслоений θ^h , $h \geq 0$.

[Обратим внимание, что в полугруппе $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ нуля нет!]

Замечание 7. Конструкция моноида $\bar{K}_K \mathcal{X}$ имеет смысл для любого топологического пространства $\mathcal{X}$. Так как (см. замечания 1 и 2 лекции 10) каждое векторное расслоение над гладким многообразием изоморфно гладкому расслоению, а изоморфные гладкие расслоения гладко изоморфны, то для случая, когда $\mathcal{X}$ является гладким многообразием, это обобщение приводит к тому же моноиду $\bar{K}_K \mathcal{X}$.

Очевидно, что для любого непрерывного отображения $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ формула

$$f^*[\xi] = [f^*\xi]$$

корректно определяет гомоморфизм

$$f^*: \bar{K}_K \mathcal{X} \rightarrow \bar{K}_K \mathcal{X}'.$$

причем $(\text{id})^* = \text{id}$ и $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (т. е. $\bar{K}_K$ является контравариантным функтором, принимающим значения в категории множеств).

Как ни странно, моноид $\bar{K}_K \mathcal{X}$ не имеет никакого выразительного названия (несмотря на то, что он оказался чрезвычайно полезным не только в геометрии, но и, скажем, в теории дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений, а в алгебре его конструкция стимулировала создание большой самостоятельной теории со своими многочисленными приложениями). Его принято называть *К-функтором* (или, в случае, когда он является группой, *К-группой*) пространства $\mathcal{X}$ (а инспирированную его конструкцией теорию в алгебре — *алгебраической К-теорией*). Хотя эти названия возникли по случайному поводу и ничего по существу не отражают, они укоренились и являются общепринятыми.

Согласно формулам (13) на стационарно эквивалентных расслоениях характеристические классы c и p (а также классы ch_r и ph_r при $r > 0$) принимают одно и то же значение, т. е. формулы

$$\begin{aligned} c[\xi] &= c(\xi) & \text{при } K = \mathbb{C}, \\ p[\xi] &= p(\xi) & \text{при } K = \mathbb{R} \end{aligned}$$

корректно определяют аддитивно-мультипликативные гомо-

морфизмы

$$c: \bar{K}_C(\mathcal{X}) \rightarrow 1 + (H^{2*}(\mathcal{X}))^+,$$

$$p: \bar{K}_R(\mathcal{X}) \rightarrow 1 + (H^{2*}(\mathcal{X}))^+,$$

а формулы

$$\begin{aligned} \text{ch}_r[\xi] &= \text{ch}_r \xi \\ \text{ph}_r[\xi] &= \text{ph}_r \xi \end{aligned}$$

при $K = \mathbb{C}$,при $K = \mathbb{R}$

— аддитивные гомоморфизмы

$$\text{ch}_r: \bar{K}_C(\mathcal{X}) \rightarrow H^{2r}(\mathcal{X}),$$

$$\text{ph}_r: \bar{K}_R(\mathcal{X}) \rightarrow H^{2r}(\mathcal{X}).$$

Подчеркнем, что последние гомоморфизмы определены только при $r > 0$.

Поскольку группы поддаются изучению значительно легче моноидов, интересно выяснить, когда моноид $\bar{K}(\mathcal{X})$ является группой. Оказывается, что этот вопрос имеет чисто топологический характер и по существу никак не связан с гладкой структурой на многообразии $\mathcal{X}$. Поэтому мы обсудим его, предполагая $\mathcal{X}$, вообще говоря, произвольным хаусдорфовым нормальным (см. определение 3 лекции III.9) топологическим пространством. В процессе этого обсуждения гладкие многообразия мы будем также называть *гладкими пространствами*.

Задача 9. Докажите, что любое гладкое хаусдорфово многообразие является нормальным пространством.

Напомним (ср. определение 1 лекции III.22), что семейство функций $\eta_i: \mathcal{X} \rightarrow I$, $1 \leq i \leq N$ (которое мы здесь предполагаем конечным), называется *разбиением единицы*, подчиненным открытому покрытию $\{U_i, 1 \leq i \leq N\}$ пространства $\mathcal{X}$, если $\eta_1 + \dots + \eta_N = 1$ и $\eta_i = 0$ вне множества U_i для любого $i = 1, \dots, N$. Если пространство $\mathcal{X}$ гладко, то все функции η_i предполагаются гладкими.

Задача 10. Докажите, что для любого конечного открытого покрытия $\{U_i, 1 \leq i \leq N\}$ нормального пространства $\mathcal{X}$ существует подчиненное ему разбиение единицы. [У к а з а н и е. Постройте сжатие $\{V_i\}$ покрытия $\{U_i\}$ (см. предложение 6 лекции III.9) и для каждого $i = 1, \dots, N$ функцию Урысона φ_i пары $(U_i, \bar{V}_i)$ (в общем случае существование такой функции обеспечивается теоремой Урысона; см. замечание 1 лекции II.24, а для гладкого $\mathcal{X}$ —

предложением 2 лекции III.14). Затем положите $\eta = \varphi_i/\varphi$, где $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N$.]

Определение 7. Говорят, что расслоение $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ имеет *конечный тип*, если пространство $\mathcal{X}$ может быть покрыто конечной системой открытых множеств, над каждым из которых расслоение тривиализируется. Пространство $\mathcal{X}$ имеет *конечный тип*, если любое расслоение ξ над $\mathcal{X}$ имеет конечный тип.

Ясно, например, что *любое компактное пространство $\mathcal{X}$ имеет конечный тип*.

Однако существуют и некомпактные пространства (и многообразия) конечного типа.

Задача 11. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ имеет конечный тип. [Указание. Докажите, что над $\mathbb{K}^n$ любое векторное расслоение тривиализируется.]

Предложение 2. Для любого векторного расслоения ξ конечного типа над нормальным пространством $\mathcal{X}$ существует такое векторное расслоение η (гладкое, если гладки $\mathcal{X}$ и ξ), что в моноиде $\tilde{K}(\mathcal{X})$ имеет место равенство

$$(14) \quad [\xi] + [\eta] = 0$$

В частности, если нормальное пространство $\mathcal{X}$ имеет конечный тип, то моноид $\tilde{K}(\mathcal{X})$ является группой.

Доказательство. По условию для расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ существует конечный тривиализирующий атлас $\{(U_i, \varphi_i), 1 \leq i \leq N\}$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ (см. задачу 10). Для каждого $i = 1, \dots, N$ построим отображение $g_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = \dim \xi$, положив для любой точки $p \in \mathcal{E}$

$$g_i(p) = \begin{cases} \eta_i(b) x, & \text{если } p \in \mathcal{E}_{U_i} \text{ и } \varphi_i(p) = (b, x), \\ 0, & \text{если } p \notin \mathcal{E}_{U_i}, \end{cases} \quad b \in \mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $b = \pi(p)$. Ясно, что отображение g_i непрерывно (и гладко, если $\mathcal{X}$ и ξ гладки).

Пусть g — отображение $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$, определенное формулой

$$g(p) = (g_1(p), \dots, g_N(p)), \quad p \in \mathcal{E}$$

[мы отождествляем здесь $\mathbb{R}^{nN}$ с $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (N раз)], и пусть

$$\varphi: \xi \rightarrow 0^{nN}$$

— соответствующий морфизм расслоения ξ в тривиальное расслоение $\theta^{nN} = (\mathcal{X} \times \mathbb{R}^{nN}, \text{pr}, \mathcal{X})$ (действующий по формуле $\varphi(p) = (\pi(p), g(p))$, $p \in \mathcal{E}$).

Для любой точки $b \in \mathcal{X}$ индуцированное морфизмом φ отображение слоев

$$\varphi_b: \mathcal{F}_b \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$$

является не чем иным, как ограничением на $\mathcal{F}_b$ отображения g . Поэтому, если $\varphi_b(p) = 0$, $p \in \mathcal{F}_b$, то $g_i(p) = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. С другой стороны, так как $\eta_1 + \dots + \eta_N = 1$, то существует такой индекс i_0 , что $\eta_{i_0}(b) \neq 0$. Тогда $p \in U_{i_0}$, и если $\varphi_{i_0}(p) = (b, x)$, то $\eta_{i_0}(b)x = 0$. Следовательно, $x = 0$ и, значит, p является нулем линейала $\mathcal{F}_b$. Этим доказано, что для любой точки $b \in \mathcal{X}$ линейное отображение φ_b является мономорфизмом.

Пусть $\mathcal{E}'$ — подпространство произведения $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^{nN}$, состоящее из таких точек (b, x) , что вектор $x \in \mathbb{R}^{nN}$ ортогонален образу $\text{Im } \varphi_b$ мономорфизма φ_b , и пусть π' — ограничение на $\mathcal{E}'$ проекции $\text{pr}: \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathcal{X}$.

Задача 12. Покажите, что тройка $\eta = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{X})$ является векторным расслоением, гладким, если гладки $\mathcal{X}$ и ξ . (Конечно, единственно, что требует доказательства, — это свойство локальной тривиальности.)

По построению для любой точки $b \in \mathcal{X}$ прямая сумма $\mathcal{F}_b \oplus \mathcal{F}'_b$ слоев расслоений ξ и η изоморфна пространству $\text{Im } \varphi_b \oplus \mathcal{F}'_b = \mathbb{R}^{nN}$. Следовательно,

$$\xi \oplus \eta = \theta^{nN},$$

что равносильно (14). $\square$

Следствие. Для каждого компактного хаусдорфова многообразия $\mathcal{X}$ моноид $\tilde{K}(\mathcal{X})$ является группой. $\square$

Лекция 24

K-функтор.— Сравнение *K*- и *K*-функторов.— Операции $\wedge, \vee$.— Операции Адамса.— Группы $K_G S^n$.— Инвариант Хопфа.— Конструкция Хопфа.— Ряд элементарных импликаций.— Теорема о равносильности.

Имеется другой— в некоторых отношениях более удовлетворительный— подход к построению группы $\bar{K}(\mathcal{X})$, основывающийся на общеалгебраической конструкции группы разностей.

Для любой абелевой полугруппы *M* группа разностей *GM* состоит из формальных разностей вида $a - b$, где $a, b \in M$. При этом две разности $a - b$ и $a_1 - b_1$ тогда и только тогда считаются равными, когда в *M* существует такой элемент *c*, что $a + b_1 + c = a_1 + b + c$. Сложение в группе разностей определяется очевидным образом:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Задача 1. Проверьте, что тем самым действительно получается группа.

[Контрольный вопрос. Зачем нужен элемент *c*?]

В литературе группа разностей часто называется группой Гротендика, по имени французского математика, который широко использовал ее конструкцию и привлек к ней всеобщее внимание (хотя, конечно, в общей алгебре конструкция группы разностей была известна задолго до Гротендика; достаточно заметить, что именно таким способом из натуральных чисел строятся целые).

Формула

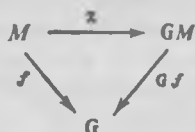
$$\chi: a \mapsto (a + c) - c, \quad c \in M \text{—любое,}$$

корректно определяет некоторое отображение

$$\chi: M \rightarrow GM.$$

По определению $\chi(a) = \chi(b)$ тогда и только тогда, когда в *M* существует такой элемент *c*, что $a + c = b + c$.

Задача 2. Покажите, что для любого гомоморфизма $f: M \rightarrow G$ полугруппы *M* в группу *G* существует единственный гомоморфизм $Gf: GM \rightarrow G$, замыкающий коммутативную диаграмму



Группа разностей полугруппы $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ обозначается символом $K_K \mathcal{X}$ (с теми же вариантами $K_0 \mathcal{X}$, $K_U \mathcal{X}$ и т. д., как и для моноида $K_K \mathcal{X}$).

Ясно, что K_K естественным образом является контра-вариантным функтором: для любого непрерывного отображения $f: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ формула

$$f^*(\xi - \eta) = f^*\xi - f^*\eta$$

корректно определяет гомоморфизм

$$f^*: K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X}',$$

обладающий стандартными функториальными свойствами.

Задача 3. Покажите, что при $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

а) операция тензорного умножения переносится в группу $K_K \mathcal{X}$;

б) относительно этой операции $K_K \mathcal{X}$ является кольцом.

Кольцо $K_K \mathcal{X}$ обладает, очевидно, единицей: $1 = \chi(\theta^1)$.

Так как гомоморфизмы c , ch , p и ph принимают значения в группах, то согласно утверждению задачи 1 они однозначно распространяются до гомоморфизмов

$$c, ch: K_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \rightarrow H^{2*} \mathcal{X} \quad \text{при } K = \mathbb{C},$$

$$p, ph: K_{\mathbb{R}} \mathcal{X} \rightarrow H^{1*} \mathcal{X} \quad \text{при } K = \mathbb{R}.$$

Здесь особо интересны гомоморфизмы ch и ph , поскольку в силу формул (11) лекции 23 (у нас не доказанных!) эти гомоморфизмы являются гомоморфизмами колец.

Замечание 1. Поскольку группы $H^{2*} \mathcal{X}$ и $H^{1*} \mathcal{X}$ являются линеалами над $\mathbb{R}$, гомоморфизмы ch и ph индуцируют гомоморфизмы алгебр

$$ch^{\mathbb{R}}: K_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \otimes \mathbb{R} \rightarrow H^{2*} \mathcal{X},$$

$$ph^{\mathbb{R}}: K_{\mathbb{R}} \mathcal{X} \otimes \mathbb{R} \rightarrow H^{1*} \mathcal{X}.$$

Можно показать (это трудная теорема!), что эти гомоморфизмы являются изоморфизмами.

Эта теорема и является основным *raison d'être* гомоморфизмов ch и ph .

Легко видеть, что для любых стационарно эквивалентных векторных расслоений ξ и η в группе $K_K \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\xi - \theta^n = \eta - \theta^m,$$

где $n = \dim \xi$, $m = \dim \eta$.

Действительно, по условию существуют такие числа h и k , что $\xi + \theta^h = \eta + \theta^k$ в $\text{Vect}_K \mathcal{X}$. Поэтому в $K_K(\mathcal{X})$

$$\xi - \theta^n = (\xi + \theta^h) - \theta^{n+h} = (\eta + \theta^k) - \theta^{n+h} = \eta - \theta^n$$

(напомним, что $n + h = m + k$ и $\theta^{n+h} = \theta^n \oplus \theta^h$). $\square$

Следовательно, формула $[\xi] \mapsto \xi - \theta^n$, где $n = \dim \xi$, корректно определяет некоторое отображение

$$(1) \quad \bar{K}_K(\mathcal{X}) \rightarrow K_K(\mathcal{X}).$$

Очевидно, что отображение (1) является гомоморфизмом.

Без труда проверяется, что гомоморфизм (1) имеет тривиальное ядро. Действительно, если в $K_K(\mathcal{X})$ имеет место равенство $\xi - \theta^n = 0$, то в $\text{Vect}_K \mathcal{X}$ для любого расслоения η будет иметь место равенство $\xi \oplus \eta = \theta^n \oplus \eta$. В частности, при $\eta = \theta^1$ мы получаем, что $\xi \oplus \theta^1 = \theta^{n+1}$, т. е. что $[\xi] = [\theta]$. $\square$

Поэтому, если моноид $\bar{K}_K(\mathcal{X})$ является группой (например, пространство $\mathcal{X}$ хаусдорфово, нормально и имеет конечный тип), то гомоморфизм (1) представляет собой мономорфизм.

По построению образ гомоморфизма (1) состоит из всех элементов вида $\xi - \theta^n$, $n = \dim \xi$, и потому содержится в ядре гомоморфизма

$$(2) \quad \dim: K_K(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

определенного (очевидно, корректно) формулой

$$\dim(\xi - \eta) = \dim \xi - \dim \eta.$$

Оказывается, что в случае, когда моноид $\bar{K}_K \mathcal{X}$ является группой, гомоморфизм (1) представляет собой изоморфизм на ядро гомоморфизма (2). Действительно, пусть $\dim(\xi - \eta) = 0$, т. е. $\dim \xi = \dim \eta$. Так как $\bar{K}_K \mathcal{X}$ — группа, то для расслоений ξ и η существуют такие расслоения ξ' и η' и такие числа h и k , что $\xi \oplus \xi' = \theta^h$ и $\eta \oplus \eta' = \theta^k$. Рассмотрим расслоение $\zeta = \xi \oplus \eta'$. Его ранг равен $\dim \xi + (k - \dim \eta) = k$, и в группе $K_K \mathcal{X}$

$$\xi - \eta = (\xi + \eta') - (\eta + \eta') = \zeta - \theta^k. \quad \square$$

Элементы группы $K_K \mathcal{X}$ называются виртуальными расслоениями, а значение гомоморфизма (2) на виртуальном расслоении — его рангом (или размерностью). Таким образом, над нормальными хаусдорфовыми пространствами конечного типа классы стационарно эквивалентных век-

торных расслоений естественным образом отождествляются с виртуальными расслоениями ранга (размерности) нуль. Это означает, что для таких пространств группу $\bar{K}_K \mathcal{X}$ можно определить как ядро гомоморфизма (2).

Виртуальные расслоения вида $\chi(\xi)$ называются *положительными*. Как правило, они обозначаются просто через ξ . (Но расслоение $\chi(\theta^n)$ обозначается через n .)

Таким образом, в этих обозначениях отображение

$$\bar{K}_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X}$$

задается формулой

$$[\xi] \mapsto \xi - \dim \xi.$$

Как правило, мы будем отождествлять $[\xi]$ и $\xi - \dim \xi$.

Замечание 2. При $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ гомоморфизм (2) является, очевидно, гомоморфизмом колец (ибо $\dim(\xi \otimes \eta) = \dim \xi + \dim \eta$). Поэтому его ядро является идеалом кольца $\bar{K}_K \mathcal{X}$ и, в частности, само является кольцом. Поэтому в случае, когда моноид $\bar{K}_K \mathcal{X}$ является группой, формула

$$[\xi][\eta] = [\xi \otimes \eta] - m[\xi] - n[\eta],$$

$$n = \dim \xi, \quad m = \dim \eta,$$

определяет в группе по сложению $\bar{K}_K \mathcal{X}$ умножение, по отношению к которому эта группа является кольцом.

Алгебраически кольцо $K_K \mathcal{X}$ получается из кольца $\bar{K}_K \mathcal{X}$ формальным присоединением единицы.

Кольцо $K_K \mathcal{X}$ обладает замечательной дополнительной алгебраической структурой.

Напомним (см. задачу 11 лекции 12), что для любого K -векторного ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) расслоения ξ над $\mathcal{X}$ и любого целого числа $k \geq 0$ определено K -векторное расслоение $\Lambda^k \xi$. (При $k = 0$ условно считается, что $\Lambda^0 \xi = \theta^1$.)

Предложение 1. Существуют такие отображения

$$\lambda^k: K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X}, \quad k \geq 0,$$

что

а) для любых элементов $x, y \in K_K \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\lambda^k(x + y) = \sum_{i+j=k} \lambda^i(x) \lambda^j(y);$$

б) если $x = \chi(\xi)$, то

$$\lambda^k(x) = \chi(\Lambda^k \xi).$$

Эти свойства однозначно характеризуют отображения λ^k .

Доказательство. Пусть $1 + (K_K \mathcal{X})[[t]]^+$ — мультипликативная группа всех формальных рядов над кольцом $K_K \mathcal{X}$ со свободным членом 1.

Рассмотрим отображение

$$\Lambda_t: \text{Vect}_K \mathcal{X} \rightarrow 1 + (K_K \mathcal{X})[[t]]^+,$$

определенное формулой

$$\Lambda_t \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi[\Lambda^k \xi] t^k.$$

Задача 4. Докажите, что Λ_t является гомоморфизмом. [Указание. Для любых линейалов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ линейал $\Lambda^k(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$ естественно изоморфен прямой сумме линейалов $\Lambda^i \mathcal{V} \otimes \Lambda^j \mathcal{W}$ по всем $i \geq 0, j \geq 0$, для которых $i + j = k$.]

Поэтому (см. задачу 2) существует единственный гомоморфизм

$$\lambda_t: K_K \mathcal{X} \rightarrow 1 + (K_K \mathcal{X})[[t]]^+,$$

замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}_K \mathcal{X} & \xrightarrow{x} & K_K \mathcal{X} \\ \Lambda_t \searrow & & \swarrow \lambda_t \\ & 1 + (K_K \mathcal{X})[[t]]^+ & \end{array}$$

Пусть

$$\lambda_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k(x) t^k, \quad x \in K_K \mathcal{X}.$$

Тогда $\lambda^k: x \mapsto \lambda^k(x)$ будут отображениями

$$K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X},$$

удовлетворяющими условию б.

Утверждение, что λ_t является гомоморфизмом, означает, что

$$\lambda_t(x + y) = \lambda_t(x) \lambda_t(y).$$

для любых элементов $x, y \in K_K \mathcal{X}$. Раскрыв скобки, мы немедленно убедимся, что это тождество в точности равносильно условию а.

Тем самым утверждение 1 полностью доказано. $\square$

Ясно, что отображения λ^k функториальны, т. е. для любого непрерывного отображения $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_K \mathcal{X} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_K \mathcal{X} \\ I^* \downarrow & \lambda^k & \downarrow I^* \\ K_K \mathcal{Y} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_K \mathcal{Y} \end{array}$$

Конечно, $\lambda^1(x) = x$ для любого $x \in K_K \mathcal{X}$ (т. е. $\lambda^1 = \text{id}$).

Явную формулу для $\lambda^k x$, $x = \xi - \eta$, выражающую виртуальное расслоение $\lambda^k x$ через расслоения ξ и η , мы укажем ниже (см. задачу 7).

Так как ряд $\lambda_0(x)$ обратим, то определен ряд

$$\psi_t'(x) = -t \frac{d}{dt} \ln \lambda_{-t}(x) = -t \frac{\frac{d}{dt} \lambda_{-t}(x)}{\lambda_{-t}(x)}.$$

Свободный член ряда $\psi_t(x)$ равен нулю, т. е. этот ряд имеет вид $\psi_t(x) = \psi^1(x)t + \dots + \psi^k(x)t^k + \dots$. Отображения

$$\psi^k: K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X}$$

называются операциями Адамса.

Задача 5. Докажите, что для любого $n \geq k$ имеет место формула

$$\psi^k(x) = s_k(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x)),$$

где $s_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — многочлены Ньютона, выражающие симметрический многочлен $x_1^k + \dots + x_n^k$ через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. В частности (см. в лекции 23 формулы Варинга),

$$\psi^1(x) = \lambda^1(x) = x,$$

$$\psi^2(x) = \lambda^2(x)^2 - 2\lambda^1(x)^2 = x^2 - 2\lambda^2(x),$$

$$\psi^3(x) = x^3 + 3\lambda^2(x) - 3x\lambda^1(x) \quad \text{и т. д.}$$

[Указание. Пусть $f(t) = (1 + x_1 t) \dots (1 + x_n t)$. Тогда

$$\begin{aligned} t \frac{d}{dt} \ln f(t) &= \frac{tx_1}{1+x_1 t} + \dots + \frac{tx_n}{1+x_n t} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_1^k + \dots + x_n^k) (-t)^{k-1}. \end{aligned}$$

Преимущество операций ψ^k по сравнению с операциями λ^k состоит в том, что для каждого $k \geq 1$ операция ψ^k является гомоморфизмом колец, т. е. для любых элемен-

тов $x, y \in K_K \mathcal{X}$ имеют место формулы

$$(3) \quad \psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y),$$

$$(4) \quad \psi^k(xy) = \psi^k(x) \psi^k(y).$$

Формула (3), равносильная тождеству $\psi_1(x+y) = \psi_1(x) + \psi_1(y)$, доказывается без труда:

$$\begin{aligned} \psi_1(x+y) &= -t \frac{d}{dt} \ln \lambda_{-1}(x+y) = \\ &= -t \frac{d}{dt} \ln (\lambda_{-1}(x) \lambda_{-1}(y)) = \\ &= -t \frac{d}{dt} [\ln \lambda_{-1}(x) + \ln \lambda_{-1}(y)] = \\ &= \psi_1(x) + \psi_1(y). \end{aligned}$$

Иначе дело обстоит с формулой (4). Эта формула выражает очень глубокий геометрический факт, и ее доказательство основывается на следующем утверждении:

Принцип расщепления. Для любого K -векторного расслоения $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ существует такое пространство $\mathcal{Y}$ и такое непрерывное отображение $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, что

а) отображение $f^*: K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{Y}$ является мономорфизмом;

б) расслоение $f^* \xi$ над $\mathcal{Y}$ является суммой линейных (т. е. ранга 1) расслоений.

Для справедливости этого принципа база $\mathcal{X}$ расслоения ξ должна удовлетворять определенным условиям. Например, достаточно, чтобы $\mathcal{X}$ было хаусдорфовым и паракомпактным (в частности, компактным) пространством. При этом пространство $\mathcal{Y}$ также можно найти в классе хаусдорфовых и паракомпактных (соответственно компактных) пространств. Мы оставим принцип расщепления без доказательства.

Задача 6. Постройте расслоение $P\xi = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{X})$, слоем которого над точкой $b \in \mathcal{X}$ является проективное пространство $P(\mathcal{F}_b^1)$ над линейным пространством $\mathcal{F}_b^1$ (точками пространства $P(\mathcal{F}_b^1)$ являются одномерные подпространства пространства $\mathcal{F}_b^1$), и рассмотрите над $\mathcal{E}'$ прообраз $(\pi')^* \xi$ векторного расслоения ξ . Покажите, что расслоение $(\pi')^* \xi$ является прямой суммой линейного расслоения и расслоения ранга $n-1$. [Указание. Точками тотального пространства этого линейного расслоения являются пары (L, p) , где $L \in \mathcal{E}'$ и $p \in L$.]

Эта конструкция обеспечивает индуктивный шаг в доказательстве принципа расщепления.

Из принципа расщепления и формулы (3) следует, что формулу (4) достаточно доказать лишь в случае, когда x и y являются линейными расслоениями. С другой стороны, легко видеть, что *если x линейно, то*

$$(5) \quad \psi^k(x) = x^k.$$

[Действительно, если x линейно, то $\lambda^i(x) = 0$ при $i \geq 2$ и, значит, $\lambda_1(x) = 1 + tx$. Поэтому

$$\psi_1(x) = -t \frac{d}{dt} \ln(1 - tx) = \frac{tx}{1 - tx} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k t^k,$$

что равносильно (5).] Следовательно, если x и y линейны, то

$$\psi^k(xy) = (xy)^k = x^k y^k = \psi^k(x) \psi^k(y)$$

(заметим, что для линейных x и y расслоение xy также линейно). Это доказывает (4). $\square$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\psi^k \psi^l(x) = \psi^{kl}(x).$$

(Когда x линейно, для доказательства достаточно применить формулу (5). Общий случай вытекает отсюда по принципу расщепления.) Это означает, что

$$(6) \quad \psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl}$$

для любых $k, l \geq 1$.

Замечание 3. Если пространство $\mathcal{X}$ гладко, то пространство $\mathcal{Y}$ и отображение f в принципе расщепления также можно выбрать гладкими. Тогда будет определен гомоморфизм $f^*: H^*\mathcal{X} \rightarrow H^*\mathcal{Y}$ и этот гомоморфизм будет мономорфизмом.

Это немедленно дает нам (см. задачу 3 лекции 23) формулы (11) лекции 23 (мультипликативность отображений ch и ph).

