М.А.СОБИРОВ ВА А.Е[illegible]ССУПОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИ

М. А. СОБИРОВ ва А. Ё. ЮСУПОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИ

УНИВЕРСИТЕТЛАРНИНГ
ВА ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТЛАРИНИНГ
СТУДЕНТЛАРИ УЧУН ҚЎЛЛАНМА

ЎзССР ДАВЛАТ ЎҚУВ-ПЕДАГОГИКА НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1[illegible]

Махсус редактор
Доцент *РАФИҚ ИСКАНДАРОВ*

СЎЗ БОШИ

Бу китоб университетлар ва педагогика институтларининг дифференциал геометрия программалари асосида ёзилди. Бироқ, кўп эҳтиёжлар назарда тутилиб, айрим пунктларда программадан четга чиқилди. Бу пунктлар ва параграфлар (*) ишораси билан кўрсатилди ёки майда шрифт билан терилди.

Текстда 250 дан ортиқ мисол ва машқлар берилди; ўқувчилар уларни тегишли темалар ўтилиши билан ечиб боришлари лозим.

Векторлар алгебрасига бағишланган биринчи бобда исботлар йўқ деярли. Бу боб векторлар алгебрасини „эслаш конспекти“ деб қаралиши керак.

Ушбу „Дифференциал геометрия курси“нинг чизиқлар назариясига доир (I—X) бобларини авторлар биргаликда тузди. Сиртлар назариясига бағишланган (XI—XIII) бобларни М. А. Собиров ёзди. Машқ ва мисолларни ҳам асосан М. А. Собиров тўплади ва тузди.

Фойдаланилган адабиёт руйхати китобнинг охирида берилди.

Дифференциал геометриядан ўзбек тилида биринчи марта нашр этилган бу қўлланмани айрим камчиликлардан холи деб бўлмайди. Қўлланма тўғрисидаги фикр ва мулоҳазаларингизни авторларга қуйидаги адрес орқали ёзиб юборишингизни илтимос қиламиз:

Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Ўқувпеддавнашр.

Авторлар

КИРИШ

Элементар геометрия курсида тузилиш жиҳатидан оддий бўлган чизиқлар: тўғри чизиқ, кесма, учбурчак, кўпбурчак, айлана ва унинг ёйлари; сиртлардан эса текислик, сфера, доиравий цилиндр, конус, пирамида, призма ва бошқа кўпёқларнинг хоссалари ўрганилади. Бу маълумотлар олий математикада эгри чизиқ ва сиртларнинг хоссаларини ўрганишда ёрдам беради. Масалан, эгри чизиқларнинг кўпгина хоссаларини ички чизилган синиқ чизиқлар воситасида, эгри сиртларнинг хоссаларини эса кўпёқлар воситасида текшириш мумкин ва ҳоказо.

Аналитик геометрия курсида элементар геометрияга хос масалалар: оддий эгри чизиқлар (эллипс, гипербола, парабола, айлана) ва оддий сиртлар (эллипсоид, параболоид, гиперболоид, конус сирт) арифметика ва алгебра методлари ёрдамидаги (координаталар системаси воситасида) текширилиб, назарий ва амалий масалаларни ечишда умумий алгебраик методлар ва формулалар берилади.

Дифференциал геометрия курсида эса ҳар қандай эгри чизиқ ва сиртнинг хоссалари ўрганилади. Ҳаётда турли-туман шаклли чизиқ ва сиртлар учрайди. Кеманинг йўли, планетанинг фазодаги ҳаракат траекторияси, турли шаклдаги пружиналар эгри чизиқларга мисол бўла олади; юпқа жисмларнинг чегаралари, юпқа пардалар, ҳар хил қопламлар эса сиртларга мисол бўла олади. Кўпгина буюмларни ишлаш усуллари, жисмларнинг сузиш ва учиш қобилияти, оптик ва бошқа хоссалари уларнинг геометрик шаклига — сиртига боғлиқ десак хато қилмаган бўламиз. Келтирилган мисолларда соф математик чизиқ ва сирт тўғрисида сўз бормайди, албатта. Бироқ биз уларнинг конкрет хоссаларини назардан соқит қилиб, реал объектларни математик чизиқ ва сиртлар деб тасаввур қилишимиз мумкин, чунки шунинг ўзи уларнинг математик хоссаларини текшириш учун етарлидир.

Хуллас, дифференциал геометрия эгри чизиқлар ва сиртлар назариясидир. Дифференциал геометриянинг бу эгри чизиқлар ва сиртларни ўрганиш воситаси эса, асосан, дифференциал ҳисобдир. Айрим масалаларни текширишда интеграл ҳисоб ва дифференциал тенгламалар назариясидан ҳам фойдаланилади. Кенгроқ маънода олганда, дифференциал геометрияда фойдаланиладиган метод — математик анализ — чексиз кичиклар ҳисобидир. Бу метод текшириладиган объектни маълум даражада чегаралайди. Дифференциал геометрия чизиқ ва сиртларнинг чексиз кичик қисмларига доир хоссаларни текширади. Бу хоссалар, одатда, „дифференциал" хоссалар дейилиб, чизиқ ва сиртнинг айни бир „нуқтасига" тааллуқлидир. Яъни улар бу нуқтанинг ниҳоятда кичик атрофига боғлиқ бўлиб, чизиқ ва сиртни аниқловчи тенгламаларга кирган функцияларнинг шу нуқтадаги турли тартибли хоссалари орқали ифодаланадиган катталиклар билан тасвирланади. Модомики, дифференциал ҳисобни асосий восита қилиб олар эканмиз, текшириладиган чизиқ ва сиртларни шундай шартларга бўйсундиришимиз керакки, улар дифференциал ҳисобни татбиқ этишга имкон берсин, яъни чизиқ ва сирт тенгламаларига кирувчи функциялар узлуксиз ва етарлича тартибли ҳосилаларга эга бўлсин.

Дифференциал геометрия анализ билан бирга ривожланди, геометриянинг баъзи тушунчалари анализнинг тегишли тушунчаларидан олдин келиб чиқди. Масалан, уринма тушунчаси ҳосила тушунчасининг, юз ва ҳажм тушунчалари эса интеграл тушунчасининг келиб чиқишига сабаб бўлди. Демак, анализ билан геометриянинг турли тушунчалари ва масалалари бир-бирини тақозо қилиб келди ва улар бир-бирига чамбарчас боғлиқдир.

Геометрик объектларнинг чексиз кичик қисмларинигина текшириш билан чегараланишнинг яна бир катта аҳамияти бор: чизиқлар ва сиртлар орасида юз берган боғланишлар уларнинг чексиз кичик қисмларида, кўпинча, соддалашади ва ойдинлашади, бунинг учун юқори тартибли чексиз кичиклардан вақтинча воз кечишга тўғри келади. Шу туфайли, объектларнинг тузилишида юз берган қонуниятни билиб оламиз.

Ҳар бир математик предмет ҳақида тўғри тасаввур олиш учун унинг мазмуни билан чуқур танишиш лозим. Тарихий маълумотларни китобимизнинг охирига кўчириб, дифференциал геометриянинг ўзини баён этишга ўтамиз.

Биринчи боб

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

§ 1. Векторлар ҳақида асосий тушунчалар

Математика, физика ва бошқа амалий фанларда учрайдиган катталиклар икки хил бўлади. Баъзи катталиклар маълум ўлчов бирлигида олинган сон қийматининг ёлғиз ўзи билан ифодаланади. Масалан, вақт, жисмнинг бирор нуқтасидаги температураси, кесманинг узунлиги, юз, ҳажм, жисмнинг массаси ва бошқалар шундай катталиклардир. Бундай катталиклар *скаляр* катталиклар деб аталади. Сон қиймати ва фазодаги йўналиши билан ифодаланадиган физик катталиклар ҳам бор. Масалан, куч, тезлик, тезланиш, электр потенциал ва бошқалар шундай катталиклардир. Бундай катталиклар *вектор* катталиклар деб аталади.

Ҳар бир вектор катталикни, геометрик усулда, узунлиги шу вектор катталикнинг сон қийматига тенг, йўналиши эса шу вектор катталикнинг йўналишида бўлган кесма билан тасвирлаш мумкин. Бундай вектор катталикни *геометрик вектор* ёки, қисқача, *вектор* деб атаймиз.

1-чизма.

Векторларни устига чизиқ тортилган иккита катта ҳарф ($\overline{AB}$) билан ёки битта қора ёзма ҳарф (**a**) билан белгилаймиз. 1-чизмада $\overline{AB}$ вектор кўрсатилган. A нуқтани векторнинг *боши*, B нуқтани векторнинг *охири* (*учун*) деб қабул қиламиз. $\overline{AB}$ векторнинг сон қийматини, яъни маълум бир масштабда ўлчанган узунлигини $|\overline{AB}|$ билан ёки AB билан белгилаймиз: $|\overline{AB}| = AB$. $\overline{AB}$ кесманинг узунлиги (мусбат сон) $\overline{AB}$ векторнинг *модули* дейилади. Агар вектор **a** билан белгиланган бўлса, унинг модули a билан белгиланади. Бундан кейин биз ҳар қандай физик катталикни тегишли геометрик векторга алмаштириб доимо шундай вектор билан иш кўрамиз. Векторнинг боши унинг *қўйилиш нуқтаси* дейилади. Боши ва охири устма-уст тушган вектор *ноль-вектор* деб аталади ва 0 билан белгиланади. Ноль-векторнинг модули 0 га тенг.

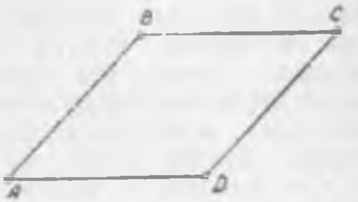
Таъриф. *Бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётган векторлар коллинеар векторлар дейилади.*

Агар икки a ва b вектор қуйидаги уч шартни қаноатлантирса, яъни: 1) *улар коллинеар ва* 2) *бир хил йўналган ва* 3) *уларнинг узунликлари тенг бўлса, у ҳолда, бундай икки вектор ўзаро тенг векторлар дейилади.*

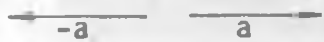
2-чизмада $ABCD$ ромб кўрсатилган. Бунда $\overline{AB} \neq \overline{AD}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Векторларнинг тенглигидан шундай натижа келиб чиқадики, ҳар бир векторнинг йўналишини сақлаб, уни исталган жойга кўчириш мумкин. Бундай вектор *эркин* вектор деб аталади.

Бундан кейин векторларни бир жойдан иккинчи жойга кўчириш ҳақида гапирганимизда, уларнинг йўналишини сақлаган ҳолда кўчиришни тушунамиз.



2-чизма.

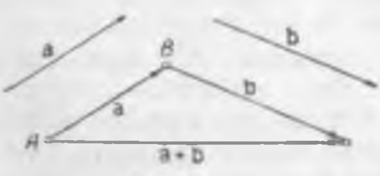


3-чизма.

Узунликлари тенг ва йўналишлари қарама-қарши векторлар 3-чизмада кўрсатилган.

§ 2. Векторларни қўшиш

Агар бирор M нуқта A вазиятдан B вазиятга, сўнгра B вазиятдан C вазиятга кўчса, M нуқта A вазиятдан C вазиятга кўчган бўлади (4-чизма).



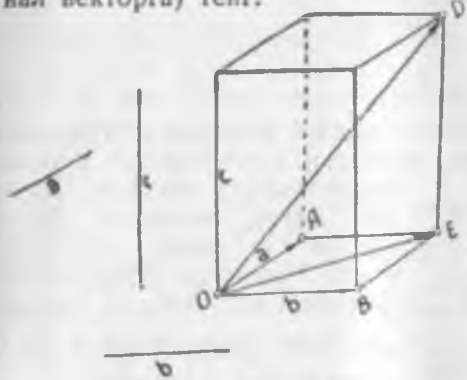
4-чизма.

5-чизма.

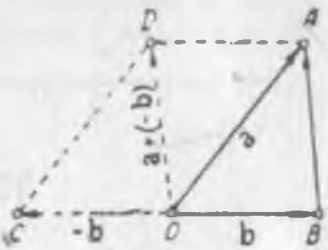
Берилган икки вектор йиғиндиси қуйидагича топилади: *векторларни бошлари битта нуқтада бўладиган қилиб кўчирамиз ва улардан параллелограмм ясаймиз. Шу векторлар билан умумий бошга эга бўлган диагонал вектор берилган икки векторнинг йиғиндиси дейилади* (5-чизма).

Агар бир неча векторни қўшиш керак бўлса, уларни юқорида кўрсатилган йўл билан кетма-кет қўшиш лозим.

Бир текисликда ётмаган учта вектор йиғиндиси шу векторлардан тузилган параллелепипеднинг диагоналига (яъни диагонал векторга) тенг.



6-чизма.



7-чизма.

6-чизмада:

$$a + b = \overline{OE}, \quad \overline{OE} + c = \overline{OD} = d,$$

демак,

$$a + b + c = \overline{OD} = d$$

бўлади.

§ 3. Векторларни айириш

Айириш, одатда, қўшишга тескари амал бўлади: $a - b = a + (-b)$, яъни a вектордан b векторни айириш учун a векторга $-b$ векторни қўшиш керак (7-чизма):

$$a - b = \overline{OA} - \overline{OB}; \quad \overline{OA} + (-\overline{OB}) = \overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OD}.$$

Агар B ни A билан туташтирсак, $ABOD$ параллелограмм ҳосил бўлади; BA ва OD лар параллелограммнинг қарама-қарши томонлари бўлгани учун $\overline{OD} = \overline{BA}$ бўлади.

§ 4. Векторни скалярга кўпайтириш

Тенг бир неча векторни қўшиб, векторни бир неча марта такрорлаш, яъни векторни бутун сонга кўпайтириш тушунчасига келамиз:

$$ma = a + a + \ldots + a \qquad (m \text{ марта}).$$

Демак, узунлиги a векторнинг узунлигидан m марта катта, йўналиши эса a векторнинг йўналиши билан бир хил вектор ҳосил бўлади (8-чизма).

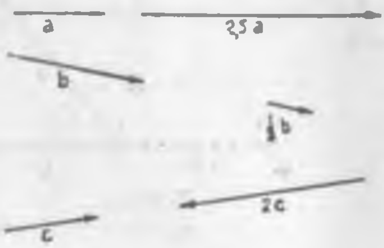
Векторни бутун мусбат сонга бўлиш тушунчасини киритамиз:

$$\frac{a}{m} = \frac{1}{m} \cdot a = c,$$

бундан

$$a = mc.$$

Демак, a векторнинг йўналиши билан c векторнинг йўналиши бир хил бўлиб, c векторнинг узунлиги a векторнинг узунлигидан m марта кичикдир. Шундай қилиб, векторни бутун мусбат m сонга бўлганда унинг йўналиши ўзгармайди, узунлиги эса m марта камаяди. Энди рационал $m = \frac{p}{q} > 0$ сонни олсак, у ҳолда,



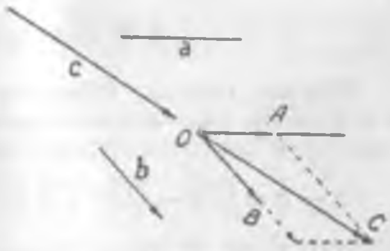
8-чизма.

$$b = ma = \frac{p}{q}\, a$$

бўлади. Демак, b векторни топиш учун a ни мусбат p сонга кўпайтириб, ундан кейин мусбат q сонга бўлиш керак. Агар m манфий сон бўлса, у ҳолда, b векторнинг йўналиши билан a векторнинг йўналиши бир-бирига қарама-қарши ва b нинг узунлиги $|ma| = |m|a$ бўлади. a ва b векторлар коллинеардир.

Таъриф. *Бошлари умумий нуқтага келтирилган a, b, c векторлар бир текисликда ётса, улар компланар векторлар дейилади.*

Агар a, b ва c векторлар компланар бўлиб, ҳеч қандай жуфти ўзаро параллел бўлмаса, уларнинг ҳар бирини қолган иккитасининг йўналиши бўйича ёзиш, яъни уларнинг ҳар бирини қолган иккитасига коллинеар бўлган икки векторнинг йиғиндиси тарзида ифодалаш мумкин. 9-чизмада:



9-чизма.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}, \quad \overline{OA} = ma, \quad \overline{OB} = nb$$

бўлганлиги учун:

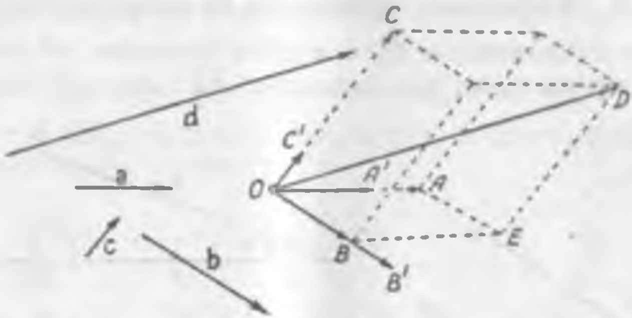
$$\overline{OC} = c = ma + nb$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш, компланар эмас уч вектор берилган бўлса, у ҳолда ҳар қандай тўртинчи $\boldsymbol{d}$ векторни уларнинг йўналиши бўйича ёйиш, яъни $\boldsymbol{d}$ векторни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\boldsymbol{d} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}.$$

Бунинг учун, тўртта векторни бир умумий бошга келтириб, қирралари $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлардан ясалган ва диагонал вектори $\boldsymbol{d}$ га тенг бўлган параллелепипед тузиш керак (10-чизма):



10-чизма.

$$\overline{OA'} = \boldsymbol{a},\quad \overline{OA} = m\boldsymbol{a},\ \overline{OB'} = \boldsymbol{b},\quad \overline{OB} = n\boldsymbol{b};$$

$$\overline{OC'} = \boldsymbol{c},\quad \overline{OC} = p\boldsymbol{c};\ \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OE};\ \overline{OE} + \overline{OC} = \overline{OD}.$$

Демак, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ ёки $\boldsymbol{d} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}$.

Дифференциал геометрия курсида, кўпроқ тўғри бурчакли (Декарт) координаталар системаси ишлатилади. Бу координаталар системасининг бошидан, ҳар қайси ўқнинг мусбат йўналиши томонига қаратиб, узунлиги бирга тенг векторни қўямиз. Булар *бирлик векторлар* (ёки *ортлар*) дейилади. OX ўқидаги бирлик векторни $\boldsymbol{i}$ билан, OY ўқидаги бирлик векторни $\boldsymbol{j}$ билан ва OZ ўқидаги бирлик векторни эса $\boldsymbol{k}$ билан белгилаймиз. Агар M нуқтанинг координаталари x, y, z бўлса, $\overline{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ бўлади, чунки:

$$ON_1 = x,\quad ON_2 = y,\quad ON_3 = z,$$

$$\overline{ON_1} = x\boldsymbol{i},\ \overline{ON_2} = y\boldsymbol{j},\ \overline{ON_3} = z\boldsymbol{k},$$

$$\overline{ON_1} + \overline{ON_2} = \overline{ON},\ \overline{ON} + \overline{ON_3} = \overline{OM}.$$

Демак, $\overline{OM} = \overline{ON_1} + \overline{ON_2} + \overline{ON_3}$, яъни $\overline{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ (11-чизма).

x, y ва z сонлари $\overline{OM}$ векторнинг координаталари дейилади.

Машқлар

1. Қандай шарт бажарилганда a, b ва c векторлардан учбурчак ясаш мумкин?

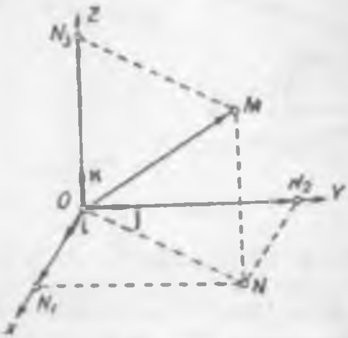
Жавоб: a, b ва c векторлардан учбурчак ясаш учун $a + b + c = 0$ бўлиши шарт.

2. Тўртбурчакнинг диагоналлари бир-бирини тенг иккига бўлиб кесишса, бундай тўртбурчакнинг параллелограмм бўлиши исботлансин.

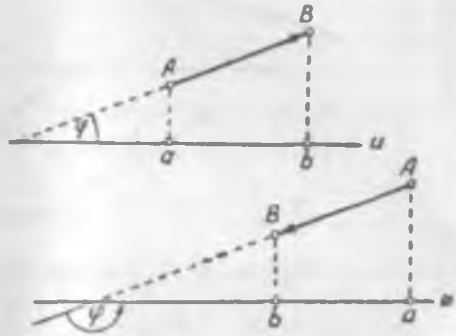
3. Ҳар қандай учбурчакнинг медианаларидан янги учбурчак ясаш мумкинлигини исботланг.

§ 5. Векторнинг проекцияси ва координаталари

Икки йўналишидан бири мусбат йўналиш деб қабул қилинган тўғри чизиқ ўқ дейилади. $\overline{AB}$ вектор билан u ўқ



11-чизма.



12-чизма.

бир текисликда ётган бўлсин. A ва B нуқталардан u га перпендикуляр тушириб, u да a ва b нуқталарни ҳосил қиламиз.

$\overline{ab}$ векторнинг мусбат ёки манфий ишора билан олинган узунлиги $\overline{AB}$ векторнинг u ўққа (ёки u ўққа туширилган) проекцияси дейилади. Уни биз ab билан белгилаймиз. $\overline{ab}$ векторнинг йўналиши билан u ўқнинг йўналиши бир хил бўлса, $ab > 0$ бўлади, акс ҳолда $ab < 0$ бўлади (12-чизма). Векторнинг узунлиги билан шу вектор проекцияси орасида қуйидаги боғланиш бор:

$$ab = AB \cos \varphi,$$

бунда φ — ўқ билан вектор орасидаги бурчак. Ўқ билан вектор бир текисликда ётмаган ҳолда ҳам натижа шундай бўлаверади.

$\overline{OM}$ векторнинг координата ўқларига проекциялари M нуқтанинг x, y, z координаталарига тенг, чунки $\overline{OM} = xi + yj + zk$, демак:
$$x = OM \cdot \cos \alpha, \ y = OM \cdot \cos \beta, \ z = OM \cdot \cos \gamma,$$

бунда α, β, γ — векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари.

Бундан қуйидаги натижаларни чиқарамиз.

Векторларни қўшишда уларнинг проекциялари қўшилади, масалан:

$$\overline{OM}_2 = \boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} \text{ ва } \overline{OM}_1 = \boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$

бўлса,

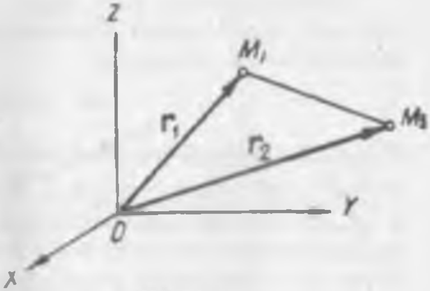
$$\overline{OM}_2 + \overline{OM}_1 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 = (x_2 + x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 + y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 + z_1)\boldsymbol{k}.$$

Векторларни айиришда уларнинг проекцияларини бир-биридан айирилади, масалан:

$$\overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлса, $\overline{M_1M_2}$ векторнинг координаталарини топиш осон:

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},$$



13-чизма.

яъни $\overline{M_1M_2}$ нинг координаталари

$$x_2 - x_1,\quad y_2 - y_1,\quad z_2 - z_1$$

бўлади (13-чизма).

Векторни m скалярга кўпайтиришда унинг ҳамма проекциялари шу скалярга кўпайтирилади. Масалан:

$$m\overline{OM} = (mx)\boldsymbol{i} + (my)\boldsymbol{j} + (mz)\boldsymbol{k}.$$

§ 6. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Таъриф. *Икки вектор узунликларининг шу векторлар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмаси бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталади.*

Скаляр кўпайтмани $\boldsymbol{ab}$ ёки, баъзан, $(\boldsymbol{ab})$ билан белгилаймиз.

Таърифга мувофиқ:

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi,$$

бунда φ — $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак.

Энди скаляр кўпайтманинг асосий хоссаларини ўрганишга ўтамиз.

Векторларнинг ақалли биттаси ноль-векторга тенг бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Ноль-вектордан фарқли икки вектор ўзаро перпендикуляр бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Масалан:

$$\mathbf{ij} = 0, \quad \mathbf{jk} = 0, \quad \mathbf{ki} = 0.$$

Аксинча, $\mathbf{ab} = 0$ бўлиб, $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ кўпайтувчилар ноль векторга тенг бўлмаса, у ҳолда $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ бўлади, чунки ab $\cos\varphi = 0$ *шартидан, $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлганда,* $\cos\varphi = 0$ *эканлиги, яъни $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ бўлиши келиб чиқади.*

Йўналишлари бир хил бўлган $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар узунликларининг кўпайтмасига тенг. Масалан:

$$\mathbf{ab} = ab\cos 0 = ab.$$

Шуниг учун, $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$ бўлади. Бундан: $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{aa}}$ келиб чиқади, баъзан, $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ шаклида ҳам ёзилади. Лекин $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ шу шаклда қолдирилади, чунки $\mathbf{a}^2$ илдиздан чиқарилганда мутлақо нотўғри $a = \mathbf{a}$ тенглик, яъни сон векторга тенг деган нотўғри даъво келиб чиқади. Сўнгги хоссани координата ўқларидаги бирлик векторларга татбиқ этамиз:

$$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1.$$

Скаляр кўпайтма коммутатив хоссага эга:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

Икки векторнинг скаляр кўпайтмасини топиш учун улардан бирининг узунлигини иккинчисининг биринчиси йўналишига туширилган проекциясига кўпайтирилса ҳам бўлади. Ҳақиқатан, $\mathbf{ab} = ab\cos\varphi = a \cdot b\cos\varphi$ бўлади, бу ерда $b\cos\varphi$ кўпайтма $\mathbf{b}$ нинг $\mathbf{a}$ йўналишига туширилган проекцияси $\mathbf{b}_a$ дир. Демак, $\mathbf{ab} = a\mathbf{b}_a$ бўлади.

Худди шу йўл билан $\mathbf{ab} = b\mathbf{a}_b$ эканини ҳам исботлаш мумкин. Икки вектор йиғиндиси билан учинчи векторнинг скаляр кўпайтмаси тақсимот қонунига бўйсунади, яъни

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

бўлади. Бундан:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{d} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + \mathbf{ad} + \mathbf{bd}$$

келиб чиқади.

Энди, юқоридаги хоссаларга асосланиб, $\overline{OM}_1 = x_1i + y_1j + z_1k$ ва $\overline{OM}_2 = x_2i + y_2j + z_2k$ векторларни скаляр кўпайтирамиз:

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2 = (x_1i + y_1j + z_1k)(x_2i + y_2j + z_2k)$$

ёки

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Жумладан:

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

бўлади.

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_1 = \overline{OM}_1^2$$

бўлганидан:

$$|\overline{OM}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

бўлади.

Машқлар

4. $\overline{OM}_1 = i + j - 4k$, $\overline{OM}_2 = i - 2j + 2k$ векторлар орасидаги бурчакни аниқланг.

5. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси томонлари квадратларининг йиғиндисига тенглигини векторлар ёрдами билан исботланг.

6. Учбурчакнинг учта баландлиги бир нуқтада кесишади. Буни векторлар ёрдами билан исботланг.

Кўрсатма. Учбурчакнинг A ва B учларидан ўтказилган баландликларининг кесишган нуқтаси O бўлсин. O нуқтани C билан туташтириб, $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ эканлигини исботлаймиз.

$$\overline{OA} \perp \overline{BC},\ \overline{OB} \perp \overline{CA} \text{ ва } \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB},\ \overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC}$$

бўлгани сабабли $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$, $(\overline{OA}, \overline{OC} - \overline{OB}) = 0$ дан $\overline{AB} \cdot \overline{OC} = 0$ келиб чиқади.

§ 7. Векториал кўпайтма

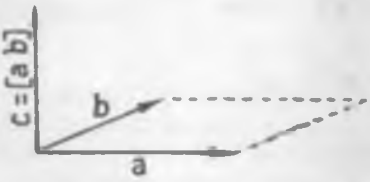
Таърриф. *Икки a ва b векторнинг векториал кўпайтмаси деб шундай c векторни айтамизки, унинг узунлиги a ва b векторлардан ясалган параллелограмм юзининг сон қийматига тенг бўлиб, бу c вектор a ва b векторлар текислигига перпендикуляр ҳолда шундай томонга йўналганки, ана шу c вектор атрофида энг қисқа йўл бўйлаб a дан b гача бурилиш z ўқи атрофида x ўқидан y ўқигача* бурилиш кабн бўлади (14-чизма).

Агар a ва b векторлар орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, у ҳолда томонлари a ва b лардан иборат параллелограммнинг юзи $S = b \cdot h$ бўлади. Энди $h = a \sin \varphi$ бўлгани учун $S = ab \sin \varphi$ тенглик келиб чиқади. a нинг b га векториал кўпайтмаси $[ab]$ символи билан белгиланади.

Векториал кўпайтманинг баъзи хоссаларини кўздан кечирамиз.

Агар векторлардан ақалли биттаси ноль векторга тенг ёки векторлар параллел (коллинеар) бўлса, уларнинг векториал кўпайтмаси нолга тенг булади. Аксинча, $[ab] = 0$ бўлса, $a \neq 0$, $b \neq 0$ шартида $a \parallel b$ келиб чиқади. Жумладан, $[aa] = 0$ бўлади. Бу натижани координата ўқларидаги бирлик векторларга татбиқ этсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$[ij] = k, \ [kj] = i, \ [ki] = j.$$



14-чизма.

Агар $a \perp b$ бўлса, у ҳолда, $[ab] = c$ векторнинг узунлиги $c = ab \sin 90° = ab$ бўлади.

Скаляр кўпайтувчини векториал кўпайтма белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, бунда:

$$[mab] = m\,[ab] \text{ ва } [a \cdot mb] = m\,[ab]$$

бўлади.

Векториал кўпайтма тақсимот қонунига бўйсунади:

$$[(a + b)\,c] = [ac] + [bc].$$

§ 8. Аралаш кўпайтма

Агар a ва b векторларнинг векториал кўпайтмасини учинчи c векторга скаляр кўпайтирсак, сон (скаляр) келиб чиқади. Бу скаляр уч векторнинг аралаш кўпайтмаси дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$[ab]c = abc.$$

Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси бу векторлардан ясалган параллелепипеднинг ҳажмига тенг.

Мана бундай тенгликлар ўринлидир:

$$abc = bca = cab, \ abc = -bac,$$

$$[ab]c = [bc]a = a[bc].$$

Компланар a, b, c векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенгдир. Бунда параллелепипеднинг ҳажми нолга тенг бўлади (a, b, c векторлар коллинеар эмас!).

Аксинча, учта векторнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиб, лекин учала вектор ҳам ноль-вектордан фарқли бўлса ёки векторларнинг ҳеч қандай жуфти коллинеар бўлмаса, у ҳолда учала вектор компланар бўлади.

Мисол.

$$\overline{OM}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k,\quad \overline{OM}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k,\quad \overline{OM}_3 = x_3 i + y_3 j + z_3 k$$

векторлар берилган. $\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2 \cdot \overline{OM}_3$ кўпайтма топилсин.

Ечиш:

$$[\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ёки

$$[\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$$

эканлиги маълум. Бу натижани $\overline{OM}_3$ га скаляр кўпайтирсак:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

келиб чиқади.

Демак, *проекциялари берилган уч векторнинг аралаш кўпайтмаси шу проекциялардан қуйидагича тузилган учинчи тартибли детерминантга тенг:*

$$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2 \cdot \overline{OM}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

§ 9. Икки қайтали векториал кўпайтма.

Исталган учта a, b, c векторни олайлик. Улардан, аввало, $[bc]$ ни тузиб, сўнгра ҳосил қилинган кўпайтмани a га яна векториал кўпайтирамиз: $[a[bc]]$. Бундай кўпайтма уч векторнинг *икки қайтали векториал кўпайтмаси* дейилади. Биз ушбу „ёйиш формуласини" исботсиз берамиз:

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab).$$

Бунинг исботи, масалан, Приваловнинг „Аналитическая геометрия" китобида берилган, II қисм, II боб, § 16.

Бу формулани татбиқ этиш мақсадида $[ab][cd]$ ни топамиз. Вақтинча $[cd]$ ни e билан белгилаймиз: $[cd] = e$. Бунда:

$$[ab][cd] = [ab]e = abe = a[be].$$

Шунинг учун:

$$[ab][cd] = a[be] = a[b[cd]]$$

бўлади. Иккинчи томондан: $[b[cd]] = c(bd) - d(bc)$.
Шу сабабли, $[ab][cd] = (ac)(bd) - (ad)(bc)$ бўлади.

Жумладан, a ва b векторлар учун мана шундай айният бор:

$$[ab]^2 = a^2b^2 - (ab)^2.$$

Машқлар

7. Берилган параллелограммнинг диагоналларидан янги параллелограмм тузиб, унинг юзи берилган параллелограммнинг юзидан икки марта катта эканини векторлар ёрдами билан исботланг.

8. Томонлари $a = i - 2j + 4k$, $b = 3i + j - 2k$ векторлардан иборат параллелограммнинг юзи топилсин.

Жавоб: $7\sqrt{5}$.

9. YOZ текислигида ётган узунлиги 10 бирликка тенг ва $a = 2i - 4j + 3k$ векторга перпендикуляр вектор топилсин.

Жавоб: $\pm(6j + 8k)$.

10. Томонлари $a = 2i - 3j + 5k$, $b = i + j - k$, $c = 2i + 2j + 3k$ векторлардан иборат параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

Жавоб: 25

Иккинчи боб

ЎЗГАРУВЧАН ВЕКТОРЛАР

§ 10. Асосий таърифлар

Таъриф. *Агар скаляр t ўзгарувчининг бирор $[a, b]$ соҳадаги ҳар бир қийматига бирор қонун бўйича аниқ бир $r(t)$ вектор мос келса, у ҳолда бу вектор ўзгарувчан бўлиб, t нинг* ***вектор функцияси*** дейилади ва қисқача, $r = r(t)$ шаклида ёзилади.

Узунлиги чексиз кичик бўлган ўзгарувчан вектор чексиз кичик вектор дейилади.

1-теорема. *Бир неча чексиз кичик векторлар йиғиндиси яна чексиз кичик вектордир.*

Исбот. Ҳақиқатан, чексиз кичик векторларни $\bar{\alpha}_1(t), \bar{\alpha}_2(t), \ldots, \bar{\alpha}_n(t)$ билан белгилаб, $\bar{\alpha}_1(t) + \bar{\alpha}_2(t) + \ldots + \bar{\alpha}_n(t) = \bar{\delta}(t)$ дейлик. Энди $\bar{\delta}(t)$ нинг абсолют қийматини текширамиз:

$$|\bar{\delta}(t)| = |\bar{\alpha}_1(t) + \bar{\alpha}_2(t) + \ldots + \bar{\alpha}_n(t)| \leqslant |\bar{\alpha}_1(t)| + \\ + |\bar{\alpha}_2(t)| + \ldots + |\bar{\alpha}_n(t)|.$$

Ҳар бир $\bar{\alpha}_i(t)$ чексиз кичик вектор бўлгани учун, таърифга кўра, унинг узунлиги чексиз кичик бўлади. Математик анализ курсидан маълумки, $|\bar{\alpha}_i(t)|$ нинг ҳар бири чексиз кичик бўлса, $|\bar{\alpha}_1(t)| + |\bar{\alpha}_2(t)| + \ldots + |\bar{\alpha}_n(t)|$ йиғинди ҳам чексиз кичик бўлади. Демак, $\bar{\delta}(t)$ вектор — чексиз кичик вектордир.

2-теорема. *Агар R векторнинг узунлиги чегараланган бўлиб, $\bar{\alpha}(t)$ чексиз кичик вектор бўлса, у ҳолда, R ва $\bar{\alpha}(t)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси ҳам чексиз кичик бўлади. Уларнинг векториал кўпайтмаси эса чексиз кичик векторни беради.*

Исбот. $R \cdot \bar{\alpha}(t) = |R|\,|\bar{\alpha}(t)| \cos\varphi$, бунда $|R|$ ва $\cos\varphi$ чегараланган, $|\bar{\alpha}(t)|$ эса чексиз кичикдир. Шунинг учун $|R|\,|\bar{\alpha}(t)| \cos\varphi$ ҳам чексиз кичикдир.

Теореманинг иккинчи қисмини ҳам худди шу йўл билан исботлаш мумкин, буни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Таъриф. *Бирор қонунга кўра, t аргумент t_0 қийматга интилганда r_0 вектор билан $r(t)$ вектор функция орасидаги айирма чексиз кичик вектор бўлса, r_0 вектор $r(t)$ векторнинг лимити дейилади.*

Юқоридагиларга асосланиб, қуйидаги натижаларни чиқариш мумкин:

1. Агар r_0 вектор $r(t)$ векторнинг лимити бўлса $r(t)$ узунлигининг лимити r_0 нинг узунлигига тенг бўлади.

Ҳақиқатан, $|r(t)|-|r_0|<|r(t)-r_0|$. Бу эса, таърифга кўра, нолга интилади, яъни чексиз кичик бўлади. Демак, $|r(t)|$ нинг лимити $|r_0|$ дир:

$$\lim|r(t)|=|r_0|.$$

2. $r(t)\to 0$ ва $|r(t)|\to 0$ тенг кучлидир.

3. *Бир неча вектор йиғиндисининг лимити — шу векторлар лимитларининг йиғиндисига тенг.*

Ҳақиқатан, $\lim r(t)=r_0$ ва $\lim q(t)=q_0$ бўлса, $r(t)-r_0$ ва $q(t)-q_0$ векторлар чексиз кичик векторлар бўлади. Шунинг учун

$$(r(t)+q(t))-(r_0+q_0)=(r(t)-r_0)+(q(t)-q_0)$$

ҳам чексиз кичик вектордир, демак, $\lim(r(t)+q(t))=r_0+q_0$ бўлади.

Бу хоссани сони иккидан ортиқ векторлар учун ҳам худди шу йўл билан исботлаш мумкин.

4. *Икки векторнинг скаляр ёки векториал кўпайтмасининг лимити шу векторлар лимитларининг скаляр ёки векториал кўпайтмасига тенг.*

Бу натижани скаляр кўпайтма учун татбиқ этайлик:

$$(r(t)\cdot q(t))-(r_0q_0)=(r(t)-r_0)\,q(t)+r_0(q(t)-q_0);$$

$$r(t)-r_0 \quad \text{ва} \quad q(t)-q_0$$

векторлар чексиз кичик векторлар бўлганидан $r(t)q(t)-r_0q_0$ ҳам чексиз кичик вектордир, бу ердан $\lim(r(t)q(t))=r_0q_0$ бўлади. Бу хоссани векториал кўпайтма учун ҳам худди шу йўл билан исботлаш мумкин.

Таъриф. $r(t)$ *вектор-функциянинг t аргументи t_0 қийматга яқинлашганда, $r(t)$ нинг лимити $r(t_0)$, яъни $\lim r(t)=r(t_0)$ бўлса, у ҳолда, $r(t)$ вектор функция t_0 қийматда узлуксиз дейилади.*

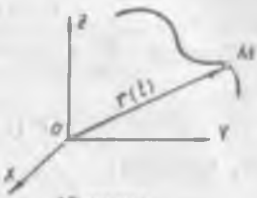
t нинг бирор (a, b) интервалдаги ҳар бир қийматида $r(t)$ вектор-функция узлуксиз бўлса, $r(t)$ шу интервалда узлуксиз дейилади.

§ 11. Вектор-функциянинг геометрик тасвири

$r(t)$ вектор функциянинг мавжудлик соҳаси $a\leqslant t<b$ берилган бўлсин. Ҳамма $r(t)$ векторларни кўчириб, уларнинг бошларини бирор O нуқтага қўя борамиз. t нинг ҳар бир қийматига

маълум бир $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(t)$ вектор мос келади (15-чизма). t аргумент a дан b гача узлуксиз ўзгара борганда, M нуқта фазода нуқталарнинг қандайдир геометрик ўрнини ташкил қилади. Бу геометрик ўрин *чизиқ* деб аталади, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ эса чизиқнинг вектор шаклидаги *параметрик тенгламаси* дейилади.

Агар боши O нуқтада ётган тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, $\boldsymbol{r}(t)$ нинг $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ орқали ёйилмасини ёзсак, у ҳолла, $\boldsymbol{r}(t)$ нинг умумий кўриниши қуйидагича булади:



15-чизма.

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

Жумладан, чизиқнинг ҳар бир $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтаси учун:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$$

бўлади. Хусусий ҳолда, яъни чизиқ XOY текислигида ётганда: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$ бўлади.

$\overline{OM}$ вектор билан бирга, M нуқтанинг координаталари ҳам t га боғлиқдир: $M[x(t), y(t), z(t)]$. Бу M нуқта чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун, чизиқнинг тенгламаларини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t).$$

Вектор-функцияга мос келган чизиқ унинг *годографи* деб аталади.

§ 12. Вектор-функциянинг ҳосиласи

Таъриф. *Агар вектор-функциянинг $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ орттирмасини аргументнинг t орттирмасига бўлишдан ҳосил қилинган нисбатнинг Δt нолга интилгандаги лимити, яъни $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ мавжуд бўлса, у ҳолда, бу лимит $\boldsymbol{r}(t)$ вектор-функциянинг t аргумент бўйича ҳосиласи дейилади.*

Бу ерда $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\boldsymbol{i} +$
$+ [y(t + \Delta t) - y(t)]\boldsymbol{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)]\boldsymbol{k}.$

Шу сабабли:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \lim \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j} +$$
$$+ \lim \frac{z(t) + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

бўлади. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функцияларнинг ҳар бири узлуксиз функция бўлганидан, қуйидаги натижани ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k.$$

Ҳосила $\frac{dr}{dt}$ ёки $r'(t)$ шаклида белгиланади; бошқача ёзганда:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k,$$

ёки, қисқача:

$$r' = x'i + y'j + z'k$$

бўлади.

Ҳосила $t = t_0$ қийматда олинган бўлса:

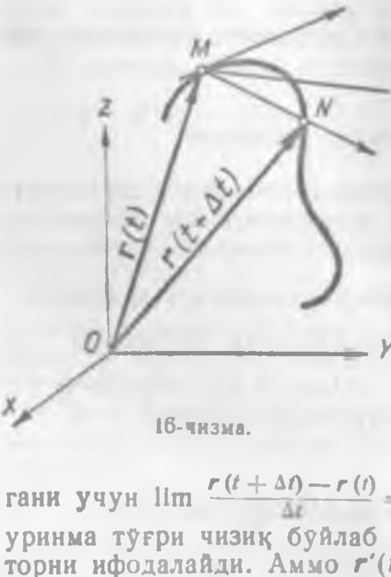
$$r'(t_0) = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k$$

бўлади.

Келгусида биз ўзи ва ҳосилалари доимо узлуксиз бўлган вектор-функциялар билан иш олиб борамиз.

§ 13. Вектор-функция ҳосиласининг геометрик маъноси

Вектор-функциянинг геометрик тасвири эгри чизиқдан иборат эканлигини кўриб ўтдик. Энди, параметрнинг t ва $t + \Delta t$ қийматларига чизиқнинг M ва N нуқталари мос келсин (16-чизма). У ҳолда айирма вектор $r(t + \Delta t) - r(t) = \Delta r = \overline{MN}$ бўлади. $\overline{MN}$ векторни Δt скалярга бўлиб, $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$ ни ҳосил қиламиз. $\overline{MN}$ ва $\frac{\overline{MN}}{\Delta t}$ векторлар кесувчи MN тўғри чизиқ устида ётади. Δt нолга интилганда, N нуқта чизиқ бўйлаб M га интилади. MN тўғри чизиқ M нуқта атрофида айланиб, уринма вазиятини олади. Шартга кўра, $r(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлгани учун $\lim \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = r'(t)$ мавжуд бўлиб, бу ҳосила уринма тўғри чизиқ бўйлаб йўналади, яъни $r'(t)$ уринма-векторни ифодалайди. Аммо $r'(t)$ нинг узунлиги чизиқдаги t параметрнинг маъносига боғлиқдир. Агар t ни монотон $t(\theta)$



16-чизма.

функция билан алмаштирсак, чизиқнинг янги шаклдаги параметрик тенгламаси ёки $r = r[t(\theta)]$, $r = r(\theta)$ кўринишини олади. $\overline{OM} = r(\theta)$ нинг M нуқтадаги уринма-вектори $r'(\theta) = r'(t)\dfrac{dt}{d\theta}$; унинг узунлиги $|r'(t)|\dfrac{dt}{d\theta}$ га тенг бўлади.

Эслатма. Агар $\Delta t > 0$ бўлса, яъни параметр ўса борса, $r'(t)$ вектор чизиқнинг мусбат томонига йўналади. Бундан буён $r'(t)$ ни доимо чизиқнинг мусбат томонига йўналган деб ҳисоблаймиз.

t аргументни M нуқта ҳаракатининг бошланишидан ҳисобланган вақт деб қарасак ва $r = r(t)$ тенглама M нинг чизиқ бўйлаб қилган ҳаракати қонунини ифодаласа, у ҳолда, $r'(t)$ ҳосила нуқтанинг t пайтдаги *тезлик-вектори* дейилади.

§ 14. Векторни дифференциаллаш қоидалари

Бир неча вектор йиғиндисининг ҳосиласи шу векторлар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг.

Дарҳақиқат, аввало, икки вектор йиғиндиси $R(t) = r(t) + q(t)$ берилган бўлсин. Бу ердан $\Delta R = r(t + \Delta t) - r(t) + q(t + \Delta t) - q(t) = \Delta r + \Delta q$ бўлади. Бунинг иккала томонини Δt га бўлиб, лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} + \lim \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ ёки } R'(t) = r'(t) + q'(t).$$

Векторларнинг сони иккидан ортиқ бўлганда ҳам бу даъво худди шу йўл билан исботланади. Энди, $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ векторни дифференциаллайлик, натижада:

$$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$$

ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш:

$$\frac{d}{dt}(r(t)\,q(t)) = \frac{dr}{dt}q + r\frac{dq}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}[r\,q] = \left[\frac{dr}{dt}q\right] + \left[r\frac{dq}{dt}\right].$$

Мисол учун, бу тенгликлардан иккинчисини исботлаймиз. Ушбу:

$$\Delta[r\,q] = [(r + \Delta r)(q + \Delta q)] - [rq]$$

айирмани олиб, бир-бирига тенг ва ишоралари қарама-қарши ҳадларини қўшамиз:

$$\Delta[rq] = [(r + \Delta r)(q + \Delta q)] - [r(q + \Delta q)] + {} + [r(q + \Delta q)] - [rq].$$

Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарсак:

$$\Delta[rq] = [(r + \Delta r - r)(q + \Delta q)] + [r(q + \Delta q - q)] =$$
$$= [\Delta r(q + \Delta q)] + [r\Delta q]$$

ҳосил булади. Энди, буни Δt га бўлиб, лимитга ўтамиз:

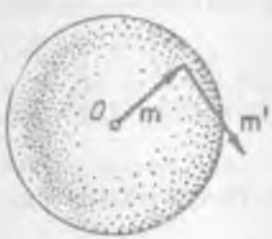
$$\lim \frac{\Delta[rq]}{\Delta t} = \left[\lim\frac{\Delta r}{\Delta t}\lim(q + \Delta q)\right] + \left[r \cdot \lim\frac{\Delta q}{\Delta t}\right].$$

$\Delta t \to 0$ бўлганда $\lim \Delta q = 0$, демак:

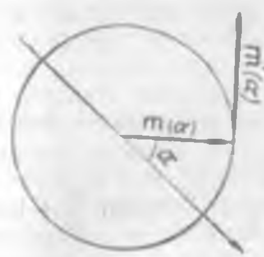
$$\frac{d}{dt}(rq) = \left[\frac{dr}{dt}q\right] + \left[r\frac{dq}{dt}\right]$$

бўлади.

Натижалар: 1. *Ўзгарувчан бирлик векторнинг ҳосиласи шу векторга перпендикуляр вектордир.* Ҳақиқатан, ўзгарувчан бирлик векторни m билан белгилаб, $mm = 1$ тенглик-



17-чизма.



18-чизма.

дан фойдаланамиз. Унинг икки томонидан ҳосила оламиз: $\frac{dm}{dt}m + m\frac{dm}{dt} = 0$ ёки $2\frac{dm}{dt}m = 0$, бундан $\frac{dm}{dt} \perp m$ келиб чиқади.

Бу натижанинг геометрик маъносини қуйидагича тушуниш мумкин: узгарувчан бирлик m векторнинг охири айлана чизади ёки сферада ётадиган чизиқ чиза боради. $\frac{dm}{dt}$ бу чизиққа уринма бўлгани учун, у айлана ёки сферанинг радиусига, яъни m га перпендикуляр бўлади (17-чизма).

Узунлиги ўзгармас бошқа векторлар учун ҳам худди шу натижани оламиз, яъни бундан ҳар бир векторнинг ҳосиласи ҳам вектор булиб, шу векторга перпендикулярдир.

2. m нинг координата уқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ десак, $m = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$ бўлади.

3. m бирлик вектор XOY текислигида ётган бўлса, уни $m = m(\alpha)$ шаклида ёзиш мумкин. α бурчак 0 дан 360° гача ўз-

гарганда, $m(\alpha)$ нинг годографи айлана бўлади (18-чизма). $m(\alpha)$ нинг ёйилмаси қуйидаги шаклни олади:

$$m(\alpha) = i\cos\alpha + j\cos(90^\circ - \alpha) = i\cos\alpha + j\sin\alpha.$$

Унинг $m'(\alpha) = -i\sin\alpha + j\cos\alpha$ ҳосиласи $m(\alpha)$ га перпендикуляр бўлган $m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ вектордир. Бу векторнинг ёйилмаси

$$m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = i\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ёки $$m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -i\sin\alpha + j\cos\alpha;$$

демак: $m\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cdot m(\alpha) = -\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0$, яъни

$$m'(\alpha) \perp m(\alpha)$$

бўлади.

4. Чизиқларга нисбатан юқорида қўйилган шартларга биноан $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар узлуксиз бўлиб, исталган тартибгача ҳосилаларга эга. Шунинг учун, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функцияларни Тейлор формуласи бўйича ёйиб ва уларнинг биринчисини i га, иккинчисини j га, учинчисини k га кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшсак, натижада $r(t)$ вектор-функциянинг Тейлор формуласи бўйича ёйилмаси чиқади:

$$r(t + \Delta t) = r(t) + r'(t)\Delta t + r''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \ldots + \frac{r^{n-1}(t)}{(n-1)!}(\Delta t)^{n-1} + R_n\frac{(\Delta t)^n}{n!}.$$

Бунда қўшимча ҳад қуйидаги қийматга эга:

$$R_n = x^{(n)}(t + \theta_1\Delta t)\,i + y^{(n)}(t + \theta_2\Delta t)\,j + z^{(n)}(t + \theta_3\Delta t)\,k$$

$$(0 < \theta_i < 1).$$

Таъриф *Агар* $r(t) = \frac{dR}{dt}$ *бўлса,* $R(t) = \int r(t)\,dt$ ифода $r(t)$ *вектор-функциянинг аниқмас интеграли дейилади.*

$\int\limits_a^b r(t)dt = R(b) - R(a)$ ифода $r(t)$ вектор-функциянинг аниқ интеграли бўлади.

Вектор-функциядан олинган интеграллар математик анализдаги интеграллаш қоидаларига бўйсунади. Векторлар назариясини якунлаб, векторларнинг яна баъзи хоссаларига тўхтаб ўтамиз.

Йўналиши доимий бўлган ўзгарувчи векторнинг хоссаси. Ўзгарувчи вектор-функциянинг йўналиши доимий бўлса ва бу йўналишдаги бирлик векторни ξ билан белгиласак, у ҳолда, $r(t)$ вектор-функцияни $r(t) = |r(t)|\xi = l\xi$ шаклида ёзиш мумкин. Бу векторнинг ҳосиласини оламиз:

$\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi = \frac{dl}{dt}\cdot\frac{r(t)}{l} = \frac{l'}{l}r(t)$. Энди, $\frac{l'}{l}$ ни λ билан белгиласак, $\frac{dr}{dt} = \lambda r(t)$ бўлади. Бу эса $\frac{dr}{dt}$ ва $r(t)$ векторларнинг коллинеар эканлигини кўрсатади. Аксинча, $\frac{dr}{dt}$ ва $r(t)$ коллинеар векторлар бўлса, $r(t)$ вектор-функциянинг йўналиши доимий бўлади. Буни исботлаймиз. $r(t)$ нинг йўналиши ўзгаради деб фараз қилайлик. У вақтда ξ ҳам ўзгарувчан бўлади. Демак, $\frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi + l\frac{d\xi}{dt}$ бўлади. Энди, $\xi = \frac{r(t)}{l}$ га биноан, $\frac{dr(t)}{dt} = \frac{dl}{dt}\xi + l\frac{d\xi}{dt} = \frac{l'}{l}r(t) + l\frac{d\xi}{dt} = \lambda r(t) + l\frac{d\xi}{dt}$ бўлади. Бундан $l\frac{d\xi}{dt} = 0$ ёки $\frac{d\xi}{dt} = 0$ келиб чиқади. Бу эса ξ векторнинг доимий вектор эканлигини исботлайди.

Демак, *$r'(t) = \lambda r(t)$ бўлса, $r(t)$ нинг йўналиши ўзгармас бўлади.*

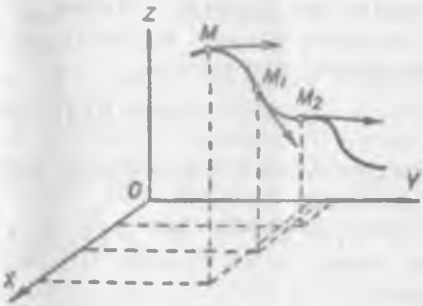
Ўзгармас текисликка параллел вектор. Агар $r(t)$ вектор-функция маълум бир текисликка параллел вазиятда ўзгарса, у ҳолда $r(t)$ вектор текисликнинг n нормал векторига перпендикуляр, яъни $r(t)\cdot n = 0$ бўлади. Бундан икки мартаба ҳосила оламиз: $r'(t)n = 0$, $r''(t)n = 0$. Бу учта тенгликдан $r(t)$, $r'(t)$, ва $r''(t)$ нинг ҳар бири n векторга перпендикуляр эканлиги кўринади. Демак, буларнинг учаласи ҳам бир текисликка параллел, яъни ўзаро компланардир. Шунинг учун бу учала векторнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг: $(r(t)\,r'(t)\,r''(t)) = 0$. Аксинча, $(r(t)\cdot r'(t)\cdot r''(t)) = 0$ бўлса, $r(t)$ доимо бир текисликка параллел бўлади. Буни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

Учинчи боб

ЧИЗИҚ ТУШУНЧАСИ

§ 15. Чизиқнинг тенгламалари

Дифференциал геометриянинг эгри чизиқлар ва сиртлар назарияси эканлиги юқорида айтиб ўтилди. Чизиқ ва сиртнинг аниқ таърифи топологияда берилади, биз бу ерда чизиқни ҳаракатланувчи нуқтанинг изи деб қараймиз, бу эса анча қулайлик туғдиради. Чизиқнинг келиб чиқиши бошқа характерга эга бўлса-да, биз бирор нуқта ҳаракат қилиб, шу чизиқни чизаётир, деб тасаввур этишимиз мумкин.



19-чизма.

Биз текширадиган чизиқлар тўғрисида қуйидагича фараз қиламиз:

1. *Чизиқ узлуксиз бўлиб, унинг ҳар бир нуқтасида муайян бир уринма ўтказиш мумкин.*

2. *Чизиқнинг нуқтаси чизиқ бўйлаб узлуксиз ҳаракатланганда, уринма ҳам узлуксиз ўзгариб боради.* Бошқача қилиб айтганда, чизиқнинг M_1 ва M_2 нуқталарида ўтказилган уринмалари орасидаги бурчакни φ десак, $\overset{\frown}{M_1M_2}$ ёй нолга интилганда φ бурчак ҳам нолга интилади (19-чизма).

Маълум бир декарт системасида чизиқнинг ҳар бир нуқтаси муайян координаталарга эга.

Чизиқнинг бирор M (x, y, z) нуқтаси чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, унинг координаталари ўзгара боради. Нуқтанинг ҳаракатга келиши бирор параметрга боғлиқдир. Бу параметр, масалан, нуқтанинг ҳаракатланиши учун сарф бўладиган вақт ёки чизиққа мос келган вектор-функциянинг тегишли параметри, ёки чизиқ бўйлаб ҳаракатланадиган нуқтанинг XOY текислигигача бўлган масофаси ва ҳоказолар бўлиши мумкин. Чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг координаталари ҳам шу параметрга боғлиқ бўлади. Параметр ўзгарганда нуқтанинг ўрни (вазияти) шу билан бирга унинг координаталари ҳам ўзгаради. Шунинг учун, параметрни t билан белгилаб, чизиқнинг тенгламаларини:

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t) \tag{1}$$

шаклида ёзишимиз мумкин. Текисликдаги чизиқ учун эса

$$x = x(t), \ y = y(t)$$

бўлади.

Бу тенгламалар ***чизиқнинг параметрик шаклдаги тенгламалари*** дейилади.

Чизиқларга нисбатан қўйилган шартларга кўра, юқорида ёзилган тенгламаларга кирувчи $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар ва уларнинг ҳосиласи узлуксиздир. Агар чизиқдаги ўзгарувчан нуқтадан XOY текислигигача бўлган масофани, яъни z ни параметр деб олсак, у ҳолда чизиқнинг (1) тенгламалари:

$$x = x(z), \ y = y(z)$$

шаклга эга бўлади. Чизиқ XOY текислигида ётган бўлса, t параметр ўрнига x ёки y ни олиш мумкин, $t = x$ бўлганда чизиқнинг тенгламаси

$$y = y(x) \quad \text{ёки} \quad y = f(x)$$

бўлади. Агар $t = y$ дейилса, тенглама $x = x(y)$ ёки $x = f(y)$ кўринишда ёзилади.

$F(x, y, z) = 0$ ва $\Phi(x, y, z) = 0$ сиртлар ўзаро кесишганда, чизиқ ҳосил бўлади. Шунинг учун чизиқнинг тенгламаларини

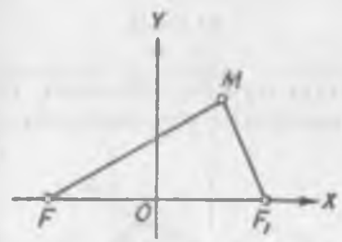
$$F(x, y, z) = 0, \ \Phi(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

шаклида ҳам ёза оламиз. Чизиқнинг тенгламасини булардан бошқа шаклларда ҳам ёзса бўлади. Юқоридаги фаразларда айтилган шартлар бажарилганда, чизиқ тенгламаларининг бир шаклидан иккинчи шаклига ўтса бўлади. Масалан, z ни узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган узлуксиз $\lambda(t)$ функция билан ифодалаб, уни (2) га қўйсак ва ҳосил бўлган системани x ва y га нисбатан ечсак, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ келиб чиқади. Булар $z = \lambda(t)$ билан бирга, чизиқнинг $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \lambda(t)$ кўринишидаги тенгламаларини беради. Вектор формада: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ бўлади. Шунга ўхшаш, t параметрни (1) дан чиқарсак, чизиқнинг (2) кўринишдаги тенгламалари келиб чиқади. Бу ерда биз чизиқни аналитик равишда ифодалаш усуллари билан танишиб чиқдик.

§ 16. Баъзи чизиқларнинг тенгламалари

Бирор координаталар системасида геометрик фигуранинг тенгламасини чиқариш учун, фигурага қарашли ихтиёрий M нуқтани оламиз. Сўнгра фигуранинг хоссаларини назарда тутиб, M нуқтанинг координаталари орасидаги муносабатни ёки бу нуқтанинг координаталари билан t параметр орасидаги муносабатни топамиз.

Аналитик геометрияда айлана, эллипс, гипербола ва параболанинг тенгламалари, шу чизиқларнинг таърифларидан фойдаланиб чиқарилади. Аммо геометрияда, булардан ташқари, жуда кўп бошқа чизиқлар ҳам учрайди. Уларнинг баъзиларини кўриб ўтамиз.



23-чизма.

Кассини овали. *Ҳар биридан F ва F_1 нуқталаргача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси ўзгармас сонга тенг нуқталарнинг текисликдаги геометрик ўрни Кассини овали дейилади.*

Бу чизиқнинг тенгламасини чиқариш учун F ва F_1 нуқталардан ўтган тўғри чизиқни OX ўқи деб қабул қиламиз. Сўнгра FF_1 кесманинг ўртасидан шу FF_1 га перпендикуляр қилиб OY ўқини ўтказамиз. Геометрик ўрннинг (овалнинг) ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтасини оламиз. Ўзгармас сонни b^2 билан белгиласак, таърифга кўра $MF \cdot MF_1 = b^2$ бўлади. F ва F_1 орасидаги масофани $2c$ десак, F ва F_1 нинг координаталари $F(-c; 0)$; $F_1(+c; 0)$ бўлади (20-чизма).

$$MF = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \text{ ва } MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

бўлгани учун, овалнинг тенгламаси

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = b^2$$

шаклни олади. Буни квадратга кўтариб соддалаштиргандан кейин, овалнинг тенгламаси

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4$$

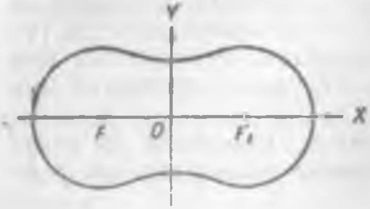
кўринишга эга бўлади.

Турли ҳоллар: 1. $c < b$ ҳолга 21-чизма, 2. $c > b$ ҳолга эса 22-чизма мос келади.

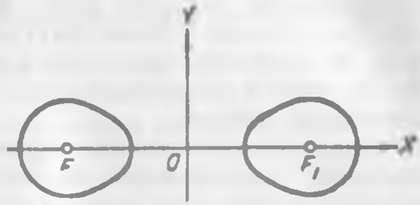
Хусусий ҳолда, яъни $b = c$ бўлганда, овал *Бернулли лемнискатаси* дейилади (23-чизма). Унинг тенгламаси мана бундай:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Декарт координаталар системасидан $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ формулаларнинг ёрдами билан қутб координаталар системасига



21-чизма.



22-чизма.

ўтиш мумкин. Масалан, Бернулли лемнискатасининг қутб системасидаги тенгламасини тузамиз: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$;

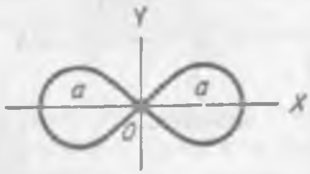
$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin \varphi)^2 - 2c^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) = 0;$$

$$\rho^4 = 2c^2\rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi);$$

$$\rho^4 = 2c^2\rho^2\cos^2\rho$$

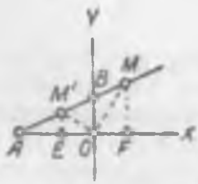
ёки

$$\rho^2 = 2c^2\cos 2\varphi.$$

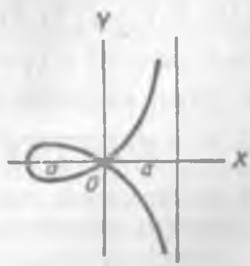


23-чизма.

Строфоида. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида A $(-a; 0)$ нуқтадан ўтган ихтиёрий нур OY ўқини B нуқтада кесади. AB чизиқдаги B нуқтанинг иккала томонига $BM = BM' = BO$ кесмаларни қўямиз. AB



24-чизма.



25-чизма.

нурни A нуқта атрофида айлантирамиз; бу вақтда BO масофа, шу билан бирга, $BM = BM'$ кесмалар ҳам ўзгара боради (24-чизма). *Ўзгариб турадиган M ва M' нуқталарнинг геометрик ўрни* ***строфоида*** *дейилади* (25-чизма).

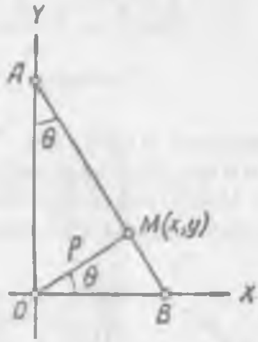
Энди строфоиданинг тенгламасини чиқарамиз: M ва M' нуқталардан x ўқига перпендикуляр туширамиз. $M'OE$ ва OMF — ўхшаш учбурчаклар. Шунинг учун:

$$\frac{FO}{M'E}=\frac{FM}{OF}$$

бўлади. M нуқтанинг координаталари x ва y бўлсин. $BM = BM'$ бўлгани учун $EO = OF = x$ бўлади. Шу сабабли, олдинги тенгликдан: $\frac{x}{M'E}=\frac{y}{x}$; $\frac{x}{y}=\frac{M'E}{x}$, бундан эса $M'E=\frac{x^2}{y}$ келиб чиқади. Иккинчи томондан, $AM'E \backsim AMF$ бўлгани учун $\frac{AE}{AF}=\frac{M'E}{MF}$ ёки $\frac{a-x}{a+x}=\frac{\frac{x^2}{y}}{y}$ бўлади. Соддалаштиргандан кейин строфоиданинг тенгламаси қуйидаги шаклни олади:

$$y^2=x^2\,\frac{a+x}{a-x}.$$

Тўрт япроқли гул. Узунлиги $2a$ га тенг AB кесманинг учлари (охирлари) OX ва OY ўқлари бўйлаб сирпанади (26-чизма). Координаталар бошидан AB га перпендикуляр туширамиз. *Бу перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрни* **тўрт япроқли гул** *номли чизиқни ҳосил қилади.* $OM=\rho$ ва $\angle MOB=\theta$ деб, гулнинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини чиқарамиз.



26-чизма.

OAM дан $\frac{AM}{OM}=\operatorname{ctg}\theta$ ҳосил бўлади, бундан $AM=\rho\operatorname{ctg}\theta$ ни ёзиш мумкин. Худди шунга ўхшаш, OMB дан $MB=\rho\operatorname{tg}\theta$ эканлиги келиб чиқади. Шартга кўра, $AM+MB=2a$, демак, $\rho\operatorname{ctg}\theta+\rho\operatorname{tg}\theta=2a$ бўлади. Бу тенгламани соддалаштирамиз:

$$\frac{\rho\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\rho\sin\theta}{\cos\theta}=2a;\quad \frac{\rho(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=2a;\quad \frac{\rho}{\sin\theta\cos\theta}=2a;$$

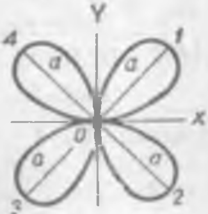
бундан $a=\frac{\rho}{2\sin\theta\,\cos\theta}=\frac{\rho}{\sin 2}$ келиб чиқади. Натижада гулнинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади (27-чизма):

$$\rho=a\sin 2\theta.$$

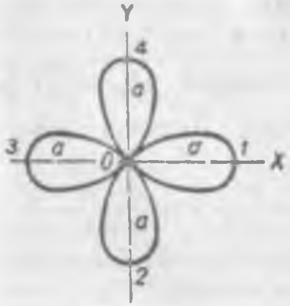
Гулни O нуқта атрофида қутб ўқига нисбатан 45° ли бурчакка бурганимизда вужудга келадиган янги гулнинг тенгламаси қуйидагича бўлади (28-чизма): $\rho = a \sin[2(\theta + 45°)] = a \sin(2\theta + 90°) = a \cos 2\theta$, яъни

$$\rho = a \cos 2\theta.$$

Гипоциклоида. *Бир айлана иккинчи айлана бўйлаб ичкаридан сирпанмай ғилдираса, ҳаракатдаги айланада*



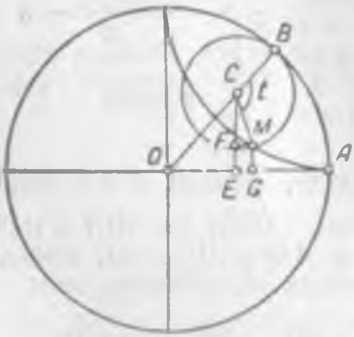
27-чизма.



28-чизма.

олинган ихтиёрий нуқтанинг чизган чизиғи ***гипоциклоида*** *деб аталади.*

Координаталар бошини қўзғалмас айлананинг O марказида қилиб оламиз (29-чизма). OX ўқини иккала айлананинг бошланғич пайтидаги уриниш нуқтасидан ўтказиб, бу уриниш нуқтасини A билан белгилаймиз. Ҳаракатдаги айлана янги вазиятни олса, A нуқта M вазиятни олади. M нуқтанинг геометрик ўрнини аниқлаш лозим. Қўзғалмас айлананинг радиуси a, қўзғалувчи айлананинг радиуси ma бўлсин, $\angle MCB$ нинг радиан ҳисобидаги ўлчамини t билан белгилайлик. Бу ерда MC ва CB лар қўзғалувчи айлана радиуслари, B эса айланаларнинг уриниш нуқтасидир. Ҳаракатнинг бошланғич пайтида бу



29-чизма.

бурчак 0 га тенг бўлсин. Аввало шуни кўрамизки, айлана сирпанмай ғилдираганидан, уриниш нуқтасининг қўзғалмас айлана бўйлаб босган AB ёйи, унинг ҳаракатдаги айлана бўйлаб босган MB ёйига тенг бўлади. Ушбу $\overset{\frown}{AB} = a \cdot \angle AOB$; $\overset{\frown}{MB} = ma \cdot \angle MCB = mat$ тенгликларга эга бўламиз. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{MB}$ бўлгани учун, $a \cdot \angle AOB = mat$ ёки $\angle AOB = mt$ бўлади.

Энди M нуқтанинг x ва y координаталарини t орқали ифодалаймиз.

$$x = OG = OE + EG$$

$\triangle OEC$ дан $OE = OC \cdot \cos \angle COE = OC \cos mt$.

$OC = OB - CB$ ёки $OC = a - ma$

бўлгани учун:

$$x = OE + EG =$$

$$(a - ma) \cos mt + EG = a(1-m)\cos mt + FM \tag{1}$$

бўлади.

ΔCMF дан $\frac{FM}{CM} = \sin \angle FCM$.

Аммо:

$$\angle FCM = [\pi - t - \angle OCF] = \left[\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - \angle COE\right)\right];$$

$$\left[\pi - t - \frac{\pi}{2} + mt\right] = \frac{\pi}{2} - (1-m)t,$$

демак:

$$\frac{FM}{CM} = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (1-m)t\right] \text{ ва } FM = ma \cos(1-m)t.$$

Бу қийматни (1) га қўйсак:

$$x = a[(1-m)\cos tm + m\cos(1-m)t]$$

ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш $y = MG = FE = CE - CF = OC \sin t - CM \cos\left[\frac{\pi}{2} - (1-m)t\right] = (a - am) \sin mt - ma \sin(1-m)t$. Шундай қилиб параметрик формада гипоциклоиданинг тенгламалари қуйидагилардан иборат:

$$\left.\begin{aligned} x &= a[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t], \\ y &= a[(1-m)\sin mt - m\sin(1-m)t]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Жумладан, $m = \frac{1}{4}$ бўлганда астроида номли чизиқни ҳосил қиламиз (30 ва 31-чизмалар). Унинг тенгламалари бундай:

$$x = a\left[\frac{3}{4}\cos\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\cos\frac{3}{4}t\right],$$

$$y = a\left[\frac{3}{4}\sin\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin\frac{3}{4}t\right].$$

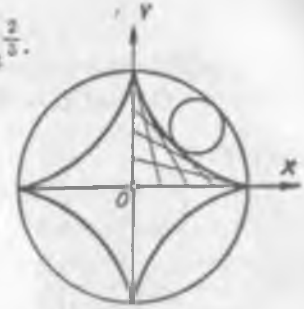
Агар t ни $-4t$ билан алмаштирсак, астроиданинг тенгламалари

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

кўринишни олади. Бу тенгламалардан t йўқотилса, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

30-чизма.



31-чизма.