Задача 17. Для линейных пространств — а значит, и для векторных расслоений — наряду с функтором Λ^k , $k \geq 0$, можно рассматривать также функтор S^k , сопоставляющий пространству $\mathcal{V}$ линейное пространство $S^k \mathcal{V}$ всех симметрических тензоров степени k на $\mathcal{V}$. Докажите для этого функтора аналог предложения 1, т. е. постройте такие отображения

$$s^k: K_K \mathcal{X} \rightarrow K_K \mathcal{X}, \quad k \geq 0,$$

что $s^k(x) = \chi(S^k \xi)$, когда $x = \chi(\xi)$ и

$$s^k(x+y) = \sum_{i+j=k} s^i(x) s^j(y)$$

для любых $x, y \in K_K \mathcal{X}$.

Докажите также, что для любых векторных расслоений ξ и η в кольце $K_K \mathcal{X}$ имеет место формула

$$\lambda^k(\xi - \eta) = \sum_{i+j=k} (-1)^i \lambda^i(\xi) s^j(\eta).$$

[Указание. Воспользуйтесь принципом расщепления.]

Особый интерес группы $K_K \mathcal{X}$ представляют при $\mathcal{X} = S^n$. Мы опишем эти группы при $K = \mathbb{C}$ [случай $K = \mathbb{R}$ технически чуть более сложен из-за несвязности группы $O(n)$]. Для этого мы воспользуемся комплексным проективным пространством CP^n .

По определению точками пространства CP^n являются одномерные подпространства линейного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{E}$ — подпространство прямого произведения $\mathbb{C}^{n+1} \times CP^n$, состоящее из таких пар (z, L) , $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $L \in CP^n$, что $z \in L$, и пусть $\pi: \mathcal{E} \rightarrow CP^n$ — ограничение проекции $\mathbb{C}^{n+1} \times CP^n \rightarrow CP^n$ на $\mathcal{E}$.

Задача 10. Покажите, что тройка $\eta_{n+1} = (\mathcal{E}, \pi, CP^n)$ является линейным векторным расслоением.

Слоем этого расслоения над точкой $L = CP^n$ является, очевидно, само пространство L . На этом основании расслоение η_{n+1} называется *тавтологическим расслоением*.

При $n=1$ пространство CP^1 является не чем иным, как сферой Римана S^+ , и потому естественным образом отождествляется со сферой S^2 . В силу этого отождествления расслоение η_2 будет линейным комплексным расслоением над S^2 и потому будет определять элемент $\beta_2 = [\eta_2]$ группы $K_C S^2$.

Можно показать (это трудная задача!), что группа $K_C S^2$ является бесконечной циклической группой с образующей β_2 . (См. ниже лекцию 27.)

Рассматриваемый как элемент кольца $K_C S^2$ элемент β_2 выражается формулой

$$\beta_2 = \eta_2 - 1.$$

Считая, что $n = 2m$, отождествим каждую точку $t = (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ с точкой $(t_1, \dots, t_m)$ произведения $I^2 \times \dots \times I^2$ (m раз), где $t_i = (t_{2i-1}, t_{2i})$, $i = 1, \dots, m$. Ясно, что точка t куба I^n тогда и только тогда принадлежит его границе I^n , когда хотя бы для одного i точка t_i принадлежит границе квадрата I^2 . Поэтому существует непрерывное отображение

$$f: \underbrace{S^2 \times \dots \times S^2}_{m \text{ раз}} \rightarrow S^{2m},$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \dots \times I^n & = & I^{nm} \\ \underbrace{\chi_1 \times \dots \times \chi_n}_{m \text{ раз}} \downarrow & & \downarrow \chi_{nm} \\ S^1 \times \dots \times S^1 & \rightarrow & S^{nm} \end{array}$$

где χ_n — отображение $I^n \rightarrow S^n$, гомеоморфно отображающее внутренность куба I^n на проколотую сферу $S^n \setminus \{s_n\}$, а его границу I^n в точку s_n .

Пусть $\text{pr}_i: S^1 \times \dots \times S^1 \rightarrow S^1$ — проекция на i -й множитель, $i = 1, \dots, m$, и пусть

$$\beta_n^* = \text{pr}_1^* \beta_1 \cdot \dots \cdot \text{pr}_m^* \beta_m \in K_0(S^1 \times \dots \times S^1).$$

(Конечно, здесь имеется в виду умножение, описанное выше в замечании 2.) Оказывается — к сожалению, мы лишены возможности здесь это доказать — что

а. Гомоморфизм

$$f^*: K_0(S^{nm}) \rightarrow K_0(S^1 \times \dots \times S^1)$$

является мономорфизмом.

б. Элемент β_n^* принадлежит его образу (а значит, существует однозначно определенный элемент $\beta_n \in K_0(S^{nm})$, для которого $f^*(\beta_n) = \beta_n^*$).

в. Элемент β_n имеет бесконечный порядок и порождает группу $K_0 S^{nm}$.

Таким образом, мы видим, что для любого $m \geq 1$ группа $K_0 S^{nm}$ является бесконечной циклической группой.

[Можно показать, что $K_0 S^{nm+1} = 0$.]

Задача 9. Докажите, что $\beta_2^2 = 0$. [Указание. Используя матричную формулу

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

докажите, что $\eta_2 \oplus \eta_2 = \eta_2 \otimes \eta_2 \oplus \theta^1$.]

Отсюда следует, что $\beta_n^2 = 0$ для любого $n \geq 2$.

Так как расслоение η_2 линейно, то для каждого $k \geq 1$ в кольце $K_0 S^2 = 1 + K_0 S^2$ имеет место формула

$$\psi^k \beta_2 = \psi^k (\eta_2 - 1) = \eta_2^k - 1.$$

Но так как $\eta_2 = 1 + \beta_2$ и $\beta_2^2 = 0$, то $\eta_2^k = 1 + k\beta_2$ и, значит,

$$\psi^k \beta_2 = k\beta_2.$$

Следовательно, в силу функториальности

$$\begin{aligned} \psi^k \beta'_n &= \text{pr}_1^* (\psi^k \beta_2) \cdot \dots \cdot \text{pr}_m^* (\psi^k \beta_2) = \\ &= k^m (\text{pr}_1^* \beta_2 \cdot \dots \cdot \text{pr}_m^* \beta_2) = k^m \beta'_n, \end{aligned}$$

и потому

$$(9) \quad \psi_k \beta_n = k^m \beta_n, \quad k \geq 1, \quad n = 2m$$

(мы здесь снова пользуемся функториальностью операции ψ^k , а также утверждением а).

Эти результаты о группах $[K_C S^n]$ находят замечательное применение к комплексу проблем, которые мы рассматривали в лекции 8.

Пусть

$$f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$$

— произвольное непрерывное отображение сферы S^{2n-1} в сферу S^n . Пользуясь этим отображением, мы введем в дизъюнктивное объединение $B^{2n} \sqcup S^n$ шара B^{2n} и сферы S^n отношение эквивалентности, считая точки x и y тогда и только тогда эквивалентными, когда либо $x = y$, либо $x \in S^{2n-1}$, $y \in S^n$ и $f(x) = y$. Соответствующее факторпространство мы обозначим символом $C(f)$. Оно содержит подпространство, гомеоморфное сфере S^n , дополнение к которому гомеоморфно открытому шару B^{2n} . [О пространстве $C(f)$ говорят, что оно получено *приклеиванием* шара B^{2n} к сфере S^n посредством отображения f .]

Для любого пространства $\mathcal{X}$ и любого его подпространства $\mathcal{A}$ символом $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ обозначается факторпространство пространства $\mathcal{X}$ по отношению эквивалентности, в котором две точки пространства $\mathcal{X}$ тогда и только тогда эквивалентны, когда либо они совпадают, либо обе принадлежат $\mathcal{A}$.

Задача 10. Покажите, что $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ является результатом приклеивания пространства $\mathcal{X}$ к точке pt посредством отображения $\mathcal{A} \rightarrow pt$.

В частности, для пространства $C(f)$ определено пространство $C(f)/S^n$.

Задача 11. Покажите, что пространство $C(f)$ естественно гомеоморфно сфере S^{2n} .

Таким образом, мы имеем два отображения

$$S^n \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{j} S^{2n},$$

где i — вложение, а j — отображение факторизации. Оказывается, что *последовательность групп и гомоморфизмов*

$$0 \rightarrow K_C S^{2n} \xrightarrow{i^*} K_C C(f) \xrightarrow{j^*} K_C S^n \rightarrow 0$$

является точной последовательностью.

Мы также оставим это утверждение без доказательства.

Из него следует, что *при $n = 2m$ группа $K_C C(f)$ является свободной абелевой группой с двумя образующими a и b , где*

$$a = j^*(\beta_{2n}), \quad i^*(b) = \beta_n$$

(образующая a определяется единственным образом, а образующая b — с точностью до слагаемого вида ka).

При этом, так как $i^*(b^2) = \beta_n^2 = 0$, то существует такое число $H(f)$, что

$$b^2 = H(f)a.$$

Это число называется *инвариантом Хопфа* отображения f . [Название объясняется тем, что число $H(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f . Этот факт нам не понадобится.]

Так как отображение j^* мономорфно, то $a^2 = 0$. Так как $i^*(a) = 0$ и, значит, $i^*(ab) = 0$, то $ab = \varepsilon a$, где ε — некоторое число. (На самом деле $\varepsilon = 0$, но этот факт нам также не нужен.) Поэтому

$$(b + ka)^2 = b^2 + 2k\varepsilon a = (H(f) + 2k\varepsilon)a.$$

Мы видим, что при замене образующей b число $H(f)$ может меняться на четное число (так что инвариантом является только его вычет по модулю 2). [На самом деле, поскольку $\varepsilon = 0$, инвариантно само число $H(f)$.]

Теорема 1. *Отображение f с нечетным инвариантом Хопфа $H(f)$ может существовать только при $n = 2, 4, 8$.*

Снова те же таинственные значения!

Доказательство. Пусть отображение f с нечетным $H(f)$ существует. Рассмотрим соответствующее пространство $C(f)$ и образующие a, b группы $K_C C(f)$. Так как $\psi^k(\beta_n) = k^n \beta_n$ и $\psi^k(\beta_{2n}) = k^n \beta_{2n}$, то

$$\psi^k(a) = k^n a \quad \text{и} \quad \psi^k(b) = q(k)a + k^m b, \quad n = 2m,$$

где $q(k)$ — некоторое целое число. В частности, $\psi^2(b) = q(2)a + 2^m b$. Но, как мы знаем (см. задачу 5),

$$\psi^2(b) = b^2 - 2\lambda^2(b) = H(f)a - 2\lambda^2(b)$$

и, значит, $\psi^2(b) \equiv a \pmod{2}$. Поэтому число $q(2)$ нечетно. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\psi^2\psi^k(b) &= \psi^2(q(k)a + k^m b) = \\ &= (2^n q(k) + k^m q(2))a + 2^m k^m b \equiv k^m q(2)a \pmod{2^m}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi^k\psi^2(b) &= \psi^k(q(2)a + 2^m b) = \\ &= k^n q(2)a + 2^m \psi^k(b) \equiv k^n q(2)a \pmod{2^m}.\end{aligned}$$

Поскольку $\psi^2 \circ \psi^k = \psi^k \circ \psi^2$ (см. формулу (6)), этим доказано, что

$$k^m q(2) \equiv k^n q(2) \pmod{2^m}$$

и, значит (так как число $q(2)$ нечетно, а $n = 2m$), что

$$k^m(k^m - 1) \equiv 0 \pmod{2^m}$$

для любого $k \geq 1$.

В частности, для любого нечетного k должно иметь место сравнение

$$(10) \quad k^m - 1 \equiv 0 \pmod{2^m}.$$

При $k=5$ и $m > 1$ отсюда следует, что $5^m \equiv 1 \pmod{4}$, что возможно только при $m=2l$ четном. Но тогда при $k=1+2^l$

$$k^m = (1+2^l)^{2l} \equiv (1+2^{l+1})^l \equiv 1 + l2^{l+1} \pmod{2^m}$$

и, следовательно, сравнение (10) возможно только при $l2^{l+1} \equiv 0 \pmod{2^m}$, т. е. при $2l \equiv 0 \pmod{2^l}$. Поскольку последнее сравнение имеет место только при $l=1$ и 2 , этим доказано, что $m=1, 2$ или 4 , т. е. что $n=2, 4$ или 8 . $\square$

Чтобы связать теорему 1 с проблемами из лекции 8, мы по произвольному непрерывному умножению

$$\mu: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

на сфере S^{n-1} (вообще говоря, единицы не имеющего) построим некоторое отображение

$$(11) \quad c_\mu: S^{2n-1} \rightarrow S^n, \quad n = 2m.$$

Для этого, считая сферу S^{2n-1} единичной сферой унитарного пространства C^n , мы будем представлять себе послед-

нее пространство разложенным в прямую сумму $C^n \oplus C^n$ двух пространств C^n . В соответствии с этим точки сферы S^{2n-1} мы будем записывать в виде пар (u, v) , где $u, v \in C^n$ и

$$|u|^2 + |v|^2 = 1.$$

Пользуясь этим, мы разложим сферу S^{2n-1} в объединение $H^{(-)} \cup H^{(+)}$ двух множеств $H^{(-)}$ и $H^{(+)}$, где $H^{(+)}$ — подмножество сферы S^{2n-1} , состоящее из точек (u, v) , для которых $|u| \geq |v|$, а $H^{(-)}$ — подмножество, состоящее из точек (u, v) , для которых $|u| \leq |v|$.

Задача 12. Покажите, что формулы

$$\begin{aligned}\varphi^{(+)}(u, v) &= \left(\frac{u}{\sqrt{1-|v|^2}}, \sqrt{2}v \right), & (u, v) \in H^{(+)}, \\ \varphi^{(-)}(u, v) &= \left(\sqrt{2}u, \frac{v}{\sqrt{1-|u|^2}} \right), & (u, v) \in H^{(-)},\end{aligned}$$

задают гомеоморфизмы

$$\varphi^{(+)}: H^{(+)} \rightarrow S^{n-1} \times B^n, \quad \varphi^{(-)}: H^{(-)} \rightarrow B^n \times S^{n-1},$$

где, как всегда, $S^{n-1} = \{z \in C^n; |z| = 1\}$, $B^n = \{z \in C^n; |z| \leq 1\}$.

На пересечении $H^{(0)} = H^{(-)} \cap H^{(+)}$ (характеризующемся уравнениями $|u| = |v| = \frac{1}{\sqrt{2}}$) гомеоморфизмы $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$ совпадают и представляют собой гомеоморфизм

$$\varphi^{(0)}: H^{(0)} \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1}, \quad (u, v) \mapsto (\sqrt{2}u, \sqrt{2}v).$$

Например, [при $n=1$ подмножество $H^{(0)}$ гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$, а подмножества $H^{(-)}$ и $H^{(+)}$ являются полноториями с краем $H^{(0)}$].

Каждая точка y сферы S^n (в пространстве R^{n+1} с базисом $e_0, \dots, e_n$) представляется в виде

$$y = \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot e_n,$$

где $x \in S^{n-1}$, а $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. При $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ мы обозначим эту точку символом $[x, t]^{(-)}$, где $t = 1 + \frac{2}{\pi} \theta$, а при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ — символом $[x, t]^{(+)}$, где $t = 1 - \frac{2}{\pi} \theta$ (в обоих случаях t меняется от 0 до 1, причем при $t=1$ получается точка x , а при $t=0$ — соответственно точки $-e_n$ и e_n).

Введя эти обозначения, мы определим отображение c_μ формулой

$$c_\mu(u, v) = \begin{cases} \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}|v| \right]^{(+)}, & \text{если } (u, v) \in H^{(+)}, \\ \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}|u| \right]^{(-)}, & \text{если } (u, v) \in H^{(-)}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эти формулы корректно (даже при $u=0$ или $v=0$) определяют непрерывное отображение (13). $\square$

Об отображении c_μ говорят, что оно получено из умножения μ *конструкцией Хопфа*.

Выбрав и зафиксировав в сфере $\{S^{n-1}$ точку s_0 , рассмотрим отображения

$$(12) \quad x \mapsto \mu(s_0, x), \quad x \mapsto \mu(x, s_0)$$

сферы S^{n-1} в себя. Пусть d_1 и d_2 — степени этих отображений. [Контрольный вопрос. Зависят ли степени d_1 и d_2 от выбора точки s_0 ?]

Являясь отображением $S^{n-1} \rightarrow S^n$ при n четном, отображение c_μ обладает инвариантом Хопфа $H(c_\mu)$. Оказывается, что

$$(13) \quad H(c_\mu) = d_1 d_2$$

Мы эту формулу также примем без доказательства.

В случае, когда умножение μ обладает единицей s_0 , отображения (13) представляют собой тождественные отображения, и потому $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. Следовательно, в этом случае $H(c_\mu) = 1$, что согласно теореме 1 возможно только при $n = 2, 4, 8$.

Множества, в которых определено умножение с единицей, называются *унитоидами*, а топологические пространства, являющиеся унитоидами с непрерывным умножением, — *топологическими унитоидами*. Таким образом, мы видим, что сфера S^n может быть топологическим унитоидом только при $n = 1, 3, 7$. (С другой стороны, из лекции 8 мы знаем, что при этих значениях n сфера S^n является даже гладкой квазигруппой.)

В лекции 8 мы рассматривали следующие условия на натуральное число n :

Qua. Сфера S^{n-1} квазикомплексифицируема.

Prl. Сфера S^n параллелизуема.

Qgr. Сфера S^n является гладкой квазигруппой.

Div. Пространство R^{n+1} является алгеброй с делением.

Div₁. Пространство R^{n+1} является алгеброй с делением, имеющей единицу,

и установили между этими условиями ряд импликаций. Например, согласно утверждению задачи 9 лекции 8 $Div \Rightarrow Div_1$.

Теперь мы добавим еще следующие условия:

Unt. Сфера S^n является топологическим унитаром.

Odd. Существует отображение $S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$ с нечетным инвариантом Хопфа.

(Собственно говоря, в последнем условии следует предполагать, что число n нечетно. Во избежание тривиальных оговорок условимся считать, что это условие при n четном также имеет смысл, но никогда не выполнено.)

Как выше было показано—правда, на основе недоказанной формулы (13)— $Unt \Rightarrow Odd$.

В лекции 8 было доказано, что $Qgr \Rightarrow Prl$. Обратная импликация в ослабленном виде $Prl \Rightarrow Unt$ также легко доказывается. Действительно, утверждение, что сфера S^n параллелизуема, означает, что в каждой точке $x \in S^n$ определен ортонормированный базис $f_1(x), \dots, f_n(x)$ касательного пространства, непрерывно зависящий от x . Пусть $A(x)$ —матрица порядка $n+1$, строками которой являются векторы $x, f_1(x), \dots, f_n(x)$. Эта матрица ортогональна и обладает тем свойством, что $eA(x) = x$, где $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Поэтому формула

$$\mu(x, y) = xA(e_0)^{-1}A(y)$$

определяет на S^n умножение с единицей e_0 . $\square$

Билинейная операция $x, y \mapsto x \times y$ на евклидовом пространстве $\mathcal{A}$ называется **векторным умножением**, если для любых векторов $x, y \in \mathcal{A}$

а) вектор $x \times y$ ортогонален векторам x и y :

$$(x, x \times y) = 0, \quad (x \times y, y) = 0;$$

б) имеет место равенство

$$|x \times y|^2 + |(x, y)|^2 = |x|^2 |y|^2$$

(см. формулу (8) лекции I.15; в отличие от семестра I мы теперь обозначаем скалярное произведение векторов x и y символом (x, y)).

Произвольная (не обязательно билинейная) операция $x, y \mapsto x \times y$ на евклидовом пространстве $\mathcal{A}$, обладающая свойствами а и б, называется *непрерывным векторным умножением*.

Евклидово пространство $\mathcal{A}$, одновременно являющееся алгеброй над $\mathbb{R}$, называется *нормированной алгеброй*, если

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$.

Эти определения позволяют ввести еще четыре условия:

Vect. На $\mathbb{R}^n$ существует векторное умножение.

Cont. На $\mathbb{R}^n$ существует непрерывное векторное умножение.

Norm. На $\mathbb{R}^{n+1}$ существует умножение, по отношению к которому $\mathbb{R}^n$ является нормированной алгеброй.

Norm₁. На $\mathbb{R}^{n+1}$ существует умножение, по отношению к которому $\mathbb{R}^n$ является нормированной алгеброй с единицей.

Пример обычного векторного умножения показывает, что условие **Vect** выполнено при $n=3$. Оно выполнено также при $n=1$. (На одномерном евклидовом пространстве свойствами а и б обладает нулевое умножение.)

Пример полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ тела $\mathbb{H}$ и алгебры $\mathbb{C}a$ показывает, что условие **Norm₁** выполнено при $n+1=1, 2, 4, 8$.

Ясно, что любая нормированная алгебра является алгеброй с делением (для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ операторы $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$ имеют нулевое ядро и потому—в силу конечномерности пространства $\mathcal{A}$ —невырождены). Поэтому **Norm** $\Rightarrow$ **Div**.

Задача 13. Покажите, что **Norm** $\Leftrightarrow$ **Norm₁**. [Указание. Ср. задачу 9 лекции 8.]

Пусть e —единица нормированной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей и $\mathcal{A}^\perp$ —ее ортогональное дополнение. Для любых векторов $x, y \in \mathcal{A}^\perp$ мы обозначим через $x \times y \in \mathcal{A}^\perp$ ортогональную проекцию вектора $x \times y$ на $\mathcal{A}^\perp$.

Задача 14. Покажите, что операция $x, y \mapsto x \times y$ является векторным умножением на $\mathcal{A}^\perp$. [Указание. Докажите, что

$$x \times \bar{y} = (y, y)x, \text{ где } \bar{y} = ke - y', \text{ если } y = ke + y' \text{ и } e \perp y'.]$$

Следовательно, **Norm₁** $\Rightarrow$ **Vect**.

Обратно, пусть $\mathcal{A}'$ —евклидово пространство с векторным умножением. Рассмотрим евклидово пространство

$\mathcal{A} = \mathcal{R}e \oplus \mathcal{A}'$ со скалярным произведением $(ae + x, be + y) = ab + (x, y)$ (ортогональную прямую сумму одномерного пространства $\mathcal{R}e$ и пространства $\mathcal{A}'$).

Задача 15. Покажите, что относительно умножения

$$(ae + x)(be + y) = (ab - (x, y))e + (ay + bx + x \times y)$$

пространство $\mathcal{A}$ является нормированной алгеброй с единицей e .

Следовательно, $\mathbf{Vect} \Rightarrow \mathbf{Norm}_1$.

Эта же конструкция доказывает, что $\mathbf{Cont} \Rightarrow \mathbf{Unt}$.

Далее, легко видеть, что $\mathbf{Vect} \Rightarrow \mathbf{Qua}$. Действительно, каждое векторное умножение в пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого вектора $x \in S^{n-1}$ определяет в касательном пространстве $I_x S^{n-1} = (Rx)^\perp$ оператор

$$I_x y = x \times y, \quad y \in I_x S^{n-1}.$$

Так как $|x| = 1$ и $(x, y) = 0$, то $|I_x y|^2 = |x|^2 |y|^2 - (x, y)^2 = |y|^2$ и, значит, оператор I_x ортогонален, а так как $(I_x y, y) = (x \times y, y) = 0$, то этот оператор и кососимметричен. Поэтому $I_x^2 = -\text{id}$ (см. задачу 3 лекции 8), т. е. операторы I_x являются операторами комплексной структуры. $\square$

Этим построением мы фактически уже пользовались в лекции 8.

Обратная импликация здесь опять элементарно доказывается лишь в ослабленном виде $\mathbf{Qua} \Rightarrow \mathbf{Cont}$.

Пусть $x \mapsto I_x$, $x \in S^{n-1}$, — квазикомплексная структура на сфере S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что для любого единичного вектора $y \in I_x S^{n-1}$ векторы y и $I_x y$ линейно независимы (составляют базис порожденного ими подпространства $[y, I_x y]$). [Действительно, если $ay + bI_x y = 0$, то $aI_x y - by = 0$ и, значит, $(a^2 + b^2)y = 0$.] Поэтому определен вектор

$$x \times y = \frac{I_x y - (I_x y, y)y}{|I_x y - (I_x y, y)y|}$$

(единичный вектор, составляющий вместе с вектором y ортонормированный базис плоскости $[y, I_x y]$, одноименный с базисом $y, I_x y$). Тем самым произведение $x \times y$ определено для любых ортогональных векторов $x, y \in S^{n-1}$.

Распространим его на любые векторы $x, y \in \mathbb{R}^n$, положив

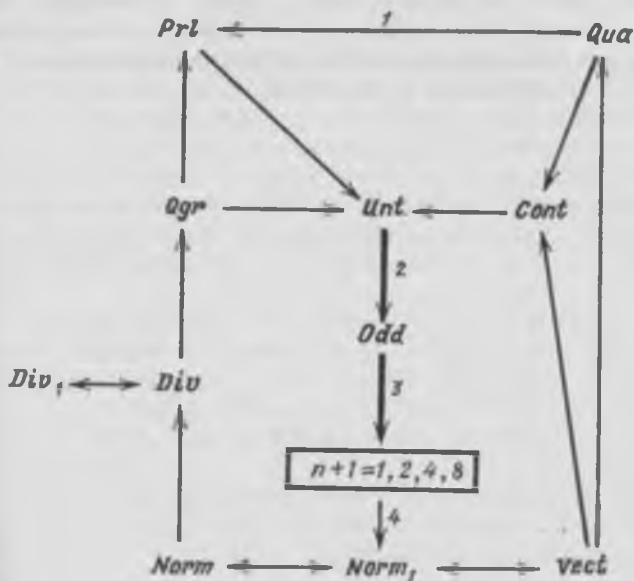
$$x \times y = \begin{cases} 0, & \text{если векторы } x, y \text{ линейно зависимы,} \\ \sqrt{|x|^2 |y|^2 - (x, y)^2} (u \times v) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$u = \frac{x}{|x|}, \quad v = \frac{|x|y - (x, y)x}{||x|y - (x, y)x|}$$

— векторы, получающиеся из векторов x, y процессом ортогонализации Грама—Шмидта. Ясно, что построенное так умножение обладает свойствами а и б. $\square$

Соберем вместе все наши импликации. Тонкие стрелки здесь изображают импликации, либо тривиальные, либо



элементарно доказываемые. Импликация 1 составляет содержание теоремы Кирхгофа (см. предложение 1 лекции 8), а импликация 4 вытекает из существования алгебр R, C, H, Ca . Две утолщенные стрелки изображают импликации, доказанные нами лишь частично и/или с купюрами. Наиболее глубокий и трудно доказуемый факт выражает импликация 3.

Техническая импликация 2 имеет существенно более простой характер, и ее доказательство, хотя нами полностью и опущенное, основывается исключительно на элементарных общих свойствах K -групп, которые у нас просто не было времени изложить.

Водя пальцем по диаграмме импликаций, мы немедленно убеждаемся, что, двигаясь по стрелкам, можно от любого условия перейти к любому другому. Это означает, что *все десять условий на число n равносильны*.

Удивительный результат!

Импликация $Pri \Rightarrow n+1 = 1, 2, 4, 8$ составляет содержание утверждения Б из лекции 8.

Конечно, хотелось бы иметь более прямое доказательство равносильности, скажем, условий *Div*, *Norm* и *Cont*. Единственно, что до сих пор в этом направлении сделано,— это доказанная еще в конце XIX века Гурвицем теорема, утверждающая, что *любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из алгебр R , C , H и Ca* (т. е. импликация 4 обратима).

Главные расслоения над сферами.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau_{S^{n+1}}$.— Характеристическое отображение для расслоения $\tau_{S^{n+1}}^U$.— Непараллелизуемость сфер S^{4l+1} .— Гомотопические группы пунктированных пространств.— Альтернативное определение гомотопических групп.— Гомотопические группы и классы отображений сфер.— Гомотопические группы абелевых пространств.

Изложенное—с лакунами—в предыдущей лекции доказательство несуществования при $n \neq 1, 2, 4, 8$ отображений с нечетным инвариантом Хопфа представляется несколько искусственным и не выясняющим сути дела. В этой и следующих двух лекциях мы на примере доказательства непараллелизуемости сфер S^{n+1} при $n = 4l$ разовьем другой, более прямой подход, лишенный этого недостатка. Затем мы свяжем его с K -группами.

Пусть $\xi = (\mathcal{E}, p, S^{n+1})$ —произвольное главное расслоение над сферой S^{n+1} (нам будет сейчас удобно обозначать проекцию символом p , а не π , как раньше) и пусть $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ —открытые множества сферы S^{n+1} , состоящие из точек $x \in S^{n+1}$, для которых соответственно $x^{n+1} < 1/2$ и $x^{n+1} > -1/2$.

Задача 1. Покажите, что над каждым множеством $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ расслоение ξ обладает сечением. [Указание. Множества $U_{(+)}$ и $U_{(-)}$ гомеоморфны открытому $(n+1)$ -мерному шару $\mathbb{B}^{n+1}$.]

Пусть $s_{(-)}$ —сечение расслоения ξ над $U_{(-)}$, а $s_{(+)}$ —сечение расслоения ξ над $U_{(+)}$. Тогда для любой точки $x \in U_{(-)} \cap U_{(+)}$ (и, в частности, для любой точки x экваториальной сферы S^n : $x^{n+1} = 0$) определен элемент

$$Tx = \tau(s_{(+)}(x), s_{(-)}(x)),$$

где τ —отображение сдвига для расслоения ξ (см. лекцию 1). (Для расслоения $(SO(n+2), p, S^{n+1})$ из лекции 8 элемент Tx определяется формулой $Tx = s_{(+)}^{-1}(x)s_{(-)}(x)$.) В общем случае

$$s_{(-)}(x) = s_{(+)}(x)Tx, \quad x \in S^n.$$

Ясно, что отображение

$$(1) \quad T: S^n \rightarrow \mathcal{G}, \quad x \mapsto Tx, \quad x \in S^n,$$

непрерывно. Оно называется *характеристическим отображением* (для главного расслоения ξ).

Конечно, отображение T зависит от выбора сечений $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$.

Пусть $s'_{(-)}$ и $s'_{(+)}$ — другие сечения расслоения ξ над $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ и пусть $T': S^n \rightarrow \mathcal{G}$ — соответствующее характеристическое отображение. Тогда если

$$h_{(-)}: U_{(-)} \rightarrow \mathcal{G}, \quad h_{(+)}: U_{(+)} \rightarrow \mathcal{G}$$

— отображения, заданные формулами

$$h_{(-)}(x) = \tau(s'_{(-)}(x), s_{(-)}(x)), \quad h_{(+)}(x) = \tau(s'_{(+)}(x), s_{(+)}(x)),$$

то на S^n будет иметь место равенство

$$T'(x) = h_{(-)}^{-1}(x) T(x) h_{(+)}(x), \quad x \in S^n.$$

Для любой точки $x \in S^n$ и любого числа $t \in I$, $I = [0, 1]$, мы введем в рассмотрение точки $\mu_{(-)}(x, t)$, $\mu_{(+)}(x, t)$ сферы S^{n+1} , определенные соответственно формулами

$$\mu_{(-)}(x, t) = \cos \frac{\pi}{2} t \cdot x - \sin \frac{\pi}{2} t \cdot e_{n+1},$$

$$\mu_{(+)}(x, t) = \cos \frac{\pi}{2} t \cdot x + \sin \frac{\pi}{2} t \cdot e_{n+1}.$$

(При t , меняющемся от 0 до 1, эти точки пробегают отрезки меридиана сферы S^{n+1} , соединяющего точку экватора x с полюсами $-e_{n+1}$ и e_{n+1} соответственно.) Тогда формула

$$F(x, t) = h_{(-)}^{-1}(\mu_{(-)}(x, t)) T(x) h_{(+)}(\mu_{(+)}(x, t)), \quad x \in S^n, t \in I,$$

будет определять некоторую гомотопию

$$F: S^n \times I \rightarrow \mathcal{G}$$

(см. определение 3 лекции III.26), связывающую отображение T' с отображением

$$a^{-1}Tb: x \mapsto a^{-1}T(x)b,$$

где $a = h_{(-)}(-e_{n+1})$, $b = h_{(+)}(e_{n+1})$.

Предположим, что группа $\mathcal{G}$ линейно связна (что заведомо выполнено для группы $SO(n+2)$) и, значит, что в $\mathcal{G}$ существуют пути u и v , соединяющие точки a и b .

единицей e группы $\mathcal{G}$. Тогда формула $(x, t) \mapsto u(t)^{-1}T(x)u(t)$ будет задавать гомотопию, связывающую отображение $a^{-1}Tb$ с отображением T . Таким образом, в этом случае отображения T и T' гомотопны.

Этим доказано, что в случае, когда группа $\mathcal{G}$ линейно связна, гомотопический класс $[T]$ характеристического отображения (1) не зависит от случайностей построения (выбора сечений $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$). Он называется характеристическим классом расслоения ξ . (С характеристическими классами из лекций 22—23 гомотопический класс $[T]$ никак непосредственно не связан.)

Если расслоение ξ тривиально (и, следовательно, обладает сечением s над всей сферой S^{n+1}), то, приняв за $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$ ограничения сечения s , соответственно, на $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$, мы получим в качестве характеристического отображения T постоянное отображение const_e , переводящее сферу S^n в единицу e группы $\mathcal{G}$. Называя гомотопический класс постоянного отображения const_e тривиальным классом, мы видим, следовательно, что характеристический класс тривиального главного расслоения тривиален.

Множество всех гомотопических классов непрерывных отображений $S^n \rightarrow \mathcal{G}$ сферы S^n в линейно связную группу $\mathcal{G}$ обозначается символом $\pi_n \mathcal{G}$.

По определению $[T] \in \pi_n \mathcal{G}$.

Задача 2. Множество $\mathcal{G}^{S^n}$ всех непрерывных отображений $S^n \rightarrow \mathcal{G}$ естественным образом наделяется структурой группы. Покажите, что а) все отображения, гомотопные постоянному отображению

$$\text{const}_e: S^n \rightarrow \mathcal{G}, \quad x \mapsto e, \quad x \in S^n,$$

составляют инвариантную подгруппу группы $\mathcal{G}^{S^n}$;

б) смежные классы по этой подгруппе совпадают с гомотопическими классами отображений $S^n \rightarrow \mathcal{G}$.

Тем самым множество $\pi_n \mathcal{G}$ естественным образом определяется как группа. Записанная аддитивно эта группа называется n -ой гомотопической группой линейно связной группы $\mathcal{G}$. Ее нулем служит тривиальный класс $[\text{const}_e]$.

Ясно, что характеристический класс $[T] \in \pi_n \mathcal{G}$ зависит только от класса изоморфизма главного расслоения ξ , т. е. для изоморфных расслоений он один и тот же.

Задача 3. Покажите, что и, обратно, главные расслоения с группой $\mathcal{G}$ над сферой S^{n+1} , обладающие одним и тем же характеристическим классом, изоморфны.

В этом смысле группа $\pi_n \mathcal{G}$ классифицирует главные $\mathcal{G}$ -расслоения над S^{n+1} .

Заметим, что здесь $n \geq 1$.

Задача 4. Обозначив через $\pi_0 \mathcal{G}$ факторгруппу группы $\mathcal{G}$ по ее компоненте единицы, покажите, что над окружностью S^1 главные $\mathcal{G}$ -расслоения классифицируются группой $\pi_0 \mathcal{G}$.

В частности, если группа $\mathcal{G}$ линейно связна, то любое главное $\mathcal{G}$ -расслоение над S^1 тривиально.

Мы видим, что утверждение Б лекции 8 о непараллелизуемости сфер S^n равносильно тому, что при $n \neq 1, 3, 7$ характеристический класс $SO(n+1)$ -расслоения $\tau_{S^{n+1}} = (SO(n+2), \pi, S^{n+1})$ нетривиален. В этой форме мы и будем его доказывать. (Заметим, что для этой переформулировки утверждения Б мы в задаче 3 не нуждаемся.)

Оказывается, что для расслоения $\tau_{S^{n+1}}$ характеристическое отображение $T: S^n \rightarrow SO(n+1)$ можно задать явной формулой.

Для любых точек $a, b \in S^{n+1}$, $b \neq -a$, мы обозначим через $R(b, a)$ элемент группы $SO(n+2)$, оставляющий на месте все векторы, ортогональные векторам a и b , а в плоскости этих векторов являющийся вращением на угол $< \pi$, переводящим вектор a в вектор b . (При $a = b$ преобразование $R(b, a)$ считается тождественным.) В частности, преобразование $\lambda = R(e_n, e_{n+1})^2$ является поворотом в плоскости последних двух координат на угол π .

Задача 5. Покажите, что вращение $R(b, a)$ задается формулой

$$R(b, a)x = x - \frac{(a+b)x}{1+ab}(a+b) + 2(ax)b, \quad x \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Заметим, что $R(a, b) = R(b, a)^{-1}$.

Для любой точки $x \in U_{(-)}$ (любой точки $x \in U_{(+)}$) определено вращение $\lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1})$ (вращение $R(x, e_{n+1})$), переводящее вектор e_{n+1} в вектор x . Это означает, что формулы

$$\begin{aligned} s_{(-)}(x) &= \lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1}), & x \in U_{(-)}, \\ s_{(+)}(x) &= R(x, e_{n+1}), & x \in U_{(+)}. \end{aligned}$$

определяют сечения

$$s_{(-)}: U_{(-)} \rightarrow SO(n+2), \quad s_{(+)}: U_{(+)} \rightarrow SO(n+2)$$

расслоения $\tau_{S^{n+1}}$ над $U_{(-)}$ и $U_{(+)}$ соответственно. (Заметим, что это дает решение задачи 1 для расслоения $\tau_{S^{n+1}}$.) Следовательно, формула

$$T_{n+1}x = R(e_{n+1}, x) \circ \lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1}), \quad x \in S^n,$$

задает отображение

$$T_{n+1}: S^n \rightarrow SO(n+1),$$

характеристическое для расслоения $\tau_{S^{n+1}}$.

Задача 6. Докажите, что

$$T_{n+1}x = R(x, e_{n+1})^2 = S_x \circ S_{e_n}, \quad x \in S^n,$$

где S_x — симметрия пространства R^{n+1} в гиперплоскости, проходящей через точку 0 ортогонально вектору x . [Указание. Достаточно доказать, что при $x \neq \pm e_n$ вращения $T_{n+1}x$ и $R(x, e_{n+1})^2$ одинаково действуют на двумерной сфере, высекаемой на сфере S^n трехмерным пространством, порожденным векторами x, e_{n+1}, e_n .]

Таким образом, вращение $T_{n+1}x$ оставляет на месте все векторы пространства R^{n+1} , ортогональные векторам x и e_n , а плоскость, порожденную векторами x и e_n , поворачивает на удвоенный угол между этими векторами. (При $x = \pm e_n$ преобразование $T_{n+1}x$ тождественно.)

Задача 7. Покажите, что

$$T_{n+1}x = \|\delta_{ij} - 2x_i x_j\| \cdot \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

для любой точки $x = (x_0, \dots, x_n)$ сферы S^n (где, как всегда, E — единичная матрица порядка n ; индексы у координат мы пишем теперь вниз). [Указание. Сечение $s_{(+)}$ выражается формулой

$$s_{(+)}(x) = \begin{bmatrix} \cdot & x_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{1+x^2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -x_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -x_n & x_{n+1} & \cdot \end{bmatrix},$$

где $x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in U_{(+)}$

В частности, равенство $T_{n+1}x = T_{n+1}y$ имеет место тогда, и только тогда, когда $y = \pm x$. Поэтому образ $T_{n+1}S^n$ сферы S^n при отображении T_{n+1} представляет собой подмногообразие группы $SO(n+1)$, диффеоморфное проективному пространству RP^n (а отображение $T_{n+1}: S^n \rightarrow T_{n+1}S^n$ является двулистным накрытием).

Задача 8. Покажите, что составное отображение

$$(2) \quad S^n \xrightarrow{T_{n+1}} SO(n+1) \xrightarrow{p_1} S^n$$

сферы S^n на себя, где p_1 — проекция главного расслоения τ_{S^n} , является отображением степени 0 при n четном и степени 2 при n нечетном. [Указание. Для вычисления

степени воспользуйтесь предложением 1 лекции III.26, имея в виду, что на каждой из полусфер $x^n > 0$ и $x^n < 0$ отображение (2) является гомеоморфизмом на проколотую сферу $S^n \setminus \{-e_n\}$. При этом на полусфере $x^n > 0$ отображение (2) сохраняет ориентации (имеет степень $+1$). Степень же этого отображения на полусфере $x^n < 0$ равна степени $(-1)^{n+1}$ антиподального отображения $x \mapsto -x$.]

Если отображение T_{n+1}^U гомотопно постоянному (характеристический класс $[T_{n+1}^U]$ тривиален), то отображение (2) также гомотопно постоянному и потому его степень равна нулю. Следовательно, при нечетном n отображение T_{n+1}^U не гомотопно постоянному и, значит, расслоение $\tau_{S^{n+1}}^U$ нетривиально. Иными словами, *при нечетном n сфера S^{n+1} не параллелизуема.*

В случае когда n четно (только и нужном для задачи о комплексифицируемости сфер), требуются более тонкие аргументы.

При четном $n = 2m$ сферу $S^{n+1} = S^{2m+1}$ можно считать единичной сферой унитарного пространства C^{m+1} (с базисом $e_0, \dots, e_m$). Это позволяет ввести в рассмотрение унитарный аналог $\tau_{S^{n+1}}^U$ главного $SO(n+1)$ -расслоения $\tau_{S^{n+1}}$. По определению

$$\tau_{S^{n+1}}^U = (U(m+1), p^U, S^{n+1}),$$

где p^U — отображение $U(m+1) \rightarrow S^{n+1}$, определенное формулой

$$p^U A = A e_m, \quad A \in U(m+1).$$

[Контрольный вопрос: как связано с касательным расслоением $\tau_{S^{n+1}}$ комплексное векторное расслоение $\tau_{S^{n+1}}^U$, ассоциированное с главным расслоением $\tau_{S^{n+1}}^U$?]

Характеристическое для расслоения $\tau_{S^{n+1}}^U$ отображение T_{n+1}^U является отображением $S^n \rightarrow U(m)$, $n = 2m$, и также может быть задано явной формулой.

Задача 9. Покажите, что

$$T_{n+1}^U z = \left| \delta_{ij} - \frac{2z_i z_j}{(1+z_m)^2} \right|, \quad i, j = 0, \dots, m-1,$$

для любой точки $z = (z_0, \dots, z_m)$ экваториальной сферы $S^n \subset S^{n+1}$ (характеризуемой условием $\operatorname{Re} z_m = 0$).

Аналогом составного отображения (2) является отображение

$$(3) \quad S^n \xrightarrow{\tau_{n+1}^U} U(m) \xrightarrow{p_1^U} S^{n-1},$$

где p_1^U — проекция $U(m) \rightarrow S^{n-1}$ главного расслоения $\tau_{S^{n-1}}^U$. В отличие от отображения (2) оно является отображением сферы S^n на сферу S^{n-1} меньшей размерности и поэтому вопрос о том, гомотопно ли оно постоянному отображению, является трудной и деликатной задачей.

Чтобы связать отображение T_{n+1}^U с отображением T_{n+1} (исследование которого является нашей конечной целью), мы воспользуемся отождествлением $C^m = \mathbb{R}^n$, $n = 2m$, в соответствии с которым группа $U(m)$ оказывается подгруппой группы $SO(n)$ (это в точности ортогональная симметрическая группа $Sp(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$; ср. задачу 4 лекции III.11). Таким образом, $U(m) \subset SO(n)$, $U(m+1) \subset SO(n+2)$ и в силу этих вложений сечения $s_{(+)}$, $s_{(-)}$ расслоения $\tau_{S^{n+1}}^U$ будут сечениями расслоения $\tau_{S^{n+1}}$, а отображения T_{n+1}^U и T_{n+1} будут связаны формулой

$$(4) \quad T_{n+1} = i \circ T_{n+1}^U,$$

где i — вложение $U(m) \rightarrow SO(n) \subset SO(n+1)$.

[Аналогичным образом при $m = 2l+1$ (т. е. при $n = 4l+2$) над сферой $S^{n+1} = S^{4l+3}$ определено главное расслоение $(U^H(l+1), p, S^{n+1})$ с кватернионно унитарной группой $U^H(l)$ и для его характеристического отображения T_{n+1}^{Sp} имеет место формула

$$T_{n+1}^U = i' \circ T_{n+1}^{Sp},$$

где i' — вложение $U^H(l) \rightarrow U(2l) \subset U(2l+1)$. Поскольку группа $U(2l)$ является слоем проекции $p_1^U: U(2l+1) \rightarrow S^{4l+1} = S^{n-1}$, откуда следует, что при нечетном n отображение (3) является постоянным отображением.]

Чтобы использовать формулу (4), нам понадобятся некоторые общие конструкции.

Для топологических пространств $\mathcal{X}$ некоторого класса, включающего все линейно связные топологические группы $\mathcal{G}$ и все линейно связные и односвязные топологические пространства (и, значит, в частности, сферы S^n ,

$n \geq 2$), и любого $n \geq 1$ мы введем в множество

$$\pi_n \mathcal{X} = [S^n, \mathcal{X}]$$

всех гомотопических классов непрерывных отображений $S^n \rightarrow \mathcal{X}$ операцию сложения, по отношению к которой это множество является абелевой группой (с нулем 0 — гомотопическим классом const произвольного постоянного отображения $\text{const}: S^n \rightarrow \mathcal{X}$) и докажем (к сожалению, лишь частично) следующие утверждения:

а. В случае когда $\mathcal{X}$ является линейно связной топологической группой $\mathcal{G}$, группа $\pi_n \mathcal{X}$ совпадает с введенной выше группой $\pi_n \mathcal{G}$.

б. Для любого непрерывного отображения $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ отображение $f_*: \pi_n \mathcal{X} \rightarrow \pi_n \mathcal{Y}$, определенное формулой

$$f_* \alpha = [f \circ u], \quad \alpha \in \pi_n \mathcal{X},$$

где u — произвольное отображение $S^n \rightarrow \mathcal{X}$ гомотопического класса α , является гомоморфизмом. При этом $(\text{id})_* = \text{id}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (свойство функториальности) и $f_* = g_*$, если отображения f и g гомотопны (свойство гомотопической инвариантности). Если отображение f гомотопно постоянному, то гомоморфизм f_* является нулевым (всю группу $\pi_n \mathcal{X}$ переводит в нуль группы $\pi_n \mathcal{Y}$).

в. Для любой линейно связной группы Ли $\mathcal{G}$ и любой ее линейно связной замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ определен гомоморфизм

$$(5) \quad \partial: \pi_{n+1}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \rightarrow \pi_n \mathcal{H},$$

обладающий тем свойством, что последовательность

$$(6) \quad \dots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} \pi_n \mathcal{H} \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathcal{G} \xrightarrow{p_*} \pi_n \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \dots$$

групп и гомоморфизмов, где $i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ — вложение, а $p: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ — проекция, является точной последовательностью (в каждом члене образ входящего гомоморфизма совпадает с ядром выходящего). При этом для любого гомоморфизма $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, переводящего подгруппу $\mathcal{H}$ в подгруппу $\mathcal{H}' \subset \mathcal{G}'$, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\mathcal{G}'/\mathcal{H}') & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathcal{H}' \end{array}$$

вертикальные стрелки которой индуцированы гомоморфизмом φ (т. е., точнее, отображениями $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ и $\mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}'/\mathcal{H}'$, определенными гомоморфизмом φ), является коммутативной диаграммой (при движении по стрелкам диаграммы от верхнего левого угла к правому нижнему результат не зависит от выбора пути).

г. При $\mathcal{G} = \text{SO}(n)$, $\mathcal{H} = \text{SO}(n-1)$ образ гомоморфизма $\partial: \pi_{n+1}S^n \rightarrow \pi_n\text{SO}(n)$ (напомним, что $\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n) = S^n$) совпадает с образом гомоморфизма

$$(T_n)_*: \pi_n S^{n-1} \rightarrow \pi_n \text{SO}(n),$$

индуцированного характеристическим отображением $T_n: S^{n-1} \rightarrow \text{SO}(n)$.

д. Группа $\pi_{n+1}S^{n+1}$ при $n \geq 3$ нетривиальна.

е. Отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ четной степени индуцирует при $n \geq 3$ нулевой гомоморфизм $f_*: \pi_{n+1}S^n \rightarrow \pi_{n+1}S^n$.

ж. При $n = 4l$ отображение (3) негомотопно постоянному (задает отличный от нуля элемент группы $\pi_{4l}S^{4l-1}$).

Этих фактов уже достаточно для доказательства утверждения Б лекции 8 при $n = 4l$.

Предложение 1. При $n = 4l$ сфера S^{n+1} не параллелизуема (и, значит, сфера S^n не квазикомплексифицируема).

Доказательство. Рассмотрим — очевидно коммутативную — диаграмму

$$(7) \quad \begin{array}{ccccc} & \pi_n \text{SO}(n-1) & = & \pi_n \text{SO}(n-1) & \\ & \downarrow i'_* & & \downarrow i''_* & \\ \pi_{n+1} S^n & \xrightarrow{d} & \pi_n \text{SO}(n) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n \text{SO}(n+1) \\ & \nearrow (T_n)_* & \downarrow p'_* & & \downarrow p''_* \\ \pi_n S^{n-1} & & \pi_n S^{n-1} & \xrightarrow{k_*} & \pi_n (\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n-1)) \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d'' \\ & & \pi_{n-1} \text{SO}(n-1) & = & \pi_{n-1} \text{SO}(n-1) \end{array}$$

с точными строками и столбцами, в которой

∂ — гомоморфизм (5) при $\mathcal{G} = \text{SO}(n+1)$ и $\mathcal{H} = \text{SO}(n)$;

j — вложение $\text{SO}(n) \rightarrow \text{SO}(n+1)$;

k — индуцированное вложение $S^{n-1} = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1) \rightarrow \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n-1)$;

i', i'' — вложения $SO(n-1) \rightarrow SO(n), \quad SO(n-1) \rightarrow SO(n+1);$

p', p'' — проекции $SO(n) \rightarrow S^{n-1}, \quad SO(n+1) \rightarrow SO(n+1)/SO(n-1);$

∂', ∂'' — соответствующие гомоморфизмы (1).

Пусть $\eta \in \pi_n S^{n-1}$. Если $k_*\eta = 0$, то $\partial'\eta = \partial''k_*\eta = 0$, и, значит, — в силу точности — существует такой элемент $\alpha \in \pi_n SO(n)$, что $p'_*\alpha = \eta$. При этом $p'_*j_*\alpha = k_*p'_*\alpha = k_*\eta = 0$ и, значит, существует такой элемент $\beta \in \pi_n SO(n-1)$, что $i'_*\beta = j_*\alpha$. Но тогда для элемента $\alpha' = \alpha - i'_*\beta$ будет иметь место равенство

$$j_*\alpha' = j_*\alpha - j_*i'_*\beta = j_*\alpha - i''_*\beta = 0,$$

и потому существует такой элемент $\gamma \in \pi_{n+1} S^n$, что $\partial\gamma = \alpha$. [Этот метод рассуждения называется диаграммным поиском — по-английски *diagram chasing*; его удобно производить в уме, двигая пальцем по диаграмме.] Следовательно, согласно утверждению г в группе $\pi_n S^{n-1}$ существует такой элемент γ' , что $(T_n)_*\gamma' = \alpha$ и, значит,

$$(p' \circ T_n)_*\gamma' = p'_*\alpha = \eta.$$

Но отображение $p' \circ T_n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, как мы знаем, либо гомотопно постоянному отображению (и потому индуцирует нулевой гомоморфизм $\pi_n S^{n-1} \rightarrow \pi_n S^{n-1}$), либо имеет степень 2 (и потому, в силу утверждения е, также индуцирует нулевой гомоморфизм). В обоих случаях $(p' \circ T_n)_*\gamma' = 0$ и, значит, $\eta = 0$.

Этим доказано, что гомоморфизм k_* из диаграммы (7) является мономорфизмом.

Пусть теперь α_0 — элемент группы $\pi_n SO(n)$, являющийся гомотопическим классом отображения T_{n+1}^U , рассматриваемого в силу вложения $U(m) \rightarrow SO(n)$, $m = 2l$, как отображение $S^n \rightarrow SO(n)$. Так как составное отображение

$$U(m) \rightarrow SO(n) \xrightarrow{p'} S^{n-1}$$

является, очевидно, не чем иным, как проекцией $U(m) \rightarrow S^{n-1}$ расслоения $\tau_{S^{n-1}}^U$, то элемент $p'_*\alpha_0$ представляет собой гомотопический класс отображения (3) и потому, согласно утверждению ж, отличен от нуля. Но тогда в силу мономорфности отображения k^* будет отличен от нуля элемент $p'_*j_*\alpha_0 = k^*p'_*\alpha_0$, а потому и элемент $j_*\alpha_0$ (снова диаграммный поиск!).

Для завершения доказательства остается заметить, что по определению композиция вложений $U(m) \rightarrow SO(n)$ и $j: SO(n) \rightarrow SO(n+1)$ является не чем иным, как вложением $i: U(m) \rightarrow SO(n+1)$ из формулы (4) и, значит, согласно этой формуле $j_*\alpha_0 = [T_{n+1}]$, где T_{n+1} — характеристическое отображение для расслоения $\tau_{S^{n+1}}$. Таким образом, $[T_{n+1}] \neq 0$ и потому сфера S^{n+1} не параллелизуема (расслоение $\tau_{S^{n+1}}$ не тривиально). $\square$

Перейдем теперь к доказательству утверждений а — ж.

Определение 1. Топологическое пространство $\mathcal{X}$, в котором выбрана точка x_0 , называется *пунктированным*. Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ пунктированных пространств с отмеченными точками x_0 и y_0 называется *пунктированным*, если $f(x_0) = y_0$. В записи

$$f: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0).$$

Два пунктированных отображения $f, g: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0)$ называются *пунктированно гомотопными*, если их можно связать гомотопией $F: \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{Y}$, обладающей тем свойством, что $F(x_0, t) = y_0$ для любого $t \in I$. (Такие гомотопии называются *пунктированными*.)