§ 17. Винт чизиқ

Баён қилинганларни конкрет чизиққа татбиқ этайлик. Ўзгармас a узунликка эга бўлган AB кесма OZ ўқига тик бўлиб, унинг A учи шу ўқда ётади. Бу кесма OZ ўқи бўйича силжиб, шу ўқ атрофида шундай айланадики, кесманинг A учи айланиш бурчагига пропорционал йўлни босиб боради. У ҳолда кесманинг иккинчи B учи винт чизиқ чизади. Шартга кўра $AB = a$ ва $OA = \lambda\varphi$, бунда $\lambda = \text{const}$. Ҳаракатдаги кесма бошланғич пайтда OX ўқида бўлади, деб фараз қилсак, винт чизиғидаги B нуқтанинг вазияти φ параметр билан тўла аниқланади. Чизиқнинг тенгламасини тузамиз:

$$\overline{OB} = \boldsymbol{r} = \overline{AB} + \overline{OA}.$$

Лекин:

$$\overline{AB} = \overline{OA} = a\,(\boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi) = a\boldsymbol{e}\,(\varphi),\ \overline{OA} = \lambda\varphi\boldsymbol{k},$$

бу ерда $\boldsymbol{e}\,(\varphi)$ бирлик вектор бўлиб XOY текислигида ётади. Демак, винт чизиқнинг тенгламаси:

$$\boldsymbol{r}\,(\varphi) = a\boldsymbol{e}\,(\varphi) + \lambda\varphi\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

ёки координат формада

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \lambda\varphi$$

бўлади.

Винт чизиқнинг ўзи ясовчилари OZ ўқига параллел бўлган $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрда ётади, чунки AB нинг узунлиги ўзгармайди (32-чизма).

Винт чизиққа уринма вектор $\boldsymbol{r}'(\varphi)$ дир. Уни (1) дан φ бўйича ҳосила олиб топамиз:

$$\boldsymbol{r}'\,(\varphi) = a\boldsymbol{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda\boldsymbol{k}, \qquad (2)$$

бу ерда $e\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ ҳам бирлик вектор бўлиб, XOY текислигида ётади ва у $e(\varphi)$ ни соат стрелкасига тескари йўналишда $\frac{\pi}{2}$ га буриш йўли билан ҳосил қилинади.

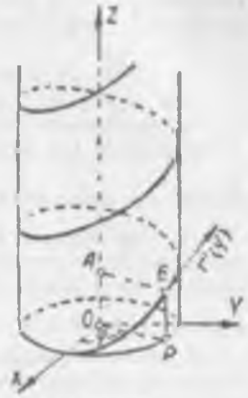
(2) дан:

$$|r'(\varphi)|=\sqrt{a^2+\lambda^2},\quad r'(\varphi)k=\lambda$$

келиб чиқади. Уринманинг OZ ўқи (ёки ясовчилар) билан ташкил қилган бурчагини γ десак:

$$\cos\gamma=\frac{r'(\varphi)k}{|r'(\varphi)|}=\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}=\text{const}$$

бўлади.



32-чизма.

Демак, *винт чизиқнинг ҳамма нуқталаридаги уринмалари OZ ўқи (ясовчилар) билан бир хил бурчак ташкил қилади.* Цилиндрни текисликка ёйганда, цилиндрнинг ясовчилари ўзаро параллел тўғри чизиқларга, винт чизиқ эса тўғри чизиққа айланади, чунки параллел тўғри чизиқлар оиласи билан бир хил бурчак ташкил қилган чизиқ (изогонал траектория) текисликдаги тўғри чизиқдир. Бу охирги фактни исботлаш қийин эмас.

Дарҳақиқат, параллел тўғри чизиқлар оиласининг бурчак коэффициенти k ($=\text{const}$) ва изогонал траектория уринмасининг бурчак коэффициенти $\frac{dy}{dx}$ бўлсин. У ҳолда:

$$\operatorname{tg}\gamma=\lambda=\frac{\frac{dy}{dx}-k}{1+k\frac{dy}{dx}}=\text{const}$$

бўлади. Бундан:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda+k}{1-\lambda k}=\text{const}=a$$

келиб чиқади. Демак, изогонал траекториянинг тенгламаси $y=ax+b$ бўлиб, бу траектория тўғри чизиқдир.

Ҳозирги фикрлар винт чизиқнинг яна бир хоссасини исботлашга имкон беради. Текисликда икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа тўғри чизиқ кесмасидир. Текислик бўлаги (масалан, тўғри тўртбурчак) яна цилиндр қилиб ўралса, тўғри чизиқ кесмаси винт чизиқ ёйига айланади. Демак, цилиндрнинг бир ясовчида ётмаган икки нуқтаси орасидаги энг қисқа масофа винт чизиқнинг ёйидир. Бундан чиқди, винт чизиқлар цилиндрнинг геодезик чизиқларидир (ўн еттинчи боб, § 108-га қаралсин). Олинган икки нуқта бир ясовчида ётса, геодезик чизиқ шу ясовчининг ўзидан иборат бўлиб қолади.

Цилиндр текисликка ёйилганда ва, аксинча, текислик бўлаги цилиндр қилиб ўралганда ҳеч қандай чўзилиш, сиқилиш ёки йиртилишга йўл қўйилмайди, деб фараз қилинади.

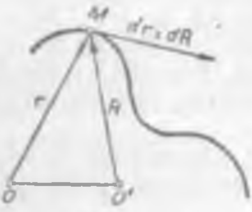
Эслатма. Биз соддалаштириш мақсадида, айланувчи AB кесма OZ ўқи билан 90° ли бурчак ташкил этади, деб фараз қилдик, бироқ доимо шундай бўлиши шарт эмас. Шуни ҳам айтиб ўтайликки, AB кесманинг ҳар бир нуқтаси ҳам винт чизиғи чиза боради.

Машқ ва масалалар

11. Ҳар қандай $\bar{r}$ векторнинг дифференциали билан r узунлигининг дифференциали орасида муайян боғланиш бор. Ҳақиқатан, векторнинг скаляр квадрати ва узунлигининг квадрати ўзаро тенг: $\bar{r}^2 = r^2$; бундан $2\bar{r}d\bar{r} = 2rdr$, яъни, $dr = \frac{\bar{r}}{r}d\bar{r}$ ёки $dr = \bar{r}^\circ d\bar{r}$ бўлади.

12. Эгри чизиқнинг $\bar{r} = \bar{r}(t)$ тенгламасида $\bar{r}$ радиус-вектор маълум бир O қутбга нисбатан олинади. Қутб ўзгарганда, нуқтанинг $\bar{r}$ радиус-векторига ўзгармас $\overline{O'O}$ вектор қўшилади:

$$\bar{R} = \bar{r} + \overline{O'O};$$



33-чизма.

бундан, $d\bar{R} = d\bar{r}$ — уринма-вектор қутбга боғлиқ эмас деган натижа чиқади (33-чизма). Бу хоссадан эллипсга, гиперболага, параболага уринма ва нормал ўтказиш усулларини келтириб чиқариш мумкин.

а) эллипс.

$$\bar{R} = \bar{r} + \overline{F_2F_1};$$

$$R + r = \text{const} = 2a.$$

Булардан:

$d\bar{R} = d\bar{r}$ (чунки $\overline{F_2F_1}$ — ўзгармас вектор), $dR + dr = 0$, бироқ $dR = \bar{R}^\circ d\bar{R}$, $dr = \bar{r}^\circ d\bar{r}$, шунинг учун: $\bar{R}^\circ d\bar{R} + \bar{r}^\circ d\bar{r} = 0$ ёки $(\bar{R}^\circ + \bar{r}^\circ)\,d\bar{r} = 0$ бўлади, демак, $d\bar{r}$ уринма-вектор ва $\bar{R}^\circ + \bar{r}^\circ$ вектор ўзаро тикдир. Бундан $\bar{R}^\circ + \bar{r}^\circ$ *вектор эллипсга ўтказилган нормал бўйича йўналган,* деган хулоса чиқади. Лекин $\bar{R}^\circ + \bar{r}^\circ$ вектор $\bar{R}^\circ$ ва $\bar{r}^\circ$ бирлик векторлардан ясалган ромбнинг диагоналидир. Буни *бирлик ромб* деймиз. Бу ромбни ясаш осон: эллипснинг M нуқтасига ўтказилган фокал радиусларни давом эттириб, улардан шу M нуқтада бирлик ромб ясасак, унинг бир диагонали эллипсга нормал вазифасини, иккинчи диагоналига параллел қилиб M нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқ эса уринма вазифасини ўтайди (ромбнинг диагоналлари бир-бирига тикдир); демак, фокал радиуслар орасидаги бурчакни нормал тенг иккига бўлиб унга қўшни бурчакни эса уринма тенг иккига бўлади (34-чизма).

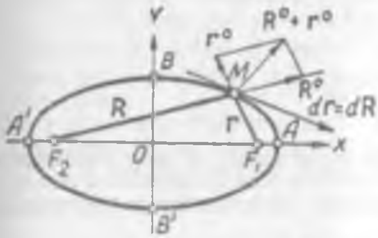
б) гипербола (35-чизма):

$$\bar{R} = \bar{r} + \overline{F_2F_1}, \quad R - r = \pm 2a,$$

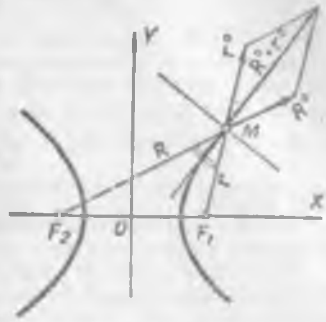
$$dR - dr = 0, \quad (\bar{R}^\circ - \bar{r}^\circ)d\bar{r} = 0,$$

демак, $(\bar{R}^\circ - \bar{r}^\circ) \perp d\bar{r}$ ва $(\bar{R}^\circ + \bar{r}^\circ) \parallel d\bar{r}$ бўлади. (Нега?)

Фокал радиуслар давомидан ясалган бирлик ромбнинг M нуқтадан ўтувчи диагонали уринмадир; иккинчи диагоналига параллел қилиб M нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқ эса нормалдир. Фокал радиусларн орасидаги бурчакни уринма тенг иккига булиб, унга қўшни бурчакни эса нормал тенг иккига бўлади.



34-чизма.



35-чизма.

в) парабола (36-чизма).

Параболанинг таърифига кўра, $r = FM = MD_1 = FD - FN$ ёки

$$r = p - (rl), \tag{1}$$

чунки $FN = пр._r = (rl)$, бунда l фокусдан директрисага йўналган бирлик вектор бўлиб, у директрисага тикдир; p эса узгармас сон.

(1) дан

$$dr = -(drl)$$

ёки

$$r^0 dr = -drl,\ (r^0 + l)dr = 0;$$

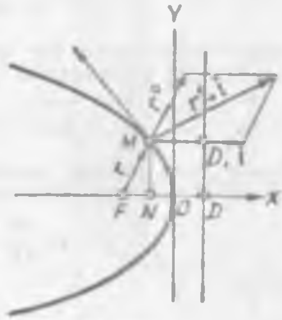
демак, $r^0 + l$ вектор нормал буйича йўналган.

13. Ҳаракат қонунини ифодаловчи

$$F = mW \quad \text{(Ньютон қонуни)}$$

тенгликдан фойдаланиб, нуқтанинг жонли кучи ҳақидаги ушбу теоремани исботлайлик:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fdr,$$



35-чизма.

бунда F — куч, m — масса, W — тезланиш, v — тезлик, $r = r(t)$ — ҳаракат қонунининг тенгламаси.

Юқоридаги $F = mW$ тенгликни

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

шаклида ёзиш мумкин. Бунинг иккала томонини $\frac{dr}{dt}$ га скаляр купайтирсак,

$$F\frac{dr}{dt} = m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}$$

ҳосил бўлади. Аммо:

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

21. Радиуси $\frac{R}{2}$ га тенг айлананинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси тузилсин.

Кўрсатма. Диаметрни OX ўқи, диаметрининг бир учини эса координаталар боши деб қараб, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ формулалардан фойдаланиш керак.

Жавоб: $\rho = R \cos \varphi$.

22. Узунлиги $2a$ га тенг AB кесманинг учлари (охирлари) OX ва OY ўқлари бўйлаб сирпанади (A нуқта OY ўқида), $OACB$ тўғри тўртбурчакнинг C учидан AB га перпендикуляр қилиб CM туширилган. Бу перпендикуляр асосининг, яъни M (x, y) нинг геометрик ўрни астроида ҳосил қилади. Астроиданинг тенгламаси тузилсин.

Кўрсатма. $\angle ABO$ ни φ деб олинг.

Жавоб: $x = 2a \cos^3 \varphi$, $y = 2a \sin^3 \varphi$.

23. Циклоиданинг тенгламаси тузилсин.

Кўрсатма. Агар радиуси R га тенг айлана бирор OX тўғри чизиқ бўйлаб сирпанмасдан ғилдираб борса, айлананинг ҳар бир нуқтаси циклоида чизади. Циклоиданинг тенгламалари мана бундай:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t).$$

24. Эпициклоиданинг течгламаси тузилсин.

Кўрсатма. Агар бир доира иккинчи доира бўйлаб, ташқаридан сирпанмай ғилдираса, ҳаракатдаги доира айланасидаги ихтиёрий нуқтанинг чизган чизиғи эпициклоида деб аталади (§ 16 га қаранг).

25. Айлана конхоидасининг тенгламаси тузилсин.

26. Қандай чизиқнинг тенгламалари

$$x = t^2 - t + 1, \quad y = t^2 + t - 1$$

шаклида бўлади?

Кўрсатма. t ни йўқотиш керак.

Жавоб: Парабола.

27. Қандай чизиқнинг тенгламалари

$$x = a \sin^2 t, \quad y = b \cos^2 t$$

шаклида бўлади?

28. Гиперболанинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси параметрик шаклда ёзилсин.

Кўрсатма. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = e^t$ га алмаштирилсин.

Жавоб:

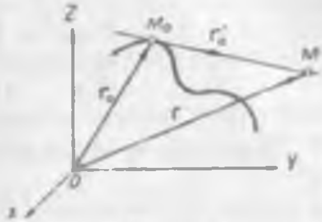
$$2x = a(e^t + e^{-t}), \quad 2y = b(e^t - e^{-t}).$$

§ 18. Чизиқнинг уринмаси ва нормал текислиги

Таъриф. *Чизиқнинг берилган нуқтасидаги уринма вектори бўйлаб кетган тўғри чизиқ — чизиқнинг шу нуқтасидаги уринмаси деб аталади.*

Бирор чизиқнинг тенгламаси $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ ёки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ва ундаги бирор M_0 нуқтанинг координаталари x_0, y_0, z_0 бўлсин. $t = t_0$ қийматда $x = x(t_0) = x_0$, $y = y(t_0) = y_0$, $z = z(t_0) = z_0$ дейлик (39-чизма). Чизиқнинг M_0 нуқтасида ўтказилган уринма-вектор $\boldsymbol{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\boldsymbol{i} + y'(t_0)\,\boldsymbol{j} + z'(t_0)\,\boldsymbol{k}$ ёки қисқача $\boldsymbol{r}_0' = x_0'\boldsymbol{i} + y_0'\boldsymbol{j} + z_0'\boldsymbol{k}$ бўлади. Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги уринманинг тенгламасини тузиш учун, бу уринмада ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани оламиз. M ўзгара борганда, $\overline{OM}$ вектор уринма чиза боради. $\overline{M_0M}$ ва r'_0 ўзаро коллинеар векторлар, яъни $\overline{M_0M} = \lambda \cdot r'_0$ дир. Шу сабабли, уринманинг вектор шаклидаги тенгламаси:

$$r = r_0 + \lambda r'_0$$



39-чизма.

бўлади. Бу кўринишдан координата кўринишига ўтиш мумкин. Бунинг учун $r - r_0$ ва r'_0 векторларнинг коллинеарлик шартини ёзамиз:

$$x - x_0 = \lambda x'_0, \quad y - y_0 = \lambda y'_0,$$
$$z - z_0 = \lambda z'_0.$$

Бу тенгламалардан λ ни йўқотсак, чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламалари келиб чиқади:

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}. \qquad (1)$$

Агар чизиқ XOY текислигида ётган бўлса, уринманинг тенгламаси

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0}$$

бўлади, бундан $y = \frac{y'_0}{x'_0}(x - y_0) + y_0$ ёки x ни аргумент деб олсак: $x'_0 = 1$ бўлиб, уринма тенгламаси

$$y = y'_0 (x - x_0) + y_0$$

кўринишни олади.

Текисликдаги чизиқнинг тенгламаси

$$F(x, y) = 0$$

шаклда берилган бўлса, уринманинг тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}(y - y_0)$$

бўлади. Чизиқнинг тенгламалари

$$F(x, y, z) = 0, \ \Phi(x, y, z) = 0$$

кўринишга эга бўлса, x ни параметр деб, y ва z ни эса x нинг функциялари деб қараб, берилган тенгламалардан ҳосила оламиз:

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0,$$

$$\Phi_x \cdot 1 + \Phi_y \cdot y' + \Phi_z \cdot z' = 0.$$

шу сабабли:

$$F\frac{dr}{dt}=mv\frac{dv}{dt} \quad \text{ёки} \quad F\frac{dr}{dt}=\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

бўлади бундан:

$$F\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

ёки

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=Fdr$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, ҳаракатдаги нуқта жонли кучининг dt вақт давомидаги орттирмаси кучнинг шу вақт давомида бажарган иши орттирмасига тенгдир.

14. Ўзгармас магнит майдонида электрон ҳаракатининг дифференциал тенгламаси мана бундай бўлади:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\left[\frac{dr}{dt}H\right],$$

бу ерда H — ўзгармас вектор. Бу ҳаракатнинг траекторияси винт чизиқдан иборатлиги исботлансин.

Берилган дифференциал тенгламанинг иккала томонини $\frac{dr}{dt}$ га скаляр кўпайтирсак:

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}=0 \quad \text{ёки} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=0$$

келиб чиқади, чунки ўнг томондаги аралаш кўпайтмада бир хил векторлар бор. Охирги тенгламадан:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\text{const} \quad \text{ёки} \quad \left|\frac{dr}{dt}\right|=\text{const}$$

бўлади, яъни ҳаракат тезлигининг абсолют қиймати ўзгармасдир. Шу тенгламани H га скаляр кўпайтириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$H\frac{d^2r}{dt_2}=0 \quad \text{ёки} \quad \frac{d}{dt}\left(H\frac{dr}{dt}\right)=0,$$

бундан:

$$H\frac{dr}{dt}=\text{const}$$

бўлади.

Демак, *ҳаракат траекториясининг ҳамма нуқталаридаги уринмалари ўзгармас H вектор билан бир хил бурчак ҳосил қилади.* Шу сабабли, траектория винт чизиқдир.

15. Скаляр аргументли вектор-функцияга нисбатан Ролль теоремаси ва ўрта қиймат ҳақидаги Лагранж теоремаси ўз кучини сақлайдими? Тейлор қаторидаги қолдиқ ҳаднинг хусусияти нимадан иборат?

Ечиш. Ролль теоремаси вектор-функция учун ўз кучини йўқотади. Бу теорема узлуксиз (скаляр) функциянинг иккита ноли орасида ҳосиланинг ақалли битта ноли борлигини тасдиқлайди. Лекин $r(t)$ функцияни олсак, унинг $t=a$ ва $t=b$ қийматларда нолга айланганлиги бу функция годографининг $t=a$ ва $t=b$ пайтларда қутбдан (координаталар бошидан) ўтганлигини кўрсатади (бу ерда t — вақт). Радиус-векторнинг вақт бўйича ҳосиласи $r'(t)$ тезлик бўлгани сабабли, бу траектория (годограф) бўйлаб шундай ҳаракат (масалан, текис ҳаракат) қонунини танлаб олиш мумкинки, $t=a$ ва $t=b$ пайтлар орасида тезлик ҳеч вақт нолга айланмайдиган бўлсин.

Лагранж теоремасининг геометрик маъноси шундан иборат: $y = f(x)$ функцияга нисбатан қўйилган шартлар бажарилганда, a ва b орасида $y = f(x)$ чизиқнинг шундай нуқтаси топиладики, ундаги уринма AB ватарга параллел бўлади. Бу теорема ҳам бу ерда ўз кучини йўқотади, чунки мисол тариқасида винт чизиқни олсак AB ватарнинг OZ ўқи билан ҳосил қилган бурчаги винт чизиқ уринмасининг шу ўқ билан ҳосил қилган бурчагидан фарқлидир; AB ватарга параллел уринма топилмаслиги ҳам мумкин.

Вектор-функция учун Тейлор қатори кучга эга бўлса-да, унинг қолдиқ ҳадидаги R_n вектор (25-бет) $r^{(n)}(t)$ векторнинг ($t = \xi$ даги) ҳеч бир қийматига тенг бўлмаслиги ҳам мумкин, чунки Θ_1, Θ_2, Θ_3 сонлари, умуман, ўзаро тенг эмас.

16. Вектор-функция ҳосиласининг координаталари шу функция координаталарининг ҳосилаларидан иборатдир. Буни исботланг.

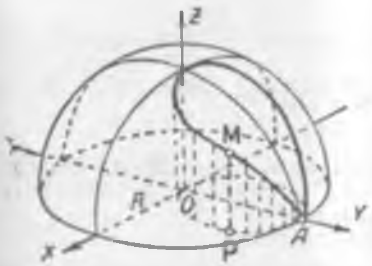
17. Вектор-функция берилган:

$$r = a + bt + ct^2,$$

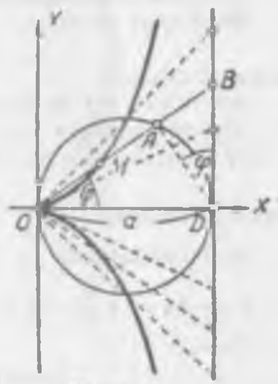
бунда a, b, c — ўзгармас векторлар ва $b \nparallel c$ (яъни b ва c коллинеар эмас). Годографнинг парабола эканлиги исботлансин.

18. O нуқтадан чиққан ёруғлик нурлари бирор чизиқдан қайтгач, параллел нурлар дастасига айланади. Бу чизиқ фокуси O нуқтада ётган параболадир, шу исботлансин.

19. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера ва $x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$ цилиндрнинг кесишган чизиғи *Вивиани чизиғи* дейилади. Унинг параметрик тенгламалари ёзилсин (37-чизма).



37-чизма.



38-чизма.

Жавоб: Агар $\angle xOP = u$ деб фараз қилинса:

$$x = R\cos u \sin u, \quad y = R\sin^2 u, \quad z = R\cos u$$

бўлади.

20. Диоклес циссоидаси деб шундай M нуқталар тўплами айтиладики, улар учун $OM = AB$ бўлади. Бунда a — айлана диаметри.

Бу чизиқнинг тенгламаси тузилсин (38-чизма).

Жавоб: $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$; параметрик тенгламалари:

$$x = \frac{a\varphi^2}{1 + \varphi^2}, \quad y = \frac{a\varphi^3}{1 + \varphi^2} \text{ (бунда } \varphi = \operatorname{tg} MOX).$$

Бунга M_0 нинг координаталарини қўйиб, y_0' ва z_0' ларни топамиз. Топилган қийматларни ва $x_0' = 1$ ни (1) га қўйсак ва соддалаштирсак, уринманинг тенгламалари ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{z_0} \\ \Phi'_{y_0} & \Phi'_{z_0} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_{z_0} & F'_{x_0} \\ \Phi'_{z_0} & \Phi'_{x_0} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_{x_0} & F'_{y_0} \\ \Phi'_{x_0} & \Phi'_{y_0} \end{vmatrix}}$$

Уринманинг бирлик вектори $\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ га тенгдир. Бу векторни $\bar{\tau}$ билан белгилаймиз: $\bar{\tau} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ ёки $\bar{\tau} = \frac{r'}{\sqrt{r' \cdot r'}}$.

Мисол. Чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтган уринма билан координата ўқлари орасидаги бурчаклар аниқлансин.

Ечиш. Уринманинг бирлик вектори билан координата ўқлари орасидаги α, β, γ бурчакларни топсак кифоя қилади:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{r'_0}{\sqrt{r'_0 \cdot r'_0}} = \frac{x'_0 i + y'_0 j + z'_0 k}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} \text{ ёки } \bar{\tau}_0 = \frac{x_0'}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} i +$$

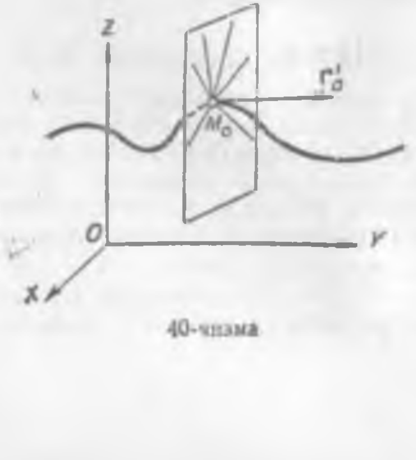
$$+ \frac{y_0'}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} j + \frac{z_0'}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} k.$$

Демак:

$$\cos\alpha = \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}}; \quad \cos\beta = \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}}.$$

Таъриф. *Чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтиб, шу нуқтадаги уринмага перпендикуляр бўлган текислик чизиқнинг M_0 нуқтасидаги нормал текислиги дейилади.*



40-чизма

Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги уринмага перпендикуляр бўлиб, M_0 нуқтадан ўтган тўғри чизиқ берилган чизиқнинг M_0 нуқтадаги нормали дейилади.

Чизиқнинг нормаллари нормал текисликни ташкил қилади (40-чизма).

Чизиқнинг нормал текислигининг тенгламасини ёзиш учун, унинг ихтиёрий $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқтасини олиб, $\overline{M_0M}$ векторни тузамиз. $\overline{M_0M}$ вектор нормал текисликда ётганлиги учун, у уринмага перпендикуляр бўлади. Шунинг учун $\overline{M_0M} = r - r_0$ ва r_0' векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг: $(r - r_0,\ r_0') = 0$. Энди $r - r_0 = (x - x_0)\,i + (y - y_0)\,j + (z - z_0)\,k$ ва $r_0' = x_0'i + y_0'j + z_1'k$ бўлгани учун, $(X - x_0)\,x_0' + (Y - y_0)\,y_0' + (Z - z_0)\,z_0' = 0$. Ана шу тенглама чизиқнинг M_0 нуқтасидаги нормал текислигини ифодалайди.

Чизиқ XOY текислигида ётса, унинг нормали фақат битта бўлиб, бу нормалнинг тенгламаси $(x - x_0)\,x_0' + (y - y_0)\,y_0' = 0$ ёки $y - y_0 = -\frac{x_0'}{y'}\,(x - x_0)$ кўринишга эга бўлади.

Мисол. $x = \frac{t^4}{4},\ y = \frac{t^3}{3},\ z = \frac{t^2}{2}$ чизиқнинг $t = 1$ қийматга мос нуқтасидаги уринма ва нормал текислигининг тенгламалари топилсин.

Ечиш: $t = 1$ га мос M_0 нуқтанинг координаталарини аниқлаймиз. Бунинг учун тенгламаларда t ўрнига $t = 1$ ни қўйиб, $x_0,\ y_0,\ z_0$ қийматларини топамиз: $x_0 = \frac{1}{4},\ y_0 = \frac{1}{3},\ z_0 = \frac{1}{2}$. Демак, $M_0\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$. Энди $x_0',\ y_0'$ ва z_0' қийматларни топамиз: $x' = t^3;\ x_0' = 1;\ y' = t^2;\ y_0' = 1;\ z' = t;\ z_0' = 1$. Буларни (1) тенгламаларга қўйсак, уринманинг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади: $\frac{4x - 1}{4} = \frac{3y - 1}{3} = \frac{2z - 1}{2}$. Топилган қийматларни чизиқнинг нормал текислиги тенгламасига қўйсак: $\left(x - \frac{1}{4}\right)\cdot 1 + \left(y - \frac{1}{3}\right)\cdot 1 + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$ ёки $12x + 12y + 12z - 13 = 0$ келиб чиқади.

Мисол. $y^2 = x,\ z = x^3$ чизиқнинг $M\ (1,\ 1,\ 1)$ нуқтасидаги уринма ва нормал текислиги топилсин.

Ечиш. Ўзгарувчи x иккала тенгламада ҳам иштирок этади. Шунинг учун x ни параметр сифатида олиш мумкин, бундан $x' = 1$ ёки $x_0' = 1$ бўлади; y_0' ва z_0' қийматларни топамиз: $2yy' = x';\ y_0' = \frac{1}{2};\ z = 2xx';\ z_0' = 2$. Натижада уринманинг қуйидаги тенгламаларини ҳосил қиламиз: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{z - 1}{2}$ ёки $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{4}$. Нормал текисликнинг тенгламаси эса

$$(x - 1) + (y - 1)\,\frac{1}{2} + (z - 1)\,2 = 0$$

ёки

$$2x + y + 4z - 7 = 0$$

бўлади.

Машқлар

29. Винт чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида уринма ўтказилган. Уринманинг тенгламаси ва уринма билан координата ўқлари орасидаги бурчаклар топилсин.

30. Чизиқ ушбу тенгламалар

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \; y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

билан берилган. Бу чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги уринма ва нормалининг тенгламалари ёзилсин.

31. $r = \frac{t^4}{4}i + \frac{t}{3}j + \frac{t^2}{2}k$ чизиқнинг $t = 1$ қийматга мос нуқтасидаги уринма ва нормал текисликнинг тенгламалари ёзилсин.

32. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ чизиқнинг M (1, 3, 4) нуқтасидаги уринма ва нормал текислиги топилсин.

Агар чизиқ XOY текислигида берилган бўлса, баъзи кесмаларни, чунончи, M_0T, M_0N, PT, PN ларнинг узунликларини топиш осон. Бу ерда M_0N **нормал кесмаси,** M_0T **уринма кесмаси,** PT **уринма ости,** PN **нормал ости** дейилади.

$M_0P = y_0$ ва $\operatorname{tg}\alpha = y_0'$ эканлигини биламиз. ΔM_0PT дан $\frac{MP}{PT} = \operatorname{tg}\alpha = y_0'$ ёки $\frac{y_0}{PT} = y_0'$. Бундан $PT = \frac{y_0}{y_0'}$ ва

$M_0T = \left|\sqrt{M_0P^2 + PT^2}\right| = \left|\sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{y_0'^2}}\right| = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$, яъни

$M_0T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$; ΔM_0PN дан $\frac{PN}{M_0P} = \operatorname{tg}\alpha$; $PN = M_0P \operatorname{tg}\alpha$

ёки $PN = y_0 \cdot y_0'$; $M_0N = \left|\sqrt{M_0P^2 + PN^2}\right| = \left|\sqrt{y_0^2 + y_0^2 \cdot y_0'^2}\right| = \left|y_0\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$, яъни $M_0N = \left|y_0\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$ бўлади.

Мисол. Ҳар бир нуқтасидаги уринма узунлиги ўзгармас бўлган чизиқ топилсин.

Ечиш. Уринма узунлигини a билан белгилаймиз. Масаланинг шартига асосан, $M_0T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}\right| = a$. Бу тенгликнинг икки томонини квадратга кўтариб, соддалаштирамиз:

$$\frac{y_0^2}{y_0'^2}\left(1 + y_0'^2\right) = a^2. \tag{1}$$

Бу мисолда аниқ нуқта берилмаган, шунинг учун (1) ни $\frac{y^2}{y'^2}(1+y'^2)=a^2$ шаклда ёзиш мумкин. Бундан $y^2(1+y'^2)=$ $=a^2y'^2$; $y'^2=\frac{y^2}{a^2-y^2}$; $y'=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2-y^2}}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$; $dx=$ $=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$. Икки томондан аниқмас интеграл оламиз: $\int dx=$ $=\int\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$; $x+c=\sqrt{a^2-y^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$. Бу чизиқ трактриса деб аталади. Трактриса Лобачевский геометриясида катта аҳамиятга эгадир.

Машқлар

33. Ҳар бир нуқтасида ўтказилган нормал узунлиги ўзгармас бўлган чизиқ топилсин.

34. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида уринма ўтказилган. Бу уринманинг координат ўқлари орасидаги кесмаларнинг узунликлари a га тенг эканлиги исботлансин.

Тўртинчи боб

ЧИЗИҚ, УНИНГ ОДДИЙ ВА МАХСУС НУҚТАЛАРИ

§ 19. Текисликдаги чизиқ

Вектор-функция тушунчасини анализ қилиб, унга фазода (ёки текисликда) годограф тарзидаги қандайдир эгри чизиқ (қисқача, чизиқ) мос келишини кўрдик. Бироқ чизиқ тушунчасини мустақил анализ қилиш ҳам фойдалидир. Биз чизиқнинг аналитик геометрияда бериладиган таърифига асосланамиз:

Координаталари бирор Декарт системасида қуйидаги тенгламани қаноатлантирадиган нуқталарнинг тўплами (геометрик ўрни) чизиқ деб аталади:

$$F(x, y) = 0,$$

бунда икки аргументли $F(x, y)$ функция текисликда ёки унинг маълум бир соҳасида аниқланган функциядир.

Агар шу умумий геометрик таъриф билан чегараланиб, $F(x, y)$ функция ва унинг хусусий ҳосилалари тўғрисида ҳеч қандай шарт қўймасак, чизиқ ҳақидаги одатдаги тасаввуримизга мувофиқ келмайдиган тўпламлар ҳосил қнлиниши мумкин.

Мисол. $\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = 2.$

Бу тенглама гарчи $F(x, y) = 0$ кўринишга эга бўлсада, унга ҳеч қандай чизиқ мос келмайди, чунки иккала координатаси ҳам мусбат ($x > 0$, $y > 0$) бўлган ҳар қандай нуқта, яъни биринчи координата бурчагида ётувчи барча нуқталар, бу тенгламани қаноатлантиради[1]).

Бундай ҳоллар юз бермаслиги учун $F(x, y)$ функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, деб фараз қилинади.

---

[1]) Қуйидагиларга қаранг: А. С. Смогоржевский, Метод координат, М., 1952, § 9; „Математика в школе" журнали, № 2, 1956, 39—41-бетлар; Н. И. Мусхелишвили, Курс аналитической геометрии, 3-нашри, М, 1947, 161-бет.

§ 20. Регуляр ёй. Ошкормас тенглама. Оддий ва махсус нуқталар

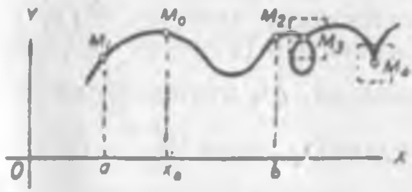
Ушбу:

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

чизиқнинг **регуляр ёйи** деб шундай нуқталарининг тўпламига айтиладики, улар бирор Декарт системасида

$$y = f(x) \quad (a < x < b) \tag{2}$$

шаклидаги тенгламани қаноатлантириб, $f(x)$ функция қуйидаги учта шартга бўйсунади: 1) у бир қийматли, 2) узлуксиз ва 3) етарли тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга.



41-чизма.

(1) чизиқдаги нуқтанинг етарли даражада кичик атрофи регуляр ёйдан иборат бўлса, биз бундай нуқтани шу чизиқнинг *оддий нуқтаси* деб атаймиз. Чизиқнинг оддий бўлмаган барча нуқталари унинг *махсус нуқталари* дейилади. Шундай қилиб, (1) чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ оддий нуқтаси атрофида (1) ва (2) тенгламалар эквивалентдир (41-чизма); $\overset{\frown}{M_1M_2}$— регуляр ёй. $f(x)$ функцияга нисбатан қўйилган шартлар $\overset{\frown}{M_1M_2}$ ёйнинг силлиқлигини, ҳар бир нуқтасида муайян уринма (чунки $f'(x)$ — узлуксиз) борлигини кўрсатади. Чизмада M_3 ва M_4 нуқталар махсус нуқталардир, чунки M_3 нуқтада $f(x)$ функциянинг бир қийматлилиги бузилади, M_4 да эса $f'(x)$ мавжуд эмас (иккита уринма бор!). Охирги икки нуқтани қанчалик кичик атроф билан ўрасак ҳам, регуляр ёй ҳосил қилинмайди.

(1) чизиқдаги нуқтанинг оддий бўлишининг етарли шартини ифодалаш қийин эмас. Бунинг учун анализда исботланадиган ошкормас функциянинг мавжудлик теоремасини эслаб ўтиш керак бўлади[1]).

Агар $M_0(x_0, y_0)$ нуқта (1) чизиқда ётиб, $F(x, y)$ функция M_0 нуқта атрофида узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $\frac{dF}{dy}$ ҳосила шу нуқтада нолдан фарқли бўлса:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0,$$

у ҳолда фақат битта шундай

$$y = f(x)$$

[1]) Г. М. Фихтенгольц — Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, I том, Ўқувпеддавнашр. 1951. VI боб, § 2 га қаранг.

функция мавжудки, у M_0 *нуқтанинг бирор атрофида* (1) *тенгламани қаноатлантиради ва* $x = x_0$ *да* $y = y_0$ *қийматни қабул қилади.* $y = f(x)$ *функция шу атрофда узлуксиз ҳосилага эгадир:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Агар M_0 нуқтада $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, лекин $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ бўлса ҳам, теорема ўз кучини сақлайди.

Бошқача айтганда, $F(x, y)$ га нисбатан қўйилган умумий шартлардан (функция ва унинг хусусий ҳосилалари узлуксиз) ташқари, M_0 нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилалар бирданига нолга айланмаса, яъни $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда юқоридаги учта шартни қаноатлантирган $y = f(x)$ функция мавжуддир.

Ана шу теоремани татбиқ этсак, нуқтанинг оддий бўлиш шарти келиб чиқади:

Агар (1) *чизиқдаги бирор* $M_0(x_0, y_0)$ *нуқтада хусусий* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ва* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *ҳосилалар бирданига нолга айланмаса,* $M_0(x_0, y_0)$ *нуқта албатта оддий бўлади.*

Демак, (1) чизиқнинг махсус нуқталари мавжуд бўлса, уларнинг x ва y координаталари бир вақтда қуйидаги у ч т а тенгламани қаноатлантириши керак:

$$F(x, y) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Мавжудлик теоремасидаги регулярлик шарти бундай нуқталарда бузилади.

Оддий нуқтада уринма ва нормалнинг тенгламасини ёзайлик; $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ бўлса, уринманинг бурчак коэффициенти

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

бўлиб, буни $y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$ га қўйсак, уринманинг тенгламаси чиқади:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ да уринма OY ўқига параллелдир: $x - x_0 = 0$;

нормалнинг бурчак коэффициенти $-\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ га тенг, шу

сабабли, нормалнинг тенгламаси ушбу шаклда ёзилади:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Эслатма. Чизиқ $y = f(x)$ шаклдаги тенглама билан берилса унинг ҳамма нуқталари оддий бўлиб, махсус нуқталар мавжуд бўлмайди, чунки бу ҳолда $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y - f(x)] = 1 \neq 0$ бўлади.

Мисол. Декарт япроғи берилган:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Унинг $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ нуқтасидаги уринма ва нормалининг тенгламалари тузилсин.

Жавоб: Уринма: $x + y - 3a = 0$; нормаль: $x - y = 0$ (биссектриса).

§ 21. Махсус нуқталар. Ошкормас тенглама

Энди

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

тенглама билан берилган чизиқ назариясига ўтиб, $F(x, y)$ нинг хусусий ҳосилаларини:

$$F_x,\ F_y,\ F_{xx},\ F_{xy},\ F_{yy}, \ldots$$

кўринишда белгилайлик. Ҳозирги олиб бориладиган мулоҳазалар учун, $F(x, y)$ функция учинчи тартибгача узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб, фараз қилиш кифоя.

Махсус нуқтада ушбу тенгламалар ўринлидир:

$$F(x, y) = 0;\ F_x(x, y) = 0,\ F_y(x, y) = 0.$$

Иккинчи тартибли учта F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ҳосиладан ақалли биттаси нолдан фарқли бўлсин, масалан, $F_{yy} \neq 0$; агар $F_{yy} = 0$ бўлса, координата ўқларини буриб, F_{yy} нинг нолдан фарқли бўлишига эришиш мумкин. Чизиқнинг бундай M_0 нуқтаси *икки каррали (қўшалоқ)* нуқта деб аталади.

Биринчи ва иккинчи тартибли барча хусусий ҳосилалар нолга айланиб, учинчи тартибли

$$F_{xxx},\ F_{xxy},\ F_{xyy},\ F_{yyy}$$

ҳосилалардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, бундай нуқтани биз *уч каррали* нуқта деб атаймиз.

Махсус нуқталар назариясининг умуман мураккаблигидан, биз шу икки ҳолда учрайдиган асосий фактларни текшириш билан чегараланамиз.

Бизнинг мақсадимиз — чизиқнинг махсус нуқтаси атрофида қандай тузилишини текширишдир, лекин олдиндан бу тузилиш ҳақида ҳеч нарса айта олмаймиз. Бироқ, биз M_0 нуқтадан чизиқнинг бирор регуляр ёйи ўтади деб фараз қилайлик. Бу ёй

$$y = f(x)$$

[бунда $y_0 = f(x_0)$] тенглама билан ифодаланган бўлсин; y ўрнига $f(x)$ ни қўйсак, $F(x, y) = 0$ айниятга айланади (чунки $y = f(x)$ — чизиғимизга қарашли регуляр ёйдир), шунинг учун уни x бўйича икки марта дифференциаллаш мумкин:

$$\begin{cases} F_x + F_y\, f'(x) = 0 \\ F_{xx} + 2F_{xy} f'(x) + F_{yy} f'^2(x) + F_y f''(x) = 0. \end{cases}$$

Бу тенгламаларнинг биринчиси айниятдан иборат, чунки $F_x^0 = 0$ ва $F_y^0 = 0$ (тўлароғи $F_x(x_0, y_0) = 0$ ва $F_y(x_0, y_0) = 0$), иккинчиси эса:

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0\, f'(x_0) + F_{yy}^0 f'^2(x_0) = 0 \qquad (2)$$

Демак, *қилинган фараз эътиборга олинса, яъни* (1) *чизиқнинг махсус* M_0 *нуқтасидан ўтадиган регуляр* $y = f(x)$ *ёйи бор деб қаралса, унинг шу нуқтадаги* $f'(x)$ *бурчак коэффициенти* (2) *квадрат тенгламани қаноатлантиради.*

Фараз этайлик:

$$a_{11} = F_{xx}^0,\ a_{12} = F_{xy}^0,\ a_{22} = F_{yy}^0,\ k = f'(x);$$

бу вақтда (2) тенглама

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \qquad (3)$$

кўринишни олади.

Бу тенглама k га нисбатан иккинчи даражали бўлгани учун, *икки каррали* M_0 *нуқтадан ўтадиган ва бурчак коэффициентлари* (3) *тенгламани қаноатлантирган регуляр ёй иккитадан ортиқ эмасдир.*

Уч ҳолни текшириб ўтамиз:

1) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

Бу ҳолда (3) квадрат тенгламанинг илдизлари қўшма комплекс сонлардир, демак, M_0 нуқта орқали ҳақиқий регуляр ёй ўта олмайди, чунки акс ҳолда унинг бурчак коэффициенти комплекс сондан иборат бўлар эди. M_0 бу ҳолда *ажралган нуқта* дейилади.

Қуйидаги теорема нуқтага бундай ном беришга ҳақли эканимизни кўрсатади.

Теорема. *$F(x, y) = 0$ чизиқнинг ажралган $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасини шу қадар кичик доира билан ўраб олиш мумкинки, унинг ичида чизиқнинг шу M_0 нуқтадан бошқа ҳеч қандай нуқтаси бўлмайди.*

Бу теоремани исботлаш учун ушбу Тейлор қаторини оламиз:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + [F_x^0(x - x_0) + F_y^0(y - y_0)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[F_{xx}^0(x - x_0)^2 + 2F_{xy}^0(x - x_0)(y - y_0) + F_{yy}^0(y - y_0)^2\right] +$$
$$+ \quad = 0. \tag{4}$$

Соддалик мақсадида координаталар бошини M_0 нуқтага кўчирамиз ва қолдиқ ҳад x ва y га нисбатан иккинчи даражали деб фараз қиламиз. Ундан ташқари, ҳосилалар қуйидагича белгиланган бўлсин:

$$a_{11}^* = F_{xx}(\theta x, \theta y), \quad a_{12}^* = F_{xy}(\theta x, \theta y), \quad a_{22}^* = F_{yy}(\theta x, \theta y),$$

бунда $0 < \theta < 1$. Бу вақтда (4) тенглама ушбу шаклни олади:

$$F(x, y) = a_{11}^* x^2 + 2a_{12}^* xy + a_{22}^* y^2 = 0, \tag{5}$$

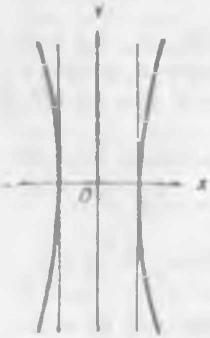
чунки $x_0 = y_0 = 0$, $F(0, 0) = F_x^0 = F_y^0 = 0$ (биз иккинчи ҳадда тўхтаганмиз!). Шартга кўра, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$' дискриминант M_0 нуқтада ўз ишорасини сақлайди ($\Delta > 0$); шунинг учун a_{11}^*, a_{12}^*, a_{22}^* нинг узлуксиз функцияси бўлган $\Delta^* = a_{11}^* a_{22}^* - a_{12}^{*2}$ ифода шу $M_0(0, 0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида (кичик доирада!) ўз ишорасини сақлайди: $\Delta^* > 0$. Бунга асосан, (5) тенгламани ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$F(x, y) = \frac{1}{a_{11}^*}\left[(a_{11}^* x + a_{12}^* y)^2 + {}^*\Delta y^2\right] = 0. \tag{6}$$

Аммо $\Delta^* > 0$, демак, бу тенгламани фақат $x_0 = y_0 = 0$ гина қаноатлантиради, яъни эслатиб ўтилган доира ичида чизиқнинг $M_0(0, 0)$ нуқтасидан (янги координата бошидан) бошқа ҳеч қандай нуқтаси йўқдир. Теорема исботланди.

Бу ерда геометрик нуқтаи назардан қараганда ажойиб бир ҳодиса юз беради: $F(x, y) = 0$ чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаси чизиқдан „ажралиб“ қолган. Бунга сабаб, чизиққа биз формал аналитик таъриф беришимиздадир, чунки $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи чизиқдан ташқари, шу тенгламани қаноатлантирувчи „айрим турган“ нуқталар ҳам бўлиши мумкин.

Мисол. $F(x; y) = x^4 - 4x^2 - y^2 = 0$. Бу ерда $F_x = -8x + 4x^3$, $F_y = -2y$ бўлиб, $F_x = 0$ ва $F_y = 0$ нинг илдизлари $(0, 0)$ ва $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Бироқ, булардан фақат $(0, 0)$ нуқта чизиққа қарашли бўлиб, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ нуқта эса чизиқда ётмайди, шунинг учун уни биз текширмаймиз, чунки нуқтанинг координаталари учала $F(x, y) = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ тенгламани ҳам қаноатлантириши керак. Энди $M_0(0, 0)$ десак, $a_{11} = F^0_{xx} = -8 + 12x^2\,|_{M_0} = -8$, $a_{12} = F^0_{xy} = 0$; $a_{22} = F^0_{yy} = -2$. Демак, $= 16 > 0$ бўлиб, координаталар боши ажралган нуқтадир (42-чизма).



42-чизма.

Тенгламанинг ўзидан ҳам бу хулосага келиш мумкин:

$$y^2 = x^2(-4 + x^2),\ y = \pm x\sqrt{x^2 - 4};$$

функция ҳақиқий қийматга эга бўлишлиги учун, $|x| > 2$ шарт бажарилиши керак, демак, OY ўқига параллел икки $x = \pm 2$ тўғри чизиқ орасидаги соҳада чизиқнинг $(0, 0)$ нуқтадан бошқа нуқтаси йўқдир.

$$2)\ \Delta = a_{11}a_{22} - a^2_{12} < 0.$$

Бу ҳолда (3) тенглама икки ҳақиқий k_1 ва k_2 илдизга эгадир ($k_1 \neq k_2$). M_0 нуқта орқали чизиқнинг иккита регуляр ёйи ўтади. Уларнинг уринмаларининг бурчак коэффициентлари k_1 ва k_2 дир. Шунинг учун M_0 *тугун нуқта* дейилади. M_0 нуқта орқали ҳақиқатан ҳам икки регуляр ёйнинг ўтишини биз исбот этмадик — бу исбот анча мураккаб.

Мисол. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ — Декарт япроғи.

$$F_x = 3x^2 - 3ay = 0,\ F_y = 3y^2 - 3ax = 0,$$

булардан $(0, 0)$ ва (a, a) нуқталар ҳосил қилинади; иккинчи нуқта чизиқда ётмайди. Биринчисини текширамиз:

$$F_{xx} = 6x = 0,\ F_{xy} = -3a,\ F_{yy} = 6y = 0,$$

демак, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -3a$, $a_{22} = 0$ ва 3)$\Delta = -9a^2 < 0$, (3) тенгламанинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$. Координаталар боши — тугун нуқта бўлиб, координата ўқлари уринмалардир.

$$3)\ \Delta = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0.$$

Бу ҳолда (3) тенгламанинг илдизи ҳақиқий карралидир: $k_1 = k_2$; M_0 нуқтада чизиғимиз битта ҳақиқий уринмага эга. Бу ҳол анча мураккаб бўлиб, M_0 нуқтада уринма чизиққа турлича уриниши ва шу муносабат билан M_0:

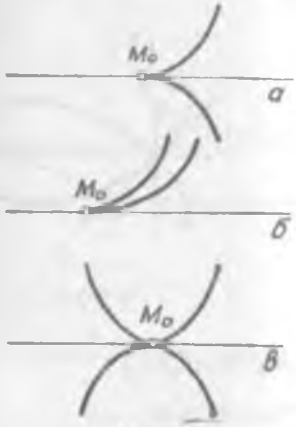
а) биринчи типли қайтиш нуқтаси,

б) иккинчи типли қайтиш нуқтаси,

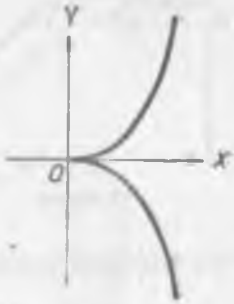
в) ўз-ўзига уриниш нуқтаси бўлиши мумкин (43-чизма).

Мисоллар. 1) $y^2 - x^3 = 0$.

Бунда $F_x = -3x^2$, $F_y = 2y$, $F_{xx} = -6x$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2 \neq 0$; (0,0) нуқтада $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$; демак, $\Delta = 0$. Чизиқ



43-чизма.



44-чизма.

OX ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлиб, иккала шохчаси ҳам OX ўқига уринади. Бу чизиқ ярим кубик параболадир. Координаталар боши бу чизиқ учун биринчи типли қайтиш нуқтасидир (44-чизма).

2) $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.

$$F_x = -4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \quad F_y = 2(y - x^2) = 0,$$

булардан яна (0, 0) нуқта ҳосил қилинади.

$$F_{xx} = -4y + 12x^2 - 20x^3, F_{xy} = -4x, F_{yy} = 2;$$

демак, $a_{11} = 0, a_{12} = 0$, $a_{22} = 2 \neq 0$ ва $\Delta = 0$; (3) тенгламадан $k_1 = k_2 = 0$, шу сабабли, OX ўқи уринма бўлади.

Координаталар бошида чизиқнинг кўриниши олдинги мисолга қараганда бошқачадир. Берилган тенглама иккига ажралади:

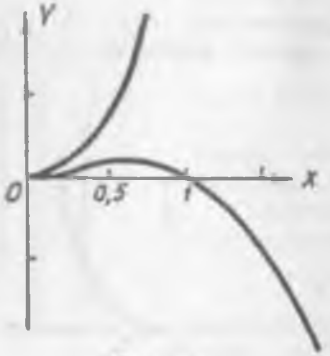
$$y = x^2 - x^2\sqrt{x} \quad \text{ва} \quad y = x^2 + x^2\sqrt{x},$$

бу тенгламаларга мос чизиқларнинг (0, 1) интервалдаги қисмларини текширсак, 45-чизмадаги чизиқ ҳосил қилинади. (0, 0) нуқта бу чизиқ учун иккинчи типли қайтиш нуқтасидир.

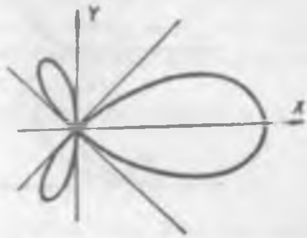
3) $y^2 - x^4 = 0$; бу ерда ҳам (0, 0) махсус нуқта бўлиб, $y = x^2$ ва $y = -x^2$ параболалар (0, 0) нуқтада ўзаро уринади, яъни (0, 0) ўз-ўзига уриниш нуқтаси бўлади.

Учинчи ҳолда, кўрилган типлардан ташқари, *ажралган нуқта* ҳам юз бериши мумкин. Масалан, $y^2 - x^4 - x^6 = 0$ чизиқ учун (0, 0) нуқтада $\Delta = 0$ бўлса ҳам, бу нуқта ажралган нуқтадир.

Юқорида қаралган мисолларда икки каррали нуқталар типлари учради.



45-чизма.



46-чизма.

Уч япроқли номли ушбу чизиқни олайлик:

$$(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0.$$

Бу чизиқ учун (0, 0) нуқтада биринчи, иккинчи ҳосилалар нолга айланиб, учинчи ҳосилалардан эса:

$$F_{xxx} = -6a \neq 0, \ F_{xyy} = 2a \neq 0.$$

Бурчак коэффициенти k учун тузилган

$$F_{xxx} + 3F_{xxy}y' + 3F_{xyy}y'^2 + F_{yyy}y'^3 = 0$$

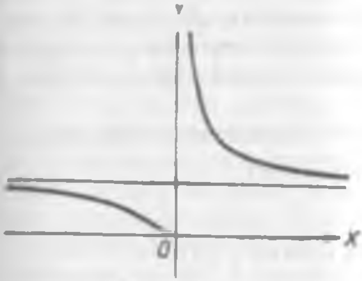
тенгламадан: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = \infty$ ҳосил бўлади, яъни координаталар боши уч каррали нуқтани ифодалайди; ундаги уринмалар $x = 0$, $y - x = 0$, $y + x = 0$ дир (46-чизма).

Эслатма. Биз тенгламаси ошкормас $F(x, y) = 0$ шаклда берилган чизиқнинг махсус нуқталари тўғрисида сўзладик; бунда $F(x, y)$ функция узлуксиз (камида биринчи тартибли) хусусий ҳосилаларга эга ва ундан аниқланган ошкор $y = f(x)$ функция юқорида қўйилган шартларни қаноатлантиради деб фараз қилган эдик.

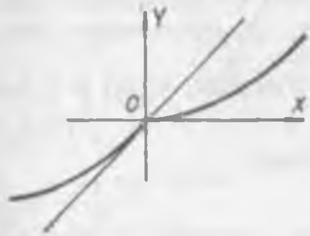
Бу шартлар алгебраик чизиқлар учун бажарилади, буни биз юқоридаги мисолларда кўрдик. Трансцендент чизиқлар учун эса бу шартлар баъзан бажарилмай қолиши ҳам мумкин. Бу чизиқлар кўрилган типли махсус нуқталардан ташқари яна бошқа характердаги махсус нуқталарга ҳам эга бўлиши мумкин.

Иккита содда мисол олайлик[1]):

1) $y = 2^{\frac{1}{x}}$, бунда $f(+0) = \infty$, $f(-0) = 0$. Бу функцияга мос келган чизиқ 47-чизмада тасвирланган. Координаталар бошида чизиқ гўё „узилиб" кетгандай туйилади. Бу типдаги нуқта *„тўхташ нуқтаси"* дейилади. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ нинг графиги ҳам (0, 0) нуқтада шу характерга эга



47-чизма



48-чизма

2) $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Бу тенгламага мос келган чизиқ 48-чизмада тасвирланган. Координата бошида функциянинг ҳосиласи узлукли:

$$\lim_{x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad \lim_{x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Бу сингари нуқта чизиқнинг *синиш нуқтаси* дейилади. (Фихтенгольц, I том, п 99.)

$y = f(x) = |x|$ функция ҳам O нуқтада шу характерга эгадир.

§ 22. Параметрик тенгламалар. Махсус нуқталар.

1. Оддий ва махсус нуқталар. Эгри чизиқнинг параметрик тенгламалар билан берилиши кўп жиҳатдан қулайдир. Шунинг учун биз ушбу таърифни берамиз:

Чизиқ деб қуйидаги тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламига айтамиз:

$$x = \ (t), \ y = \psi(t), \qquad (a < t < b) \qquad (1)$$

---

[1]) Фихтенгольц Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, I том, Ўқувпеддавнашр, 1951, 202-бет.

бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ — узлуксиз функциялар бўлиб, узлуксиз ҳосилаларга эгадир. (1)тенгламалар чизиқнинг *параметрик тенгламалари* деб, t эса параметр деб аталади. Бу чизиқнинг етарлича кичик қисмлари, умуман айтганда, регуляр ёйлардан иборатдир. Биз бу фактни ҳозир исботлаймиз.

Теорема. *Агар* (1) *чизиқнинг* $t = t_0$ *га мос нуқтасида* $x_0 = \varphi(t_0)$ *ва* $y_0 = \psi(t_0)$ *бўлиб, бу нуқтадаги*

$$\varphi'(t_0) \text{ ва } \psi'(t_0)$$

ҳосилаларнинг ақалли биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу нуқтанинг етарлича кичик атрофи регуляр ёйдан, t_0 *нуқтанинг ўзи эса оддий нуқтадан иборат бўлади.*

Масалан, $\varphi'(t_0) \neq 0$ дейлик. Ушбу тенгламани оламиз:

$$F(x, t) = x - \varphi(t) = 0, \tag{2}$$

бундан:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big[x - \varphi(t)\Big] = -\varphi'(t).$$

Бу ҳосила, шартга кўра, $x = x_0$, $t = t_0$ нуқтада нолдан фарқли. Мавжудлик теоремасига асосан, x_0, t_0 га яқин x ва t учун фақат битта (узлуксиз монотон)

$$t = t(x)$$

функция мавжудки*, у (x_0, t_0) нуқта атрофида (2) тенгламани қаноатлантиради ва $x = x_0$ қийматда $t = t_0$ қийматни қабул қилади. Энди $t = t(x)$ ни (1) тенгламаларнинг иккинчисига қўямиз:

$$y = \psi[t(x)] = f(x). \tag{3}$$

Бу функция $(x_0\ y_0)$ нуқта атрофида узлуксиз

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

ҳосилага эга. Демак, (3) тенглама билан ифодаланувчи чизиқнинг шу атрофдаги ёйи регулярдир, шу сабабли, (x_0, y_0) нуқта — о д д и й. (1) чизиқнинг махсус нуқталари мавжуд бўлса, улар ушбу тенгламаларни қаноатлантириши керак:

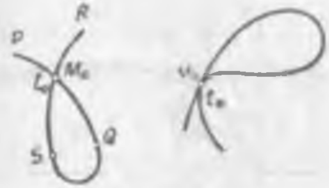
$$'(t) = 0, \quad \psi'(t) = 0. \tag{4}$$

Қуйидагини айта оламиз: t нинг ана шу тенгламаларни қаноатлантирмайдиган t_0 қийматларидан исталганини олсак, t_0 га яқин барча нуқталар р е г у л я р ё й н и ҳосил қилади. Аммо (4) тенгламаларни қаноатлантирувчи t_0 нуқта атрофи бу шарт-

* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларга нисбатан қўйилган шартлар эсга олинсин.

га итоат қилмаслиги, яъни t_0 махсус нуқта бўлиши мумкин.

Бу ерда қизиқарли бир ҳол юз беради. Чизиқнинг махсус бўлмаган $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаси яқинида y ўзгарувчи x нинг бир қийматли ва дифференциалланувчи функциясидир (ёки аксинча, x ўзгарувчи y нинг шу тарздаги функциясидир). Бироқ шундай нуқтада ҳам чизиқ ўз-ўзини кесиб ўтиши ёки ўз-ўзига уриниши мумкин (49-чизма). Бундай нуқталарни биз махсус нуқталар қаторига киритган эдик. Шу сабабли, илгариги муҳокамаларга зидлик пайдо бўлмадими?



49-чизма.

Бу ерда ҳеч қандай зидлик йўқ. Биз $t = t_0$ га мос келган M_0 нуқта устида сўзлаганимизда, чизиқнинг шу нуқтага яқин атрофини, яъни унинг $t = t_0$ га яқин қийматларга мос келган қисмини кўзда тутдик, t_0 нуқтанинг маълум бир атрофини эътиборга олдик. t нинг ана шу атрофдан ташқарига чиққан қийматларига келганда эса, чизиқнинг уларга мос бўлаклари M_0 нуқтага яна қайтиб келиши ҳам мумкин. Бу эса, чизиқнинг M_0 нуқтада ўз-ўзи билан кесишиш ёки ўз-ўзига уриниш мумкинлигини тасдиқлайди. Масалан, M_0 нуқтада иккита регуляр ёй PQ ва RS кесишган бўлсин. Чизиқни бутунича олганимизда, M_0 ни махсус нуқта деб қарашимиз керак. Бундан кейинги муҳокамаларимизда биз доимо шундай t_0 нуқталар билан иш кўрамизки, уларда $\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) \neq 0$ деб фараз қиламиз ва, ундан ташқари, t нинг t_0 га етарлича яқин қийматлари билан чегараланамиз, яъни оддий нуқталарни кўзда тутамиз.

Оддий нуқталарда $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ бўлиб, уринманинг тенгламаси

$$\frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\psi'(t)},$$

нормалнинг тенгламаси

$$(X - x)\,\varphi'(t) + (Y - y)\,\psi'(t) = 0$$

кўринишда бўлади.

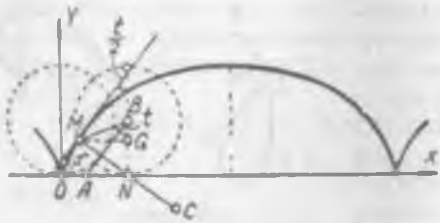
Мисол. *Циклоида:* $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, бунда $\angle MBN = t$ (50-чизма). Ушбуга эгамиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2};$$

демак:

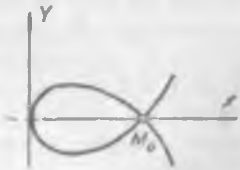
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Бурчак $BAN = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, чунки $\angle ABN = \frac{t}{2}$. Шу сабабли $\angle BAN = \alpha$, яъни M нуқтадаги уринма AB га параллелдир. Бундан M нуқтада циклоидага уринма ўтказиш усули келиб чиқади. M нуқтадан $\angle MBN$ нинг AB биссектрисасига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. BMN учбурчак тенг ёнли: $BM = BN$, шу сабабли унинг биссектрисаси баландлик ролини ҳам бажаради: $AB \perp MN$, яъни $MT \perp MN$; демак, MN — нормалдир. Хуллас, *ғилдировчи айлананинг уриниш нуқтаси N ни M нуқта билан бирлаштирилса, нормал ҳосил бўлади.*



50-чизма.

2. Махсус нуқталарни текшириш. Эгри чизиқ параметрик тенгламалар билан берилганда яна бир ҳолга эътибор қилиш керак. t параметрнинг ҳар бир қийматига чизиқнинг битта нуқтаси мос келади. Лекин аксинча бундай эмас: чизиқдаги бир M_0 нуқтага t нинг, масалан, икки t_1 ва t_2 қиймати мос келиши мумкин. Бундай нуқтани *каррали* нуқта деб атаймиз. Каррали нуқтада чизиқнинг иккита регуляр ёйи кесишади: улардан бири t нинг t_1 га яқин қийматларига, иккинчиси эса t нинг t_2 га яқин қийматларига мос келади. Шундай нуқта атрофида чизиқни бутунича қараганда, уни $y = f(x)$ шаклдаги тенглама билан ифодалаб бўлмайди. Демак, каррали нуқталар аслида махсус нуқталар қаторига киритилиши керак. Масалан, тенгламалари $x = t^2$, $y = t(1 - t^2)$ дан иборат чизиқдаги (51-чизма) M_0 (1, 0) нуқта t нинг икки



51-чизма.

$$t = \pm 1$$

қийматига мос келади. Бундай ҳоллар юз бермайди деб, яъни

$$\varphi'(t) = 0, \ \psi'(t) = 0$$

тенгламалар t нинг фақат битта t_0 қийматидагина бажарилади деб фараз қиламиз.

Махсус нуқтада чизиқнинг регулярлик шарти бузилиб, (4) тенгламалар юз беради. Бу ҳолда текшириш ишини енгиллаштириш учун, $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар аналитик функциялардан иборат деб фараз қиламиз*.

Аналитик функцияга тегишли чизиқ *аналитик чизиқ* дейилади. Ўнғайлик мақсадида векторларга ўтамиз:

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j.$$

Шартга кўра, t_0 нуқтада $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$, яъни $r'(t_0) = 0$; умумий ҳолни қараб, биринчи ҳосиладан ташқари, бу нуқтада яна бир неча ҳосила ноль-векторга тенг дейлик:

$$r'(t_0) - r''(t_0) = \cdots = r^{(k-1)}(t_0) = 0, r^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

Аналитик чизиқнинг бундай нуқтада ҳам тайин уринмага эгалигини исботлайлик. Ҳақиқатан:

$$\overline{M_0M} = r(t) - r(t_0) = r^{(k)}(t_0)\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \cdots, \tag{5}$$

яъни

$$\frac{\overline{M_0M}}{(t-t_0)^k} = \frac{1}{k!} r^{(k)}(t_0) + \frac{1}{(k+1)!} r^{(k+1)}(t_0)(t-t_0) + \cdots.$$

Энди $t - t_0 \to 0$ да ўнг томон нолдан фарқли тайин $\frac{1}{k!} r^{(k)}(t_0)$ векторга интилади, чап томон эса — кесувчининг лимит ҳолати бўйлаб йўналганлиги сабабли, уринма вектор $\overline{M_0T}$ ни беради (52-чизма). Демак, M_0 нуқтадаги уринма $r^{(k)}(t_0)$ вектор бўйлаб йўналган бўлиб, тайин бир тўғри чизиқдир. Шундай қилиб, *аналитик чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида тайин уринмага эга* ($r'(t_0) \neq 0$ да, яъни оддий нуқтада бу равшандир).

52-чизма.

Энди $r^{(k)}(t_0)$ дан кейин келган ва унга коллинеар бўлмаган ноль-вектордан фарқли ҳосилаларнинг энг кичик тартиблиси $r^{(l)}(t_0)$ бўлсин. $\overline{M_0M}$ ни $r^{(k)}$ ва $r^{(l)}$ векторларнинг йўналишлари бўйича ёйиш мумкин (соддалик мақсадида текисликдаги чизиқни қарамоқдамиз):

$$\overline{M_0M} = mr^{(k)} + nr^{(l)}. \tag{6}$$

$\overline{M_0M}$ нинг (5) ёйилмасини бундай ёзайлик:

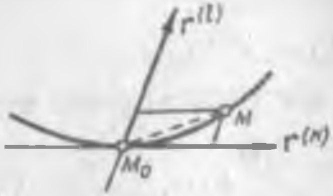
$$\overline{M_0M} = \frac{1}{k!} r^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \cdots + \frac{1}{l!} r^{(l)}(t_0)(t-t_0)^l + \cdots \tag{7}$$

(6) билан (7) ни солиштириб, $t - t_0 \to 0$ бўлганда m нинг бош

---

* $x - x_0$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйилувчи функцияни ҳақиқий ўзгарувчи x нинг x_0 нуқтадаги *аналитик функцияси* деб айтамиз.

қисми $\frac{1}{k!}(t-t_0)^k$ га ва n нинг бош қисми $\frac{1}{l!}(t-t_0)^l$ га тенг эканини кўрамиз. Биз шу бош қисмларни қараш билан чегараланамиз. m ва n нинг ишоралари шу бош қисмларнинг ишоралари билан бир хил. Бошқача айтганда, $t-t_0>0$ да $m>0, n>0$ бўлиб, $t-t_0<0$ да эса m ва n нинг мусбат ёки манфийлиги k ва l нинг жуфт ёки тоқлигига боғлиқдир (53-чизма).



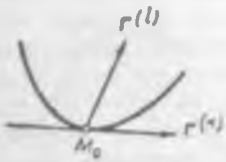
53-чизма.

Кенгроқ муҳокамаларни қўллаб (биз улар устида тўхтаб ўтирмаймиз), қуйидаги натижаларга эришиш мумкин:

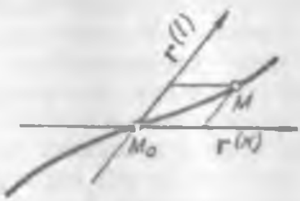
1. k тоқ ва l жуфт бўлган ҳол учун чизиқнинг M_0 нуқта атрофидаги тузилиши 54-чизмада берилган, M_0 — оддий нуқта.

2. k тоқ ва l тоқ бўлган ҳол учун чизиқнинг тузилиши 55-чизмада кўрсатилган, M_0 — қайрилиш нуқтаси.

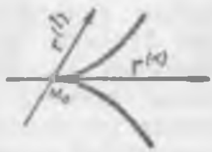
3. k жуфт ва l тоқ бўлган ҳолда чизиқ M_0 нуқтада уринманинг турли томонида, нормалнинг эса бир томонида, M_0 — биринчи типли қайтиш нуқтасидир (56-чизма).



54-чизма.



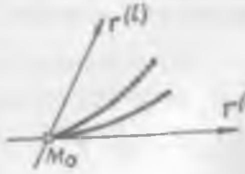
55-чизма.



56-чизма.

4. k ва l жуфт бўлганда, чизиқ M_0 нуқтада уринманинг ва нормалнинг бир томонида, M_0 — иккинчи типли қайтиш нуқтасидир (57-чизма).

Шундай қилиб, 1-ва 2-ҳолларда M_0 нуқта оддий, 3-ва 4-ҳолларда махсус нуқтадир. Параметрик $r = r(t)$ тенглама билан берилган чизиқнинг ($r(t)$ га нисбатан қилинган фаразларда) махсус нуқталари ана шу икки типдан иборат, холос. Бу нуқтаи назардан тугун нуқта оддий ҳисобланади, унда чизиқнинг иккита регуляр ёйи кесишади (биз M_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофини, яъни t нинг t_0 га яқин қийматларини қараган эдик).



57-чизма

Мисоллар. 1) $x = t^2$, $y = t^3$, $r = t^2 i + t^3 j$. $r' = 2ti + 3t^2 j$. Бунда $r'(0) = 0$. Энди $r''(t) = 2i + 6tj|_0 = 2i \neq 0$; $r'''(t) = 6j \neq 0$; r''' вектор r'' га коллинеар эмас; $k = 2$ — жуфт ва $l = 3$ — тоқ; (0,0) нуқта — биринчи типли қайтиш нуқтасидир. Чизиқ ярим кубик парабола (44-чизма).

2) $x = t^2$, $y = t^4 + t^5$ (ёки бошқача $(y - x^2)^2 = x^5$). $r = t^2 i + (t^4 + t^5) j$; бунда ҳам $t = 0$ нуқтани (координаталар бошини) текширамиз.

$$r''(0) = 2i \neq 0;$$

$r'''(0) = 0, r^{IV}(0) = 24j \neq 0$ ва r^{IV} вектор r'' га коллинеар эмас, k ва l — жуфт. (0, 0) нуқта — иккинчи типли қайтиш нуқтасидир. Бу чизиқни биз юқорида текширган эдик (45-чизма).

§ 23. Қутб координаталари

Кўп ҳолларда (физика, механикада) эгри чизиқ тенгламаларини қутб координаталарида[1] ёзиб чизиқнинг хоссаларини текшириш ўнғайдир.

Бу системада чизиқнинг тенгламаси одатда ушбу шаклларда берилади:

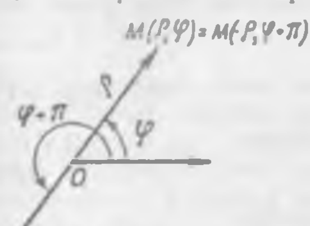
$$\rho = f(\varphi); \quad F(\rho, \varphi) = 0; \quad \rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Бу шакллардан биринчиси кўпроқ қўлланилади:

$$\rho = f(\varphi) = \rho(\varphi).$$

---

[1]) Қутб координаталари ҳақида аналитик геометрияда маълумот берилади. Биз уларни қисқача эслатиб ўтамиз. Текисликда қандайдир ориентация ўрнатилади, яъни бирор томонга (масалан, соат стрелкасига тескари томонга) қараб бурииш мусбат деб ҳисобланади. Демак, φ қутб-бурчак мусбат ва манфий бўлиши, шу сингари, ρ қутб-радиус ҳам мусбат ва манфий бўлиши мумкин. „Булар умумлашган қутб координаталари" дир (58-чизма). Бунда:



58-чизма.

$$-\infty < \varphi < \infty, \quad -\infty < \rho < \infty.$$

Битта M нуқтага: ҳам (ρ, φ), ҳам $(-\rho, \varphi + \pi)$ мос келади (2π дан иборат даврга эътибор қилинмаса). Қутб бурчагига мос келадиган икки қийматдан ушбу тенгсизликларни қаноатлантирадиганини танлаб олиш мумкин:

$$-\pi < \varphi \leq \pi.$$

Бу қиймат одатда φ нинг *бош қиймати* деб аталади. Демак, бош қиймат сифатида 180° дан кичик шундай (мусбат ёки манфий) бурчак олинадики, OX ўқини шу бурчакка бурганда, у OM билан устма-уст тушади. Бу ҳолда ρ га фақат мусбат қиймат берилади. Лекин биз умумлашган қутб координаталари билан иш кўрамиз.

Агар қутб ўқини OX ўқи сифатида ва қутбни координаталар боши деб қабул қилсак, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ бўлганидан, x ва y ни эркли ўзгарувчи φ орқали ифодалаш мумкин:

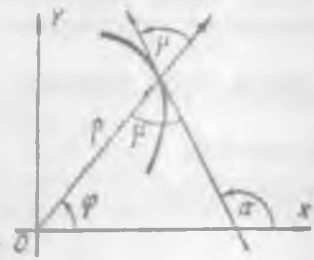
$$x(\varphi)=f(\varphi)\cos\varphi=\rho(\varphi)\cos\varphi,$$
$$y(\varphi)=f(\varphi)\sin\varphi=\rho(\varphi)\sin\varphi.$$

Қутб координаталарида берилган чизиқнинг бирор $\varphi=\varphi_0$ нуқтасида $\rho(\varphi)$ ва $\rho'(\varphi)$ бирданига нолга айланмаса, бу нуқта атрофи албатта регуляр ёйдан иборат бўлади.

Ҳақиқатан,

$$x'=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi,\quad y'=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi, \tag{1}$$

демак, $x'^2+y'^2=\rho^2+\rho'^2$ шу сабабли $x'^2+y'^2\neq0$ талаби $\rho^2+\rho'^2\neq0$ га келтирилади, бу эса ρ ва ρ' нинг бирданига нолга айланмаганлигини кўрсатади. Шундай қилиб, чизиғимизнинг махсус нуқталари бўлса, улар ушбу тенгликларни қаноатлантириши керак:



59-чизма.

$$\rho(\varphi)=0,\quad \rho'(\varphi)=0.$$

Бундан кейин биз чизиқни фақат оддий нуқталари атрофида текширамиз, яъни қутбни ўз ичига олмаган қисмларини қараймиз $\rho\neq0$ деб ҳисоблаймиз.

Уринманинг қутб-радиус билан ташкил қилган бурчагини μ билан белгилайлик ва унинг тангенсини ҳисоблаб чиқайлик (59-чизма).

$$\alpha=\varphi+\mu;\quad \mu=\alpha-\varphi;$$
$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}.$$

Лекин,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'}{x'},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Демак,

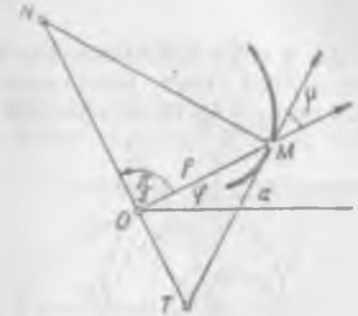
$$\operatorname{tg}\mu=\frac{xy'-x'y}{xx'+yy'}. \tag{2}$$

Бу ерда ҳосилаларнинг ҳаммаси φ бўйича олинган. (1) формулалардан фойдалансак, (2) тенглик соддалаштирилгандан кейин ушбу шаклни олади:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\rho}{\rho'},\quad \text{бу ерда}\quad \rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Энди қутбдан қутб-радиусга перпендикуляр ўтказиб, унинг M нуқтадаги уринма ва нормал билан кесишган нуқталарини

T ва N билан белгилайлик (60-чизма). OM ни $+\frac{\pi}{2}$ га буриш натижасида шу тўғри чизиқда ҳосил қилинган йўналишни мусбат деб қабул этайлик. 60-чизмада ON нур мусбат йўналишлидир. У ҳолда M нуқта билан боғланган OT, ON, MT, MN кесмаларни қараш мумкин. Улар, мос равишда, *уринма-ости, нормал-ости уринма узунлиги, нормаль узунлиги* дейилади. OT, ON кесмалар бир тўғри чизиқда ётганлиги сабабли, улар ишора билан олинади. Чизмада OT — манфий, ON — мусбатдир, MT ва MN кесмалар эса абсолют қиймат жиҳатдан қаралади.



60-чизма.

Уринма билан қутб-радиус орасидаги μ бурчак ўткир бўлганда, OT манфий (ON эса >0) ва μ ўтмас бўлганда, OT мусбат (ON эса <0). OT ва ON кесмаларининг ишоралари доимо тескари. MOT ва MON учбурчаклардан:

$$OT = -\rho \operatorname{tg} \mu, \quad ON = \rho \operatorname{ctg} \mu$$

ёки (3) га асосан:

$$OT = -\frac{\rho^2}{\rho'}, \qquad ON = \rho'. \tag{4}$$

Энди MT ва MN учун тегишли формулаларни чиқариш ҳам осон:

$$MT = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right|, \quad MN = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}.$$

Мисоллар. 1) *Архимед спирали.* Қутб атрофида текис айланаётган тўғри чизиқ бўйлаб илгарилама текис ҳаракат қилувчи нуқтанинг траекторияси *Архимед спирали* деб аталади. Айланаётган тўғри чизиқнинг дастлабки вазиятини қутб ўқи деб қабул қилиб, ўзгармас айланма тезликни ω, ўзгармас чизиқли тезликни v билан белгиласак, шартга кўра, $v = a\omega$ бўлади, бунда a — ўзгармас. Қутб-радиус φ бурчакка бурилса, M нуқта $OM = a\varphi$ масофани босади. Бироқ, $OM = \rho$, шу сабабли Архимед спиралининг қутб системасидаги тенгламаси (61-чизма):

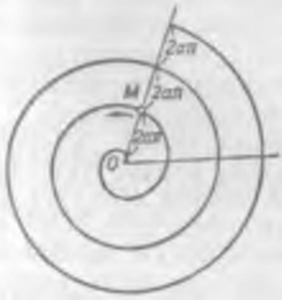
$$\rho = a\varphi \text{ ёки } \rho = \frac{v}{\omega}\varphi. \tag{5}$$

Агар $\varphi = \omega t$ (t — вақт) бўлса, $\rho = vt$ текис ҳаракат қонунини ифодалайди. Бунда a — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, унинг бошқа маъноси ҳам бордир: у OL нурнинг 2π га айланиб чиқиши вақтидаги M нуқтанинг босган йўлидир. Ҳақиқатан, (5) ни бундай ёзайлик, $\rho = \lambda\varphi$, у вақтда $a = \lambda\, 2\pi$, бу ердан $\lambda = \frac{a}{2\pi}$, демак,

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\,\varphi.$$

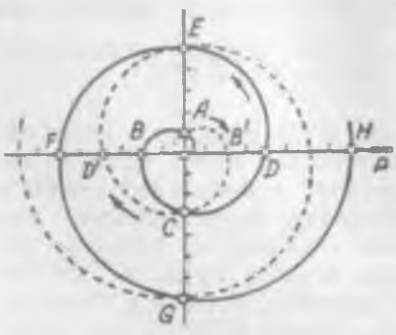
Энди $\varphi = 2\pi$ қийматда, $\rho = a$. Архимед спирали ҳар бир қутб-радиусини тенг кесмаларга бўлади, чунки φ бурчак 2π га ошганда, ρ қутб-радиус $2a\pi$ га ошади (62-чизма).

61-чизма.



62-чизма.

φ га манфий қийматлар бериб, Архимед спиралининг пунктир билан чизилган (биринчига симметрик) иккинчи қисмини ҳосил қиламиз (63-чизма). Одатда бу чизиқ *Архимеднинг „тескари" спирали* деб юритилади.



63-чизма.

(5) дан φ бўйича ҳосила олайлик: $\rho' = a$, демак, нормал-ости $ON = \rho' = a = \text{const}$. Бундан N нуқтанинг, яъни нормалнинг ва шу билан бирга уринманинг вазиятини аниқлашга имкон туғилади. Энди, $\rho = a\varphi$ ва $\rho' = a$ бўлгани учун, (5) дан:

$$\operatorname{tg} \mu = \varphi.$$

Тескари масалани қўйиб, ҳамма нуқталарида нормал-ости бир хил бўлган чизиқни изласак, Архимед спиралини ҳосил қиламиз, чунки $ON = \rho' = a$ ни φ бўйича интеграллаcак,

$$\rho = a\,\varphi$$

ҳосил бўлади.

2) Уринма-ости ўзгармас чизиқ топилсин. $OT = a = \text{const}$. (4) формулага кўра,

$$-\rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho} = a \text{ ёки } \frac{d\varphi}{a} = -\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Буни интеграллаймиз:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi}{a} + c \text{ ёки } c = 0 \text{ қийматда } \rho = \frac{a}{\varphi}.$$

Бу чизиқ *гиперболик спираль* дейилади (64-чизма).

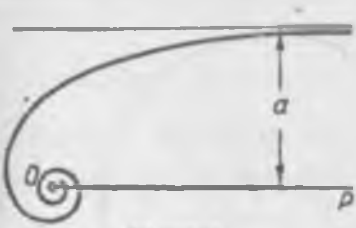
3) Қутбдан чиққан ҳамма нурлар билан бир хил бурчак ташкил қилган чизиқ топилсин: $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

(3) формуладан фойдаланамиз:

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \operatorname{tg} \mu_0 \text{ ёки } \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{ctg} \mu_0 d\varphi,$$

бундан

$$\ln \rho = \varphi \operatorname{ctg} \mu_0 + c \text{ ёки } \rho = \rho_0 e^{\varphi \operatorname{ctg} \mu_0},$$

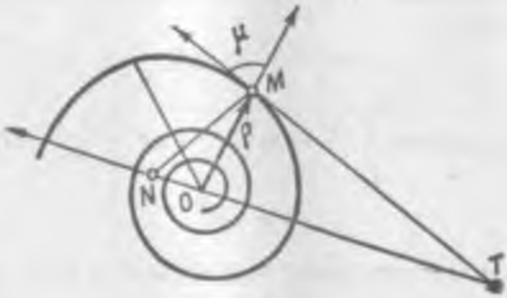


64-чизма.

бу ерда $\rho_0 = e^c$. Соддароқ шаклда бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\rho = e^{a\varphi}. \tag{6}$$

Бу чизиқ *логарифмик спираль* дейилади (65-чизма). Бу чизиқ ажойиб хоссага эга: унинг ҳамма қутб радиусларини m



65-чизма.

марта оширсак, яъни унга ўхшаш чизиқ қидирсак, яна ўша берилган чизиққа конгруэнт (айнан тенг) чизиқни — логарифмик спирални ҳосил қиламиз. (6) даги ρ ни λ га кўпайтирамиз:

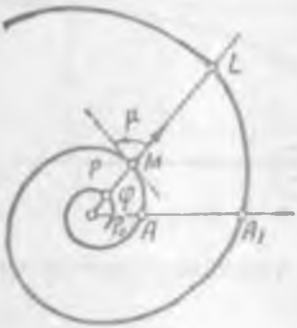
$$\rho_1 = \lambda\rho = \lambda e^{a\varphi},$$

аммо $\lambda = e^{\ln\lambda}$, демак, $\rho_1 = e^{a\left(\varphi + \frac{\ln\lambda}{a}\right)}$ ёки

$$\rho_1 = e^{a\varphi_1},\ \varphi_1 = \varphi + \frac{\ln\lambda}{a}.$$

Бу чизиқни аввалги спиралдан ҳосил қилиш учун, уни $\frac{\ln\lambda}{a}$ га тенг бурчакка буриш кифоя.

Логарифмик спиралга яна қайтайлик. Бу чизиқ ҳамма радиус-векторларни бир хил бурчак остида кесиб ўтадиган чизиқ сифатида таърифланган эди. Энди унинг бошқа хоссалари билан танишамиз.



66-чизма.

OL тўғри чизиқ текисликда O нуқта атрофида ўзгармас бурчак тезлиги ($\omega = \mathrm{const}$) билан айланади. M нуқта эса шу OL тўғри чизиқ бўйлаб шундай ҳаракат қиладики, унинг тезлиги OM масофага пропорционал бўлади. Бу ҳолда M нуқтанинг чизган чизиғи логарифмик спиралдир (66-чизма).

Параметр сифатида t вақтни олиб, уни чизиқнинг A нуқтасидан ўтган моментидан (яъни $\varphi = 0$, $\rho = \rho_0$ дан) бошлаб ҳисоблаймиз. Қўйилган шартларга биноан:

$$\varphi = \omega t,\ \frac{d\rho}{dt} = m\rho,$$

бу ерда $m = \mathrm{const}$. Бу тенгламаларнинг иккинчисини ушбу шаклда ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{\rho} = m\,dt$$

ва интеграллаймиз: $\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = m\int\limits_0^t dt$, ёки $\ln\frac{\rho}{\rho_0} = mt$,

бундан

$$\rho = \rho_0 e^{mt}. \qquad (8)$$

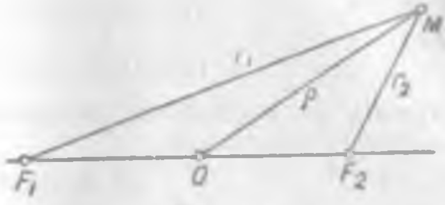
Ҳосил қилинган чизиқнинг тенгламасини қутб системада ёзиш учун (7) ва (8) дан t ни йўқотиш керак: $t = \frac{\varphi}{\omega}$,

$$\rho = \rho_0 e^{m\frac{\varphi}{\omega}} = \rho_0 e^{\frac{m}{\omega}\varphi},$$

бироқ $\frac{m}{\omega} = a$ нисбат ўзгармасдир, шу сабабли,

$$\rho = \rho_0 e^{a\varphi}.$$

Демак, айтилган хоссага эга чизиқ, ҳақиқатан ҳам логарифмик спираль экан. $a=0$ ($m=0$) қийматда $\rho=\rho_0$ айлана ҳосил қилинади. $a>0$ да φ ўсиши билан M нуқта O нуқтадан узоқлашади; φ камайиши билан $\rho\to 0$. Логарифмик спиралнинг шакли a коэффициентга боғлиқ: a қанчалик катта булса, ўрамлар орасидаги масофа шунча катта бўлади.



67-чизма

Логарифмик спиралнинг Декарт системасидаги параметрик тенгламалари (параметр сифатида φ олинса):

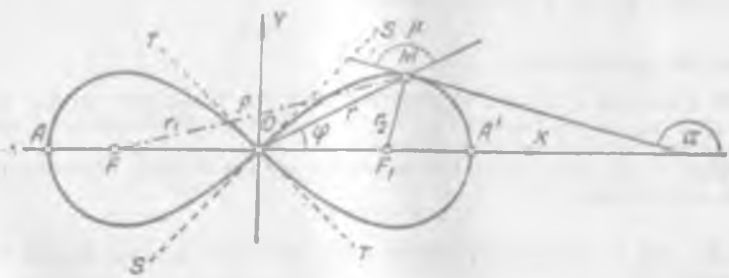
$$x=\rho_0 e^{a\varphi}\cos\varphi,$$

$$y=\rho_0 e^{a\varphi}\sin\varphi.$$

Иккала таъриф эквивалентдир — уларнинг иккаласи ҳам $\rho=\rho_0 e^{a\varphi}$ тенгламага келтиради. Ҳақиқатан, бу сўнгги тенглама ва (3)' га асосан:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\rho_0 e^{a\varphi}}{\rho_0 a e^{a\varphi}}=\frac{1}{a}=\text{const},\ \operatorname{ctg}\mu=a.$$

4) Берилган икки F_1 ва F_2 нуқтагача олинган масофаларининг кўпайтмаси ўзгармас ва $\frac{1}{4}(F_1F_2)^2$ га тенг нуқталарнинг геометрик ўрни *лемниската* дейилади (67 ва 68-чизмалар).



68-чизма.

$F_1F_2=2a$ бўлсин. 67-чизмадаги OMF_1 ва OMF_2 учбурчаклардан:

$$r_1^2=a^2+\rho^2+2a\rho\cos\varphi,\quad r_2^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi,$$

демак, таърифга кўра,

$$r_1^2r_2^2=(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\varphi=\frac{1}{4}(F_1F_2)^2=\frac{1}{4}\cdot 4a^2=a^2.$$

Бу тенгламани соддалаштирсак:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \tag{9}$$

Лемнискатанинг қутб системадаги тенгламаси мана шудир. Унинг Декарт системадаги тенгламаси эса:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

ёки

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Уринма ва нормалнинг хоссасини кўрамиз: (9) ни φ бўйича дифференциаллаймиз:

$$\rho\rho' = -2a^2 \sin^2 \varphi. \tag{10}$$

Энди (9) ва (10) тенгликларни ҳадма-ҳад бўлсак, у ҳолда

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{ctg} 2\varphi,$$

бундан эса, $\mu = 2\varphi + \frac{\pi}{2}$. Агар уринма ва нормалнинг OX ўқи билан ташкил қилинган бурчаклари α ва β бўлса,

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \varphi + \mu = 3\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Демак, $\beta = 3\varphi$. Шундай қилиб, лемнискатанинг ихтиёрий нуқтасидаги нормал OX ўқи билан шундай β бурчак ташкил этадики, у уриниш нуқтасининг қутб бурчагидан уч баравар каттадир (68-чизма). Бу хосса ихтиёрий M нуқтада уринма ва нормал ясаш усулини беради.

Машқ ва масалалар

35. Берилган чизиқнинг *конхоидаси* деб, бу чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг қутб-радиусини берилган l кесмага узайтириш ёки камайтириш натижасида ҳосил қилинган чизиққа айтамиз.

Чизиқ тенгламаси қутб системасида $\rho = f(\varphi)$ шаклда берилган бўлса, унинг конхоидаси

$$\rho = f(\varphi) \pm l \tag{A}$$

тенглама билан ифодаланиб, умуман айтганда, икки қисмдан иборат бўлади (69-чизма)

1) Тўғри чизиқ конхоидаси — *Никомед конхоидаси* дейилади (70-чизма). Берилган тўғри чизиқ (соддалик учун) OY ўқига (a масофада) параллел бўлсин. У ҳолда конхоиданинг қутб системасидаги тенгламаси:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l,$$

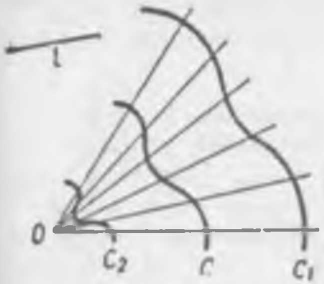
параметрик тенгламалари эса:

$$x = a \pm l\cos\varphi, \quad y = a \operatorname{tg}\varphi \pm l\sin\varphi,$$

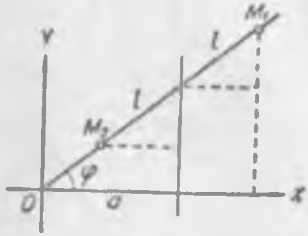
ниҳоят, Декарт системасидаги тенгламаси:

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$$

бўлади. Чизиқнинг шакли l ва a орасидаги муносабатга боғлиқ: бу ерда $l < a$, $l = a$, $l > a$ бўлиши мумкин. Учала ҳолда ҳам координата боши махсус нуқта бўлиб:

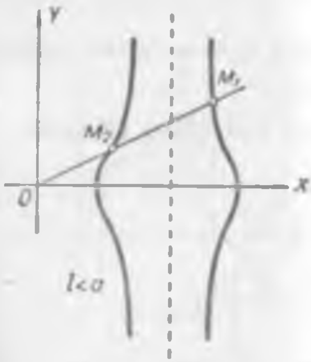


69-чизма.

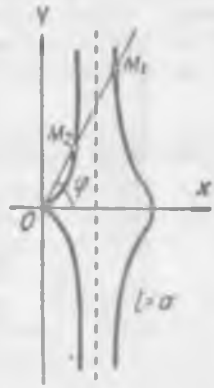


70-чизма.

а) $l < a$ бўлган ҳолда у — ажралган нуқта (71-чизма),
б) $l = a$ бўлган ҳолда, биринчи типли қайтиш нуқтаси (72-чизма),
в) $l > a$ бўлган ҳолда, тугун нуқтадир (73-чизма). Булар исботлансин.



71-чизма.



72-чизма.

2) Қутб сифатида айланадаги бирор нуқта қабул этилган бўлса, бу айлананинг конхондаси *Паскаль чиғаноғи (улиткаси)* дейилади (74-чизма). Чиғаноқнинг қутб системасидаги тенгламаси:

$$\rho = 2a \cos\varphi \pm l, \quad (OP = 2a \cos\varphi),$$

параметрик тенгламалари:

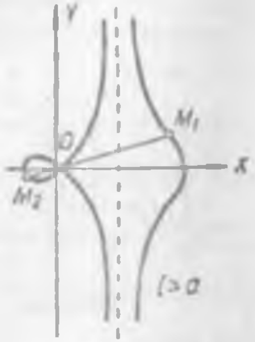
$$x = 2a\cos^2\varphi \pm l\cos\varphi,\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi \pm l\sin\varphi.$$

Декарт системадаги тенгламаси:

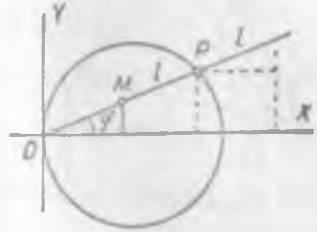
$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2).$$

Чиғаноқнинг шакли l билан $2a$ орасидаги муносабатга боғлиқ (75-чизма). Учала ҳолда ҳам координата боши махсус нуқта бўлиб,
а) $l < 2a$ бўлган ҳолда у — тугун нуқта,

б) $l = 2a$ бўлган ҳолда, биринчи типли қайтиш нуқтаси,
в) $l > 2a$ бўлган ҳолда, ажралган нуқтадир. Булар исботлансин.



73-чизма.



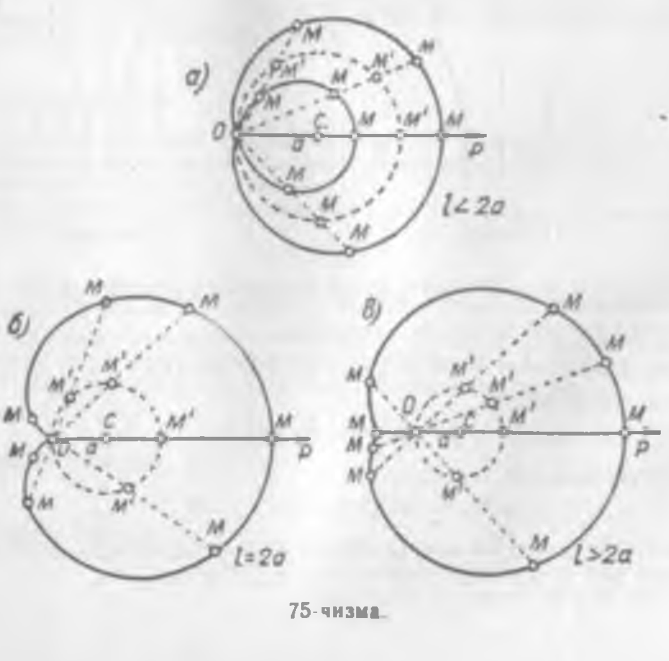
74-чизма.

Эслатма. Иккинчи ($l = 2a$) ҳолда чиғаноқ *кардиоида* деб аталади. Унинг тенгламаси $\rho = 2a(1 \pm \cos\varphi)$; чизиқ бу ҳолда бир бўлакдан иборат.

96. Қуйидаги қутб тенгламаси билан берилган чизиқ ясалсин:

$$\rho = a \sin 3\varphi.$$

Жавоб: Бу чизиқни уч япроқли гул деса бўлади (76-чизма).

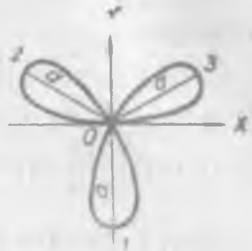


75-чизма.

37. $y = \sin x$ синусоида OX ўқи билан қандай бурчак ташкил этади? $y = \operatorname{tg} x$ га нисбатан ҳам шу саволга жавоб берилсин.

38. Иккита кардиоида берилган: $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ ва $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Буларнинг ўзаро тиклиги исботлансин.

39. $x^2 - y^2 = a^2$ ва $xy = b^2$ чизиқлар берилган. Буларнинг бир-бирига тиклиги исботлансин.

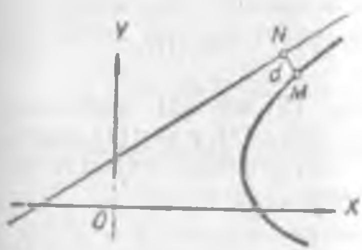


76-чизма.

§ 24. Текисликдаги чизиқнинг асимптоталари

Баъзи эгри чизиқларнинг чексизликка кетадиган шохчалари шундай бўладики, улар бирор тўғри чизиққа борган сари яқинлашади. Бундай эгри чизиқларни ясашда, айтилган тўғри чизиқларни билиш керак бўлади. Шу муносабат билан асимптотанинг таърифини берамиз.

Таъриф. *Эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$ устидаги нуқта шу чизиқ бўйлаб чексиз узоқлашганда, бу нуқта билан бирорта тўғри чизиқ орасидаги масофа нолга интилса, у ҳолда бу тўғри чизиқ эгри чизиқнинг* ***асимптотаси*** *дейилади.*



77-чизма.

Чизиқнинг асимптоталари икки кўринишда бўлиши мумкин:

1) ордината ўқига параллел бўлмаган асимптоталар,

2) ордината ўқига параллел асимптоталар.

Чизиқ параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин. Агар чизиқнинг ордината ўқига параллел бўлмаган асимптоталари мавжуд бўлса, бундай асимптоталарни қуйидаги йўл билан топиш мумкин. Чизиқ устида бирор $M(x(t),\ y(t))$ нуқтани оламиз. Тўғри чизиқнинг тенгламасини текширилаётган ҳолда $y = kx + l$ шаклда ёзиш мумкин (77-чизма).

M нуқтадан $y - kx - l = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топамиз. Бунинг учун $y - kx - l = 0$ тенгламани нормал $\frac{y - kx - l}{\sqrt{1 + k^2}} = 0$ шаклга келтириб, бу тенгламага M нуқтанинг координаталарини қўямиз, у ҳолда $MN = d = \frac{y(t) - kx(t) - l}{\sqrt{1 + k^2}}$ бўлади. Тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлиши учун, M нуқта чизиқ бўйлаб чексизликка интилганда, таърифга асосан, $MN = d$ масофа нолга интилиши зарур; $t = t_0$ қийматда

$x(t) = x(t_0) = \infty$, яъни $M(t_0) \to \infty$ бўлсин. У ҳолда $MN = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t) - kx(t) - l}{\sqrt{1+k^2}}$. Бу ерда $\sqrt{1+k^2}$ махраж ўзгармаганлиги сабабли:

$$\lim_{t \to t_0} [y(t) - kx(t) - l] = 0 \qquad (1)$$

бўлади. $x(t)$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$\lim\limits_{t \to t_0} \left\{ x(t) \left[\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{l}{x(t)} \right] \right\} = 0$; $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty$ бўлгани учун,

$$\lim_{t \to t_0} \left[\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{l}{x(t)} \right] = 0 \text{ ёки } \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} - k - \lim_{t \to t_0} \frac{l}{x(t)} = 0.$$

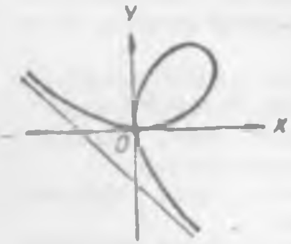
Бундан $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{l}{x(t)} = 0$. Демак, $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} - k = 0$ ёки

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \qquad (2)$$

келиб чиқади.

Агар k ни (2) дан топиб (1) га қўйсак, l нинг қиймати ҳосил бўлади, яъни

$$l = \lim_{t \to t_0} [y(t) - kx(t)]. \qquad (3)$$



78-чизма.

Шундай қилиб, (2) ва (3) қийматлар мавжуд бўлса, $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқнинг $y = kx + l$ кўринишдаги асимптотасига эга бўламиз.

Мисол. Декарт япроғи $x = \frac{3at}{t^3+1}$, $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$ нинг асимптотаси топилсин (78-чизма).

Ечиш. $t = -1$ қийматда $x = \infty$ ва $y = \infty$ бўлади. Демак, $t_0 = -1$.

Энди k ва l ни топамиз: $k = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} =$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{\frac{3at^2}{t^3+1}}{\frac{3at}{t^3+1}} = \lim_{t \to -1} t = -1, \quad k = -1. \quad l = \lim_{t \to -1} \left[\frac{3at^2 + 3at}{t^3+1} \right] =$$

$$= \lim_{t \to -1} \left[\frac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} \right] = \lim_{t \to -1} \frac{3at}{(t^2-t+1)} =$$

$$= -a; \quad l = -a.$$

Асимптотанинг тенгламаси $y = -x - a$ ёки $x + y + a = 0$ бўлади.

Энди ордината ўқига параллел асимптоталарни топамиз.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқнинг OY ўқига параллел асимптотаси мавжуд деб фараз қиламиз. Чизиқнинг M нуқтаси чексизликка интилганда, $y(t) = \infty$ бўлиб, $x(t)$ қандайдир бир ўзгармас a сонга интилади. Бунда a ни $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) = a$ дан топамиз. OY ўқига параллел асимптотанинг тенгламаси $x - a = 0$ бўлади.

Худди шунга ўхшаш, чизиқнинг OX ўқига параллел асимптотасини ҳосил қилиш учун, t нинг шундай қийматини топиш кераки, натижада $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y(t_0) = b$ бўлсин. Бу ҳолда изланган асимптотанинг тенгламаси $y = b$ бўлади.

Мисол. Ушбу $x = t$; $y = \frac{t^2}{t-1}$ чизиқнинг асимптоталари топилсин.

Е ч и ш. $t = 1$ қийматда $x = 1$ ва $y = \infty$ бўлади. Демак, $x - 1 = 0$ тўғри чизиқ берилган чизиқнинг OY ўқига параллел асимптотасидир.

Энди бу чизиқнинг координата ўқларига параллел бўлмаган асимптотасини топамиз. $t = \infty$ қийматда $x = \infty$ ва $y = \infty$. Демак, $t_0 = \infty$. Асимптотанинг бурчак коэффициентини топамиз

$$k = \lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)}; \quad k = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t-1} = 1, \ k = 1.$$

Энди (3) формуладан фойдаланиб, l ни топамиз:

$$\lim_{t \to \infty} [y(t) - kx(t)] = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t-1} = 1.$$

Демак, изланган асимптотанинг тенгламаси $y = x + 1$ ёки $x - y + 1 = 0$.

Асимптотага юқорида берилган таърифни биз биринчи таъриф деб юритамиз. Асимптотага бошқача таъриф ҳам бериш мумкин.

***Теорема.** Чизиқдаги нуқта шу чизиқ бўйлаб чексизликка интилганда уринманинг лимит вазияти мавжуд бўлса, лимитда ҳосил қилинган тўғри чизиқ (биринчи маънода) асимптотадир, яъни чизиқнинг чексиз узоқ нуқтасида тайин уринмаси мавжуд бўлса, у албатта асимптота вазифасини бажаради. Лекин бунинг тескариси ҳар вақт тўғри бўлавермайди — чизиқнинг асимптотаси мавжуд бўлиб, уринманинг лимит вазияти бўлмаслиги ҳам мумкин.*

Ҳақиқатан, $k = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ касрнинг сурати ва махражи $t \to t_0$ да чексизликка интилсин (асимптота координата ўқларига параллел бўлмаган ҳол билан чегараланамиз), у ҳолда бу касрга нисбатан Лопитал қоидасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$k = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)};$$

шунинг сингари

$$l = \lim_{t\to t_0} [y(t) - kx(t)] = \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{y(t)}{x(t)} - k}{\frac{1}{x(t)}} =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)}}{\frac{x'(t)}{x^2(t)}} = \lim_{t\to t_0} \left[y(t) - x(t)\frac{y'(t)}{x'(t)}\right].$$

k ва l нинг бу қийматлари ушбу уринма тенгламасидаги

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)}$$

бурчак коэффициенти ва озод ҳад ифодаси билан бир хилдир

Чизиқ тенгламаси $y = f(x)$ шаклда берилган бўлса

$$k = \lim_{x\to\infty} f'(x),\ l = \lim_{x\to\infty} [y - xf'(x)]$$

ни текширишга тўғри келади.

79-чизма.

Теореманинг иккинчи қисми, Лопитал қоидасининг тескари кучга эга эмаслигидан келиб чиқади, яъни асимптота гарчи мавжуд (яъни $k = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ мавжуд бўлсада, уринманинг лимит вазияти мавжуд бўлмаслиги (яъни $k = \lim_{t\to t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ бажарилмаслиги) мумкин. Буни қуйидаги мисол тасдиқлайди. Ушбу

$$y = \frac{\cos x^2}{x}$$

чизиқ (79-чизма) $x\to\infty$ да OX ўқидан иборат асимптотага эга. Бироқ, бу чизиқ уринмасининг бурчак коэффициенти $y' = -2\sin x^2 - \frac{\cos x^2}{x^2}$ эса $x\to\infty$ да ҳеч қандай лимитга интилмайди (чунки $\frac{\cos x^2}{x^2}\to 0$ бўлсада, $\sin x^2$ нинг лимити йўқ. у $x\to\infty$ да -1 билан $+1$ орасида тебраниб туради).

§ 25. Алгебраик чизиқнинг асимптоталари

Алгебраик чизиқнинг таърифини эслатиб ўтайлик: чизиқнинг Декарт системасида ёзилган тенгламасини $F(x, y)=0$ шаклига келтириш мумкин бўлиб, бунда $F(x, y)$ функция x ва y га нисбатан кўпҳадни ифодаласа, бундай чизиқ *алгебраик* чизиқ дейилади. Шундай қилиб, $F(x, y)=0$ тенглама одатда касрлардан ва радикаллардан озод қилинган деб, яъни унинг чап томони Ax^py^q кўринишдаги бирҳадларнинг йиғиндисига келтирилган деб ҳисобланади[1]).

Алгебраик чизиқ ихтиёрий тўғри чизиқ билан чексиз кўп нуқтада кесиша олмайди[2]), шу сабабли юқорида келтирилган мисолдаги сингари ҳоллар бу ерда учрамайди; бу муҳокамалар алгебраик чизиқ учун асимптотани уринманинг лимит вазияти сифатида таърифлаш билан чегараланишга имкон беради. Бунинг учун чизиқнинг ҳар бир уринмасини чизиқдаги устма-уст тушган (ақалли) иккита нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ деб қараш лозим. Демак, уриниш нуқтаси чексизликка интилганда уринманинг лимит вазияти сифатида қаралган асимптота, чизиқнинг устма-уст тушган (ақалли) иккита чексиз узоқ нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқдир. Бу ерда ҳам асимптота излашнинг икки ҳолини кўриб ўтайлик.

1) *OY ўқига параллел бўлмаган асимптоталар.* Уларнинг тенгламалари:

$$y=kx+b$$

кўринишда бўлиб, бунда k ва b коэффициентларни аниқлаш лозим.

Чизиғимизниг тенгламасидаги $F(x, y)$ кўпҳад x ва y га нисбатан n-даражали бўлса, тенгламани бундай ёза оламиз:

$$F(x, y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_ny^n+b_0x^{n-1}+ \\ +b_1x^{n-2}y+b_2x^{n-3}y^2+\ldots+b_{n-1}y^{n-1}+\ldots=0^{3}). \quad (1)$$

---

[1]) Н. И. Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, 3-нашри, § 85.

[2]) Агар бу тўғри чизиқ эгри чизиқ таркибига кирмаса, Мусхелишвилиг § 87, 180-бет.

[3]) n-тартибли алгебраик чизиқ тенгламасидаги ҳадлар сонини ҳисоблаш қийин эмас:

нолинчи даражали (озод) ҳад 1 та,
биринчи даражали ҳадлар 2 та,
иккинчи даражали ҳадлар 3 та,
учинчи даражали ҳадлар 4 та,
. . . .
$(n-1)$-даражали ҳадлар n та,
n-даражали ҳадлар $(n+1)$ та,

Ҳаммаси бўлиб, $1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Энди (1) тенгламадаги y ўрнига $kx+b$ ни қўйсак, x га нисбатан n-даражали ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$A_0(k)x^n + A_1(k,\ b)x^{n-1} + A_2(k,\ b)x^{n-2} + \ldots + A_n = 0. \quad (2)$$

Бу тенглама иккита чексиз катта илдизга эга бўлиши керак, чунки шартга кўра, асимптота уринманинг лимити бўлиб, уриниш нуқтаси чексиз узоқдир. Олий алгебрадан маълумки, бундай ҳолда (2) тенгламанинг олдинги иккита коэффициенти нолга тенг бўлади:

$$A_0(k) = 0 \text{ ва } A_1(k,\ b) = 0. \quad (3)$$

Демак, асимптота мавжуд бўлса, унинг k ва b параметрлари (3) тенгламалардан аниқланади. Уларнинг биринчисига фақат k кирганидан, биз k ни (3) нинг биринчи тенгламасидан аниқлаймиз. k нинг топилган қийматларини (3) нинг иккинчи тенгламасига қўйганда, b параметр аниқланади. Айрим (мураккаброқ) ҳолларда, k нинг $A_1(k) = 0$ тенгламадан топилган қиймати $A_1(k,\ b) = 0$ тенгламани айниятга айлантириб, бу тенгламадан b ни топиш имконияти йўқолади. Булар устида биз тўхтаб ўтирмаймиз.

Мисол тариқасида юқорида қаралган Декарт япроғини олайлик: $x^3+y^3-3axy=0$; бу тенгламани $y=kx+b$ билан бирга ечганда, x га нисбатан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$(1+k^3)x^3 + 3(k^2b-ak)x^2 + \ldots = 0.$$

Бундан

$$1+k^3=0,\ k^2b-ka=0.$$

Бу тенгламаларнинг бирдан-бир ҳақиқий илдизлари: $k=-1$, $b=-a$. Тегишли асимптота: $y=-x-a$ ёки $x+y+a=0$. Шунинг ўзини юқорида бошқа усул билан ҳам ҳосил қилган эдик (72-бет).

(2) *OY ўқига параллел асимптоталар.* Эгри чизиқнинг $F(x,\ y)=0$ тенгламасини $x=a$ тенглама билан бирга ечиб, y га нисбатан ушбу тенгламага келамиз:

$$B_0y^n + B_1(a)y^{n-1} + B_2(a)y^{n-2} + \ldots + B_n = 0. \quad (4)$$

Бироқ, эркин ҳадлар (коэффициентлар) сони бу сондан битта ҳад кам бўлиб, $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ га тенг, шунинг учун n-тартибли алгебраик чизиқ, умуман айтганда, $\frac{n(n+3)}{2}$ та нуқта билан аниқланади. Масалан, 2-тартибли чизиқ, умуман айтганда, 5 та нуқта билан аниқланади.

$x=a$ тўгри чизиқ асимптота вазифасини бажариши учун, B_0 ва B_1 коэффициентлар нолга айланиши керак. Бироқ B_0 коэффициент a га боғлиқ эмас, чунки B_0 сон y^n олдидаги коэффициентни ифодалайди. Бундан OY ўқига параллел асимптотанинг мавжудлиги учун зарурий шарт келиб чиқади: чизиқнинг тенгламасида y^n олдидаги коэффициент нолга тенг бўлиши лозим. Бу шарт бажарилса, a нинг ҳамма қийматларини $B_1(a)=0$ тенгламадан аниқлаймиз[1].

Мисол. $(a-x)\,y^2+x^3-ax=0$. Бу учинчи даражали алгебраик тенглама бўлиб, y^3 олдидаги коэффициент нолга тенг. y^2 олдидаги коэффициентни нолга тенглаштириб, ордината ўқига параллел асимптотанинг $x-a=0$ тенгламасини топамиз.

Шунинг сингари $(x^2-1)\,y^3+xy^2-(x^2-1)\,y+1=0$ чизиқ ҳам OY ўқига параллел иккита асимптотага эга: $x-1=0$ ва $x+1=0$, чунки $+1$ ва -1 сонлар $x^2-1=0$ тенгламанинг содда илдизларидир.

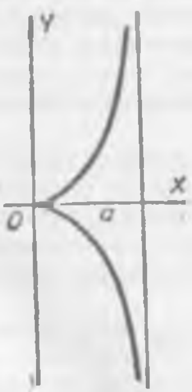
Машқлар

40. Чизиқларнинг асимптоталари топилсин:

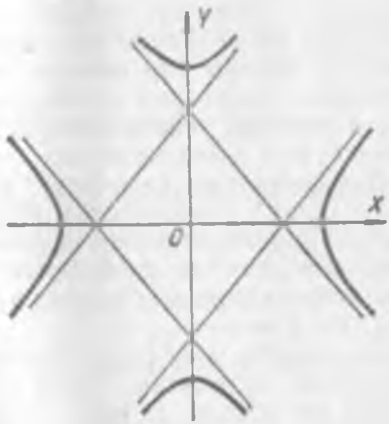
1) $x^3-y^3+x^2+y^2=0$. *Жавоб*: $y=x+\frac{2}{3}$.

2) $y=x+\frac{1}{x}$. *Жавоб*: $x=0$; $y=x$.

3) $y=\frac{x}{x-1}$. *Жавоб*: $x=1$, $y=1$.



80-чизма.



81-чизма.

[1] Бироқ $B_1(a)=0$ тенгламанинг илдизлари содда (каррали эмас) бўлишлари керак, чунки акс ҳолда, асимптота мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

4) $x(x^2+y^2)=ay^2$ *Жавоб*: $x-a=0$ (80-чизма).

5) $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$. *Жавоб*: $x \pm y \pm \frac{a}{\sqrt{2}}=0$.

Кўрсатма: бу тенгламадан қутб системасига ўтиш осонгай:

$$\rho=\pm\frac{a}{\cos 2\varphi}, \text{ демак: } x=\pm a\frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi},\ y=\pm a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Бу тенгламаларга асосланиб, чизиқнинг тўртта асимптотаси топилади: $y \pm x \pm \frac{a}{\sqrt{2}}=0$ (81-чизма).

6) $y=x+e^x$.

Жавоб: $x\to+\infty$ да асимптота йўқ: $x\to-\infty$ да $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=1$ ва $b=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; асимптота $y-x=0$.

§ 26. Чизиқларни ясаш

Элементар геометриядан тўғри чизиқ, айлана ва бошқа содда чизиқлар (парабола, синусоида, косинусоида) ни „нуқталар бўйича" ясаш усуллари маълумдир. Аналитик геометрияда эса асосан учта чизиқ: эллипс, гипербола, параболани ясаш усуллари ўрганилади. Юқорида айтилганидек, дифференциал геометрия ҳар қандай чизиқларнинг (локал) хоссаларини уларнинг тенгламаларига суяниб текширади Бу усулларнинг ўнғайсиз томони ҳам бор: чизиқнинг тенгламаси одатда бирор координата системасида ёзилади, бундай системани танлаб олиш эса умуман масаланинг геометрик характерига боғлиқ эмас. Шунга қарамай, маълум бир система танлаб олингандан кейин, дифференциал геометрия воситалари ёрдами билан, анализ курсидаги сингари, чизиқларни ясаш (формасини билиш) имконияти вужудга келтирилади.

Дифференциал ҳисобнинг методлари чизиққа қарашли бир неча „таянч" (характерли) нуқталарни танлаб олишга имкон беради. Бундай нуқталар сифатида чизиқнинг бурилиш нуқталари, ботиқлик ва қавариқлик нуқталари, уринмалари горизонтал ёки вертикал бўлган нуқталар, махсус нуқталари олинади, ва ҳ.к.

Тенгламаси $y=f(x)$ кўринишда берилган чизиқларни ясаш методлари математик анализ курсида тўлиқ текширилади (Фихтенгольц, I том, 137—138-пунктларга қаранг). Биз бу ерда тенгламаси $F(x, y)=0$ кўринишдаги чизиқларни ясаш методлари тўғрисида кўрсатма берамиз. Бундай чизиқларни ясаш учун умумий қоида кўрсата олмаймиз, чунки $F(x, y)=0$ тенгламанинг ўзи ҳам мураккаб булиши ва бунинг натижасида анча оғир ҳисоблашлар юз бериши мумкин.

Чизиқнинг баъзи хоссаларини текшириш ва унинг энг керакли таянч нуқталарини топишни қуйидаги йўл билан бажара оламиз: агар $F(x, y) = 0$ ошкормас функцияни $y = f(x)$ ёки $x = \varphi(y)$ шаклга келтириш мумкин бўлса, уни одатдаги математик анализ курсида кўрсатилган йўл бўйича ясаш керак.

$F(x, y) = 0$ тенгламани $y = f(x)$ ёки $x = \psi(y)$ шаклга келтириш мумкин бўлмаган ҳолда эса, уни қуйидаги йўл билан ясаш мумкин:

1. *Чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз.* Маълумки, чизиқнинг OX ўқи билан кесишган нуқталарининг ординаталари нолга тенг. Шу сабабли бундай нуқталарнинг координаталарини топиш учун $F(x, 0) = 0$ тенгламани ечамиз. Агар бу тенгламанинг илдизлари $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ бўлса, бу ҳолда чизиқ билан OX ўқининг кесишган нуқталари $M_0(x_0, 0)$, $M_1(x_1, 0)$, $\ldots$, $M_k(x_k, 0)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $F(0, y) = 0$ тенгламани ечиб, чизиқ билан OY ўқининг кесишган нуқталарини топамиз.

2. *Чизиқнинг координата ўқларига нисбатан симметриклигини тайинлаймиз.* Агар $F(x, y)$ функция y га нисбатан жуфт функция, яъни $F[x, y] = F[x, (-y)]$ бўлса, у ҳолда чизиқ OX ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади. Худди шунга ўхшаш, функция x га нисбатан жуфт, яъни $F[x, y] = F[(-x), y]$ бўлса, у ҳолда чизиқ OY ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Масалан, $F(x, y) = 4x^2 - y + 6 = 0$ чизиқ OY ўқига нисбатан симметрикдир.

3. *Маълумки, чизиқнинг бирор M нуқтасидаги уринмаси OX ўқига параллел бўлса, бу нуқтада $y(x)$ функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлади:* $\frac{dy}{dx} = 0$, лекин $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ га тенг. $F'_x = 0$ ва $F'_y \neq 0$ шартда $\frac{dy}{dx} = 0$. Шу сабабли чизиқнинг уринмаси OX ўқига параллел бўлган нуқталарини топиш учун $F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$ системани ечиб, унинг $F'_y \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи илдизларни топиш керак. Худди шунга ўхшаш $\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x}$ ни назарда тутиб, чизиқнинг уринмаси OY ўқига параллел бўлган нуқталарни ҳосил қилиш учун, $F(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$ системани ечамиз ва унинг $F'_x \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи илдизларини топамиз.

4. *Чизиқнинг махсус нуқталарини топиш учун, юқорида* (49-бет) *кўрсатилганидек,* $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ *системани*

ечиб, унинг $F(x, y) = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи илдизларини топамиз ва махсус нуқталарнинг кўринишларини аниқлаймиз.

5. *Чизиқнинг эгилиш нуқтасини топамиз.* Математик анализдан маълумки, эгилиш нуқтасида чизиқ уринманинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади. Эгилиш нуқтасида $y'' = 0$ бўлиб, лекин $y''' \neq 0$ бўлади. Шу сабабли чизиқнинг эгилиш нуқталарини топиш учун, $F(x, y) = 0$, $y'' = 0$ системаин ечиб, топилган илдизларни y''' га қўйиш керак. Агар бу вақтда $y''' \neq 0$ шарт бажарилса, у ҳолда топилган илдизлар чизиқнинг эгилиш нуқталарининг координаталарини ифодалайди. $F(x, y) = 0$ дан y'' ни топамиз:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0; y' = \frac{-F'_x}{F'_y}; y'' = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot y')F_y - (F''_{yx} + F''_{yy} \cdot y') \cdot F'_x}{F'^2_y}$$

Бунда y' ўрнига $-\frac{F'_x}{F'_y}$ ни қўйиб соддалаштирамиз:

$$y'' = \frac{-F''_{xx} \cdot F'^2_y + 2F''_{xy} \cdot F'_y F'_x - F''_{yy} \cdot F'^2_x}{F'^3_y} = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{F'^3_y}.$$

Демак, чизиқнинг эгилиш нуқталарини топиш учун

$$F(x, y) = 0, \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0$$ системани ечиш керак.

Агар $F(x, y) = 0$, $x'' = 0$ системанинг илдизларида $x''' \neq 0$ бўлса, бу илдизлар ҳам эгилиш нуқталарининг координаталарини ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам $x'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{F'^3_x}$ бўлгани учун, яна

$$F(x, y) = 0, \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

система келиб чиқади. Бу системанинг x_0, y_0 ечимни F'_x ва F'_y га қўйганда, бу ҳосилаларнинг бирданига нолга тенг бўлмаслигининг зарурлиги равшан, чунки $F'_x = 0$ ва $F'_y = 0$ шартлар билан аниқланган нуқталар чизиқнинг махсус нуқталари бўлади.

6. *Чизиқнинг ботиқлиги ва қавариқлиги ушбу*

$$y'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{F'^2_y} = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_y}{F'^3_y}$$

ифоданинг ишорасига боғлиқ: $y'' > 0$, яъни

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_y > 0 \qquad (A)$$

шарт бажарилганда, чизиқнинг ботиқлиги юқорига (ординатанинг мусбат томонига) йўналган бўлиб (Фихтенгольц, I том, 372-бет),

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_x \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_y < 0$$

шарт бажарилганда эса, чизиқнинг ботиқлиги пастга (ординатанинг манфий томонига) йўналган бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_x > 0 \qquad (B)$$

бўлса, чизиқнинг ботиқлиги ўнг томонга, акс ҳолда чап томонга йўналган бўлади.

Демак, чизиқнинг ботиқлиги қайси томонга йўналганлигини билиш учун (A) тенгсизликни $F(x, y) = 0$ билан бирга ва (B) тенгсизликни $F(x, y) = 0$ билан бирга ечиш керак. Ёки чизиқнинг ҳар икки таянч нуқтаси орасида ётувчи бирор ихтиёрий нуқтасининг координаталарини топиб, уларни

$$y'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_y}{F'^3_y} \quad \text{ва} \quad x'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot F'_x}{F'^3_x}$$

ифодаларга қўйиб, бу ҳосилаларнинг ишорасини текшириш лозим.

7. *Чизиқнинг асимптоталарини § 24 да кўрсатилган йўл билан топамиз.*

8. *Мумкин бўлган ҳолда чизиқнинг яна бир нечта ёрдамчи нуқталарини топиш керак.* Бунинг учун $F(x, y)=0$ дан x га ихтиёрий қийматлар бериб, y нинг мос қийматларини аниқлаймиз.

9. *$F(x, y)$ функциянинг аниқлик соҳасини билиш керак.*

Мисол. Тенгламаси $x^4-x^2y+y^3=0$ бўлган чизиқни ясаймиз.

1. Чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз: $y=0$ қийматда $x^4=0$ ёки $x=0$ бўлади. Демак, чизиқнинг OX ўқи билан кесишган нуқтаси $M_0(0, 0)$. Энди $x=0$ қийматда ҳам $y=0$ бўлади. Бу ҳолда ҳам чизиқ OY ўқи билан $M_0(0, 0)$ нуқтада кесишади.

2. Чизиқнинг координата ўқларига нисбатан симметриклигини текширамиз: $F(x, y)=x^4-xy^2+y^3$; $F(-x, y)=x^4-x^2y+y^3=F(x, y)$, демак, чизиқ OY ўқига нисбатан симметрикдир. Лекин $F(x-,y)=x^4+x^2\cdot y-y^3\neq F(x, y)$, бу эса чизиқнинг OX ўқига нисбатан симметрик эмаслигини кўрсатади.

3. Чизиқнинг уринмалари OX ўқига параллел бўлган нуқталарини топамиз. Бунинг учун $F'_x(x, y)=0$, $F(x, y)=0$ системани ечиб, бундай нуқталар сифатида $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ва $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ни ҳосил қиламиз.

$F(x, y)=0$, $F'_y(x, y)=0$ системани ечиш билан эса уринмалар OY ўқига параллел бўлган $M_3\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2}{9}\right)$ ва $M_4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2}{9}\right)$ нуқталарни топамиз.

4. Энди чизиқнинг махсус нуқталарини излайлик. Бунинг учун $F'_x=0$, $F'_y=0$ системани ечамиз. Махсус нуқталар $(0, 0)$ ва $\left(\frac{\pm\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\right)$ бўлиши мумкин. Бу қийматларни $F(x, y)=0$ тенгламага қўйиб $M_0(0, 0)$ нуқтанинг координаталари тенгламани қаноатлантирганини кўрамиз, лекин $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\right)$ ва $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\right)$ нуқталарнинг координаталари эса қаноатлантирмайди. Шунинг учун, фақат $M_0(0, 0)$ нуқта чизиқнинг махсус нуқтаси бўлади. Махсус нуқтани текшириш

учун функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$F''_{xx} = 12x^2 - 2y = 0,\quad F''_{xy} = -2x = 0,\quad F''_{yy} = 6y = 0.$$

$$F'''_{xxx} = 24x = 0,\quad F'''_{xxy} = -2,\quad F'''_{xyy} = 0,\quad F'''_{yyy} = 6.$$

$$F'_x + F'_y\cdot y' = 0.\quad F''_{xx} + 2F''_{xy}\cdot y' + F''_{yy}\cdot y'^2 + F'_y\cdot y'' = 0 \quad (A)$$

$M_0(0, 0)$ нуқтада $F'_y = F''_{xx} = F''_{xy} = F''_{yy} = 0$ бўлганидан (A) тенглама айниятдир. Шу сабабли, (A) дан олинган ҳосила яна нолга тенг бўлади: $F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}\cdot y' + 3F'''_{xyy}\cdot y'^2 + 2F''_{xx}\cdot y'' + F'''_{yyy}\cdot y'^3 + 2F''_{xy}\cdot y'' + 2F''_{yy}\cdot y'\cdot y'' + F''_{xy}\cdot y'' + F''_{yy}\cdot y'\cdot y'' + F'_y\cdot y''' = 0.$ Бунга тегишли ҳосилалар қийматларини қўйганда $-2\cdot 3y' + 6y'^3 = 0$ ёки $y'^3 - y' = 0$; $y'(y'^2 - 1) = 0$; $y' = 0$; $y'_{2,3} = \pm 1$ келиб чиқади. Демак, $M_0(0, 0)$ махсус нуқтадан чизиқнинг учта шохчаси ўтади. $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = 1$; $\frac{dy}{dx} = -1$ ларни интеграллаганда, M_0 махсус нуқтадаги уринмаларнинг $y = 0$; $y = x$; $y = -x$ тенгламалари ҳосил бўлади.

Энди чизиқнинг эгилиш нуқталарини топиш учун

$$F(x,y)=0,\quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ системани ечамиз.}$$

Бу системани:

$$x^4 - x^2y + y^3 = 0,\quad \begin{vmatrix} 12x^2 - 24; & -2x; & 4x^3 - 2xy \\ -2x; & 6y; & -x^2 + 3y^2 \\ 4x^3 - 2xy; & -x^2 + 3y^2; & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки

$$\begin{cases} x^4 - 2xy + y^3 = 0, \\ 4x^6(1 - 2yx^2) + 6x^4y(15 + 4y) + 12x^2y^3(1 - 9y) - 18y^6 = 0 \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, система фақат $x = 0$, $y = 0$ ҳақиқий илдизга эга эканини кўрамиз. Аммо $M_0(0, 0)$ нуқтада $F'_x = F'_y = 0$. Шунинг учун бу нуқта чизиқнинг эгилиш нуқтаси бўлмайди; демак, чизиқнинг эгилиш нуқталари йўқ.

6. Чизиқнинг асимптоталарини топамиз. Координата ўқларига параллел асимптоталарнинг йўқлиги очиқдан-очиқ кўриниб турибди, чунки $x \to \infty$ да y ҳам чексизликка интилади ва, аксинча, $y \to \infty$ да $x \to \infty$ бўлади. Координата ўқларига параллел бўлмаган асимптоталарни излаймиз. Бу ерда x^4 олдидаги $A_0(k)$ коэффициентнинг k га боғлиқ бўлмас-

лиги, $y = kx + l$ шаклдаги асимптоталарнинг йўқлигини билдиради.

7. $F(x, y) = x^4 - x^2y + y^3$ функциянинг аниқлик соҳасини тайинлаймиз: x абсцисса $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгарганда функция ўз маъносини сақлайди. Шу сабабли, функциянинг „x“ га нисбатан аниқлик соҳаси $(-\infty; +\infty)$ бўлади.

8. Энди чизиқнинг ботиқлиги ва қавариқлигини текширамиз. Бунинг учун $F(x, y) = 0$ билан тегишли тенгсизликларни бирга ечамиз, чунки бу мисолда иккинчи метод билан иш кўриш енгилроқ. Топилган таянч нуқталарни назарга олиб, $(-\infty; +\infty)$ ни бир нечта интервалларга ажратамиз:

$$1)\ \left(-\infty;\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right);\ 2)\ \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ 0\right);\ 3)\ \left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{9}\right);$$

$$4)\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{9},\ \infty\right).$$

Ҳар бир интервал ичида ихтиёрий нуқтани олиб, уни $F(x, y) = x^4 - x^2y + y^3 = 0$ тенгламага қўямиз ва унинг координаталарини топамиз. Топилган қийматларни:

$$y'' = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{F'^3_y} \qquad (A)$$

детерминантга қўямиз.

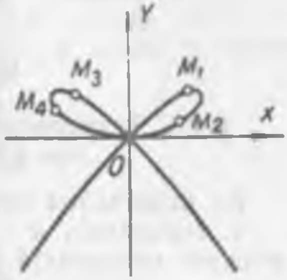
Масалан, $\left(-\infty,\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ интервалда $x = -\sqrt{2}$ ни олсак, $y = -2$ ҳосил бўлади. Бу қийматларни (A) га қўямиз:

$F'_x(-\sqrt{2}, -2) = -12\sqrt{2}$; $F''_{xx}(-\sqrt{2}; -2) = 28$; $F''_{xy}(-\sqrt{2}; -2) = -2\sqrt{2}$; $F'_y(-\sqrt{2}; -2) = 10$; $F''_{yy}(-\sqrt{2}; -2) = -12$.

Демак, $\left(-\infty;\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ интервалда чизиқнинг ботиқлиги пастга йўналган. Чизиқ OY ўқига нисбатан симметрик бўлгани учун, $\left(2\frac{\sqrt{3}}{9};\ \infty\right)$ интервалда ҳам чизиқнинг ботиқлиги пастга йўналган бўлади.

Энди $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9};\ 0\right)$ интервални текширамиз: x ни, масалан, $-0{,}333$ га тенг қилиб олганда ҳосил бўладиган учинчи даражали тенгламани Кардан формуласи бўйича ечсак, y учун учта ҳақиқий қиймат келиб чиқади. Улар, тахминан, $y_1 \approx 1{,}93$; $y_2 \approx 2{,}361$; $y_3 \approx 0{,}438$. Демак, чизиқнинг учта нуқтасини ҳосил қиламиз: M_5 $(-0{,}333, \ -2{,}361)$; M_6 $(-333, \ -0{,}438)$; $M_7(-0{,}333, -1{,}93)$. Бу қийматларни (А) га қўямиз. M_5 учун $y'' < 0$. Бу тенгсизлик M_5 нуқтадан ўтадиган чизиқ шохчасининг $\left(-2\frac{\sqrt{3}}{9}; 0\right)$ интервалда ботиқлиги пастга йўналганлигини кўрсатади. M_6 нуқта учун $y'' > 0$, демак, M_6 нуқтадан ўтадиган шохчаниг ботиқлиги $\left(-2\frac{\sqrt{3}}{9}; 0\right)$ интервалда юқорига йўналган. M_7 да эса $y'' < 0$, яъни чизиқнинг ботиқлиги пастга йўналган. $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ интервалда ҳам худди шу натижага эгамиз.

Ниҳоят, топилган таянч нуқталарни ясаб, чизиқнинг шаклини ҳосил қиламиз (82-чизма).



82-чизма.

Машқлар

41. Қуйидаги чизиқлар ясалсин ва уларнинг махсус нуқталари топилсин:

1) $y^2 = x^2(2-x)$;
2) $4y^2 = 4x^2y - x^5$;
3) $x^3 - 27(x-y)^2 = 0$;
4) $x^3 - y^2 + 1 = 0$;
5) $x^4 - y^4 - x^2 - y^2 = 0$.

42. Ушбу чизиқлар ясалсин ва уларнинг махсус нуқталари топилсин:

1) $r\ \{t^2, 15t^4 + 8t^5\}$;

2) $r\ \left\{\frac{t^2}{t-2}, \frac{t}{t^2-1}\right\}$.

Бешинчи боб

ЧИЗИҚЛАР ЎРАМАСИ

§ 27. Текисликдаги чизиқларнинг бир параметрли ва кўп параметрли оиласи

Бу параграфни баъзи мисоллардан бошлаймиз.

1. Маълумки, $x^2+y^2=R^2$ тенглама радиуси R га тенг ва маркази координата бошида ётган айланани ифодалайди. R га ҳар хил қийматлар берсак, ҳар хил айланалар ҳосил бўлади. 83-чизмада радиуслари 1, 2, 3, 4 га тенг айланаларнинг графиклари берилган. R ўзгариши билан айлананинг катталиги ҳам ўзгаради. Шунинг учун $x^2+y^2-R^2=0$ — марказлари координата бошида ётган айланалар „оиласини“ ташкил қилади деб айтамиз. Худди шунга ўхшаш, $y^2=2x+C$ тенглама параболалар оиласини ифода қилади. C га берилган қийматларга қараб, шу оилага қарашли ҳар хил параболалар ҳосил бўлади.

83-чизма.

Умуман, чизиқнинг тенгламасида битта C параметр иштирок этса, бу тенглама *бир параметрли чизиқлар оиласининг тенгламаси* дейилади, ва у қисқача $F(x, y, C)=0$ шаклда ёзилади. Шунга ўхшаш, чизиқнинг тенгламасида иккита параметр иштирок этса, бу тенгламани *икки параметрли чизиқлар оиласининг тенгламаси* дейилади. Бу тенгламани қисқача $F(x, y, C_1, C_2)=0$ шаклда ёзиш мумкин. C_1 ва C_2 га аниқ қийматлар берганда, шу оилага қарашли аниқ чизиқнинг тенгламаси келиб чиқади.

Мисол. $y-kx-l=0$ — икки параметрли тўғри чизиқлар оиласининг тенгламаси; $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ эса радиуси 5 га тенг икки параметрли айланалар оиласининг тенгламасидир; a ва b параметрларга тайин қийматлар берилганда, марказн (a, b) нуқтада ётган ва радиуси 5 га тенг айлана ҳосил қилинади.

Текисликда n параметрга боғлиқ бўлган чизиқнинг тенгламасини $F(x, y, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)=0$ шаклда ёзиш мумкин. n параметрли чизиқлар оиласи қуйидаги хоссага эга:

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрларнинг тегишли интервалларда ихтиёрий равишда ўзгара олишидан фойдаланиб, шу оилага қарашли шундай чизиқни ажратиш мумкинки, у текисликда олдиндан берилган n та нуқтадан ўтади. Ҳақиқатан, $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ чизиқ $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n, y_n)$ нуқталардан ўтадиган бўлса, у ҳолда қуйидаги шартлар бажарилади:

$$
\begin{gathered}
F(x_1, y_1, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \\
F(x_2, y_2, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F(x_n, y_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0.
\end{gathered}
$$

Бу тенгламалар системасини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрларга нисбатан ечиб, топилган $C_1, C_2, \ldots, C_n$ қийматларни $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ га қўйсак, изланаётган чизиқнинг тенгламаси ҳосил бўлади.

§ 28. Текисликдаги чизиқлар оиласининг ўрамаси.

Бир параметрли чизиқлар оиласи $F(x, y, C)=0$ берилган бўлсин. Бу оилага қарашли тайин чизиқни ҳосил қилиш учун, C параметрга маълум бир қийматни бериш керак. C нинг ўзгариш соҳаси $C_1 < C < C_2$ бўлсин. Баъзан бир параметрли оила чизиқлари учун шундай чизиқ мавжуд бўладики, у ўзининг ҳар бир нуқтасида оила чизиғининг бирига уринади ва ўзи ана шу урииниш нуқталаридан тузилган бўлади (84-чизма). *Бундай чизиқ берилган оиланинг ўрамаси деб аталади.*

84-чизма.

Дастлаб оиланинг ўрамаси бор деб фараз қилайлик. Соддалик учун, аввал, ўраманинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтасида оила чизиқларидан фақат биттаси уриниб, турли нуқталарида эса оиланинг турли чизиқлари ўринади дейлик. Бу ҳолда ўраманинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтасига шу нуқтада уринадиган битта оила чизиғи мос келади; демак, $M(x, y)$ нуқта ўзгариши билан оила чизиги ва унга мос келувчи C параметр ўзгара боради, шу сабабли, ўрама бўйлаб ҳаракат қилганда $x = x(C)$ ва $y = y(C)$ деб ҳисоблаш мумкин. Биз $F(x, y, C)$ функциянинг хусусий ҳосилалари мавжуд ва узлуксиз, ҳамда $x(C)$ ва $y(C)$ функцияларнинг ҳосилалари ҳам узлуксиз деб фараз қиламиз. Ўраманинг ҳар бир нуқтаси оиланинг бирор чизиғига қарашли бўлгани учун ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$F[x(C), y(C), C] = 0.$$

Бу айниятни C бўйича тўлиқ дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dC} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dC} + \frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

$$F'_x x'_C + F'_y y'_C + F'_C = 0. \qquad (1)$$

Шартга кўра, оила чизиғи ва ўрама бир-бирига уринади. § 18 га асосан, уларнинг умумий нуқталаридаги уринмаларнинг тенгламалари $F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) = 0$ ва $\frac{x - x_0}{x'_{C_0}} = \frac{y - y_0}{y'_{C_0}}$ бўлади. Бундай уринмалар устма-уст тушгани учун $x - x_0 = \lambda x'_{C_0}$; $y - y_0 = \lambda y'_{C_0}$ ёки бу қийматларни (1) га қўйсак, $F'_{x_0} \lambda x'_{C_0} + F'_{y_0} \lambda y'_{C_0} = 0$, $F'_{x_0} x'_{C_0} + F'_{y_0} y'_{C_0} = 0$ келиб чиқади. Бу натижа ўраманинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтасида бажарилади, шу сабабли, умуман: $F'_x x'_C + F'_y y'_C = 0$. Биз оила чизиқларидаги махсус нуқталарни вақтинча қарамаймиз, яъни F'_x ва F'_y ҳосилалар бир вақтда нолга тенг эмас деб фараз этамиз. $F'_x x'_C + F'_y \cdot y'_C = 0$ ва (1) дан $F'_C = 0$ келиб чиқади. Биз учун номаълум бўлган $x = x(C)$, $y = y(C)$ функциялар қуйидаги тенгламалар системасини C га нисбатан қаноатлантириши керак:

$$F(x, y, C) = 0, \quad F'_C(x, y, C) = 0 \qquad (2)$$

Шундай қилиб, ўрама мавжуд бўлса, унинг параметрик $x = x(C)$, $y = y(C)$ тенгламалари (2) системани x ва y га нисбатан ечиш натижасида ҳосил қилинади. C ўзгарувчи бўлган ҳолда, (2) система, умуман, C га функционал боғлиқ ечимга эгадир. Агар C ўзгармас бўлса, $F(x, y, C) = 0$ нинг ўрамаси мавжуд бўлмайди.

Оила чизиғида ётиб, координаталари (2) системани қаноатлантирган нуқта чизиқнинг характеристик нуқтаси дейилади.

(2) системани ечганда ҳосил бўлган $x = x(C)$, $y = y(C)$ тенгламалар билан ифодаланувчи чизиқ оиланинг ***дискриминант чизиғи*** *дейилади.*

Дискриминант чизиқ оила чизиқларининг ҳаммасига уринса, у ўрама бўлади. Ҳақиқатан, $x = x(C)$, $y = y(C)$ ни (2) га қўйсак, $F[x(C), y(C), C] = 0$ ва $F'_C[x(C), y(C), C] = 0$ айниятлар вужудга келади. Булардан биринчисини C бўйича дифференциаллаб, $F'_C = 0$ ни назарга олсак, $F'_x x'_C + F_y y'_C = 0$ ҳосил бўлади. Бу эса, дискриминант чизиғи билан оила чизиғига қарашли умумий нуқталардаги уринмалар устма-уст тушганда бажарилади.

Юқорида биз оила чизиқларининг фақат оддий нуқталари билан иш кўрамиз деб фараз қилган эдик. Энди бу фараздан воз кечиб, оила чизиқларига қарашли барча махсус нуқталарни ҳам қарайлик, яъни

$$F(x, y, C) = 0, \ F_x(x, y, C) = 0, \ F_y(x, y, C) = 0$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини текширайлик. Бу учта тенглама системаси ечилмайдиган бўлса, оила чизиқларининг махсус нуқталари бўлмайди. Масалан,

$$(x - C)^3 - y = 0 \text{ тенглама учун } F_y = -1 \neq 0.$$

Энди биз махсус нуқталар чексиз кўп деб фараз қиламиз. Бу нуқталар учун ҳам $x = x(C)$ ва $y = y(C)$ бўлиб,

$$F[x(C), y(C), C] \equiv 0$$

айният бажарилади. Бу айниятни C бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(C) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(C) + \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Аммо (2) га асосан, $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ бўлиб, демак, (2) ни қаноатлантирган нуқталар $F = 0$ ва $F'_C = 0$ тенгламаларни ҳам қаноатлантиради — махсус нуқталар тўплами ҳам дискриминант чизиқ таркибига киради.

Хуллас, қуйидаги натижага келамиз: *оила тенгламасини C параметр бўйича дифференциаллаб ва уни (мумкин бўлса) нолга тенглаштириб, $F = 0$ ва $F'_C = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу системани x ва y га нисбатан ечишдан келиб чиққан $x = x(C)$ ва $y = y(C)$ тенгламалар билан ёки $\Phi(x, y) = 0$*[1]) *тенглама билан ифодаланувчи дискриминант чизиқни ҳосил қиламиз. Бу чизиқнинг шундай қисмини ажратамизки, у оила чизиқларининг махсус нуқталаридан холи бўлсин. Ана шу қисм ўрамани беради. Дискриминант чизиқнинг*

---

[1]) $\Phi(x, y) = 0$ тенглама $x = x(C)$, $y = y(C)$ дан C ни йўқотиш натижасида ҳосил бўлади.

қолган қисми эса оила чизиқларига қарашли махсус нуқталарнинг геометрик ўрнини ифодалайди.

Бу мулоҳазалардан, оила ўрамаси ёки махсус нуқталарнинг геометрик ўрин характеристик нуқталардан иборатдир, деган хулоса чиқади.