Пусть

$$I^n = \{t \in \mathbb{R}^n; 0 \leq t^i \leq 1, \dots, 0 \leq t^n \leq 1\}$$

— *единичный куб* пространства $\mathbb{R}^n$, а $\dot{I}^n$ — его *граница* (состоящая из точек t , для которых $t^i = 0$ или 1 хотя бы для одного индекса $i = 1, \dots, n$). Обобщая конструкцию фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ из лекции 3, мы для произвольного пунктированного пространства $(\mathcal{X}, x_0)$ рассмотрим всевозможные отображения $u: I^n \rightarrow \mathcal{X}$, для которых $u(\dot{I}^n) = x_0$. (Обозначение: $u: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$.) Два таких отображения называются *гомотопными rel $\dot{I}^n$* , если существует связывающая их гомотопия $f: I^n \times I \rightarrow \mathcal{X}$, при которой $f(t, t) = x_0$ для любых $t \in \dot{I}^n$ и $t \in I$ (т. е. такая, что для каждого $t \in I$ отображение $f_t: t \mapsto f(t, t)$ является отображением $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$).

Отождествив I^n с $I^{n-1} \times I$, мы для любых отображений $u, v: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ положим

$$(u+v)(t, t) = \begin{cases} u(t, 2t), & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(t, 2t-1), & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $t \in I^{n-1}$, $t \in I$. Ясно, что отображение $u + v$ непрерывно и является отображением $(I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$.

Задача 10. Покажите, что

а) отношение гомотопности $\text{rel } I^n$ является отношением эквивалентности;

б) формула

$$(8) \quad [u] + [v] = [u + v]$$

корректно определяет на множестве $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ всех гомотопических классов $\text{rel } I^n$ отображений $(I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ операцию сложения;

в) относительно операции (8) множество $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ является группой, нулем которой является класс $[\text{const}_{x_0}]$ постоянного отображения $\text{const}_{x_0}: t \mapsto x_0$.

[Указание. При $n=1$ все это нам уже известно из лекции 3.]

Заметим, что в лекции 3 операцию в группе $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ мы называли умножением. В соответствии с этим аддитивные обозначения мы, как правило, будем использовать только при $n \geq 2$.

Конечно, группа $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ совпадает с группой $\pi_n(\mathcal{X}_0, x_0)$, где $\mathcal{X}_0$ — компонента линейной связности пространства $\mathcal{X}$, содержащая точку x_0 .

Определение 2. Группа $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ называется n -ой (или n -мерной) гомотопической группой пунктированного пространства $\mathcal{X}$.

Замечание 1. Вместо пары (I^n, I^n) можно, конечно, использовать любую гомеоморфную пару (B, S) ; нужно только раз и навсегда выбрать и зафиксировать некоторый гомоморфизм $(B, S) \rightarrow (I^n, I^n)$. Наиболее часто используются пары (B^n, S^{n-1}) и $(E_{(+)}, S^{n-1})$, $(E_{(-)}, S^{n-1})$, где $E_{(+)}$ и $E_{(-)}$ — полусферы $x^n \geq 0$ и $x^n \leq 0$ сферы S^n .

Пусть $f: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0)$ — произвольное пунктированное отображение.

Задача 11. Докажите, что

а) для любого $n \geq 1$ формула

$$f_*[u] = [f \circ u], \quad u: (I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0),$$

корректно определяет некоторое отображение

$$f_*: \pi_n(\mathcal{X}, x_0) \rightarrow \pi_n(\mathcal{Y}, y_0);$$

б) это отображение является гомоморфизмом;

в) если $f = \text{id}$, то $f_* = \text{id}$ и $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ для любых пунктированных отображений $f: (\mathcal{X}, x_0) \rightarrow (\mathcal{Y}, y_0)$, $g: (\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow (\mathcal{Z}, z_0)$.

Свойство в называется свойством функториальности; на языке теории категорий оно означает, что π_n представляет собой функтор из категории пунктированных пространств в категорию групп.

При $n \geq 2$ каждое отображение $u: (I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ естественным образом отождествляется с отображением $u^*: (I^{n-1}, I^{n-1}) \rightarrow (\Omega\mathcal{X}, e_{x_0})$, определенным формулой

$$u^*(t)(t) = u(t, t), \quad t \in I^{n-1}, t \in I,$$

где $\Omega\mathcal{X} = \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}, x_0)$ — пространство петель пространства $\mathcal{X}$ в точке x_0 , а $e_{x_0}: t \mapsto x_0$ — постоянная петля (см. лекцию 2; здесь мы куб I^n отождествляем с кубом $I \times I^{n-1}$).

Задача 12. Покажите, что тем самым возникает отождествление

$$(9) \quad \pi_n(\mathcal{X}, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega\mathcal{X}, e_{x_0}), \quad n \geq 2.$$

Это отождествление (естественный изоморфизм) называется *изоморфизмом Гуревича*.

Если пространство $\mathcal{X}$ является топологическим унитаром с единицей x_0 , т. е. если на нем существует такое непрерывное умножение

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad (x, y) \mapsto xy,$$

что $x_0x = xx_0 = x$ для любой точки $x \in \mathcal{X}$, то формула

$$[u] \cdot [v] = [uv],$$

где $(uv)(t) = u(t)v(t)$ корректно (докажите!) определяет на $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ операцию умножения. Единицей этого умножения служит нуль $0 = [\text{const}_{x_0}]$ группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$.

Этот вывод остается, очевидно, в силе и в случае, когда точка x_0 является лишь, как говорят, *гомотопической единицей*, т. е. если $x_0x_0 = x_0$ и отображения $x \mapsto xx_0$, $x \mapsto x_0x$, $x \in \mathcal{X}$, пунктированно гомотопны тождественному отображению $\text{id}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Задача 13. Покажите, что операции сложения и умножения в $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ взаимно дистрибутивны, т. е. что для любых элементов $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ имеет место равенство

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

В частности,

$$\alpha\beta = (\alpha + 0)(0 + \beta) = \alpha 0 + 0\beta = \alpha + \beta$$

и

$$\alpha\beta = (0 + \alpha)(\beta + 0) = 0\beta + \alpha 0 = \beta + \alpha.$$

Это доказывает, что для любого топологического унитарного пространства $\mathcal{X}$ (вообще говоря, лишь с гомотопической единицей x_0) группа $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ абелева (а умножение в $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ совпадает со сложением).

Для групп $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ последний факт был уже доказан в лекции 15 (см. замечание 1 лекции 15).

[Заметим, что, таким образом, операция умножения в $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ ассоциативна, коммутативна и обратима, хотя умножение в $\mathcal{X}$ ни одним из этих свойств, вообще говоря, не обладает.]

Примером топологического унитарного пространства с гомотопической единицей является пространство петель $\Omega\mathcal{X}$. Поэтому все группы $\pi_n(\Omega\mathcal{X}, e_x)$ абелевы. В силу (9) это доказывает, что для любого пунктированного пространства $\mathcal{X}$ группа $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ при $n \geq 2$ абелева.

Абелевость групп $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, $n \geq 2$, объясняет, почему групповую операцию в них мы называем сложением.

Задача 14. Докажите абелевость групп $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, $n \geq 2$, построив для любых отображений $u, v: (I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ гомотопию $\text{rel } I^n$, связывающую отображения $u + v$ и $v + u$.

Превратим сферу S^n , $n \geq 1$, в пунктированное пространство, произвольно выбрав в S^n некоторую точку s_0 (скажем, точку e_1). Тогда для любого пунктированного пространства $\mathcal{X}$ будет определено множество

$$[S^n, \mathcal{X}]^* = \{(S^n, s_0), (\mathcal{X}, x_0)\}$$

всех пунктированных гомотопических классов $[f]^*$ пунктированных отображений $f: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$.

Заметим, что открытый куб

$$I^n = \{t \in \mathbb{R}^n; 0 < t^1 < 1, \dots, 0 < t^n < 1\},$$

являясь открытым подмножеством ориентированного пространства $\mathbb{R}^n$, естественным образом ориентирован. По аналогичным соображениям естественно ориентирован и шар B^{n+1} , являющийся областью с регулярной границей ориентированного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, а потому ориентирован и его край S^n .

Задача 15. Постройте непрерывное отображение

$$(10) \quad \chi: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (S^n, s_0),$$

гомеоморфно и с сохранением ориентации отображающее открытый куб $\dot{I}^n = I^n \setminus \dot{I}^n$ на проколотую сферу $S^n \setminus \{s_0\}$ (т. е. в другой терминологии — являющееся на $\dot{I}^n$ гомеоморфизмом степени 1).

Выбрав и зафиксировав отображение (10), мы можем каждому пунктированному отображению $f: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ сопоставить отображение

$$f \circ \chi: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0).$$

Задача 16. Покажите, что

а) формула $[f]^* \rightarrow [f \circ \chi]$ корректно определяет некоторое отображение

$$(11) \quad [S^n, \mathcal{X}]^* \rightarrow \pi_n(\mathcal{X}, x_0);$$

б) отображение (11) биективно.

Мы будем отождествлять группу $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ с множеством $[S^n, \mathcal{X}]^*$ посредством отображения (11). Таким образом, в силу этого отождествления элементами группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ будут гомотопические классы $[f]^*$ отображений $f: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$.

Задача 17. Покажите, что в группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ равенство $[f]^* = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда отображение $f: S^n \rightarrow \mathcal{X}$ может быть распространено до отображения $F: B^{n+1} \rightarrow \mathcal{X}$, переводящего в точку x_0 весь радиус Os_0 шара B^{n+1} .

Замечание 2. Ясно, что соответствие (11) зависит только от гомотопического класса $\text{rel } \dot{I}^n$ отображения (10) (элемента $[\chi]$ группы $\pi_n(S^n, s_0)$). С другой стороны, ниже мы покажем (см. замечание 1 лекции 26), что гомотопический класс $\text{rel } \dot{I}^n$ произвольного отображения вида (10) зависит только от его степени $\deg \chi$ (на $\dot{I}^n$). Поскольку по условию $\deg \chi = 1$, отсюда следует, что отождествление (11) не зависит от выбора отображения (10).

Пока же мы должны соблюдать определенную осторожность и все время помнить о произволе в выборе отображения (10).

Замечание 3. Конечно, вместо пары (S^n, s_0) мы можем взять любую гомеоморфную пару (S^n, s_0) (нужно лишь фиксировать, хотя бы с точностью до пунктирован-

ной гомотопии, определенный гомеоморфизм $(S^n, s_0) \rightarrow (S^n, s_0)$. Поскольку для любых точек $s_0, s_1 \in S^n$ существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $(S^n, s_0) \rightarrow (S^n, s_1)$ (даже движение), отсюда в силу замечания 2, в частности, следует, что выбор точки $s_0 \in S^n$ ни на что реально не влияет.

Отождествление (11) переносит сложение из группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ в множество $[S^n, \mathcal{X}]^*$. Как непосредственно — без перехода к отображениям $(I^n, I^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ — определить эту операцию?

При ответе на этот вопрос удобно считать, что $s_0 = e_1$.

Пусть, как всегда, S^{n-1} — экватор $x^n = 0$ сферы S^n и пусть S^n/S^{n-1} — пространство, получающееся стягиванием экватора S^{n-1} в точку. [По определению пространство S^n/S^{n-1} является факторпространством сферы S^n по отношению эквивалентности $\sim$, в котором $x \sim y$ тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in S^{n-1}$.]

Задача 18. Покажите, что пространство S^n/S^{n-1} естественно гомеоморфно подмножеству $S^n \vee S^n$ прямого произведения $S^n \times S^n$, состоящему из пар (x, y) , $x, y \in S^n$, в которых хотя бы одна компонента x или y совпадает с $e_1 = s_0$ («координатному кресту»). [Наглядно $S^n \vee S^n$ является объединением двух экземпляров сферы S^n со склеенными точками e_1 .]

Поэтому отображение факторизации $\mu: S^n \rightarrow S^n/S^{n-1}$ мы можем считать отображением

$$(12) \quad \mu: S^n \rightarrow S^n \vee S^n.$$

Пространство $S^n \vee S^n$ называется *букетом*.

Для любых отображений $f, g: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ мы обозначим через $f \vee g$ отображение $S^n \vee S^n \rightarrow \mathcal{X}$, совпадающее с отображением f на одной сфере букета $S^n \vee S^n$ и с отображением g — на другой. (Формально это отображение определяется равенствами

$$(f \vee g)(x, s_0) = f(x), \quad (f \vee g)(s_0, y) = g(y), \quad x, y \in S^n.)$$

Задача 19. Покажите, что в группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ имеет место равенство

$$[f]^* + [g]^* = [(f \vee g) \circ \mu]^*.$$

Это отвечает на поставленный выше вопрос.

Так как каждое пунктированное отображение $(S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ является непунктированным отображением $S^n \rightarrow \mathcal{X}$

и, аналогично, каждая пунктированная гомотопия — непунктированной гомотопией, то, поставив в соответствие каждому элементу $[f]^*$ группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ непунктированный гомотопический класс $[f]$, мы корректно определим некоторое отображение

$$(13) \quad \pi_*(\mathcal{X}, x_0) \rightarrow \pi_n \mathcal{X},$$

где, как и выше, $\pi_n \mathcal{X} = [S^n, \mathcal{X}]$ — множество обычных (непунктированных) гомотопических классов отображений $S^n \rightarrow \mathcal{X}$.

Задача 20. Покажите, что если пространство $\mathcal{X}$ линейно связно, то отображение (13) надъективно. [Указание. Для любого отображения $f: S^n \rightarrow \mathcal{X}$ отображение $\{f, u\} \circ r: S^n \times I \rightarrow \mathcal{X}$, где r — ретракция цилиндра $S^n \times I$ на его подмножество $A = (S^n \times 0) \cup \{s_0 \times I\}$, u — произвольный путь в $\mathcal{X}$, соединяющий точку $f(s_0)$ с точкой x_0 , а $\{f, u\}$ — отображение $A \rightarrow \mathcal{X}$, заданное формулой

$$\{f, u\}(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{если } t = 0, \\ u(t), & \text{если } x = s_0, \end{cases}$$

является гомотопией $S^n \times I \rightarrow \mathcal{X}$, связывающей отображение f с некоторым пунктированным отображением $f_1: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$. Поэтому нужно лишь построить хотя бы одну ретракцию r .]

Задача 21. Покажите, что для любых точек x_0, x_1 линейно связного пространства $\mathcal{X}$ группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ и $\pi_n(\mathcal{X}, x_1)$ изоморфны. [Указание. Изоморфизм зависит от пути u , соединяющего точку x_1 с точкой x_0 , и ставит в соответствие каждому элементу $[f]^* \in \pi_n(\mathcal{X}, x_1)$ конечное отображение f_1 гомотопии $\{f, u\} \circ r$, построенной в указании к задаче 20.]

Задача 22. Покажите, что изоморфизмы $\pi_n(\mathcal{X}, x_1) \rightarrow \pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, отвечающие гомотопным путям u , одинаковы. [Указание. Используйте тот же прием, заменив S^n на $S^n \times I$ и приняв за A подмножество $(S^n \times I \times \{0\}) \cup (S^n \times I \times \{1\}) \cup (S^n \times \{0\} \times I) \cup (\{s_0\} \times I \times I)$ произведения $S^n \times I \times I$]

В частности, отсюда следует, что любой элемент $\xi \in \pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ определяет некоторый автоморфизм

$$\xi^n: \pi_n(\mathcal{X}, x_0) \rightarrow \pi_n(\mathcal{X}, x_0), \quad n \geq 1,$$

группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$.

Задача 23. Покажите, что это задает действие группы $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ на группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, $n \geq 1$ (гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ в группу автоморфизмов группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, $n \geq 1$).

Задача 24. Покажите, что при $n=1$ автоморфизм ξ^* является внутренним автоморфизмом $\alpha \mapsto \xi \alpha \xi^{-1}$ группы $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$, отвечающим элементу ξ .

По построению, если $\beta = \xi^* \alpha$, где $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, и если $\alpha = [f]^*$, $\beta = [g]^*$, где $f, g: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$, то отображения f, g связаны гомотопией $F: S^n \rightarrow \mathcal{X}$, обладающей тем свойством, что петля

$$u: t \mapsto F(s_0, t), \quad t \in I,$$

принадлежит классу ξ . В частности, это означает, что при $\beta = \xi^* \alpha$ элементы α и β склеиваются отображением (13) (имеют один и тот же образ).

Задача 25. Покажите, что если, обратно, пунктированные отображения $f, g: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ связаны некоторой гомотопией $F: S^n \rightarrow \mathcal{X}$, то

$$(14) \quad \beta = \xi^* \alpha,$$

где $\xi \in \pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ — класс петли $t \mapsto F(s_0, t)$ и где $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ — классы отображений f, g .

Таким образом, два элемента $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ тогда и только тогда склеиваются отображением (13), когда для некоторого элемента $\xi \in \pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ имеет место равенство (14) (т. е. когда элементы α, β принадлежат одной орбите действия группы $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ на группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$).

Определение 3. Топологическое пространство $\mathcal{X}$ называется абелевым (или гомотопически простым), если

- а) оно линейно связно;
- б) для любого $n \geq 1$ отображение (13) инъективно (и, следовательно, биективно). [Из утверждения задачи 21 вытекает, что если отображение (13) инъективно при одном выборе точки x_0 , то оно инъективно и при любом другом; в этом смысле условие б не зависит от x_0 .]

Для абелева пространства $\mathcal{X}$ (и любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$) отображение (13) позволяет отождествить группу $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ с множеством $\pi_n \mathcal{X}$ и, следовательно, задать в $\pi_n \mathcal{X}$ операцию сложения, по отношению к которой это множество будет группой.

Группа $\pi_n \mathcal{X}$ называется n -ой гомотопической группой абелева пространства $\mathcal{X}$.

Подчеркнем, что сложение в группе $\pi_n \mathcal{X}$ определяется только через посредство отождествления (13), т. е. на основе выбора в $\mathcal{X}$ некоторой точки x_0 (от которой окончательный результат не зависит). Поэтому, хотя нам нужны только группы $\pi_n \mathcal{X}$, ход к ним через группы $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ неизбежен.

Заметим, что отображение

$$f: S^n \rightarrow \mathcal{X}$$

тогда и только тогда определяет нуль группы $\pi_n \mathcal{X}$, когда оно продолжается до некоторого отображения $B^{n+1} \rightarrow \mathcal{X}$. Ср. задачу 17.

Согласно сказанному выше после задачи 25 линейно связное пространство $\mathcal{X}$ тогда и только тогда абелево, когда для любого $n \geq 1$ и любой точки $x_0 \in \mathcal{X}$ группа $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ тривиально действует на группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$.

В частности, отсюда следует (см. задачу 24), что для любого абелева пространства $\mathcal{X}$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ абелева. Это объясняет термин «абелевы пространства».

Кроме того, так как тривиальная группа тривиально действует на любой группе, то каждое односвязное пространство $\mathcal{X}$ абелево.

Если линейно связное пространство $\mathcal{X}$ является топологической группой (или даже топологическим унитаром) с единицей x_0 , то для любого пунктированного отображения

$$f: (S^n, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$$

и любой петли

$$u: (I, I) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$$

формула

$$F(x, t) = u(t)f(x), \quad x \in S^n, \quad t \in I,$$

определяет гомотопию $F: S^n \times I \rightarrow \mathcal{X}$, для которой $u(t) = F(s_0, t)$, $t \in I$, и которая связывает отображение f с самим собой. Поэтому (см. задачу 25) в группе $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$ имеет место равенство $\alpha = \xi * \alpha$, где $\alpha = [f]^*$, $\xi = [u]$. Таким образом, группа $\pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ тривиально действует на группах $\pi_n(\mathcal{X}, x_0)$, $n \geq 1$, и, значит, пространство $\mathcal{X}$ абелево.

Таким образом, класс абелевых пространств содержит все линейно связные односвязные пространства и все линейно связные топологические группы (и даже все линейно связные унитары).

Тем самым начальный этап нашей программы доказательства предложения 1 успешно выполнен: определен класс пространств, содержащий все линейно связные односвязные пространства и все линейно связные топологические группы, и для любого пространства $\mathcal{X}$ этого класса и любого $n \geq 1$ на множестве $\pi_n \mathcal{X}$ введена операция сложения, относительно которой это множество является абелевой группой.

Осталось доказать утверждения а—ж. Мы займемся этим в следующей лекции.

Лекция 26

Гомотопическая последовательность расслоения. — Группы $\pi_n S^m$ при $n < m$. — Стабилизация групп $\pi_n SO(m)$. — Классификация отображений многообразий в сферы. — Теоремы Урысона и Титце. — Связность группы $\text{Diff}_0 \mathbb{R}^n$. — Доказательство теоремы Хопфа о продолжении.

Наша ближайшая цель будет состоять в доказательстве утверждений а—ж предыдущей лекции.

Впрочем, что касается утверждений а и б, то в лекции 25 уже были доказаны их аналоги для общего случая пунктированных пространств, и ясно, что утверждения а и б являются их непосредственными следствиями.

Утверждение в мы докажем в более общем контексте произвольных расслоений в смысле Гуревича, т. е. (см. лекцию 2) непрерывных отображений $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, обладающих связностью (непрерывным отображением s , которое каждой паре (e_0, u) , где e_0 — точка пространства $\mathcal{E}$, а $u: I \rightarrow \mathcal{B}$ — такой путь пространства $\mathcal{B}$, что $p(e_0) = u(0)$, ставит в соответствие путь $s(e_0, u)$ пространства $\mathcal{E}$, начинающийся в точке e_0 и накрывающий путь u , т. е. такой, что $pos(e_0, u) = u$).

Задача 1 (ср. замечание 2 лекции 2). Докажите, что проекция $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ любого локального тривиального расслоения $(\mathcal{E}, p, \mathcal{B})$, база $\mathcal{B}$ которого представляет собой хаусдорфово компактное (или даже паракомпактное) пространство, является расслоением в смысле Гуревича. [Указание. Рассмотрите сначала случай, когда база $\mathcal{B}$ покрывается двумя тривиализирующими окрестностями.]

В частности, расслоением в смысле Гуревича является каждое факторотображение $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{G}$ — группа Ли, а $\mathcal{H}$ — ее замкнутая подгруппа.

Мы будем применять это утверждение только к расслоениям вида $SO(n+m) \rightarrow SO(n+m)/SO(n)$ при $m=1$ и $m=2$. Поэтому, собственно говоря, достаточно доказать его лишь для этих расслоений (что, впрочем, по-видимому, несколько не легче).

Итак, пусть $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ — произвольное расслоение в смысле Гуревича со связностью s . Выбрав в $\mathcal{E}$ точку e_0 , положим $b_0 = p(e_0)$ и $\mathcal{F} = p^{-1}(b_0)$.

Нам будет удобно, выбрав некоторый гомеоморфизм $(B^{n+1}, S^n) \rightarrow (I^{n+1}, I^{n+1})$ степени 1, интерпретировать элементы группы $\pi_{n+1}(\mathcal{B}, b_0)$ как гомотопические $\text{rel } S^n$ классы

отображений

$$(1) \quad u: (B^{n+1}, S^n) \rightarrow (\mathcal{B}, b_0)$$

(см. замечание 1 лекции 25).

Легко видеть, что любое отображение (1) может быть накрыто, т. е. существует такое непрерывное отображение $u^*: B^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$, что $p \circ u^* = u$. (Например, записывая точки шара B^{n+1} в виде tx , где $x \in S^n$ и $t \in I$, мы можем определить отображение u^* формулой

$$u^*(tx) = s(u(0), u_x)(t), \quad x \in S^n, t \in I,$$

где u_x — путь $t \mapsto u(tx)$.)

Так как $u(S^n) = b_0$, то $u^*(S^n) \subset \mathcal{F}$, т. е. ограничение $v = u^*|_{S^n}$ отображения u^* на S^n можно рассматривать как отображение

$$v: S^n \rightarrow \mathcal{F}.$$

Задача 2. Покажите, что гомотопический класс $[v] \in \pi_n \mathcal{F}$ отображения v не зависит ни от выбора отображения u в гомотопическом $\text{rel } S^n$ классе $\alpha = [u]$, ни от выбора накрывающего отображения u^* .

Поэтому, в предположении, что пространство $\mathcal{F}$ абелево (и, в частности, линейно связно), формула

$$\partial \alpha = [v]$$

корректно определяет некоторое отображение

$$(2) \quad \partial: \pi_{n+1}(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \pi_n \mathcal{F}.$$

Задача 3. Докажите, что отображение (2) является гомоморфизмом.

Задача 4. Постройте отображение ∂ для не абелева пространства $\mathcal{F}$. [Указание. Оно будет в этом случае гомоморфизмом $\pi_{n+1}(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \pi_n(\mathcal{F}, e_0)$.]

В дальнейшем, мы для простоты будем предполагать абелевым (и, значит, линейно связным) не только пространство $\mathcal{F}$, но и каждое из пространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. В этом случае отображение (2) будет отображением

$$\partial: \pi_{n+1} \mathcal{B} \rightarrow \pi_n \mathcal{C}$$

и вместе с гомоморфизмами p_* и i_* , индуцированными расслоением $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ и вложением $i: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, даст возможность написать бесконечную влево последовательность

$$(3) \quad \dots \rightarrow \pi_{n+1} \mathcal{B} \xrightarrow{\partial} \pi_n \mathcal{F} \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathcal{C} \xrightarrow{p_*} \pi_n \mathcal{B} \rightarrow \dots$$

групп и гомоморфизмов. Эта последовательность называется *гомотопической последовательностью расслоения* $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$.

Задача 5. Докажите, что последовательность (3) является точной последовательностью. [Указание. Включения вида $\text{Im} \subset \text{Ker}$ очевидны. Для доказательства включения $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$ в группе $\pi_n \mathcal{F}$ достаточно заметить, что если отображение $f: S^n \rightarrow \mathcal{F}$ продолжается до отображения $F: B^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$, то $[f] = \partial[u]$, где $u = p \circ F: (B^{n+1}, S^{n+1}) \rightarrow (\mathcal{B}, b_0)$. Аналогично, если для отображения $f: S^n \rightarrow \mathcal{E}$ отображение $p \circ f: S^n \rightarrow \mathcal{B}$ продолжается до отображения $G: B^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$, то, при условии, что $G(0) = b_0$, формула

$$F(x, t) = s(f(x), G_x(t)), \quad x \in S^n, \quad t \in I,$$

где G_x — путь $t \mapsto G((1-t)x)$, определяет гомотопию $F: S^n \times I \rightarrow \mathcal{E}$, связывающую отображение f с отображением вида $S^n \rightarrow \mathcal{F}$. Если для поднятия $u^*: B^n \rightarrow \mathcal{E}$ отображения $u: (B^{n+1}, S^n) \rightarrow (\mathcal{B}, b_0)$ существует отображение $g: B^n \rightarrow \mathcal{F}$, совпадающее с u^* на S^n , то формула

$$f([x, t]_e) = \begin{cases} u^*(tx), & \text{если } e = +1, \\ g(tx), & \text{если } e = -1, \end{cases} \quad x \in S^n, \quad t \in I,$$

где $[x, t]_e$ — точка сферы S^{n+1} , расположенная в полусфере $ex^{n+1} \geq 0$ и находящаяся на меридиане экваториальной точки $x \in S^n$ на расстоянии $(1-t)\frac{\pi}{2}$ (измеренном по меридиану), корректно определяет непрерывное отображение $f: S^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$, обладающее тем свойством, что элемент $[p \circ f]$ группы $\pi_{n+1} \mathcal{B}$ является элементом, задаваемым отображением u . Поэтому $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$ в группе $\pi_n \mathcal{E}$ и $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } p^*$ в группе $\pi_{n+1} \mathcal{B}$.]

Задача 6. Докажите аналогичное утверждение для случая неабелевых $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{F}$. [Указание. См. задачу 4.]