Мисоллар. 1. $y = C^2(x-C)^2$ параболалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламадан C параметр бўйича ҳосила оламиз:

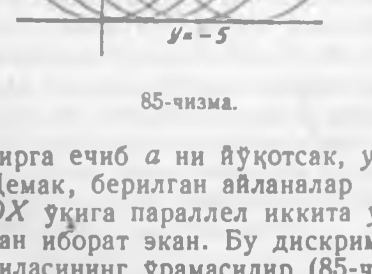
$$C^2(x-C)^2 - y = 0;\ 2C(x-C)^2 + 2C^2(x-C)(-1) = 0;$$
$$C(x-C)(x-C-C) = 0$$

ёки $C(x-C)(x-2C) = 0$. Буни берилган тенглама билан бирга, яъни $y - C^2(x-C)^2 = 0$, $C(x-C)(x-2C) = 0$ системани ечамиз; иккинчи тенгламадан $C = 0$, $x-C=0$, $x-2C = 0$ келиб чиқади. Бу қийматларнинг ҳар бирини биринчи тенгламага қўямиз; $C = 0$ қийматда $y = 0$ ҳосил бўлади; $x = C$ қийматда ҳам $y = 0$ келиб чиқади; ниҳоят, $x = 2C$ қийматда $y = C^4$ га эга бўламиз.

Энди

$$x = C,\ y = 0,$$
$$x = 2C,\ y = C^4$$

тенгламалардан C ни йўқотсак, дискриминант чизиқларнинг $y = 0$ ва $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4$ ёки $16y - x^4 = 0$ тенгламаларига келамиз.



85-чизма.

Бу $y = 0$ ва $16y - x^4 = 0$ чизиқлар параболалар оиласининг ўрамасини ташкил қилади, чунки берилган чизиқлар оиласида махсус нуқталар йўқ.

2. Ушбу $(x-a)^2 + y^2 = 25$ айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламадан a бўйича ҳосила оламиз: $-2(x-a) = 0$ ёки $x - a = 0$. Буни берилган тенглама билан бирга ечиб a ни йўқотсак, $y^2 = 25$ ёки $y = \pm 5$ келиб чиқади. Демак, берилган айланалар оиласининг дискриминант чизиғи OX ўқига параллел иккита $y - 5 = 0$, $y + 5 = 0$ тўғри чизиқдан иборат экан. Бу дискриминант чизиқ берилган айланалар оиласининг ўрамасидир (85-чизма).

3. Узунлиги a га тенг ва учлари координата ўқлари бўйича силжиб борувчи кесма вазиятларининг ўрамаси топилсин.

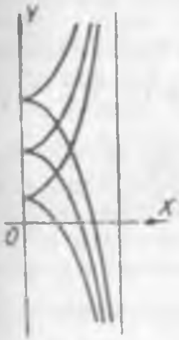
Ечиш: $AB = a$, $MO \perp AB$, $\angle MOB = \theta$ бўлсин (26-чизма). Демак, $\angle OAB$ ҳам θ га тенг бўлади. AB тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси $\frac{x}{OB} + \frac{y}{OA} = 1$ ва $\frac{OB}{AB} = \sin OAB = \sin\theta$, $\frac{OB}{a} = \sin\theta$, $\frac{OA}{AB} = \cos\theta$ ёки $OA = a\cos\theta$. Шу сабабли, тўғри чизиқ тенгламасини $\frac{x}{\sin\theta} + \frac{y}{\cos\theta} = a$ шаклда ёзиш мумкин. θ ни параметр сифатида қабул қилиб, θ бўйича ҳосила оламиз: $-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta + \frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta = 0$ ёки $\frac{x}{\sin^3\theta} = \frac{y}{\cos^3\theta}$. Буни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{\frac{x}{\sin\theta}}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{y}{\cos\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{x}{\sin\theta} + \frac{y}{\cos\theta}}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{a}{1} = a;$$

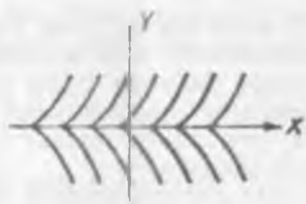
бундан астроиданинг $x = a\sin^3\theta$, $y = a\cos^3\theta$ тенгламалари ҳосил қилинади. Бу дискриминант чизиқ — масаламиздаги кесмалар оиласининг ўрамасидир.

4. $(y-a)^2 - x^3 = 0$ чизиқлар оиласининг ўрамасини топамиз. Берилган тенгламани $-2(y-a) = 0$ билан бирга ечсак, $x = 0$, яъни OY ўқининг тенгламаси келиб чиқади. $x = 0$ чизиқ — берилган чизиқлар оиласининг дискриминант чизиғи бўлади.

Бу чизиқ оиланинг ўрамасини бермайди — у шу оила чизиқларига қарашли махсус нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборатдир. Ҳақиқатан, OY ўқининг нуқталарида $F'_x = -3x^2 = 0$ ва $F'_y = 2(y-a) = 0$, яъни F_x ва F_y нинг иккаласи ҳам нолга тенг (86-чизма).



86-чизма.



87-чизма.

5. Ярим кубик $y^2 - (x-a)^3 = 0$ параболалар оиласининг дискриминант чизиғи $y=0$ бўлади. Бу чизиқ оиланинг махсус нуқталаридан тузилган бўлиб, демак, у оиланинг ўрамасини бермайди (87-чизма).

Машқлар

43. Тўғри чизиқлар оиласи OX ва OY ўқлари билан кесишиб, юзлари тенг ($= S_0$) учбурчакларни ташкил қилади. Шу тўғри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: $xy = \pm\frac{S_0}{2}$.

44. $x = C^3 + u$, $y = C^2 + u$ чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин.

Кўрсатма. Олдин u ни йўқотиб, $F(x, y, C) = 0$ шаклдаги тенгламани ҳосил қилинг.

Жавоб: $x = y$, $x - \frac{4}{9} = y - \frac{8}{27}$. Бу ерда $x = y$ дискриминант чизиқ ўрама эмас.

45. Бош диаметрлари умумий ва юзлари ўзаро тенг эллипслар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: Иккита гипербола: $xy = \pm\frac{1}{2}\sqrt{C}$.

46. $x^2 = 2py$ параболанинг учидан ўтган ва марказлари шу параболанинг устида ётган айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: 1) Оила тенгламаси $x^2 + y^2 - 2Cx - \frac{C^2}{p}y = 0$,

2) Ўрама: $y(x^2 + y^2) + px^2 = 0$.

§ 29. Лимит нуқта

Оила чизиқларидан параметрнинг C_0 қийматига мос келувчи битта $F(x, y, C_0) = 0$ чизиқнинг ва унга яқин турган $F(x, y, C_0 + \Delta C) = 0$ чизиқнинг тенгламаларини бирга ечайлик:

$$F(x, y, C_0) = 0, \quad F(x, y, C_0 + \Delta C) = 0 \qquad (1)$$

Бу икки чизиқ битта ёки бир неча нуқталарда кесишиш (кесишмаслиги ҳам) мумкин. ΔC нолга интилганда, кесишиш нуқталари биринчи чизиқ бўйлаб қандайдир ҳаракат қилади. Агар кесишиш нуқталаридан биронтаси аниқ лимит вазиятга интилса, шу лимит вазият дастлабки чизиқнинг *лимит нуқтаси* деб айтилади.

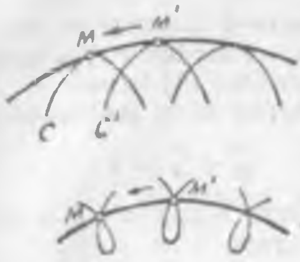
(1) система ўрнига эквивалент бўлган

$$F(x, y, C_0) = 0, \quad \frac{F(x, y, C_0 + \Delta C) - F(x, y, C_0)}{\Delta C} = 0 \qquad (2)$$

системани олиб, ΔC ни нолга интилтирсак, бизга маълум $F(x, y, C_0) = 0$, $F'_C(x, y, C_0) = 0$ система келиб чиқади. Шундай қилиб, $F(x, y, C_0) = 0$ нинг лимит нуқтаси $F(x, y, C) = 0$ оиланинг дискриминант чизиги составига киради ва агар лимит нуқталарнинг геометрик ўрни мавжуд бўлса, у дискриминант чизиқни ташкил қилади.

Ушбуни таъкидлаймиз: *оила ўрамасига ёки махсус нуқталарнинг геометрик ўрнига қарашли ҳар бир М нуқта — оиладаги маълум бир $F(x, y, C_0) = 0$ чизиқ билан яна шу оиладаги $F(x, y, C_0) = 0$* га *яқин турган чизиқнинг кесишган нуқтасининг лимит вазиятидир. Ҳар бир лимит нуқ-*

та — характеристик нуқтадир. Бу хосса геометрик нуқтаи назардан равшан бўлиб, биз юқорида унинг аналитик исботини бердик (88-чизма). Бироқ, тескари даъво кучга эга эмас: оила чизиғининг лимит нуқтаси бўлмаслиги ҳам мумкин: масалан, $y^2-(x-c)^3=0$ чизиқнинг дискриминант чизиғи $y=0$ бўлиб, бу тўғри чизиқ характеристик нуқталарнинг геометрик ўрнидир, бироқ онланинг чексиз яқин иккита чизиғи ҳақиқий нуқталарда кесишмайди — лимит нуқталар йўқдир.



88-чизма.

§ 30*. Икки параметрли оила ўрамаси

Чизиқларнинг

$$F(x, y, \alpha, \beta)=0 \tag{1}$$

оиласи икки параметрли бўлиб, бунда α ва β параметрлар ўзаро боғланган дейлик:

$$\varphi(\alpha, \beta)=0. \tag{2}$$

Бу муносабатдан β ни α орқали ифодалаб, (1) га қўйганимизда, аслида, бир параметрли оилани ҳосил қиламиз, демак, бу ҳол, деярли, янги эмас. Бироқ (2) дан β ни чиқариш ўрнига (1) да биз β ни α нинг функцияси деб ҳисоблаб, (1) ни α бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0 \tag{3}$$

Бу тенгликка кирган $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ҳосилани (2) дан топиш мумкин:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0; \qquad \frac{d}{d\alpha}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}.$$

Энди буни (3) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$$

ёки

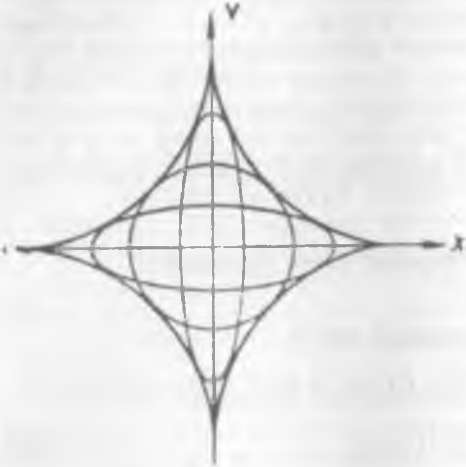
$$\frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial\alpha} & \frac{\partial F}{\partial\beta}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

Оила ўрамасини (дискриминант чизиғини) топиш учун (1), (2) ва (4) дан иккала параметр α ва β ни чиқариш керак.

Натижада дискриминант чизиғининг тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\Phi(x,\ y) = 0.$$

Мисоллар. 1. Ярим ўқларининг йиғиндиси ўзгармас ва симметрия ўқлари умумий бўлган эллипслар оиласининг ўрамаси топилсин (89-чизма).



89-чизма.

Айтилган оила тенгламаси:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

бўлиб, бунда, $\alpha + \beta = l = \text{const}$.

$$\frac{D(F,\ \varphi)}{D(\alpha,\ \beta)} = \begin{vmatrix} -\frac{2x^2}{\alpha^3} & -\frac{2y^2}{\beta^3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{y^2}{\beta^3},$$

бундан эса,

$$\frac{\frac{x^2}{\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\frac{y^2}{\beta^2}}{\beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{1}{l},$$

демак,

$$\alpha^3 = lx^2,\ \beta^3 = ly^2,\ \alpha = l^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}},\ \beta = l^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}.$$

Энди $\alpha + \beta = l$ дан фойдалансак, ўраманинг тенгламаси ҳосил бўлади: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ — астроида.

2. Ушбу $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = l^2$ оиланинг ўрамаси топилсин.

Жавоб: астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

3. Марказлари берилган эллипсда ётган ҳолда, шу эллипснинг битта фокусидан ўтувчи айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

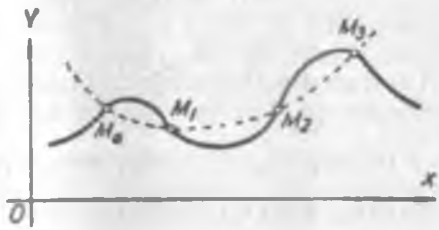
Жавоб: эллипс тенгламаси одатдагича $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда олинса [бунда $a^2 - b^2 = c^2$], у ҳолда оила тенгламаси $(x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 = (-c - a\cos\varphi)^2 + b^2\sin\varphi$ ва ўрама тенгламаси $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$ бўлади, бу сўнгги тенглама: радиуси $2a$ га тенг ва маркази иккинчи фокусда ётган айланани ифодалайди.

Олтинчи боб

ЁПИШМА ЧИЗИҚЛАР ВА СИРТЛАР

§ 31. Ёпишма чизиқлар

Баъзан берилган $x = x(t)$, $y = y(t)$ (Γ) чизиқларнинг бирор M_0 нуқтаси атрофидаги ёйининг хоссаларини текширишни енгиллаштириш учун, M_0 нуқтадан ўтган ва (Γ) чизиққа мумкин қадар яқин турган, шу билан бирга тузилиш жиҳатдан (Γ) чизиққа қараганда оддийроқ бўлган иккинчи чизиқни олиб, биз учун керакли хоссаларни бу иккинчи чизиқда текширишга тўғри келади. Шу мақсадга эришиш учун, n параметрли $F(x, \ y, \ C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ чизиқлар оиласига мурожаат қиламиз. Бу оиладан шундай чизиқни ажратиб олиш мумкинки, у (Γ) чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтадиган ва (Γ) нинг шу нуқта атрофидаги ёйига мумкин қадар яқин турган бўлсин. Бунинг учун: (Γ) нинг $M_0(x(t_0)\, y(t_0))$, $M_1(x)(t_1)\, y(t_1)$, $\dots$, $M_n\, x(t_n)\, y(t_n)$ нуқталарини оламиз ва



90-чизма.

$$F(x, \ y, \ C_1, \ C_2, \ \dots, \ C_n) = 0 \qquad (1)$$

мана шу нуқталардан ўтган n параметрли чизиқлар оиласининг тенгламаси деб фараз қиламиз (90-чизма). Бу ҳолда (1) тенгламани M_1, M_2, M_3, $\dots$, M_n нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради:

$$F[x(t_0), \ y(t_0), \ C_1, \ C_2, \ \dots, \ C_n] = 0,$$
$$F[x(t_1), \ y(t_1), \ C_1, \ C_2, \ \dots, \ C_n] = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F[x(t_n), \ y(t_n), \ C_1, \ C_2, \ \dots, \ C_n] = 0.$$

Аммо (1) тенгламани (Γ) даги ҳар қандай $M[x(t), y(t)]$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиравермайди, чунки оиланинг (1) тенглама билан ифодаланувчи чизиғи $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталардангина ўтади, холос. Шу сабабли (1) тенгламанинг чап томонидаги функцияга x ва y ўрнига узлуксиз $x(t)$ ва $y(t)$ функцияларни қўйсак, t параметрга нисбатан ўзи ва ҳосилалари узлуксиз бўлган қуйидаги ёрдамчи функция вужудга келади:

$$f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = F[x(t), y(t), C_1, C_2, \ldots, C_n].$$

Бу функциянинг $t = t_0, t = t_1, t = t_2, \ldots, t = t_{n-1}$ қийматларда нолга тенг бўлиши равшан:

$$f(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, f(t_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots, f(t_{n-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Энди $f(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ва $f(t_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ларни эътиборга олсак, Ролль теоремасига асосан, $f'(t'_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ бўлади, бунда $t_0 < t'_0 < t_1$. Худди шунга ўхшаш $f(t_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ва $f(t_2, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ларни олиб, Ролль теоремасига асосан, $f(t'_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ га эга бўламиз, бунда $t_1 < t'_1 < t_2$ ва ҳ. к. Натижада қуйидаги $(n-1)$ та тенглик ҳосил бўлади:

$$f'(t'_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, f'(t'_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$
$$f'(t'_2, C_1, C_2, \ldots, C_n = 0, \ldots, f'(t'_{n-2}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \quad (2)$$

Энди Ролль теоремасини (2) даги функцияларга қўлласак, натижада қуйидаги $(n-2)$ та тенгликларга келамиз:

$$f''(t''_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0; f''(t''_1, C_1, C_2 \ldots C_n) = 0, \ldots f''(t''_{n-3}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad (3)$$

бунда $t'_i < t''_i < t'_{i+1}$. Яна, Ролль теоремасини (3) ларга қўлланамиз ва ҳ.к. Энг охирда битта қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$f^{(n-1)}(t_0^{(n-1)}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Агар (Γ) чизиқдаги $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталар (Γ) бўйлаб M_0 нуқтага интилса, у ҳолда $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ қийматлар ва булар орасидаги $t_i^{(j)}$ қийматлар ҳам t_0 га интилади. Бунинг натижасида $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталардан ўтган оила чизиғи, силжиб ёки эгилиб, лимит ҳолатига интилади. Шу вақтда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ параметрлар ҳам аниқ $C^*_1, C^*_2, \ldots, C^*_n$ лимитларга интилади. Ҳосил бўлган қуйидаги системани ечиб, $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*$ параметрларни топиш мумкин:

$$\begin{cases} f(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F[x(t_0), y(t_0), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] = 0, \\ f'(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F'[x(t_0), y(t_0), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] = 0, \\ f''(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F''[x(t_0), y(t_0), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n-1)}(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F^{n-1}[x(t_0), y(t_0), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] = 0. \end{cases}$$

Топилган $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*$ параметрларни оиланинг $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ тенгламасига қўйсак, изланган чизиқнинг тенгламаси келиб чиқади:

$$F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0.$$

Ана шу чизиқ *берилган* (Γ) *чизиқнинг* M_0 *нуқтасидаги ёпишма чизиғи дейилади.* Демак, берилган (Γ) чизиқнинг берилган M_0 нуқтасидаги *ёпишма чизиғи* деб, $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ оилага қарашли бўлган ва (Γ) нинг $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталаридан ўтган чизиқнинг M_i ($i = 1, \ldots, n-1$) нуқталар M_0 нуқтага интилгандаги лимит вазиятига айтилади.

Натижа. $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқнинг M_0 нуқтасида $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ оилага қарашли ёпишма чизиғининг тенгламасини топиш учун қуйидагича иш кўрамиз:

Ёрдамчи $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = F[x(t), y(t), C_1, C_2, \ldots, C_n]$ функцияни тузиб, ундан $n-1$ марта ҳосила оламиз, сўнгра бу функция ва унинг $(n-1)$ та ҳосилаларидаги t ўрнига t_0 ни (яъни t нинг M_0 га мос қийматини) қўйиб, (4) тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, топилган $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*$ параметрларни оила тенгламасига қўямиз.

§ 32. Ёпишма тўғри чизиқ ва ёпишма айлана

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги ёпишма тўғри чизиғини, яъни унга энг яқин турган тўғри чизиқни топамиз.

Тўғри чизиқлар оиласининг тенгламаси $y - kx - l = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ёрдамчи функциянинг кўриниши:

$$f(t, k, l) = y(t) - kx(t) - l$$

шаклда бўлади. Тўғри чизиқлар оиласи икки параметрли бўлгани учун, бир мартаба ҳосила олиб, сўнгра t ўрнига t_0 ни қўйиб, (1) системани ҳосил қиламиз:

$$f(t_0, k, l) = y(t_0) - kx(t_0) - l = 0, \qquad (1)$$
$$f'(t_0, k, l) = y'(t_0) - kx'(t_0) = 0,$$

бундан: $k = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ ва $l = y(t_0) - \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} x(t_0)$. Топилган қийматларни $y = kx + l$ тенгламага қўйсак, ёпишма тўғри чизиқнинг

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} [x - x(t_0)]$$

тенгламаси ҳосил бўлади. Демак, ёпишма тўғри чизиқ, $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқнинг уринмасидан иборат экан.

Энди ёпишма айланани кўриб ўтамиз. Ушбу айланалар

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

оиласидан шундай айланани аниқлайликки, у $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги ёпишма айланаси бўлсин. Бу ҳолда ёрдамчи функциянинг кўриниши $f(t, a, b, R) = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2$ шаклда бўлади. Айланалар оиласи уч параметрли функция бўлгани учун, икки мартаба ҳосила олиб, ушбу системани тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} &f(t_0, a, b, R) = [x(t_0) - a]^2 + [y(t_0) - b]^2 - R^2 = 0, \\ &f'(t_0, a, b, R) = 2[x(t_0) - a]\cdot x'(t_0) + 2[y(t_0) - b]\cdot y'(t_0) = 0, \\ &f''(t_0, a, b, R) = x'^2(t_0) + [x(t_0) - a]\cdot x''(t_0) + y'^2(t_0) + \\ &\qquad + [y(t_0) - b]\cdot y''(t_0) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Бу системани ечиб, a, b, R параметрларни топамиз:

$$a = x(t_0) - \frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} \cdot y'(t_0),$$

$$b = y(t_0) + \frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} \cdot x'(t_0),$$

$$R = \frac{[x'^2(t_0) + y'^2(t_0)]^{3/2}}{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|}.$$

$x(t_0)$, $y(t_0)$, $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $x''(t_0)$, $y''(t_0)$ ларни қисқача x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$ кўринишда белгилаймиз. У ҳолда

$$a = x_0 - \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{y}_0 \ddot{x}_0} \cdot \dot{y}_0,$$

$$b = y_0 + \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\dot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{y}_0 \ddot{x}_0} \cdot \dot{x}_0, \qquad (2)$$

$$R = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{3/2}}{|x_0' y_0'' - y_0' x_0''|}.$$

Ёпишма айлананинг тенгламасини тузиш учун $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$ тенгламадаги a, b, R лар ўрнига топилган (1) қийматларни қўйиш керак.

Таъриф. *Чизиқнинг берилган нуқтасидаги ёпишма айланасининг радиуси бу чизиқнинг шу нуқтадаги эгрилик радиуси деб, ёпишма айлананинг маркази чизиқнинг эгрилик маркази деб ва эгрилик радиусига тескари сон чизиқнинг эгрилиги деб аталади.*

Кейинроқ (§ 47), эгрилик тушунчасига янги таъриф берамиз ва юқорида берилган таърифнинг янги таърифга эквивалент эканлигини исбот қиламиз.

Агар чизиқнинг тенгламаси $y = f(x)$ шаклда берилган бўлса, уни параметр ҳолатга келтириш қийин эмас. Бунинг учун x ни t билан алмаштирамиз. Натижада $x = t$, $y = f(t)$ тенгламалар ҳосил бўлади. Бунда $x' = 1$, $x'' = 0$ бўлиб, ёпишма айлананинг a, b, R параметрлари учун

$$a = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

формулалар келиб чиқади.

Мисол. $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$ чизиқнинг $t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги ёпишма айлана марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

Ечиш. x, y нинг ва улардан олинган ҳосилаларнинг $t_0=1$ га мос қийматларини аниқлаб, юқоридаги формулаларга асосан, a, b, R ни топамиз:

$$a = -1, \; b = 3, \; R = \frac{(1+1)^{3/2}}{1-0} = 2\sqrt{2}.$$

Машқлар

48. $x = t^2$, $y = t^3$ чизиқнинг $t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги ёпишма тўғри чизиғи аниқлансин.

49. Параболалар оиласининг тенгламаси $y = Ax^2 + Bx + C$ ва чизиқнинг тенгламаси $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$. Бу чизиқнинг $t_0 = 0$ га мос нуқтасидаги ёпишма параболаси топилсин.

50. $x = t^2$, $y = 1 - t$ чизиқнинг $t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги ёпишма айланаси топилсин.

51. $xy = 1$ чизиқнинг $M(1, 1)$ нуқтасидаги ёпишма айланаси марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

§ 33. Ёпишма чизиқларнинг хоссалари (давоми)

Теорема. *Агар M_0 нуқта*

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

чизиқнинг ва ёпишма

$$F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0 \tag{2}$$

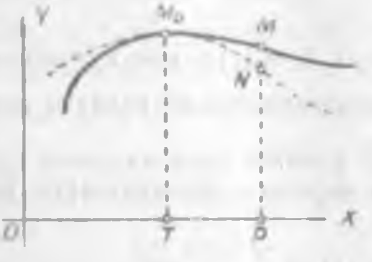
чизиқнинг махсус нуқтаси бўлмаса, у ҳолда бу икки чизиқ M_0 нуқтада умумий уринмага эга бўлади.

Исбот. (1) ва (2) чизиқларнинг M_0 нуқтадаги уринма векторлари устма-уст тушганлиги сабабли, $F'_x x'(t_0) + F'_y y'(t_0) = 0$ шарти бажарилиши зарур (§ 31 га қаранг). $F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ функциядаги x ва y ўрнига $x(t)$ ва $y(t)$ ни қўйиб, t бўйича ҳосила олсак, $F_x x'(t) + F'_y y'(t)$ бўлади. $t = t_0$ қийматда олдинги § 32 даги (1) системанинг иккинчи тенгламасига асосан:

$$f'(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F'_x x'(t_0) + F'_y y'(t_0) =$$
$$= F'[x(t_0)\, y(t_0)\, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] = 0.$$

Шуни исбот қилиш керак эди.

t ўзгарувчи t_0 га яқинлашганда $t - t_0$ нолга интилади. Бундан буён $t - t_0$ ни *биринчи тартибли*, $(t - t_0)^n$ ни эса *n-тартибли чексиз кичик* деб қабул қиламиз.



91-чизма.

Теорема. *Агар бирор $\psi(t)$ функция учун $t = t_0$ қийматда $\psi(t_0) = \psi'(t_0) = \psi''(t_0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(t_0) = 0$ ва $\psi^{(n)}(t_0) \neq 0$ шарти бажарилса, $\psi(t)$ функция n-тартибли чексиз кичик бўлади.*

Исбот. $\psi(t)$ функцияни $(t - t_0)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз. Қилинган шартларга асосан: $\psi(t) = \frac{\psi^n(t_0)(t - t_0)^n}{n!} + \ldots$ бўлади. Юқоридаги таърифга кўра, $\psi(t)$ функция n-тартибли чексиз кичикдир.

Энди $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқ ва унинг M_0 нуқтасидаги $F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ ёпишма чизиғи берилган бўлсин (91-чизма). $OT = x(t_0) = x_0$; $TM_0 = y(t_0) = y_0$. $x = x(t)$, $y = y(t)$ чизиқда $M[x(t), y(t)]$ нуқтани ва $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ чизиқда $N[x(t), y]$ нуқтани оламиз. t қиймат t_0 га интилганда $M \to M_0$ ва $N \to M_0$ бўлади. MN кесмани d билан белгилаймиз. $MN = d$ қийматни берилган чизиқларнинг M_0 нуқта атрофидаги *четланиши* деб атаймиз.

Ёпишувчи чизиқнинг яна бошқа хоссаларини ўрганиш учун, қуйидаги таърифни киритамиз:

Таъриф. *Агар* $MN = d$ *„четланиш" n-тартибли чексиз кичик бўлса,* $x=x(t)$, $y=y(t)$ *ва* $F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ *чизиқлар* M_0 *нуқтада* $(n-1)$*-тартибли уринишга эга дейилади.*

Теорема. *Агар* $F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ *чизиқ* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *чизиқнинг* M_0 *нуқтасидаги ёпишма чизиғи бўлиб,* M_0 *нуқта бу чизиқларнинг махсус нуқтаси бўлмаса, у ҳолда* $MN = d$ *четланиш n-тартибли чексиз кичик бўлади.*

Исбот. M_0 махсус нуқта бўлмагани учун, F'_y ва F'_x бир вақтда нолга тенг эмасдир. Масалан, $F'_y \neq 0$ бўлсин. Бу ерда $d = MN = y(t) - Y$, бундан: $y(t) = d + Y$.

M ва N нуқталарнинг абсциссалари тенг: $x(t) = x$. $F(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ даги x ва y ўрнига $x(t)$ ва $y(t)$ ни қўямиз. Натижада узлуксиз $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F[x(t), y(t), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*]$ функция ҳосил бўлади. $t \to t_0$ да $f(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ бўлгани учун, демак, $t - t_0 \to 0$ да $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ функция ҳам чексиз кичикдир. Иккинчи томондан: $N(x(t), y)$ нуқта ёпишувчи чизиқда ётганлиги сабабли, $0 = F[x(t), y, C_1^*, \ldots, C_n^*]$ шарти бажарилади. Булардан $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) - 0 = F[x(t), y(t), C_1^*, \ldots, C_n^*] - F[x(t), y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*]$. Чекли орттирмалар формуласига асосан $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F'_y[x(t), \theta(y(t) - Y), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] \times [y(t) - Y]$; $(0 < \theta < 1)$. Бундан:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)}{y(t) - Y} = \lim_{t \to t_0} F'_y[x(t), \theta(y(t) - Y), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] =$$

$$= F'_y[x(t_0), y(t_0), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*] \neq 0.$$

Демак, $MN = d = y(t) - Y$ билан $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ нинг чексиз кичиклик тартиби бир хил 100-бетдаги теоремага асосан, $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ ва шу билан бирга d четланиш n-тартибли чексиз кичикдир. Шуни исбот қилиш керак эди.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)}{d} = F'_y$$ га мувофиқ, $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots$ $\ldots, C_n^*)$ нинг ишораси $+$ дан $-$ га ўзгарганда, d ҳам ўз ишорасини ўзгартиради деган натижа келиб чиқади.

Теорема. *Агар* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *чизиқнинг* M_0 *нуқтасидаги ёпишма чизиғи n параметрли оила чизиғининг ли-*

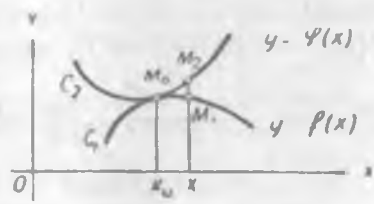
митидан иборат бўлса ва M_0 нуқта эслатилган чизиқларнинг махсус нуқтаси булмаса, у ҳолда M_0 нуқтадаги ёпишувчи чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$ билан $(n - 1)$-тартибли уринишга эга бўлади.

Исбот. Олдинги теоремага асосан, $d = MN$ четланиш n-тартибли чексиз кичикдир. Демак, таърифга кўра, (Γ) чизиқ ва унинг M_0 нуқтасидаги ёпишма чизиғи $(n - 1)$-тартибли уринишга эгадир. Агар n жуфт бўлса, M_0 нуқтанинг етарлича атрофида ёпишувчи чизиқ (Γ) нинг бир томонига жойлашади. Агар n тоқ бўлса, M_0 нуқтанинг бундай атрофида ёпишувчи чизиқ (Γ) нинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади. Ҳақиқатан, $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F[x(t), y(t), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*]$ нинг Тейлор қаторига ёйилмаси $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = \frac{f^{(n)}(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)(t - t_0)^n}{n!}$ ҳаддан бошланади, демак, t нинг қиймати $t < t_0$ дан $t > t_0$ га ўзгарганда $f(t, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$ нинг ишораси ва шу билан бирга d нинг ҳам ишораси, n тоқ бўлганда ўзгариб, n жуфт бўлганда ўзгармайди. (Γ) чизиқ ўзининг ёпишма тўғри чизиғи билан биринчи тартибли уринишга эга бўлиб, чизиқ унинг бир томонида ётади. Ёпишувчи айлана эса (Γ) чизиқ билан иккинчи тартибли уринишга эга бўлиб, у, умуман, чизиқнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади (92-чизма).

92-чизма.

§ 34. Чизиқларнинг уриниши

Олдинги параграфда чиқарилган натижаларни $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ чизиқларга қўлланамиз (93-чизма).



93-чизма.

Агар $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ чизиқлар умумий $x = x_0$ (оддий) нуқтада умумий уринмага эга, яъни $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$ бўлса, M_0 нуқта атрофида уларнинг четланиши

$$d = M_1M_2 = Y - y = \varphi(x) - f(x) = \psi(x)$$

бўлиб, бу айирма асосий $\Delta x = x - x_0$ чексиз кичикка нисбатан маълум тартибли чексиз кичикни ифодалайди. *Бу тартиб $n + 1$ га тенг бўлса, чизиқлар M_0 нуқтада n-тартибли уринишга эга бўлади.*

Умумий ҳолда қуйидагилар юз беради дейлик:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0),\ f''(x_0) = \varphi''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$
$$f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0);$$

яъни

$$\psi'(x_0) = \psi''(x_0) = \ldots = \psi^{(n+1)}(x_0) = 0, \quad \psi^{(n+1)}(x_0) \neq 0. \qquad (1)$$

Бу ҳолда $\psi(x)$ ни Тейлор қаторига ёйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$Y - y = M_1 M_2 = [f^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)]\,\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} + \ldots$$

(1) даги шартлар бажарилганда, олинган чизиқлар M_0 нуқтада n-тартибли уринишга эгадир. n жуфт бўлса, уринувчи чизиқлар урина туриб „кесишади", n тоқ бўлганда эса бири иккинчисини ўз ичига олади (албатта, M_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида).

Мисол. Иккита чизиқ олайлик: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$ ва $Y = \frac{1}{2}x^2 + 1 = \varphi(x)$. Улар учун $M_0(0, 1)$ нуқта умумий ва бу M_0 нуқтада чизиқлар 3-тартибли уринишга эгадир:

$$f'(x) = \operatorname{sh} x, \quad \varphi'(x) = x, \quad f'(0) = \varphi'(0) = 0,$$
$$f''(x) = \operatorname{ch} x, \quad \varphi''(x) = 1, \quad f''(0) = \varphi''(0) = 1,$$
$$f'''(x) = \operatorname{sh} x, \quad \varphi'''(x) = 0, \quad f'''(0) = \varphi'''(0) = 0,$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{ch} x, \quad \varphi^{IV}(x) = 0, \quad f^{IV}(0) = 1, \varphi^{IV}(0) = 0, f^{IV}(0) \neq f^{IV}(0).$$

Машқлар

52. Ярим кубик $y^2 = x^3$ параболанинг учи $y - x = 0$ биссектриса бўйлаб силжийди. Ярим кубик параболалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Оиланинг тенгламасини тузамиз:

$$(x - c)^3 - (y - c)^2 = 0$$

c параметр бўйича ҳосила оламиз:

$$-3(x - c)^2 + 2(y - c) = 0.$$

Бу икки тенгламадан c ни чиқарамиз, у ҳолда

$$\left.\begin{array}{l} x - c = 0 \\ y - c = 0 \end{array}\right\},\ x - y = 0; \qquad \left.\begin{array}{l} x - c = \frac{4}{9} \\ y - c = \frac{8}{27} \end{array}\right\},\ x - y = \frac{4}{27}.$$

Дискриминант чизиқ: $x - y = 0$ биссектрисадан ва унга параллел $x - y = \frac{4}{27}$ тўғри чизиқдан иборат. Биринчи чизиқ $x - y = 0$ — махсус нуқталарнинг геометрик ўрнидир, чунки

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x - c)^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2(y - c)$$

ҳосилалар $x = c$, $y = c$ қийматларда бирданига нолга айланади (бу ҳол соф геометрик мулоҳазалардан равшан: биз биссектриса бўйлаб махсус нуқталарни силжитган эдик). Дискриминант чизиқнинг иккинчиси ўрамадир (94-чизма):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x-c)^2 = \frac{16}{9} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2(y-c) = -\frac{16}{27} \neq 0.$$

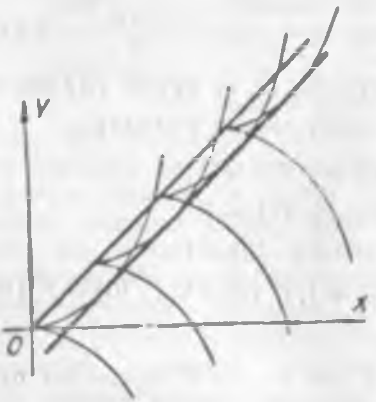
53. Координаталар бошидан ўтувчи ва марказлари $y = \frac{x^2}{2p}$ параболада ётувчи айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг маъносига кўра, оила тенгламаси $x^2 + y^2 - 2(ax + by) = 0$ ва қўшимча шарт $a^2 - 2pb = 0$. Тегишли Якобиан:

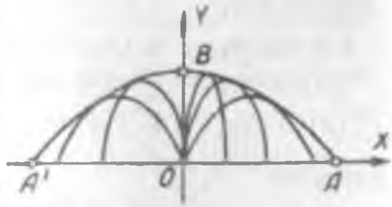
$$\frac{D(F, \varphi)}{D(a, b)} = \begin{vmatrix} -2x, & -2y \\ 2a, & -2p \end{vmatrix} = 0.$$

Бу учта тенгламадан a ва b ни йўқотсак, учинчи тартибли $(x^2 + y^2)y + px^2 = 0$ чизиқ вужудга келади, бу чизиқ учун координата боши биринчи типли қайтиш нуқтаси бўлиб, у OY ўқига уринади.

54. Берилган нуқтадан OX ўқи билан ўзгарувчи α бурчак ташкил қилиб, ўзгармас бошланғич v_0 тезликда турли снаряд (ўқ) лар отилган. Траекториялар ўрамаси топилсин (95-чизма).



94-чизма.



95-чизма.

Ечиш. Ҳавонинг қаршилиги эътиборга олинмаса, траекториянинг параметрик тенгламалари:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases} \qquad (*)$$

ёки $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x^2$ бўлиб, демак, траектория параболани ифодалайди, бунда α — оила параметри, t — оила чизигидаги нуқта параметридир. Види

$$x = x(\alpha, t), \quad y = y(\alpha, t)$$

тенгламалар билан берилган оила учун дискриминант чизиқни юқоридаги (*) тенгламалардан ва ушбу

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, t)} = 0$$

тенгламадан α ва t параметрларни йўқотиш билан топамиз. Бу ерда:

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ t)} = \begin{vmatrix} -v_0 t\sin\alpha, & v_0\cos\alpha \\ v_0 t\cos\alpha, & v_0\sin\alpha - gt \end{vmatrix} = 0$$

ёки

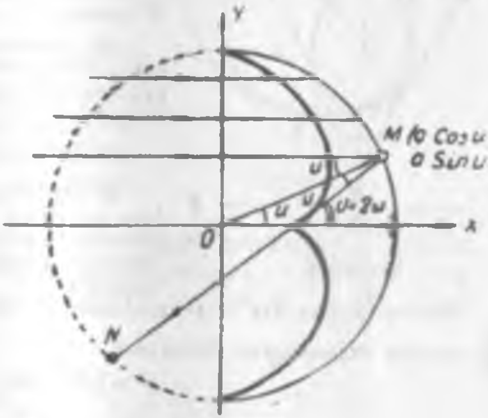
$$gt\sin\alpha - v_0 = 0 \qquad (^{**})$$

Агар (*) ва (**) тенгламалардан α ва t йўқотилса,

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad (^{***})$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, ўрама — параболадир („хавфсизлик параболаси").

55. Параллел нурлар дастаси айлана ичига кириб ундан қайтади (96-чизма). Бу нурларнинг ўрамаси топилсин.



96-чизма.

Ечиш. Берилган нуқтадан чиқиб, берилган чизиққа бориб қайтадиган нурлар дастасининг ўрамаси шу чизиқнинг берилган нуқтага нисбатан *каустикаси* дейилади. Бу масалада нурлар OX ўқига параллел; демак, масала айлананинг OX ўқи йўналишидаги чексиз узоқ нуқтага нисбатан каустикасини топишни талаб қилади.

Параметр сифатида айлананинг M нуқтасидан қайтган нурнинг OM радиус билан ташкил қилган u бурчагини оламиз. У ҳолда қайтган MN нур OX ўқи билан $v = 2u$ бурчак ташкил қилади. Бу нурлар оиласининг тенгламаси:

$$y - a\sin u = \operatorname{tg} 2u\,(x - a\cos u)$$

ёки

$$x\sin 2u - y\cos 2u - a\sin u = 0.$$

Бу тенгликни u бўйича дифференциаллаймиз:

$$2x\cos 2u + 2y\sin 2u - a\cos u = 0.$$

Бу икки тенгламадан x ва y ни u нинг функцияси қилиб ифодалаш мумкин:

$$x = \frac{a}{2}(2\sin u\sin 2u + \cos u\cos 2u),$$

$$y = \frac{a}{2}(-2\sin u\cos 2u + \cos u\sin 2u).$$

Тригонометриядан маълум ушбу

$$2\sin 2u\cos u = \sin 3u + \sin u,\quad 2\sin u\cos 2u = \sin 3u - \sin u,$$
$$2\cos 2u\cos u = \cos 3u + \cos u,\quad 2\sin 2u\sin u = \cos 3u - \cos u$$

формулалардан фойдалансак, дискриминант чизиқ тенгламалари қуйидаги кўринишда ҳосил бўлади:

$$x = \frac{a}{4}(3\cos u - \cos 3u), \quad y = \frac{a}{4}(3\sin u - \sin 3u),$$

бу эса — *гипоциклоидадир* (32-бетга қаралсин).

56. Ёруғлик манбаи $A(a, 0)$ нуқтада бўлган $x^2 + y^2 = a^2$ нинг шу нуқтага нисбатан каустикаси топилсин.

Жавоб: Кардиоида.

57. Ушбу $x^2 - (y - c)(y - 2c)^2 = 0$ оиланинг ўрамаси топилсин.

Жавоб: $x = 0$ — махсус нуқталар ўрни, $y^2 = \frac{27}{2}x^2$ ярим кубик парабола — ўрамадир (97-чизма).

97-чизма.

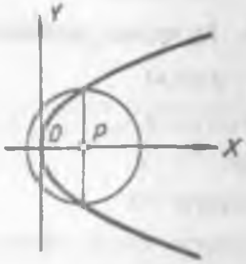
58. Томони a га тенг квадрат шундай ҳаракат қиладики, унинг AB, BC томонлари $\mp b$ нуқталардан ўтади. AC диагоналнинг ўрамаси топилсин.

Жавоб: Айлана $x^2 + (y - b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$.

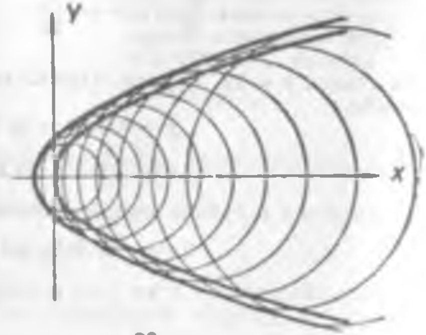
59. Парабола берилган: $y^2 = 2px$; унинг бош ватарлари (яъни OX ўқига тик ватарлари айланалар оиласининг диаметрлари сифатиди) олинган (98-чизма). Бу оиланинг ўрамаса топилсин.

Жавоб: Ўрама яна ўша параболанинг ўзи, лекин чап томонга қараб $\frac{p}{2}$ кесмага силжитилган (99-чизма):

$$y^2 = 2px + p^2.$$



98-чизма.



99-чизма.

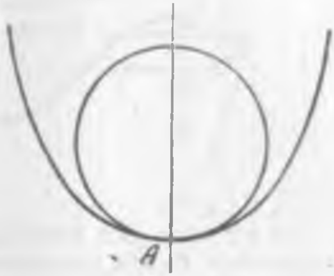
§ 35*. Чизиқнинг учлари

Чизиқдаги айрим нуқталарда ёпишма айлананинг уриниш тартиби учга тенг бўлиши мумкин. Чизиқнинг бундай нуқталари унинг *учлари* дейилади. Бу ерда уриниш тартиби учга (тоқ сонга) тенглигидан, ёпишма айлана M нуқта атрофида чизиқнинг бир томонига жойлашади — унинг бир томонидан иккинчи томонига ўтмайди (100-чизма). Чизиқнинг учларида, 98-бетдаги (A) шартлардан ташқари, яна ушбу шарт бажарилади:

$$\frac{1}{2}f'''(t) = (x-a)\,x''' + (y-\ \ )\,y''' + 3\,(x'x'' + y'y'') = 0. \qquad (1)$$

Ўша (A) тенгликларнинг кейинги иккитаси ва (1) тенгликдан $x-a$, $y-b$ ни йўқотамиз, у ҳолда:

$$(x'y''' - x'''y')(x'^2 + y'^2) + 3\,(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y') = 0. \quad (2)$$

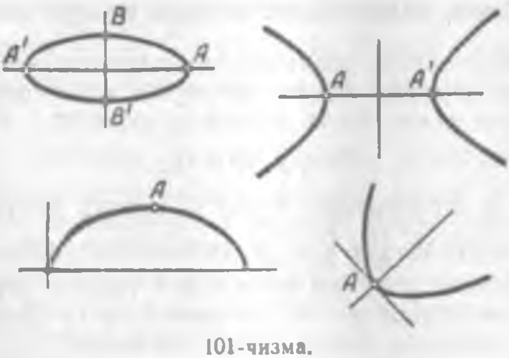


100-чизма.

Энди чизиқнинг эгрилик радиуси энг катта ёки энг кичик қийматларни қабул қилган нуқталарини излайлик. Бундай нуқталарда $\frac{dR}{dt} = 0$, бу эса (2) тенгламанинг ўзига келтиради.

Биз ушбу натижага келамиз: *чизиқнинг учларида эгрилик радиуси (эгрилик) энг катта ёки энг кичик қийматга эришади.*

Интуитив равишда бу факт ўз-ўзидан равшандир. Масалан, эллипс, гипербола, парабола, циклоидадаги A, A', B, B' нуқталарда эгрилик экстремал қийматга эришади; A, A', B, B'

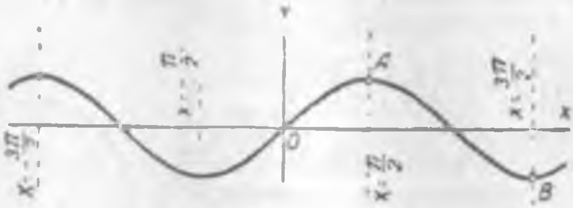


101-чизма.

сингари нуқталар аналитик геометрияда чизиқнинг учлари деб аталади (101-чизма).

Ушбу теоремани исботсиз келтирамиз: *агар бирор чизиқ симметрия ўқига эга бўлиб, шу ўқ билан оддий нуқтада кесишса, чизиқнинг бундай нуқтаси унинг учи бўлади.*

Шу нуқтаи назардан қараганда, аналитик геометрияда иккинчи тартибли чизиқларнинг учларига унинг симметрия ўқлари билан кесишган нуқталари деб берилган таъриф, бу янги маънода ҳам ўз кучини сақлайди. Синусоида $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ тўғри чизиқларга нисбатан симметрик бўлиб, улар билан оддий нуқталарда кесишади. Синусоиданинг OX ўқидан энг кўп узоқлашган (A, B ва ҳоказо) нуқталари унинг учларидир (102-чизма).



102-чизма.

Эслатма. Биз ёпишма тўғри чизиқ ва ёпишма айлана тушунчалари билан танишдик. Улар геометрияда энг содда образлар бўлганидан, ихтиёрий чизиқдаги нуқтанинг етарлича кичик атрофини улар билан солиштирдик. Бу дифференциал геометрияга хос методдир. Шунга ўхшаш, § 59 да фазовий чизиқдаги нуқтанинг етарлича кичик атрофини сфера билан солиштирганда *ёпишма сфера* ҳосил қилинади.

§ 36. Сирт, унинг оддий ва махсус нуқталари

1. Сирт тушунчасига аналитик геометрияда таъриф беради: *сирт деб шундай нуқталар тўпламига айтиладики, улар ушбу тенглама билан ифода қилинади:*

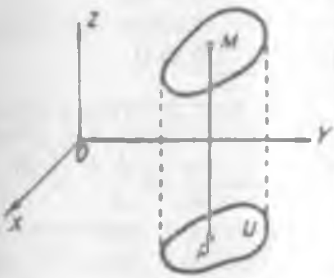
$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Бу ерда $F(x, y, z)$ функция бирор U соҳада узлуксиз биринчи тартибли хусусий $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ҳосилаларга эга деб фараз қилинади. Сиртнинг *регуляр қисми* деб ундаги шундай нуқталар тўпламига айтамизки, бу тўплам бирор Декарт системасида ушбу тенглама билан ифода қилинади:

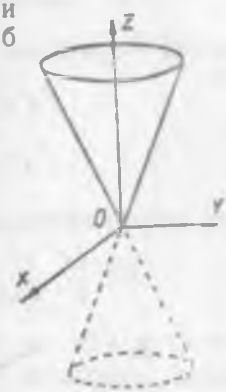
$$z = f(x, y), \tag{2}$$

бунда x ва y ёпиқ U соҳада ўзгарганда, $f(x, y)$ функция шу соҳада бир қийматли бўлиб, узлуксиз (ақалли) биринчи тартибли хусусий ҳосилаларга эгадир. Шу таърифдан кўринадики, сиртнинг регуляр қисми U соҳани гўё узлуксиз равишда деформация қилиш натижасида ҳосил қилинади (103-чизма). U соҳанинг ҳар бир P нуқтасига сиртда битта M нуқта мос келади.

Сиртга қарашли бирор нуқтанинг етарлича кичик атрофи регуляр қисмдан иборат бўлса, бундай нуқта сиртнинг *оддий нуқтаси* дейилади. Сиртнинг оддий бўлмаган нуқталари унинг *махсус нуқталари* деб айтилади. Демак, сиртнинг оддий нуқтаси атрофида унинг икки шаклда берилган (1) ва (2) тенгламалари тенг кучлидир. Масалан, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (учи координаталар бошидаги конус сирти) учун (0, 0, 0) нуқта махсус нуқтадир, чунки бу нуқта атрофида z ни x ва y нинг бир қийматли функцияси қилиб ифодалаш мумкин эмас (104-чизма).



103-чизма.



104-чизма.

Теорема. *Агар* (1) *сиртнинг бирор нуқтасида учта хусусий ҳосила* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ *узлуксиз бўлиб, улар бирданига нолга айланмаса, сиртнинг бундай нуқтаси албатта оддий бўлади.*

Исбот. Масалан, $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ бўлсин. Ошкормас функциянинг мавжудлик теоремасига асосан[1]), бирор $M(x, y)$ нуқта атрофида (1) тенгламадан z ни x ва y нинг бир қийматли ва узлуксиз дифференциалланувчи (2) функцияси сифатида ифодалаш мумкин. Бу эса ўша $M(x, y)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофи регуляр қисмдан иборат ва нуқтанинг ўзи эса оддий деган хулосага келтиради.

2. *Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.* (1) сиртнинг бирор оддий $M(x, y)$ нуқтасидан шу сирт устида L чизиқ ўтказайлик:

$$r = r\{x(t),\ y(t),\ z(t)\} = ix(t) + jy(t) + kz(t)$$

ёки

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

[1]) Г. М. Фихтенгольц, Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, I том, VI боб, § 2.

Бу ифодаларни (1) тенгламага қўйсак, айният ҳосил бўлади:

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)] = 0,$$

чунки L чизиқнинг ҳамма нуқталари сирт устида ётади. Бу айниятни дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0. \qquad (3)$$

Олинган M нуқта L чизиқ учун ҳам оддий фараз этилади, яъни

$$r'(t)\,\{x'(t), y'(t), z'(t)\} \neq 0,$$

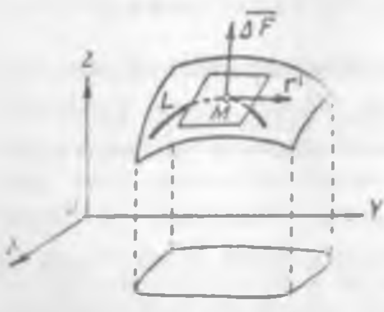
ёки

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0.$$

Энди координаталари $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ га тенг векторни киритайлик:

$$\overline{\Delta F}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\} \text{ ёки } \overline{\Delta F} = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k.$$

Бу вектор $F(x, y, z)$ скаляр функциянинг *градиент вектори* дейилиб, „набла эф" деб ўқилади. Шартга кўра, $\overline{\Delta F} \neq 0$ бўлиб, сиртнинг ҳар бир оддий нуқтасида тайин градиент вектор бордир.



105-чизма

(3) тенгламанинг чап томони $\overline{\Delta F}$ ва $r'(t)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини ифода қилади, демак:

$$\overline{\Delta F} \cdot r'(t) = 0,$$

бу эса берилган M нуқтада ўзгармас $\overline{\Delta F}$ векторнинг ўзгарувчи $r'(t)$ векторга тиклигидан дарак беради. Хуллас: *сиртнинг оддий M нуқтасидан ўтказилган барча эгри чизиқларнинг уринмалари бир текисликда ётади; бошқача айтганда, сиртнинг оддий нуқтасида бу сиртга уринувчи барча тўғри чизиқлар бир текисликда ётади*. Бу текислик сиртнинг *уринма текислиги* дейилади. Уриниш нуқтасида уринма текисликка тик қилиб ўтказилган тўғри чизиқ *нормаль* деб аталади. Сиртнинг $\overline{\Delta F}$ градиент вектори нормаль бўйича йўналгандир. Демак, сиртнинг ҳар бир оддий нуқтасида тайин бир уринма текислик ва тайин бир нормаль бордир (105-чизма).

Уринма текислик тенгламаси

$$(R - r)\overline{\Delta F} = 0 \ \text{ ёки } \ (X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

нормаль тенгламаси

$$R - r = \lambda \overline{\Delta F}$$

ёки

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Агар сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилса, ва $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ деб белгиланса (Монж), уринма текислик тенгламаси

$$(X-x)p + (Y-y)q = Z-z$$

кўринишга ва нормаль тенгламалари эса:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

кўринишга эга бўлади, чунки

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) - z] = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y) - z] = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[f(x, y) - z] = -1.$$

Мисол. $xyz - a^3 = 0$ сиртнинг (a, a, a) нуқтасидаги уринма текислик тенгламаси ёзилсин.

Жавоб: $x + y + z - 3a = 0$.

§ 37. Ёпишма сиртлар

Ўзаро ёпишма бўлган сиртлар ҳақидаги тушунча сиртлар назарияси бўлимида текширилади. Бу ерда

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (\Gamma)$$

чизиқнинг берилган M_0 нуқтасидаги ёпишма сирти ҳақида маълумот берамиз.

Сиртнинг тенгламасини $F(x, y, z) = 0$ шаклда олайлик. Чизиқларники сингари, сирт тенгламаси ҳам бир параметрли, икки параметрли ва ҳоказо n параметрли бўлиши мумкин.

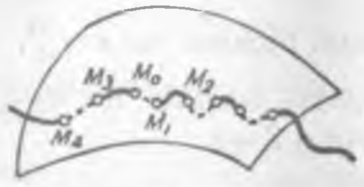
Мисоллар. 1. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ тенглама марказлари координаталар бошида ётган сфераларнинг бир параметрли оиласини ифодалайди.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ эса марказлари координата бошида ётган эллипсоидларнинг уч параметрли оиласидир.

Сиртларнинг n параметрли оиласи умумий шаклда $F(x, y, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ тенглама билан ифодаланади.

Энди (Γ) чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма сирти тушунчасини берамиз.

Таъриф. (Γ) *чизиқнинг* M_0 *нуқтасидаги ёпишма сирти деб,* $F(x, y, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ *оилага қарашли бўлган ва* (Γ) *нинг* M_0 *нуқтасидан, шунингдек унга яқин* $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ *нуқталаридан ўтган сиртнинг* M_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ *нуқталар* M_0 *га интилгандаги лимит вазиятига айтилади* (106-чизма).



106-чизма.

Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма сиртини топиш учун § 31 да баён этилган мулоҳазаларни такрорлашга тўғри келади.

$F(x, y, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ тенгламада x, y, z лар ўрнига $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ларни қўйиб, ёрдамчи узлуксиз функцияни тузамиз:

$$f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = F[x(t), y(t), z(t), C_1, C_2, \ldots, C_n] = 0.$$

Бу функция $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталарда (яъни $t = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ қийматларда) нолга тенг бўлади:

$$f(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \; f(t_1, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

$$f(t_2, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots, f(t_{n-1}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

§ 31 дагидек, Ролль теоремасини етарли марта такрорлаб, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нуқталарни M_0 га интилтирсак, ушбу шартларга келамиз:

$$f(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F(x(t_0), y(t_0), z(t_0), C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

$$f'(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F'(x(t_0), y(t_0), z(t_0), C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

. . . .

$$f^{(n-1)}(t_0, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = F^{(n-1)}(x(t_0), y(t_0), z(t_0), C_1, C_2, \ldots$$
$$\ldots, C_n) = 0.$$

Бу системани ечиб, $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*$ параметрларни топамиз. Топилган қийматларни $F(x, y, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ га қўйсак, ёпишма сиртнинг тенгламаси келиб чиқади: $F(x, y, z, C_1^*, C_2^*, C_3^*, \ldots, C_n^*) = 0$.

§ 38. Ёпишма текислик

(Γ) чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма текислигини топамиз.

Текисликлар оиласининг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

бунда A, B, C, D параметрларнинг бирортаси нолдан фарқли бўлсин. Масалан, $D \neq 0$ деб фараз қиламиз. Агар (1) тенгламанинг ҳамма ҳадларини D га бўлиб, $\frac{A}{D} = M$, $\frac{B}{D} = N$, $\frac{C}{D} = P$ десак:

$$Mx + Ny + Pz + 1 = 0 \tag{2}$$

бўлади. Энди ёрдамчи функцияни тузамиз: $f(t, M, N, P) = Mx(t) + Ny(t) + Pz(t) + 1$. Параметрларнинг сони учта (M, N, P) бўлганидан, $f(t, M, N, P)$ функция учун қуйидаги уч шарт бажарилади:

$$\begin{aligned} f(t_0, M, N, P) &= Mx(t_0) + Ny(t_0) + Pz(t_0) + 1 = 0,\\ f'(t_0, M, N, P) &= Mx'(t_0) + Ny'(t_0) + Pz'(t_0) = 0,\\ f''(t_0, M, N, P) &= Mx''(t_0) + Ny''(t_0) + Pz''(t_0) = 0 \end{aligned}$$

ёки қисқача

$$\begin{cases} Mx_0 + Ny_0 + Pz_0 + 1 = 0,\\ Mx_0' + Ny_0' + Pz_0' = 0,\\ Mx_0'' + Ny_0'' + Pz_0'' = 0. \end{cases}$$

Ҳосил бўлган системани ечиб, M, N ва P ни топамиз:

$$M = \frac{\begin{vmatrix} -1 & y_0 & z_0 \\ 0 & y_0' & z_0' \\ 0 & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}, \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -1 & z_0 \\ x_0' & 0 & z_0' \\ x_0'' & 0 & z_0'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}, \quad P = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & -1 \\ x_0' & y_0' & 0 \\ x_0'' & y_0'' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}.$$

Бу қийматларни (2) га қўйсак, қуйидаги тенглама келиб чиқади:

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & y_0 & z_0 \\ 0 & y_0' & z_0' \\ 0 & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -1 & z_0 \\ x_0' & 0 & z_0' \\ x_0'' & 0 & z_0'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} y + \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & -1 \\ x_0' & y_0' & 0 \\ x_0'' & y_0'' & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} z + 1 = 0$$

ёки соддалаштиргандан кейин:

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} x_0' & z_0' \\ x_0'' & z_0'' \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

Демак, M_0 нуқтадаги ёпишма текисликнинг тенгламаси ушбудир:

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Мисоллар. 1. $x=\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ чизиқнинг $t=t_0=2$ га мос нуқтасидаги ёпишма текислиги топилсин.

Ечиш. (3) тенгламадан фойдаланамиз: $t_0=2$ қийматда

$$x_0=4;\ y_0=\frac{8}{3};\ z_0=2;\ M_0\left(4:\frac{8}{3}:2\right)\ x'_0=8;\ y'_0=4;\ z'_0=2;$$

$$x''_0=12;\ y''_0=4;\ z''_0=2.$$

Демак:

$$\begin{vmatrix} x-4, & y-\frac{8}{3}, & z-2 \\ 8 & 4 & 2 \\ 12 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } 3y-6z+4=0.$$

Изланган ёпишма текисликнинг тенгламаси шудир.

2. $y^2=x$, $x^2=z$ чизиқнинг M_0 (1, 1, 1) нуқтасидаги ёпишма текислиги аниқлансин. Бу мисолда x ни аргумент қилиб олиш мумкин. Шунинг учун $x'=1$, $x'_0=1$, $x''=0$ $x''_0=0$. Берилган тенгламалардан ҳосила оламиз:

$$2y\cdot y'=1,\ 2x=z' \text{ бундан } y'_0=\frac{1}{2},\ z'_0=2.$$

Энди $2y\cdot y'=1$ ва $2x=z'$ дан яна бир марта ҳосила оламиз: $2y'^2+2y\cdot y''=0$, $y_0'^2+y_0y''_0=0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2+y''_0=0, y''_0=-\frac{1}{4}$. Топилган қийматларни (3) га қўйсак, изланган ёпишма текисликнинг тенгламаси келиб чиқади: $6x+8y-z+3=0$.

§ 39. Чизиққа ёпишма сиртнинг баъзи хоссалари

(Γ) чизиқ ва $F(x, y, z)=0$ сиртнинг умумий M_0 нуқтаси улар учун махсус нуқта эмас деб фараз қиламиз. Демак, M_0 нуқтада, F'_{x_0}, F'_{y_0}, F'_{z_0} лар бирданига нолга айланмайди. Масалан, $F'_{z_0}\neq 0$ бўлсин. (Γ) чизиқда $M[x(t), y(t), z(t)]$ нуқтани олиб, ундан XOY текислигига MP перпендикуляр туширамиз. Агар M нуқта M_0 нуқтага етарлича яқин турса, MP тўғри чизиқ сирт билан фақат бир N нуқтада кесишади, чунки $F'_z\neq 0$ бўлгани учун $F(x, y, z)=0$ сиртни бир қийматли $z=f(x, y)$

функция билан ифодалаш мумкин. (Фихтенгольц, I том, 565-бет). Шу сабабли $x = x(t)$, $y = y(t)$ қийматларни $z = f(x, y)$ га қўйганда бир қийматли функция $z = f[x(t), y(t)]$ ҳосил бўлади.

Сирт устидаги N нуқтанинг координаталари $x(t)$, $y(t)$, Z бўлсин. MN кесма $|z(t) - Z|$ га тенг ва у вертикал тўғри чизиқ бўйлаб (Γ) чизиқнинг M нуқтасидан сиртгача бўлган масофани белгилайди. t ўзгарувчи t_0 га интилганда, M ва N нуқталар M_0 га яқинлаша боради ва шу билан бирга MN кесма нолга интилади.

MN кесманинг $(t - t_0)$ га нисбатан чексиз кичиклик тартибини билиш учун ёрдамчи $f(t) = F[x(t), y(t), z(t)]$ функцияни текширамиз. $t = t_0$ қийматда $f(t_0) = F[x(t_0), y(t_0) - - z(t_0)] = F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Демак, $t \to t_0$ да $f(t)$ чексиз кичик бўлади.

N нуқта $F(x, y, z) = 0$ сиртнинг устида ётгани учун $0 = = F[x(t), y(t), Z]$ шарти бажарилади. Демак, $f(t) - 0 = = F[x(t), y(t), z(t)] - F[x(t), y(t), Z]$ ёки, чекли орттирмалар формуласига асосан,

$$f(t) = F'_z\{x(t), y(t), \theta[z(t) - Z]\}[z(t) - Z],$$

бунда $0 < \theta < 1$. Энди $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)}{z(t) - Z} = \lim F'_z \{x(t) y(t); \theta[z(t) - Z]\} = F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Бу эса, $MN = z(t) - Z$ ва $f(t)$ нинг чексиз кичиклик тартиблари бир хил эканини кўрсатади.

Таъриф. *Агар $f(t)$ функция ёки $[z(t) - Z]$ айирма n-тартибли чексиз кичик бўлса, бу ҳолда чизиқ билан сирт M_0 нуқтада $(n - 1)$-тартибли уринишга эга дейилади.*

Энди қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. *Агар $F(x, y, z, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*) = 0$ сирт чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма сирти бўлса, у ҳолда улар M_0 нуқтада $(n - 1)$- тартибли уринишга эга бўлади.*

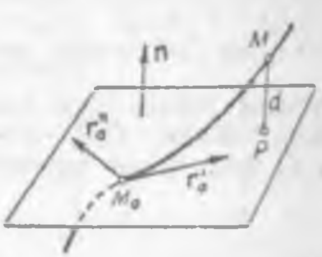
Исбот. Узлуксиз $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функцияларни $F(x, y, z, C^*, \ldots, C_n^*)$ га x, y, z лар ўрнига қўйиб, ёрдамчи $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = F[x(t), y(t), z(t), C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*]$ функцияни ҳосил қиламиз. Бу функциянинг Тейлор қаторига ёйилмаси $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = f^{(n)}(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)(t - t_0)^n + \ldots$ чунки теореманинг шартига асосан, $f_0 = 0$, $f'_0 = 0$, $f''_0 = 0$, $f'''_0 = 0, \ldots, f_0^{(n-1)} = 0$. Бундан $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ функция ва шу билан бирга $d = MN$ масофа ҳам n- тартибли чексиз кичик деган хулоса келиб чиқади. Демак, ҳозирги таърифга мувофиқ, (Γ) чизиқ билан сирт M_0 нуқтада $(n - 1)$- тартибли уринишга эгадир. Шуни исбот қилиш керак эди.

Натижалар:

1. n жуфт бўлганда, M_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида чизиқ сиртнинг бир томонида ётади; n тоқ бўлганда эса, M_0 нинг бундай атрофида чизиқ сиртнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади.

2. Агар чизиқ бутунлай текисликда ётган бўлса, унинг ҳар бир нуқтасидаги ёпишма текислиги худди шу текисликнинг ўзи бўлади, чунки чизиққа энг „яқин жиплашган" текислик, табиий, шу текисликнинг ўзидир.

3. Ёпишма сиртлар назариясига асосан, ёпишма текислик— чизиқнинг ўзаро яқин учта нуқтасидан ўтган текисликнинг лимитидир. Ҳақиқатан ёрдамчи $f(t_1, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари нолга тенг бўлиб, унинг учинчи ҳосиласи эса, умуман, нолга тенг эмас (параметрлар сони учта). Айрим ҳолларда $f''' = 0$ бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун ёпишма текислик M_0 нуқтада чизиқ билан иккинчи (айрим ҳолларда учинчи ёки ундан юқори) тартибли уринишга эгадир ва умуман чизиқнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади. Агар $M(t)$ нуқта чизиқ устида ётган бўлса, $(t - t_0) \to 0$ да ёпишма текисликдан „четланиш", яъни $MN = d$ учинчи тартибли чексиз кичик бўлади.



107-чизма.

Чизиқнинг M_0 нуқтасидан чексиз кўп текисликлар ўтади. Улар орасида фақат ёпишма текислик M_0 нуқтада чизиққа энг яқин туради.

4. Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги уринма ва тезланиш векторлари, яъни $\boldsymbol{r}'_0 = x'_0\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'_0\boldsymbol{k}$ ва $\boldsymbol{r}''_0 = x''_0\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j} + z''_0\boldsymbol{k}$, бу чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма текислигида ётади. Ҳақиқатан, ёпишма текисликнинг тенгламасини $\boldsymbol{rn} + D = 0$ ёки $Ax + By + Cz + D = 0$ дейлик, бу ерда $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ вектор бу текисликка перпендикуляр бўлиб, ёрдамчи функция $f(t) = \boldsymbol{r}(t)\boldsymbol{n} + D$ кўринишни олади.

$\boldsymbol{r}'_0$ билан $\boldsymbol{n}$ нинг скаляр кўпайтмаси $(\boldsymbol{nr}'_0) = Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 = f'(t_0)$ га тенг. Ёпишма сиртлар назариясига асосан, $f'(t_0) = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}'_0) = 0$. Бундан $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{r}'_0$ натижа келиб чиқади (M_0 нуқта чизиғимизнинг махсус нуқтаси эмас, чунки $\boldsymbol{r}'_0 \neq 0$). Худди шунга ўхшаш, $f''(t_0) = \boldsymbol{r}''_0\boldsymbol{n} = 0$, яъни $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{r}''_0$ бўлади. $\boldsymbol{n}$ вектор текисликка перпендикуляр бўлгани учун, $\boldsymbol{r}'_0$ ва $\boldsymbol{r}''_0$ векторлар шу ёпишма текисликда ётади (107-чизма). Шундай қилиб, ёпишма текислик $\boldsymbol{r}'$ ва $\boldsymbol{r}''$ векторлардан ўтувчи текисликдир.

5. Агар t параметрни бошқа бирор параметр (масалан, θ) билан алмаштирсак, $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ва $\boldsymbol{r}''(t_0)$ векторлар ўрнига

$$\boldsymbol{r}'(\theta_0) = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta_0} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt_0}\frac{dt_0}{d\theta_0} = \boldsymbol{r}'(t_0)\frac{dt_0}{d\theta_0}; \ \boldsymbol{r}''(\theta_0) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt_0}{d\theta_0}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt_0}\frac{d^2t_0}{d\theta^2} =$$

$= \boldsymbol{r}''(t_0)\left(\frac{dt_0}{d\theta_0}\right)^2 + \boldsymbol{r}'(t_0)\left(\frac{d^2t_0}{d\theta_0^2}\right)$ ҳосил бўлади. Бундан, $\boldsymbol{r}'(\theta_0)$ ва $\boldsymbol{r}'(t_0)$нинг ўзаро коллинеар эканлиги, $\boldsymbol{r}''(\theta_0)$ эса $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ва $\boldsymbol{r}''(t_0)$ билан компланар эканлиги келиб чиқади. $\boldsymbol{r}'(\theta_0)$ ва $\boldsymbol{r}''(\theta_0)$ векторлар чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтади, шу сабабли бу векторлар ҳам ёпишувчи текисликка жойлашгандир. Бу муҳим натижа келгусида керак бўлади. Биз ҳозир унинг кинематик маъносини очамиз.

Агар чизиқ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ тенглама билан берилиб, t параметр ўрнига $\theta = \theta(t)$ параметр олинса (бунда $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ фараз қилинади), кинематик нуқтаи назардан қараганда траекторияда ҳаракат қонуни ўзгаради. Бу ҳолда

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta} = \boldsymbol{r}'(t)\frac{dt}{d\theta} \quad \text{ва} \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\theta^2} = \boldsymbol{r}''\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \boldsymbol{r}'\frac{d^2t}{d\theta^2}$$

векторлар, янги ҳаракатнинг тезлиги ва тезланишини билдиради. Бундан кўринадики, берилган чизиқ бўйлаб ҳаракат қонуни қандай бўлсада, унинг тезлиги доимо траекториянинг уринмаси бўйлаб йўналади, тезланиши эса ўз йўналишини ўзгартади, бироқ ёпишма текисликдан ($\boldsymbol{r}'$ ва $\boldsymbol{r}''$ нинг текислигидан) ташқарига чиқмайди. Шу сабабли, ёпишма текислик кинематик нуқтаи назардан *тезланишлар текислиги* деб юритилади.

6. Агар ёпишма текислик устида ихтиёрий P нуқтани олиб уни M_0 билан туташтирсак, $\overline{PM_0} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$ вектор $\boldsymbol{r}'_0$ ва $\boldsymbol{r}''_0$ векторлар билан компланар бўлади. Шунинг учун ёпишма текисликнинг вектор тенгламаси

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'' = 0$$

шаклда ёзилади. Бу тенгламанинг координата формаси

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

кўринишни олади. Биз § 38 да ҳосил қилинган тенгламанинг ўзига келдик.

7. $\boldsymbol{r}'_0$ ва $\boldsymbol{r}''_0$ векторлар ўзаро коллинеар бўлмагандагина M_0 нуқтадаги ёпишма текислик тайин бир текисликдир. $\boldsymbol{r}'_0$ ва $\boldsymbol{r}''_0$ векторлар ўзаро коллинеар бўлса, бундай M_0 нуқтада ёпишма текислик аниқмасдир. Бу ҳол чизиқнинг ҳамма нуқталарида юз берса, эгри чизиқ тўғри чизиққа айланади. Демак, эгри

чизиқ учун айрим нуқталардагина бу икки вектор коллинеар бўлиши мумкин. Чизиқнинг r' ва r'' векторлари коллинеар бўлган нуқталари унинг *тўғриланиш нуқталари* дейилади.