Пусть $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ — морфизм расслоения $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ в расслоение $p': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}'$. По определению (см. лекцию 1) это означает, что имеет место коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{g} & \mathcal{B}' \end{array}$$

Ясно, что если $u^*: B^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$ накрывает $u: (B^{n+1}, S^n) \rightarrow (B, b_0)$, то $f \circ u^*$ накрывает $g \circ u$ и отображение f индуцирует отображение (которое мы будем обозначать той же буквой f) слоя $\mathcal{F}$ расслоения $p: \mathcal{E} \rightarrow B$ над точкой b_0 в слой $\mathcal{F}'$ расслоения $p': \mathcal{E}' \rightarrow B'$ над точкой $b'_0 = g(b_0)$. Поэтому отображения v и v' , построенные для отображений u и $u' = g \circ u$, связаны формулой $v' = f \circ v$. Но, по определению, если $\alpha = [u]$, то

$$g^* \alpha = [u'], \quad \partial \alpha = [v], \quad \partial(g^* \alpha) = [v'] \text{ и } f^*(\partial \alpha) = [f \circ v].$$

Этим доказано, что $\partial(g^* \alpha) = f^*(\partial \alpha)$, т. е. что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1} B & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathcal{F} \\ g_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_{n+1} B' & \xrightarrow{\partial} & \pi_n \mathcal{F}' \end{array}$$

коммутативна.

Вместе с утверждением задачи 3 (для частного случая линейно связной группы Ли $\mathcal{G}$ и ее линейно связной замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$) это доказывает утверждение в лекции 25.

Для доказательства утверждения г нам понадобится гомотопическая последовательность расслоения $\tau_{S^m} = (SO(m+1), p, S^m)$. Эта последовательность имеет вид

$$(4) \quad \dots \rightarrow \pi_{n+1} S^m \xrightarrow{\partial} \pi_n SO(m) \xrightarrow{f_*} \pi_n SO(m+1) \xrightarrow{p_*} \pi_n S^m \rightarrow \dots,$$

и, значит, чтобы ею воспользоваться, необходима информация о группах $\pi_n S^m$.

Вычислим прежде всего эти группы при $n < m$.

Согласно предложению 2 лекции III.26 в каждом гомотопическом классе отображений $S^n \rightarrow S^m$ содержится гладкое отображение $f: S^n \rightarrow S^m$. С другой стороны, если $n < m$, то согласно теореме Сарда (см. лекцию III.15) гладкое отображение $f: S^n \rightarrow S^m$ заведомо не надъективно и, значит, может рассматриваться как отображение сферы S^n в проколотую сферу $S^m \setminus \{x_0\}$, где x_0 — некоторая точка, а потому и как отображение $S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ сферы S^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ (гомеоморфное сфере с проколом $S^m \setminus \{x_0\}$). Но, ясно, что каждое отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ гомотопно постоянному отображению (скажем, в точку 0; гомотопию, связывающую последнее отображение с отображением f , можно определить формулой $F(x) = t f(x)$, где $x \in S^n$, $t \in I$). Этим доказано, что при $n < m$ каждое отобра-

жение $S^n \rightarrow S^m$ гомотопно постоянному, т. е. что

$$(5) \quad \pi_n S^m = 0 \quad \text{при } n < m.$$

Ср. доказательство односвязности сферы S^n , $n \geq 2$, в лекции 3.

Уже отсюда вытекают важные свойства групп $\pi_n SO(m)$. Действительно, если $n+1 < m$ (и тем более $n < m$), то согласно (5) отрезок последовательности (4) между группами $\pi_{n+1} S^m$ и $\pi_n S^m$ имеет вид

$$0 \rightarrow \pi_n SO(m) \xrightarrow{i_n} \pi_n SO(m+1) \rightarrow 0.$$

Поскольку точность такого отрезка равносильна тому, что гомоморфизм i_n является изоморфизмом, этим доказано, что при $n < m-1$ гомоморфизм

$$i_n: \pi_n SO(m) \rightarrow \pi_n SO(m+1)$$

представляет собой изоморфизм.

Таким образом, для любого $n \geq 1$ имеют место естественные отождествления

$$(6) \quad \pi_n SO(n+2) = \pi_n SO(n+3) = \dots,$$

т. е. группы $\pi_n SO(n+k)$ при $k \geq 2$ стабилизируются. Их общее значение (6) называется n -ой стационарной (или стабильной) гомотопической группой ортогональных групп и обозначается символом $\pi_n SO$.

Группа $\pi_n SO(n+1)$, предшествующая стационарным группам, называется метастационарной группой. Так как $\pi_n S^{n+1} = 0$, то гомоморфизм

$$(7) \quad i_n: \pi_n SO(n+1) \rightarrow \pi_n SO$$

является эпиморфизмом.

Группы $\pi_n SO$ были вычислены Боттом лет тридцать тому назад очень искусным приемом, основанным на теории Морса (связывающей топологические характеристики гладкого многообразия с числом и типом критических точек, заданных на $\mathcal{X}$ гладких функций). Оказалось, что эти группы зависят только от вычета числа n по модулю 8 (теорема периодичности Ботта) и имеют следующий вид:

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_n SO$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

где $\mathbb{Z}$ — свободная циклическая группа, а $\mathbb{Z}/2$ — группа второго порядка.

Хотя теперь этот результат имеет и другие доказательства, не опирающиеся на теорию Морса, но все они слишком сложны, чтобы мы могли здесь их изложить. [Превосходное изложение теории Морса и первоначального доказательства Ботта теоремы о периодичности содержится в замечательной книге: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]

Аналогичным образом из точности гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1} S^{2m+1} \rightarrow \pi_n U(m) \rightarrow \pi_n U(m+1) \rightarrow \pi_n S^{2m+1} \rightarrow \dots$$

расслоения $\tau_{2m+1}^U = (U(m+1), p^U, S^{2m+1})$ вытекает, что при $n < 2m$ группы $\pi_n U(m)$ также стабилизируются. Эти группы обозначаются символом $\pi_n U$.

Теорема периодичности Ботта для унитарных групп утверждает, что группы $\pi_n U$ зависят только от вычета числа n по модулю 2 и потому при n четном изоморфны группе $\pi_0 U(1) = \{1\}$ (см. задачу 4 лекции 25), а при n нечетном — группе $\pi_1 U(1) = \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ (см. лекцию 3). Таким образом, согласно Ботту

$$\pi_n U = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Ботт вычислил также и метастационарную группу $\pi_{2m} U(m)$. Оказывается, что эта группа является циклической группой порядка $m!$:

$$\pi_{2m} U(m) = \mathbb{Z}/m!.$$

Задача 7. Пусть

$$\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_2 \subset \dots \subset \mathcal{Y}_n \subset \mathcal{Y}_{n+1} \subset \dots$$

— возрастающая последовательность вложенных друг в друга топологических групп. Объединение $\mathcal{Y}$ этой последовательности очевидным образом является группой. Введем в $\mathcal{Y}$ топологию, считая множество $U \subset \mathcal{Y}$ открытым тогда и только тогда, когда для любого $n \geq 1$ пересечение $U \cap \mathcal{Y}_n$ открыто в $\mathcal{Y}_n$. Проверьте, что

а) это действительно задает в $\mathcal{Y}$ топологию;

б) относительно этой топологии $\mathcal{G}$ является топологической группой. В случае $\mathcal{G}_n = SO(n)$ группа $\mathcal{G}$ обозначается символом SO , а в случае $\mathcal{G}_n = U(n)$ — символом U . Элементами групп SO и U можно считать бесконечные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

где $A \in SO(n)$ или $U(n)$ (число n произвольно). Покажите, что для любого $n \geq 1$ стационарные гомотопические группы $\pi_n SO$ и $\pi_n U$ являются — с точностью до естественного изоморфизма — не чем иным, как гомотопическими группами групп SO и U (что и оправдывает их обозначение).

Теперь мы должны вычислить группы $\pi_n S^m$ при $n = m$. В отличие от случая $m < n$ эта задача отнюдь не тривиальна и ее решение требует большой и длительной работы.

Пусть $\mathcal{X}$ — ориентированное компактное n -мерное хаусдорфово гладкое многообразие. Согласно лекции III.26 для любого гладкого (и даже любого непрерывного) отображения $f: \mathcal{X} \rightarrow S^n$ определена его степень $\deg f$, зависящая только от гомотопического класса $\alpha = [f]$ (напомним, что сферу S^n мы считаем естественным образом ориентированной; см. в лекции 25 текст, предшествующий задаче 15). Поэтому формула

$$\deg \alpha = \deg f$$

корректно определяет некоторое отображение

$$(8) \quad \deg: [\mathcal{X}, S^n] \rightarrow \mathbb{Z},$$

где $[\mathcal{X}, S^n]$ — множество всех гомотопических классов непрерывных отображений $\mathcal{X} \rightarrow S^n$.

Предложение 1. Если многообразие $\mathcal{X}$ связно, то отображение (8) биективно.

Доказательство. Сначала мы докажем надъективность отображения (8), а затем его инъективность.

Надъективность. Так как существуют диффеоморфизмы $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ степени -1 (таким диффеоморфизмом является, например, симметрия относительно произвольной гиперплоскости, проходящей через начало координат) и $\deg(\varphi \circ f) = -\deg f$, то для доказательства надъективности

отображения (8) достаточно для любого положительного $m > 0$ построить отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow S^n$ степени m .

Пусть $(U_1, h_1), \dots, (U_m, h_m)$ — такие положительно ориентированные карты многообразия $\mathcal{X}$, что

1) носители $U_1, \dots, U_m$ этих карт попарно не пересекаются;

2) каждое отображение $h_1, \dots, h_m$ является диффеоморфизмом на шар $\mathbb{B}^n$.

Пусть, кроме того, $\chi: (\mathbb{B}^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$ — непрерывное отображение, являющееся диффеоморфизмом степени 1 шара $\mathbb{B}^n$ на проколотую сферу $S^n \setminus \{s_0\}$ (см. задачу 15 и замечание 1 лекции 25). Тогда формула

$$f(p) = \begin{cases} (\chi \circ h_i)(p), & \text{если } p \in U_i, i = 1, \dots, m, \\ s_0, & \text{если } p \notin U_1 \cup \dots \cup U_m, \end{cases}$$

будет корректно определять гладкое отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow S^n$, обладающее следующими свойствами:

а. Точка $x_0 = \chi(0)$ является регулярным значением отображения f .

б. Прообраз $f^{-1}(x_0)$ этой точки состоит из m точек

$$p_1 = h_1^{-1}(0), \dots, p_m = h_m^{-1}(0).$$

в. Для любого $i = 1, \dots, m$ дифференциал $(df)_{p_i}$ отображения f в точке p_i является сохраняющим ориентацию невырожденным линейным отображением $T_{p_i} \mathcal{X} \rightarrow T_{x_0} S^n$ ориентированных линейных пространств (якобиан отображения f в точке p_i положителен).

Поэтому согласно предложению 1 лекции III.26 степень отображения f равна m .

Заметим, что связность многообразия $\mathcal{X}$ мы здесь никак не использовали.

Инъективность. В свете результатов лекции III.26 для доказательства инъективности отображения (8) достаточно доказать, что *гладкие отображения $f, g: \mathcal{X} \rightarrow S^n$ одной и той же степени гомотопны*, т. е. существует непрерывное отображение

$$F: \mathcal{X} \times I \rightarrow S^n, \quad I = [0, 1],$$

многообразия $\mathcal{D} = \mathcal{X} \times I$ с краем $\partial \mathcal{D} = (\mathcal{X} \times 0) \cup (\mathcal{X} \times 1)$ в сферу S^n , совпадающее на $\partial \mathcal{D}$ с отображением $(f, g): \partial \mathcal{D} \rightarrow S^n$, определенным формулой

$$(f, g)(p, t) = \begin{cases} f(p), & \text{если } t = 0, \\ g(p), & \text{если } t = 1, \end{cases} \quad p \in \mathcal{X}.$$

Имея это в виду, мы заметим, что все карты вида

$$(U \times I, h \times \text{id}) = (U \times I, x^1, \dots, x^n, t),$$

где $(U, h) = (U, x^1, \dots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathcal{X}$, очевидным образом положительно согласованы и покрывают все многообразие $\mathcal{D} = \mathcal{X} \times I$, т. е. составляют ориентирующий атлас этого многообразия. Поэтому они определяют на $\mathcal{D}$ некоторую ориентацию.

Эту ориентацию многообразия $\mathcal{D}$ мы обозначим через $\circ$ при n четном и через $-\circ$ при n нечетном. (Таким образом, $\circ$ — это ориентация, задаваемая при любом n атласом $\{(U \times I, t, x^1, \dots, x^n)\}$.)

Согласно общей конструкции из лекции III.27 ориентация $\circ$ индуцирует ориентацию края $\partial \mathcal{D}$ многообразия $\mathcal{D} = \mathcal{X} \times I$ и, значит, ориентации его компонент $\mathcal{X} \times 0$ и $\mathcal{X} \times 1$.

Задача 8. Покажите, что на многообразии $\mathcal{X} \times 1$ (естественным образом отождествленном с $\mathcal{X}$) ориентация $\circ$ индуцирует данную ориентацию многообразия $\mathcal{X}$, а на многообразии $\mathcal{X} \times 0$ — противоположную.

В условной, но наглядной записи

$$(9) \quad \partial(\mathcal{X} \times I) = \mathcal{X} \times 1 - \mathcal{X} \times 0.$$

Поскольку многообразие $\partial(\mathcal{X} \times I)$ ориентировано, определена степень $\deg(f, g)$ отображения (f, g) . А так как каждое регулярное значение x_0 отображения (f, g) является, очевидно, регулярным значением отображений f и g , причем

$$(f, g)^{-1}(x_0) = (f^{-1}x_0 \times 0) \sqcup (g^{-1}x_0 \times 1),$$

то в силу предложения 1 лекции III.26 из (9) немедленно вытекает, что степень отображения (f, g) равна разности степеней отображений f и g :

$$\deg(f, g) = \deg g - \deg f.$$

Следовательно, в силу условия $\deg f = \deg g$ эта степень равна нулю.

Поэтому инъективность отображения (8) является непосредственным следствием доказываемого ниже предложения 2. $\square$

Задача 9. Пусть $\mathcal{X}$ — ориентированное компактное n -мерное связное хаусдорфово многообразие с краем $\partial \mathcal{X} \neq \emptyset$ и пусть $[(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X}), (\mathbb{S}^n, s_0)]$ — множество всех гомотопических $\text{rel } \partial \mathcal{X}$ классов непрерывных отображений

$(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \rightarrow (S^n, s_0)$. Определите отображение

$$(10) \quad \deg: [(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}), (S^n, s_0)] \rightarrow \mathbb{Z}$$

и докажите, что в случае, когда край $\partial\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{X}$ диффеоморфен сфере S^{n-1} , отображение (10) биективно. [Указание. При заклеивании края $\partial\mathcal{X}$ шаром B^n получается n -мерное многообразие без края, к которому применимо предложение 1.]

Замечание 1. Из утверждения задачи 9 немедленно следует, что все отображения $\gamma: (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (S^n, s_0)$ степени 1 гомотопны $\text{rel } \dot{I}^n$ (определяют один и тот же элемент группы $\pi_n(S^n, s_0)$).

См. замечание 2 лекции 25.

Задача 10. Докажите, что отображение (10) всегда биективно (для любых связных многообразий $\mathcal{X}$ с произвольным краем $\partial\mathcal{X}$).

Предложение 2. Пусть $\mathcal{D}$ — связное $(n+1)$ -мерное хаусдорфово паракомпактное многообразие с краем $\partial\mathcal{D} \neq \emptyset$ и пусть

$$f: \partial\mathcal{D} \rightarrow S^n$$

— такое собственное гладкое отображение, что

$$\deg f = 0.$$

Тогда существует непрерывное отображение $F: \mathcal{D} \rightarrow S^n$, являющееся продолжением отображения f , т. е. такое, что

$$f = F|_{\partial\mathcal{D}}.$$

Это предложение известно как теорема Хопфа о продолжении.

Его доказательство, хотя, как мы увидим, идейно очень простое, требует некоторых общетопологических конструкций, интересных и важных самих по себе.

Пусть $\mathcal{X}$ — нормальное хаусдорфово топологическое пространство и пусть W и V — такие его открытые подмножества, что $\overline{W} \subset V$.

Лемма 1. Существует непрерывная функция $f: \mathcal{X} \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, равная единице на $\overline{W}$ и нулю вне V .

Эта лемма называется теоремой Урысона (а также — большой леммой Урысона). Мы уже упоминали ее в замечании 4 лекции III.24. Предусмотренная леммой 1 функция f называется функцией Урысона пары

(V, W) ; ср. определение 1 лекции III.14. Заметим, что, вообще говоря, не требуется, чтобы множество всех точек, в которых функция f равна единице (нулю), совпадало с $\overline{W}$ (с $\mathcal{X} \setminus V$).

В случае когда пространство $\mathcal{X}$ метризуемо, функцию Урысона f можно определить формулой

$$(11) \quad f(x) = \frac{\rho(x, \mathcal{X} \setminus V)}{\rho(x, \overline{W}) + \rho(x, \mathcal{X} \setminus V)}, \quad x \in \mathcal{X},$$

где ρ — метрика в $\mathcal{X}$, а $\rho(x, C)$ — для любого замкнутого множества $C \subset \mathcal{X}$ — расстояние

$$\rho(x, C) = \inf_{y \in C} \rho(x, y)$$

от точки x до множества C . (Для функции (11) равенство $f(x) = 1$ имеет место тогда, и только тогда, когда $x \in \overline{W}$.) Таким образом, для метризуемого пространства $\mathcal{X}$ теорема Урысона очевидна. Поскольку случай метризуемого пространства $\mathcal{X}$ охватывает, в принципе, все приложения (согласно — очень трудной! — теореме Стоуна, любое паракомпактное хаусдорфово пространство метризуемо), доказывать теорему Урысона в общем случае мы не будем.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{X}$ — хаусдорфово нормальное пространство и C — его замкнутое подмножество. Тогда любое непрерывное отображение $f: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ множества C в пространство $\mathbb{R}^n$ может быть продолжено на все $\mathcal{X}$, т. е. существует такое непрерывное отображение $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

$$f = F|_C.$$

Доказательство. Ясно, что лемму 2 достаточно доказать лишь при $n = 1$ (при любом n нужно применить эту лемму к каждой компоненте отображения f) и лишь в предположении, что $|f| < 1$ (ось $\mathbb{R}$ гомеоморфна интервалу $(-1, 1)$).

По индукции мы определим на C функции $f_n, n \geq 1$, полагая $f_0 = f$ и

$$f_{n+1} = f_n + \frac{2^n}{3^{n+1}} (2g_n - 1),$$

где g_n — функция Урысона пары

$$\left(\left[f_n < \frac{2^n}{3^{n+1}} \right], \left[f_n < -\frac{2^n}{3^{n+1}} \right] \right)$$

или, точнее, ограничение этой функции на C . (Символом $[f < a]$, где f — функция, а a — число, мы обозначаем множество всех точек, в которых значение функции f меньше a .)

Задача 11. Докажите по индукции, что

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{для любой точки } x \in \mathcal{X}.$$

[Указание. При $f_n(x) \leq -\frac{2^n}{3^{n+1}}$ имеет место равенство $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{2^n}{3^{n+1}}$, а при $f_n(x) \geq \frac{2^n}{3^{n+1}}$ — равенство $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{2^n}{3^{n+1}}$.]

Таким образом, $f_n \rightarrow 0$ равномерно на C .

Пусть

$$F_n = -\frac{2^n}{3^{n+1}}(2g_n - 1).$$

Так как $|F_n| \leq \frac{2^n}{3^{n+1}}$, а числовой ряд с общим членом $\frac{2^n}{3^{n+1}}$, очевидно, сходится, то функциональный ряд

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n + \dots$$

сходится всюду на $\mathcal{X}$ и его сумма F является непрерывной функцией. Поскольку же на C частная сумма $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ последнего ряда равна, очевидно, $f_0 - f_n = f - f_n$, то $F = f$ на C . $\square$

Лемма 2 называется обычно теоремой Титце (который впервые доказал ее в случае, когда пространство $\mathcal{X}$ метризуемо; общий случай принадлежит Урысону). Заметим, что в ее доказательстве используется теорема Урысона. Поэтому, собственно говоря, эта теорема доказана нами только для метризуемых пространств $\mathcal{X}$ (в случае Титце).

Нам понадобится еще одна лемма, относящаяся к диффеоморфизмам пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ — группа всех сохраняющих ориентацию (имеющих степень 1) диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, оставляющих на месте точку 0.

Лемма 3. Для любого диффеоморфизма $h \in \text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ существует такая гомотопия

$$(12) \quad H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

что

а) для каждого $t \in I$ отображение

$$h_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto H(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

принадлежит группе $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ (и, в частности, оставляет на месте точку 0);

б) имеют место равенства

$$h_0 = \text{id}, \quad h_1 = h.$$

[При соответствующей топологизации группы $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ отображение $t \mapsto h_t$ будет в этой группе путем, соединяющим ее единицу id с элементом h . Таким образом, лемма 1 утверждает, что группа $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ линейно связна.]

Доказательство. Поскольку подгруппа $\text{GL}^+(n; \mathbb{R})$ группы $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ линейно связна (см. лекцию III.11), для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что в группе $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ существует путь (12), соединяющий диффеоморфизм h с его дифференциалом $A = (dh)_0$ в точке 0 (являющимся в силу отождествления $T_0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ и равенства $h(0) = 0$ сохраняющим ориентацию линейным отображением $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)

По определению

$$h(x) = Ax + s(x)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такое гладкое отображение, что $s(0) = 0$. Поэтому при $t \neq 0$

$$t^{-1}h(tx) = Ax + s(tx)x.$$

Поскольку $s(0) = 0$, это показывает, что формула

$$H(x, t) = \begin{cases} t^{-1}h(tx), & \text{если } t \neq 0, \\ Ax, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, определяет такое непрерывное (даже гладкое) отображение (12), что $h_0 = A$ и $h_1 = h$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любого $t = 0$ отображение $h_t: x \mapsto t^{-1}h(tx)$ принадлежит, очевидно, группе $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$. $\square$

Поскольку открытый шар $\dot{\mathbb{B}}^n$ диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$, лемма 3 справедлива и для группы $\text{Diff}_0^+ \dot{\mathbb{B}}^n$ всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\dot{\mathbb{B}}^n \rightarrow \dot{\mathbb{B}}^n$, оставляющих на месте точку 0.

Теперь у нас уже все готово для доказательства предложения 2.

Доказательство предложения 2. Условие $\deg f = 0$ означает, что прообраз $f^{-1}x_0$ некоторой точки $x_0 \in S^n$ состоит из четного числа точек, в одной половине которых якобиан отображения f положителен, а в другой отрицателен.

Задача 12. Докажите, что существуют

а) непересекающиеся вложенные дуги Q_i , соединяющие в $\mathcal{D}$ каждую точку первого типа с некоторой точкой второго типа, целиком, за исключением концов, лежащие во внутренней области многообразия $\mathcal{D}$, а в концах не касающиеся края $\partial\mathcal{D}$;

б) их непересекающиеся окрестности U_i («трубки вдоль Q_i »);

в) диффеоморфизмы

$$\varphi_i: \mathbb{B}^n \times I \rightarrow U_i,$$

отображающие отрезок $0 \times I$ на дугу Q_i , а край $(\mathbb{B}^n \times 0) \cup \cup (\mathbb{B}^n \times 1)$ произведения $\mathbb{B}^n \times I$ — на пересечение $U_i \cap \partial\mathcal{D}$, и такие, что для каждого i множества

$$V_i^{(0)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 0), \quad V_i^{(1)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 1)$$

являются окрестностями (в $\partial\mathcal{D}$) концов дуги Q_i , диффеоморфно отображающимися посредством f на некоторую окрестность W_i точки x_0 .

По условию, якобианы диффеоморфизмов $f|_{V_i^{(0)}}$ и $f|_{V_i^{(1)}}$ имеют противоположные знаки. Так как диффеоморфизмы $\varphi_i|_{\mathbb{B}^n \times 0}$ и $\varphi_i|_{\mathbb{B}^n \times 1}$ также обладают этим свойством, то якобиан диффеоморфизма $h_i: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, определенного формулой

$$h_i = (\varphi_i|_{\mathbb{B}^n \times 0})^{-1} \circ (f|_{V_i^{(0)}})^{-1} \circ (f|_{V_i^{(1)}}) \circ (\varphi_i|_{\mathbb{B}^n \times 1}),$$

положителен (мы отождествляем здесь $\mathbb{B}^n \times 0$ и $\mathbb{B}^n \times 1$ с $\mathbb{B}^n$). Кроме того, по построению $h_i(0) = 0$. Следовательно, $h_i \in \text{Diff}_+^* \mathbb{B}^n$, и потому в $\text{Diff}_+^* \mathbb{B}_0^n$ существует путь

$$H_i: \mathbb{B}^n \times I \rightarrow \mathbb{B}^n,$$

соединяющий id с h_i . Пользуясь этим, мы определим на окрестности $U = \cup U_i$ замкнутого множества $Q = \cup Q_i$ отображение $g: U \rightarrow S^n$, задав его на U_i формулой

$$g|_{U_i} = (f|_{V_i^{(0)}}) \circ (\varphi_i|_{\mathbb{B}^n \times 0}) \circ H_i \circ \varphi_i^{-1}.$$

Отображение g непрерывно, совпадает на $U \cap \partial \mathcal{D} = \cup (V_i^{(0)} \cup V_i^{(1)})$ с отображением f и обладает тем свойством, что $g^{-1}(x_0) = Q$.

Пусть V — такая окрестность множества Q , что $V \subset U$ (можно, например, положить $V = \cup \varphi_i(B_{1/2}^n \times I)$) и пусть $C = V \cup \partial \mathcal{D}$. Ясно, что формула

$$F_1(p) = \begin{cases} g(p), & \text{если } p \in \bar{V}, \\ f(p), & \text{если } p \in \partial \mathcal{D}, \end{cases}$$

определяет непрерывное отображение $F_1: C \rightarrow S^n$, являющееся продолжением отображения $f: \partial \mathcal{D} \rightarrow S^n$.

Согласно теореме Дьедонне (см. замечание 4 лекции III.24) многообразие $\mathcal{D}$ нормально. Более того, будучи связным и паракомпактным, оно удовлетворяет второй аксиоме счетности (замечание 2 лекция III.24) и потому (теорема 1 лекции III.14) вложимо в R^n . Следовательно, $\mathcal{D}$ даже метризуемо. [Теорему Дьедонне мы не доказывали, а теорема 1 лекции III.14 была у нас доказана только для компактных многообразий без края. Поэтому, собственно говоря, здесь в нашем рассуждении имеется лакуна. Однако, при $\mathcal{D} = \mathcal{X} \times I$, где $\mathcal{X}$ — компактное многообразие без края, все полностью обосновано.]

Имея это в виду, мы рассмотрим ограничение

$$F' = F_1|_{C \setminus V}$$

отображения F_1 на замкнутом множестве $C \setminus V \subset D \setminus V$. Ясно, что это отображение не задевает точку x_0 , т. е. является отображением в $S^n \setminus \{x_0\}$. Так как проколота сфера $S^n \setminus \{x_0\}$ гомеоморфна пространству R^n , то в силу теоремы Титце (согласно сказанному выше здесь применимой) отображение F' может быть продолжено до некоторого непрерывного отображения

$$F_2: \mathcal{D} \setminus V \rightarrow S^n \setminus \{x_0\}.$$

Положив

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p), & \text{если } p \in C, \\ F_2(p), & \text{если } p \in \mathcal{D} \setminus V, \end{cases}$$

мы, очевидно, и получим требуемое продолжение $F: \mathcal{D} \rightarrow S^n$ отображения f . $\square$

Доказав предложение 2, мы тем самым завершили и доказательство предложения 1.