Юқорида айтилган фикрни исботлаш қийин эмас: *агар чизиқнинг ҳамма нуқталарида* $r' = \lambda r''$ *шарти бажарилса, чизиқ тўғри чизиқдан иборат булади.* Ҳақиқатан, $x'i + y'j + z'k = \lambda x''i + \lambda y''j + \lambda z''k$ дан $\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'}$ деган хулосага келамиз. Бу тенгламаларни dt га кўпайтирсак, $\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{y'} = \frac{dz'}{z'}$ ҳосил булади Сўнгги тенгламаларни интеграллаймиз: $\ln x' + \ln a = \ln y' + \ln b = \ln z' + \ln c$ ёки потенцирлашдан кейин $ax' = by' = cz'$. Ҳосил бўлган тенгламалардан яна бир марта интеграл олсак, тўғри чизиқнинг $ax + A = by + B = cz + C$ тенгламалари келиб чиқади. Тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги ёпишма текислиги аниқмасдир.

Машқлар

60. $y^2 = x$, $x^2 = z$ чизиқнинг M_0 (1, 1, 1) нуқтасидаги ёпишма текислиги топилсин.

61. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = tv^2$ чизиқнинг ихтиёрий M_0 (x_0, y_0, z_0) нуқтасидаги ёпишма текислиги топилсин.

§ 40. Табиий учёқлик

Фазодаги чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасида чексиз кўп нормаллар бор. Бу нормаллардан қуйидагича таърифланган иккитаси катта аҳамиятга эга.

Таъриф. *Чизиқнинг берилган нуқтасидаги ёпишма текислигига перпендикуляр нормаль бинормаль дейилади. Ёпишма текисликда ётувчи нормаль бош нормаль дейилади.* У ёпишма текислик билан нормал текисликнинг кесишган тўғри чизиғидир.

Чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги уринмаси, бош нормали ва бинормали ўзаро перпендикулярдир. Уринма билан бинормаль орқали ўтган текислик тўғриловчи текислик, бош нормаль билан бинормаль орқали ўтган текислик нормал текислик, уринма ва бош нормалдан ўтган текислик эса ёпишма текисликдир.

Кўрсатилган учта текислик — учи чизиқнинг M нуқтасидан ўтган учёқликни ташкил қилади. Нуқта чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда учёқлик ҳам ҳаракат қила боради.

Чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтган уринма тенгламаси: $\frac{X - x_0}{x'_0} = \frac{Y - y_0}{y'_0} = \frac{Z - z_0}{z'_0}$ ва вектор формадаги тенгламаси $r - r_0 = \lambda r'_0$

бўлиб, нормал текисликнинг тенгламаси: $(X-x)x'_0+(Y-y)y'_0+$ $+(Z-z)z'_0=0$; вектор формада эса $(r-r_0)r'_0=0$. Ёпишма текисликнинг тенгламаси $(r-r_0)r'_0r''_0=0$ ёки

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}=0$$

эканлигини биз биламиз.

Энди бинормалнинг тенгламасини тузамиз. r'_0 ва r''_0 векторлар, маълумки, чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма текислигида ётади. Шунинг учун $B_0=[r'_0\cdot r''_0]$ вектор бинормаль бўйлаб йўналгандир. Агар бинормаль устида ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани олсак, $\overline{M_0M}$ вектор B_0 вектор билан коллинеар бўлади, яъни $\overline{M_0M}=\lambda B_0$. Бунда B_0 векторнинг ёйилмаси:

$$B_0=(y'_0z''_0-y''_0z'_0)\,i+(z'_0x''_0-z''_0x'_0)\,j+(x'_0y''_0-x''_0y'_0)\,k,$$

$\overline{M_0M}$ нинг ёйилмаси эса

$$\overline{M_0M}=(X-x_0)\,i+(Y-y_0)\,j+(Z-z_0)\,k.$$

Шу сабабли бинормалнинг координата формадаги тенгламалари

$$\frac{X-x_0}{y'_0z''_0-z'_0y''_0}=\frac{Y-y_0}{z'_0x''_0-x'_0z''_0}=\frac{Z-z_0}{x'_0y''_0-y'_0x''_0}$$

ва вектор формадаги тенгламаси:

$$r-r_0=\lambda\,[r'_0\,r''_0].$$

Агар $B=[r'r'']$ векторни r' вектор билан векториал кўпайтирсак, B ва r' га тик вектор ҳосил бўлади. Бу вектор чизиқнинг бош нормали бўйлаб йўналгандир. Уни N билан белгилаймиз: $N=[[r'r'']r']$. Икки қайтали векториал кўпайтмани ёйиш формуласига асосан:

$$N=[[r'r'']r']=r''r'^2-r'(r'r'').$$

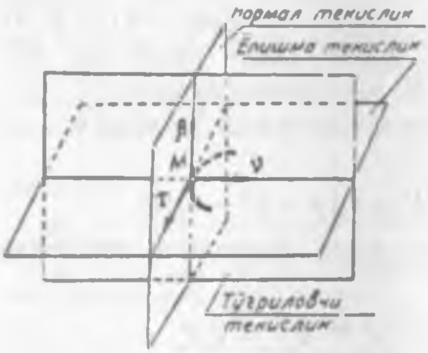
Жумладан, чизиқнинг M_0 нуқтасидаги бош нормаль вектори $N=[(r'_0r''_0)r'_0]$ бўлади. Унинг ёйилмаси $N_0=[[r'_0r''_0]r'_0]=r''_0r'^2_0-$ $-r'_0(r'_0r''_0)$. Бош нормаль векторнинг тўғри бурчакли координата системасидаги ёйилмаси қисқача $N_0=\alpha_0 i+\beta_0 j+\gamma_0 k$ бўлсин. Бу ҳолда тўғриловчи текисликнинг тенгламаси $(x-x_0)\alpha_0+$ $+(y-y_0)\beta_0+(z-z_0)\gamma_0=0$ кўринишни олади, чунки тўғриловчи текислик M_0 нуқтадан ўтиб, N_0 векторга перпендикуляр бўлади.

Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги бош нормали N_0 вектор бўйлаб йўналгандир. Унинг тенгламасини ёзиш учун бош нормалда ихтиёрий M нуқтани оламиз. Натижада $\overline{M_0M}$ ва N_0 векторлар ўзаро коллинеар бўлади: $\overline{M_0M} = \lambda N_0$. Агар N_0 нинг ёйилмаси $N_0 = \alpha_0 i + \beta_0 j + \gamma_0 k$ шаклда олинса, бош нормалнинг тенгламаларини

$$\frac{x - x_0}{\alpha_0} = \frac{y - y_0}{\beta_0} = \frac{z - z_0}{\gamma_0}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бош нормалнинг бирлик вектори, одатда, $\bar{\nu}$ билан белгиланади, у $\frac{N}{|N|}$ га тенгдир: $\bar{\nu} = \frac{N}{|N|} = \pm \frac{N}{\sqrt{(N \cdot N)}} = \pm \frac{r'' \cdot r' - r'(r' \cdot r'')}{\sqrt{N^2}}$; ишорани шундай танлаб оламизки, натижада $\bar{\nu}$ вектор чизиқнинг ботиқлик томонига йўналган бўлсин. Иккинчи томондан, $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ вектор ҳам чизиқнинг ботиқлик томонига йўналган (108-чизма).



108-чизма.

Эслатма. Тезланиш вектори r'' ҳам чизиқнинг ботиқлик томонига йўналган, чунки $r''N = r''^2 r'^2 - (r' r'')^2 = [r'r'']^2 > 0$, яъни r'' ва N векторлар орасидаги бурчак ўткирдир.

Агар бинормалнинг бирлик векторини $\bar{\beta}$ билан белгиласак,

$$\frac{B}{|B|} = \frac{B}{\pm\sqrt{B^2}} = \frac{[r'r'']}{\pm\sqrt{(r' \cdot r'')^2}} = \frac{(r'r'')}{\pm\sqrt{r'^2 r''^2 - (r'r'')^2}}$$

га эга бўламиз. Бу ерда ҳам мусбат ишорали илдизни олишга тўғри келади; чунки шу ҳолдагина, XYZ координата системаси сингари, $\bar{\tau}, \bar{\nu}$ ва $\bar{\beta}$ дан ўнг системали тўғри бурчакли координата системаси ҳосил бўлади.

Мисол. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ чизиқнинг $t = t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги уринма, бинормаль, бош нормаль, нормал текислик, тўғриловчи текислик тенгламалари ёзилсин ва $\bar{\tau}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\nu}$ векторлар аниқлансин.

Ечиш: чизиқ тенгламаларидан ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x'_0 &= 2 \qquad & x''_0 &= 2 \\ y'_0 &= -1 \qquad & y''_0 &= 0 \\ z'_0 &= 3 \qquad & z''_0 &= 6 \end{aligned}$$

Демак, уринма тенгламалари:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 0}{-1} = \frac{z - 1}{3},$$

нормал текислик тенгламаси:

$$2x - y + 3z - 5 = 0,$$

ёпишма текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

ёки $3x + 3y - z - 8 = 0$.

M нуқтадаги уринма вектор $r' = 2i - j + 3k$ кўринишга эга. Яна $\bar{\tau} = \frac{r_0'}{|r_0'|} = \frac{2i - j + 3k}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}} i - \frac{1}{\sqrt{14}} j + \frac{3}{\sqrt{14}} k$; $B_0 = [r_0' r_0''] =$

$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6i - 6j + 2k$; бинормаль тенгламалари:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}.$$ Сўнгра

$$\bar{\beta}_0 = \frac{B}{|B_0|} = \frac{-6i - 6j + 2k}{\sqrt{36+36+4}} = \frac{-3i - 3j + k}{\sqrt{19}} = \frac{-3}{\sqrt{19}} i - \frac{3}{\sqrt{19}} j + \frac{1}{\sqrt{19}} k;$$

$$N_0 = [r_0' B_0] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 16i - 22j - 18k;$$

бош нормаль тенгламалари: $\frac{x-9}{8} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-9}$;

тўғриловчи текислик тенгламаси: $8x - 11y - 9z + 1 = 0$.

Машқлар

62. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3 + 4$ чизиқнинг $t = t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги уринма, нормал текислик, бинормаль, ёпишма текислик, бош нормал, тўғриловчи текислик ва $\bar{\tau}_0$, $\bar{\beta}_0$, $\bar{\gamma}_0$ лар топилсин.

63. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ чизиқнинг M_0 (1, 1, 1) нуқтасидаги уринмаси, нормал текислиги, бош нормали, тўғриловчи текислиги, бинормали, ёпишма текислиги ва $\bar{\tau}_0$, $\bar{\beta}_0$, $\bar{\gamma}_0$ лар топилсин.

§ 41. Ёй узунлиги, уни параметр сифатида олиш.

$r = r\,(t)$ тенглама билан берилган чизиқнинг бирор чекли AB ёйини олиб, t параметр t_0 дан $t_n = T$ гача ўзгаради дейлик: $T > t_0$. Бу ерда $t = t_0$ қийматга A нуқта, $t = T$ қийматга эса B нуқта мос келади. Чизиқнинг нуқталари t нинг ўсишига қараб тизилган деб ҳисоблаш билан, чизиқда йўналиш ҳосил қиламиз. Энди AB ёйда кўрсатилган йўналиш бўйича биринкетин жойлашган:

$$A = M_0(t_0),\ M_1(t_1), \ldots, M_i(t_i),\ M_{i+1}(t_{i+1}), \ldots, M_n(t_n) = B$$

нуқталарни олиб, AB ёйга ички чизилган $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ синиқ чизиқ билан иш кўрайлик.

Агар M_iM_{i+1} кесмаларнинг сони чексизликка интилиб, ҳар бир кесма узунлиги нолга интилганда, ички чизилган синиқ чизиқнинг периметри учун чекли ва синиқ чизиқни чизиш қонунига боғлиқ бўлмаган ρ *лимит мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит AB ёйнинг узунлиги деб айтилади*[1]):

$$s = AB = \lim \Sigma M_iM_{i+1}.$$

Ёй узунлиги учун тегишли формулани чиқарайлик.

Синиқ чизиқнинг бўғини $M_iM_{i+1} = |\overline{M_iM_{i+1}}| = |r(t_{i+1}) - r(t_i)|$ га тенгдир.

Шу билан бирга: $\lim \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} = r'(t_i)$, бундан эса $\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ ва $r'(t_i)$ векторлар ораснdаги айирма чексиз кичик α векторга тенг деган натижага келамиз:

$$\bar{\alpha} = \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - r'(t_i).$$

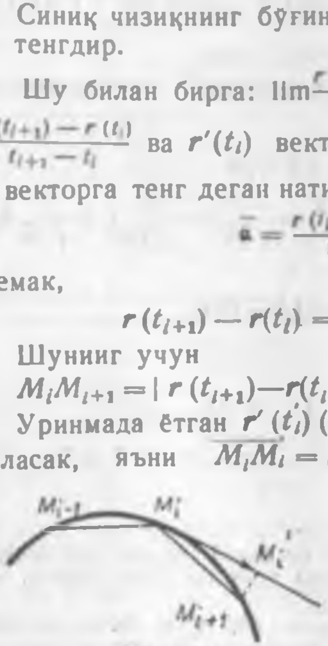
Демак,

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = r'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \bar{\alpha}(t_{i+1} - t_i).$$

Шуниг учун

$M_iM_{i+1} = |r(t_{i+1}) - r(t_i)| = |r'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \bar{\alpha}(t_{i+1} - t_i)|.$

Уринмада ётган $r'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ векторни $\overline{M_iM_i'}$ билан белгиласак, яъни $\overline{M_iM_i'} = r'(t_i)(t_{i-1} - t_i)$ десак, $\overline{M_i'M_{i+1}} = \bar{\alpha}(t_{i+1} - t_i)$ бўлади (109-чизма).



109-чизма.

Энди синиқ чизиқнинг M_iM_{i+1} бўғинлари ўрнига уринмадаги тегишли M_iM_i' кесмаларни олиш, демак, ΣM_iM_{i+1} йиғинди ўрнига $\sum M_iM_i'$ йиғинди билан иш кўриш мумкинлигини исботлайлик.

Бунинг учун $\sum M_iM_{i+1} - \sum M_iM_i'$ айирма лимитининг нолга тенглигини исботлаш етарлидир. Ҳақиқатан,

$$\sum M_iM_{i+1} - \sum M_iM_i' = \sum (M_iM_{i+1} - M_iM_i').$$

Агар $r(t) = r(t_i) + r'(t_i)(t - t_i) + \frac{r''(t_i)(t - t_0)^2}{2!} + \frac{1}{3!} r'''(t_i) \times (t - t_i)^3 + \ldots$ ёйилмада t ўрнига t_{i+1} ни ёзиб, иккинчи ҳаддан кейинги ҳадларни олмасак, $r(t_{i+1}) - r(t_i) = r'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} r''(t_i')(t_{i+1} - t_i)^2$ бўлади, бунда $t_{i+1} < t_i' < t_i$. Демак,

[1]) Чизиқнинг ўзи эса бу ҳолда *тўғриланувчи чизиқ* дейилади.

$\overline{M_iM_{i+1}} = r(t_{i+1}) - r(t_i) = r'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} r''(t_i')(t_{i+1} - t_i)^2$

ёки $\left| M_iM_{i+1} - M_iM_i' \right| = \frac{1}{2} \left| r''(t_i') \right| \cdot \left| (t_{i+1} - t_i)^2 \right| = \frac{1}{2} C'(t_{i+1} - t_i)^2$, бу ерда $\left| r''(t_i') \right| = C_1$. Йиғиндининг модули қўшилувчилар модулларининг йиғиндисидан катта эмас, шу сабабли $\left| \Sigma M_i - M_{i+1} - \Sigma M_iM_i' \right| < \Sigma |M_iM_{i+1} - M_iM_i'| = \frac{1}{2} C_1 \Sigma (t_{i+1} - t_i)^2$. Агар $(t_{i+1} - t_i)$ ларнинг энг каттасини Δ билан белгилаб, $t_{i+1} - t_i$ ўрнига Δ ни олсак, тенгсизлик яна ҳам кучаяди: $\left| \Sigma M_iM_{i+1} - \Sigma M_iM_i' \right| < \frac{1}{2} C_1 \Delta \cdot (t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2} C_1 \cdot \Delta \cdot \Sigma (t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2} C_1 \cdot \Delta (T - t_0)$. Лимитга ўтганда, Δ нолга тенг бўлади, C_1 ва $T - t_0$ эса чекли сонлар. Шунинг учун $\lim \frac{1}{2} C_1 \cdot \Delta \cdot (T - t_0) = 0$ ва, демак, $\lim \left| \Delta M_iM_{i+1} - \Sigma M_iM_i' \right| = 0$, бундан $\lim \Sigma M_iM_{i+1} = \lim \Sigma M_iM_i'$. Шуни исботлаш керак эди.

AB ёйнинг узунлиги учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$s = \lim \Sigma M_iM_{i+1} = \lim \Sigma M_iM_i' = \lim \Sigma \left| r'(t_i) \right| \Delta t_i = \int_{t_0}^{T} |r'(t)| dt.$$

Шундай қилиб, $s = \int_{t_0}^{T} |r'(t)| dt$ ёки Декарт системасида

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot dt.$$

Агар $r = r(t)$ чизиқ XOY текислигида ётган бўлса, у ҳолда

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot dt.$$

Чизиқнинг хоссаларини текширишда параметр қилиб ихтиёрий узлуксиз ўзгарувчини олиш мумкин. Аммо чизиқ билан зич боғланган ёй узунлигини параметр сифатида олсак, чизиқнинг кўп хоссаларини текширишда ва тегишли формулаларни чиқаришда анча енгиллик туғилади.

$r = r(t)$ чизиқ берилган бўлсин; t_0 қийматдан қийматгача мос келган ёй узунлиги ушбуга тенг:

$$s = \int_{t_0}^{t} |r'(t)| dt. \qquad (1)$$

$t > t_0$ бўлганда, s мусбат бўлиб, $t < t_0$ бўлганда эса, s манфийдир. Шу билан бирга t монотон ўзгарганда s ҳам монотон ўзгаради. Демак, чизиқ ёйини интегралнинг юқори чегараси бўлган t нинг узлуксиз ва бир қийматли функцияси деб қараш мумкин, яъни $s = s(t)$. Бу натижани назарда тутиб, (1) интегралдан ҳосила олсак, $\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| > 0$ бўлади. $\frac{ds}{dt}$ доимо нолдан катта бўлгани учун, $s(t)$ — монотон ўсувчи функциядир. Бу функция манфий $s(T_0) < 0$ қийматдан ($t = T_0 < t_0$) мусбат $s(T) > 0$ қийматгача ($t = T > t_0$) узлуксиз равишда ўзгаради. $t = t_0$ қийматда $s(t_0) = 0$ бўлади. Шунинг учун, $s = s(t)$ дан t ни топиш мумкин, у s нинг бир қийматли функцияси бўлади: $t = t(s)$. Шундай қилиб, s нинг ҳар бир қийматига t нинг маълум бир қиймати мос келади. Демак, s ёйни параметр қилиб олиш мумкин. Бу вақтда чизиқнинг тенгламаси $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[t(s)]$ шаклда ёки қисқача

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \tag{2}$$

шаклда ёзилади. (2) тенгламанинг координата формаси қуйидагичадир:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Чизиқ тенгламасида параметр сифатида t олинган бўлса, ундан s параметрга ўтиш учун, $s = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$ нинг ёрдами билан $s = s(t)$ дан t ни йўқотиш керак.

Мисол: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ винт чизиқнинг s параметр билан ифодаланган тенгламалари топилсин. Чизиқнинг $t = 0$ дан t гача узунлигини аниқлаймиз:

$$s = \int\limits_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\cdot dt = \int\limits_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\cdot dt = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot t.$$

Бундан $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Демак, винт чизиқнинг s параметр билан ифодаланган тенгламалари $x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Машқлар

64. Тенгламалари $x^2 = 3y$, $2xy = 3z$ бўлган чизиқнинг $M(0, 0, 0)$ ва $M(3, 3, 3)$ нуқталари орасидаги ёй узунлиги топилсин.

65. $y^2 = 2x$ чизиқнинг $M_0(2, 2)$ ва $M_1(8, 4)$ нуқталари орасидаги ёй узунлиги топилсин.

66. $x = \frac{t^2}{2}$, $y = 1 - t$, $z = \frac{t^3}{3}$ чизиқнинг тенгламалари s параметр билан ифодалансин.

67. $y^2 = 2px$ чизиқнинг тенгламаси s параметр билан ифодалансин.

68. $x = t$, $y = t^3$ чизиқнинг тенгламалари s параметр билан ифодалансин.

Эслатма. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ чизиқнинг бирор t нуқтасидаги уринмасининг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};\ \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};\ \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Буларда $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ бўлгани учун, $\cos\alpha = \frac{x'}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dx}{ds}$,

$\cos\beta = \frac{y'}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dy}{ds}$; $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$ келиб чиқади. Агар чизиқ

XOY текислигида ётган бўлса, $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ ва $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ га асосан $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ бўлади.

s параметр билан ифодаланган формулаларни ихтиёрий t параметр билан ҳам ифодалаш лозим бўлади, чунки амалда учрайдиган кўпгина чизиқларнинг тенгламаларида ихтиёрий t параметр иштирок этади.

$r = r(t)$ вектор-функциянинг t бўйича олинган ҳосилаларини $\frac{dr}{dt} = r'$, $\frac{d^2r}{dt^2} = r''$ билан белгилаган эдик. Энди $r = r(s)$ вектор-функциянинг s бўйича олинган ҳосилаларини $\frac{dr}{ds} = \dot{r}$, $\frac{d^2r}{ds^2} = \ddot{r}$ шаклда белгилаймиз.

$\dot{r}$ нинг геометрик маъносини аниқлаймиз: $\dot{r} = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = r' \frac{dt}{ds} = \frac{r'}{\frac{ds}{dt}}$ ёки, $|r'| = \frac{ds}{dt}$ га асосан, $\dot{r} = \frac{r'}{|r'|}$ келиб чиқади. Агар r' векторни ўз модулига бўлсак, бирлик вектор вужудга келади; демак, $r = r(s)$ вектордан s бўйича олинган ҳосила *бирлик вектор бўлиб, уринма бўйича йўналгандир*. Бундан буён биз уринманинг бирлик векторини $\bar{\tau}$ орқали белгилаймиз, шундай қилиб, $\bar{\tau} = \frac{dr}{ds} = \dot{r}$ — бирлик вектордир. Бундан: $|\bar{\tau}| = |\dot{r}| = 1$ ёки $1 = \frac{|dr|}{|ds|}$ ҳосил қилинади, яъни ватарнинг *шу ватарга тиралган ёйга нисбатининг лимити бирга тенг деган муҳим натижа келиб чиқади.*

Аксинча, $s = \int_{t_0}^{t} |r'|\,dt$ да ихтиёрий t параметр бўйича олинган r' ҳосиланинг модули бирга тенг бўлса, бу параметр s параметрнинг ўзи бўлади. Ҳақиқатан, $s = \int_0^t |r'|\,dt = \int_0^t 1\cdot dt = t.$

Чизиқнинг ёй узунлиги тушунчаси нозик ва қийин тушунчалардан бири бўлиб, биз унинг анализи устида тўхтамадик. Бу тушунча билан тўлароқ танишишни истаган ўқувчига махсус асарларни тавсия қиламиз[1]).

Ушбу

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

тенгликдан:

$$ds = |dr| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ёки

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Параметр сифатида x олинган бўлса, тегишли формулалар ўзгаради:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\,dx.\quad ds^2 = [1 + y'^2(x) + z'^2(x)]\,dx^2,$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\,dx.$$

Текисликдаги чизиқ учун эса:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,\quad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

ва

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx,\quad ds^2 = dx^2 + dy^2,\quad ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx. \quad (3)$$

Текисликдаги чизиқнинг тенгламаси қутб координаталарида берилган бўлсин: $\rho = \rho(\varphi)$, у ҳолда чизиқнинг параметрик тенгламалари: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin(\varphi)$, $z = 0$ бўлиб, булардан φ бўйича ҳосила олсак:

$$x'(\varphi) = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi,\quad y'(\varphi) = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,\quad z' = 0$$

---

[1]) Г. М. Фихтенгольц, Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси, I том, 235—237 пунктлари; II том, 318—321 пунктлари, Г. Лебег, Об измерении величин, Москва, 1938, В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, 1935, 24—26-бетлар. В. Немицкий и др. Курс математического анализа, 1957, I том, 414—421-бетлар.

келиб чиқади; буларнинг квадратларининг йиғиндиси:

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)$$

бўлиб, бундан:

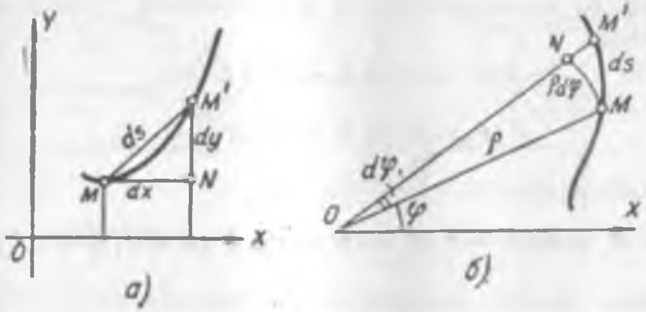
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \qquad (4)$$

Қатъийлик — талабчанлик мулоҳазаларидан воз кечилса, яъни дифференциаллар ўрнига чекли орттирмаларга йўл қўйилса, (3) ва (4) формулаларни исбот қилиш осон (110-чизма). Фараз этайлик:

$$M(x, y), \; M'(x + dx, y + dy),$$
$$M(\rho, \varphi), \; M'(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi)$$

бўлсин.

110 (а)-чизмада тўғри бурчакли MNM' учбурчакдан „Пифагор теоремасига“ кўра $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Худди шунинг син-



110-чизма

гари, 110 (б)-чизмада шу теореманинг ўзига асосан, эгри томонли MNM' учбурчакни тўғри томонли деб қабул қилиб,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

ни ҳосил қиламиз.

Машқ

69. Циклоида:

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t) \; (0 < t < 2\pi)$$

берилган. Бу ердан:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

Циклоиданинг битта тармоғи олинса,

$$S = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a$$

бўлади, яъни циклоиданинг бир тармоғининг узунлиги ғилдировчи айлана диаметрининг тўрт бараварига тенгдир.

§ 42. Фазовий чизиқларнинг ёпишиши. Ёпишма айлана

Икки чизиқни олайлик:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s), \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(s). \tag{1}$$

Бу чизиқлар умумий M_0 нуқтага эга бўлсин.

Бу чизиқларда, мос равишда, шундай M ва M' нуқталарни оламизки, улар s нинг бир хил қийматига ва M_0 нуқта иккала чизиқда ҳам $s=0$ қийматга мос келсин; чизиқларнинг M_0 атрофида бир-биридан четланишини $\overline{MM'}$ вектор билан ўлчаймиз.

Агар $\overline{MM'}$ вектор s *га нисбатан* $(n+1)$*-тартибли чексиз кичик бўлса,* (1) *чизиқлар* M_0 *нуқтада* n*-тартибли ёпишувга эга деймиз.*

Энди бу функцияларни $s=0$ атрофида Тейлор қаторига ёйилик:

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(0)+\dot{\boldsymbol{r}}s+\ddot{\boldsymbol{r}}\frac{s^2}{2}+\ldots$$

$$\boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{R}(0)+\dot{\boldsymbol{R}}s+\ddot{\boldsymbol{R}}\frac{s^2}{2}+\ldots.$$

Ёйилмалардан:

$$\overline{MM'}=\boldsymbol{R}(s)-\boldsymbol{r}(s)=(\dot{\boldsymbol{R}}-\dot{\boldsymbol{r}})s+(\ddot{\boldsymbol{R}}-\ddot{\boldsymbol{r}})\frac{s^2}{2}+\ldots.$$

бу ерда

$$\boldsymbol{R}(0)-\boldsymbol{r}(0)=0.$$

Берилган чизиқлар $M_0(s=0)$ нуқтада n-тартибли ёпишувга эга бўлиши учун, ушбу шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир:

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{R}}=\ddot{\boldsymbol{r}},\ \ldots,\ \overset{(n)}{\boldsymbol{R}}=\overset{(n)}{\boldsymbol{r}},\ \overset{(n+1)}{\boldsymbol{R}}\neq\overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}.$$

Бу $(n+1)$ та шартни координата формасида ёзсак, $3n$ та тенглик ва 3 та тенгсизлик ҳосил бўлади.

Энди чизиқнинг ё п и ш м а а й л а н а с и тушунчасига ўтамиз. § 32 да текисликдаги чизиқ учун ёпишма айлана тушунчаси баён қилинган эди. Фазодаги чизиққа нисбатан ҳам бу тушунчани тайинлаш мумкин.

Таъриф. *Чизиқнинг бирор* $M_0(s_0)$ *нуқтасидаги* ***ё п и ш м а а й л а н а с и*** *деб, унинг билан* ***и к к и н ч и т а р т и б л и ё п и ш у в г а*** *эга бўлган айланага айтамиз.*

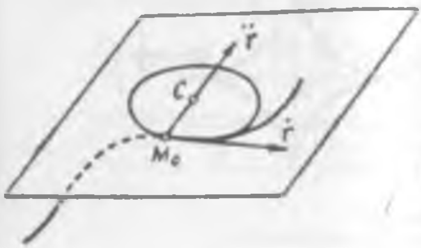
Бу айлана чизиқдаги M_0 нуқтадан ва унга яқин турган M_1, M_2 нуқталардан ўтувчи айлананинг M_1, M_2 нуқталар M_0 га интилгандаги лимит вазиятидир.

Ёпишма айлананинг таърифига кўра, M_0 нуқтада чизиқ ва айлана учун $\dot{r}$ ва $\ddot{r}$ векторлар умумий бўлиб, демак, айлана маркази бош нормалда ётади, шу сабабли (111-чизма):

$$\overline{M_0C} = R\bar{\nu},$$

бу ерда R — ёпишма айлана радиуси.

Ёпишма айлана ва ёпишма текисликнинг чизиқдан четланиши 3-тартибли чексиз кичик бўлгани сабабли, айлана шу



111-чизма.

112-чизма.

текисликда ётади. Шунинг учун, ёпишма айлана марказини чизиқнинг *эгрилик маркази* десак бўлади (текисликдаги чизиқ сингари). Бу марказнинг радиус-векторини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$r_c = r + R\bar{\nu}. \tag{2}$$

Чизиқдаги M_0 нуқта атрофини шу нуқтадаги ёпишма текисликка проекцияласак (§ 50), ёпишма айлана унинг билан 2-тартибли ёпишувга эга бўлади, бу айлана проекция учун ҳам ёпишма айлана вазифасини бажаради (биз охирги тасдиқни исботламаймиз (112-чизма).

Мисол. Винт чизиқ учун эгрилик марказларининг геометрик ўрни топилсин.

Винт чизиқ тенгламаси: $r = a\,e(\varphi) + b\varphi k$ бўлиб,

$$R = \frac{a^2 + b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}, \quad \bar{\nu} = -e(\varphi).$$

Бу қийматларни (2) га қўйсак:

$$r_c = -\frac{b^2}{a}e(\varphi) + b\varphi k$$

келиб чиқади, яъни яна винт чизиқ ҳосил бўлади.

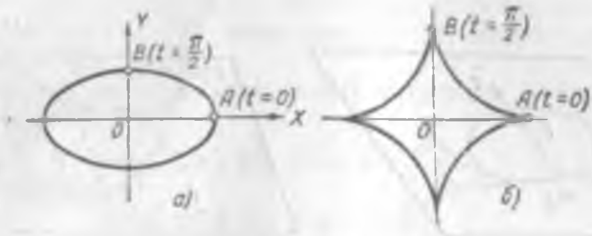
Машқлар

70. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ эллипснинг узунлиги AB ёй узунлигининг тўрт бараварига тенг (113а-чизма).

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,$$

бунда $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет.

Бу интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди (бу — эллиптик интеграл), уни тақрибий ҳисоблаш мумкин.

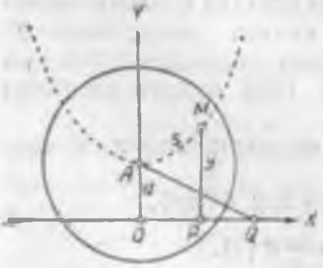


113-чизма.

71. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ астроиданинг узунлиги AB ёй узунлигининг тўрт бараварига тенг (113б-чизма):

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a\cos t\sin t)\,dt = 4\,\frac{3}{2}\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6a.$$

72. Занжир чизиқ (114-чизма): $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.



114-чизма.

Бундан:

$$y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a},\ \sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = \frac{y}{a};$$

$$s = \int_0^x \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}.$$

Демак,

$$y^2 = a^2\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a},\ s^2 = a^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a},$$

$$y^2 - s^2 = a^2\left(\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a} - \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}\right) = a^2,$$

бу ердан:

$$\overset{\frown}{AM} = s = \sqrt{y^2 - a^2} = OQ.$$

Бу эса занжир чизиқнинг AM ёйини тўғрилаш усулини беради. Шундай қилиб, бу ёй — гипотенузаси M нуқтанинг ординатасига ва бир катети a га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг иккинчи катетига тенгдир. Демак, маркази A нуқтада ётган ва радиуси $PM = y$ га тенг бўлган айлана OX ўқини шундай Q нуқтада кесиб ўтадики, OQ кесма тўғриланувчи $\overset{\frown}{AM} = s$ ёйга тенг бўлади.

73. Архимед спирали: $\rho = a\varphi$; $\rho' = a$ берилган.
Бу ерда:

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \lg\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right].$$

74. Гиперболик винт чизиқ:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at$$

нинг 0 ва t қийматларга мос нуқталари орасидаги ёй узунлиги топилсин:

$$s = a\int_0^t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 t}\,dt = a\int_0^t\sqrt{2\mathrm{ch}^2 t}\,dt = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t.$$

75. Қутб координаталарида берилган чизиқ ёйининг дифференциали учун чиқарилган $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\rho^2$ формулани бошқача ҳам исботлаш мумкин. Равшанки, $r = \rho e(\varphi)$, бунда $e(\varphi)$ — бирлик доиравий вектор-функция. Бу ердан:

$$dr = d\rho\, e(\varphi) + \rho\, e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)d\varphi,$$

демак,

$$ds^2 = dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,$$

чунки

$$e^2(\varphi) = 1, \; e(\varphi)\cdot e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad e^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

76. Винт чизиқ берилган:

$$x = 3a\cos t, \quad y = 3a\sin t, \quad z = 4at.$$

Бу чизиқнинг XOY текислиги билан кесишган нуқтасидан ихтиёрий $M(t)$ нуқтасигача олинган ёйнинг узунлиги ҳисоблансин.

Жавоб: $s = 5at$.

77. Чизиқ берилган: $y = \frac{x^3}{3a^2}$, $z = \frac{a^2}{2x}$. Бу чизиқнинг $y = \frac{a}{3}$ ва $y = 9a$ текисликлар орасидаги ёйининг узунлиги топилсин.

Жавоб: $s = 9a$.

78. Гиперболик $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$ винт чизиқнинг тенгламаларида параметр сифатида ёй узунлиги олинсин.

Ечиш. 74-мисолда $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$ ни топган эдик. Шунинг учун:

$$x = a\sqrt{1 + \frac{s^2}{2a^2}}, \quad y = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad z = a\cdot\mathrm{Arc\,sh}\,\frac{s}{a\sqrt{2}}.$$

Еттинчи боб

ФРЕНЕ ФОРМУЛАЛАРИ, ЭГРИЛИК, БУРИЛМА

§ 43. Френе формулалари

Табиий учёқликнинг қирраларидаги бирлик векторларни $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ билан белгилаган эдик. Нуқта чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, учёқлик ва шу билан бирга бу векторлар ҳам ўзгара боради. Энди чизиғимизда параметр сифатида s ёй узунлиги олинса, $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ лар шу s нинг функциялари бўлади:

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}(s),\quad \bar{\nu}(s),\quad \bar{\beta}=\bar{\beta}(s).$$

Бу бирлик векторларнинг ўзгаришини билиш учун, уларнинг s бўйича ҳосилаларини оламиз:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\dot{\bar{\tau}},\quad \frac{d\bar{\nu}}{ds}=\dot{\bar{\nu}},\quad \frac{d\bar{\beta}}{ds}=\dot{\bar{\beta}}.$$

Векторлар алгебрасининг маълум теоремасига асосан[1] $\dot{\bar{\tau}}$, $\dot{\bar{\nu}}$, $\dot{\bar{\beta}}$ нинг ҳар бирини $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ орқали ифодалаш мумкин:

$$\dot{\bar{\tau}}=a_1\bar{\tau}+b_1\bar{\nu}+c_1\bar{\beta},$$

$$\dot{\bar{\nu}}=a_2\bar{\tau}+b_2\bar{\nu}+c_2\bar{\beta},$$

$$\dot{\bar{\beta}}=a_3\bar{\tau}+b_3\bar{\nu}+c_3\bar{\beta}.$$

Бизнинг вазифамиз: a_i, b_i, c_i коэффициентларни топишдир. $\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\dot{\bar{r}}$ бирлик вектор, шу сабабли унинг ҳосиласи $\dot{\bar{\tau}}=\ddot{\bar{r}}$ бўлиб, у $\bar{\tau}$ нинг ўзига тикдир; демак, $\ddot{\bar{r}}$ нормал текисликда ётади. Бироқ, $\ddot{\bar{r}}=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ вектор радиус-векторларнинг иккинчи ҳосиласи бўлгани учун, у албатта ёпишма текисликда ётади (§ 40). Демак, $\ddot{\bar{r}}$ вектор нормал текислик билан ёпишма текисликнинг кесишган чизиғи бош нормал бўйича йўналгандир.

---

[1] Компланар бўлмаган ҳар қандай учта вектор берилса, тўртинчи векторни шуларнинг йўналишлари бўйича ягона равишда ёйиш мумкин.

Агар $|\ddot{\bar r}|$ ни k ҳарфи билан белгиласак, у ҳолда $\ddot{\bar r} = k\bar\nu$ бўлиб, k — чизиқнинг эгрилиги бўлганидан, $\ddot{\bar r}$ ни *эгрилик вектори* деб аташга асос туғилади. Демак,

$$\dot{\bar\tau} = \ddot{\bar r} = k\bar\nu. \tag{1}$$

Бу — Френенинг биринчи формуласидир. Энди $\dot{\bar\beta}$ ни топамиз. Маълумки, $\bar\beta = [\bar\tau\,\bar\nu]$. Бундан ҳосила оламиз:

$$\dot{\bar\beta} = [\dot{\bar\tau}\,\bar\nu] + [\bar\tau\,\dot{\bar\nu}].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳад нол-векторга айланади, чунки (1) га кўра:

$$[\dot{\bar\tau}\,\bar\nu] = k[\bar\nu\,\bar\nu] = 0, \text{ демак, } \dot{\bar\beta} = [\bar\tau\,\dot{\bar\nu}].$$

Шундай қилиб, $\dot{\bar\beta}$ вектор $\bar\tau$ га ва $\bar\beta$ га (чунки $\bar\beta$ — бирлик вектор ва $\bar\beta\dot{\bar\beta} = 0$). Шуларга асосан, $\dot{\bar\beta}$ вектор ҳам бош нормаль бўйича йўналган бўлиб, $\bar\nu$ га коллинеардир; коллинеарлик коэффициентини — σ билан белгилайлик:

$$\dot{\bar\beta} = -\sigma\bar\nu.$$

$\dot{\bar\beta}$ вектор — чизиқнинг бурилиш вектори, σ эса чизиқнинг *буралмаси* (кручение) ёки *иккинчи эгрилиги* дейилади. Бу формула Френенинг учинчи формуласидир.

Энди $\dot{\bar\nu}$ га ўтайлик; $\bar\tau$, $\bar\nu$, $\bar\beta$ векторлар худди ўнг Декарт системасининг $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ бирлик векторлари сингари жойлашган, шу сабабли: $\bar\nu = [\bar\beta\,\bar\tau]$. Бундан ҳосила оламиз:

$$\dot{\bar\nu} = [\dot{\bar\beta}\,\bar\tau] + [\bar\beta\,\dot{\bar\tau}] = [-\sigma\,\bar\nu\,\bar\tau] + [k\bar\beta\,\bar\nu]$$

ёки

$$\dot{\bar\nu} = -\sigma[\bar\nu\,\bar\tau] + k[\bar\beta\,\bar\nu].$$

Аммо

$$[\bar\nu\,\bar\tau] = -\bar\beta, \quad [\bar\beta\,\bar\nu] = \bar\tau.$$

Демак:

$$\dot{\bar\nu} = -k\bar\tau + \sigma\bar\beta.$$

Бу — Френенинг иккинчи формуласидир. Хуллас, юқорида эслатилган ёйилмалар қуйидагича бўлади:

$$\dot{\bar\tau} = k\bar\nu, \quad \dot{\bar\nu} = -k\bar\tau + \sigma\bar\beta, \quad \dot{\bar\beta} = -\sigma\bar\nu. \tag{2}$$

Френенинг бу учта формуласи фазовий чизиқлар назариясида катта аҳамиятга эга бўлиб, уларга кирувчи k эгрилик ва σ бурилма чизиқнинг соф геометрик хоссаларини ифодалайди. Буни келгусида (§ 48) кўрамиз, шунингдек k ва σ ни ҳисоблашнинг тегишли формулаларини берамиз.

Ёйилма коэффициентларидан

$$\begin{Vmatrix} 0, & k, & 0 \\ -\sigma, & 0, & k \\ 0, & -\sigma, & 0 \end{Vmatrix}$$

матрицани тузиб, унинг қийшиқ симметрик матрица эканини кўрамиз.

§ 44. Френе формулаларининг кинематик маъноси. Табиий учёқликнинг ҳаракати

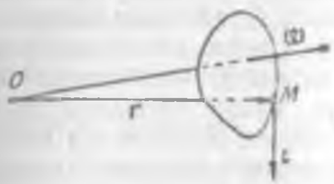
Кинематикадан маълумки, қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ҳаракати параллел кўчириш (илгариланма ҳаракат)дан ва қўзғалмас ўқ атрофида айланишдан иборат иккита содда ҳаракатга ажралади. Жисм илгариланма ҳаракат қилса, унинг ҳамма нуқталари бир хил векторга силжийди. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда эса, жисмга қарашли битта тўғри чизиқ ўз ҳолатини ўзгартмасдан, жисмнинг бошқа нуқталари шу ўққа тик текисликларга жойлашган ва марказлари ўқда ётган айланаларни чиза боради. Демак, ҳар бир моментда жисм нуқталарининг тезлиги иккита элементар ҳаракат тезлигидан тузилади: а) илгариланма ҳаракат тезлиги (бунинг натижасида жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил тезликка эга бўлиб, лекин вақт ўтиши билан у тезлик ўзгара боради); б) оний ҳаракат тезлиги (бунда жисмга қарашли битта тўғри чизиқ ўзгармай қолади).

Чизиқ бўйлаб ҳаракат қилинганда, унинг табиий учёқлиги ўз вазиятини ўзгарта боради. Бу учёқликлар бир хил ориентацияли бўлганда (яъни уларнинг ҳаммаси ўнг системани ташкил қилганда), уларнинг қирралари бирлик векторлардан иборат бўлгани учун улар конгруэнтдир (тенгдир). Шу сабабли, бу учёқликларни битта учёқликнинг турли вазияти деб қараш мумкин. Чизиқ бўйлаб ҳаракат қилинганда, ҳосил бўладиган ана шу конгруэнт учёқликларнинг учларини хаёлимизда бирор O нуқтага келтирсак, натижада қўзғалмас O нуқтага эга бўлган қаттиқ жисм вужудга келади.

Соддалик учун, нуқтанинг чизиқ бўйлаб қилган ҳаракат тезлиги ўзгармас ва унинг модули 1 га тенг дейлик. Бу эса, s ёй узунлигини t га тенг деб олишга йўл очади (ҳақиқатан,

$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds}{dt} = |v| = 1$; $ds = dt$, ёки $s = t$ ва ҳаракат тезлиги $v = \frac{dr}{ds}$ бўлади.

Кинематикадан маълумки, битта нуқтаси қўзғалмас қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ҳар бир моментда оний ўқ атрофида айланишдан иборат деб қараш мумкин. Оний айланма ҳаракатнинг бурчак тезлигини $\bar{\omega}$ билан белгиласак, у ҳолда жисмдаги бирор M нуқтанинг $\bar{v}$ чизиқли тезлиги мана шу $\bar{\omega}$ тезлик билан $\bar{r}$ радиус-векторнинг векториал кўпайтмасига тенг бўлади (115-чизма):


115-чизма.

$$\bar{v} = [\bar{\omega}\,\bar{r}], \text{ бунда } \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (1)$$

Бундаги $\bar{v}$ вектор $\bar{\omega}$ ва $\bar{r}$ кўпаювчиларнинг ҳар бирига тикдир. $\bar{\omega}$ вектор ихтиёрий бўлиб, у *Пуассон вектори* дейилади.

Энди (1) формулага асосланиб, табиий учёқлик қирраларидаги $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторлар охирларининг ($\bar{\omega}$ бурчак тезлиги туфайли вужудга келган) чизиқли тезликларини ҳисоблаймиз. Бу нуқталар учун $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторлар радиус-векторлар ролини ўйнайди. Демак, бу тезликлар қуйидагича ифодаланади:

$$\dot{\bar{\tau}} = [\bar{\omega}\,\bar{\tau}], \quad \dot{\bar{\nu}} = [\bar{\omega}\,\bar{\nu}], \quad \dot{\bar{\beta}} = [\bar{\omega}\,\bar{\beta}]. \qquad (2)$$

11-бетда эслатилган теоремага кўра, $\bar{\omega}$ бурчак тезлигини $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ орқали ифодалаш мумкин:

$$\bar{\omega} = \lambda_1 \cdot \bar{\tau} + \lambda_2 \cdot \bar{\nu} + \lambda_3 \cdot \bar{\beta}.$$

Энди бу ифодани (2) га қўямиз ва

$$\bar{\beta} = [\bar{\tau}\,\bar{\nu}], \quad \bar{\nu} = [\bar{\beta}\,\bar{\tau}], \quad \bar{\tau} = [\bar{\nu}\,\bar{\beta}]$$

дан фойдаланамиз. У ҳолда:

$$\dot{\bar{\tau}} = -\lambda_2\bar{\beta} + \lambda_3\bar{\nu}, \quad \dot{\bar{\nu}} = \lambda_1\bar{\beta} - \lambda_3\bar{\tau}, \quad \dot{\bar{\beta}} = -\lambda_1\bar{\nu} + \lambda_2\bar{\tau}. \qquad (3)$$

$\bar{\omega}$ вектор ҳозиргача ихтиёрий бўлгани учун, унинг туфайли ҳалиги нуқталарнинг қабул қилган тезликлари ҳам ихтиёрий эди. Лекин, Френе формулаларига қараганда, у нуқталар ҳар бир моментда тайин чизиқли тезликларга эгадир. Энди $\bar{\omega}$ ни шундай танлаб оламизки, бу нуқталарнинг иккала ҳолда ҳам чизиқли тезликлари бир хил бўлсин. Шу сабабли, (3) ни § 43, (2) билан солиштирсак, λ_1, λ_2, λ_3 коэффициентлар аниқланади:

$$\lambda_1 = \sigma, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = k.$$

Демак:

$$\bar{\omega} = \sigma\bar{\tau} + k\bar{\beta}. \qquad (4)$$

Хуллас, чизиқда параметр сифатида s олинса (яъни вақт ролини s ўйнаса), у ҳолда s *нинг ҳар бир қийматида табиий учёқлик, оний бурчак тезлиги* (4) *дан иборат вектор атрофида айланма ҳаракат қилади.* $\bar{\omega}$ вектор *Дарбу вектори* дейилади.

Демак, s ўзгара борганда, табиий учёқлик ҳаракат қила бориб, айлана бошлайди. Унинг айланиши $\bar{\tau}$ ва $\bar{\beta}$ текислигида ётган $\bar{\omega}$ векторнинг атрофида бўлиб, бу айланиш иккита айланишдан тузилади. Булардан бири уринма атрофида бўлиб, унинг бурчак тезлиги чизиқнинг σ бурилмасига тенгдир; $\sigma > 0$ бўлган ҳолда бу айланиш $\bar{\nu}$ дан $\bar{\beta}$ га томон йўналади ($\sigma < 0$ нинг маъносини қуйида берамиз). Иккинчи айланиш эса бинормал атрофида бўлиб, унинг бурчак тезлиги чизиқнинг эгрилигига тенгдир. Фазовий чизиқнинг эгрилиги доимо нолдан катта бўлгани учун, айланиш $\bar{\tau}$ дан $\bar{\nu}$ га қараб (яъни соат стрелкасига тескари томонга) йўналган бўлади. Френе формулаларининг кинематик маъноси шудир.

§ 45. Чизиқнинг эгрилиги

Чизиқдаги уринманинг уриниш нуқтаси чизиқ бўйлаб силжиганда, чизиқнинг „эгилганлиги"дан, бу уринма бурила боради. Фақат тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталаридаги уринмалари бир йўналишга эгадир. $r = r(s)$ чизиқнинг M_0 нуқтасидаги эгрилигини аниқлаймиз. Бунинг учун чизиқда M_0 нуқтага яқин турган яна битта M нуқтани олиб, бу икки нуқтада M_0T_0 ва MT уринмаларни ўтказамиз. Уринмаларнинг бурилиш бурчагини ёй узунлигига бўлиш билан, чизиқнинг эгрилигини характерлаш табиийдир. Агар M_0T_0 ва MT уринмалар орасидаги бурчакнинг радиан ўлчовини ω билан, M_0M ёйни Δs билан белгиласак, у ҳолда $\frac{\omega}{\Delta s}$ нисбат M_0M ёйнинг *ўрта эгрилиги* деб аталади.

Чизиқнинг M_0 *нуқтасидаги эгрилиги* деб, M нуқта чизиқ бўйлаб M_0 га интилганда M_0M ёйнинг ўрта эгрилиги интиладиган лимитга айтамиз. Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги эгрилиги $\frac{1}{\rho_0}$ билан белгиланади: $\frac{1}{\rho_0} = \lim \frac{\omega}{\Delta s}$. Чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги $\frac{1}{\rho} = k$ билан белгиланади. Ўрта эгрилик ва нуқтадаги эгрилик тушунчалари — ҳаракатланувчи нуқтанинг ўртача тезлиги ва берилган моментдаги тезлиги тушунчаларига тамомила ўхшайди. Δs нинг қийматлари ва фазовий чизиқлар учун ω нинг қийматлари доимо мусбат деб қабул қилинади. Шу сабабли фазовий чизиқларнинг эгрилиги доимо мусбатдир.

Эслатма. Френенинг биринчи формуласини текширамиз: $k\bar{\nu} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$. Иккала томондан модуль олсак, $k = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \lim\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim\left(\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\Delta s}\right) = \lim\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\omega}\cdot\lim\frac{\omega}{\Delta s}$ бўлиб, бу ерда $k = \lim\frac{\omega}{\Delta s}$ — чизиқнинг эгрилигидир. Шундай қилиб, Френе формулаларидаги k коэффициент чизиқнинг эгрилигини ифодалайди.

Эгриликнинг таърифига асосан, тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги нолга тенг, ва аксинча, чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги нолга тенг бўлса, у чизиқ тўғри чизиқдир. Ҳақиқатан, $\frac{1}{\rho} = k = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = 0$ бўлса, $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0$ бўлиб, демак, $\bar{\tau}$ ўзгармас векторни билдиради. Иккинчи томондан, $\frac{dr}{ds} = \bar{\tau}$ ёки $dr = \bar{\tau}\,ds$. Бундан $r = \bar{\tau}s + r_0$. Демак, s ўзгарганда, $r = \bar{\tau}s + r_0$ векторнинг учи тўғри чизиқни чизади.

§ 46. Чизиқ эгрилигини ҳисоблаш формуласи

$r = r(s)$ чизиқнинг исталган нуқтасидаги эгрилигини топиш учун, $\frac{dr}{ds} = \bar{\tau}$ ва $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu}$ векторларни векториал кўпайтирамиз:

$$\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right] = k\left[\bar{\tau}\bar{\nu}\right] = k\bar{\beta}. \tag{1}$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан модуль олсак, $\left|\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right]\right| = |k\bar{\beta}| = k\cdot 1 = k$ бўлади. Демак, k эгрилик учун

$$k = \left|\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right]\right|$$

формула келиб чиқади.

Агар чизиқнинг тенгламаси $r = r(t)$ шаклда берилган бўлса, $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$, $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dr}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$ бўлиб, бу қийматларни (1) га қўйсак, натижада:

$$k\bar{\beta} = \left[\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\right]\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + \left[\frac{dr}{dt}\frac{dr}{dt}\right]\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{dt^2} = [r'r'']\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} + 0;$$

ёки, $\frac{ds}{dt}$ ўрнига $|r'|$ ни қўйсак,

$$k = \frac{|[r'r'']|}{|r'|^3} \tag{2}$$

ҳосил қилинади. Бу формулани Декарт координаталарида ёзиш қийин эмас. Биринчи боб, § 9 га асосан:

$$|[r'r'']| = \sqrt{r'^2 r''^2 - (r'r'')^2} =$$

$$= \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)\cdot(x''^2+y''^2+z''^2) - (x'x''+y'y''+z'z'')^2} =$$

$$= \sqrt{(y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-x''y')^2}.$$

Демак, эгрилик учун ушбу формула

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-x''y')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

келиб чиқади. Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги эгрилигини топиш учун, M_0 нинг координаталарини бу формулага қўйиш лозим.

Мисол. $x = t$, $y = t^3$, $z = t^2 + 4$ чизиқнинг $t = t_0 = 1$ га мос нуқтасидаги эгрилигини топайлик.

x, y, z дан биринчи ва иккинчи ҳосилаларни олиб ва уларни $t_0 = 1$ нуқтада ҳисоблаб, (3) формулага қўйсак:

$$k = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}$$

бўлади.

Машқлар

79. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ чизиқнинг $t_0 = 1$ нуқтасидаги эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k_0 = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}$.

80. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ чизиқнинг M_0 (1; 1; 1) нуқтасидаги эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

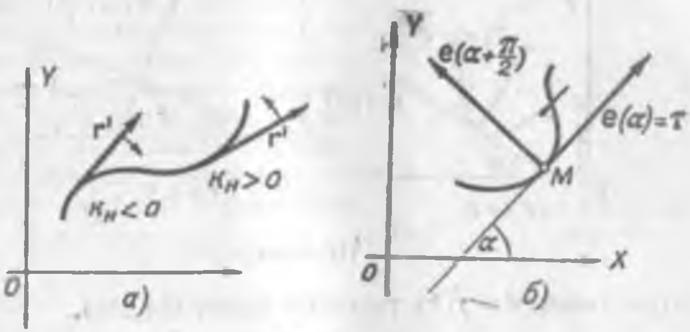
§ 47. Текисликдаги чизиқнинг нисбий эгрилиги

Агар чизиқнинг ҳамма нуқталари бир текисликда ётса, умумийликни бузмасдан, бу чизиқ XOY текислигида ётади десак бўлади. Фазовий чизиқнинг эгрилиги учун олдинги параграфда чиқарилган (3) формулада $z = z' = z'' = 0$ фараз қилинса,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} = \frac{\pm(x'y''-x''y')}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

келиб чиқади. Биз фазовий чизиқ учун $k > 0$ деган шартни қабул этган эдик. Текисликдаги чизиқ учун ҳам бу шартни сақлаш мумкин, лекин бу ҳолда k эгрилик мусбат ва манфий қийматларни қабул қила олади десак, мақсадга мувофиқроқ келади.

Текислик учун *ориентация* тушунчасини киритамиз. Агар текисликнинг бир томони мусбат, иккинчи томони манфий ҳисобланса, бу текислик *ориентацияли* дейилади. Масалан, XOY текисликнинг мусбат томони OZ ўқининг мусбат томонига мос келади дейлик. Бундай текисликда мусбат ва манфий йўналишдаги а й л а н и ш н и бир-биридан фарқ қилиш ўнғайдир. Текисликнинг мусбат томонидан туриб чизиққа қарасак ва $r'(t)$



116-чизма.

уринма-вектор t нинг ўсиб бориш йўналишида соат стрелкасига тескари айланса, у ҳолда бундай а й л а н и ш н и ва тегишли k эгриликни мусбат деб ҳисоблаб, акс ҳолда, буларни *манфий* деб ҳисоблаймиз (116 а, б-чизма).

Уринманинг доиравий бирлик векторини киритамиз:

$$\bar{\tau} = e(\alpha) = i\cos\alpha + j\sin\alpha,$$

у ҳолда $e'(\alpha) = e\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ вектор нормал бўйлаб йўналган бўлиб, у $e(\alpha)$ ни мусбат томонга қаратиб $\frac{\pi}{2}$ га буриш натижасида ҳосил қилинади. Бу вақтда:

$$\dot{r} = \bar{\tau} = e(\alpha),$$

$$\ddot{r} = \dot{\bar{\tau}} = k\bar{\nu} = e\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d\alpha}{ds}.$$

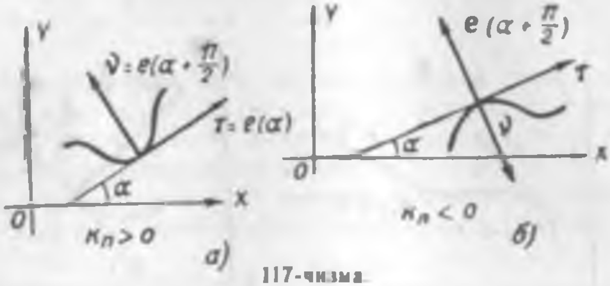
Биз $\frac{d\alpha}{ds}$ ни чизиқнинг нисбий *эгрилиги* деб атаймиз ва k_n орқали белгилаймиз:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_n. \qquad (1)$$

Демак, *нисбий k_n эгрилик α нинг s бўйича ҳосиласидир.* Агар $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y'}{x'}$ ва $ds = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}dt$ ни эътиборга олсак,

$$k_n = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

(1) дан кўринадики, $\bar{\nu}$ нормал-вектор билан $e\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ нинг йўналиши бир хил бўлса, яъни $x'y'' - x''y' > 0$ шарти бажарилса, $k_n > 0$, акс ҳолда, $k_n < 0$ (117 а, б-чизма).



117-чизма

Эгри чизиқ $y = f(k)$ тенглама билан берилса,

$$k_n = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Бу формуладан бевосита кўринадики, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ да чизиқнинг нисбий эгрилиги мусбат ва унинг ботиқлиги OY ўқининг мусбат томонига қаратилгандир. Эгилиш нуқталарида $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, яъни $k_n = 0$ дир; бундай нуқталарда чизиқнинг ботиқлиги қавариқлигига алмашинади, ва аксинча.

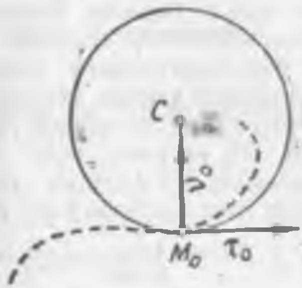
Мисол. $y = -\ln\cos x$ чизиқнинг $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ва $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ нуқталаридаги эгриликлари топилсин.

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad k = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{3/2}} = \cos x.$$

$x_0 = \frac{\pi}{4}$ қийматда: $k_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ қийматда: $k_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Энди текисликдаги чизиқ эгрилигининг геометрик маъносини аниқлайлик. Чизиқнинг M_0 нуқтасидаги эгрилиги $k = \frac{1}{\rho} =$

$=\frac{x_0'y_0''-x_0''y_0'}{(x_0'^2+y_0'^2)^{3/2}}$. Иккинчи томондан, чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ёпишма айланасининг радиуси $R_0=\frac{(x_0'^2+y_0'^2)^{3/2}}{x_0'y_0''-x_0''y_0'}$ га тенг (§ 32 га қаранг). Иккала формулани солиштирганда, $k_0=\frac{1}{\rho_0}=\frac{1}{R_0}$ деган натижа келиб чиқади. Шунинг учун, R ёки унга тенг бўлган ρ чизиқнинг *эгрилик радиуси* деб айтилади. Бу ердан чизиқнинг M_0 нуқтасидаги эгрилиги унинг шу M_0 нуқтасидаги ёпишма айланасининг эгрилиги каби деган натижага келамиз. Шу сабабли, ёпишма айланани — *эгрилик айланаси*, унинг радиусини — *эгрилик радиуси*, марказини — *эгрилик маркази* дейилади. Чизиқнинг M нуқтасидаги эгрилик радиусини $\rho_0=R_0=\frac{x_0'y_0''-y_0'x_0''}{(x_0'^2+y_0'^2)^{3/2}}$ формула билан, эгрилик марказининг координаталари эса



118-чизма.

$$x_э=a=x_0'-\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}\cdot y_0', \quad y_э=b=y_0+\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-y_0'x_0''}x_0' \quad (2)$$

формулалар билан топилади. Чизиқ ва унинг эгрилик айланаси умумий нуқтада умумий уринмага эгадир. Эгрилик айланасининг радиуси уринмага тикдир. Демак, эгрилик маркази чизиқнинг нормалида ётади (118-чизма).

Чизиқнинг иккита бир-бирига яқин M ва M_1 нуқталарида ўтказилган уринмалар билан OX ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакларни α ва $\alpha+\Delta\alpha$ десак, уринмалар орасидаги бурчак $\Delta\alpha$ бўлиб, M нуқтадаги нисбий эгрилик $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ ёки $k=\frac{d\alpha}{ds}$ га тенг бўлади.

Машқлар

81. $y^2=8x$ параболанинг $M_0\left(\frac{9}{8}, 3\right)$ нуқтасидаги эгрилик радиуси, эгрилик марказининг координаталари аниқлансин ва эгрилик айланаси чизилсин.

Жавоб: $x_э=-\frac{57}{16}$; $y_э=\frac{123}{16}$; $R=0{,}128$.

82. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ чизиқнинг $t_0=1$ га мос нуқтасидаги эгрилик радиуси, эгрилик марказининг координаталари аниқлансин ва эгрилик айланаси чизилсин.

Жавоб: $x_0 = 3$; $y_0 = 1$; $y = -4$; $R = \frac{1}{6}$.

83. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ чизиқнинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтасидаги эгрилик радиуси аниқлансин.

Жавоб: $R = \frac{2}{a\pi}$.

§ 48. Чизиқнинг бурилмаси

Фазодаги чизиқнинг бирор M нуқтасида ёпишма текислик ўтказамиз. M нуқта чизиқ бўйлаб силжиганда, ёпишма текислик бурила боради. Фақат текисликдаги чизиқ бўйлаб ҳаракат қилингандагина, ёпишма текислик бурилмайди, чунки унинг ҳар бир нуқтасидаги ёпишма текислиги шу чизиқ ётган текисликнинг ўзидан иборатдир.

Чизиқнинг ихтиёрий M_0 нуқтасидаги бурилмасини аниқлаш учун, M_0 ва унга яқин M нуқталарда ёпишма текисликлар ўтказамиз. Бу ёпишма текисликлар орасидаги бурчакни ёки уларга тик бинормаллар орасидаги бурчакни ψ билан белгиласак, у ҳолда $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{\psi}{\smile MM_0} = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{\psi}{\Delta s}$ лимит — чизиқнинг M_0 нуқтасидаги ***бурилмасининг абсолют қийматига*** тенг бўлади.

Френенинг учинчи формуласи $\frac{d\bar\beta}{ds} = -\sigma\bar\nu$ эди. Бунинг иккала томонидан модуль оламиз $\left|\frac{d\bar\beta}{ds}\right| = |-\sigma| \cdot |\bar\nu|$ ёки $\left|\frac{d\bar\beta}{ds}\right| = |\sigma|$. Буни $|\sigma| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\bar\beta|}{\Delta s}$ шаклда ёзиш мумкин. Бироқ $\lim |\Delta\bar\beta|$ ни ψ билан алмаштира оламиз. Шу сабабли $|\sigma| = \lim \frac{\psi}{\Delta s} = \lim \frac{\psi}{\smile M_0M}$. Бу эса чизиқнинг берилган нуқтасидаги бурилмасининг абсолют қийматидир. Шунинг учун келгусида бурилмани Френе формулаларида учрайдиган σ ҳарфи билан белгилаймиз. Бурилманинг таърифига асосан, текисликдаги чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бурилмаси нолга тенг, ва аксинча, чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бурилмаси нолга тенг бўлса, бу чизиқнинг ҳамма нуқталари бир текисликда ётади. Ҳақиқатан, бундай чизиқлар учун $\bar\beta = \bar\beta_0$ ўзгармас вектордир, чунки шартга асосан $(\widehat{\bar\beta_0\bar\beta}) = \psi = 0$. Энди $|\bar\beta_0| = |\bar\beta|$ чизиқнинг бирлик $\frac{dr}{ds} = \bar\tau$ уринма-вектори $\bar\beta$ га тик бўлгани учун $\left(\bar\beta_0 \cdot \frac{dr}{ds}\right) = 0$ ёки $\frac{d}{ds}(\bar\beta_0 \cdot r) = 0$. Демак, $\bar\beta_0 \cdot r = D$, бу ерда D — ўзгармас сон; $\bar\beta_0 \cdot r = D$ да $\bar\beta = \mathrm{const}$ бўлгани учун, r вектор текисликдаги чизиқни чизади. Бунда $\bar\beta_0 = Ai + Bj + Ck$ деб фараз қилинса, $r = xi + yj + zk$ бўлиб,

$\bar{\beta}_0 r = Ax + By + Cz = D$ текисликнинг тенгламасини ифодалайди. Шуни исботлаш керак эди.

Эслатма. Фақат тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталарида эгрилик нолга тенг бўлиб, бошқа чизиқлар учун эгрилик, умуман, нолдан фарқлидир. Демак, чизиқнинг эгрилиги унинг тўғри чизиқдан четланиш даражасини характерлайди. Шу сингари, чизиқнинг бурилмаси унинг текисликдан қанчалик четлашганлик даражасини, яъни фазовийлик табиатини характерлайди.

§ 49. Чизиқ бурилмасининг формуласи. Бурилманинг ишораси

Чизиқнинг исталган нуқтасидаги бурилмаси учун формула чиқариш мақсадида ушбулардан фойдаланамиз:

$$\frac{dr}{ds} = \bar{\tau},\ \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu},\ \frac{d^3r}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\bar{\nu} + k\frac{d\bar{\nu}}{ds} =$$

$$= \frac{dk}{ds}\bar{\nu} + k(-k\bar{\tau} + \sigma\beta) = \frac{dk}{ds}\bar{\nu} - k^2\bar{\tau} + k\sigma\bar{\beta}.$$

Агар $\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right] = k[\bar{\tau}\,\bar{\nu}] = k\bar{\beta}$ векторни $\frac{d^3r}{ds^3}$ векторга скаляр кўпайтирсак, $\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right]\cdot\frac{d^3r}{ds^3} = \left(k\bar{\beta}\cdot\frac{dk}{ds}\bar{\nu}\right) - (k\bar{\beta}\cdot k^2\bar{\tau}) + (k\bar{\beta}\cdot k\sigma\bar{\beta}) =$
$= k\frac{dk}{ds}(\bar{\beta}\,\bar{\nu}) - k^3\beta\,\bar{\tau} + k^2\sigma(\bar{\beta}\,\bar{\beta})$ келиб чиқади.

$(\bar{\beta}\,\bar{\nu}) = (\bar{\beta}\,\bar{\tau}) = 0$ ва $(\bar{\beta}\,\bar{\beta}) = 1$ бўлгани учун:

$\left[\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right]\cdot\frac{d^3r}{ds^3} = k^2\sigma$. Бундан σ ни топамиз:

$$\sigma = \frac{\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^3r}{ds^3}}{k^2} = \frac{\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}}{\ddot{\bar{r}}^2}$$

ёки координата формасида

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Чизиқнинг тенгламаси $r = r(t)$ шаклда берилиб, t ихтиёрий параметр ҳисобланса ва $\frac{dr}{ds}$; $\frac{d^2r}{ds^2}$; $\frac{d^3r}{ds^3}$ ўрнига $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{sd}$; $\frac{d^2r}{ds^2} =$
$= \frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dr}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$; $\frac{d^3r}{ds^3} = \frac{d^3r}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{dr}{dt}\frac{d^3t}{ds^3}$ қийматлар

қўйилиб, $\frac{dr}{dt}=r'$; $\frac{d^2r}{dt^2}=r''$; $\frac{d^3r}{dt^3}=r'''$ ни эътиборга олсак ва $\frac{dt}{ds}$ ўрнига $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{|r'|}$ ни қўйсак:

$$\sigma=\frac{(r'\cdot r''\cdot r''')}{k^2|r'|^6}$$

формула ҳосил бўлади. Агар k ўрнига унинг § 46 даги (2) қийматини қўйсак:

$$\sigma=\frac{r'r''r'''}{[r'r'']^2}.$$

Тўғри бурчакли Декарт координата системасига нисбатан бурилманинг формуласи:

$$\sigma=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}. \tag{1}$$

Чизиқнинг берилган M_0 нуқтасидаги бурилмасини топиш учун, (1) га M_0 нинг координаталарини қўйиш керак.

Мисол. $x=t$, $y=t^3$, $z=t^2-4$ чизиқнинг $t_0=1$ нуқтасидаги бурилмаси топилсин.

Ечиш. Чизиқнинг тенгламасидан ҳосилалар оламиз ва (1) формулага қўямиз:

$$\sigma=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{(3\cdot 2-2\cdot 6)^2+(0-2)^2+(6-0)^2}=-\frac{3}{19}.$$

Бурилманинг ишораси ҳақида маълумот бериш учун, чизиқнинг тенгламасини $r=r(s)$ шаклда ёзамиз: $\overline{OM}=r(s)$; $\overline{OM'}=r(s+\Delta s)$. Демак, $\overline{MM'}=r(s+\Delta s)-r(s)$. Энди, $r(s+\Delta s)$ ни Δs нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$r(s+\Delta s)=r(s)+\dot{r}(s)\Delta s+\frac{\ddot{r}(s)(\Delta s)^2}{2!}+\frac{\dddot{r}(s)(\Delta s)^3}{3!}+\ldots$$

Френе формулаларига асосан,

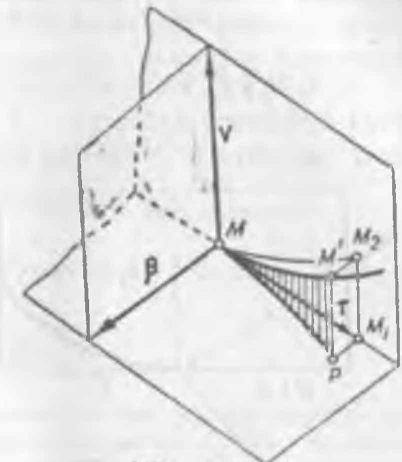
$$r(s+\Delta s)-r(s)=\bar{\tau}\Delta s+\frac{1}{2}k\bar{\nu}(\Delta s)^2+\frac{1}{6}(-k^2\bar{\tau}+\dot{k}\bar{\nu}+$$
$$+k\beta\sigma)\Delta s^3+\ldots$$

ёки

$$\overline{MM'}=\bar{\tau}\left(\Delta s-\frac{1}{6}k^2\Delta s+\ldots\right)+\bar{\nu}\left[\frac{1}{2}k(\Delta s)^2+\ldots\right]+$$
$$+\bar{\beta}\left[\frac{1}{6}k\sigma\Delta s^3+\ldots\right]. \tag{2}$$

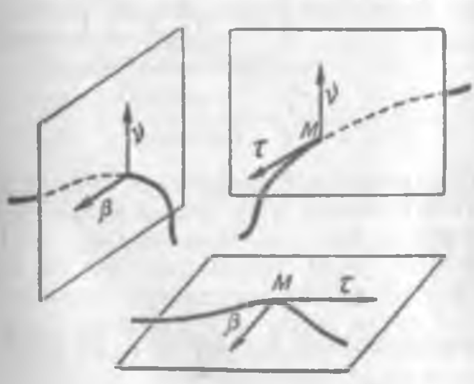
(2) дан қуйидаги натижаларни чиқариш мумкин (119-чизма).