Лекция 27

Группа $\pi_n S^n$. — Теорема о характеристическом классе. — Ее обобщение. — Гомотопические группы накрывающего пространства. — Расслоение Хопфа и группа $\pi_n S^n$. — Группы $\pi_{n+1} S^n$. — Операция $\circ$ в гомотопических группах сфер. — Вычисление гомотопического класса отображения $p^{U^+}_\circ \circ T^U_{n+1}$. — Связь с K_C -группами.

При $\mathcal{X} = S^n$ множество $[\mathcal{X}, S^n]$ является группой $\pi_n S^n$ и, следовательно, отображение (8) лекции 26 — отображением

$$(1) \quad \deg: \pi_n S^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

групп.

Задача 1. Докажите, что отображение (1) представляет собой изоморфизм.

Таким образом, мы видим, что группа $\pi_n S^n$ является свободной циклической группой.

Пусть ι_n — гомотопический класс $[\text{id}]$ тождественного отображения $S^n \rightarrow S^n$. Так как $\deg \iota_n = 1$, то элемент ι_n служит образующей группы $\pi_n S^n$.

При интерпретации элементов группы $\pi_n S^n$ как гомотопических $\text{rel } I^n$ классов отображений $(I^n, I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$ элемент ι_n будет классом $[\chi]$ отображения χ из задачи 15 лекции 25.

Таким образом, в гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1} S^{n+1} \xrightarrow{\partial} \pi_n \text{SO}(n+1) \xrightarrow{i_*} \pi_n \text{SO} = 0,$$

$$\pi_n \text{SO} = \pi_n \text{SO}(n+2)$$

расслоения $\tau_{\text{SO}(n+1)} = (\text{SO}(n+2), p, S^{n+1})$ группа $\pi_{n+1} S^{n+1}$ является свободной циклической группой с образующей ι_{n+1} , а ядро эпиморфизма $i_*: \pi_{n+1} \text{SO}(n+2) \rightarrow \pi_n \text{SO}$ порождается элементом $\partial \iota_{n+1}$.

Предложение 1. Элемент $\partial \iota_{n+1}$ является характеристическим классом расслоения $\tau_{\text{SO}(n+1)}$, т. е.

$$\partial \iota_{n+1} = [T_{n+1}],$$

где $T_{n+1}: S^n \rightarrow \text{SO}(n+1)$ — характеристическое отображение.

Доказательство. В соответствии с замечанием 1 лекции 25 для любого пунктированного топологического

пространства $(\mathcal{X}, x_0)$ элементами группы $\pi_{n+1}(\mathcal{X}, x_0)$ можно считать не только гомотопические $\text{rel } s_0$ классы $[f]$ непрерывных отображений $f: (S^{n+1}, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$, где s_0 — некоторая фиксированная точка сферы S^{n+1} (в лекции 25 мы считали, что $s_0 = e_1$; однако можно, например, за s_0 принять точку e_{n+1}), но и гомотопические классы $\text{rel } S^n$ непрерывных отображений $g: (E_{(-)}^{n+1}, S^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$, где $E_{(-)}^{n+1}$ — полусфера $x^{n+1} \leq 0$ сферы S^{n+1} , а S^n — ее край (экватор сферы S^{n+1}). При этом, если элемент $\alpha \in \pi_{n+1}(\mathcal{X}, x_0)$ задается отображением $f: (S^{n+1}, s_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$, то он же будет задаваться отображением $g = f \circ \chi: (E_{(-)}^{n+1}, S^n) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$, где χ — произвольное отображение $(E_{(-)}^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, s_0)$, гомеоморфно и с сохранением ориентации отображающее открытую полусферу $E_{(-)}^{n+1} = E_{(-)}^{n+1} \setminus S^n$ на проколотую сферу $S^{n+1} \setminus \{s_0\}$.

В частности, все это верно, когда $\mathcal{X} = S^{n+1}$ и $x_0 = s_0 = e_{n+1}$. При этом образующей i_{n+1} группы $\pi_{n+1} S^{n+1} = \pi_{n+1}(S^{n+1}, s_0)$ будет как раз гомотопический класс $[\chi]$ отображения χ . Поэтому (см. конструкцию гомоморфизма ∂ в лекции 26), чтобы построить отображение $S^n \rightarrow \text{SO}(n+1)$ класса ∂i_{n+1} , надо построить отображение

$$\chi': (E_{(-)}^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\cong} (\text{SO}(n+2), \text{SO}(n+1)),$$

накрывающее отображение χ (т. е. такое, что $p \circ \chi' = \chi$) и ограничить его на S^n :

$$(2) \quad \partial i_{n+1} = [\chi' |_{S^n}].$$

Имея это в виду, мы примем за χ отображение

$$(3) \quad (E_{(-)}^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, e_{n+1}),$$

оставляющее на месте вектор $-e_{n+1}$ и переводящее любой другой вектор $x \in E_{(-)}^{n+1}$ в вектор $\chi(x) \in S^{n+1}$, принадлежащий плоскости векторов x, e_{n+1} и образующий с вектором $-e_{n+1}$ вдвое больший угол (отображение χ двигает каждую точку полусферы $E_{(-)}^{n+1}$, отличную от полюса $-e_{n+1}$, по ее меридиану, вдвое увеличивая расстояние от полюса; ясно, что это отображение обладает всеми требуемыми свойствами). Отображение χ' мы определим формулами

$$(4) \quad \chi'(x) = \begin{cases} s_{(-)}(\chi(x)), & \text{если } \chi(x) \in E_{(-)}^{n+1}, \\ s_{(+)}(\chi(x)) T_{n+1}(\chi_0(x)), & \text{если } \chi(x) \in E_{(+)}^{n+1}, \\ & x \in E_{(-)}^{n+1}, \end{cases}$$

где $s_{(-)}$ и $s_{(+)}$ — построенные в лекции 25 сечения, а $\chi_0(x)$ — точка пересечения проходящего через точку $x \neq -e_{n+1}$

меридиана с экватором S^n . [Заметим, что включение $\chi(x) \in E_{(-)}^{n+1}$ в точности означает, что расстояние по меридиану от полюса $-e_{n+1}$ до точки x не превосходит $\pi/4$, а включение $\chi(x) \in E_{(+)}^{n+1}$ — что это расстояние не меньше $\pi/4$ (и не больше $\pi/2$).]. Так как для точек x с $\chi(x) \in S^n$ имеет место равенство $\chi(x) = \chi_0(x)$ (и так как $s_{(-)} = s_{(+)} T_{n+1}$), то формула (4) корректно определяет непрерывное отображение χ' . Поскольку $p(s_{(+)}(\chi(x)) T_{n+1}(\chi_0(x))) = p(s_{(+)}(\chi(x))) = \chi(x)$ и $p(s_{(-)}(\chi(x))) = \chi(x)$, отображение χ' покрывает отображение χ , а поскольку $\chi(x) = e_{n+1}$ при $x \in S^n$ и $s_{(+)}(e_{n+1}) = R(e_{n+1}, e_{n+1}) = \text{id}$ (см. лекцию 25), ограничение $\chi'|_{S^n}$ отображения χ' на сфере S^n совпадает с отображением T_{n+1} .

Согласно формуле (2) это доказывает предложение 1. $\square$

Следствие. При нечетном n элемент $[T_{n+1}]$ группы $\pi_n \text{SO}(n+1)$ является элементом бесконечного порядка, а отображение

$$d: \pi_{n+1} S^{n+1} \rightarrow \pi_n \text{SO}(n+1)$$

— мономорфизмом.

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно утверждению задачи 8 лекции 25 в группе $\pi_n S^n$ имеет место равенство

$$p_*[T_{n+1}] = (1 + (-1)^n) \iota_n. \quad \square$$

Таким образом, при нечетном n стационарная группа $\pi_n \text{SO}$ изоморфна факторгруппе метастационарной группы $\pi_n \text{SO}(n+1)$ по бесконечной циклической подгруппе.

Так как $T_{n+1} = T_{n+1} \circ \text{id}$, то предложение 1 может быть записано в виде равенства

$$(T_{n+1})_* = d_{n+1},$$

где d_{n+1} — гомоморфизм $\pi_{n+1} S^{n+1} \rightarrow \pi_n \text{SO}(n+1)$.

В этом виде оно опускает важное обобщение.

Для любой точки $x \in S^n$ и любого числа $t \in [-1, 1]$ мы будем символом $[x, t]$ обозначать точку $\cos \frac{\pi}{2} t \cdot x + \sin \frac{\pi}{2} t \cdot e_{n+1}$ сферы S^{n+1} (эта точка принадлежит меридиану сферы S^{n+1} , проходящему через точку x и ее расстояние от точки x — измеренное по меридиану — равно $\frac{\pi}{2} t$; таким образом x и t являются аналогами географических координат — долготы и широты).

Пользуясь этим обозначением, отнесем произвольному отображению $f: S^n \rightarrow S^m$ отображение $Ef: (S^{n+1}, e_{n+1}) \rightarrow (S^{m+1}, e_{m+1})$, определенное формулой

$$(Ef)[x, t] = [f(x), t], \quad x \in S^n, -1 \leq t \leq 1.$$

Задача 2. Докажите, что

а) формула $E[f] = [Ef]$ корректно определяет некоторое отображение

$$E: \pi_n S^m \rightarrow \pi_{n+1} S^{m+1};$$

б) отображение E является гомоморфизмом.

Ясно, что $E(\text{id}) = \text{id}$ и, значит, $E\iota_n = \iota_{n+1}$.

Гомоморфизм E называется *надстроечным гомоморфизмом* или просто *надстройкой*. Отображение $g: S^{n+1} \rightarrow S^{m+1}$ (гомотопический класс $\beta \in \pi_{n+1} S^{m+1}$) называется *надстроенным*, если существует такое отображение $f: S^n \rightarrow S^m$ (гомотопический класс $\alpha \in \pi_n S^m$), что $g = Ef$ (соответственно, $\beta = E\alpha$). Все надстроенные элементы $\beta \in \pi_{n+1} S^{m+1}$ образуют подгруппу $\text{Im } E$ группы $\pi_{n+1} S^{m+1}$ — образ $\text{Im } E$ гомоморфизма E .

Предложение 2. Для любого $m \leq n$ сквозной гомоморфизм

$$\pi_n S^m \xrightarrow{E} \pi_{n+1} S^{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \pi_n \text{SO}(m+1)$$

совпадает с гомоморфизмом $(T_{m+1})_*: \pi_n S^m \rightarrow \pi_n \text{SO}(m+1)$, индуцированным отображением T_{m+1} :

$$(T_{m+1})_* = \partial_{m+1} \circ E.$$

Доказательство. Пусть элемент $\alpha \in \pi_n S^m$ задается отображением $f: S^n \rightarrow S^m$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} (E_{(-)}^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{E_{(-)}f} & (E_{(-)}^{m+1}, S^m) & \xrightarrow{\chi_m^+} & (\text{SO}(m+2), \text{SO}(m+1)) \\ \chi_n \downarrow & & \downarrow \chi_m & & \downarrow \\ (S^{n+1}, e_{n+1}) & \xrightarrow{Ef} & (S^{m+1}, e_{m+1}) & \xrightarrow{p} & (\text{SO}(m+2), \text{SO}(m+1)), \end{array}$$

где χ_n и χ_m — отображения (3), построенные для n и m соответственно, χ_m^+ — накрытие (4) отображения χ_m , а $E_{(-)}f$ — ограничение отображения Ef на $E_{(-)}^{n+1}$. Очевидно, что эта диаграмма коммутативна и, значит, отображение $\chi_m^+ \circ E_{(-)}f$ накрывает отображение $\chi_m \circ E_{(-)}f = Ef \circ \chi_n$. Так как, по определению, отображение $Ef \circ \chi_n$ задает элемент $E\alpha$ группы

$\pi_{n+1}S^{m+1}$ (интерпретированной как группа гомотопических классов $\text{rel } S^n$ отображений $(E_{(-)}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, e_{n+1})$), то, следовательно, ограничение $g = (\chi_m \circ E_{(-)} f)|_{S^n}$ отображения $\chi_m \circ E_{(-)} f$ на S^n (рассматриваемое как отображение $S^n \rightarrow \text{SO}(m+1)$) задает элемент $\partial E\alpha$ группы $\pi_n \text{SO}(m+1)$.

С другой стороны, так как

$$E_{(-)} f|_{S^n} = f \quad \text{и} \quad \chi_m|_{S^m} = T_{m+1},$$

то $g = T_{m+1} \circ f$ и, значит, $[g] = (T_{m+1})_* [f] = (T_{m+1})_* \alpha$. Следовательно, $\partial E\alpha = (T_{m+1})_* \alpha$. $\square$

Теорема 1. При $n < 2m - 1$ отображение

$$E: \pi_n S^m \rightarrow \pi_{n+1} S^{m+1}$$

является изоморфизмом, а при $n = 2m - 1$ — эпиморфизмом. $\square$

Эта теорема известна как теорема Фрейденталя (несмотря на то, что несколько раньше ее доказал Л. С. Понтрягин). Доказательство теоремы 1 довольно сложно, и мы не можем изложить его здесь.

Заметим, что при $n \leq m$ теорема Фрейденталя тривиальна (при $n < m$ потому, что все участвующие в ней группы тривиальны, а при $n = m$ — в силу равенства $E_{\iota_n} = \iota_{n+1}$). Нам фактически будет нужен только первый нетривиальный случай $n = m + 1$.

В силу теоремы Фрейденталя из предложения 2 вытекает, что при $n \leq 2m - 1$ в группе $\pi_n \text{SO}(m+1)$ имеет место равенство

$$\text{Im } \partial_{m+1} = \text{Im } (T_{m+1})_*.$$

При $n = m + 1$ это в точности утверждение г лекции 25.

Чтобы доказать следующее утверждение д, мы в явном виде вычислим группы $\pi_{n+1} S^n$ для всех $n \geq 1$.

Пусть $p: (\mathcal{F}, e_0) \rightarrow (\mathcal{B}, b_0)$ — произвольное пунктированное (см. лекцию 5) накрытие. Так как (см. лекцию 2) каждое накрытие является расслоением в смысле Гуревича, то имеет место точная последовательность

$$(5) \quad \dots \rightarrow \pi_n(\mathcal{F}, e_0) \rightarrow \pi_n(\mathcal{F}, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathcal{B}, b_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{n-1}(\mathcal{F}, e_0) \rightarrow \dots$$

С другой стороны, так как слой $\mathcal{F}$ дискретен, то для любого $n \geq 1$ группа $\pi_n(\mathcal{F}, e_0)$ тривиальна. Поэтому в силу точности последовательности (5) для любого $n \geq 2$ инду-

цированный накрытием p гомоморфизм

$$p_*: \pi_n(\mathcal{C}, e_0) \rightarrow \pi_n(\mathcal{B}, b_0)$$

является изоморфизмом.

[Что же касается случая $n=1$, то из точности последовательности (5) следует, что отображение $p_*: \pi_1(\mathcal{C}, e_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ является мономорфизмом; факт нам уже известный (см. предложение 1 лекции 4).]

В частности, для любого накрываемого пространства $\mathcal{B}$ группа $\pi_n(\mathcal{B}, b_0)$, $n \geq 2$, изоморфна группе $\pi_n(\mathcal{C}, e_0) = \pi_n \mathcal{C}$ универсально накрывающего пространства $\mathcal{C}$ (напомним, что пространство $\mathcal{C}$ односвязно). Поскольку для окружности S^1 пространством $\mathcal{C}$ является прямая $\mathbb{R}$ (см. пример 1 лекции 2), а $\pi_n \mathbb{R} = 0$ (см. выше вычисление группы $\pi_n S^1$ при $n < m$), этим доказано, что

$$(6) \quad \pi_n S^1 = 0 \quad \text{при } n \geq 2.$$

В частности, $\pi_1 S^1 = 0$.

Отождествив сферу S^2 с расширенной плоскостью $\mathbb{C}^+$ комплексных чисел (= комплексной проективной прямой CP^1) и считая сферу S^2 единичной сферой комплексной плоскости $\mathbb{C}$, рассмотрим отображение

$$(7) \quad h: S^2 \rightarrow S^2,$$

определенное формулой

$$h(z_0, z_1) = \frac{z_1}{z_0}, \quad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$$

Это отображение называется *расслоением Хопфа*.

Отождествив точки $(z_0, z_1) \in S^2$ с кватернионами $\xi = z_0 + z_1 j$ (т. е. считая S^2 группой кватернионов ξ нормы $|\xi| = 1$), мы немедленно получим, что слоями отображения h в точности являются смежные классы $S^1 \xi$ группы S^2 по ее подгруппе S^1 , состоящей из комплексных чисел z , $|z| = 1$. Следовательно, *отображение (7) является локально тривиальным расслоением с типичным слоем S^1 (или, точнее, локально тривиальным главным S^1 -расслоением)*.

[При стереографической проекции $S^2 \rightarrow \mathbb{R}U\{\infty\}$ все слои расслоения h , кроме двух, переходят в замкнутые кривые пространства $\mathbb{R}^3$, каждая из которых пересекает единичный круг $\mathbb{B}^1$ плоскости Oxy в одной точке. Оставшиеся два слоя переходят, соответственно, в ось Oz и край

$x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, круга B^1 . Это делает отображение h геометрически вполне наглядным.]

Гомотопическая последовательность расслоения Хопфа имеет вид

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}S^1 \xrightarrow{h_*} \pi_n S^1 \xrightarrow{h_*} \pi_{n-1} S^1 \rightarrow \dots,$$

откуда в силу равенства (6) непосредственно вытекает, что для любого $n \geq 2$ индуцированный отображением h гомоморфизм

$$h_*: \pi_n S^1 \rightarrow \pi_n S^1$$

является изоморфизмом.

В частности, группа $\pi_2 S^1$ изоморфна группе $\pi_2 S^1 = \mathbb{Z}$. Изоморфизм

$$H: \pi_2 S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$$

задается формулой

$$H = \deg \circ h_*^{-1}$$

(так что $h_*(\alpha) = H(\alpha) \iota$, для любого элемента $\alpha \in \pi_2 S^1$).

Число $H(\alpha) = H\alpha$ называется *инвариантом Хопфа* элемента $\alpha \in \pi_2 S^1$ (или отображения $f: S^1 \rightarrow S^1$ класса α). Чтобы его вычислить, надо выбрать в классе α отображение вида $g \circ h$, где $g: S^1 \rightarrow S^1$ (по доказанному, это всегда возможно), и тогда

$$H\alpha = \deg g.$$

Гомотопический класс отображения $h: S^1 \rightarrow S^1$ обозначается символом η_1 . Так как $h = \text{id} \circ h$, то $H\eta_1 = 1$ и, следовательно, элемент η_1 порождает бесконечную циклическую группу $\pi_2 S^1$.

Так как при $n = 3$ и $m = 2$ имеет место равенство $n = 2m - 1$, то согласно теореме Фрейдентала отображение $E: \pi_3 S^2 \rightarrow \pi_2 S^1$ является эпиморфизмом, а все отображения

$$E: \pi_{n+1} S^n \rightarrow \pi_n S^{n-1}, \quad n \geq 3,$$

— изоморфизмами.

Следовательно, все группы $\pi_{n+1} S^n$, $n \geq 3$, являются циклическими группами с образующими $\eta_{n+1} = E\eta_n = E^{n-2}\eta_1$.

Теорема 2. Группы $\pi_{n+1} S^n$, $n \geq 3$, являются циклическими группами второго порядка. $\square$

Эта теорема также называется теоремой Фрейден탈я (хотя ее также впервые доказал Л. С. Понтрягин). Доказательство теоремы 2 еще труднее, чем доказательство теоремы 1 и мы его также опустим. [Фактически, Фрейден- таль доказал теорему, описывающую ядро эпиморфизма $E: \pi_{2n-1}S^n \rightarrow \pi_n S^{n+1}$ для любого $n \geq 2$. Принято назы- вать эту теорему «трудной частью» теоремы Фрейден탈я, а теорему 1 — ее «легкой частью».]

Теорема 2 дает, в частности, утверждение д лекции 25.

Утверждение e выражает существенно более простой факт.

Пусть $f: S^n \rightarrow S^m$ и $g: S^m \rightarrow S^r$ — произвольные непре- рывные отображения, а $\alpha \in \pi_n S^m$ и $\beta \in \pi_m S^r$ — их гомото- пические классы.

Задача 3. Докажите, что формула

$$\beta \circ \alpha = [g \circ f]$$

корректно определяет элемент $\beta \circ \alpha$ группы $\pi_n S^r$.

Заметим, что элемент $\beta \circ \alpha$ является не чем иным, как элементом $g^* \alpha$:

$$\beta \circ \alpha = g^* \alpha.$$

Поэтому для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n S^m$, $\beta \in \pi_m S^r$ имеет место равенство

$$\beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2$$

(правый закон дистрибутивности).

Интересно, что левый закон дистрибутив- ности

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha, \\ \alpha \in \pi_n S^m, \beta_1, \beta_2 \in \pi_m S^r,$$

вообще говоря, неверен. (Например, можно показать — по- пытайтесь это сделать! — что для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$(\underbrace{\iota_2 + \dots + \iota_2}_{k \text{ раз}}) \circ \eta_2 = k^2 \eta_2,$$

тогда как, конечно, $\iota_2 \circ \eta_2 = \eta_2$.) Однако если элемент α надстроечен, то этот закон оказывается верным.

Задача 4. Покажите, что для любых элементов $\alpha \in \pi_{n-1} S^{m-1}$, $\beta_1, \beta_2 \in \pi_m S^r$ имеет место равенство

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ E\alpha = \beta_1 \circ E\alpha + \beta_2 \circ E\alpha.$$

[Указание. Для каждого отображения $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ имеет место равенство $\mu \circ Ef = (Ef \vee Ef) \circ \mu$, где μ — отображение (12) лекции 25.]

В частности, если $g: S^m \rightarrow S^m$ — отображение степени k (и, значит, $[g] = k\iota_m$), то $g_*(E\alpha) = kE\alpha$ для любого элемента $\alpha \in \pi_{n-1} S^{m-1}$. Например, если k четно, а все элементы группы $\pi_n S^m$ имеют вид $E\alpha$ и являются элементами второго порядка (а именно так дело обстоит при $n = m + 1$, $m \geq 3$), то $g_* = 0$.

Это доказывает утверждение е лекции 25.

Таким образом, нам осталось доказать лишь утверждение ж.

Из утверждения задачи 9 лекции 25 непосредственно вытекает, что отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U: S^n \rightarrow S^{n-1}$, $n = 2m$, о котором идет речь в утверждении ж, задается формулами

$$(8) \quad w_i = -\frac{2z_{m-1}}{(1+z_m)^2}, \quad w_{m-1} = i - \frac{2|z_{m-1}|^2}{(1+z_m)^2}, \\ i = 0, \dots, m-2,$$

где $z_0, \dots, z_m$ — координаты точки $z \in S^n$, а $w_0, \dots, w_{m-1}$ — координаты точки $w = (p_1^U \circ T_{n+1}^U)(z)$ из S^{n-1} . (Напомним, что $\operatorname{Re} z_m = 0$.) Поэтому ограничение g отображения $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ на экваторе S^{n-1} сферы S^n (с уравнением $\operatorname{Im} z_m = 0$, т. е. $z_m = 0$) задается формулами

$$(9) \quad w_i = -2z_{m-1} \bar{z}_{m-1}, \quad i = 0, \dots, m-2, \\ w_{m-1} = 1 - 2|z_{m-1}|^2,$$

и, значит, является отображением сферы S^{n-1} z -пространства на экватор S^{n-2} сферы S^{n-1} w -пространства (задаваемый уравнением $\operatorname{Im} w_{m-1} = 0$). Более того, так как согласно последней из формул (8)

$$\operatorname{Im} w_{m-1} = \frac{4|z_{m-1}|^2}{|1-z_m|^4} \operatorname{Im} z_m,$$

то верхнюю полусферу E_{+}^n сферы S^n , состоящую из точек $z \in S^n$, для которых $\operatorname{Im} z_m \geq 0$, отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ переводит в верхнюю полусферу E_{+}^{n-1} сферы S^{n-1} , состоящую из точек $w \in S^{n-1}$, для которых $\operatorname{Im} w_{m-1} \geq 0$, и аналогично нижнюю полусферу E_{-}^n , $\operatorname{Im} z_m \leq 0$, это отображение переводит в нижнюю полусферу E_{-}^{n-1} , $\operatorname{Im} w_m \leq 0$.

Задача 5. Покажите, что любое отображение $f: S^n \rightarrow S^m$, переводящее полусферу E_{+}^n сферы S^n в полу-

сферу E_{n+1}^m , сферы S^m , а полусферу E_{n+1}^n , — в полусферу E_{n+1}^n , (и, значит, экватор S^{n-1} сферы S^n — в экватор S^{n-1} сферы S^m), гомотопно отображению Eg , где g — ограничение отображения f на S^{n-1} , рассматриваемое как отображение $S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$. [Указание. Точки $f(x)$ и $(Eg)(x)$, $x \in S^n$, не являются диаметрально противоположными точками, и потому их можно соединить единственной дугой большого круга длины меньшей π .]

В частности, мы видим, что отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ гомотопно отображению Eg , где g — отображение (9).

Имея это в виду, рассмотрим сначала случай $m=2$, когда отображение $g: S^2 \rightarrow S^2$ задается формулами

$$(10) \quad w_0 = -2z_0\bar{z}_1, \quad w_1 = 1 - 2|z_1|^2,$$

где $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ и $|w_0|^2 + w_1^2 = 1$, $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_1 \in \mathbb{R}$. Так как стереографическая проекция $S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ действует по формуле

$$z = \frac{w_0}{1 - w_1}$$

(см. формулу (2) лекции I.27), то интерпретированное как отображение $S^2 \rightarrow \mathbb{C}^+$ отображение g задается формулой

$$z = \frac{-2z_0\bar{z}_1}{2|z_1|^2} = -\frac{z_0}{z_1}$$

и, значит, отличается от отображения Хопфа (7) на диффеоморфизм $z \mapsto -\frac{1}{z}$ сферы $\mathbb{C}^+$. Поскольку последний диффеоморфизм имеет, очевидно, степень 1, этим доказано, что при $n=2$ отображение g представляет образующую η_2 группы $\pi_2 S^2$ и, значит, отображение $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ — образующую $\eta_4 = E\eta_2$ группы $\pi_4 S^2$.

Это доказывает утверждение ж при $n=2$.

Чтобы доказать это утверждение при любом четном $m > 2$, теперь достаточно показать, что отображение $g: S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$, $n=2m$, m четно, гомотопно отображению $E^{n-4}g_2$, где $g_2: S^2 \rightarrow S^2$ — отображение (10). Мы сделаем это в явном виде, выписав соответствующую гомотопию. (Эти формулы можно получить, рассмотрев аналогичную задачу для отображения $p_1 \circ T_{2n+1}$ в вещественной области, когда искомая гомотопия может быть построена геометрически, и затем формально перенеся получившиеся формулы в комплексную область. После того как формулы выпишаны, не имеет значения, как они были найдены.)