1. Чизиқнинг M нуқтасидан M' нуқтасига ўтиш учун, олдин $\bar{\tau}$ га коллинеар $\overline{MM_1} = \bar{\tau}\{\Delta s - \ldots\}$ вектор бўйлаб M_1 нуқтага келиш, ундан кейин $\bar{\nu}$ бош нормал векторига параллел $\overline{M_1M_2} = \bar{\nu}\left\{\frac{1}{2} k(\Delta s)^2 + \ldots\right\}$ вектор бўйлаб M_2 нуқтага келиш (бу икки ҳаракат ёпишма текисликдадир), ниҳоят, $\bar{\beta}$ бинормал векторига параллел $\overline{M_2M'} = \bar{\beta}\left(\frac{1}{6} k\sigma\Delta s^3 + \ldots\right)$ вектор бўйлаб M' нуқтага келиш керак. Учинчи ҳаракат Δs га нисбатан учинчи тартибли чексиз кичик бўлиб, бу ҳаракат нуқтани ёпишма текисликдан чиқаради.



119-чизма.

Агар Δs нинг ишораси ўзгарса, $\overline{MM_1}$ ва $\overline{M_2M'}$ векторларнинг ҳам ишоралари ўзгаради, чунки булардаги Δs миқдор тоқ даражалидир, $\overline{M_1M_2}$ нинг эса ишораси ўзгармайди, чунки бундаги Δs жуфт даражали. Демак, $\Delta s > 0$ бўлганда нуқта $\bar{\tau}$ нинг мусбат томонига, $\Delta s < 0$ бўлганда эса нуқта $\bar{\tau}$ нинг манфий томонига қараб ҳаракат қилади, яъни чизиқ нормал текисликнинг иккала томонига ҳам жойлашади. Шунча ўхшаш, $\overline{M_2M'}$ нинг ишораси Δs нинг ишорасига боглиқ бўлганидан, чизиқ ёпишма текисликнинг иккала томонига жойлашгандир. Аммо $\overline{M_1M_2}$ вектор Δs нинг ишорасига боғлиқ эмас. Демак, чизиқ тўғриловчи текислигининг бир томонига жойлашган бўлади (120-чизма).



120-чизма

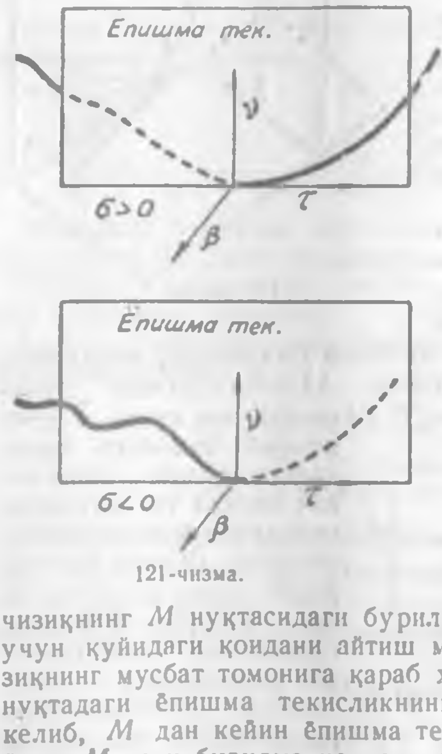
Фазовий чизиқнинг эгрилиги доимо мусбат бўлганини эсда тутиб, қуйидаги икки ҳолни бир-биридан ажратишга тўғри келади.

а) M нуқтада $\sigma > 0$ бўлган ҳол. Бу вақтда $\Delta s > 0$

учун $\overline{M_2M'} = \beta\left[\frac{1}{6} k\sigma(\Delta s)^3 + \ldots\right]$ нинг $\bar{\beta}$ олдидаги коэффициенти мусбат бўлиб, нуқтанинг M_2 дан M' гача ҳаракати $\bar{\beta}$ нинг мусбат томонига йўналган бўлади. $s<0$ учун эса нуқтанинг ҳаракати $\bar{\beta}$ нинг манфий томонига йўналади. Демак, $\Delta s>0$ учун нуқтанинг ҳаракати $+\bar{\beta}$ томонда бўлиб, $\Delta s<0$ учун эса нуқтанинг ҳаракати $-\bar{\beta}$ томонда бўлади.

б) M нуқтада $\sigma<0$ бўлган ҳол. Бу вақтда $\Delta s>0$ учун нуқтанинг ҳаракати $-\bar{\beta}$ томонга ва $\Delta s<0$ учун нуқтанинг ҳаракати $+\bar{\beta}$ томонга йўналади (121-чизма).

Нуқта чизиқнинг мусбат томонига қараб ҳаракат қилади деганимизда, одатда, унинг чапдан ўнг томонга қилган ҳаракатини тушунамиз. Буни назарда тутиб,



121-чизма.

122-чизма.

чизиқнинг M нуқтасидаги бурилмасининг ишорасини аниқлаш учун қуйидаги қоидани айтиш мумкин: агар бирор нуқта чизиқнинг мусбат томонига қараб ҳаракат қилгани ҳолда, у M нуқтадаги ёпишма текисликнинг орқа томонидан шу M га келиб, M дан кейин ёпишма текисликнинг олдинги томонига ўтса, M даги бурилма нолдан катта, яъни $\sigma>0$ бўлади. Агар нуқта ёпишма текисликнинг олдинги томонидан M гача ҳаракат қилиб, кейин текисликнинг орқа томонига ўтса, $\sigma<0$ бўлади. Нуқтанинг ҳаракатини ёпишма текисликнинг иккинчи томонига ўтиб қараганимизда, чизиқнинг йўналиши ҳам тескарисига айланади. Шунинг учун юқорида аниқланган ишора ўзгармайди.

Мисол тариқасида винт чизиқни олайлик (122-чизма). Унинг уринмалари ясовчиларни бир хил бурчак остида кесиб ўтади деган муҳим хоссасини кўрган эдик.

$$r = ae(\varphi) + \lambda\varphi k$$

ёки

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \lambda\varphi,$$

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2 + \lambda^2}\,\varphi, \; \varphi = \frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}},$$

бу ерда $A(\varphi = 0)$ нуқтада $s = 0$ ҳисобланади.

Энди r радиус-вектор s нинг функцияси деб ҳисобланиши мумкин. Уни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$\bar{\tau} = \dot{r} = \frac{ae\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda k}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}$$ (бу — уринманинг бирлик вектори-дир);

$$\ddot{r} = \frac{-ae(\varphi)}{a^2 + \lambda^2} = k\bar{\nu}.$$

Демак, $\bar{\nu} = -e(\varphi)$. Бундан иккинчи муҳим хосса вужудга келади: *винт чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бош нормали $-e(\varphi)$ бўйича йўналган бўлиб, цилиндрнинг ўқига тикдир, яъни цилиндрнинг нормали бўйича йўналгандир.*

Энди винт чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаймиз:

$$k = |\ddot{r}| = \frac{a}{a^2 + \lambda^2} = \text{const}.$$

Шундай қилиб, *винт чизиқнинг ҳамма нуқталаридаги эгрилиги бир хилдир.*

Бинормалга ўтайлик:

$$\bar{\beta} = [\bar{\tau}\,\bar{\nu}] = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}\left\{\left[a\bar{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda k,\ \bar{e}(\varphi)\right]\right\}.$$

Аммо $\left[\bar{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\bar{e}(\varphi)\right] = -k,\ [k\bar{e}(\varphi)] = \bar{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ бўлгани учун:

$$\bar{\beta} = \frac{ak - \lambda\bar{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}.$$

Энди бу вектордан s бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{\bar{\beta}} = -\sigma\bar{\nu} = \frac{\lambda\bar{e}(\varphi)}{a^2 + \lambda^2},$$

лекин $-\bar{\nu} = e(\varphi)$, шу сабабли,

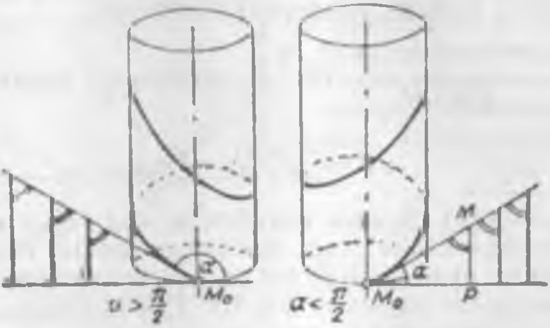
$$\sigma = \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Демак, қуйидаги учинчи муҳим хоссага келамиз: *винт чизиқнинг ҳамма нуқталаридаги бурилмаси бир хилдир* ($\sigma = \text{const}$).

Шундай қилиб, *винт чизиқнинг эгрилиги ва бурилмаси ўзгармасдир*. Бу хосса винт чизиқ учун характерли бўлиб, ундан бошқа чизиқ бу хоссага эга эмаслигини кейинроқ кўрамиз (§ 59).

Винт чизиқнинг „ўнг“ ва „чап“ бўлиши бурилма ишорасининг мусбат ёки манфийлигига боғлиқ эканини кўрсатайлик.

Бирор α бурчакни олиб (123-чизма), доиравий цилиндр сиртига уни шундай ўрнатамизки, бурчак текислиги цилиндрга



123-чизма.

бирор ясовчи бўйлаб уринсин ва бу ясовчи бурчакнинг бир томонига тик бўлсин. Бундан кейин, бурчак ётган текисликни (қоғозни) йиртмасдан ва қатламасдан цилиндрга ўрасак, бурчакнинг бир томони цилиндрнинг асосини, иккинчи томони винт чизиқни чиза боради, чунки M_0M тўғри чизиқ ясовчиларга параллел PM кесмаларни бир хил бурчак остида кесиб ўтади. Цилиндрда бу хоссага эга чизиқ эса винт чизиқдир (147-бетга қаранг).

Энди бу чизиқнинг эгрилигини ва бурилмасини топамиз, аввало, 124-чизмадан ($\overset{\frown}{M_0M} = s$ деган фаразда):

$$\overset{\frown}{M_0P} = s\cos\alpha = a\varphi; \quad PM = s\sin\alpha,$$

демак, $\varphi = \frac{s\cos\alpha}{a}$, бундан эса

$$x = a\cos\frac{s\cos\alpha}{a}, \; y = a\sin\frac{s\cos\alpha}{a}, \; z = s\sin\alpha$$

ёки вектор формада:

$$r\left\{a\cos\frac{s\cos\alpha}{a}, \quad a\sin\frac{s\cos\alpha}{a}, \; s\cdot\sin\alpha\right\}.$$

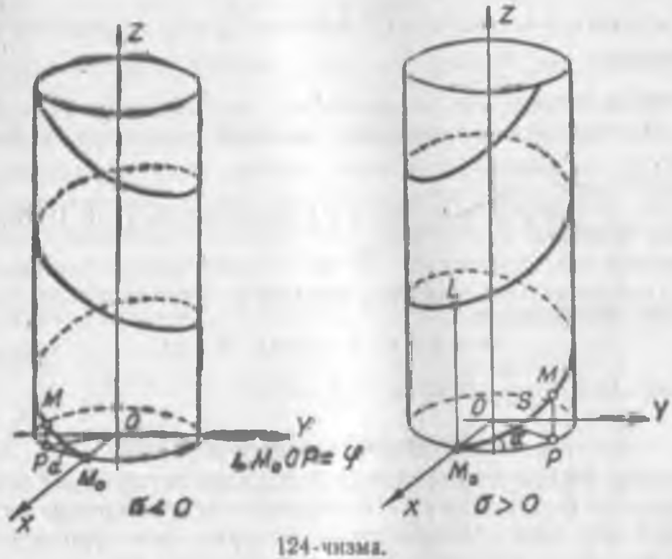
Эгрилик ва бурилма учун ушбу

$$k = |\ddot{r}| = \sqrt{\ddot{r}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\sigma = \frac{\dot{r}\,\ddot{r}\,\dddot{r}}{\ddot{r}^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

формулалардан фойдалансак:

$$k = \frac{\cos^2 \alpha}{a} > 0, \quad \sigma = \frac{\cos^2 \alpha}{a} \operatorname{tg} \alpha$$



124-чизма.

ҳосил бўлади. Бурилманинг ифодасидан айтганимиз яққол кўринади (124-чизма):

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ да } \sigma > 0; \text{ „ўнг“ винт,}$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \text{ да } \sigma < 0; \text{ „чап“ винт.}$$

M_0 нуқта асос бўйлаб бир марта тўла айланиб чиқса, винт чизиқдаги M нуқта ясовчи бўйлаб $M_0L = h$ масофани босади. Ана шу масофа винт чизиқнинг *қадами* дейилади. Бошқача айтганда P' нуқта M_0' нуқтадан $2\pi a$ ға тенг масофага узоқлашса, яъни $M_0P = M_0'P' = 2\pi a$ бўлса, $PM = h$ бўлади. Демак, M_0PM учбурчкдан $h = 2\pi a \operatorname{tg} \alpha$. Агар $a \operatorname{tg} \alpha = \lambda$ фараз қилинса, $h = 2\pi\lambda$ бўлиб, a — узунлиги винт чизиқнинг қадамига тенг бўлган айлананинг радиусига тенгдир. Равшанки, ўнг винт чизиқ $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ учун қадам мусбат ва чап винт чизиқ $\left(\alpha > \frac{\pi}{2}\right)$ учун — манфийдир. Бу ердаги λ винт чизиқ тенгламасига кирган λ нинг айнан ўзидир. Ҳақиқатан, винт чизиқдаги M нуқтанинг учинчи координатаси

$$PM = z = \overset{\frown}{M_0P}\cdot\operatorname{tg}\alpha = a\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha = a\operatorname{tg}\alpha\cdot\varphi = \lambda\varphi.$$

Винт чизиқнинг қадами тушунчаси кейинчалик керак бўлади (§ 82).

Машқлар

84. $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \operatorname{tg} t$ чизиқнинг $t_0 = \frac{\pi}{4}$ нуқтасидаги буралмаси аниқлансин.

Жавоб: $\sigma = -\frac{6}{7}$.

85. $x^2 = 2az,\ y^2 = 2bz$ чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги буралмаси топилсин.

Жавоб: $\sigma = 0$.

86. $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y - 2x + z = 1$ чизиқнинг $M_0\ (1,\ 1,\ 1)$ нуқтасидаги буралмаси топилсин.

Жавоб: $\sigma = 1$.

87. Гиперболик винт чизиқнинг эгрилиги ва буралмаси топилсин. Унинг параметрик тенгламалари:

$$x = a\operatorname{ch} t,\quad y = a\operatorname{sh} t,\quad z = at.$$

Жавоб: $k = \sigma = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

§ 50. Чизиқнинг проекциялари

Эгрилик билан буралманинг бошқа жиҳатдан ҳам аҳамиятли эканини билиш учун, чизиқнинг тенгламасини $r = r(s)$ шаклда ёзиб, унинг M нуқтасидаги кузатувчи (табиий) учёқлигини қурамиз. Олдинги параграфдаги (2) ёйилмани оламиз:

$$\overline{MM'} = \tau\,[\Delta s + \ldots] + \bar{\nu}\left[\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \ldots\right] + \bar{\beta}\left[\frac{1}{6}k\sigma(\Delta s)^3 \ldots\right]$$

ёки

$$\overline{MM'} = r(s + \Delta s) - r(s).$$

Тўғри бурчакли Декарт координата системасининг бошини чизиқнинг M нуқтасига келтириб, OX ўқини $\bar{\tau}$ бўйича, OY ўқини $\bar{\nu}$ бўйича ва OZ ўқини $\bar{\beta}$ бўйича йўналтирамиз. У ҳолда M нинг етарлича кичик атрофида чизиқни ушбу

$$\overline{MM'} = x(s)\bar{\tau} + y(s)\bar{\nu} + z(s)\bar{\beta} = [\Delta s + \ldots]\bar{\tau} +$$
$$+ \left[\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \ldots\right]\bar{\nu} + \left[\frac{1}{6}k\sigma(\Delta s)^3 + \ldots\right]\bar{\beta}$$

тенглама билан унга тенг кучли параметрик шаклдаги

$$x(s) = \Delta s + \dots,$$

$$y(s) = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \dots,$$

$$z(s) = \frac{1}{6} k \varkappa (\Delta s)^3 + \dots$$

тенгламалар билан тасвирлаш мумкин. Δs ни етарлича кичик деб ҳисобласак, чизиқнинг ёпишма ($\bar{\tau}$ ва $\bar{\nu}$) текислигига туширилган проекцияси қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$x(s) = \Delta s,$$

$$y(s) = \frac{1}{6} k (\Delta s)^2. \qquad (1)$$

(1) дан Δs ни йўқотсак, $y(s) = \frac{k}{2} [x(s)]^2$ ни ҳосил қиламиз; демак, проекциянинг параболадан иборатлигини кўрамиз. $k > 0$ бўлгани учун, чизиқнинг ёпишма текисликка туширилган бу проекцияси $\bar{\nu}$ нинг мусбат томонига йўналади. Бу натижа бизга маълум эди, чунки чизиқнинг ўзи тўғриловчи текисликнинг бир томонига ($\bar{\nu}$ нинг мусбат томонига) йўналгандир.

Чизиқнинг тўғриловчи($\bar{\tau}$ ва $\bar{\beta}$) текислигига туширилган проекцияси $x(s) = \Delta s$, $z(s) = \frac{1}{6} k\varkappa (\Delta s)^3$, ёки, Δs ни булардан йўқотсак,

$$z(s) = \frac{1}{6} k \varkappa [x(s)]^3$$

бўлади. Бу — кубик парабола бўлиб, унинг кўриниши ($k > 0$ бўлгани учун) ва чизиқнинг ёпишма текисликдан узоқлашиш тезлигини ифодалаган $\varkappa$ нинг қийматига ва ишорасига боғлиқдир. Чизиқ ёпишма текисликнинг иккала томонида жойлашганлиги ҳақида бу ердан ҳам натижа чиқариш мумкин.

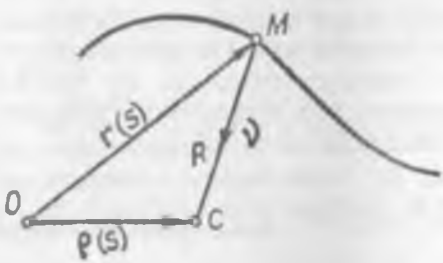
Чизиқнинг нормал ($\bar{\nu}$ ва $\bar{\beta}$) текислигига туширилган проекцияси $y(s) = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2$, $z(s) = \frac{1}{6} k\varkappa \ (\Delta s)^3$. Бундан чизиқ нормал текисликнинг иккала томонида жойлашади деган натижага келамиз.

Саккизинчи боб

ЭВОЛЮТА ВА ЭВОЛЬВЕНТА

§ 51. Текисликдаги чизиқнинг эволютаси

Агар $M(x, y)$ нуқта берилган чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, унга мос келган эгрилик маркази ҳам, умуман, ҳаракатда бўлиб, қандайдир чизиқни чиза боради. Берилган чизиқнинг эгрилик марказларининг геометрик ўрни бу чизиқнинг *эволютаси* деб аталади.



125-чизма.

Агар § 47 нинг (2) формулаларида $X_в$ ва $Y_в$ ни ўзгарувчи миқдорлар деб қарасак, у формулалар эволютанинг параметрик тенгламаларини беради. Ўзгарувчи $X_в$ ва $Y_в$ ларни ξ ва η билан белгиласак, эволютанинг тенгламалари

$$\xi = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \qquad (1)$$

$$\eta = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

бўлади.

Чизиқнинг тенгламаси $y = f(x)$ шаклда берилган бўлса, $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$ бўлиб, (1) нинг кўриниши соддалашади:

$$\xi = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \qquad (2)$$

Эволютанинг хоссаларини ўрганиш учун, унинг тенгламасини вектор формада ёзамиз (125-чизма).

$\overline{OM} = r(s)$ бўлсин. M нуқтадан эгрилик марказигача борган векторнинг $\overline{MC} = R\nu$ эканлигини § 42 да кўрган эдик. s параметр ўзгарганда, M нуқта $r = r(s)$ чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади, шу билан бирга $\overline{OC}$ вектор ҳам ўзгара боради. Шундай қилиб, $\overline{OC}$ ва ν векторлар, шунингдек R радиус s параметрнинг функциялари эканлиги аниқланади. Агар $\overline{OC}$ векторни $\bar{\rho}(s)$ билан белгиласак, эволютанинг вектор формадаги тенгламаси:

$$\bar{\rho}(s) = r(s) + R(s)\bar{\nu}(s) \tag{3}$$

бўлади.

Эволютага ўтказилган уринма-векторнинг йўналишини аниқлайлик. Бунинг учун, (3) дан s бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \frac{dr}{ds} + \frac{dR}{ds}\bar{\nu} + R\frac{d\bar{\nu}}{ds}.$$

Текисликдаги чизиқ учун σ бурилма нолга тенглигидан, Френенинг иккинчи формуласи $\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -k\bar{\tau}$ бўлади. Шу сабабли

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{dR}{ds}\bar{\nu} + R(-k\bar{\tau}).$$

Энди $k = \frac{1}{R}$ га мувофиқ, $\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{dR}{ds}\bar{\nu} - \bar{\tau}$ ёки

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \frac{dR}{ds}\bar{\nu} \tag{4}$$

Бу эса эволютага ўтказилган уринма $r = r(s)$ чизиқнинг нормали бўйича йўналганлигини билдиради. Тескарича, $r = r(s)$ *чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги нормали эволютага уринма бўлади, яъни* $r = r(s)$ *нинг бир параметри нормалларининг ўрамаси бу чизиқнинг эволютасини ташкил қилади.*

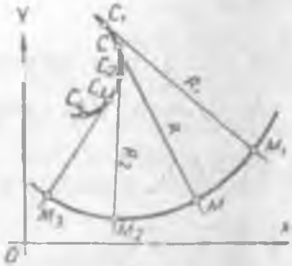
Эволютанинг иккинчи хоссасини билиш учун, (4) дан модуль оламиз: $\left|\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{ds}\right| \cdot |\bar{\nu}|$ ёки $\left|\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{ds}\right|$, бу ердан $|d\bar{\rho}| = |dR|$. Эволютадаги ёй узунлигини s^* билан белгилаб, уни параметр сифатида қабул қиламиз. Охирги тенгликни ds^* га бўламиз: $\left|\frac{d\bar{\rho}}{ds^*}\right| = \left|\frac{dR}{ds^*}\right|$. Аммо $\frac{d\bar{\rho}}{ds^*}$ эволюта уринмасининг бирлик векторини белгилайди $\left(\frac{dr}{ds} = \bar{\tau}\text{ каби}\right)$. Шунинг учун $\left|\frac{d\bar{\rho}}{ds^*}\right| = 1$ ёки $|d\bar{\rho}| = |ds^*|$. Демак, $|ds^*| = |dR|$. Агар эволютада R нинг ўсадиган томонини мусбат томон деб ҳисобласак, у ҳолда R ўсганда s^* ҳам ўсади ва тескарича. Шу сабабли, $ds^* = dR$ бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонидан интеграл олсак, $s^* = R + \text{const}$ келиб чиқади.

Бундан, *эволюта ёйининг орттирмаси эгрилик радиусининг орттирмасига тенг деган натижага келамиз* (чизиқнинг эгрилик радиуси монотон ўзгарган қисмларида). Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз[1]: $\Delta s^* = \Delta R$; $\overset{\frown}{CC_1} - \overset{\frown}{OC_1} - \overset{\frown}{OC^*} = \Delta s^*$;

[1] Бу ерда O билан эволюта ёйининг боши белгиланган.

$C_1M_1 - CM = R_1 - R = \Delta R$ бўлиб, демак, $\overset{\frown}{CC_1} = R_1 - R$ ёки $R_1 = R + \overset{\frown}{CC_1}$ бўлади. Шундай қилиб, R_1 эгрилик радиуси эволютадаги CC_1 ёйи билан R эгрилик радиусининг йиғиндисига тенгдир (126-чизма).

Мисол. 1. $r = a\cos t\,i + b\sin t\,j$ эллипснинг эволютасини топайлик. Эллипснинг параметрик тенгламаларини ёзамиз:



126-чизма.

127-чизма.

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Эволютанинг тенгламасини ёзиш учун, x ва y нинг биринчи ва иккинчи ҳосилаларини оламиз:

$$x' = -a\sin t,\quad y' = b\cos t,\quad x'' = -a\cos t,\quad y'' = -b\sin t.$$

Энди,

$$\xi = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\, b\cos t = a\cos t -$$

$$- \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a}\cos t = \frac{a^2\cdot\cos t - a^2\sin^2 t\cdot\cos t}{a} =$$

$$= \frac{a^2\cos t\,(1 - \sin^2 t) - b^2\cos^3 t}{a} = \frac{a^2\cos^3 t - b^2\cos^3 t}{a} = \frac{(a^2 - b^2)\cos^3 t}{a};$$

$\eta = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\cdot a\sin t$; соддалаштирганда $\eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$.

Демак,

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,\quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

Шундай қилиб, эллипснинг эволютаси — астроидадир (127-чизма).

2. $y = \ln x$ чизиқнинг эволютасини топамиз:

$$\xi = x - \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = x + \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x};$$

$$\eta = \ln x + \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot 1 = \ln x - \frac{x^2 + 1}{1}.$$

Машқлар

Қуйидаги чизиқларнинг эволюталари аниқлансин.

88. $y^2 = 2px$.

Жавоб: $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$.

89. $xy = a^2$.

Жавоб: $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = \sqrt[3]{16}\,a$.

90. $x = a\cos t + at\sin t$, $y = a\sin t + at\cos t$.

Жавоб: Радиуси a га тенг айлана.

91. $y = a\ln\cos\frac{x}{a}$.

Жавоб: $x = a(\arccos u - u^{-1}\sqrt{1-u^2})$, $a\ln u = a + y$.

§ 52. Чизиқнинг эвольвенталари

$\rho = \rho(s^*)$ чизиқ берилган бўлсин. Бунда s^* — чизиқ ёйидир. M_0 нуқта чизиқ ёйининг боши бўлсин. Демак, M_0 нуқтада $s^* = 0$. Чизиқнинг M_0 нуқтасидан ўтган уринманинг мусбат томонига $M_0T_0 = a_0$ кесмани қўямиз (128-чизма). Бунда a_0 — ихтиёрий сон. Чизиқнинг ҳар бир M нуқтасида ҳам уринмани ўтказиб, унинг мусбат томонига $MT = a_0 - \overset{\frown}{M_0M}$ кесмани қўямиз. $\overset{\frown}{M_0M}$ ёй узунлиги s^* бўлгани учун $MT = a_0 - s^*$ дир. M нуқта чизиқ бўйича ҳаракат қилиб, M_0 дан узоқлашган сари MT нинг узунлиги камаяверади. Бу вақтда MT нинг T учи маълум бир чизиқ чиза боради. Бу чизиқ *эвольвента* дейилади. Агар уринмадаги M_0T_0 кесма узунлиги a_0 бўлмасдан b_0 бўлса, T нуқта бошқа эвольвентани чизади ва ҳоказо. Демак, берилган чизиқнинг эвольвенталари чексиз кўп бўлиб, бир параметрли чизиқлар оиласини ташкил қилади.

128-чизма.

Эвольвентага доир қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. Берилган чизиққа ўтказилган уринма эвольвента учун нормаль бўлади.

Исбот. Берилган чизиқнинг тенгламаси $\bar\rho = \bar\rho(s^*)$ бўлсин. Энди эвольвентанинг тенгламасини топамиз:

$$\overline{OT} = \overline{OM} + \overline{MT} = \bar\rho(s^*) + (a_0 - s^*)\bar\tau(s^*)$$

ёки қисқача

$$\bar r = \bar\rho + (a_0 - s^*)\bar\tau.$$

Бу тенгликни дифференциалласак:

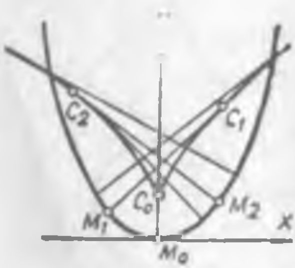
$$\frac{d\bar{r}}{ds^*} = \frac{d\bar{\rho}}{ds^*} - \bar{\tau} + (a_0 - s^*)\frac{d\bar{\tau}}{d s^*} = (a_0 - s^*)\, k\bar{\nu}.$$

Бунда k — берилган чизиқнинг эгрилиги, $\bar{\nu}$ эса — бу чизиқнинг бирлик нормалидир. Демак, эвольвентанинг уринмаси берилган чизиқнинг тегишли нуқтасидаги нормалига параллел бўлади. Аксинча, эвольвентанинг T нуқтасидаги нормали берилган чизиқнинг M нуқтасидаги уринмасига параллел бўлиб, буларнинг иккаласи ҳам T нуқтадан ўтгани учун, бир-бирининг устига тушади. Шу билан теорема исботланди.

Бундан, *эвольвента учун берилган чизиқ эволюта бўлади* деган натижа келиб чиқади. $r = r(t)$ чизиқнинг эволютаси биргинадир. Аммо эволютанинг эвольвенталари чексиз кўп бўлади. Эволюта учун $r = r(t)$ чизиқ ҳам эвольвенталардан бири ҳисобланади.

§ 53*. Иловалар

1) *Эволютанинг махсус нуқталари.* Эволютанинг 153-бетда баён этилган иккинчи хоссаси чизиқнинг эгрилик радиуси монотон ўзгарувчи қисмида кучга эга эди. Чизиқнинг эгрилик радиуси максимум ёки минимум қийматларни қабул қилган нуқталарига (чизиқнинг учларига) эволютада биринчи типли махсус нуқталар мос келади. Соф геометрик мулоҳазалардан бу очиқдан-очиқ кўринади (129-чизма). Чизиғимизнинг M_0M_1 ва M_0M_2 қисмларига бу хоссани алоҳида қўлланишга тўғри келади:



129-чизма.

$$M_1C_1 - M_0C_0 = \overset{\frown}{C_0C_1}, \quad M_2C_2 - M_0C_0 = \overset{\frown}{C_0C_2};$$

буларни қўшиш натижасида

$$\overset{\frown}{C_1C_2} = M_1C_1 + M_2C_2 - 2M_0C_0$$

ҳосил бўлади. Демак, хосса бутунлай бошқа тус олади.

Мисол тариқасида $y^2 = 2px$ параболани олайлик. Бу ердан (параметр сифатида y ни қабул қилиб):

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad yy' = p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Бу қийматларни § 51 даги (2) формулаларга қўямиз:

$$\xi = p + \frac{3}{2p} y^2; \quad \eta = -\frac{y^3}{p}.$$

Булардан y ни чиқарсак, эволютанинг тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\eta^2 = \frac{8}{27p} (\xi - p)^3.$$

Демак, эволюта — учи $\xi = p$ нуқтада ётган ярим кубик параболадир; $\xi = p$ нуқта унинг биринчи типли қайтиш нуқтасидир, у параболанинг учига мос келади: $\xi = p$ қийматда $\eta = 0$.

Эллипс эволютасига қайтайлик (127-чизма):

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

булардан t ни йўқотсак:

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{2/3} = 1$$

ҳосил бўлади, бунда $c^2 = a^2 - b^2$.

Эллипснинг A_1, A_2, A_3, A_4 учларига эволютада биринчи типли тўртта қайтиш нуқталари C_1, C_2, C_3, C_4 мос келади. Масалан, $t = 0$ қийматда A_1 $(a, 0)$ нуқтага $C_1\left(\frac{c^2}{a}, 0\right)$ нуқта мос келади. Шунингдек, $t = \frac{\pi}{2}$ қийматда $A_2 (0, b)$ нуқтага $C_2\left(-\frac{c^2}{b}, 0\right)$ нуқта мос келади. Бу ерда $OC_1 = \frac{c^2}{a}$, $OC_3 = -\frac{c^2}{a}$, $OC_2 = -\frac{c^2}{b}$, $OC_4 = \frac{c^2}{b}$. Равшанки,

$$R_{\min} = c_1 A_1 = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a},$$

$$R_{\max} = c_2 A_2 = b + \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 + c^2}{b} = \frac{a^2}{b}.$$

Ҳақиқатан, эгрилик радиусининг

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

формуласидан $t = 0$ ва $t = \frac{\pi}{2}$ қийматларда A_1 ва A_2 нуқталардаги қийматлар ҳосил қилинади:

$$R_{A_1} = \frac{b^2}{a} \text{ ва } R_{A_2} = \frac{a^2}{b},$$

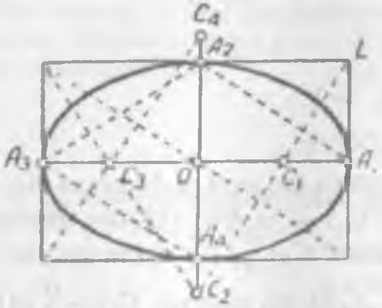
булар юқоридаги қийматларнинг ўзидир.

Нуқта эллипснинг A_1A_2 ёйини чизиб чиқса, эгрилик маркази эволютада $\overset{\frown}{C_1C_2}$ ни чизади.

$a > b$, шу сабабли, $OC_1 < |OC_2|$, яъни $\frac{c^2}{a} < \frac{c^2}{b}$ ва $R_{A_1} < R_{A_2}$ дир. C_1 ва C_2 нуқталар ҳар вақт эллипс ичида ётади (чунки $a^2 - b^2 < a^2$, $\frac{a^2-b^2}{a} < a$). C_3 ва C_4 нуқталар эса эллипс ичида ёки ташқарисида ётиши мумкин, бу $a^2 - b^2 \lesseqgtr b^2$, яъни $a^2 \lesseqgtr 2b^2$ га боғлиқдир. Бу ерда:

$$\overset{\frown}{C_1C_2} = A_2C_2 - A_1C_1 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3-b^3}{ab}.$$

Демак, эллипс эволютасининг бутун ёй узунлиги $4\frac{a^3-b^3}{ab}$ га тенг. Эллипс учларига мос келган C_1 ва C_2 нуқталарнинг эллипс ичида ётганлигига бошқача йўл билан ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин. Томонлари эллипс ўқларидан иборат тўғри тўртбурчак ясаб (130-чизма), унинг бирор учидан (масалан, L дан) диагоналига перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикуляр эллипс ўқларини C_1 ва C_2 эгрилик марказларида кесиб ўтади.



130-чизма.

Ҳақиқатан $\frac{A_2C_2}{a} = \frac{a}{b}$, демак, $A_2C_2 = \frac{a^2}{b}$.

Шунинг сингари $\frac{A_1C_1}{b} = \frac{b}{a}$, бундан $A_1C_1 = \frac{b^2}{a}$.

2) *Эволюта — ўрамадир.* Биз биламизки, чизиқнинг нормаллари эволютага уриниб боради. Демак, чизиқнинг эволютаси унинг нормалларининг ў р а м а с и д и р. Буни аналитик исботлаш ҳам қийин эмас.

Нормалнинг тенгламасини оламиз:

$$[X - x(t)]\, x'(t) + [Y - y(t)]\, y'(t) = 0 \qquad (1)$$

t нинг ҳар бир қийматига битта нормал мос келади, яъни нормаллар оиласи учун параметр ролини t ўйнайди. (1) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

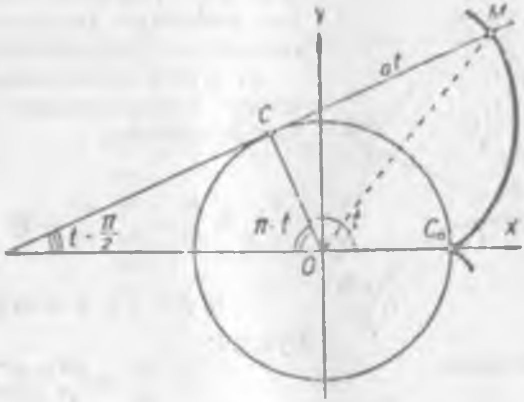
$$[X - x(t)]\, x''(t) + [Y - y(t)]\, y''(t) - [x'^2(t) + y'^2(t)] = 0. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалардан X ва Y ни аниқласак,

$$X = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, y', \quad Y = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, x'$$

тенгламаларни, яъни эволютани ҳосил қиламиз (бу ерда фақат ξ ва η ўрнига X ва Y ёзилган).

3) *Айлана эвольвентаси* (131-чизма). Берилган эволюта бўйича чексиз кўп эвольвента топилишини юқорида кўрган эдик: $R = R_0 + \smile{C_0C}$, бунда R_0 — бошланғич M_0 нуқтадаги эгрилик радиусидир. Уни нолга тенг қилиб олсак, C_0 нуқтадан ўтувчи эвольвента ҳосил қилинади.



131-чизма.

Айлана учун $R_0 = 0$ деб қабул қиламиз; у ҳолда эвольвента C_0 нуқтадан бошланиб, $R = CM = \smile{C_0C}$ бўлади. Бироқ $\smile{C_0C} = at$. Демак, $R = at$. Эвольвентадаги M нуқтанинг x ва y координаталарини t орқали ифодалаймиз:

$$x = \text{пр.}_x\overline{OM} = \text{пр.}_x\overline{OC} + \text{пр.}_x\overline{CM} = a\cos t + at\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \text{пр.}_y\overline{OM} = \text{пр.}_y\overline{OC} + \text{пр.}_y\overline{CM} = a\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + at\cos(\pi - t)$$

ёки

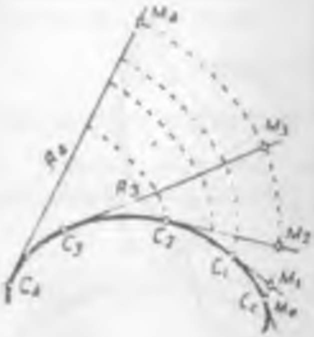
$$x = a(\cos t + t\sin t),$$
$$y = a(\sin t - t\cos t).$$

Айлана эвольвентасининг параметрик тенгламалари шулардир. Бу чизиқ учун $t = 0$ га мос нуқта — ягона махсус нуқтадир, чунки $t = 0$ да $x' = at\cos t$ ва $y' = at\sin t$ нинг иккаласи ҳам 0 га тенг.

4) *Эволюта ва эвольвента терминларининг маъноси.* Эгилган бирор линейка $C_0C_1C_2C_3C_4$ эгри чизиқ формасини олган бўлиб, унинг C_4 нуқтасида R_4 узунликдаги ипнинг бир учи боғланган бўлсин. Бу ип $C_0C_1C_2C_3C_4$ га ўралгандан кейин, ипни таранг тортиб туриб, ҳалиги линейкадан бўшата борсак, унинг иккинчи учи (ҳатто ҳар бир нуқтаси) эвольвентани чиза

боради. Демак, эвольвентани $M_0M_1M_2M_3M_4$ чизиқнинг *ёйилмаси* деб қараш мумкин. Шу сабабли, эволюта — ё й и л м а, эвольвента эса — ё ю в ч и д и р (132-чизма).

5) *Тишли ғилдираклар* назариясида ҳам эволюта ва эвольвента ишлатилиб, уларда ишқаланишни камайтириш мақсадида ғилдирак тиши ва унинг тушадиган жойининг сиртига эволюта ва эвольвента формаси берилади.



132-чизма.

6) *Қутб системасида берилган чизиқ эгрилигининг формуласи.* Биз биламизки,

$$k_н = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}; \quad \frac{ds}{d\varphi} = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}; \quad \mu = \operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{\rho}{\rho'}.$$

Бундан:

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

Лекин $\alpha = \varphi + \mu$, демак,

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 + \frac{d\mu}{d\varphi} = 1 + \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Эгрилик эса:

$$k_н = \frac{\frac{d\alpha}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Мисол. Қуйидаги чизиқларнинг эгрилиги топилсин: а) логарифмик спираль $\rho = e^{a\varphi}$. Бундан $\rho' = ae^{a\varphi} = a\rho$, $\rho'' = a^2e^{a\varphi} = a^2\rho$; демак,

$$k_н = \frac{1}{\rho\sqrt{1+a^2}}.$$

б) Кардиоида $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Жавоб: $k_н = \frac{4}{3}\cos\frac{\varphi}{2}$.

7) *Ошкормас $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг эгрилиги ва эволютаси.*

Берилган чизиқнинг эволютаси — унинг нормалларининг ўрамасидир.

Нормал тенгламаси:

$$(X - x)F_y - (Y - y)F_x = 0. \qquad (1)$$

Бу тенгламани параметр сифатида олинган x бўйича дифференциаллаймиз ва $F_x + F_y y' = 0$ дан фойдаланамиз, у ҳолда қуйидаги тенглама ҳосил қилинади:

$$(X - x)(F_{xy} F_y - F_{yy} F_x) + (Y - y)(F_{yx} F_x - F_{xx} F_y) = F_x^2 + F_y^2. \quad (3)$$

(2) ва (3) тенгламалардан

$$X - x = -\frac{F_x (F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}, \quad Y - y = -\frac{F_y (F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}$$

ёки

$$X = \xi = x - \frac{F_x (F_x^2 + F_y^2)}{\Delta}, \quad Y = \eta = y - \frac{F_y (F_x^2 + F_y^2)}{\Delta},$$

бунда
$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix},$$

эгрилик эса

$$k_н = \frac{\Delta}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

Жумладан, иккинчи тартибли

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

чизиқ учун

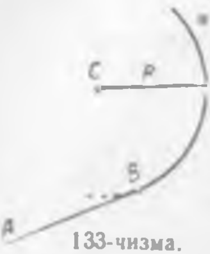
$$k_н = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

Ушбуни исботланг: $R_н = \frac{1}{k_н} = \frac{N^3}{p^2}$, бунда p — иккинчи тартибли чизиқ (эллипс, гипербола) параметри $\left(p = \frac{b^2}{a}\right)$ ва N—нормаль узунлиги $(N = y\sqrt{1 + y'^2})$.

8) *Ўтимли чизиқ* (переходная кривая). Эгрилик ва эгрилик радиуси тушунчалари инженерлик ишида тез-тез учраб туради. Масалан, темир йўл қурилишда ўтимли номли бирбири билан уланган икки эгри чизиқ ишлатилади. Аввал AB тўғри чизиқ, сўнгра айлананинг BC ёйи бўйлаб бирор моддий нуқта ҳаракат қилса, йўлнинг AB қисмида эгрилик радиуси чексиз, BC қисмида эса R га тенгдир. Демак, B нуқтада эгрилик радиуси ўзининг узлуксизлигини йўқотади (гарчи уринма A дан C гача узлуксиз ўзгарса ҳам). Поезд, трамвайнинг бурилиш вақтида силтаниб кетишига сабаб шудир. Бундай за-

рарли таъсирдан қутулиш учун шундай (ўтимли) чизиқлар ишлатиладики, уларнинг эгрилик радиуслари секин-аста (чексиз катта қийматдан) камая бориб, уланиш жойида (B нуқтада) ёпишма айлана радиусига тенг бўлади.

Ҳаракатланувчи жисмнинг массаси m, тезлиги v ва тегишли эгрилик радиус R бўлса, траекториянинг нормали бўйича йўналган „марказдан қочма“ куч



133-чизма.

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

га тенг бўлади. Айтганларимиз бу формуладан бевосита кўриниб туради: эгриликнинг радиусининг узлуксизлиги узилган нуқталарда куч ҳам „узилиб“ кетади, бу эса силтанишга сабаб бўлади (133-чизма).

Одатда, ўтимли чизиқ сифатида $y = \frac{1}{6a}x^3$[1] кубик параболалар олинади; унинг эгрилик радиуси

$$R = \frac{a}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{чунки} \quad y' = \frac{1}{2a}x^2, \quad y'' = \frac{1}{a}x.$$

Уланиш нуқтасида (B да) $x = 0$, $y' = 0$ ва $R = \infty$ бўлиб, ўтимли чизиқ B нуқтада AB тўғри чизиққа уринади ва эгрилиги нолга тенг $\left(\frac{1}{R} = 0\right)$ бўлади.

Машқлар

92. *Циклоида* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

§ 22 да циклоидага уринма ва нормаль ўтказиш усули баён қилинган эди. Бу ерда:

$$x'^2 + y'^2 = 4a^2 \sin^2\frac{t}{2}; \quad x'y'' - x''y' = -2a^2 \sin^2\frac{t}{2};$$

$$MC = R_n = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{8a^3 \sin^3\frac{t}{2}}{-2a^2 \sin^2\frac{t}{2}} = -4a \sin\frac{t}{2}.$$

Циклоиданинг биринчи тармоғи учун $0 < t < 2\pi$ ёки $0 < \frac{t}{2} < \pi$ бўлиб, демак, $MC = -4a \sin\frac{t}{2} < 0$, яъни эгрилик радиуси манфийдир; бошқача айтганда, C эгрилик маркази нормалнинг манфий томонида ётади. Иккинчи томондан, нормал узунлиги

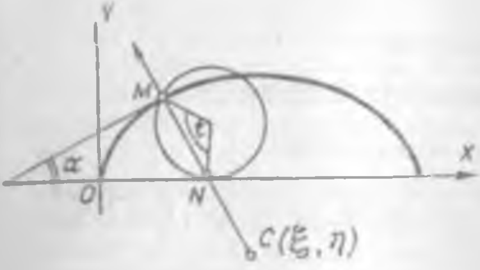
$$MN = \frac{dy}{dx}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

---

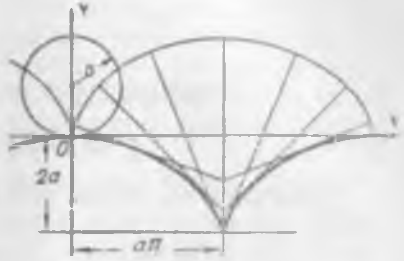
1) Фихтенгольц, I т. 240-пункт.

MN ва MC ни солиштирамиз (134-чизма): $|MC| = 2MN$, яъни циклоиданинг эгрилик радиуси нормаль узунлигининг икки бараварига тенгдир. Бу ердан эгрилик марказларини ясаш усули ҳосил қилинади. Бунинг учун эволютани топамиз; сўнгра тегишли формулаларга x', y', x'', y'' нинг ифодаларини қуямиз:

$$\xi = a(t + \sin t),\ \eta = -a(1 - \cos t).$$



134-чизма.



135-чизма.

Бу тенгламалар XOY системасига нисбатан ёзилган. Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$t = t_1 - \pi,\ \xi = x_1 - \pi a,\ \eta = y_1 - 2a,$$

у ҳолда

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1),\quad y_1 = a(1 - \cos t_1).$$

Бу чизиқ ҳам берилган циклоидага конгруэнт циклоида бўлиб, берилган циклоидани чап томонга πa масофага ва пастга қараб $2a$ масофага силжитиш натижасида ҳосил қилинади (135-чизма).

93. Қуйидаги чизиқларнинг эгрилик радиуслари, эгрилик марказлари ва эволюталари топилсин.

1) Занжир чизиқ $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$;

2) астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

3) синусоида $y = \sin x$;

4) гипербола $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$;

5) логарифмик спираль $\rho = e^{a\varphi}$;

6) трактриса $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$.

Туққизинчи боб

ЧИЗИҚНИНГ ТАБИИЙ ТЕНГЛАМАСИ

§ 54. Умумий мулоҳазалар

Аналитик ва дифференциал геометрияда чизиқлар хоссалари уларнинг тенгламаларини ўрганиш билан вужудга чиқарилади. Тенгламаларнинг ўзлари эса маълум бир системада ёзилади. Шу сабабли, чизиқни тенгламасига асосланиб текширганда, чизиққа хос геометрик хоссалардан ташқари, координата системасини танлашга боғлиқ бўлган тасодифий хоссалар билан ҳам иш кўришга тўғри келади. Геометрияга доир масалани ечишда координата системасининг танлаб олиниши принципиал жиҳатдан аҳамиятсиздир. Ёзилган тенгламалар фигуранинг вазиятини маълум бир системада аниқлайди. Фигуранинг тутган вазиятидан кўра, унинг формаси — тузилиши бизни купроқ қизиқтиради.

Аналитик геометрияни эслайлик. Унда, асосан иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар алгебраик усулда, яъни маълум бир системада ёзилган тенгламалар воситаси билан текширилади; бу йўсиндаги текширишда, фигуранинг координата системасига нисбатан жойланишига боғлиқ хоссалар билан иш кўришдан воз кечиш учун, аналитик геометрияда инвариантлар назарияси вужудга келтирилади, яъни чизиқ тенгламасининг коэффициентларидан шундан ифодалар тузиладики, улар координаталарни алмаштирганда ўзгармайди Бошқача айтганда, системани ўзгартмасдан, чизиқнинг унга нисбатан ўрнини ўзгарта борсак, ҳалиги ифодалар ўзгармайди. Аналитик геометрияда чизиқлар ва сиртлар инвариантларининг мукаммал системасини қулга киритиб, улар ёрдами билан чизиқ ва сиртнинг формасини аниқлайдилар.

Параметрик тенгламалари турлича бўлган икки чизиқ ё текисликда ишгол қилган ўринлари билан, ёки формалари билан фарқланишн мумкин. Ана шу ҳолларнинг бир-биридан фарқини билиш учун дифференциал геометрияда ҳам, чизиқлар ва сиртлар назариясидаги сингари, инвариантлар усули ишлатилади.

Координата системасининг танланишига боғлиқ бўлмаган катталиклар: чизиқ ёйининг узунлиги, эгрилиги, бурилмаси-дир. Ҳақиқатан, чизиқни координата системасига нисбатан қандай силжитсак ҳам, унинг ёй узунлиги ўзгармайди, чунки ёй узунлиги ички чизилган синиқ чизиқнинг лимитидир. Шунинг сингари, унинг эгрилиги ўзгаришсиз қолади, эгрилик — уринмалар орасидаги бурчакнинг (қўшнилик бурчагининг) ёй узунлигига нисбатининг лимитидир. Бурилма бинормаллар орасидаги бурчакнинг (қўшнилик бурчагининг) ёй узунлигига нисбатининг лимитидир. Ёй узунлиги ва тегишли бурчаклар эса, силжитиш ёки координаталарни алмаштириш вақтида ўзгармайди.

Текисликдаги чизиқ устида сўз бораётган бўлса, бурилма нолга тенг деб фараз қилинади.

§ 55. Текисликдаги чизиқнинг табиий тенгламаси

Аввало, чизиғимизнинг тенгламаси вектор формада

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad T_0 \leqslant t < T,$$

ёки параметрик формада

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

берилган дейлик, ва чизиғимизда мусбат йўналиш сифатида t параметрнинг ўсиб борган йўналишини олайлик. Бу ҳолда t параметрдан ёй узунлигига ўтиб, уни параметр деб олиш мумкин:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \text{ ёки } x = x(s), \ y = y(s) \qquad (S_0 < s < S).$$

Энди $\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| \neq 0$; шу сабабли, s ва t бир вақтда ўсади.

Чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, унинг нисбий $k_н$ эгрилиги s нинг функцияси бўлади:

$$k = k(s). \qquad (1)$$

Биз бу ерда қисқалик учун $k_н$ ўрнига k ни ёздик. Агар уринма билан OX ўқи орасидаги бурчакни α десак, нисбий эгриликнинг таърифига кўра,

$$k = \dot{\alpha}(s)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}, \ \dot{x}(s) = \cos\alpha, \ \dot{y}(s) = \sin\alpha.$$

(1) тенглама текисликдаги чизиқнинг *табиий* (ёки *ички*) тенгламаси дейилади. Бу тенгламага чизиқ учун ёт бўлган координаталар кирмаганлиги туфайли, унга шундай ном берилгандир.

Табиий тенгламани умумийроқ формада ёзиш мумкин:

$$F(s, k) = 0.$$

Мисоллар. 1) Занжир чизиқ

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

нинг табиий тенгламасини тузайлик. Биз биламизки (130-бет, машқ 72)

$$s^2 = y^2 - a^2$$

Эгрилик радиусининг

$$\frac{1}{k} = \rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

формуласидан фойдалансак:

$$\rho = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} \text{ ёки } a\rho = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = y^2,$$

демак, $a\rho = s^2 + a^2$ ёки

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}$$

бўлади. Изланган тенглама шудир.

2) Айлана эвольвентасини олайлик:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \qquad y = a(\sin t - t \cos t),$$

бундан:

$$x'^2 + y'^2 = a\sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = at,$$

демак:

$$s = \int_0^t at\, dt = \frac{at^2}{2},$$

бу ерда a — айлана радиуси. Эволютанинг таърифига кўра, $CM = \rho = at$. Энди $s = \frac{at^2}{2}$ ва $\rho = at$ тенгликлардан t ни йўқотамиз:

$$\rho = \sqrt{2as} \text{ ёки } k = \frac{1}{\sqrt{2as}}.$$

Айлана эвольвентасининг табиий тенгламаси шудир.

Умумий мулоҳазаларга қайтиб, ҳар бир чизиққа тайин бир табиий тенгламанинг мос келишини кўрамиз. Энди масалани тескарича қўйиб, (1) кўринишдаги ҳар бир табиий тенглама тайин бир чизиқни аниқлайдими, яъни иккита турли эгри чизиқ бир хил табиий тенгламага эга бўла оладими, деган сўроқларни берамиз. Бу масалани бирятўла фазовий чизиқларга нисбатан ечамиз.

§ 56. Фазовий чизиқнинг табиий тенгламалари

Фазовий чизиққа нисбатан ҳам шу муҳокамаларни юргизиб унинг табиий тенгламалари қуйидагилардан иборат деган хулосага келамиз:

$$k = k(s) > 0, \quad \sigma = \sigma(s). \tag{1}$$

Фазовий чизиқлар учун нисбий эгрилик тушунчасини киритишга ҳожат йўқ, шу сабабли, $k(s) > 0$ деб қабул қилган эдик. Фазонинг турли жойида турган, лекин конгруэнт (тенг) бўлган икки чизиқ бир хил табиий тенгламаларга эга; демак, аслида, битта чизиқнинг фазодаги турли вазиятлари қаралади. Чизиқнинг фазода (текисликда) тутган ўрнидан воз кечилса, (1) тенгламалар битта чизиқни аниқлайди.

Бу муҳокамаларни исбот деб ҳисоблаш мумкин эмас, улар қўйилган масаланинг маъносини аниқлаш йўлидаги фикрдир.

Мисол сифатида гиперболик винт чизиқнинг табиий тенгламаларини тузайлик. Унинг параметрик тенгламалари (131-бет)

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at.$$

Ёй узунлигини биз ҳисоблаган эдик: $s = a\sqrt{2}\ \mathrm{sh}\,t$; эгрилик ва бурилма учун чиқарилган тегишли формулалардан фойдалансак:

$$k = \frac{a}{2a^2 + s^2}, \quad \sigma = \frac{a}{2a^2 + s^2}, \text{ демак, } k = \sigma.$$

Гиперболик винт чизиқнинг табиий тенгламалари шудир.

Қўйилган саволларга ушбу теорема жавоб беради:

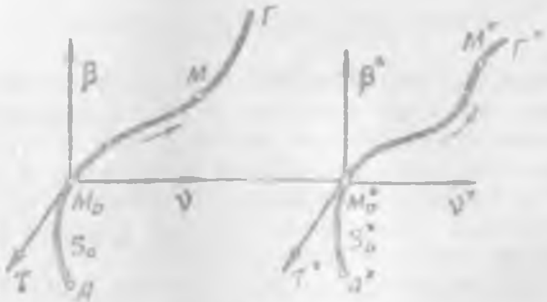
Теорема. *(Γ) ва (Γ^*) дан иборат икки эгри чизиқнинг геометрик шакллари бир хил бўлиши, яъни улар фақат фазода тутган вазиятлари билангина фарқланиши учун, уларнинг табиий тенгламалари умумий бўлиши зарур ва етарлидир* (шундай қилиб, табиий тенгламалар чизиқнинг шаклини — формасини бемалол аниқлаб берар экан).

Исбот. Аввало, шунн таъкидлаимизки, чизиқларнинг бирбиридан фарқи фазода тутган вазиятидан иборат деганда, уларнинг бирини узлуксиз ҳаракатлантириб, иккинчиси билан устма-уст тушириш мумкинлигини тушунамиз.

Энди теореманинг исботига ўтамиз.

Шартнинг зарурлиги.

Қаттиқ жисмни кўчирган сингари, биринчи чизиқни аввал $M_0M_0^*$ векторга силжитиб, шундай φ бурчакка айлантирамизки, у иккинчи чизиқ билан устма-уст тушсин (136-чизма). Бунинг натижасида (Γ) ва (Γ^*) чизиқларнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади: қайси икки нуқта устма-уст тушса, уларни ўзаро мос нуқталар деб ҳисоблаймиз, жумладан, $M_0(s = s_0)$ ва $M_0^*(s^* = s_0^*)$ нуқталар ўзаро мосдир. У ҳолда мос M ва M^* нуқталарга бир хил s мос келади, чунки чизиқларни устма-уст туширганимизда ва уларнинг мусбат йўналишларини (ориентацияларини) бир хил



136-чизма.

қилганимизда $\overset{\frown}{M_0M}$ ёй иккала чизиқ учун ҳам бир хил булади: $\overset{\frown}{M_0M^*} = \overset{\frown}{M^*{}_0M^*}$.

Иккинчи томондан, $(Г)$ нинг ҳар бир нуқтасидаги табиий учёқликни чизиқ билан бирга кучирсак, у ҳаракат вақтида ҳамон ўз характерини сақлайди: янги нуқтада ҳам у табиий учёқлик ролини ўйнайди, чунки ҳаракат вақтида қаттиқ жисмнинг нуқталари орасидаги масофалар ўзгармайди, шу сабабли, чизиқ ва сирт (текислик)нинг уриниш тартиби ўзгармайди. Бундан эса қуйидаги хулосага келамиз: уринма ва бинормаль (ёпишма текислик) янги нуқтада ҳам яна уша ролни ўйнайди (улар фақат маълум бурчакка бурилиши мумкин); уринмалар (бинормаллар) орасидаги $\Delta\varphi(\Delta\psi)$ бурчак ўзгармайди, Δs ҳам ўзгаришсиз қолгани учун $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right)$ нисбат ва унинг модули ҳам ўзгармайди; шу билан бирга, унинг лимити ҳам ўзгармайди; натижада $(Г)$ ни $(Г^*)$ билан устма-уст туширсак, M ва M^* нуқталарда k ва σ бир хил бўлади (эслайлик: $|\sigma| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|$, бунда $\Delta\psi$ — бинормалларнинг қўшнилик бурчаги). Ҳаракатнинг узлуксизлиги туфайли, σ нинг ишораси ҳам тескарисига ўзгара олмайди. Хуллас, иккала чизиқ учун ҳам s, $k(s)$ ва $\sigma(s)$ бир хилдир.

Шартнинг етарли бўлиши. Фараз этайлик, $(Г)$ ва $(Г^*)$ чизиқларда табиий s ва s^* параметрлар киритилган бўлиб, уларнинг бир хил қийматларига мос келган k ва σ ҳам бир хил бўлсин:

$$s = s^*, \quad k(s) = k^*(s), \quad \sigma(s) = \sigma^*(s), \tag{2}$$

яъни (Γ) ва (Γ^*) чизиқлар умумий табиий тенгламага эга дейлик. У ҳолда бу чизиқларнинг фақат фазода тутган вазиятлари билан фарқланишини, уларнинг бирини иккинчиси билан, масалан, (Γ) ни (Γ^*) билан устма-уст тушириш мумкинлигини исботлаш талаб қилинади.

(Γ) чизиқни шундай силжитамизки, унинг $s=s_0$ қийматга мос келган M_0 нуқтаси (Γ^*)нинг шу $s=s_0$ га мос келган M_0^* нуқтаси билан устма-уст тушсин. Сўнгра тегишли табиий учёқликлар бирлашиб кетгунча, (Γ) ни M_0^* нуқта атрофида айлантирамиз (буни бажариш мумкин — зарурий шартга қаранг):

$$r_0=r_0^*,\quad \bar{\tau}_0=\bar{\tau}_0^*,\quad \bar{\nu}_0=\bar{\nu}_0^*,\quad \bar{\beta}_0=\bar{\beta}_0^*.$$

Бу тенгламалар исталган $s=s^*=s_0$ учун ҳам кучга эгадир; ҳақиқатан, учта скаляр кўпайтма йиғиндисини тузайлик:

$$\bar{\tau}\bar{\tau}^*+\bar{\nu}\bar{\nu}^*+\bar{\beta}\bar{\beta}^*=\lambda.$$

Бунинг иккала томонидан s бўйича ҳосила олиб, Френе формулаларидан ва (2) фаразлардан фойдаланамиз:

$$\frac{d\lambda}{ds}=k\bar{\nu}\bar{\tau}^*+(-k\bar{\tau}+\sigma\bar{\beta})\bar{\nu}^*-\sigma\bar{\nu}\bar{\beta}^*+k\bar{\tau}\bar{\nu}^*+\bar{\nu}(-k\bar{\tau}^*+\sigma\bar{\beta}^*)-$$
$$-\sigma\bar{\beta}\bar{\nu}^*;$$

бу ҳосилани ҳисоблаб, нолга тенглигини кўрамиз. Демак, $\lambda=\text{const}$; бошқача айтганда, λ нинг s га боғлиқ эмаслиги маълум бўлади. У ҳолда $s=s_0$ қийматда:

$$\lambda_0=\bar{\tau}_0^2+\bar{\nu}_0^2+\bar{\beta}_0^2=3,$$

шу сабабли, исталган s учун ҳам $\lambda=3$:

$$\bar{\tau}\bar{\tau}^*+\bar{\nu}\bar{\nu}^*+\bar{\beta}\bar{\beta}^*=3. \qquad (3)$$

Энди $\widehat{\bar{\tau},\bar{\tau}^*}=\varphi$, $\widehat{\bar{\nu},\bar{\nu}^*}=\psi$, $\widehat{\bar{\beta},\bar{\beta}^*}=\theta$ фараз қилинса, (3) дан

$$\cos\varphi+\cos\psi+\cos\theta=3$$

келиб чиқади, бу эса фақат $\cos\varphi=\cos\psi=\cos\theta=1$ да ёки $\varphi=\psi=\theta=0$ да юз бера олади.

Бундан эса исталган s учун:

$$\bar{\tau}^*=\bar{\tau},\quad \bar{\nu}^*=\bar{\nu},\quad \bar{\beta}^*=\bar{\beta}.$$

Булардан биринчисини $\frac{dr^*}{ds}=\frac{dr}{ds}$ шаклда ёзиш мумкин. Буни интегралласак:

$$r^*(s)=r(s)+c$$

бўлади, бунда c — ўзгармас вектор. Бироқ, шартга кўра, $s = s_0$ да $r^* = r$, яъни $c = 0$ ва исталган s учун

$$r^*(s) = r(s),$$

ёки

$$x^*(s) = x(s),\ y^*(s) = y(s),\ z^*(s) = z(s).$$

Шундай қилиб, иккала чизиқ умумий параметрик тенгламаларга эга. (Γ) чизиқ силжиш ва бурилиш натижасида (Γ^*) билан устма-уст тушади. Шуни исботлаш керак эди.

Эслатма: табиий тенгламаларнинг хусусий ҳолини кўрайлик:

$$k = k(s),\ \sigma \equiv 0. \tag{4}$$

Бу тенгламаларга текисликдаги чизиқ мос келади. Текисликда ётиб, бирор ўққа, масалан, OX ўқига нисбатан симметрик бўлган иккита чизиқни олсак, уларнинг бирини OX атрофида айлантириб (фазога чиқиб), иккинчиси билан устма-уст тушириш мумкин. Лекин текислик геометриясида биз $k > 0$ дан воз кечиб, k манфий ҳам була олади деган эдик ва $\sigma(s) = k$ нисбий эгрилик эди. OX ўқига нисбатан симметрик чизиқларни олсак, уларнинг мос M ва M' нуқталаридаги эгриликлари фақат ишора билангина фарқ қилади (137-чизма). Бу икки чизиқни текисликдан чиқмасдан туриб (яъни текислик геометриясида), ҳеч вақт устма-уст тушириб бўлмайди. Бунга сабаб, уларнинг табиий тенгламалари турлича бўлишидир, чунки бири учун $k = f(s)$, иккинчиси учун эса $k = -f(s)$. Худди шунинг сингари, фазода текисликка нисбатан симметрик иккита чизиқни ҳам устма-уст тушириш мумкин эмас; чунки бу чизиқларнинг бирига

137-чизма.

$$k = k(s) > 0,\ \sigma = \sigma(s) > 0$$

мос келса, иккинчисига

$$k = k(s) > 0,\ \sigma = \sigma(s) < 0$$

мос келади.

Натижа. Олдинги эслатмани эътиборга олсак, исботланган теорема текисликдаги чизиққа ҳам бевосита тарқалади: *текисликдаги икки чизиқнинг геометрик шакллари бир хил* *бўлиши, яъни улар фақат текисликдаги вазиятлари билангина фарқланиши учун, уларнинг $k = k(s)$ табиий тенгламаси умумий бўлиши зарур ва етарлидир.*

§ 57. Иловалар. Машқлар

1) Циклоиданинг табиий тенгламаси тузилсин:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(t - \cos t).$$

Маълумки (92-масала),

$R_н = -4a\sin\frac{t}{2}$ ва $s = \int \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 2a\int \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}$;

демак, табиий тенглама:

$$s^2 + R_н^2 = 16a^2, \quad \sigma = 0.$$

2) Трактриса берилган:

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right), \quad y = a\sin\alpha,$$

ёки

$$x = \pm\left[a\lg\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\right].$$

Бу чизиқнинг ҳамма нуқталаридаги уринма узунлиги a га тенг. Бу ерда

$$x' = a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}; \quad y' = a\cos\alpha; \quad (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Демак,

$$s = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{ctg}\alpha\,d\alpha = a\ln\sin\alpha. \qquad (1)$$

Лекин

$$R_н = \frac{1}{k_н} = \frac{ds}{d\alpha} = a\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (2)$$

Бу икки муносабатдан α ни йўқотамиз:

$$(1) \text{ дан } \sin\alpha = e^{\frac{s}{a}}, \quad (2) \text{ дан } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R_н}{a}$$

ёки

$$\sin^2\alpha = e^{\frac{2s}{a}}, \quad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{R_н^2}{a^2}.$$

Энди $\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$ дан фойдалансак:

$$R_н^2 + a^2 = a^2 e^{-\frac{2s}{a}}, \quad \sigma = 0$$

ёки

$$R_н = a\sqrt{e^{-\frac{2s}{a}} - 1}, \quad \sigma = 0.$$

Трактрисанинг табиий тенгламалари шулардир.

3) Текисликдаги чизиқнинг табиий $R = f(s)$ тенгламасига суяниб, тегишли эволютанинг табиий тенгламаси тузилсин.

Эволютанинг таърифига биноан:

$$\bar\rho(s) = \bar r(s) + R(s)\bar\nu(s) \text{ ва } d\bar\rho = dR\bar\nu.$$

Эволюта ёйини s_1 билан белгиласак:

$$ds_1^2 = d\bar{\rho}^2 = dR^2 \text{ (чунки } \bar{\nu}^2 = 1), \; s_1 = R = f(s).$$

Эгрилик радиусининг таърифига кўра:

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_1}{ds}\frac{ds}{d\alpha} = f'(s)\cdot f(s) = R_1\cdot$$

Демак, эволютанинг параметрик тенгламаси:

$$s_1 = f(s), \; R_1 = f'(s) f(s),$$
$$s_1 = R(s), \; R_1 = R(s)\frac{dR}{ds}. \tag{3}$$

Бу тенгламалардан s йўқотилса: табиий $\varphi(s_1, R_1) = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

4) Чизиқнинг табиий тенгламаси: $R = as$ (логарифмик спираль). У ҳолда бу чизиқнинг эволютаси

$$s_1 = as, \; R_1 = a\cdot as = a^2 s;$$
$$R_1 = as_1, \; \sigma = 0$$

булади. Демак, логарифмик спиралнинг эволютаси — яна логарифмик спиралдир.

Иккинчи мисол сифатида циклоидани олайлик:

$$s^2 + R^2 = 16a^2, \tag{4}$$

бундан $sds + RdR = 0$ ёки $R\dfrac{dR}{ds} = -s$; демак: $R_1 = -s$ ва $s_1 = R$. Буларни (4) га қуйсак,

$$s_1^2 + R_1^2 = 16a^2$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, циклоиданинг эволютаси – яна циклоидадир.

94. Қуйидаги чизиқларнинг табиий тенгламалари тузилсин:

а) кардиоида: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

б) астроида: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Жавоб: а) $s^2 + 9R^2 = 16a^2$; б) $R^2 + 4s^2 - 6as = 0$.

95. Занжир чизиқни трактрисанинг эволютаси деб қараб, унинг табиий тенгламаси топилсин,

Жавоб: $R = a + \dfrac{s^2}{a}$.

96. Эволютанинг табиий тенгламаси бўйича эвольвентанинг табиий тенгламаси топилсин.

Ечиш. (3) га кура,

$$\frac{1}{k} = R = s_1 \tag{5}$$

α ва α_1 учун $d\alpha_1 = d\alpha$, бунга асосан:

$$k_1 = \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{d\alpha}{ds_1} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1} = k\frac{ds}{ds_1},$$

бундан ва (5) дан

$$ds = \frac{k_1 ds_1}{k} = s_1 k_1\, ds_1,$$

шундай қилиб, эвольвентанинг табиий тенгламаси

$$R = s_1, \quad s = \int \frac{s_1 ds_1}{R_1}, \tag{6}$$

бунда s_1 ва R_1 — эволютага тааллуқлидир.

97. Трактрисани занжир чизиқнинг эвольвентаси деб қараб, унинг табиий тенгламалари топилсин.

Занжир чизиқнинг табиий тенгламаси (166-бет):

$$R_1 = a + \frac{s_1^2}{a} = \frac{a^2 + s_1^2}{a^2}.$$

(6) га кўра

$$s = \int \frac{as_1\,ds_1}{a^2 + s_1^2} = \frac{a}{2} \ln (a^2 + s_1^2),$$

бундан $a^2 + s_1^2 = e^{\frac{2s}{a}}$ ёки, $s_1 = R$ ни қўйиш билан,

$$R^2 + a^2 = e^{\frac{2s}{a}}.$$

Биз яна маълум натижага келдик.

§ 58. Табиий тенгламаларни интеграллаш

Ҳозиргача фазодаги ёки текисликдаги эгри чизиққа мос тенгламаларни туздик ва бу тенгламаларнинг чизиқни қайси тариқада аниқлашини кўрдик. Энди масалани тескарича қўйишни мақсад қилиб, чизиқлар назариясида асосий ҳисобланадиган ушбу умумий теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Агар s ўзгарувчининг бирор $S_0 \leqslant s \leqslant S$ соҳасида иккита ихтиёрий узлуксиз $\varphi(s) > 0$ ва $\psi(s)$ функциялари берилган бўлса, у ҳолда ўша соҳада фақат битта шундай чизиқ мавжудки, унинг эгрилиги ва буралмаси $\varphi(s)$ ва $\psi(s)$ га тенгдир:*

$$k = \varphi(s), \quad \sigma = \psi(s);$$

бошқача айтганда, фақат битта шундай чизиқ мавжудки (фазодаги вазиятидан қатъи назар), *унинг табиий тенгламалари $k = \varphi(s)$ ва $\sigma = \psi(s)$.*

Исбот. Бу теореманинг исботи оддий дифференциал тенгламалар системаси учун ечимларнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага (Коши теоремасига) асосланган бўлиб, анча қийиндир. Шу сабабли, биз унинг хусусий ҳоли билан шуғулланамиз:

$$k = \varphi(s), \quad \sigma = 0. \tag{1}$$

Бу ерда $\varphi(s) > 0$ деган шартдан воз кечамиз*. Бундай ҳолда бу тенгламаларга текисликдаги чизиқ мос келади (агар у мавжуд бўлса). Хуллас, текисликда шундай чизиқни топиш

* Бу ҳолда изланган чизиқ нуқталарининг координаталари ёй узунлиги орқали ифодаланиб, бу ифодаларга элементар (тригонометрик) функциялар ва интеграл белгилари („квадратуралар“) киради. Бошқача айтганда, тегишли дифференциал тенгламалар охиригача интегралланади.

керакки, унинг k эгрилиги s нинг берилган $\varphi(s)$ функциясига тенг бўлсин. „Чизиқни топиш керак" деганда, унинг (1) табиий тенгламасига асосланиб, параметрик тенгламалари (яъни „чекли тенгламалари" ни) аниқлашни тушуниш керак. Чизиқнинг чекли тенгламаларини топиш — унинг табиий тенгламаларини *интеграллаш* дейилади.