Задача 6. Покажите, что отображение $E^{n-4}g$, задается формулами

$$(11) \quad \begin{aligned} w_i &= z_i, \quad i=0, \dots, m-3, \\ w_{m-2} &= -2 \frac{z_{m-2} \bar{z}_{m-1}}{\sqrt{|z_{m-2}|^2 + |z_{m-1}|^2}}, \\ w_{m-1} &= \frac{|z_{m-2}|^2 - |z_{m-1}|^2}{\sqrt{|z_{m-2}|^2 + |z_{m-1}|^2}} \end{aligned}$$

(при $z_{m-2} = z_{m-1} = 0$ считается, что $w_{m-2} = w_{m-1} = 0$).

Положив $m = 2l$, $\tau = \sqrt{t(1-t)}$ и $A = \sqrt{1-t+t(|z_{m-2}|^2 + |z_{m-1}|^2)}$, мы зададим гомотопию $S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-2}$ формулами

$$(12) \quad \begin{aligned} w_{2j} &= tz_{2j} + \tau z_{2j+1} - \frac{2}{A} [(1-t) z_{2j} \bar{z}_{m-1} - \tau \bar{z}_{2j+1} z_{m-1}], \\ w_{2j+1} &= tz_{2j+1} - \tau \bar{z}_{2j} - \frac{2}{A} [(1-t) z_{2j+1} \bar{z}_{m-1} + \tau \bar{z}_{2j} z_{m-1}], \\ w_{m-2} &= A - \frac{2}{A} z_{m-2} \bar{z}_{m-1}, \quad w_{m-1} = A - \frac{2}{A} |z_{m-1}|^2, \\ j &= 0, 1, \dots, l-2, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

(при $|z_{m-1}|^2 + |z_{m-2}|^2 \neq 0$; если же $|z_{m-1}|^2 + |z_{m-2}|^2 = 0$ и, значит, $A = \sqrt{1-t}$, то следует положить

$$\begin{aligned} w_{2j} &= tz_{2j} + \tau z_{2j+1} - 2[\sqrt{1-t} z_{2j} \bar{z}_{m-1} - \sqrt{t} \bar{z}_{2j+1} z_{m-1}], \\ w_{2j+1} &= tz_{2j+1} - \tau \bar{z}_{2j} - 2[\sqrt{1-t} z_{2j+1} \bar{z}_{m-1} + \sqrt{t} \bar{z}_{2j} z_{m-1}], \\ w_{m-2} &= 0, \quad w_{m-1} = \sqrt{1-t}; \end{aligned}$$

ясно, что при этом непрерывность сохранится).

Заметим, что формулы (12) имеют смысл только при четном m .

При $t=0$ формулы (12) переходят в формулы (9), а при $t=1$ — в формулы (11).

Поэтому нам нужно лишь доказать, что формулы (12) действительно задают отображение $S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-2}$, т. е. что

$$\sum_{i=0}^{m-1} |w_i|^2 = 1, \quad \text{когда} \quad \sum_{i=0}^{m-1} |z_i|^2 = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(Заметим, что число w_{m-1} из формулы (12) автоматически вещественно.) К сожалению, это можно сделать только прямым утомительным вычислением.

Имеем

$$\begin{aligned} |w_{2j}|^2 &= \left(tz_{2j} + \tau \bar{z}_{2j+1} - \frac{2}{A} [(1-t) z_{2j} \bar{z}_{m-1} - \tau \bar{z}_{2j+1} z_{m-1}] \right) \times \\ &\times \left(t \bar{z}_{2j} + \tau z_{2j+1} - \frac{2}{A} [(1-t) \bar{z}_{2j} z_{m-1} - \tau z_{2j+1} \bar{z}_{m-1}] \right) = \\ &= t |z_{2j}|^2 + t \tau (z_{2j} z_{2j+1} + \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1}) + \tau^2 |z_{2j+1}|^2 - \\ &- \frac{2}{A} \left[(1-t) t |z_{2j}|^2 + (1-2t) \tau \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1} - \tau^2 |z_{2j+1}|^2 \right] z_{m-1} - \\ &- \frac{2}{A} [(1-t) t |z_{2j}|^2 + (1-2t) z_{2j} z_{2j+1} - \tau^2 |z_{2j+1}|^2] \bar{z}_{m-1} + \\ &+ \frac{4}{A^2} [(1-t)^2 |z_{2j}|^2 |z_{m-1}|^2 - \\ &- (1-t) \tau (z_{2j} z_{2j+1} \bar{z}_{m-1}^2 + \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1} z_{m-1}^2) + \tau^2 |z_{2j+1}|^2 |z_{m-1}|^2] \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} |w_{2j+1}|^2 &= \left(tz_{2j+1} - \tau \bar{z}_{2j} - \frac{2}{A} [(1-t) z_{2j+1} \bar{z}_{m-1} + \tau \bar{z}_{2j} z_{m-1}] \right) \times \\ &\times \left(t \bar{z}_{2j+1} - \tau z_{2j} - \frac{2}{A} [(1-t) \bar{z}_{2j+1} z_{m-1} + \tau z_{2j} \bar{z}_{m-1}] \right) = \\ &= t^2 |z_{2j+1}|^2 - t \tau (z_{2j} z_{2j+1} + \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1}) + \tau^2 |z_{2j}|^2 - \\ &- \frac{2}{A} [(1-t) t |z_{2j+1}|^2 - (1-2t) \tau \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1} - \tau^2 |z_{2j}|^2] z_{m-1} - \\ &- \frac{2}{A} [(1-t) t |z_{2j+1}|^2 - (1-2t) \tau z_{2j} z_{2j+1} - \tau^2 |z_{2j}|^2] \bar{z}_{m-1} + \\ &+ \frac{4}{A^2} [(1-t)^2 |z_{2j+1}|^2 |z_{m-1}|^2 + \\ &+ (1-t) \tau (z_{2j} z_{2j+1} \bar{z}_{m-1}^2 + \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j+1} z_{m-1}^2) + \tau^2 |z_{2j}|^2 |z_{m-1}|^2]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-3} |w_i|^2 &= \left(t^2 + \tau^2 - \frac{2}{A} [(1-t) t - \tau^2] (z_{m-1} + \bar{z}_{m-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{A^2} [(1-t)^2 + \tau^2 |z_{m-1}|^2] \right) \sum_{i=0}^{m-3} |z_i|^2 \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m |w_i|^2 &= \frac{(A^2 t + 4(1-t) |z_{m-1}|^2) (1 - |z_{m-2}|^2 - |z_{m-1}|^2)}{A^2} + \\ &+ \frac{4 |z_{m-2}|^2 |z_{m-1}|^2 + (A^2 - 2 |z_{m-1}|^2)^2}{A^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент при $|z_{m-1}|^4$ в числителе равен $-4(1-t) + 4 = 4t$, а при $|z_{m-1}|^2$ равен

$$\begin{aligned} & -A^2t + 4(1-t)(1 - |z_{m-2}|^2) + 4|z_{m-2}|^2 - 4A^2 = \\ & = -A^2t + 4[(1-t) + t|z_{m-2}|^2 - A^2] = -A^2t - 4t|z_{m-1}|^2. \end{aligned}$$

Свободный же член выражается формулой

$$A^2t(1 - |z_{m-2}|^2) + A^4 = A^2(1 + t|z_{m-1}|^2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^m |\omega_l|^2 &= \\ &= \frac{4t|z_{m-1}|^4 - (4t|z_{m-1}|^2 + A^2t)|z_{m-1}|^2 + A^2(1 + t|z_{m-1}|^2)}{A^2} = 1. \end{aligned}$$

Это полностью доказывает утверждение ж. $\square$

Только теперь мы можем считать доказанным предложение 1 лекции 25 (да и то лишь по модулю теорем 1 и 2 Фрейденшталя). Непараллелизуемость сфер S^{n+1} при $n = 4l + 2$, $l \neq 1$ может быть доказана аналогично на основе теоремы Ботта о метастационарной группе $\pi_{2m}U(m)$ (см. лекцию 26). Впрочем, такое доказательство будет лишь переизложением доказательства импликации 3 из схемы на стр. 431 (у нас опущенного). Это объясняется тесной связью, существующей между K_C -группами и стационарными гомотопическими группами $\pi_n U$.

Поскольку векторные расслоения тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны ассоциированные главные расслоения, и поскольку произвольное комплексное векторное расслоение ранга m редуцируется к группе $U(m)$, из утверждения задачи 3 лекции 25 вытекает, что множество $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^m S^n$ комплексных векторных расслоений ранга m над сферой S^n находится в естественном биективном соответствии с группой $\pi_{n-1}U(m)$. В этом соответствии расслоению ξ отвечает характеристический класс ассоциированного главного $U(m)$ -расслоения. Мы будем обозначать этот класс символом $T\xi$.

Задача 7. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}_{\mathbb{C}}^m S^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}U(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Vect}_{\mathbb{C}}^{m+1} S^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}U(m+1) \end{array}$$

левая вертикальная стрелка является отображением $\xi \mapsto \xi \oplus \theta^1$, а правая индуцирована вложением $U(m) \rightarrow U(m+1)$. Покажите, что эта диаграмма коммутативна.

Отсюда следует, что формула $T[\xi] = T(\xi + \theta^N)$, где N — любое число, большее чем $m+1$, корректно определяет — очевидно биективное — отображение

$$(13) \quad T: K_C S^n \rightarrow \pi_{n-1} U.$$

Задача 8. Покажите, что отображение (13) является изоморфизмом. [Указание. Достаточно доказать, что для любых отображений $A: \mathcal{X} \rightarrow U(m_1)$, $B: \mathcal{X} \rightarrow U(m_2)$ отображение $A \oplus B: \mathcal{X} \rightarrow U(m_1+m_2)$, определенное формулой

$$(A \oplus B)(p) = \begin{vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & B(p) \end{vmatrix}, \quad p \in \mathcal{X},$$

гомотопно отображению $AB: \mathcal{X} \rightarrow U(m_1+m_2)$, определенному формулой

$$(AB)(p) = \begin{vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & E_{m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B(p) & 0 \\ 0 & E_{m_1} \end{vmatrix},$$

где E_m — единичная матрица порядка m ; ср. формулу (8) лекции 24.]

В силу теоремы Ботта о группах $\pi_n U$ это и доказывает утверждение о группах $K_C S^n$ из лекции 24.

Далее, так как каждая точка (z, α) тотального пространства, рассмотренного в лекции 24 тавтологического расслоения η_{n+1} над пространством CP^n , естественным образом отождествляется при $z \neq 0$ с точкой z , то множество всех этих точек с $|z|=1$ является вложенным подмногообразием, диффеоморфным сфере S^{2n+1} .

Задача 9. Покажите, что

а) ограничение проекции расслоения η_{n+1} на этом подмногообразии представляет собой расслоение $S^{2n+1} \rightarrow CP^n$, слоями которого являются большие окружности сферы S^{2n+1} (ее пересечения с проходящими через центр двумерными плоскостями);

б) при $n=1$ это расслоение является, в силу отождествления $CP^1 = S^2$, не чем иным, как расслоением Хопфа (7).

(Это объясняет, почему тавтологические расслоения η_{n+1} часто также называются расслоениями Хопфа.)

Задача 10. Покажите, что характеристический класс расслоения η_2 является образующей группы $\pi_1 U(1) = \pi_1 S^1$.

Это в точности анонсированная в лекции 24 теорема о том, что элемент β_2 порождает циклическую группу $K_C S^1$.

Аналогично утверждения а—в на стр. 422 входят как составная часть в теорему Ботта о периодичности.

Дополнение при корректуре

Построение $(N, Sp(n))$ -инстантонов.— Описание $(N, Sp(n))$ -инстантонов.— Пространство модулей $(N, Sp(n))$ -инстантонов.— N -инстантоны.— Случай $N=1$.— Случай $N=2$.— Случай $N=3$.

Упомянутая в лекции 22 конструкция k -инстантонов (впрочем, нам сейчас удобно изменить обозначения и вместо k писать N) является частным случаем одной общей конструкции связностей в главных (или—что равносильно—в векторных) расслоениях над сферой S^4 . В этом Дополнении мы—следуя в основном Атья—описем эту конструкцию и частично ее исследуем.

Напомним (см. лекцию 7), что символом $Sp(n)$ мы обозначаем группу $U^H(n)$ изометрий кватернионного пространства H .

Определение 1. Автодуальное поле Янга—Миллса в главном $Sp(n)$ -расслоении над сферой S^4 с числом Чженя c_2 , равным $N > 0$ (см. лекцию 23), называется $(N, Sp(n))$ -инстантоном.

При $n=1$ —это в точности N -инстантоны в смысле лекции 22 (поскольку $Sp(1)=SU(2)$).

Чтобы пока не иметь дело с картами, мы будем отождествлять сферу S^4 с кватернионной проективной прямой HP^1 , точками которой являются классы $(x:y)$ пропорциональности справа пар кватернионов [кватернионы мы теперь обозначаем светлыми буквами; пары (x,y) и (x_1,y_1) пропорциональны справа—определяют одну и ту же точку прямой HP^1 , если существует такой кватернион $\xi \neq 0$, что $x_1=x\xi$, $y_1=y\xi$, т. е. если либо $y_1=y=0$, либо $x_1y_1^{-1}=xy^{-1}$; конечно, все пары (x,y) предполагаются отличными от пары $(0,0)$]. При отождествлении прямой HP^1 со сферой S^4 или—точнее—с пространством $R^4 \cup \{\infty\} = H \cup \{\infty\}$ точке $(x:y)$ с $y \neq 0$ отвечает кватернион xy^{-1} , а точке $(x:0)$ —точка ∞ .

Пусть C и D —две кватернионные матрицы размера $(n+N) \times N$, обладающие тем свойством, что для любых кватернионов x, y , одновременно не равных нулю, матрица

$$(1) \quad v(x,y) = Cx + Dy$$

имеет максимальный ранг N , т. е. обладает тем свойством, что ее столбцы порождают в правом линейном пространстве H^{n+N} над телом H подпространство размерности N . Это подпространство зависит, конечно, лишь от точки $(x:y) \in HP^1$, и мы будем обозначать его символом $\mathcal{P}(x:y)$.

Пусть $\mathcal{F}_{(x;y)}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathcal{V}_{(x;y)}$ (относительно стандартной метрики пространства $\mathbb{H}^n + N$; см. лекцию 7).

Задача 1. Покажите, что подпространства $\mathcal{F}_{(x;y)}$ и $\mathcal{V}_{(x;y)}$ являются слоями кватернионных векторных расслоений над S^4 . [Указание. Суммой Уитни этих расслоений является тривиальное расслоение $S^4 \times \mathbb{H}^n + N$.]

Мы будем обозначать эти расслоения (и их тотальные пространства) символами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^\perp$ соответственно. Ранг (над $\mathbb{H}$) расслоения $\mathcal{G}$ равен n , а расслоение $\mathcal{G}^\perp$ — которое играет лишь вспомогательную роль — равен N .

По построению, расслоение $\mathcal{G}$ является векторным $\text{Sp}_n(n)$ -расслоением и, значит, — в силу естественного вложения $\text{Sp}(n) \subset \text{SU}(2n)$ — векторным $\text{SU}(2n)$ -расслоением. Поэтому определено (см. лекцию 23) его число Чженя $c_{(2)}$.

Задача 2. Покажите, что число Чженя $c_{(2)}$ расслоения $\mathcal{G}$ равно N . [Указание. Расслоение $\mathcal{G}^\perp$ является суммой Уитни N линейных кватернионных расслоений, число Чженя $c_{(2)}$ каждого из которых равно -1 .]

Таким образом, автодуальные поля Янга — Миллса на $\mathcal{G}$ — это $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантоны.

Так как каждое сечение s расслоения $\mathcal{G}$ одновременно представляет собой сечение тривиального расслоения $S^4 \times \mathbb{H}^n + N$, то оно является не чем иным, как $\mathbb{H}^n + N$ -значной функцией на S^4 , обладающей тем свойством, что для любой точки $(x;y) \in S^4$ имеет место включение

$$(2) \quad s(x;y) \in \mathcal{F}_{(x;y)}.$$

Поэтому любое векторное поле X на S^4 переводит сечение s в $\mathbb{H}^n + N$ -значную функцию Xs . Однако эта функция уже не удовлетворяет условию (2), и, чтобы поправить дело, надо для каждой точки $(x;y) \in S^4$ ортогонально спроектировать вектор $(Xs)_{(x;y)} \in \mathbb{H}^n + N$ на подпространство $\mathcal{F}_{(x;y)}$. Пусть $(\nabla_X s)_{(x;y)}$ — эта проекция. Тогда отображение $\nabla_X s: (x;y) \mapsto (\nabla_X s)_{(x;y)}$ будет сечением расслоения $\mathcal{G}$ и соответствие $s \mapsto \nabla_X s$ будет (проверьте!) ковариантным дифференцированием.

Тем самым мы построили на $\mathcal{G}$ (а потому и на ассоциированном главном $\text{Sp}(n)$ -расслоении) некоторую связность ∇ .

Замечание 1. Обратим внимание, что изложенный способ построения связности имеет общий характер и применим к произвольному расслоению ξ , являющемуся подрасслоением тривиального

расслоения (например, — см. предложение 2 лекции 23 — к произвольному расслоению конечного типа над нормальным пространством). Можно показать (сделайте это!), что с точностью до калибровочного преобразования (автоморфизма расслоения) этот способ позволяет построить любую связность на ξ .

Чтобы вычислить связность ∇ (точнее, ее форму связности — потенциал) в явном виде, не переходя все еще к картам, мы воспользуемся ортогональным проектором $P_{(x:y)}$, осуществляющим проектирование пространства $\mathbb{H}^{n+N}$ на подпространство $\mathcal{F}_{(x:y)}$. Пусть $Q_{(x:y)} = E - P_{(x:y)}$ — дополнительный проектор (на $\mathcal{V}_{(x:y)}$).

По определению, ковариантный дифференциал ∇s относительно связности ∇ произвольного сечения $s: S^4 \rightarrow \mathcal{E}$ расслоения $\mathcal{E}$ задается формулой $\nabla s = P ds = ds - Q ds$ (мы опускаем аргументы). Но $Qs = 0$, и потому $d(Qs) = 0$, т. е. $Q ds = -(dQ)s$ (все операторы мы отождествляем с их матрицами). Более того, так как $Q^2 = Q$, то $Q ds = Q(Q ds) = -(Q dQ)s$. Следовательно,

$$\nabla s = ds + (Q dQ)s = ds + \Phi s,$$

где $\Phi = Q dQ$. Это означает, что оператор ∇ ковариантного дифференцирования сечений расслоения $\mathcal{E}$ является ограничением оператора $d + \Phi$, определенного для любых $\mathbb{H}^{n+N}$ -значных функций $S^4 \rightarrow \mathbb{H}^{n+N}$.

Форма кривизны F_Φ , отвечающая дифференцированию $d + \Phi$, имеет (см. формулу (14) лекции 22) вид $F_\Phi = d\Phi + \Phi \wedge \Phi$.

Но так как $Q^2 = Q$, и потому $Q \cdot dQ + dQ \cdot Q = dQ$, то

$$\begin{aligned} \Phi \wedge \Phi &= Q \cdot dQ \wedge Q \cdot dQ = Q \cdot dQ \cdot Q \wedge dQ = \\ &= Q(dQ - Q dQ) \wedge dQ = \\ &= Q dQ \wedge dQ - Q dQ \wedge dQ = 0 \end{aligned}$$

и, значит, $F_\Phi = d\Phi$, т. е. $F_\Phi = dQ \wedge dQ$. Для формы кривизны F связности ∇ отсюда немедленно получается, что $F = P(dQ \wedge dQ)P$.

Задача 3. Покажите, что

$$Q = v\rho^{-2}\bar{v}^T,$$

где v — матрица (1), а $\rho^2 = \bar{v}^T v$ — кватернионная $N \times N$ -матрица. (Мы по-прежнему опускаем аргументы.)

Поскольку $Pv = 0$ и $\bar{v}^T P = 0$ (напомним — см. предложение 1 лекции II.20а, справедливое, очевидно, и над $\mathbb{H}$, — что $\bar{P}^T = P$), отсюда следует, что $P dQ = P dv \cdot \rho^{-2} \bar{v}^T$ и $dQ P = v\rho^{-2} \cdot \bar{d}v^T P$.

Поэтому

$$F = P dv \wedge \rho^{-2} \bar{d}v^T P.$$

Перейдем теперь от сферы $S^4 = \mathbb{H}U\{\infty\}$ к ее части $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, состоящей из точек $x = (x:1)$. Тогда $v = Cx + D$, $dv = C dx$ и, значит,

$$F = PC dx \wedge \rho^{-2} \bar{d}x \bar{C}^T P,$$

где

$$(3) \quad \rho^2 = (\bar{x}C^T + \bar{D}^T)(Cx + D).$$

Если матрица (3) вещественна (для всех $x \in H$), то она перестановочна с кватернионом $\bar{dx}$, и потому

$$(4) \quad F = PC[(dx \wedge \bar{dx}) \rho^{-1} C^T P].$$

Тот факт, что дифференциалы координат входят в $\text{Sp}(n)$ -значную дифференциальную форму F блоком $dx \wedge \bar{dx}$, означает (см. конец лекции 21), что эта форма автодуальна и, значит, является $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантоном.

Участвующий в формуле (4) проектор P можно представить (ср. утверждение задачи 3) в виде $P = u\bar{u}^T$, где $u = u(x)$ — матрица, столбцы которой составляют ортонормированный базис пространства $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{(x; 1)}$, т. е. такая кватернионная $(n+N) \times n$ -матрица, что

$$(5) \quad \bar{u}^T u = E, \quad \bar{u}^T v = 0,$$

где v — матрица (1) (при $y = 1$). В этом базисе поле (4) записывается в виде Sp -значной дифференциальной формы

$$F = \bar{u}^T C (dx \wedge \bar{dx}) \rho^{-1} C^T u.$$

Задача 4. Покажите, что потенциал A инстантона (4) выражается формулой

$$(6) \quad A = \bar{u}^T du.$$

[Указание. $F = d\bar{u}^T Q \wedge du$.]

Тем самым нами доказано следующее предложение:

Предложение 1. Пусть C и D — такие прямоугольные кватернионные $(n+N) \times n$ -матрицы, что

а) для любого кватерниона x матрица (3) вещественна;

б) для любых кватернионов x и y , одновременно не равных нулю, матрица (1) имеет максимальный ранг N . Тогда формула (4) определяет $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантон F с потенциалом (6). $\square$

Как показали Атья, Дринфельд, Манин и Хитчин, эта конструкция дает все — с точностью до калибровочной эквивалентности — $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантоны.

Ясно, что при замене u на uG , где G — произвольная матрица из $\text{Sp}(n)$, потенциал (6) подвергается калибровочному преобразованию (а инстантон F , в выражение которого u явно не входит, не меняется).

Аналогично, инстантон F (даже расслоение $\mathcal{F}$) не меняется при умножении матриц C и D справа на произвольную вещест-

венную невырожденную $N \times N$ -матрицу (это умножение сводится к замене базиса каждого из пространств $\mathcal{V}^2(x; y)$, а также при умножении этих матриц слева на произвольную матрицу из $\text{Sp}(n+N)$ (что сводится к замене базиса в пространстве $\mathbb{H}^{n+N}$).

Поэтому множество всех инстантов (4) получается из множества всех пар (C, D) матриц, удовлетворяющих условиям а и б, факторизацией по группе $\text{GL}(N; \mathbb{K})$, действующей на этих парах справа, и по группе $\text{Sp}(n+N)$, действующих на них слева.

Более того, вместо однородных координат $(x; y)$ на $\mathbb{H}P^1 = \mathbb{S}^4$ мы можем с равным правом использовать им проективно эквивалентные координаты $(x': y')$, связанные с координатами $(x; y)$ формулами вида

$$(7) \quad x = \xi_1 x' + \eta_1 y', \quad y = \xi_2 x' + \eta_2 y',$$

где кватернионы $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ таковы, что возможно обратное выражение x' и y' через x и y (преобразование (7) обратимо). При такой замене координат матрицы C и D переходят, как легко видеть, в матрицы $C\xi_1 + D\xi_2$ и $C\eta_1 + D\eta_2$.

Задача 5. Покажите, что преобразование (7) тогда и только тогда обратимо, когда либо $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \xi_1^{-1} \eta_1 \neq 0$, либо $\xi_1 = 0$ и $\xi_1 \eta_1 \neq 0$.

Задача 6. Покажите, что

а) выбором координат $(x; y)$ можно добиться того, чтобы нижние N строк матрицы C составляли обратимую кватернионную $N \times N$ -матрицу;

б) любая матрица C , обладающая последним свойством, эквивалентна (по отношению к указанным выше действиям групп $\text{Sp}(n+N)$ и $\text{GL}(N; \mathbb{K})$) матрице вида

$$(8) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix},$$

где E — единичная $N \times N$ -матрица.

Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что матрица C имеет вид (8) и, значит, матрица (1) — при $y = 1$ — вид

$$(9) \quad Cx + D = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Lambda \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ B - xE \end{bmatrix},$$

где Λ и B — постоянные (не зависящие от x) кватернионные матрицы размеров $n \times n$ и $N \times N$ соответственно.

Условие а из предложения 1 распадается тогда на два условия:

а') матрица $\bar{B}^T B + \bar{\Lambda}^T \Lambda$ вещественна;

а'') матрица $\bar{B}^T x + \bar{x} B$ вещественна для любого $x \in \mathbb{H}$.

Задача 7. Покажите, что условие а'' выполнено тогда и только тогда, когда матрица B (а потому и матрица $\bar{B}^T B + \bar{\Lambda}^T \Lambda$ из условия а) симметрична.

Что же касается условия б, то оно, очевидно, равносильно следующему условию б':

б') для любого кватерниона $x \in \mathbb{H}$ уравнения $B\xi = x\xi$, $\Lambda\xi = 0$ относительно вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ имеют единственное решение $\xi = 0$.

Чтобы построить $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантон, отвечающий рассматриваемым матрицам C и D (т. е. теперь уже матрицам Λ и B), нам в первую очередь нужно найти $(n+N) \times n$ -матрицу $u = u(x)$, удовлетворяющую условиям (5). Мы будем искать ее в виде

$$(10) \quad u = \begin{bmatrix} -E \\ U \end{bmatrix} \cdot W = \begin{bmatrix} -W \\ UW \end{bmatrix},$$

где U — кватернионная $N \times n$ -матрица, а W — кватернионно эрмитова $n \times n$ -матрица (кватернионная матрица, для которой $W^T = \overline{W}$).

Задача 8. Покажите, что матрица (10) тогда и только тогда удовлетворяет

а) условию $\overline{u}^T u = E$, когда матрица W невырождена и

$$(11) \quad W^{-1} = E + \overline{U}^T U;$$

б) условию $\overline{u}^T u = 0$, где u — матрица (9), когда $-\Lambda + \overline{U}^T (B - xE) = 0$, т. е. — в предположении, что матрица $B - xE$ обратима — когда

$$(12) \quad U = \Lambda (B - xE)^{-1} \overline{U}^T.$$

Покажите также, что отвечающий этой матрице потенциал (6) выражается формулой

$$(13) \quad A = W \overline{U}^T dU W + W^{-1} dW.$$

Таким образом, любые две кватернионные матрицы Λ и B , удовлетворяющие условиям а', а" (матрица B симметрична) и б' составляют нам $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантон F , потенциал которого выражается формулой (13), где U и V — матрицы, определенные формулами (11) и (12).

Потенциал (13) имеет особенности в точках x , для которых матрица $B - xE$ необратима, но они устранимы калибровочным преобразованием (вызваны не существом дела, а выбором калибровки).

Вообще говоря, один и тот же $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантон F может получиться из различных матриц Λ и B .

Задача 9. Покажите, что матрицы Λ , B и Λ_1 , B_1 тогда и только тогда задают один и тот же $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантон F , когда существуют такие матрицы $R \in O(N)$ и $T \in \text{Sp}(n)$, что

$$(14) \quad \Lambda_1 = T \Lambda R, \quad B_1 = R^T B R.$$

Поскольку $\overline{B}_1^T B + \overline{\Lambda}_1^T \Lambda_1 = R^{-1} (\overline{B}^T B + \overline{\Lambda}^T \Lambda) R$ (заметим, что $R^{-1} = R^T$), отсюда — в силу теоремы о приведении к главным осям;

см. теорему 2 лекции 11.21), примененной к вещественной симметрической матрице $\overline{B}^T B + \overline{A}^T A$ — немедленно вытекает, что без ограничения общности матрицу $\overline{B}^T B + \overline{A}^T A$ в условии а' мы можем считать диагональной.

Таким образом, окончательно мы получаем следующее предложение:

Предложение 2. $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантоны параметризуются парами таких кватернионных матриц (A, B) размеров $n \times N$ и $N \times N$ соответственно, что

1° матрица B симметрична ($B^T = B$);

2° матрица $\overline{B}^T B + \overline{A}^T A$ вещественна и диагональна;

3° для любого кватерниона $x \in \mathbb{H}$ уравнения $B\xi = x\xi$, $A\xi = 0$ относительно вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ имеют единственное решение $\xi = 0$.

Две пары (A, B) и (A_1, B_1) тогда и только тогда дают один и тот же инстантон, когда они связаны формулами (14), где $R \in O(n)$, $T \in \text{Sp}(n)$. $\square$

Введя в рассмотрение факторпространство $\mathfrak{M}_n(N)$ пространства всех пар (A, B) , удовлетворяющих условиям 1°—3°, по отношению эквивалентности, задаваемому формулами (14), мы можем, следовательно, сказать, что $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантоны F находятся в естественном биективном соответствии с точками пространства $\mathfrak{M}_n(N)$.

Принято говорить, что $\mathfrak{M}_n(N)$ представляет собой пространство модулей $(N, \text{Sp}(n))$ -инстантонов.

Топология пространства $\mathfrak{M}_n(N)$, безусловно, очень интересна, но о ней известно очень мало.

Задача 10. Покажите, что пространство $\mathfrak{M}_n(N)$ содержит открытое всюду плотное (т. е. такое, что его замыканием служит все $\mathfrak{M}_n^+(N)$) подмножество $\mathfrak{M}_n^+(N)$, являющееся гладким многообразием размерности $4(n+1)N - n(2n+1)$ (при $n=1$ размерность равна $8N-3$).

Построение карт многообразия $\mathfrak{M}_n^+(N)$ затруднено необходимостью учитывать факторизацию по соотношениям (14). Впрочем, если мы дополнительно пронормируем пары (A, B) требованием, чтобы диагональные элементы матрицы $\overline{B}^T B + \overline{A}^T A$ не возрастали, то вне некоторого нигде не плотного замкнутого множества (которое, не теряя общности, мы можем из $\mathfrak{M}_n^+(N)$ исключить), отвечающего парам (A, B) , для которых матрица $\overline{B}^T B + \overline{A}^T A$ имеет повторяющиеся диагональные элементы, мы можем в соотношениях (14) считать матрицу R единичной, т. е. считать, что точками многообразия $\mathfrak{M}_n^+(N)$ являются классы пар (A, B) по отношению экви-

эквивалентности $(\Lambda_1, B_1) \sim (\Lambda, B)$, имеющему место тогда и только тогда, когда

$$(15) \quad \Lambda_1 = T\Lambda \quad \text{и} \quad B_1 = B,$$

где $T \in \text{Sp}(n)$.

Конечно, это упрощает задачу, но все равно она остается очень трудной — и до сих пор фактически нерешенной.

Рассмотрим более внимательно случай $n=1$, когда мы имеем дело с N -инстантонами в смысле лекции 22.

При $n=1$ матрица Λ представляет собой кватернионный вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ длины N , а условия 1°–3° являются не чем иным, как условиями на пару (λ, B) , указанными на стр. 384.

Матрица U , задаваемая формулой (12), является при $n=1$ кватернионным столбцом $u = (u_1, \dots, u_N)^T$ высоты N , а матрица W , задаваемая формулой (12) — положительным вещественным числом.

Задача 11. Покажите, что при $n=1$ дифференциальная форма $-W^{-1}dW$ с вещественными коэффициентами является вещественной частью кватернионной дифференциальной формы

$$W\bar{U}^T dUW = \frac{\bar{u}^T du}{1+|u|^2}.$$

$$\text{где } |u|^2 = \bar{u}^T u = \sum_{i=1}^N |u_i|^2, \quad \bar{u}^T u = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i du_i.$$

Следовательно, при $n=1$ формула (13) для потенциала N -инстантонов может быть записана в следующем виде (как всегда, мы опускаем аргумент $x \in H$)

$$(16) \quad A = \text{Im} \frac{\bar{u}^T du}{1+|u|^2},$$

где $u = \overline{\lambda(B-x)}^T$. (Конечно, это не то u , что, скажем, в формуле (6).)

Что же касается соотношений (15), то при $n=1$ они имеют вид

$$(17) \quad \lambda_1 = t\lambda, \quad B_1 = B,$$

где $t \in \mathbb{H}$, $|t|=1$. Поэтому при $\lambda_1 \neq 0$ мы можем нормировать вектор λ , требуя, чтобы его первая координата λ_1 была вещественным положительным числом. Это однозначно нормирует вектор λ , но исключает точки — также составляющие нигде не плотное замкнутое множество — для которых $\lambda_1 = 0$.

Поэтому мы получим карту многообразия $\mathfrak{M}_n^*(N)$ (или, как говорят физики, — *независимые параметры*, задающие N -инстантоны), наложив условие $\lambda_1 > 0$ и отобразив из элементов матрицы B и век-

тора λ , составляющих пару (λ, B) , подчиненную условиям 1°—3°, независимые элементы, через которые выражаются все остальные.

Пусть $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, N$, где $b_{ij} = b_{ji}$ (этим мы автоматически учли условие 1°). Тогда диагональные элементы матрицы

$\bar{B}^T B + \bar{\lambda}^T \lambda$ имеют вид

$$\sum_{i=1}^N \bar{b}_{ji} b_{ij} + \bar{\lambda}_j \lambda_j = \sum_{i=1}^N |b_{ij}|^2 + |\lambda_j|^2$$

и значит, вещественны. Поэтому условие 2° сводится к $N(N-1)/2$ соотношениям

$$(18) \quad \sum_{i=1}^N \bar{b}_{ij} b_{ik} + \bar{\lambda}_j \lambda_k = 0, \quad j < k,$$

выражающих равенство нулю недиагональных элементов матрицы $\bar{B}^T B + \bar{\lambda}^T \lambda$. Следовательно, чтобы получить карту многообразия $\mathcal{M}_1(N)$ нам надо решить уравнения (18), т. е., точнее, приняв часть кватернионов в b_{ij}, λ за свободные неизвестные, выразить через них все остальные. Кроме того, надо принять во внимание условие 3°. Как впервые заметили Корепин и Шаташвили, решить уравнения (18) удастся при $N \leq 3$, но уже в случае $N = 4$ возникают непреодолимые — если мы хотим действовать только с кватернионами — алгебраические препятствия.

При $N = 1$ условия (18) отсутствуют и 1-инстантоны задаются кватернионом $b = b_{11}$ и числом $\lambda = \lambda_1 > 0$. Следовательно, потенциал A имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} \overline{d(b-x)}^{-1}}{1 + \lambda^2 |b-x|^{-2}} &= \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} \overline{(b-x)}^{-1} dx \overline{(b-x)}^{-1}}{1 + \lambda^2 |b-x|^{-2}} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 dx \overline{(b-x)}^{-1}}{\lambda^2 + |b-x|^2} = - \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} dx}{\lambda^2 + |b-x|^2}. \end{aligned}$$

Задача 12. Покажите, что этот потенциал калибровочно эквивалентен (вне точки b) потенциалу $A_{\lambda, b}$, задаваемому формулой (22) лекции 21. [Указание. Положите $y = \lambda^2 (b-x)^{-1} + b$.]

Если матрица B — мы возвращаемся к произвольному N — является диагональной матрицей с различными диагональными элементами $b_1, \dots, b_N$, а все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ вещественны и положительны, то условия 1°—3° автоматически выполнены и получающийся N -инстантон можно рассматривать как суперпозицию N инстантонов F_{λ_i, b_i} , $i = 1, \dots, N$, из лекции 21. Это решение инстантонных уравнений называется *решением 'т Хоофта*.

При $N = 2$ имеется только одно уравнение (18):

$$\bar{b}_{11}b_{12} + \bar{b}_{12}b_{22} + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Это уравнение линейно по $\bar{b}_{11}$ и потому легко решается — достаточно принять за свободные неизвестные число $\lambda_1 > 0$ и кватернионы b_{12} , b_{22} , λ_2 . Тогда при $b_{12} \neq 0$

$$(19) \quad b_{11} = - \frac{b_{12}(\bar{b}_{22}b_{12} + \lambda_1\bar{\lambda}_2)}{|b_{12}|^2}.$$

Условие 3° состоит при $n = 1$ и $N = 2$ в требовании, чтобы для любого $x \in H$ уравнения

$$b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 = x\xi_1,$$

$$b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 = x\xi_2,$$

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = 0$$

имели только нулевое решение $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

Но, исключив с помощью третьего уравнения ξ_1 , мы для ξ_2 получим уравнения

$$(x\lambda_1^{-1}\lambda_2 - b_{11}\lambda_1^{-1}\lambda_2 + b_{12})\xi_2 = 0,$$

$$(x + b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2 - b_{22})\xi_2 = 0.$$

Поэтому условие 3° выполнено тогда и только тогда, когда для любого кватерниона x хотя бы один из коэффициентов при ξ_2 в этих уравнениях отличен от нуля, что при $\lambda_2 \neq 0$ имеет место, как легко видеть, тогда и только тогда, когда

$$(20) \quad b_{11} - b_{12}\lambda_1\lambda_2^{-1} \neq b_{12} - b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2.$$

Этим доказано, что число $\lambda_1 > 0$ и кватернионы $b_{12} \neq 0$, b_{22} и $\lambda_2 \neq 0$, удовлетворяющие условию (20), где b_{11} определяется формулой (19), составляют в некоторой области многообразия $\mathcal{M}_1(2)$ систему независимых параметров (т. е. что эта область является координатной окрестностью, локальными координатами в которой служат число λ и коэффициенты кватернионов b_{12} , b_{22} и λ_2). В частности, мы видим, что размерность многообразия $\mathcal{M}_1(2)$ равна $1 + 3 \cdot 4 = 13 = 8 \cdot 2 - 3$; см. задачу 10.

Если мы хотим получить карту, покрывающую исключенные инстантоны — отвечающие случаю, когда $\lambda_2 = 0$ и $b_{12} = 0$ — необходимо по другому выбрать свободные неизвестные.

Впрочем, для практических целей обычно достаточно описать исключенные инстантоны как члены семейства, зависящего от меньшего числа переменных. (Геометрически это означает, что их совокупность представляется в виде подмногообразия — возможно тоже с особенностями — меньшего числа измерений, примыкающего к построенной 13-мерной области.)

Задача 13. Покажите, что 2-инстантоны с $b_{12} = 0$ и $\lambda_2 = 0$ параметризуются числом $\lambda_1 > 0$ и кватернионами b_{11}, b_{22} , удовлетворяющими неравенству $b_{11} + b_{22} \neq 0$ (и, значит, образуют 9-мерное многообразие).

Случай $N = 3$ трактуется аналогично.

В этом случае мы имеем три уравнения (18):

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{b}_{11}b_{12} + \bar{b}_{12}b_{22} + \bar{b}_{22}b_{23} + \lambda_1\lambda_2 &= 0, \\ \bar{b}_{11}b_{13} + \bar{b}_{12}b_{23} + \bar{b}_{23}b_{33} + \lambda_1\lambda_3 &= 0, \\ \bar{b}_{12}b_{13} + \bar{b}_{22}b_{23} + \bar{b}_{23}b_{33} + \lambda_2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выбрав за свободные неизвестные кватернионы $b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, \lambda_2$ и число $\lambda_1 > 0$, мы при $b_{12} \neq 0$ можем найти кватернион b_{11} из первого уравнения (21). Тогда остальные два уравнения относительно кватернионов b_{33} и λ_3 приобретут вид

$$\bar{b}_{13}b_{33} + \lambda_1\lambda_3 = a, \quad \bar{b}_{23}b_{33} + \lambda_2\lambda_3 = b,$$

где a и b — известные кватернионы и, значит, при $\lambda_2 \neq -\lambda_1 b_{23}$ будут однозначно разрешимы. Это дает — с учетом условия 3°, которое, как легко видеть, сводится к некоторым неравенствам, — семейство 3-инстантонов, зависящих от $1 + 5 \cdot 4 = 21 = 8 \cdot 3 - 3$ вещественных параметров. При $\lambda_2 = -\lambda_1 b_{23}$ или $b_{12} = 0$ получаются еще три семейства, два зависящие от 17 вещественных параметров (числового параметра λ_1 и кватернионных параметров $b_{13}, b_{12}, b_{22}, b_{23}$ и соответственно $b_{11}, b_{22}, b_{23}, \lambda_2$) и одно — от 13 вещественных параметров (числового параметра λ_1 и кватернионных параметров b_{11}, b_{22}, b_{23}), подчиненных соответствующим неравенствам.

При $N = 4$ этот метод не работает, так как для b_{ij} получаются (проверьте!) нелинейные уравнения.

Конечно, все эти вычисления практически ничего не говорят о топологии пространства $\mathfrak{M}_1(N)$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоморфизм внутренний 244
 Автоморфизмы 105, 154
 — накрытия 92
 Алгебра ассоциативная 228
 — голономии связности 344
 — Ли коммутативная 231
 — нормированная 429
 — с делением 150
 Алгебраическая K -теория 409
 Алгебры изотопные 150
 Ампулятор форм $\theta^1, \dots, \theta^n$ 176
 — формы θ 294
 Антиинстантон 384
 Асимптотически равные функции 372
 Атлас тривиализирующий 102, 155
 $\mathcal{U}$ -атласы эквивалентные 121

База векторного расслоения 102
 Базис ортонормированный 127
 — сопряженный 302
 Базисы модуля 104
 Букет 448

Векторное $\mathcal{U}$ -расслоение 121
 — расслоение 101
 — умножение 128
 Вертикальное подпространство 175
 Вещественная часть кватерниона 125
 — — октавы 144
 Внешний дифференциал формы 292
 — ковариантный дифференциал 367
 Всюду плотное подмножество 315

$(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ -геометрия 153
 Геометрия Клейна 154
 Главная билинейная часть 226
 Главное $\mathcal{U}$ -пространство 19
 — $\mathcal{U}$ -расслоение 19
 — гладкое действие 285
 Гладкое поле подпространств 176
 Гладкость слабая 264
 Гомоморфизм надстроечный 471
 Гомотопии пунктированные 443
 Гомотопическая группа абелева про-
 — странства 451
 — — линейной связности 435
 — — пунктированного пространства
 — 444
 Гомотопические классы путей 47
 Гомотопия гладкая 308
 — кусочно гладкая 308

Гомотопия с подвижными концами 315
 Гомотопные $\text{rel } I$ отображения 443
 Горизонтальная дифференциальная форма 288
 Граница пространства 443
 K -группа 409
 Группа Вейля 96
 — гладкая 17
 — голономии 308, 350
 — — ограниченная 309
 — — суженная 309
 — — в точке 351
 — Ли 17
 — — комплексная 227
 — — матричная 227
 — метастационарная 457
 — монодромии 66
 — накрытия в точке 84
 — преобразований 16
 — симплектическая 129
 — структурная 19
 — топологическая 17
 — универсально накрывающая 271
 — фундаментальная 51
 Группонд фундаментальный 52
 Группы когомологии комплексные 391
 — локально изоморфные 270

Действие вполне разрывное 36
 — гладкое 17
 — дискретное 36
 — непрерывное 17
 — слева 16
 — справа 16
 — топологически эффективное 157
 — тривиальное 24
 — эффективное 16
 Диагонализация связности 184
 Диаграмма коммутативная 441
 Дифференциал ковариантный 221
 Дифференциальные формы со значе-
 — ниями в η 290
 Дифференцирование ковариантное 194,
 204, 221

Евклидовы векторные расслоения 129
 Единича гомотопическая 445
 Единичы кватернионные 124
 — октавные 144
 — разбиение 133, 410
 Единичный куб пространства 443

Закон дистрибутивности левый 475
 — — правый 475
 Заряд топологический 383
 Звездность 242
 $\mathcal{V}^r$ -значная дифференциальная форма степени r 289

Изометрия 127
 $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -изоморфизм 154, 156
 $\mathcal{X}$ -изоморфизм 123
 Изоморфизм 14, 105, 127
 — векторного расслоения 105
 — Гуревича 445
 — над $\mathcal{B}$ 15
 — накрытия 36
 $\mathcal{Y}$ -изоморфизмы 24
 Изоморфизмы координатные 154
 Инвариант Хопфа 424, 474
 k -инстантон 384
 Инстантон 384

Калибровочное поле с потенциалом A 380
 Канонические координаты второго рода 266
 — — первого рода 242
 Карта согласованная 262
 Карты нормальные 242
 Квазигруппа 149
 — гладкая 150
 — Ли 150
 — правая 149
 — топологическая 150
 Кватернион вещественный 125
 — мнимый 125
 Кватернионы сопряженные 126
 Класс полный Понтрягина 401
 — — Чженя 401
 — реализуемый 88
 — тривиальный 435
 — характеристический 392, 400, 402
 — расслоения 435
 — Эйлера 406
 Классы когомологий 118
 — Понтрягина 396
 — Чженя 395
 Ковариантная производная поля 192
 — — сечения 189
 Комплексификация расслоения 106
 Комплексифицируемость 136
 Компоненты ξ -тензора 202
 — векторного поля 186
 — тензора 334
 Конец обобщенного пути 49
 — пути 40
 Константы структурные 228
 Конструкция Хопфа 427
 Координаты $\mathcal{V}^r$ -значной формы 291
 — нормальные 242
 Коцикл над группой покрытия 115
 — склеивающийся 115
 — — расслоения 115
 Коциклы когомологические 118
 — матричные 115
 Коцилиндр 42
 Коэффициенты связности 179
 Коядро гомеоморфизма 65
 Кривая горизонтальная 185, 349
 — интегральная 187

Кривая кусочно гладкая 307
 Кронекерово произведение матриц 209

Лассо малое 310
 — элементарное 311
 Линеалы правые 101
 Лифт 69, 185
 — кривой 185
 — отображения 69
 Локальность операторов 196

Матрица форм кривизны 339
 k -местный функтор 212
 Метрика 133
 — гладкая 200
 • $\mathcal{Y}$ -многообразие 17
 Многообразие интегральное 248
 — — максимальное 248
 — квазикомплектифицируемое 138
 — квазикомплексное 136
 — параллелизуемое 109
 Многочлен инвариантный 387
 Множество ровно накрытое 33
 Модули базиса 104
 Модуль октавы 145
 Монодромия 66
 Морфизм 14, 105
 — векторного расслоения 105
 — над $\mathcal{B}$ 15
 Морфизмы регулярные 168
 Мультиинстантоны 384

Надстройка 471
 Накрытие 33
 — гладкое 38
 групповое 271
 — комплексно-аналитическое 38
 — конечнолистное 34
 — однолистное 38
 — односвязное 67
 — пунктированное 94
 — регулярное 96
 — тривиальное 38
 — универсальное 88
 Накрытия подчиненные 86
 Начало обобщенного пути 49
 — пути 40
 Нормы кватерниона 126
 — октавы 145

Овеществление расслоения 106
 Окрестность нормальная 242
 — тривиализирующая 31, 102, 155
 — шаровая 310
 Октава 144
 Октавы сопряженные 144
 Оператор кривизны 330
 Операции Адамса 418
 Орбиты 167
 Отображение надстроечное 471
 — локально гомеоморфное 255
 — накрывающее 33
 — перехода 113
 — поднимаемое 69
 — послойное 14, 104
 — пунктированное 443
 — сдвига 19
 — сопряженное 213
 — факторное 15

Отображение характеристическое 434
 — эквивариантное 19
 — экспоненциальное 239
 — элиоморфное 15
 Отображения пунктировано гомотоп-
 ные 443

Петли гладко гомотопные 308
 — комбинаторно эквивалентные 311
 — кусочно гладко гомотопные 308

Петля в точке 48
 — гомотопная нулю 309
 — малая 310

Перенос параллельный 307, 350

Подгруппа 20

абстрактная 246

— алгебраическая 261

— гладкая 227

— дискретная 35

замкнутая 357

— Ли 227

— однопараметрическая 236

— стационарная 66

Подгруппы сопряженные 84

Подмногообразие консервативное 249

Поднятие 69

— горизонтальное 299

— кривой 198, 349

— отображения 69

Подрасслоение 247

Покрытие нумерируемое 133

— тривиализирующее 102

Поле ξ -векторное 103

— ξ -ковекторное 202

— ξ -тензорное 202

— вертикальное 286

— горизонтальное 298

— горизонтальных подпространств 176

— левоинвариантное 229

— параллельных векторов 186

— разложимое 208

— эквивариантное 278

— Янга — Миллса 382

Поля калибровочно эквивалентные 383

Последовательность гомотопическая 454

— — точная 65

— точная 64, 440

— — в члене 64

Поток полный 240

Представление группы, ассоциирован-
 ное с действием 16

— линейное 301

— монодромии 66

— присоединенное 244

λ -проекция 102

Преобразование калибровочное 376

— скольжения 92

— элементарное 311

— — петли 311

Приклеивание 423

Принцип расщепления 419

Проекция кривой 185

— расслоения 13

Произведение путей 46

— форм скалярное 385

Прообраз расслоения 170

— связности 182

Пространства сопряженные 213

$\mathcal{G}$ -пространство 17

— эффективное 17

$\mathcal{G}$ -линейное 122

Пространство абелево 450

— вертикальное 175

— кватернионное евклидово 127

— локально односвязное 79

— микросвязное 79

— накрывающее 34

— ненакрываемое 39

— односвязно накрываемое 67

— односвязное 53

— паракомпактное 133

— полулокально односвязное 79

— предгильбертово 385

— пунктированное 443

— расслоения 13

— расслоенное 13

— сопряженное 213

— стягиваемое 53

— типа $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 153

— тотальное 13, 102

— удобное 74

— универсально накрываемое 88

Пути гомотопные 46

Путь 40

— обобщенный 49

— — кусочно гладкий 54

— — симметричный 51

— — специальный 56

— обратный 46

— постоянный в точке 46

— специальный 315

— элементарный 315

Разбиение единицы 133, 410

Размерность 415

— расслоения 102

Ранг 415

Распределение инволютивное 249

— вполне интегрируемое 248

Распределения на $\mathcal{X}$ 247

Расслоение 13

— аффинное 155

— — евклидово кватернионное 130

— — псевдоевклидово 129

— — унитарное 129

— — ориентированное 129

— в смысле Гуревича 43

— векторное 101

— — метризуемое 133

— — симплектическое 101

— — тривиальное 107

— виртуальное 415

— гладкое 170, 175

— касательное 109

— кокасательное 218

— локально тривиальное 31

— над $\mathcal{H}$ 13

— нумерируемое 133

— ориентируемое 133

— положительное 416

— реперов 111

— с типичным слоем 14

— тавтологическое 421

— типа $\mathcal{G}$ 129

— — $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 155

— тривиальное 25

— Хопфа 473

$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ -расслоения 155

$\mathcal{G}$ -расслоения 24

— тривиальные 25

Расслоения главные тривиальные 20
 — изоморфные 14, 105
 — стационарно эквивалентные 408
 — характеристический класс 435
 Расширение расслоения 162
 Редукция главного расслоения 164
 — расслоения 162
 — — к группе $\mathcal{G}$ 121
 — — — подгруппе $\mathcal{H}$ 162
 Ряд инвариантный формальный 402

Свободное $\mathcal{G}$ -многообразие 17
 — $\mathcal{G}$ -пространство 17
 Свойство гомотопической инвариантности 440
 — фуикториальности 400, 440, 445
 Связности 43
 — диагонализация 184
 — коэффициенты 179
 — прообраз 182
 — формы 179
 Связность 179, 279
 — в смысле Гуревича 43
 — индуцированная 353
 — метрическая 201
 — на главном расслоении 279
 — — гладком векторном расслоении 179
 — — — расслоении ξ $[F]$ 300
 — плоская 345
 — с абсолютным параллелизмом 348
 — согласованная с метрикой 201
 Сдвиг левый 26
 Секущие поверхности расслоения 187
 Семейство гладкое 184
 Сечение гладкое 187
 — расслоения 27, 103
 Слой 13
 — расслоения 102
 — типичный 14
 Составляющая однородная 400
 Составляющие однородные ряда 402
 Стабилизатор 66
 Структура квазикомплексная 136
 — комплексная 123
 — стандартная 123
 Структуры комплексные 107
 Сумма Уитни 122

ξ -тензор 202
 Тензор кривизны 333
 Тензорное произведение векторов 210
 — — отображений 210
 — — полей 203
 — — пространств 210
 — — расслоения 217
 — — сечений 220
 — — расслоение типа (r, s) 218
 Теорема Адо 269
 — Амброза — Сингера 358
 — Кирхгофа 143
 — Ли третья 269
 — периодичности Ботта 451
 — редукции 318
 — Титце 464
 — Урысона 462

Теорема Фрейденшталя 265, 472
 — Хопфа о продолжении 462
 — Ямбе 264
 Теория Морса 487
 Тип конечный 411
 — — расслоения 411
 Тождество Бианки 367
 Топология компактно-открытая 42
 Точка неподвижная 30
 Тривиализация 102, 155
 — гладкая 171
 — ковариантно постоянная 348
 — расслоения 31, 102, 155

Умножение векторное 428
 — Джекобсона 229
 — векторное непрерывное 429
 — скалярное 127, 200
 Унитары 427
 — топологические 427
 Уравнение Янга — Миллса 381
 Урысона большая лемма 462
 — функция 462

Факторпространство 15
 Фактортопология 15
 Форма автодуальная 374
 — антиавтодуальная 374
 — кривизны 339, 355
 — связности 298
 — фундаментальная 293
 — эквивариантная 296, 368
 Формы связности 179
 K -функтор 409
 Функтор гладкий 214
 — двуместный 212
 — ковариантный 213
 — комплексификации 214
 — контравариантный 213, 409
 — непрерывный 214
 — ошестствления 213
 — прямого суммирования 212
 — r -й внешней степени 213
 — сопряжения 213
 — тензорного умножения 212
 Функции склейки 117
 Функционал $F_K \mathcal{D}$ -полилинейный 204
 — Янга — Миллса
 Функция перехода

Характер Понтрягина 404
 — Чженя 403

Частная ковариантная производная 190, 205
 Частные ковариантные производные 205
 Часть кватерниона скалярная 125
 — расслоения 31, 103
 Числа Кэли 144
 Число Чженя 397
 — листов 34

Эпиморфизм 15