Фараз қилайлик, изланган чизиқ мавжуд бўлиб, унинг ихтиёрий нуқтасидаги уринмаси OX ўқи билан α бурчакни ташкил қилсин. У ҳолда изланган чизиқнинг нисбий эгрилиги

$$\frac{d\alpha}{ds} = k = \varphi(s).$$

Буни s_0 дан s гача интеграллаймиз:

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \varphi(s)\, ds + \alpha_0, \quad \alpha_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Бизга маълумки:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha.$$

Булардан

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^{s} \cos[\alpha(s) + \alpha_0] + x_0, \\ y(s) &= \int_{s_0}^{s} \sin[\alpha(s) + \alpha_0] + y_0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Демак, қўйилган талабга жавоб берувчи чизиқлар чексиз кўп бўлиб (чунки α_0, x_0, y_0 — параметрлар), уларнинг ҳаммаси ўзаро конгруэнтдир. Ҳақиқатан, (3) ни бошқача ёзамиз:

$$x(s) = \cos\alpha_0 \int_{s_0}^{s} \cos\alpha(s)\, ds - \sin\alpha_0 \int_{s_0}^{s} \sin\alpha(s)\, ds + x_0,$$

$$y(s) = \sin\alpha_0 \int_{s_0}^{s} \cos\alpha(s)\, ds + \cos\alpha_0 \int_{s_0}^{s} \sin\alpha(s)\, ds + y_0.$$

Ушбу белгилашларни киритайлик:

$$\xi(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\alpha(s)\, ds, \quad \eta(s) = \int_{s_0}^{s} \sin\alpha(s)\, ds, \tag{4}$$

у вақтда:

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \xi(s)\cos\alpha_0 - \eta(s)\sin\alpha_0 + x_0, \\ y(s) &= \xi(s)\sin\alpha_0 + \eta(s)\cos\alpha_0 + y_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Энди $\alpha_0 = x_0 = y_0 = 0$ десак ва x, y ўрнига X, Y ни ёзсак, (5) ушбу шаклни олади:

$$X = \xi(s), \quad Y = \eta(s). \tag{6}$$

(5) даги муносабатлар Декарт системасининг алмаштириш формулаларидир. [Системани α_0 бурчакка буриш ва координата бошини $M_0(x_0, y_0)$ нуқтага кўчириш]. Бироқ, бу муносабатларга бошқача маъно бериш ҳам мумкин*: улар текисликдаги ҳар бир $M'(X, Y)$ нуқтага шу текисликдаги тайин бир $M(x, y)$ нуқтани мос келтиради. Натижада текисликдаги F фигура F' фигурага алмашинди; бироқ $F = F'$, яъни фигуралар конгруэнт, уларнинг бирини иккинчиси билан устма-уст тушириш мумкин. Бунинг учун F' фигурани α_0 бурчакка буриб, сўнгра $\overline{OO'} = x_0 i + y_0 j$ векторга силжитиш керак. Бу мулоҳазаларни юқорида айтилган чизиқларимизга қўлланиб, уларнинг конгруэнт (тенг) эканлиги тўғрисида ҳукм чиқарамиз. Лекин чизиқнинг фақат шакли (формаси) билангина қизиққанимиз туфайли, уларнинг ҳаммасини битта чизиқ деб қарашимиз лозим. У (6) чизиқдир:

$$\xi(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{s} k(s)\,ds\right) ds, \quad \eta(s) = \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(s)\,ds\right) ds. \tag{7}$$

Демак, изланаётган чизиқни мавжуд деб фараз қилсак, у ягона чизиқ бўлиб, (7) тенгламалар билан ифодаланади.

Унинг мавжудлигини исботлаш учун, шундай чизиқни оламизки, унинг параметрик тенгламалари айнан (6) бўлсин:

$$X = \xi(s), \quad Y = \eta(s), \tag{8}$$

бу ерда α бурчак (2) билан аниқланиб, биз олган чизиқнинг ориентацияси s нинг ўсиб бориш томонига мос келади деб фараз қиламиз. Ана шу (8) чизиқ — изланган чизиқнинг ўзи бўлиб, s параметр унинг учун ёй узунлиги, α — уринманинг OX ўқи билан ташкил қилган бурчаги ва $\varphi(s)$ эгрилик радиуси хизматини бажаради. Ҳақиқатан, (4) ни дифференциалласак

$$d\xi = \cos\alpha(s)\,ds, \quad d\eta = \sin\alpha(s)\,ds, \tag{9}$$

булардан эса

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = ds,$$

яъни биз олган чизиқ учун s параметр ёй узунлиги ролини ўйнайди.

---

* Н. И. Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, М. 1947, 142—143-бетлар.

(9) дан уринманинг OX ўқи билан ташкил қилган бурчаги α га тенг деган хулосага келамиз. Ҳақиқатан, (4) ни дифференциалласак,

$$\frac{d\alpha}{ds}=\varphi(s)$$

бўлади. Эгрилик формуласи $\frac{d\alpha}{ds}=k$ га кўра, $k=\varphi(s)$. Шундай қилиб, бу чизиқнинг эгрилиги худди $\varphi(s)$ га тенг эканини кўрамиз.

Фазовий чизиқлар учун бу теорема алоҳида исботни талаб қилади.

Мисоллар. Қуйида келтирилган табиий тенгламалар интеграллансин; уларга мос келган чизиқларнинг чекли тенгламалари топилсин.

1. $aR=a^2+s^2$,

бундан $\alpha(s)=\int\limits_0^s\frac{a}{a^2+s^2}ds=\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{a}$ ёки $s=a\operatorname{tg}\alpha$.

$$dx=\cos\alpha\, ds=a\cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}=a\frac{d\alpha}{\cos\alpha},$$

$$dy=\sin\alpha\, ds=a\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}=a\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha,$$

буларни интеграллаймиз:

$$x=a\int\limits_0^s\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=a\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y=a\int\limits_0^s\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha=\frac{a}{\cos\alpha}.$$

Интегралларнинг биринчисидан:

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2}{\cos\alpha}.$$

Охирги икки тенгликдан α ни йўқотсак, занжир чизиқ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

ҳосил бўлади.

2. $s^2+R^2=16a^2$.

Бу ерда

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}};$$

$$\alpha = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{16a^2 - s^2}} = \arcsin\frac{s}{4a};$$

$$s = 4a\sin\alpha, \quad ds = 4a\cos\alpha\, d\alpha;$$

$$dx = \cos\alpha\, ds = 4a\cos^2\alpha\, d\alpha = 2a(1 + \cos 2\alpha)\, d\alpha;$$

$$dy = \sin\alpha\, ds = 4a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = 2a\sin 2\alpha\, d\alpha.$$

Булардан:

$$x = a(2\alpha + \sin 2\alpha), \quad y = -a(1 - \cos 2\alpha)$$

ёки, $2\alpha = \theta + \pi$ фараз қилинса,

$$x - a\pi = a(\theta - \sin\theta), \quad y + 2a = a(1 - \cos\theta).$$

Бу тенгламалар циклоидани ифодалайди.

Кейинги икки мисолда $\alpha_0 = x_0 = y_0 = 0$ деб олинди, бу эса интеграл чизиқлардан шундайига мос келадики, у координата бошидан ўтади ва O нуқта s ни ҳисоблаш боши бўлиб хизмат қилади.

3. $k = k_0 = \text{const}$.

$$d\alpha = k_0\, ds, \qquad \alpha = k_0 s + \alpha_0;$$

$$dx = \cos(k_0 s + \alpha_0)\, ds, \qquad x = R_0\sin(k_0 s + \alpha_0) + x_0;$$

$$dy = \sin(k_0 s + \alpha_0)\, ds, \qquad y = -R_0\cos(k_0 s + \alpha_0) + y_0.$$

Булардан $k_0 \neq 0$ да:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_0^2$, яъни айлана ҳосил бўлади: $k = 0$ да эса $x = \cos\alpha_0 \cdot s + x_0$, $y = \sin\alpha_0 \cdot s + y_0$ ёки

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha_0},$$

яъни тўғри чизиқ келиб чиқади.

Демак, $k = k_0$ тенглама $k_0 \neq 0$ да айланани ва $k_0 = 0$ да тўғри чизиқни ифодалайди. Шундай қилиб, ***текисликда эгрилиги ўзгармас чизиқ ё айлана, ёки тўғри чизиқдир.***

Машқлар

98. Қуйидаги тенгламалар интеграллансин:

1) $R = as$; 2) $Rs = a^2$; 3) $s^2 + 9R^2 = 16a^2$;

4) $\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1$; 5) $4s^2 + R^2 = \frac{9}{4}a^2$.

Жавоб: 1) Логарифмик спираль; 2) клотоида; 3) кардиоида; 4) ғилдировчи айлана радиуси $\frac{ab}{2(a+b)}$ га, қўзғалмас айлана радиуси эса $\frac{ab^2}{a^2 - b^2}$ га тенг бўлган ҳолга мос эпициклоида; 5) астроида.

§ 59. Умумий теорема

Дастлаб дифференциал тенгламалар назариясидан бизга зарур бўлган баъзи тушунчаларни келтирамиз[1].

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларнинг Коши системаси деб, ушбу кўринишдаги чизиқли оддий дифференциал тенгламалар системасига айтилади:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n,$$

бу ерда a_{ik} коэффициентлар x нинг ўзгариш (X_0, X) соҳасида маълум узлуксиз функцияларни ифодалайди, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар эса номаълум функциялар бўлиб, қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантиради: $x = x_0$ қийматда улар олдин берилган қийматларни қабул қилади, яъни:

$$x = x_0 \text{ да } y_i = y_i^0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(Номаълум функциялар сони тенгламалар сонига тенг.)

Дифференциал тенгламалар назариясининг маълум теоремасига мувофиқ, *қўйилган шартларни қаноатлантирувчи $y_i = f_i(x)$ функциялар системаси (X_0, X) соҳада мавжуд бўлиб, улар бирдан-бир равишда аниқланади ва бошланғич (1) шартларни қаноатлантиради.* Ундан ташқари, (X_0, X) соҳада $f_i(x)$ функциялар ва уларнинг биринчи тартибли ҳосилалари узлуксиздир.

Бу теоремадан фойдаланиб, табиий тенгламалари $k = \ (s) > 0$, $\sigma = \psi(s)$ дан иборат чизиқни аниқлайлик. Юқорида юргизилган муҳокамалардан равшанки, бу тенгламалар чизиқнинг вазиятини аниқламасдан, фақат унинг шаклини аниқлайди. Табиий тенгламаларга доир теоремаларни исботлашда ҳамон Френе формулалари билан иш кўриб келган эдик. Бу ерда ҳам ушбу

$$\frac{dr}{ds} = \bar{\tau}$$

тенгламани ва

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \ (s)\,\bar{\nu}, \quad \frac{d\bar{\nu}}{ds} = \varphi(s)\,\bar{\tau} + \psi(s)\,\bar{\beta}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\psi(s)\,\bar{\nu} \tag{2}$$

---

[1] Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М. 1950, VII боб, § 1, 2.

системани интеграллашга ва бу системанинг ечилмаси борлигини исботлашга тўғри келади.

Ёзилган системанинг координата ифодасини топиш учун $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ нинг координаталарини киритамиз:

$$\bar{\tau}\{\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z\},\ \bar{\nu}\{\nu_x,\ \nu_y,\ \nu_z\},\ \bar{\beta}\{\beta_x,\ \beta_y, \beta_z\},$$

$\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторларнинг ўзлари (2) системани қаноатлантиради, шунингдек бу векторларнинг координаталари ҳам ўшандай системани қаноатлантиради, яъни:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tau_x}{ds} = \varphi(s)\,\nu_x, \\ &\frac{d\nu_x}{ds} = -\varphi(s)\,\tau_x + \psi(s)\,\beta_x, \\ &\frac{d\beta_x}{ds} = -\psi(s)\,\nu_x. \end{aligned}\right| \tag{3}$$

τ_y, ν_y, β_y ва τ_z, ν_z, β_z координаталар учун ҳам худди (3) га ўхшаш тенгликлар ўринлидир. Координаталардан қуйидаги матрицани тузамиз:

$$\begin{Vmatrix} \tau_x, & \tau_y, & \tau_z \\ \nu_x, & \nu_y, & \nu_z \\ \beta_x, & \beta_y, & \beta_z \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Бошлангич шарт шундан иборат бўлсинки, $s = 0$ (умуман, $s = s_0$) да (4) нинг номаълум элементлари ушбу қийматларни қабул қилсин:

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

Эслатилган теореманинг ҳамма шартларини (4) матрицанинг биринчи устунидаги τ_x, ν_x, β_x функциялар қаноатлантиради. Шу сабабли, бу функциялар системаси (S_0, S) соҳада бирданбир равишда аниқланади, чунки бу функциялар тегишли дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради ва уларнинг бошлангич қийматлари (5) матрицанинг биринчи устунида кўрсатилган. (4) матрицанинг иккинчи ва учинчи устунларидаги функциялар системалари учун ҳам шу айтилганларнинг ҳаммаси ўринлидир. Демак, (4) матрица (3) ва унга ўхшаш системаларнинг ечимларини ифодалайди.

Бу матрица — ортогоналдир. Ҳақиқатан, ундаги иккита устунни, масалан, биринчи ва иккинчи устунни кўпайтириб қўшайлик:

$$\varphi_{xy} = \tau_x\tau_y + \nu_x\nu_y + \beta_x\beta_y.$$

Бу кўпайтма s га боғлиқ эмас, яъни $\varphi_{xy} = \text{const}$, чунки ундан s бўйича ҳосила олсак:

$$\frac{d\varphi_{xy}}{ds} = \frac{d\tau_x}{ds}\tau_y + \tau_x\frac{d\tau_y}{ds} + \frac{d\nu_x}{ds}\nu_y + \nu_x\frac{d\nu_y}{ds} + \frac{d\beta_x}{ds}\beta_y + \beta_x\frac{d\beta_y}{ds},$$

сўнгра бу ердаги

$$\frac{d\tau_x}{ds}, \frac{d\nu_x}{ds}, \frac{d\beta_x}{ds}, \frac{d\tau_y}{ds}, \frac{d\nu_y}{ds}, \frac{d\beta_y}{ds}$$

лар ўрнига (3) нинг ва унга ўхшаш (τ_y, ν_y, β_y ва τ_z, ν_z, β_z лар учун тузилган) тенгликларнинг ўнг томонларини қўйсак, $\frac{d\varphi_{xy}}{ds} = 0$ ҳосил бўлади. Демак, $\varphi_{xy} = \text{const}$. Худди шу йўл билан $\varphi_{yz} = \text{const}$ ва $\varphi_{zx} = \text{const}$ эканини топамиз. Бироқ, (5) га асосан, $s = 0$ қийматда:

$$\varphi_{yz} = \varphi_{zx} = \varphi_{xy} = 0,$$

шу сабабли φ_{zy}, φ_{yz}, φ_{zx} лар умуман нолга тенгдир.

Шунинг сингари $\varphi_{xx} = \varphi_{yy} = \varphi_{zz} = 1$ ни исботлаш осон.

Хуллас, ечилмаларнинг (4) матрицаси ортогоналдир. Бундан шундай натижа чиқадики, координаталари (4) матрица элементларидан иборат $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторлар о р т л а р (б и р л и к в е к т о р л а р) бўлиб, улар ўзаро тикдир:

$$\bar{\tau}^2 = \bar{\nu}^2 = \bar{\beta}^2 = 1, \qquad \bar{\nu}\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\tau} = \bar{\tau}\,\bar{\nu} = 0.$$

Демак, изланаётган чизиқнинг табиий учёқлиги тузилди, $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторларнинг ҳар бир нуқтада ягоналиги исботланди. Энди чизиқнинг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаш учун, шундай чизиқ оламизки (175-бетга қаранг), у ушбу параметрик

$$x = \int\tau_x(s)\,ds, \qquad y = \int\tau_y(s)\,ds, \qquad z = \int\tau_z(s)\,dz \tag{6}$$

тенгламалар билан ифодалансин (биз бу ерда $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ ни интеграллладик). Текисликдаги чизиққа доир тегишли муҳокамаларни юргизиб, олинган бу чизиқ учун: ёй узунлиги ролини s, табиий учёқликни ташкил этувчи ортлар ролини ҳозир топилган $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ векторлар ва эгрилик билан бурилма ролини $\varphi(s)$ ва $\psi(s)$ лар бажаришини исботлаймиз.

Ҳамма талабларга жавоб берувчи чизиқ топилди — унинг эгрилиги билан бурилмаси олдин берилган $\varphi(s)$ ва $\psi(s)$ функцияларга тенг. Лекин, бундай чизиқ битта эмас — чексиз кўп, чунки (6) да интеграллашнинг ўзгармаслари бор. Улар бир-биридан фазодаги вазияти билан фарқланади. Ҳақиқатан, агар бирор чизиқ (2) системани қаноатлантирса, унга конгруэнт ҳамма чизиқлар ҳам шу системани қаноатлантиради, чунки

$k(s)$ эгрилик ва $\sigma(s)$ бурилма, геометрик таърифларига ва юқоридаги муҳокамаларга асосан, фазодаги чизиқнинг вазиятига боғлиқ эмас.

Эслатма. Фазодаги чизиқлар учун аслида биз сифат анализини ўтказдик. (2) тенгламалар системаси умумий ҳолда интегралланмайди. Бу системанинг текисликдаги чизиққа доир хусусий ҳолигина охиригача интеграллаиниб, квадратураларга келтирилади.

§ 60*. Каноник ёйилмалар. Иккинчи исбот

Исбот қилинган „асосий теорема" даги $k(s)$, $\sigma(s)$ ва умуман, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ функциялар узлуксиз деб фараз қилинган эди. Энди шу функциялар ва $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ функциялар ҳам аналитик функциялардан иборат, яъни улар яқинлашувчи Тейлор қаторига ёйиладиган бўлсин. Теоремани бундай фаразларда исботлаш анча осон.

Чизиқнинг бирор оддий M_0 нуқтаси, масалан, $s_0 = 0$ га мос нуқтаси атрофида $r(s)$, $k(s)$, $\sigma(s)$ функциялар s аргументнинг аналитик функциялари бўлсин. У ҳолда

$$r(s) = r_0(0) + \dot{r}_0(0)\, s + \ddot{r}_0(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{r}_0\frac{s^3}{3!} + \ddddot{r}_0\frac{s^4}{4!} + \dots \quad (1)$$

Қутбни $s = 0$ нуқтага кўчирсак, $r(0) = 0$ бўлади.

$\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, $\ddddot{r}$, ... векторларни $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ лар орқали ифодалаш мумкин:

$$\dot{r} = \bar{\tau}, \quad \ddot{r} = k\bar{\nu}, \quad \dddot{r} = -k^2\bar{\tau} + \dot{k}\bar{\nu} + k\sigma\bar{\beta},$$

$$\ddddot{r} = -3k\dot{k}\bar{\tau} + (\ddot{k} - k^3 - k\sigma^2)\bar{\nu} + (k\dot{\sigma} + 2\dot{k}\sigma)\bar{\beta}.$$

Бу қийматларни (1) ёйилмага қўямиз ва координата ўқларини $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ бўйлаб йўналтирамиз, у ҳолда

$$r(s) = \left\{s - \frac{1}{6}k^2s^3 - \frac{1}{8}k\dot{k}s^4 + \dots\right\}\bar{\tau} + \left\{\frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}\dot{k}s^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}\left(\ddot{k} - k^3 - k\sigma^2\right)s^4 + \dots\right\}\bar{\nu} + \left\{\frac{1}{6}k\sigma s^3 + \frac{1}{24}\left(k\dot{\sigma} + 2\dot{k}\sigma\right)s^4 + \right.$$

$$\left. + \dots\right\}\bar{\beta}.$$

Координата формада эса:

$$x = s - \frac{1}{6}k^2s^3 + \dots,$$

$$y = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}\dot{k}s^3 + \dots, \quad (2)$$

$$z = \frac{1}{6}k\sigma s^3 + \frac{1}{24}(k\dot{\sigma} + 2\dot{k}\sigma)s^4 + \dots .$$

Бу муносабатлар *каноник ёйилмалар* дейилади. Ёйилмадаги k, σ миқдорлар ва уларнинг s бўйича ҳосилалари $s=0$ нуқтада олингандир. Демак, k ва σ берилган бўлса, (2) ёйилмаларни ёзиш мумкин. Агар бу қаторлар яқинлашса, улар эгрилиги k га ва бурилмаси σ га тенг чизиқни аниқлайди. Шу сабабли, $s=0$ нуқта атрофида (2) тенгламалар чизиқнинг параметрик тенгламаларидир. Демак,

$$k = k(s), \quad \sigma = \sigma(s)$$

ёки умумий ҳолда $k=\varphi(s)>0$, $\sigma=\psi(s)$ тенгламалар берилса, чизиқ бирдан-бир равишда аниқланади.

§ 61*. Инвариантлар ва уларнинг мукаммал системаси ҳақида

Инвариант тушунчаси математикада муҳим тушунчалардан биридир. Инвариант деганда, фигура билан боғлиқ шундай сонни ёки алгебраик ифодани тушунамизки, улар шу фигура устида маълум алмаштиришларни бажарганда ўз қийматларини сақлайди. Шу нуқтаи назардан дифференциал инвариантлар, топологик инвариантлар, интеграл инвариантлар ва шунга ўхшаш инвариантлар тушунчасини учратиш мумкин. Биз ҳаракат группасининг инвариантларини кўзда тутамиз. Улар аналитик геометриядаёқ учраб, уларнинг ёрдами билан муҳим масалалар ҳал қилинади[1].

Бу каби инварнантлардан ташқари, чизиқ, сиртнинг параметрини алмаштиришда, яъни бир параметр ўрнига иккинчи параметрни олишда ҳам инвариантлар юз беради. Масалан, $t=t(u)$ нинг ёрдами билан чизиқнинг параметрини алмаштирсак, унинг ҳар бир нуқтадаги уринмаси ва ёпишма текислиги ўзгармайди (117-бетга қаралсин). Биз бундай инвариантларни кўзда тутмаймиз, балки ушбу

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi + a,$$
$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi + b$$

алмаштириш натижасида координаталар ва уларнинг ҳосилаларига боглиқ шундай $F(x, y, x', y', x'', y'', \ldots)$ функцияларни қараймизки, улар ўз қийматларини сақлайдиган бўлсин, яъни $F(x, y, x', y', x'', y'', \ldots)=F(X, Y, X', Y', X'', Y'', \ldots)$, бу ерда x ва y — чизиқдаги нуқтанинг координаталари бўлиб, $x=x(t)$ ва $y=y(t)$. Чизиқ ёки сиртнинг ўзига хос соф геометрик хоссалари шу инвариантлар билангина боғлиқ, улар координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмас.

[1] Қ. Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, 3-нашри, § 260, 261.

Кенгроқ муҳокамалар шуни кўрсатадики, инвариантлар ифодасига ўзгарувчи координаталар кирмасдан, фақат уларнинг ҳосилалари кириши, яъни уларда, масалан,

$$\mathbf{r}'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,\ \mathbf{r}'\mathbf{r}'',\ \mathbf{r}''^2,\ \mathbf{r}''',\ \mathbf{r}'\mathbf{r}''',\ \mathbf{r}'''\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''$$

сингари ифодалар учраши мумкин.

Метрик группада (ҳаракатлар билан кўзгу симметриясининг қўшилмасида) k эгрилик сақланади, лекин σ бурилма ўзгариб, $|\sigma|$ сақланади, яъни k ва $|\sigma|$ соф ҳаракатлар группасининг инвариантларидир. Ҳақиқатан, бирор

$$\mathbf{r}\{x,\ \ y,\ \ z\}$$

чизиқни олиб, унга XOY текислигига нисбатан симметрик бўлган

$$\mathbf{r}\{x,\ \ y,\ \ -z\}$$

чизиқни қарасак, k ва σ ни аниқловчи формулалардан k нинг ўзгармаслигини ва σ нинг ишораси қарама-қаршисига алмашганлигини кўрамиз.

Инвариантларнинг мукаммал (тўлиқ) системаси тушунчасини киритиш мақсадида, берилган геометрик объект билан бирга барча инвариантлар системасини қарайлик.

Агар икки геометрик объект учун бу инвариантлар қийматларининг бир хил бўлиши, ҳалиги объектларнинг эквивалент (конгруэнт) лигини ҳаракат группасига нисбатан таъминласа, биз инвариантларнинг бундай системасини ***мукаммал*** *система деб атаймиз.*

Текисликдаги чизиқни олганда, унинг учун k эгрилик шу нуқтаи назардан инвариантларнинг метрик группасига нисбатан мукаммал системасини ташкил қилади, чунки иккита чизиқ учун $k = k(s)$ функциянинг бир хиллиги бу чизиқларнинг конгруэнтлигини таъминлайди.

Шунинг сингари, юқоридаги муҳокамалар соф ҳаракатлар группасига нисбатан мукаммал инвариантлар системаси k ва σ дан иборат, деган хулосага келтиради.

§ 62. Умумий винт чизиқлар

Таъриф. *Агар чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган $\bar{\tau}$ уринма бирор аниқ p йўналиш билан ўзгармас бурчакни ташкил қилса, бундай чизиқ* ***умумий винт чизиқ*** *ёки* ***ён бағир*** *чизиқ дейилади.*

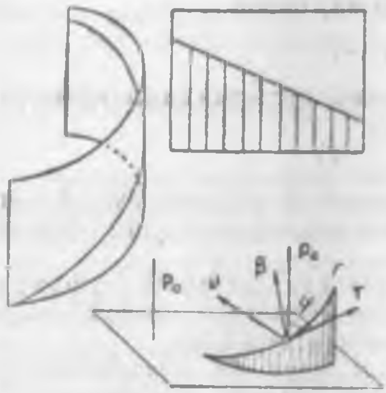
Агар берилган p нинг бирлик векторини p_0 билан, $\bar{\tau}$ ва p_0 орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, таърифга асосан,

$$p_0\bar{\tau} = \cos\ \ = \text{const} \tag{1}$$

бўлади. (1) дан s бўйича ҳосила оламиз. p_0 ўзгармас вектор бўлгани учун, $p_0 \frac{d\bar\tau}{ds} = 0$ ёки $p_0 k \bar\nu = 0$. Бу ерда икки ҳол юз бериши мумкин:

1. $k = 0$. Бу вақтда (Γ) ён бағир чизиқ — тўғри чизиқдан иборат.

2. $k \neq 0$. Бу вақтда $p_0 \bar\nu = 0$, яъни (Γ) ён бағир чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бош нормали p_0 йўналишга перпендикулярдир. Демак, p_0 векторни чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги тўғриловчи ($\bar\tau$ ва $\bar\beta$) текисликка жойлаштириш мумкин. Шу билан бирга, p_0 ва $\bar\tau$ орасидаги φ бурчак ўзгармас бўлгани учун, $\bar\beta$ ва p_0 векторлар орасидаги бурчак ҳам ўзгармасдир. Бу бурчакни ψ билан белгилаймиз. У вақтда $(\bar\beta p_0) = \cos\psi = \sin = \mathrm{const}$. Агар ён бағир чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан p_0 га параллел қилиб (ясовчи) тўғри чизиқлар ўтказсак, натижада цилиндрик сирт ҳосил бўлади (138-чизма). Бу цилиндрик сиртни текисликка ёйсак, ён бағир чизиқ шу текисликда ётади. Бу чизиқ аввалгидек ясовчи чизиқларни ўзгармас бурчак остида кесади. Аммо текисликдаги параллел чизиқларни фақат тўғри чизиқ ўзгармас бурчак остида кесиши мумкин. Шунинг учун ён бағир чизиқнинг ёйилмаси тўғри чизиқни ташкил қилади. Демак, *ҳар қандай ён бағир чизиқ цилиндрик сирт устида ётиб, бу сиртни текисликка ёйганда тўғри чизиққа айланадиган чизиқдан иборатдир.*



138-чизма.

Агар $p_0 \bar\nu = 0$ ни дифференциалласак, ён бағир чизиқнинг яна бир хоссаси келиб чиқади: $\frac{d\bar\nu}{ds} p_0 = 0$ (p_0 — ўзгармас вектор). Френе формуласидан фойдалансак, $(-k\bar\tau + \sigma\bar\beta) p_0 = 0$ ҳосил бўлади. Бундан $-k\bar\tau p_0 + \sigma\bar\beta p_0 = 0$ ёки $\frac{\sigma}{k} = \frac{\bar\tau p_0}{\bar\beta p_0} = \mathrm{ctg}\,\alpha$, яъни $\frac{\sigma}{k} = \mathrm{const}$.

Шундай қилиб, *ён бағир чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги буралмаси билан эгрилигининг нисбати ўзгармас сондир.* Аксинча, бирор чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги буралмаси билан эгрилигининг $\frac{\sigma}{k}$ нисбати ўзгармас сон бўлса, бу чизиқ — ён бағир чизиқдир. Ҳақиқатан, бутун чизиқ бўйлаб $\frac{\sigma}{k} = \text{const}$ бўлсин. Френенинг биринчи ва учинчи формулаларидан: $\dot{\bar{\tau}} = -\frac{k}{\sigma}\dot{\bar{\beta}}$; шартга кўра, $\frac{k}{\sigma} = \text{const} = c$. Демак, $\dot{\bar{\tau}} + c\dot{\bar{\beta}} = 0$ ёки интегралласак, $\bar{\tau} + c\bar{\beta} = \text{const} = p$ бўлиб, p векторнинг узунлиги ҳам ўзгармасдир, чунки $p = \sqrt{(\bar{\tau}^2 + c\bar{\beta})^2} = \sqrt{1 + c^2} = \text{const}$. Бу p векторнинг бирлик вектори ушбудан иборат: $\frac{\bar{\tau} + c\bar{\beta}}{\sqrt{1 + c^2}} = p_0$. Тенгликнинг иккала томонини $\bar{\tau}$ га кўпайтирамиз, у ҳолда

$$\bar{\tau} \cdot p_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} = \text{const}.$$

Шундай қилиб, чизиғимиз — ён бағир чизиқдир. Йўналтирувчи p^0 вектор тўғриловчи текисликда ётади (чунки у $\bar{\nu}$ га тик) Шу сабабли:

$$p^0 = \bar{\tau}\cos\alpha + \bar{\beta}\sin\alpha.$$

Ён бағир чизиқнинг тенгламасини Декарт координаталарида ёзиш учун, p^0 векторни OZ ўқи йўналишида деб фараз этиб,

$$\bar{\tau} = \frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + \frac{dz}{ds}k$$

уринманинг учинчи координатаси $\frac{dz}{ds} = \bar{\tau}\bar{k}$ эканини ва унинг $\cos\alpha$ га тенглигини эътиборга оламиз:

$$\frac{dz}{ds} = \bar{\tau}\bar{k} = \cos\alpha. \qquad (\alpha = \text{const}).$$

Энди буни ($s = 0$ учун $z = 0$ бўлиш шартида) интеграллаймиз:

$$z = s \cdot \cos\alpha. \tag{2}$$

Цилиндрнинг йўналтирувчиси сифатида XOY текислигида ихтиёрий (L) чизиқни олиб, унинг тенгламаларини

$$x = \psi_1(s), \quad y = \psi_2(s) \tag{3}$$

десак, у ҳолда (2), (3) тенгламалар (Γ) ён бағир чизиқнинг Декарт тенгламаларини беради.

(Γ) ва (L) чизиқлардаги ёйлар, мос равишда s ва s_1 эканини назарда тутсак, бу ёй узунликлари орасидаги боғланиш ушбудан иборат бўлади:

$$ds_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds = \sqrt{\psi_1'^2(s) + \psi_2'^2(s)}\, ds,$$

аммо

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \bar{\tau}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \psi_1'^2(s) + \psi_2'^2(s) + \cos^2\alpha = 1.$$

Шунинг учун

$$\psi_1'^2(s) + \psi_2'^2(s) = \sin^2\alpha,$$

демак:

$$ds_1 = \sin\alpha\, ds.$$

$s_1 = 0$ учун $s = 0$ бўлиш шартида интегралласак:

$$s_1 = \sin\alpha\cdot s.$$

(Γ) да параметр сифатида s_1 олинса, унинг параметрик тенгламалари

$$x = \psi_1(s) = \varphi_1\left(\frac{s_1}{\sin\alpha}\right),\ y = \psi_2(s) = \varphi_2\left(\frac{s_1}{\sin\alpha}\right),$$

$$z = s\cos\alpha = s_1\operatorname{ctg}\alpha,$$

вектор формадаги тенгламаси эса

$$\bar{r} = \bar{\rho}(s_1) + s_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot k \tag{4}$$

бўлади, бунда $\rho(s_1) = \psi_1(s)\, i + \psi_2(s)\, j$ — йўналтирувчи чизиқдир.

Мисол. Йўналтирувчиси логарифмик спиралдан иборат цилиндр устидаги ён бағир чизиғининг тенгламасини тузайлик.

Логарифмик спираль қутб системада

$$\rho = ae^{m\varphi}$$

тенглама билан, Декарт системасида

$$x = ae^{m\varphi}\cos\varphi,\ y = ae^{m\varphi}\sin\varphi$$

тенгламалар билан ва вектор формада:

$$\bar{\rho} = ae^{m\varphi}\, e(\varphi)$$

тенглама билан ифодаланади, бунда $e(\varphi) = \cos\varphi\, i + \sin\varphi\, j$ — доиравий бирлик вектор. Спиралнинг ёй узунлиги:

$$ds_1^2 = d\rho^2 = a^2e^{2m\varphi}(1 + m^2)\, d\varphi^2,$$

бундан $ds_1 = ae^{m\varphi}\sqrt{1 + m^2}\, d\varphi$.

Агар буни $\varphi = 0$ учун $s_1 = 0$ бўлиш шартида интегралласак:

$$s_1 = \frac{a\sqrt{1 + m^2}}{m}\, e^{m\varphi}.$$

Энди буларни (4) га қўямиз:

$$r(\varphi) = ae^{m\varphi}\left[e(\varphi) + \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\operatorname{ctg}\alpha\cdot k\right]$$

ёки қисқача:

$$r(\varphi) = e^{m\varphi}\left[a e(\varphi) + b k\right],$$

бунда

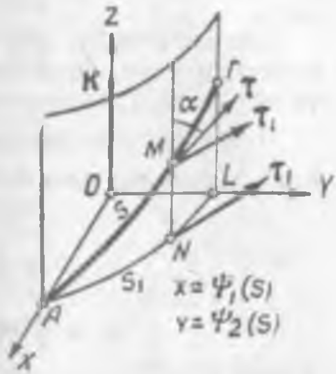
$$b = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} \operatorname{ctg}\alpha = \text{const}.$$

Бу чизиқ — цилиндро-коник чизиқдир (§ 63 га қаралсин).

(L) йўналтирувчи ва (Γ) ён бағир чизиқлар эгриликлари орасидаги боғланишни топамиз.

Бу ерда $p^0 = k$. Шу сабабли (139-чизма):

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 \sin\alpha + k\cos\alpha, \quad ds = ds_1 \sin\alpha.$$



139-чизма.

Сўнгги тенгликдан (Γ) нинг узунлигини ифодаловчи s ёй бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \sin\alpha \frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1} \cdot \sin^2\alpha,$$

бундан

$$k = k_1 \sin^2\alpha.$$

Биз муҳим хулосага келдик: *цилиндрнинг йўналтирувчиси ўзгармас эгриликли чизиқ (тўғри чизиқ ёки айлана) бўлса, у ҳолда* $k_1 = \text{const}$. *Демак, бу вақтда* k *ҳам* $= \text{const}$. *Шу сабабли,* σ *ҳам* $= \text{const}$ *(чунки* $\frac{k}{\sigma} = \text{const}$*). Ён бағир чизиқ бу ҳолда оддий винт чизиқни ифодалайди. Фақат доиравий цилиндрнинг винт чизиғи учун* $k = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$. *Шундай қилиб, эгрилиги ва буралмаси ўзгармас бўлган фазо чизиқлари: тўғри чизиқ, айлана ва оддий винт чизиқдир.*

Энди (L) нинг табиий

$$k_1 = f(s_1)$$

тенгламаси бўйича (Γ) нинг табиий тенгламасини тузиш осон. Бу тенгламалар

$$k = k_1 \sin^2\alpha = f(s_1)\sin^2\alpha = f(s \cdot \sin\alpha)\sin^2\alpha,$$

$$\sigma = k \operatorname{ctg}\alpha. \tag{5}$$

Мисол. Цилиндрнинг йўналтирувчиси занжир чизиқдан иборат бўлсин. У ҳолда (166-бет):

$$f(s_1) = k_1 = \frac{a}{a^2 + s_1^2}.$$

(5) дан фойдалансак: $k = \frac{a \cdot \sin^2 \alpha}{a^2 + s^2 \cdot \sin^4 \alpha}$. Демак, йўналтирувчиси занжир чизиқдан иборат цилиндр устидаги ён бағир чизиқнинг табиий тенгламалари ушбудир:

$$k = \frac{a \cdot \sin^2 \alpha}{a^2 + s^2 \cdot \sin^4 \alpha}, \quad \sigma = k \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ да } k = \sigma = \frac{a}{2a^2 + s^2}.$$

Бу ҳолда гиперболик винт ҳосил қилинади (167-бетга қаралсин).

Мисол. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ чизиқ — ён бағир чизиқдир. Буни исботлаш учун, берилган чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилигини ва бурилмасини аниқлаймиз.

Чизиқнинг тенгламасини $y = \frac{1}{3}x^2$, $z = \frac{2}{9}xy = \frac{2}{27}x^3$ шаклда ёзиб, ҳосилалар оламиз:

$$x' = 1; \; x'' = 0, \; x''' = 0;$$

$$y' = \frac{2}{3}x; \; y'' = \frac{2}{3}; \; y''' = 0;$$

$$z' = \frac{2}{9}x^2; \quad z'' = \frac{4}{9}x; \quad z''' = \frac{4}{9}.$$

Демак:

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{8}{27}x^2 - \frac{4}{27}x^2\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{9}x\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2}}{\left|1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^4\right|^{3/2}} = \frac{6}{(3+2x)^2};$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3}x & \frac{2}{9}x \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9}x \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{vmatrix}}{\frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{3}x\right)^2} = \frac{6}{(3+2x)^2}.$$

Энди $\frac{\sigma}{k} = 1 = \text{const}$ бўлгани учун, берилган чизиқ ён бағир чизиқ бўлади.

Машқлар

99. Винт чизиқнинг ён бағир чизиқ эканлиги исботлансин.

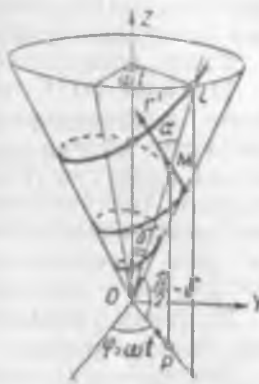
100. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ чизиқнинг ён бағир чизиқ эканлиги исботлансин.

101. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ чизиқнинг ён бағир чизиқ эканлиги исботлансин.

§ 63*. Конус устидаги винт чизиқ

Хоссалари билан ён бағир (умумий винт) чизиққа яқин турган яна бир чизиқни кўрамиз.

OL тўғри чизиқ OZ ўқи атрофида айланиб доиравий конус сиртини чизади. Шу билан бирга, OZ ўқи бўйича бўлган кесимдаги ZOL текислик OZ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлиги билан айланганда, M нуқта OL бўйлаб шундай ҳаракатланадики, унинг тезлиги конус учигача олинган OM масофага пропорционал бўлади. M нуқтанинг чизган чизиғи *конус устидаги винт чизиқ ёки коник спираль дейилади* (140-чизма).



140-чизма.

Агар $\angle XOP = \varphi$ деб белгиласак, шартга асосан, $\varphi = \omega t$. § 23 даги сингари муҳокамалар юргизиб, $\rho = \rho_0 e^{mt}$ ни топамиз, бунда m — пропорционаллик коэффициенти ва ρ_0 — бошланғич ($t = 0$) моментдаги қутб радиуси. Ўқ билан OL орасидаги ўзгармас бурчакни γ десак, OM нинг XOY текислиги билан ташкил қилган бурчаги $\frac{\pi}{2} - \gamma$ га тенг бўлади. $\overline{OM}$ радиус-векторни одатдагича $\boldsymbol{r}$ билан, $\overline{OP}$ бўйлаб кетган доиравий бирлик векторни $\boldsymbol{e}(\varphi) = \boldsymbol{e}(\omega t)$ билан белгилаган бўлсак, у ҳолда

$$OP = \rho \sin \gamma = \rho_0 \sin \gamma e^{mt}, \quad PM = \rho \cos \gamma = \rho_0 \cos \gamma e^{mt}.$$

Демак, коник спиралнинг тенгламасини

$$\boldsymbol{r} = \overline{OP} + \overline{PM} = OP \cdot \boldsymbol{e}(\omega t) + PM \cdot \boldsymbol{k}$$

ёки

$$\boldsymbol{r}(t) = \rho_0 e^{mt} \{\sin \gamma\, \boldsymbol{e}(\omega t) + \cos \gamma \boldsymbol{k}\} \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Декарт координаталарида:

$$x = \rho_0 \sin \gamma\, e^{mt} \cos(\omega t), \quad y = \rho_0 \sin \gamma e^{mt} \sin(\omega t),$$
$$z = \rho_0 \cos \gamma e^{mt}. \tag{2}$$

Агар t параметр ўрнига $t = \frac{\varphi}{\omega}$ ни қўйиб, $\frac{m}{\omega} = \mathrm{const} = a$ ни киритсак, (1), (2) тенгламалар ушбу шаклларни олади:

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \rho_0 e^{a\varphi} \{\sin \gamma \cdot \boldsymbol{e}(\varphi) + \cos \gamma \cdot \boldsymbol{k}\},$$
$$x = \rho_0 \sin \gamma\, e^{a\varphi} \cos \varphi, \quad y = \rho_0 \sin \gamma e^{a\varphi} \sin \varphi, \tag{3}$$
$$z = \rho_0 \cos \gamma\, e^{a\varphi}. \tag{4}$$

Логарифмик спираль сингари, коник спираль ҳам OZ ўқи атрофида истаган марта ўралиб, чексизликка узоқлаша боради; тескари томонга қараб ҳаракатланганда эса, у O нуқтага чексиз яқинлаб келади.

Бу чизиқнинг нуқталарида OZ ўқига параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказсак, коник спираль ётган цилиндрик сирт пайдо бўлади, унинг йўналтирувчиси (3) логарифмик спиралдан иборат. Шу сабабли, коник спираль баъзан *цилиндро-коник винт чизиқ* деб ҳам аталади.

Коник спиралнинг ажойиб икки хоссаси бор:

1) Унинг XOY текислигидаги проекцияси (3) тенгламалар билан ифодалангани сабабли, бу проекциянинг логарифмик спиралдан иборатлигини кўрамиз. Соф геометрик нуқтаи назардан буни тушуниб олиш қийин эмас, чунки OM тўғри чизиқнинг XOY текислигидаги OP проекцияси ўзгармас ω бурчак тезлиги билан айланади ва шу вақтнинг ўзида M нинг OP даги проекцияси шундай ҳаракатланадики, унинг тезлиги OP масофага пропорционал бўлади.

2) Коник спиралнинг уринмаси ясовчи билан бир хил бурчак ташкил қилади.

Ҳақиқатан, (1) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \rho_0 e^{mt}\left\{m\left[\sin\gamma\cdot\boldsymbol{e}(\omega t) + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}\right] + \omega\sin\gamma\,\boldsymbol{e}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Бундан:

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \rho_0 e^{mt}\sqrt{m^2 + \omega^2\sin\gamma} \quad \text{ва} \quad |\boldsymbol{r}(t)| = \rho_0 e^{mt}.$$

$\boldsymbol{r}'(t)$ ва $\boldsymbol{r}(t)$ нинг скаляр кўпайтмасини қарайлик:

$$\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}(t) = m\cdot\rho_0^2\, e^{2mt}.$$

Энди уринма билан ясовчи орасидаги бурчакни α деб олсак, бу бурчакнинг косинусини топиш мумкин:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|\,|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{\rho_0^2 m e^{2mt}}{\rho_0^2\sqrt{m^2 + \omega^2\sin^2\gamma}\,e^{2mt}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \omega^2\sin^2\gamma}} = \text{const},$$

бизга шуни исботлаш керак эди.

(2) тенгламалардан t ни йўқотсак:

$$x^2 + y^2 = tg^2\gamma\cdot z^2 \tag{6}$$

бўлиб, бу — учи координата бошидаги конуснинг тенгламасини ифодалайди, γ — ясовчининг конус ўқи билан ташкил қилган бурчагидир[1]). Демак, коник спираль конусда ётиб, унинг ясовчиларини бир хил бурчак остида кесиб ўтади. Биз йўлакай ушбу хулосани чиқара оламиз:

---

[1]) Қ. Мусхелишвили, 224-бет, (3) тенгламага қаралсин.

текисликда тўғри чизиқлар дастасининг изогонал траекторияси логарифмик спиралдир, фазода бирор тўғри чизиқ билан бир хил бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқлар боғламининг изогонал траекторияси коник спиралдир.

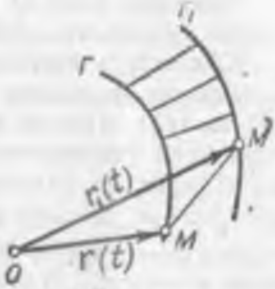
Мисол. Ушбу чизиқ берилган:

$$x = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t,\ y = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t,\ z = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}.$$

Бу чизиқ $x^2 + y^2 = z^2$ конусда ётади ва ясовчилар билан 45° ли бурчак ҳосил қилади (буни исботланг), яъни бу чизиқ—коник спиралдир.

§ 64*. Нормаллари умумий бўлган чизиқлар. Бертран ва Чезаро чизиқлари

Фазода (Γ) чизиқ берилган бўлсин. Унинг ҳар бир нуқтасида чексиз кўп нормаллари бордир. (Γ) чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бирор нормали билан 90° ли бурчак остида кесишадиган чизиқни (Γ_1) билан белгилаймиз. (Γ) нинг бу нормаллари (Γ_1) учун ҳам нормаль бўлади (141-чизма). Агар (Γ) нинг радиус-векторини $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ билан, (Γ) ва (Γ_1) чизиқларнинг мос нуқталари орасидаги масофани a билан, умумий нормалнинг бирлик векторини $\boldsymbol{n}$ билан белгиласак, (Γ_1) нинг тенгламаси $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{n}(t)\,a(t)$ ёки қисқача



141-чизма.

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{n}\,a \qquad (1)$$

бўлади. Бундай чизиқларнинг хоссаларини билиш учун (1) дан t бўйича ҳосила олиб, уни бирлик $\boldsymbol{n}$ векторга кўпайтирамиз:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}a + \boldsymbol{n}\frac{da}{dt};$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\boldsymbol{n} + \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}\boldsymbol{n}a + \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\frac{da}{dt}; \qquad (2)$$

$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}$ вектор (Γ_1) га уринма вектордир. Шунинг учун $\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \perp \boldsymbol{n}$. Худди шунга ўхшаш,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \perp \boldsymbol{n},\ \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}\boldsymbol{n} = 0;\ \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{n} = 0$$

бўлганидан, $\frac{da}{dt} = 0$, яъни a — ўзгармас сон. Демак, умумий нормалларга эга бўлган (Γ) ва (Γ_1) нинг мос нуқталари орасидаги масофалари ўзгармасдир. Хусусий ҳолда, яъни (Γ) чизиқнинг $\boldsymbol{n}$ нормаллари бир нуқтада кесишганда, юқоридаги натижа бу нуқта учун ҳам ўз кучини сақлайди.

Бу ҳолда (Γ) чизиқ сферик чизиқ бўлади, чунки унинг ҳамма нуқталари r нуқтадан бир хил узоқлашгандир. Нормалларнинг кесишган нуқтаси сферанинг маркази бўлади. Бунинг геометрик маъноси равшандир. Жумладан, текисликдаги чизиқнинг нормаллари бир нуқтада кесишса, у чизиқ айланадан иборат бўлади.

Энди умумий ҳолга, яъни (Γ) ва (Γ_1) чизиқлар ҳолига қайтиб, исботланган хоссага тескари натижани кўриб ўтамиз. (Γ) чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги маълум бир нормалига, узунлиги λ га тенг бўлган ўзгармас кесмани қўямиз. Бундай ўзгармас кесмаларнинг охирги нуқталарининг геометрик ўрни (Γ_1) чизиқни ташкил қилади. (Γ) ва (Γ_1) чизиқлар учун $\frac{dr}{dt}n = 0$ ва $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ бўлиб, (2) дан: $\frac{dr_1}{dt}n = 0$, демак, $\frac{dr_1}{dt} \perp n$, яъни (Γ) нинг нормали (Γ_1) учун ҳам нормаль бўлади. Хусусий ҳолни олиб, ушбу таърифни берайлик:

Таъриф. *Агар (Γ) ва (Γ_1) **чизиқлар умумий бош нормалларга эга бўлса, улар Бертран чизиқлари** деб аталади.*

Юқоридаги теоремага асосан, Бертран чизиқларининг мос нуқталари орасидаги масофа ўзгармасдир. Агар $\bar{\tau}$ ва $\bar{\tau}_1$ лар (Γ) ва (Γ_1) ларнинг мос нуқталаридаги бирлик уринма векторларини билдиргани ҳолда, бу векторлар орасидаги бурчакни α десак, $(\bar{\tau}\,\bar{\tau}_1) = \cos\alpha$ бўлади. Буни дифференциаллаймиз: $d\bar{\tau}\,\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}\,d\bar{\tau}_1 = -\sin\alpha\, d\alpha$, аммо $d\bar{\tau} = k\bar{\nu}\,ds$ бўлгани учун, $-\sin\alpha\, d\alpha = k\bar{\nu}\,\bar{\tau}_1\,ds + k_1\,\bar{\nu}_1\,\bar{\tau}\,ds_1$, бундан $\sin\alpha\, d\alpha = 0$ ёки $d\alpha = 0$, яъни $\alpha = \text{const}$. Шундай қилиб, (Γ) ва (Γ_1) чизиқларнинг мос нуқталаридаги уринмалари ўзгармас бурчакни ташкил қилади. $\bar{\tau}_1$ вектор $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}$ га тик бўлгани учун, у тўғриловчи текисликка параллелдир. Шу сабабли, уни $\bar{\tau}$ ва $\bar{\beta}$ нинг йўналишлари бўйича ёйиш мумкин:

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}\cos\alpha + \bar{\beta}\sin\alpha.$$

Агар $r_1 = r + a\bar{\nu}$ ни дифференциалласак:

$$\bar{\tau}_1 ds_1 = (\bar{\tau}\cos\alpha + \bar{\beta}\sin\alpha)\,ds_1 = a\,[\bar{\tau} + (-\bar{\tau}k + \beta\sigma)]\,ds$$

ҳосил бўлади. Лекин $\bar{\tau}$ ва $\bar{\beta}$ векторлар коллинеар эмас (чунки улар тик), шу сабабли сўнгги тенгликнинг $\bar{\tau}$ ва $\bar{\beta}$ олдидаги коэффициентлари ўзаро тенг:

$$\cos\alpha\, ds_1 = (1 - ak)\,ds,$$
$$\sin\alpha\, ds_1 = a\sigma\, ds$$

ёки

$$\frac{1 - ak}{\cos\alpha} = \frac{a\sigma}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

бундан $\operatorname{ctg}\alpha = b$ фараз қилинса:

$$a(k + b\sigma) = 1.$$

Демак, (Γ) чизиқнинг эгрилиги билан бурилмаси ўзгармас коэффициентли **чизиқли боғланган** экан.

Умумий ҳолда чизиқнинг эгрилиги билан бурилмаси орасида ҳеч қандай боғланиш бўлмаслигини эътиборга олсак, бизнинг масаламиз учун қуйидаги натижа келиб чиқади. Агар бир чизиқ, шу чизиқ билан умумий бош нормалга эга бўлган иккинчи чизиқнинг мавжудлигини таъминласа, ихтиёрий чизиқ бўлмасдан маълум бир синфга кирадиган чизиқ бўлади. Бундай чизиқлар *Бертран чизиқлари синфини* ташкил этади.

Ўзгармас $b = \operatorname{ctg}\alpha$ нинг геометрик маъноси равшандир; $b = 0$ бўлган хусусий ҳолни қарайлик. Бу ҳолда $\left(\alpha = \pm\frac{\pi}{2}\right)$:

$$ak = 1,\ k = \frac{1}{a} = \text{const} = k^0 = \frac{1}{R^0},\ a = R^0,$$

яъни Бертран чизиғи — эгрилиги ўзгармас **фазовий** (қийшиқ) **айланадан** иборатдир (*Чезаро* айланалари). (Γ) қийшиқ айлана учун (Γ_1) чизиқни ҳосил қилиш мақсадида: M нуқтадан бош нормаль бўйича R^0 масофани босиб, (Γ) нинг эгрилик марказига бориш керак. (Γ_1) чизиқ — худди (Γ) нинг **эгрилик марказларининг геометрик ўрнидир**.

(Γ) ва (Γ_1) нинг табиий учёқликларини солиштирайлик. Қурилаётган ҳолда:

$$r_1 = r + R^0\bar{\nu},$$

бундан

$$\frac{dr_1}{ds} = [\bar{\tau} + R^0(-k\bar{\tau} + \sigma\bar{\beta})] = R^0\sigma\bar{\beta},$$

демак,

$$ds_1 = R^0|\sigma|\,ds,\quad \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{R^0|\sigma|}.$$

Аммо

$$\bar{\tau}_1 = \frac{dr_1}{ds_1} = \frac{dr_1}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1} = R^0\sigma\bar{\beta}\cdot\frac{1}{R^0|\sigma|} = \frac{\sigma}{|\sigma|}\bar{\beta} = \pm\bar{\beta}. \tag{4}$$

Буни s_1 бўйича дифференциаллаcак $\left(\frac{\sigma}{|\sigma|} = \pm 1\right.$ ни эътиборга олиб):

$$\frac{\bar{\nu}_1}{R^0} = \frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1} = \frac{\sigma}{|\sigma|}\cdot\dot{\bar{\beta}}\frac{ds}{ds_1} = \frac{\sigma}{|\sigma|}(-\sigma\bar{\nu})\cdot\frac{1}{R^0|\sigma|} = -\frac{\bar{\nu}}{R^0}.$$

Бундан

$$\bar{\nu}_1 = -\bar{\nu},\quad k_1^{0} = k^{0}. \tag{5}$$

(4) ва (5) дан:

$$\bar{\beta}_1 = [\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1] = \mp[\bar{\beta}\bar{\nu}] = \pm\bar{\tau}.$$

Хуллас:

$$\overline{\tau}_1 = \pm \overline{\beta},\ \overline{\nu}_1 = -\overline{\nu},\ \overline{\beta}_1 = \pm \overline{\tau}.$$

Бу тенгликларнинг учинчисидан:

$$-\sigma_1 \overline{\nu}_1 = \pm k^0 \overline{\nu} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \pm k^0 \overline{\nu} \cdot \frac{1}{R\,|\sigma|}$$

ёки

$$\sigma\sigma_1 = k^{0^2},$$

яъни (Γ) нинг эгрилиги σ *ва* σ_1 *орасида ўрта пропорционалдир.*

Энди, биринчи (Γ) чизиқ ўз навбатида (Γ_1) учун эгрилик марказларининг геометрик ўрни ролини ўйнашини исботлайлик. (Γ_1) га мос келган чизиқ (Γ_2) бўлсин, у ҳолда $\overline{\nu}_1 = -\overline{\nu}$ ни эътиборга олсак:

$$r_2 = r_1 + R_1 \overline{\nu}_1 = r_1 - R_1 \overline{\nu} = r.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Эслатма. Оддий айланалар ва оддий винт чизиқлар қаралаётган синфга киради, чунки уларнинг ҳам эгриликлари ўзгармасдир. Бу иккита хусусий ҳолдан қатъи назар, шу синфга қарашли бошқа чизиқлар учун биз ушбуни исботладик:

Агар (Γ) чизиқ — эгрилиги ўзгармас $(=k^0)$ бирор чизиқ ва (Γ_1) эса унинг эгрилик марказларининг геометрик ўрни бўлса, у ҳолда (Γ) чизиқ, ўз навбатида, (Γ) чизиқнинг эгрилик марказларининг геометрик урни бўлади.

§ 65*. Умумий ҳол (давоми)

Биз ўтган параграфда исботладикки, агар бирор (Γ) чизиқ унинг билан умумий бош нормалга эга бўлган (Γ_1) чизиқнинг мавжудлигига йўл қўйса, (Γ) чизиқнинг эгрилиги ва буралмаси чизиқли боғланган бўлади:

$$a(k + b\sigma) = 1$$

ёки

$$\lambda k + \mu\sigma = 1^{1)}, \tag{1}$$

бунда $\lambda = a$, $\mu = ab = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Бу шарт (Γ) чизиқнинг Бертран синфига кириши учун зарурийдир. Энди унинг етарли эканини исботлайлик.

---

[1] Бу тенгламанинг коэффициентлари ўзгармас бўлганидан, шундай α ни топиш мумкинки: $\cos\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, $\sin\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, яъни $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\mu}{\lambda} = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$.

Аввало (1) ни § 64 даги (3) шаклда ёзамиз:

$$\frac{1-ak}{\cos\alpha}=\frac{a\sigma}{\sin\alpha}=m. \tag{2}$$

(Γ) чизиқ билан бирга тенгламаси қуйидагича бўлган чизиқни олайлик:

$$r_1=r+a\bar{\nu}. \tag{3}$$

Бу чизиқ учун $\bar{\nu}_1=-\bar{\nu}$ (ёки, умуман, $\bar{\nu}_1 \parallel \bar{\nu}$) эканини исботласак бас.

(3) муносабатни s_1 бўйича дифференциаллаб, a нинг ўзгармаслигини эътиборга оламиз:

$$\bar{\tau}_1=[\bar{\tau}+a(-k\bar{\tau}+\sigma\bar{\beta})]\frac{ds}{ds_1}=[\bar{\tau}(1-ak)+\sigma\bar{\beta}]\frac{ds}{ds_1}$$

ёки, (2) га асосан,

$$\bar{\tau}_1=(\bar{\tau}\cos\alpha+\bar{\beta}\sin\alpha)\,m\,\frac{ds}{ds_1}.$$

Бироқ, $\bar{\tau}_1$ ва $\bar{\tau}\cos\alpha+\bar{\beta}\sin\alpha$ дан иборат коллинеар векторлар— бирлик векторлардир, шу сабабли (улар фақат йўналиши билангина фарқ қила олади):

$$\pm\bar{\tau}_1=\bar{\tau}\cos\alpha+\bar{\beta}\sin\alpha.$$

Бу тенгликни s_1 бўйича дифференциаллаймиз ($\alpha=\text{const}$):

$$\pm k_1\bar{\nu}_1=(k\cos\alpha-\sigma\sin\alpha)\,\bar{\nu}\frac{ds}{ds_1},$$

бундан $\bar{\nu}_1 \parallel \bar{\nu}$. Шуни исботлаш керак эди.

Энди k ва σ орасидаги чизиқли боғланишни умумий кўринишда олайлик

$$Ak+B\sigma+C=0. \tag{4}$$

Бу муносабатнинг юз бериши ҳар қандай (Γ) чизиқ учун мос (Γ_1) чизиқ борлигини таъмин этади. Энди шу (Γ) чизиққа мос чизиқ иккита бўла оладими, деган савол туғилади. Бу саволга ижобий жавоб бериладиган бўлса, ушбу икки муносабат бажарилади:

$$Ak+B\sigma+C=0,\ A'k+B'\sigma+C=0. \tag{5}$$

$\begin{vmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{vmatrix} \neq 0$ шартда бу икки тенгламадан $k=\text{const}$ ва $\sigma=$ $=\text{const}$ деган хулоса келиб чиқади, демак, сўралган чизиқ винт чизиқдир. Иккинчи томондан, (5) бажарилганда, ушбу

$$Ak+B\sigma+C+l(A'k+B'\sigma+C')=0$$

тенглик ҳам бажарилади. Демак, винт чизиққа чексиз кўп Бертран чизиқлари жавоб беради.

Биз (4) тенгламанинг қуйидаги ҳолларини текширдик:
1) $A = C = 0$, $\sigma = 0$ — текисликдаги чизиқлар;
2) $B = C = 0$, $k = 0$ — тўғри чизиқ;
3) $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$; $\frac{\sigma}{k} = \text{const}$ — ён бағир чизиқлар;
4) $C \neq 0$; $A \neq 0$ — Бертран чизиқлари (хусусий ҳолда қийшиқ айланалар);
5) $C \neq 0$, $A = 0$, $\sigma = \text{const}$ — бурилмаси ўзгармас чизиқлар.

Охирги ҳолни кўздан кечирайлик: бундай чизиқлар учун юқорида кўрилган чизиқлар сингари хоссалар топилмаган. Френенинг учинчи формуласидан: $\bar{\nu} = -\frac{1}{\sigma_0}\dot{\bar{\beta}}$ ни топиб, $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} = [\bar{\nu}\bar{\beta}]$ га қўямиз:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} = [\bar{\nu}\bar{\beta}] = -\frac{1}{\sigma_0}[\dot{\bar{\beta}}\bar{\beta}] = \frac{1}{\sigma_0}[\bar{\beta}\dot{\bar{\beta}}],$$

бундан

$$r = \frac{1}{\sigma_0}\int[\bar{\beta}\dot{\bar{\beta}}]\,ds.$$

§ 66. Сферик индикатрисалар (кўрсаткичлар, тасвирлар)

Чизиқни ёки унинг элементларини сферага акслатиш усули билан чизиқнинг кўп хоссаларини ўрганиш мумкин. Бирор сферанинг марказидан (L) чизиқнинг ҳар бир уринмасига параллел қилиб радиуслар ўтказамиз. Ўтказилган радиусларнинг охирги нуқталарининг геометрик ўрни сферик чизиқни ташкил қилади. Бу чизиқ берилган *чизиқнинг сферик индикатрисаси (курсаткичи, тасвири)* дейилади. Худди шунга ўхшаш, агар сферанинг марказидан (L) нинг бош нормалларига параллел қилиб радиуслар ўтказсак, бу радиуслар учларининг геометрик ўрни ҳам чизиқнинг сферик индикатрисасини (тасвирини) беради. Бинормаллар ёрдами билан ҳам чизиқнинг шу хилда индикатрисаси вужудга келади. Ҳосил қилинган чизиқ, биринчи ҳолда *уринмалар,* иккинчи ҳолда *бош нормаллар*, учинчи ҳолда *бинормаллар индикатрисаси* дейилади.

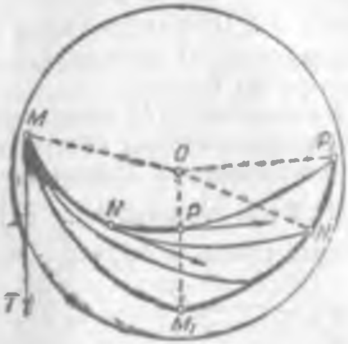
Чизиқ текисликда ётган бўлса, унинг уринмалари индикатрисаси (кўрсаткичи) сферанинг катта доирасининг ёйидан иборат (доиранинг ўзи шу текисликка параллел).

Тўғри чизиқ уринмаларининг индикатрисаси нуқтадан иборат.

Сферанинг радиуси $R = 1$ деб фараз қиламиз. Энди сфера устида ётувчи бирор MNP чизиқ уринмаларининг сферик тасвирига ўтайлик. M нуқтанинг сферик тасвирини топиш учун, M нуқтада шу чизиққа уринувчи катта доира („уринма доира“) ўтказиб, унга $90°$ ли $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйни (квадрантни) қўйсак, M нинг акси бўлган M_1 нуқта вужудга келади (142-чизма), чунки $\overset{\frown}{MM_1} = 90°$, шу сабабли, унга тиралган MOM_1 бурчак ҳам 90° лидир, яъни $MT \parallel OM_1$, демак, M_1 нуқта M нинг аксидир. N ва P нуқталар билан шу хилда иш кўрамиз; натижада ҳосил қилинган сферик чизиқ ўша MNP чизиқ уринмаларининг сферик тасвирини (индикатрисасини) беради.

Эслатма. $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйнинг йўналиши MNP чизиқнинг ўзидаги йўналиш билан мувофиқлаштирилган деб фараз қилинади.

Келгусида 90° га тенг бўлиб, уринувчи квадрантни „уринма квадрант" деб юритамиз. (L) чизиқнинг учта индикатрисасини (L_1), (L_2), (L_3) билан белгилаймиз, улар мос равишда, уринмалар, бош нормаллар, бинормалларга тегишлидир.



142-чизма.

1-теорема. (L) чизиқнинг M нуқтасидаги ёпишма текислиги — бу чизиқ уринмалари индикатрисасининг M га мос нуқтасидаги катта доира текислигига параллелдир.

Исбот. Ҳақиқатан, M нуқтадаги (P) ёпишма текислик, шу нуқтадаги MT уринма орқали ўтиб, унга яқин M_1 нуқтадаги M_1T_1 уринмага параллел бўлган (Q) текисликнинг лимит вазиятидир. Аммо $M_1 \to M$ да $M'_1 \to M'$. Шунингдек, $MT \parallel OM'$ ва $M_1T_1 \parallel OM'_1$; демак, Q текислик $\parallel$ $OM'M'_1$ текисликка ва $M'M'_1 \to M'T'$; шу билан (P) текислик $\parallel OM'T'$ текисликка. Теорема исботланди.

***2-теорема.** (L) чизиқнинг бош нормали унинг уринмалари индикатрисасининг мос нуқтасидаги уринмасига параллелдир.*

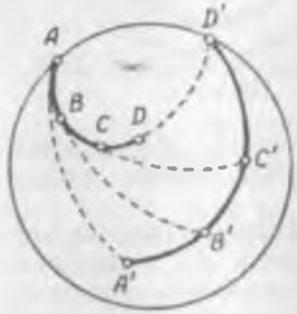
Исбот. Ҳақиқатан, (L) нинг сферик индикатрисаси (L_1) бўлсин. Агар (L) чизиқнинг M_1 нуқтасидаги $\bar{\tau}_1$ уринмасига $O_1M_1^*$ радиус параллел ва шу чизиқнинг M_2 нуқтасидаги $\bar{\tau}_2$ уринмасига OM_2^* радиус параллел бўлса, у ҳолда $\Delta\bar{\tau} = \bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1$ вектор $\overline{M_1^*M_2^*}$ векторга параллел бўлиб, демак, $M_1^*M_2^*$ нур $\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}$ га параллел бўлади. Лимитга ўтганда $M_1^*M_2^*$ нур уринмалар индикатрисасига уринади. $\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}$ нинг лимити эса $k\bar{\nu}$ га тенг бўлади.

3-теорема. *(L) чизиқнинг уринмалари индикатрисаси ва бинормаллари индикатрисасининг мос нуқталардаги уринмалари бир-бирига параллелдир.*

Исбот. Чиндан ҳам, (L) чизиқнинг M_1 нуқтасидаги уринмасига ва бинормалига тегишли радиуслар $\overline{OM_1^*}$ ва $\overline{ON_1^*}$ бўлсин. M_1^* ва N_1^* нуқталардаги тезлик векторлари ушбу $d\bar\tau = k\bar\nu ds$ ва $d\bar\beta = -\sigma\bar\nu ds$ векторларга параллел (коллинеар) дир. Шу билан, $k>0$ бўлгани учун $\sigma<0$ шартда $d\bar\tau$ ва $d\bar\beta$ бир хил йўналади; $\sigma>0$ шартда эса $d\bar\tau$ ва $d\bar\beta$ нинг йўналишлари қарама-қарши бўлади.

4-теорема. *(L) нинг эгрилиги бу чизиқ уринмаларининг индикатрисасидаги ёйнинг шу (L) чизиқдаги мос ёйга бўлган нисбатининг лимитига тенгдир.*

Исбот. Ҳақиқатан, (L) чизиқнинг эгрилиги $k = \lim \frac{\omega}{\Delta s}$ га тенг, бунда ω бурчак — чизиқнинг M нуқтаси ва унга яқин M_1 нуқтасидаги уринмалар орасидаги бурчакдир. Лекин, ω бурчак сферанинг тегишли радиуслари орасидаги бурчакдир. Бу бурчак эса ўзига тиралган ёй билан ўлчанади, чунки сферанинг радиуси 1 га тенг деб фараз қилинган.



143-чизма.

Худди шунга ўхшаш, бурилманинг абсолют қиймати — чизиқнинг бинормаллари индикатрисасидаги ёй дифференциалининг чизиқдаги мос ёй дифференциалига бўлган нисбатига тенгдир.

Бунинг исботини ўқувчига тавсия қиламиз.

5-теорема. *$r = r(s)$ чизиқ бош нормалларининг (L_2) сферик индикатрисаси — бу чизиқ уринмаларининг (L_1) индикатрисасига уринувчи квадрантлар учларининг геометрик ўрнидир.*

Исбот. 2-теоремага асосан, (L_1) нинг бош нормали (L_2) нинг мос нуқтасидаги уринмасига параллел бўлганидан, бош нормалларнинг индикатрисаси (L_1) чизиқ уринмаларининг индикатрисасидан иборатдир. Демак, (L_2) чизиқ (L_1) га „уринувчи квадрантлар" учларининг геометрик ўрнидир (143-чизма). Юқоридагига асосан, уринмалар индикатрисаси $\overset{\frown}{ABC}$ бўлса, $\overset{\frown}{A'B'C'}$ ёй бош нормаллар индикатрисасини беради.

§ 67. Сферик кўпбурчакларнинг юзлари

Дифференциал геометриянинг баъзи теоремалари сферик геометрия тушунчалари ёрдами билан анча ойдинлашади. Шунинг учун сферик геометриянинг келгусида керак бўладиган баъзи фактлари билан танишайлик.

Сфера устидаги ўз-ўзи билан кесишмайдиган ёпиқ сферик чизиқ сферани икки соҳага бўлади. Агар бу ёпиқ чизиқни бирор йўналиш билан таъминласак ва бу чизиқ бўйлаб шу йўналишга томон ҳаракат қилсак, периметрдан чап томонда қоладиган соҳани *„мусбат гардишли соҳа“* деб қабул қиламиз. Иккинчи соҳани *„манфий гардишли соҳа“* деймиз. Агар иккала соҳа юзларини S_1 ва S_2 билан белгилаб, $S_1 > 0$ ва $S_2 < 0$ десак, $S_1 + (-S_2) = 4\pi R^2$ ёки $S_1 - S_2 = 4\pi R^2$ бўлади; демак, иккала соҳа юзларининг айирмаси — сфера юзига тенг. Сферадаги соҳанинг юзини ўлчаш учун, сфера радиусининг квадратини бирлик ўлчов деб қабул қиламиз. Бу ўлчовда сферанинг юзи 4π га тенг бўлади.

144-чизма.

Сферик кўпбурчаклар тушунчаси элементар геометриянинг муҳим қисмини ташкил этади[1]; булар ҳақида қисқача маълумот берамиз.

Сферик кўпбурчак деб, томонларининг ҳаммаси катта доира ёйларидан иборат ёпиқ синиқ чизиққа айтамиз. Ҳар бир ёй катта доира айланасининг ярмидан ошмаслиги керак.

Ясси кўпбурчакнинг энг камида учта томони бор, сферик кўпбурчакнинг томонлари иккита бўлиши ҳам мумкин (иккибурчак). Унинг ички α ва β бурчаклари тенг: $\alpha = \beta$ (144-чизма). Сферик учбурчакда ички бурчаклар йиғиндиси $180°$ дан катта.

Сферик кўпбурчакнинг томонини давом эттиришдан ҳосил бўлган катта доира сферани иккита тенг ярим сферага бўлади; агар кўпбурчак ўзининг исталган томонини давом эттиришдан ҳосил бўлган ярим сфераларнинг биридагина ётса, у *қавариқ* кўпбурчак дейилади. Қавариқ кўпбурчак ўз-ўзи билан кесиша олмайди.

1-теорема. *Ички бурчаги φ га тенг бўлган сферик иккибурчакнинг S юзи* 2φ га тенг.

---

[1] Қуйидагиларга қаранг: Ж. Адамар, Элементарная геометрия, II қисм, 1938, 367—371-бетлар; 1951, 204—209-бетлар. Д. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, II қисм, 181—236-бетлар. М. Выгодский, Дифференциальная геометрия, 1949, § 33, 34; шу авторники: Справочник по элементарной математике, 1957, 10-нашри, 309—312-бетлар.

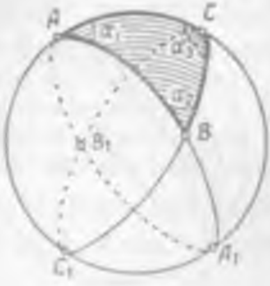
Исбот. Равшанки, иккибурчакнинг S юзи бурчакка пропорционал. $\varphi = 2\pi$ қийматда иккибурчак сферага айланиб, унинг юзи 4π га тенг бўлади. Шунинг учун, қуйидаги пропорцияни тузиш мумкин:

$$s : \varphi = 4\pi : 2\pi, \text{ бундан } s = 2\varphi.$$

2-теорема. *Агар ABC сферик учбурчакнинг ички бурчакларини α_1, α_2, α_3 билан белгиласак, унинг юзи*

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

га тенг бўлади (145-чизма).



145-чизма.

Исбот. Ҳар бир α_i $(i = 1, 2, 3)$ бурчакнинг томонларини давом эттириб, икки бурчакларни ташкил қиламиз. A, B, C нуқталарга диаметрал қарама-қарши бўлган нуқталарни A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз. Натижада ABA_1CA, BCB_1AB ва CAC_1BC иккибурчаклар ҳосил бўлади. Буларнинг ҳар бири икки учбурчакдан иборат. 1-теоремага асосан: $S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1CB} = 2\alpha_1$,

$$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta B_1AC} = 2\alpha_2, \quad S_{\Delta ABC} + S_{\Delta C_1BA} = 2\alpha_3.$$

B_1AC ва BA_1C_1 учбурчаклар ўзаро симметрик бўлганидан, юзлари бир-бирига тенгдир. Шунинг учун қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BA_1C_1} = 2\alpha_2,$$

булардан

$$3S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1CB} + S_{\Delta C_1BA} + S_{\Delta A_1B_1C_1} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Аммо ABC, A_1CB, C_1BA, A_1BC_1 учбурчаклар ярим сферани ташкил қилади. Шунинг учун

$$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1CB} + S_{\Delta C_1AB} + S_{\Delta A_1BC_1} = 2\pi.$$

Натижада:

$$S_{\Delta ABC} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

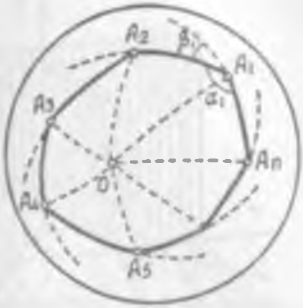
3-теорема. *Ўз-ўзи билан кесишмайдиган кўпбурчакнинг юзи*

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$$

га тенг, бу ерда α_i — кўпбурчакнинг ички бурчаклари ва n — кўпбурчак томонларининг сони.

Исбот. Теореманинг исботини энг содда ҳолда ўтказамиз. Олинган $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчакни қавариқ деб фараз қиламиз (146-чизма). Бундай кўпбурчак („содда кўпбурчак“ сингари[1]) сферани икки соҳага бўлади: ички (U) соҳа ва ташқи (U_1) соҳа. Бу фараздан ташқари, (U) соҳа ичида шундай O нуқтани танлаб олиш мумкин бўлсинки, ҳосил қилинган OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 учбурчаклар бир-бирларини қопламасдан (U) соҳани тўлдирсин.

Бу фаразларда (U) соҳанинг юзи OA_kA_{k+1} учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенгдир. 2-теоремага асосан, ҳар бир OA_kA_{k+1} учбурчакнинг юзи ушбуга тенг: $s_{\Delta k} = \gamma_k - \pi$, бу ерда γ_k — учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси. Бундай учбурчаклар n та. Шундай қилиб, кўпбурчакнинг юзини S билан белгиласак:



146-чизма.

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - n\pi$$

бўлади. Аммо $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\pi$, бу ерда 2π — учбурчакларнинг O нуқта атрофидаги бурчаклари йиғиндиси. Демак:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\pi - n\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi,$$

бунда α_i — кўпбурчакнинг ички бурчагидир. Агар кўпбурчакнинг ташқи бурчакларини β_i билан белгиласак, $\alpha_i + \beta_i = \pi$ эканини эътиборга олиб, кўпбурчак юзини ташқи β_i бурчаклар орқали ҳам ифодалашимиз мумкин:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (n\pi - \beta_i) - (n-2)\pi$$

ёки

$$S = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Ниҳоят, сферанинг радиуси $R \neq 1$ бўлганда, бу формула ушбу шаклни олади:

$$S = \left[2\pi - \sum_{i=1}^{n} \beta_i\right] R^2.$$

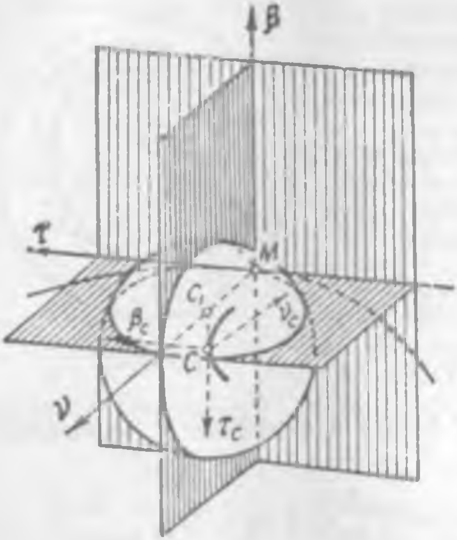
Бундан биз § 112 да фойдаланамиз.

---

[1] Содда кўпбурчаклар ҳақида Д. Перепелкин, Элементар геометрия курси, Ўқувпеддавнашр. Тошкент, 1952, I, § 7 га қаралсин.

§ 68. Ёпишма сфера

Чизиқнинг берилган нуқтасидан ўтувчи сфералар орасида шу чизиққа энг яқин турганини — „ёпишма сферани“ топамиз. Сферанинг тенгламасига тўртта параметр киради, шу сабабли, *чизиқнинг берилган нуқтасидаги ёпишма сфераси сифатида унинг билан учинчи тартибли ёпишувга эга бўлган сферани оламиз. Чизиқнинг ундан четланиши тўртинчи тартибли чексиз кичик бўлади* (§ 37).



147-чизма.

Энди $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — берилган чизиқ ва

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R_c^2 = 0$$

изланаётган сфера бўлсин. Масаланинг маъносига кўра, тўртта a, b, c, R_c номаълумни топиш керак. Сферанинг тенгламасини вектор формада ёзайлик:

$$(\mathbf{r} - \bar{\rho})^2 - R_c^2 = 0,$$

бунда $\bar{\rho} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ — марказнинг радиус-вектори ва $\overline{MC} = \bar{\rho} - \mathbf{r}(s)$ дир (147-чизма).

Ёпишма сиртни топиш қоидасига кўра (§ 37), $f(s) = [\mathbf{r}(s) - \bar{\rho}]^2 - R_c^2$ функцияни ва унинг учта ҳосиласини нолга тенглаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned}
f(s) &= [\mathbf{r}(s) - \bar{\rho}]^2 - R_c^2 = 0,\\
\frac{1}{2} f'(s) &= [\mathbf{r}(s) - \bar{\rho}]\,\bar{\tau} = 0,\\
\frac{1}{2} f''(s) &= [\mathbf{r}(s) - \bar{\rho}]\,k\bar{\nu} + 1 = 0,\\
\frac{1}{2} f'''(s) &= [\mathbf{r}(s) - \bar{\rho}]\,(-k^2\bar{\tau} + \dot{k}\bar{\nu} + k\sigma\bar{\beta}) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Бу тенгламалардан $\bar{\rho}\{a, b, c\}$ ва R_c ни аниқлаймиз. Бизга $\mathbf{r}(s)$ маълум. Шунинг учун $\overline{MC} = \bar{\rho} - \mathbf{r}(s)$ ни топсак бас; фараз қилайлик:

$$\bar{\rho} - \mathbf{r}(s) = a_1\bar{\tau} + a_2\bar{\nu} + a_3\bar{\beta}.$$

Бу ифодани (1) даги тенгламаларнинг 2, 3, 4-га қўйиб, a_1, a_2, a_3 ни қуйидагича аниқлаймиз:

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{k} = R,\ a_3 = \frac{\dot{R}}{\sigma},$$

бунда R — чизиқнинг эгрилик радиусидир. Демак, $\bar{\rho} - r(s) = R\bar{\nu} + \frac{\dot{R}}{\sigma}\bar{\beta}$. Энди R_c ни топиш осон:

$$R_c^2 = MC^2 = (\bar{\rho} - r)^2 = R^2 + \left(\frac{\dot{R}}{\sigma}\right)^2.$$

Хуллас:

$$\overline{MC} = \bar{\rho} - r = R\bar{\nu} + \frac{\dot{R}}{\sigma}\bar{\beta},\ \bar{\rho} = r + R\bar{\nu} + \frac{\dot{R}}{\sigma}\bar{\beta},$$

$$R_c^2 = R^2 + \left(\frac{\dot{R}}{\sigma}\right)^2.$$

Бу формулалар ёпишма сферанинг марказини ва радиусини аниқлайди. Уларнинг биринчисидан кўринадики, чизиқнинг M нуқтасидаги ёпишма сферанинг C марказига бориш учун, бош нормаль бўйича ҳаракат қилиб $MC_1 = R$ масофани ўтиш, яъни ёпишма айлананинг C_1 марказига бориш керак, ундан кейин бинормалга параллел тўғри чизиқ бўйича $\frac{\dot{R}}{\sigma}$ масофани босиш лозим. *Бинормалга параллел бўлиб, ёпишма айлана марказидан ўтувчи CC_1 тўғри чизиқ берилган чизиқнинг эгрилик ўқи дейилади.*

Агар M нуқта берилган чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, C нуқта ҳам фазода бирор (C) чизиқни чиза боради. Унинг табиий учёқлиги ($\bar{\tau}_c$, $\bar{\nu}_c$, $\bar{\beta}_c$) бўлсин. Бу чизиқ учун параметр сифатида s ёйни олиш мумкин, бироқ бу ёй (C) чизиқ учун табиий параметр ролини ўйнамайди, чунки у тасодифий параметрдир. Энди $\bar{\rho} = r + R\bar{\nu} + \frac{\dot{R}}{\sigma}\bar{\beta}$ дан s бўйича ҳосила оламиз ва Френе формулаларидан фойдаланамиз:

$$\bar{\rho}' = \bar{\tau} + \dot{R}\bar{\nu} + R(-k\bar{\tau} + \sigma\bar{\beta}) + \left(\frac{\dot{R}}{\sigma}\right)^{\cdot}\bar{\beta} + \frac{\dot{R}}{\sigma}(-\sigma\bar{\nu})$$

ёки

$$\bar{\rho}' = \left\{R\sigma + \left(\frac{\dot{R}}{\sigma}\right)^{\cdot}\right\}\bar{\beta}, \tag{2}$$

бундан $\bar{\tau}_c \parallel \bar{\beta}$, яъни $\bar{\tau}_c = \pm\bar{\beta}$. Шунинг сингари қуйидагиларни исботлаш мумкин: $\bar{\nu}_c = \pm\bar{\nu}$, $\bar{\beta}_c = \pm\bar{\tau}$ (буни исботланг).

Ниҳоят, юқорида (§ 39) ўтказилган мулоҳазалардан равшанки, чизиқнинг берилган нуқтасидаги ёпишма сфера, шу нуқтадан ва унга ҳар қанча яқинлашиб борувчи учта нуқтадан ўтган сферанинг лимит вазиятидир (қисқача, бир-бирига яқинлашувчи тўртта нуқтадан ўтган сферанинг лимитидир). Бундан эса ясси чизиқ учун ёпишма сфера мавжуд эмас деган хулосага келамиз, чунки бундай чизиқнинг тўртта нуқтаси, умуман айтганда, битта сфера устида ётавермайди (ҳамма нуқтада $\sigma = 0$ бўлса, $\bar{\rho}$ нинг ифодаси ҳам ўз маъносини йўқотади).

Энди ушбу хусусий ҳол устида тўхтаймиз: олинган (Γ) чизиқ ҳамма нуқталари билан битта сфера устида ётган („сферик чизиқ") бўлсин. У ҳолда унга „энг яқин" сфера шу сферанинг ўзидир. Демак, бу ҳолда ёпишма сфера (Γ) нинг ҳамма нуқталари учун битта бўлиб, унинг маркази ўзгармайди ва (C) чизиқ C нуқтага айланади. У ҳолда $\bar{\rho}$ вектор ўзгармас бўлганидан, $\bar{\rho}' = 0$, яъни

$$R\sigma + \left(\frac{\dot{R}}{\sigma}\right)^{\cdot} = 0 \tag{3}$$

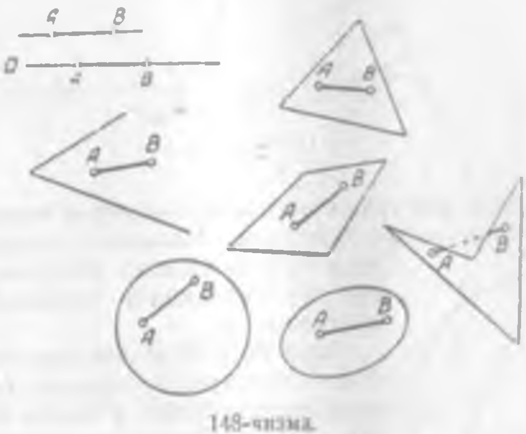
ҳосил бўлади. Бу тенгламани сферик чизиқнинг табиий тенгламаси деб қараш мумкин. Аксинча, бирор чизиқ учун (2) шарт бажарилса, $\bar{\rho}' = 0$, яъни $\bar{\rho} = \text{const}$ бўлиб, демак, ёпишма сферанинг маркази (Γ) даги барча нуқталар учун бир хилдир. Бу ҳолда унинг R_c радиуси ҳам ўзгармасдир (исботланг).

Ўнинчи боб

„БУТУН СОҲАЛАР“ ГЕОМЕТРИЯСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА. СИНИҚ ЧИЗИҚЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

§ 69*. Қавариқ фигура[1)]

Агар бирор ясси фигуранинг исталган иккита нуқтасини тўғри чизиқ кесмаси билан туташтирганда, кесманинг ҳамма нуқталари шу фигурага қарашли бўлса, у ҳолда бундай *фигура қавариқ* фигура дейилади.

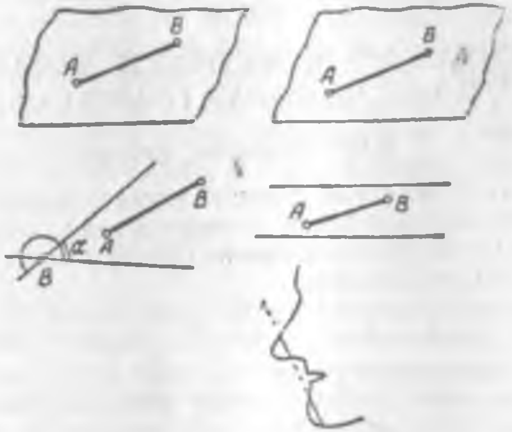


148-чизма.

Тўғри чизиқ, нур — бир ўлчовли қавариқ фигуралардир. Бурчак, учбурчак, доира, ярим доира, эллипс (ички соҳаси билан олганда) — икки ўлчовли қавариқ фигураларга мисолдир. Диагоналларнинг тўртбурчак ичида ёки ташқарисида кесишишига қараб, тўртбурчак қавариқ бўлиши ёки бўлмаслиги ҳам мумкин (148-чизма).

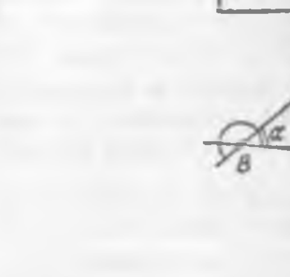
[1)] Қавариқ фигура, қавариқ жисмларга доир адабиёт бойдир. Бу ерда элементар китобларни кўрсатиб ўтамиз: Л. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, 1956; И. Яглом и В. Болтянский, Выпуклые фигуры, 1951; Г. Радемахер, И. О. Теплиц, Числа и фигуры, 1938 (184—200-бетлар).

Бирор фигурани чекли доира ичига жойлаштириш мумкин бўлса, у *чегараланган* фигура дейилиб, акс ҳолда *чегараланмаган* фигура дейилади. Текислик, ярим текислик, минтақа (полоса), бурчак (агар у 180° дан ортмаса) — чегараланмаган, лекин қавариқ фигуралар мисолларини беради. 149-чизмада пастдаги фигура қавариқ эмас.



149-чизма.

Ясси қавариқ фигурани чегаралаб турувчи чизиқ (ёки кўпбурчак) *қавариқ чизиқ* дейилади. Масалан, доиранинг чегараси бўлган айлана, учбурчак ёки қавариқ тўртбурчакнинг чегараси — қавариқ чизиқлардир.



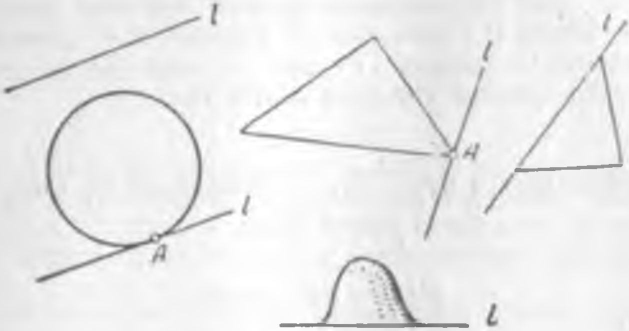
150-чизма.

Агар бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нуқта бирор қавариқ (U) фигурага қарашли бўлса, у ҳолда ABC учбурчак ҳам шу фигурага қарашлидир (150-чизма).

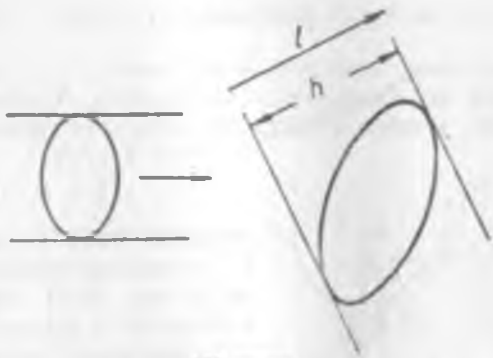
Бу фактни исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатан, A, B, C нуқталар (U) га қарашли бўлса, AB, BC, CA томонлар ҳам (U) га қарашлидир. C учидан чиқиб, (U) га қарашли AB кесма билан кесишган ҳар бир CD кесма ҳам шу хоссага эгадир. ABC учбурчакни эса, шу CD кесмалар билан қоплаш мумкин.

Агар бирор ихтиёрий (U) фигура l тўғри чизиқнинг бир томонида ётиб, (U) нинг чегарасигина l билан умумий нуқталарга эга бўлса, у ҳолда l тўғри чизиқ (U) фигура учун *таянч тўғри чизиқ* дейилади (151-чизма).

Чегараланган ҳар бир қавариқ фигура учун берилган йўналишга параллел қилиб фақат иккита таянч тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Буни исботлаш қийин эмас (152-чизма).



151-чизма.



152-чизма.

§ 70*. Овал, унинг эни, учи

Ёпиқ қавариқ э г р и чизиқ *овал* дейилади. Масалан, эллипс (айлана) овалдир. Овал ҳар қандай тўғри чизиқ билан иккитадан ортиқ умумий нуқтага эга эмасдир.

Овалнинг берилган l йўналишдаги *эни* деб, l га перпендикуляр ҳолда ўтказилган иккита таянч тўғри чизиқлар орасидаги h масофага айтилади. Овалнинг таянч тўғри чизиғи унинг уринмаси бўлади (152-чизма).

Овалнинг *учи* деб, унинг эгрилиги экстремум (максимум ёки минимум) қийматга эришган нуқтасини айтамиз.

Бундай нуқтада $\frac{dk}{ds}$ нолга айланиб, ишорасини ўзгартади. Эллипснинг симметрия ўқлари билан кесишган нуқталари унинг учларидир. Эллипснинг шу тўртта учидан бошқа учларининг йўқлигини исботлаш қийин эмас. Бунинг учун эллипснинг k эгрилигини топиб, одатдаги йўл билан k нинг максимум ва минимумини излаш керак.

Теорема. Ҳар бир овалнинг камида тўртта учи бор.

Исбот. Бирор (Γ) овалнинг M нуқтасидаги уринма вектори $\bar{\tau}$ ва нормаль вектори $\bar{\nu}$ бўлсин. $d\bar{\nu}$ дифференциалдан ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенгдир:

$$\int_{\Gamma} d\bar{\nu} = 0.$$

Френе формулаларига кўра: $d\bar{\nu} = -k\bar{\tau}\,ds = -k\,dr$, демак,

$$\int_{\Gamma} k\,dr = 0.$$

Аммо

$$d(kr) = k\,dr + r\,dk,$$

шу сабабли,

$$\int_{\Gamma} d(kr) = \int_{\Gamma} k\,dr + \int_{\Gamma} r\,dk,$$

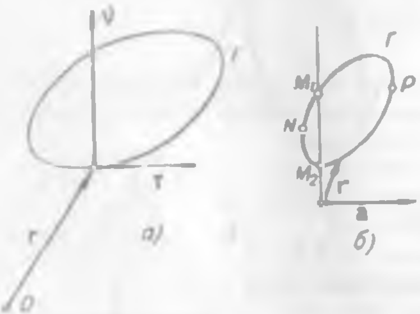
бундан:

$$\int_{\Gamma} r\,dk = 0, \qquad (1)$$

чунки чап томондаги интеграл нолга тенг.

Бу муносабат исталган ёпиқ (ҳатто овал бўлмаган) чизиқ учун ҳам кучга эгадир. Узлуксиз функцияларнинг маълум хоссасига кўра,

$$k = k\ (s)$$



153-чизма.

функция ёпиқ $0 < s < l$ (бунда l — чизиқнинг узунлиги) интервалда энг катта ва энг кичик қийматларга эгадир. Шу билан чизиғимизнинг ақалли иккита M_1 ва M_2 учининг борлиги исботланди. Энди олинган чизиқнинг оваллигидан фойдаланайлик. (Γ) овалнинг шу M_1 ва M_2 дан бошқа учи йўқ дейлик, яъни унинг M_1 ва M_2 нуқталаридан бошқа ҳар қандай нуқтасида $\dot{k} = \frac{dk}{ds} \neq 0$ бўлсин. M_1M_2 тўғри чизиқ овал билан M_1 ва M_2 дан бошқа нуқтада кесишмайди. Қутбни M_1M_2 тўғри чизиқда олиб (153-чизма), ундан $\overline{M_1M_2}$ векторга тик ўзгармас $a \neq 0$ вектор ўтказайлик. M_1PM_2 ёйидаги нуқталар учун $ra > 0$ ва M_1NM_2 ёйидаги нуқталар учун эса $ra < 0$. Эгриликнинг $\dot{k}$ ҳосиласи M_1 ва M_2 нуқталардан бошқа ҳамма жойда нолдан фарқли деб фараз этдик; шу сабабли, ёйларнинг бирида (масалан,

$\overset{\frown}{M_1PM_2}$ да) $k>0$, иккинчисида эса $k<0$. Демак, овалнинг ҳамма нуқталарида $kra>0$, шу сабабли

$$\int_{\Gamma} k r a\, ds > 0$$

ёки

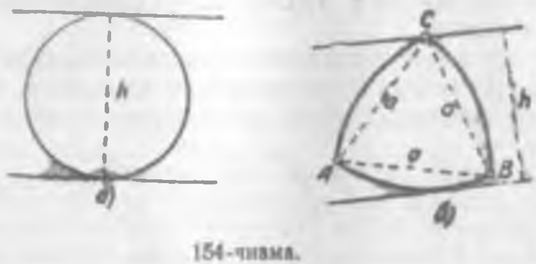
$$a \int_{\Gamma} k r\, ds = a \int_{\Gamma} r\, dk > 0,$$

бу эса (1) га зиддир. Шундай қилиб, (Γ) нинг яна битта учи бордир. Чизиғимизнинг ёпиқлигидан, k эгрилик ишорасининг ўзгариш сони (агар у чекли бўлса) албатта жуфт бўлиши керак. Шунга кўра, учларнинг сони камида тўртта бўлиши лозим.

Эллипсни олганда унинг учлари расо тўртта, айланада эса учлар сони чексиздир.

§ 71*. Эни ўзгармас овал. Барбье теоремаси

Исталган иккита параллел таянч чизиқлари орасидаги масофаси ўзгармас, яъни ҳамма йўналишдаги эни бир хил бўлган овални олайлик. Бундай эгри чизиқ *ўзгармас энли овал* дейилади.



154-чизма.

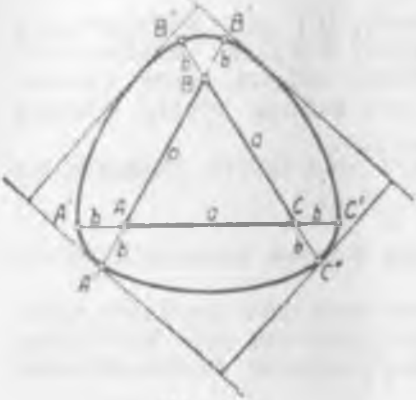
Айлананинг ҳамма йўналишлардаги эни бир хилдир — унинг эни бу ҳолда диаметрига тенг (154а-чизма). Бу хосса айлана учунгина хосми ёки шу хоссага эга бўлган бошқа эгри чизиқлар ҳам борми?

Қўйилган саволга ижобий жавоб бериш мумкин: бу хоссага эга чизиқлар чексиз кўп. Ҳақиқатан, тенг томонли ABC учбурчак олиб, унинг ҳар бир учидан радиуси учбурчак томонига тенг доира чизсак, учта доира ёйидан иборат Рело „учбурчаги“ ҳосил бўлади (154б-чизма). Унинг эни ўзгармасдир.

Яна бир мисол. Тенг томонли ABC учбурчак томонларининг давомларига b га тенг кесмаларни қўямиз (155-чизма).

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC'' = b.$$

Сўнгра A, B, C нуқталардан биринчи марта радиуслари $a+b$ га тенг учта ёй, иккинчи марта радиуслари b га тенг учта ёй чизамиз. У вақтда чизмада кўрсатилган овал ҳосил бўлади.



155-чизма.

Ҳосил қилинган овалнинг эни $a+2b$ га тенг бўлиб, унинг уринмалари узлуксиз равишда ўзгаради. Исталган иккита параллел уринма орасидаги масофа $a+2b$ га тенгдир. Бу ерда икки жуфт таянч тўғри чизиқдан тузилган квадрат ўз ичига бутун фигурани олади.

Келтирилган мисоллар билан эни ўзгармас оваллар тугамайди. Қуйидаги теорема уларнинг ажойиб хоссасини ифодалайди.

Барбье теоремаси. *Эни ўзгармас h га тенг овалнинг узунлиги πh га тенгдир. Демак, энлари бир хил бўлган барча овалларнинг узунликлари ҳам тенгдир.*

Исбот. Бу теореманинг исботи жуда кўп. Биз П. С. Моденов ва Я. С. Дубновнинг исботини келтирамиз[1]). Исбот овалнинг ҳар бир нуқтасида таянч уринманинг мавжудлигига суянади, холос.

Аввал ёрдамчи тушунчани келтирамиз[2]).

Текислик маълум бир ориентацияга эга деб фараз этайлик, яъни бу текисликда тайин (масалан, соат стрелкасининг ҳаракатига тескари) йўналишдаги бурилишни мусбат деб олайлик.

Ориентацияли текисликда маълум бир тартибда олинган иккита a ва b векторнинг *псевдоскаляр* кўпайтмаси деб, бу векторлар узунликларининг улар орасидаги бурчак синуси билан кўпайтмасига айтилади; бундай кўпайтма $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ символи билан белгиланади. Таърифга кўра:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab \sin (\widehat{\boldsymbol{ab}}),$$

[1]) „Математическое просвещение", 1937, № 11, 16—17-бетлар; Ученые записки МГПИ, II, 1938, 165—172-бетлар.

[2]) Я. С. Дубнов, — Основы векторного исчисления, 1950. I қисм, 24, 30-пунктлар.

бу ерда $\hat{ab}$ — биринчи вектордан иккинчи векторгача (соат стрелкасига тескари йўналишда) олинган бурчакдир. Таърифнинг ўзидан псевдоскаляр кўпайтманинг ушбу хоссалари бевосита келиб чиқади:

$$\hat{ab} < \pi \text{ да } a \times b > 0; \; \hat{ab} > \pi \text{ да } a \times b < 0;$$

кўпайтувчилар ўрни алмашинганда кўпайтманинг ишораси ўзгаради.

Агар a ва b векторлар коллинеар (параллел) бўлса, псевдоскаляр кўпайтма 0 га тенг:

$$a \parallel b \text{ бўлса, } a \times b = 0,$$

жумладан,

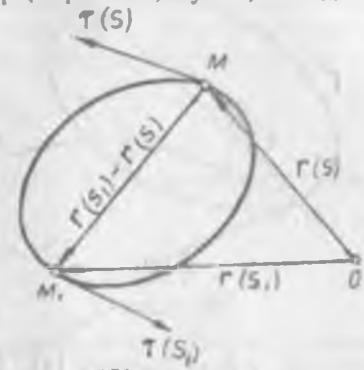
$$a \times a = 0.$$

Тақсимот қонуни ўринлидир:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Агар $a\,\{l, m\}$, $b\,\{l_1, m_1\}$ бўлса,

$$a \times b = \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}.$$



156-чизма.

Икки векторнинг псевдоскаляр кўпайтмаси абсолют қиймат бўйича шу векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг:

$$|a \times b| = S.$$

Энди теореманинг исботига ўтамиз. $MM_1 = h$ овалнинг эни бўлсин. Аввало параллел уринмаларнинг уриниш нуқталарини туташтирувчи $\overline{MM_1} = r(s_1) - r(s)$ векторнинг бу уринмаларга тиклигини исботлаймиз (156-чизма). Овалнинг тенгламасини $r = r(s)$ дейлик. Агар $r(s)$ ва $r(s_1)$ мос равишда M ва M_1 нуқталарнинг радиус-векторлари бўлса, бирлик $\bar{\tau}(s)$ ва $r(s_1) - r(s)$ векторларнинг псевдоскаляр кўпайтмаси h га тенг бўлади:

$$\bar{\tau}(s) \times \{r(s_1) - r(s)\} = h, \qquad (1)$$

бунда $s_1 = s_1(s)$.

(1) ни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$k(s)\bar{\nu}(s) \times \{r(s_1) - r(s)\} + \bar{\tau}(s) \times \left\{\bar{\tau}(s_1)\frac{ds_1}{ds} - \tau(s)\right\} = 0$$

ёки

$$\bar{\nu}(s) \times \{r(s_1) - r(s)\} = 0,$$

яъни

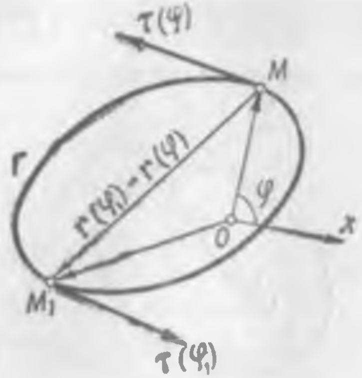
$$\bar{\nu}(s) \parallel r(s_1) - r(s),$$

бундан

$$\bar{\tau}(s) \perp \overline{MM}_1.$$

($\overline{MM}_1$ — овал учун нормаль экан.)

Энди O қутбни овал ичида олиб, параметр сифатида, r радиус-векторнинг қўзғалмас OX тўғри чизиқ билан ташкил қилган φ бурчагини олайлик(157-чизма):



157-чизма.

$$r = r(\varphi).$$

Овал узунлиги у ҳолда интеграл билан ифодаланади:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r'^2(\varphi)}\, d\varphi. \qquad (2)$$

$\overline{MM}_1$ нормаль чизиққа M_1 нуқтада ҳам нормалдир. M_1 нинг радиус-вектори

$$r = r(\varphi_1)$$

бўлсин, бунда $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi)$. (1) сингари бу ҳолда:

$$\bar{\tau} \times \{r(\varphi_1) - r(\varphi)\} = h$$

ёки, ихчамлик мақсадида $r(\varphi_1) - r(\varphi) = R$ десак,

$$\bar{\tau} \times R = h.$$

Аммо $\bar{\tau} = \frac{r'(\varphi)}{\sqrt{r'^2(\varphi)}}$, шу сабабли $\frac{r'}{\sqrt{r'^2}} \times R = h$,

бундан: $\sqrt{r'^2} = \frac{1}{h} r' \times R$. Бу қийматни (2) га қўямиз:

$$s = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} r' \times R\, d\varphi$$

ёки

$$s = -\frac{1}{h} \int_{\Gamma} R \times dr. \qquad (3)$$

M ва M_1 нуқталарнинг ролларини алмаштирсак:

$$s = -\frac{1}{h} \int_{\Gamma} -R \times dr_1, \qquad (4)$$

бунда

$$r_1 = r_1(\varphi_1).$$

(3) ва (4) ни ҳадлаб қўшайлик, у ҳолда:

$$2s = \frac{1}{h} \int_{\gamma} R \times dR$$

ёки

$$s = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \int_{\gamma} R \times dR. \qquad (5)$$

Аммо $|R| = h = \text{const}$, шунинг учун $R = R(\varphi)$ тенглама — радиуси h га тенг айланани ифодалайди (яъни R (φ) векторни O нуқтага келтирганда, унинг годографи айлана бўлади). Маълумки, радиуси R га тенг айлананинг юзи ушбуга тенг:

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} R \times dR,$$

бу интегралнинг қиймати πh^2 га тенг[1]). Буни эътиборга олсак, (5) дан:

$$s = \frac{1}{h} \cdot \pi h^2 = \pi h$$

ҳосил бўлиб, теорема исботланади.

Теорема. *Агар бирор овал айлана билан $2n$ та нуқтада кесишса, унинг камида $2n$ та учи бордир.*

Бу теореманинг исботига тўхтамаймиз.

§ 72*. Синиқ чизиқлар дифференциал геометрияси

Ўтган бобларда чизиқларнинг классик дифференциал геометриясини баён этган эдик. Унда чизиқларни фақат тенгламаларига суяниб, уларга кирувчи функциялардан ҳосила ва дифференциал олиш усулларини қўлландик. Хуллас, ишлатилган метод аналитик метод эди.

Бироқ, чизиқларнинг дифференциал геометрияси синтетик усул билан баён қилинса, кўпгина тушунчалар, фактлар аёний тус олади. Биз шу параграфда, қисқача бўлсада, эгри чизиқларга қараганда кўп жиҳатдан соддароқ бўлган синиқ чизиқларга нисбатан узунлик, эгрилик, бурилма, табиий тенглама ва бошқа тушунчаларни жорий қилишни лозим топдик.

---

[1]) Чиндан ҳам $dR \perp R$, шу сабабли $R = Re(\varphi)$ десак:

$\frac{1}{2}\int_{\gamma} R \times dR = \frac{1}{2} R^2 \int_{\gamma} e(\varphi) \times e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) d\varphi$. Аммо $e(\varphi) \times e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Демак, $\frac{1}{2}\int_{\gamma} R \times dR = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$.

Синиқ чизиқлардан лимитга ўтиш йўли билан, хоҳлаганда эгри чизиқларга ўтиш мумкин.

Юқоридаги параграфларда биз эгри чизиқнинг узунлиги, унинг ихтиёрий нуқтасидаги ёпишма текислиги, эгрилиги ва бурилмаси, унинг табиий тенгламалари ҳақида маълумот бердик.

Ориентацияли $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ синиқ чизиқ берилган бўлиб, унинг учлари $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ нуқталар кўрсатилган тартибда олинган бўлсин. Йўналишли A_iA_{i+1} кесмалар синиқ чизиқнинг *бўғинлари* дейилади.

Ҳамма бўғинлар узунликларининг йиғиндиси синиқ чизиқнинг узунлигини аниқлаши равшандир.

Синиқ чизиқнинг берилган A_i учидаги *эгрилиги* сифатида, $A_{i-1}A_i$ ва A_iA_{i+1} бўғинлар орасидаги бурчакни олиш табиийдир.

Бир тўғри чизиқда ётмаган учта кетма-кет A_{i-1}, A_i, A_{i+1} учларидан ўтувчи текислик синиқ чизиқнинг шу учта учларидаги *ёпишма текислиги* дейилади, бу текисликни P_i ҳарфи билан белгилаймиз.

P_i ва P_{i+1} ёпишма текисликлар орасидаги бурчакни синиқ чизиқнинг бу иккала ёпишма текисликлари учун умумий бўлган A_iA_{i+1} бўғиндаги *бурилмаси* деб атаймиз.

Агар бирлик сферанинг марказидан синиқ чизиқнинг ҳар бир бўғинига параллел радиусларни ўтказиб, сферада ҳосил бўлган нуқталарни бир-бири билан кетма-кет катта айлананинг 180° дан ошмаган ёйлари билан туташтирсак, сферик синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Уни берилган синиқ чизиқнинг *сферик индикатрисаси* дейилади. Ҳосил бўлган сферик синиқ чизиқнинг узунлиги — берилган синиқ чизиқ учларидаги эгриликларнинг йиғиндисига тенг. Бунинг исботини ўқувчига тавсия қиламиз.

Берилган синиқ чизиқ учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — бўғинларнинг катталиги;
$k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ — учлардаги эгриликлар;
$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2}$ — бўғинлардаги бурилмалар.

Бу уч группа катталиклар тўпламини *синиқ чизиқнинг табиий тўплами* деймиз[1]).

Равшанки, иккита конгруэнт[2]) синиқ чизиқ берилган бўлса, уларнинг табиий тўпламлари бир хил бўлади. Бунинг тескариси

---

[1]) Эгри чизиқнинг „табиий тенгламалари“ сингари.

[2]) Агар бир синиқ чизиқни иккинчи синиқ чизиқ билан устма-уст туширадиган ҳаракат мавжуд бўлса, бундай синиқ чизиқлар *конгруэнт* дейилади. Устма-уст тушади деганда, уларнинг ориентациялари ҳам бир хил бўлади деб тушуниш керак.

ҳам тўғри, яъни иккита синиқ чизиқ учун тегишли табиий тўпламлар бир хил (мос катталиклар ўзаро тенг) бўлса, улар фақат фазодаги вазиятлари билангина фарқланади.

Фараз этайлик,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*,$$
$$k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}, \qquad k_1^*, k_2^*, \ldots, k_{n-2}^*,$$
$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2}, \qquad \sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{n-2}^*$$

берилган L ва L^* синиқ чизиқларнинг табиий тўпламлари бўлсин; у ҳолда:

$$a_i = a_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$k_j = k_j^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$
$$\sigma_e = \sigma_e^* \qquad (e = 1, 2, \ldots, n-2)$$

бўлса, L ва L^* конгруэнт синиқ чизиқлар бўлади.

Ҳақиқатан, L^* ни ҳаракат ёрдами билан шундай вазиятга келтирамизки, L нинг биринчи $A_0^*A_1^*$ бўғини L нинг биринчи A_0A_1 бўғини устига тушсин. Энди L^* ни $A_0^*A_1^* = A_0A_1$ атрофида шундай айлантирамизки, P_1^* ёпишма текислик P_1 ёпишма текисликнинг устига тушиб, бир хил ориентацияли бўлсин. Бунинг натижасида L^* нинг ҳамма бўғинлари L нинг тегишли бўғинлари устига тушади. Чиндан ҳам $k_1^* = k_1$, шу сабабли, L^* ва L синиқ чизиқларнинг иккинчи бўғинлари устма-уст тушади. Иккинчи томондан, $\sigma_1^* = \sigma_1$ бўлгани учун P_2^* ёпишма текислик P_1 ёпишма текислик устига тушади. Сўнгра $k_2^* = k_2$ бўлганидан $A_2^*A_3^*$ бўғин A_2A_3 бўғин устига тушади ва ҳоказо. Шу билан теорема исботланди.

Яна битта теоремани исбот қиламиз.

Теорема. *Агар шундай* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *мусбат сонлар,* $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ *бурчаклар* $(0 < k_l < \pi)$ ва яна $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2}$ *бурчаклар* $(-\pi < \sigma_l \leqslant \pi)$ *берилган бўлса, биргина шундай синиқ чизиқ мавжуд бўладики, унинг* $A_{l-1}A_l$ *бўғинининг узунлиги* a_l *га,* A_l *учидаги эгрилиги* k_l *га ва* A_lA_{l+1} *бўғинидаги буралмаси* σ_l *га тенг бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, бирор P_1 текисликка узунлиги a_1 га тенг A_0A_1 кесмани қўямиз. A_1 учидан k_1 бурчак остида узунлиги a_2 га тенг A_1A_2 кесмани қўямиз. A_1A_2 бўғиндан ўтиб, P_1 текислик билан σ_1 бурчакни ташкил этувчи P_2 текисликни ўтказамиз. Бу P_2 текисликка A_2 учидан k_2 бурчак остида узунлиги a_3 га тенг A_2A_3 бўғинни қўямиз. A_2A_3 дан ўтиб, P_2 билан σ_2 бурчакни ташкил этувчи P_3 текисликни ўтказамиз. Бу текисликда A_3 дан бошлаб A_2A_3 билан k_3 бурчакни ташкил қиладиган узунлиги a_4 га тенг A_3A_4 бўғинни ўтказамиз ва ҳоказо.

Ҳосил бўлган синиқ чизиқдаги бўғинларнинг узунлиги, учларидаги эгриликлари ва бўғинларидаги бурилмалари юқорида берилган қийматларга тенг бўлади.

Эгри чизиқларга хос бошқа тушунчаларни ҳам шу сингари синиқ чизиқлар ёрдами билан ойдинлаштириш мумкин.

ЮҚОРИДАГИ ҲАММА БОБЛАРГА ДОИР МАШҚЛАР, МИСОЛЛАР, МАСАЛАЛАР

102. Ушбу кардиоидаларнинг ортогоналлиги исботлансин:

$$\rho = a(1 - \cos\varphi) \text{ ва } \rho = a(1 + \cos\varphi).$$

103. Узунлиги l га тенг AB кесма OX ва OY ўқлари бўйлаб сирпанади. $OACB$ тўғри тўртбурчакнинг C учидан AB кесмага перпендикуляр туширилади. Шу перпендикуляр асосларининг геометрик ўрни топилсин.

Жавоб: Астроида: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

104. Гиперболанинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси параметрик формада ёзилсин.

Кўрсатма. $e^t \cdot e^{-t} = 1$ дан фойдаланинг.

105. Декарт япроғининг параметрик тенгламалари берилган:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Шу чизиқдаги t_1, t_2, t_3 га мос нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши учун

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = -1$$

шарти бажарилиши лозимлигини исботланг.

106. Кардиоида берилган: $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Унга ўтказилган уринма билан уриниш нуқтасининг радиус-вектори орасидаги бурчак топилсин.

Жавоб: $\mu = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$.

107. Циклоида берилган: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Унинг исталган нуқтасидаги уринмаси координата ўқлари билан биргаликда периметри ўзгармас учбурчак ҳосил қилади. Буни исботланг.

108. Айлана берилган: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Координаталар бошидан ва шу айлана нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқнинг k бурчак коэффициентини параметр сифатида олиб, айлананинг параметрик тенгламалари тузилсин.

Жавоб: $x = \frac{2a}{1+k^2}$, $y = \frac{2ak}{1+k^2}$.

109. Қуйидаги эгри чизиқларнинг махсус нуқталари текширилсин:

а) $y^2 = ax^2 + bx^3$, б) $y = x \ln x$.

110. Ушбу алгебраик чизиқлар ясалсин:

а) $(x^2 - y^2)^2 = 2x$, б) $x^2y^2 + y = 1$, в) $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$.

111. Ҳамма нуқталарида уринма узунлиги бир хил бўлган чизиқ топилсин (трактриса).

112. Фокуслари умумий бўлган эллипс ва гипербола бир-бирига ортогоналдир. Буни исботланг.

113. Оиланинг ўрамаси топилсин:

а) $bx + ay = ab$, бунда $a + b = l$.

б) α га тенг бурчакнинг учи OX ўқи бўйлаб сирпана боради, бир томони эса $(0, h)$ нуқтадан ўтади. Иккинчи томоннинг ўрамаси топилсин.

Жавоб: а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{l}$, б) $x \sin\alpha = 2\sqrt{hy} - (y + h)\cos\alpha$.

114. Икки чизиқ берилган:

$$y = \frac{x^2}{2p} \text{ ва } y = n(x-a)^3 + \frac{x^2}{2p}.$$

Буларнинг $x = a$ нуқтада иккинчи тартибли ёпишувга эгалиги исбот қилинсин.

115. Синусоида $y = \sin x$ нинг $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ нуқтасида шундай $y = ax^2 + bx + c$ парабола топилсинки, синусоида билан парабола шу нуқтада умумий уринмага ва умумий эгриликка эга бўлсин.

Жавоб: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

116. Чизиқ тенгламалари берилган: $s = s(t)$, $\alpha = \alpha(t)$. Чизиқнинг параметрик тенгламалари тузилсин.

Жавоб: $x = \int \cos[\alpha(t)]\, s'(t)\, dt$, $y = \int \sin[\alpha(t)]\, s'(t)\, dt$.

117. Чизиқ берилган:

$$r\left\{\frac{t^4}{4} - 1,\ \frac{t^3}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{2},\ \frac{t^2}{2} - 1\right\}.$$

Френе учёқлиги топилсин. O нуқтадаги ёпишма текисликка шу чизиқни проекциялаб, проекциянинг параметрик тенгламалари ёзилсин.

118. Ушбу

$$r\{e^t \sin t,\ e^t \cos t,\ e^t\}$$

чизиқнинг уринмалари, бош нормаллари, бинормаллари OZ ўқи билан ўзгармас бурчак ташкил қилади. Буни исботланг.

119. Исботланг: $\dot{\beta}\ \ddot{\beta}\ \dddot{\beta} = \varkappa^5\left(\frac{k}{\varkappa}\right)'$

120. $k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = 0$. Шу тенгликка асосланиб, чизиқнинг тўғри чизиқ эканини исботланг.

121. Ён багир (умумий винт) чизиқ учун ушбу

$$r' r'' r''' = 0$$

муносабатнинг характерли эканини исботланг.

122. Ушбу чизиқнинг ясси эканлиги исботлансин:

$$r\{\operatorname{ch} t,\ 2\operatorname{sh} t,\ e^t\}.$$

123. Табиий тенгламалари бўйича чизиқ топилсин: $k = \cos s$, $\sigma = \sin s$. Бошланғич шартлар:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{i},\quad \vec{\nu} = \frac{\vec{k} - \vec{j}}{\sqrt{2}},\quad \vec{\beta} = \frac{\vec{k} + \vec{j}}{\sqrt{2}}.$$

124. Чизиқ берилган: $y^2 = x$, $x^2 = z$. Унинг эгрилиги ва буралмаси аниқлансин.

125. Радиуси a га тенг доирада шундай ватарлар ўтказилганки, уларнинг ҳаммаси берилган йўналишга параллел бўлган. Сўнгра бу ватарларни диаметр деб қараб, айланалар ўтказилган. Шу айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: Ўрама эллипсдир: $x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2$.

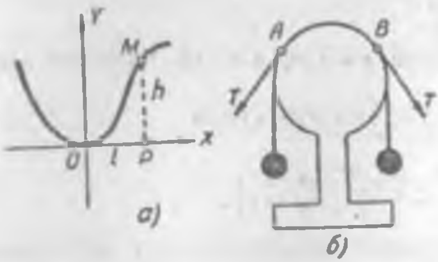
126. Радиуслари бир хил бўлиб, марказлари $r = r(s)$ чизиқда ётган айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: $R = r \pm a\bar{\nu}$, бу берилган чизиққа a масофада параллел бўлиб ўтувчи иккита чизиқдан иборат.

127. Ёпишма текисликнинг вектор-параметрик тенгламалари ёзилсин.

Жавоб: $R = r + \lambda_1 r' + \lambda_2 r''$ (λ_1 ва λ_2 — параметрлар).

128. Фазодаги чизиқ икки сиртнинг кесишмаси сифатида берилган: $F_1(x, y, z) = 0$ ва $F_2(x, y, z) = 0$. Ёпишма текислик тенгламаси ёзилсин.



158-чизма.

Жавоб: Агар $[\mathrm{grad}\ F_1 \cdot \mathrm{grad}\ F_2] = T$ бўлса, бинормалнинг йўналишини ушбу вектор беради:

$$\left[T\left((Ti)\frac{\partial T}{\partial x} + (Tj)\frac{\partial T}{\partial y} + (Tk)\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right].$$

Энди ёпишма текислик тенгламасини ёзиш осон.

129. Чизиқнинг эгрилиги учун ушбу формула кучга эгадир (158а-чизма):

$$k = \lim_{l \to 0} \frac{2h}{l^2}.$$

Бу, эгриликнинг яна бир маъносини очиб беради: эгрилик чизиқнинг уринмадан четланиш тезлигини ифодалайди.

Кўрсатма. Олинган нуқта координата боши ва ундаги уринма OX ўқи сифатида қабул қилинган дейлик (соддалик учун ясси чизиқни оламиз). У ҳолда чизиқнинг O нуқтасида $y' = 0$, демак:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = y''.$$

Чизиқнинг тенгламасини ифодаловчи $y = f(x)$ функцияни Тейлор қаторига ёзамиз: $y = \frac{1}{2}y''x^2 + \varepsilon x^3$ (бу ерда $x \to 0$ учун $\varepsilon \to 0$). Бундан $k = y''$, $y = h$ ва $x^2 = l^2$. Буларни эътиборга олсак, талаб қилинган формула келиб чиқади.

130. $r\{t, \sin t, -\cos t\}$ чизиқнинг бош нормаллари YOZ текислигига параллел. Буни исботланг.

131. Агар чизиқнинг айрим нуқталарида $\sigma = 0$ бўлса, ёпишма сфера бундай нуқталарда ёпишма текисликка айланади. Буни исботланг

132. Эгрилиги ўзгармас бўлган чизиқдаги ёпишма сферанинг радиуси ҳам ўзгармас бўлиб, шу чизиқнинг эгрилик радиусига тенг. Буни исботланг.

Кўрсатма. $R_c^2 = R^2 + \left(\frac{R'}{\sigma}\right)^2$ га қаранг.

133. Бир текисликда ётган ип бирор **т а я н ч г а** осилган бўлиб, P—таянчга таъсир этувчи куч, p— бу кучнинг ҳар бир нуқтага бўлган босими, T—ипнинг таранглиги (ўзгармас) бўлсин. Таянчнинг ҳар бир нуқтасидаги босим — ипнинг эгрилиги билан таранглигининг кўпайтмасига тенг ва шу нуқтадаги уринмага тик:

$$p = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{P}{\Delta s} = Tk.$$

Буни исботланг (160б-чизма).

134. Агар нуқта (кичик жисм) текисликдаги эгри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат қилса, унинг тезланиши эгрилик билан тезлик квадратининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$W = kv^2$$

бўлиб, у нормаль бўйлаб йўналгандир. Буни исботланг.

СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ

Ўн биринчи боб

СИРТ ВА УНИНГ ТУРЛИ УСУЛДА БЕРИЛИШИ

§ 73. Сирт тушунчаси

Биз § 36 да сирт тушунчаси устида қисқача бўлса-да тўхтаб ўтдик. Сирт деб уч ўлчовли фазодаги шундай нуқталар тўпламини айтдикки, у Декарт системасида

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{1}$$

шаклдаги тенглама билан ифодаланади. Бу ерда $F(x, y, z)$ функция бирор (U) соҳада узлуксиз бўлиб, шунингдек, узлуксиз (биринчи) тартибли $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ хусусий ҳосилаларга эгадир. Ўша ердаёқ сиртнинг *регуляр қисми, оддий* ва *махсус* нуқталари тўғрисида тушунча киритдик. Оддий нуқта атрофида (1) тенгламани

$$z=f(x,\ y)$$

шаклга келтириш мумкин. $F(x, y, z)$ га нисбатан қўйилган шартлар бажарилгандагина ҳозир киритилган сирт тушунчаси, одатдаги тасаввуримизга зид келмайди. Бу шартлар: узлуксиз сиртнинг ҳар бир нуқтасида тайин уринма текислик мавжуд эканини билдиради.

Агар сиртнинг бирор нуқтасида $F_x=F_y=F_z=0$ бўлса, бундай нуқта атрофи регуляр бўлмайди, бу нуқтада сиртнинг регулярлик шарти бажарилмаган бўлади. Сирт устида бундай нуқталар ҳатто бирор эгри („махсус") чизиқни ташкил қилиши мумкин (масалан, псевдосферанинг қирраси; § 74 га қаранг).

Сирт тушунчасининг мантиқий анализини чуқур текшириш билан банд бўлмай, сиртни турли усулда ифодалаш ва сиртларга кўпроқ мисоллар келтириш билан шуғулланамиз.

§ 74. Эгри чизиқли координаталар

1. Сиртнинг регуляр қисми берилган бўлсин:

$$z = f(x, y). \qquad (1)$$

Бу тенгламада x ва y бирор (U) соҳада эркли ўзгарувчилар, z — шу соҳада уларнинг узлуксиз бир қийматли функциясидир. Модомики, x ва y эркли ўзгарувчилар экан, биз уларни иккита янги ўзгарувчининг бир қийматли узлуксиз ва дифференциаллаиувчи функциялари деб ҳисоблашимиз мумкин:

$$x = \varphi_1(u, v), \ y = \varphi_2(u, v).$$

Бу φ_1 ва φ_2 ифодаларни (1) тенгламага қўйсак, z ҳам (фаразга кўра) u ва v нинг бир қийматли функцияси бўлади:

$$z = f[x(u, v), \ y(u, v)] = \varphi_3(u, v).$$

Шундай қилиб, сирт устидаги нуқталарнинг Декарт координаталари бирор (U') соҳада ўзгарадиган u ва v параметрларнинг функцияларидир:

$$x = \varphi_1(u, v), \ y = \varphi_2(u, v), \ z = \varphi_3(u, v). \qquad (2)$$

Демак, (1) сиртга қарашли ҳар қандай регуляр қисмни (2) кўринишдаги параметрик тенгламалар билан ифодалаш мумкин. Бу тенгламаларни бирлаштириб, вектор формада ёза оламиз:

$$r(u, v) = \varphi_1(u, v)\,i + \varphi_2(u, v)\,j + \varphi_3(u, v)\,k, \ r = r(u, v). \qquad (3)$$

φ_i функциялар, фаразга асосан, (U') соҳада дифференциалланувчи ва бир қийматлидир, яъни $x = \varphi_1(u, v)$ ва $y = \varphi_2(u, v)$ тескариланувчи функциялардир:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Бу эса ушбу

$$D = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$$

матрицанинг ранги иккига тенг, яъни ундаги иккинчи тартибли детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли, масалан,

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

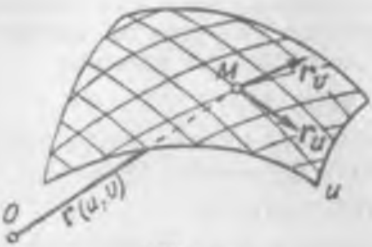
бўлгандагина юз бера олади. Иккинчидан

$$[r_u \ \ r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

шу сабабли $\operatorname{Rang} D = 2$ бўлганда, яъни бу детерминантнинг иккинчи ва учинчи сатрлари пропорционал бўлмаганда,

$$[r_u r_v] \neq 0 \text{ ёки } r_u \nparallel r_v$$

шарти бажарилади. Хуллас, $z = f(x, y)$ шаклда берилган сиртни (2) параметрик тенгламалар билан ёки вектор-параметрик шаклдаги (3) тенглама билан ифодалаш мумкин бўлиб, $\operatorname{Rang} D = 2$ ёки $r_u \nparallel r_v$ шарти бажарилади (159-чизма).



159-чизма.

Аксинча, (2) параметрик тенгламалар ёки уларга тенг кучли (3) вектор тенглама берилган ҳолда, ундаги $r(u, v)$ функция ва унинг ҳосиласи узлуксиз бўлиб, ушбу $r_u \nparallel r_v$ (ёки барибир, $\operatorname{Rang} D = 2$) шарти бажарилса, бундай тенгламалар сиртнинг регуляр қисмини (қисқача, регуляр сиртни) аниқлайди. Ҳақиқатан, $\operatorname{Rang} D = 2$ бўлса, иккинчи тартибли детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли, масалан, бирор (u_0, v_0) қийматда

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлади ва ошкормас функцияларнинг мавжудлик теоремасига асосан, шу (u_0, v_0) нуқта атрофида $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$ функциялар бир қийматли равишда тескариланади: $u = \hat{u}(x, y)$, $v = v(x, y)$; булар $z = \varphi_3(u, v)$ га қўйилса, $z = \varphi_3[u(x, y), v(x, y)] = f(x, y)$ келиб чиқади, бу эса (u_0, v_0) атрофида регуляр сиртни ифодалайди.

Шундай қилиб, (2) тенгламаларга кирувчи φ_i функцияларга нисбатан қўйилган шартлар бажарилган тақдирда, бу тенгламалар р е г у л я р с и р т н и, умуман эса с и р т н и аниқлайди.

Олиб борилган муҳокамаларга кўра (2) тенгламалар *сиртнинг параметрик тенгламаларини*, $r = r(u, v)$ эса сиртнинг *вектор-параметрик* тенгламасини тасвирлайди.

u ва v параметрларнинг (U') соҳадаги ҳар бир қийматига сиртнинг бирор нуқтаси мос келади, бу сонлар сиртдаги нуқтанинг *эгри чизиқли* координаталари дейилади.

Сиртга қарашли нуқтанинг етарлича кичик атрофи регуляр қисмдан иборат бўлганда, бундай нуқта сиртнинг *оддий* нуқтаси дейилган эди. Сиртнинг ҳар бир оддий нуқтасига бир жуфт (u, v) қиймат мос келади, ва аксинча, $r_u \nparallel r_v$ шарти бажарилганда, бундай нуқта оддий бўлади.

2. Координат чизиқлари. Энди $r_u \nparallel r_v$ шартининг геометрик маъносини текширайлик. $r = r(u, v)$ тенгламада $v = v_0$ фараз қилинса, $r = r(u, v_0)$ вектор б и т т а ўзгарувчининг функцияси бўлиб, сирт устида бирор (эгри) чизиқ чиза боради. v_0 нинг қийматларини ўзгартсак, бу чизиқ ҳам умуман ўзгара боради ва битта v_0 параметрли оилани ташкил қилади. Худди шунинг сингари, (3) тенгламада $u = u_0$ десак, сирт устида ётувчи чизиқларнинг иккинчи оиласи ҳосил бўлади. Чизиқларнинг бу икки оиласи сиртнинг *координат чизиқлари* дейилиб, уларнинг биринчисини бундан кейин u ч и з и қ л а р ($v = \text{const}$), иккинчисини v ч и з и қ л а р ($u = \text{const}$) деб атаймиз. $r(u, v)$ нинг u бўйича хусусий ҳосиласидан тузилган r_u вектор u чизиққа уринма, r_v эса v чизиққа уринма. Сиртнинг оддий нуқтасида бу икки вектор шу нуқтадаги уринма текисликда ётади ва бу векторлар коллинеар бўлмаса, шу текисликни аниқлайди. Шундай қилиб $r_u \nparallel r_v$ шарти сиртнинг ҳар бир нуқтасида тайин уринма текислик борлигидан, демак, шу нуқтанинг оддийлигидан дарак беради.

Махсус нуқтада, масалан, конус учи сингари нуқталарда сиртга чексиз кўп уринма текисликлар ўтказиш мумкин.

Координат чизиқларининг иккала оиласи координаталар т ў р и н и ташкил қилади деб айтамиз. Сиртнинг регуляр қисмида ҳар бир нуқтадан тўрга қарашли иккита чизиқ ўтади.

Сиртга жойлашган бирор соҳанинг ҳар бир нуқтасидан чизиқлар оиласи (тўри)га қарашли фақат битта (иккита) чизиқ ўтса, бундай оила (тўр) *дуруст оила* (дуруст тўр) дейилади.

Э с л а т м а. Сирт устида эгри чизиқли координаталарни танлаб олишда кенг эркинлик бор: u ва v ўрнига уларнинг исталган узлуксиз бир қийматли $U(u, v)$ ва $V(u, v)$ функцияларини олиш мумкин. Улар ҳам бундай ҳолда сиртдаги нуқталарни белгилаб бера олади: (u_0, v_0) га мос келган нуқта бу ерда (U_0, V_0) га мос келади. Бироқ, эски параметрларга нисбатан $r_u \nparallel r_v$ шарти сақланса ҳам, янги параметрларга ўтганда $r_u \parallel r_v$ бўлиши мумкин. Бундай ҳолда сирт нуқтасини берилган *параметрлашга* нисбатан м а х с у с нуқта дейишимиз керак. Сиртда махсус нуқталарни ва махсус чизиқларни учратиш мумкин. Улар билан кейинроқ конкрет мисолларда танишамиз.

3. Уринма текислик, нормаль. Сиртнинг ҳар бир оддий нуқтасида тайин уринма текислик бор, уни r_u ва r_v векторлар аниқлайди, чунки $r_u \nparallel r_v$. Шунга асосан, бу уринма текисликдаги ўзгарувчан нуқтанинг радиус-векторини R билан белгиласак, бу текисликнинг вектор формадаги тенгламаси:

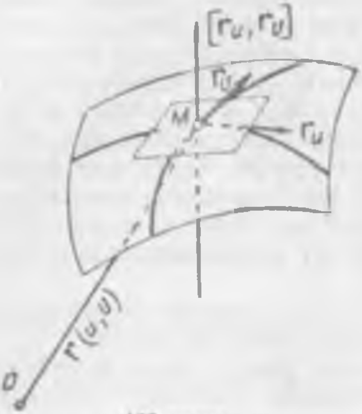
$$(R - r)[r_u r_v] = 0$$

бўлиб, координат формадаги тенгламаси эса:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Уриниш нуқтасида уринма текисликка тик бўлган тўғри чизиқ нормалдир, унинг вектор формадаги тенгламаси:

$$R - r = \lambda\,[r_u r_v]$$



160-чизма.

ва координат формадаги тенгламаси:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

Агар сирт $z=f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, ундан ҳам параметрик тенгламаларга ўтиш мумкин:

$$x=u, \quad y=v, \quad z=f(u, v).$$

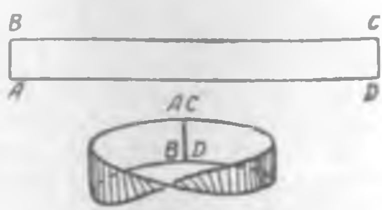
Бу ҳолда вектор формадаги тенглама

$$r = ui + vj + f(u, v)\,k$$

кўринишни олади. Икки векторнинг векториал кўпайтмаси $[r_u r_v]$ сиртнинг нормали бўйлаб йўналгандир; шу векторнинг йўналиши сиртнинг *мусбат томони* дейилади[1]). Қуйидагича белгилашларни киритайлик (160-чизма):

$$N = [r_u r_v], \quad n = \frac{N}{|N|} = \frac{[r_u r_v]}{|[r_u r_v]|}.$$

[1]) Биз ҳар вақт икки (мусбат ва манфий) томонли сиртлар билан иш кўраётирмиз деб фараз қиламиз. Унинг бир томонидан иккинчи томонига ўтганда нормаль йўналиши сакраб ўзгаради. Бундай сиртнинг бир томонини бир хил ранг билан, иккинчи томонини иккинчи хил ранг билан бўяш мумкин. Ҳалқасимон сирт (Мёбиус япроги) бир томонли сиртдир. Бу сиртни ҳосил қилиш учун $ABCD$ тўғри тўртбурчак формадаги қоғозни олиб, унинг AB ва CD томонларини бир-бирига шундай ёпиштирамизки, A нуқта C билан, B нуқта D билан устма-уст тушсин (161-чизма). Унинг фақат бир томонинигина бўяш билан чегараланиш мумкин эмас. Д. Гильберт и С. Конфоссен, Наглядная геометрия, Москва, 1951, 307—312-бетларга қаранг.



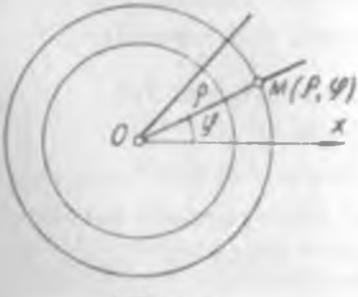
161-чизма.

Нормалнинг бирлик вектори n дир (y сиртнинг мусбат томонига йўналган, 160-чизма).

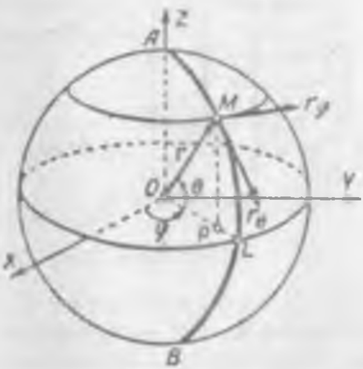
Сиртлар назариясига эгри чизиқли координаталарни системали равишда Гаусс киритди ва улардан кенг миқёсда фойдаланди.

Мисоллар. 1) Текислик — энг содда сиртлардан биридир. Эгри чизиқли координаталар сифатида Декарт координаталарини олиш мумкин: $u = x$, $v = y$; координат чизиқлари $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ бўлиб, улар координат ўқларига параллел тўғри чизиқлардир. Иккала оила ва уларнинг тўри ҳамма жойда дурустдир, текисликнинг ҳар бир нуқтасидан тўрнинг иккита тўғри чизиғи ўтади.

Текисликдаги нуқтанинг вазиятини қутб координаталари билан ҳам аниқлаш мумкин: $M(\rho, \varphi)$, бунда $0<\rho<\infty$, $0<\varphi<2\pi$. Агар $u = \rho$, $v = \varphi$ эканини эътиборга олсак, у холда эгри чи-



162-чизма.



163-чизма.

зиқли координаталар қутб координаталаридан иборатлигини кўрамиз (162-чизма). Текисликнинг параметрик тенгламалари:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = 0$$

ёки

$$\overline{OM} = \boldsymbol{r}(\rho, \varphi) = \rho\,\boldsymbol{e}(\varphi)$$

бўлиб, бунда $\boldsymbol{e}(\varphi)$ — доиравий бирлик вектордир (қутб координат бошида олинган).

2) Сфера (163-чизма). Сферада нуқтанинг вазиятини турли усуллар билан аниқлаш мумкин. Биз уни „параллеллар" ва „меридианлар" ёрдами билан аниқлаймиз. Маркази координата бошида ва радиуси a га тенг сферани олиб, бошланғич мери-

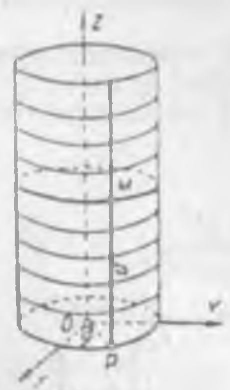
диан текисликни XOZ текислигидан ва экваториал текисликни XOY текислигидан иборат деб фараз қилайлик.

Эгри чизиқли координаталар сифатида географик φ узоқликни ва θ кенгликни киритамиз[1]).

$u = \varphi$ параметр XOY текислигидан бошлаб ва $v = \theta$ параметр XOZ текислигидан бошлаб ҳисобланади:

$$-\pi < \varphi < \pi, \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

бу ерда $\varphi = \text{const}$ — меридианлар ва $\theta = \text{const}$ — параллеллар (айланалар). Шимолий ва жанубий қутблардан бошқа ҳар бир нуқтага тайин φ ва θ мос келади. Сферани узоқлик ва кенглик ёрдами билан параметрлаштирганда қутблар махсус нуқталар ролини ўйнайди. Бироқ, геометрик нуқтаи назардан олганимизда, бу нуқталар сферанинг бошқа нуқталари сингари оддийдир; уларнинг иккаласида ҳам сферага тайин уринма текислик ўтказиш мумкин. Сферанинг параметрик тенгламаларини ёзамиз:



164-чизма.

$$r = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM},$$

$$OP = a\cos\theta, \ PM = a\sin\theta;$$

демак,

$$r = a\left[\cos\theta\, \boldsymbol{e}(\varphi) + \sin\theta\, \boldsymbol{k}\right]$$

ёки координат формада

$$x = a\cos\theta\cos\varphi, \ y = a\cos\theta\sin\varphi, \ z = a\sin\theta.$$

3) Доиравий цилиндрда ҳар бир нуқтанинг вазиятини φ бурчак ва $PM = v$ масофа билан аниқлаш мумкин (164-чизма). Координат чизиқлари: $\varphi = \text{const}$—ясовчилар ва $v = \text{const}$—айланалар. Цилиндр тенгламалари:

$$r = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM},$$

$$r = a\boldsymbol{e}(\varphi) + v\boldsymbol{k}$$

ёки

$$x = a\cos\varphi, \ y = a\sin\varphi, \ z = v.$$

4) Доиравий конуснинг учи координата бошида бўлиб, ўқи эса OZ ўқидан иборат бўлсин (165-чизма). Нуқтанинг вазиятини φ бурчак ва $\overline{OM} = v$ масофа билан аниқлаш

---

[1]) Кенглик сифатида параллелнинг экваторгача олинган „сферик масофаси" $\overset{\frown}{ML} = \theta'$ ни ҳам қабул қилиш мумкин: у ҳолда $\theta = \frac{\theta'}{a}$. Параллел шимолий ярим шарда бўлса, $\theta' > 0$, жанубий ярим шарда бўлса, $\theta' < 0$.

мумкин. $OP = v\cos\alpha$, $PM = v\sin\alpha$, шу сабабли, доиравий конус тенгламалари:

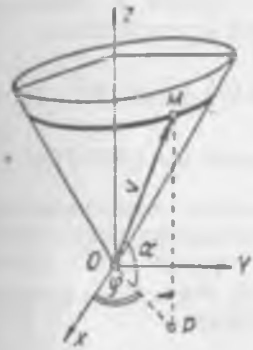
$$r = v\cos\alpha\, e(\varphi) + v\sin\alpha\, k$$

ёки

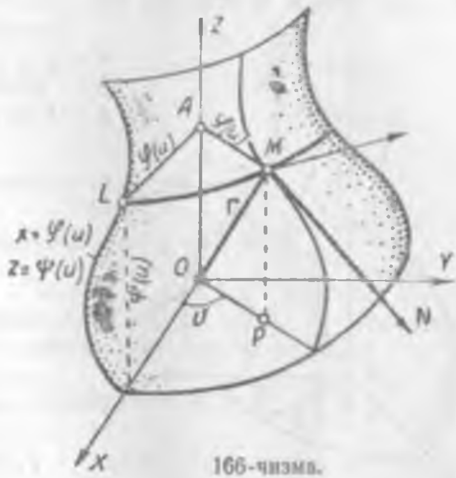
$$r = v\{\cos\alpha\, e(\varphi) + \sin\alpha\, k\},$$

координата формасида:

$$x = v\cos\alpha\cos\varphi,\quad y = v\cos\alpha\sin\varphi,\quad z = v\sin\alpha,$$



165-чизма.



166-чизма.

булардан:

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Координат чизиқлари $\varphi = \text{const}$ — ясовчилар ва $v = \text{const}$ — уларнинг ортогонал траекториялари — конус устидаги спираллардир (§ 63 га қаранг).

5) Айланма сиртлар (166-чизма). Ушбу

$$x = \varphi(u),\ z = \psi(u)$$

чизиқни OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *айланма сирт* дейилади. Биз $x = \varphi(u) > 0$ шартини қўямиз, яъни айланаётган (профил) чизиқ айланиш ўқи билан кесишмайди, акс ҳолда кесишиш нуқтаси сиртнинг махсус нуқтаси бўлиши равшандир.

Эгри чизиқли координаталар сифатида $\angle XOP = v$ бурчакни ва профил чизиқнинг u параметрини оламиз. Чизиқ устидаги ҳар бир $L(u)$ нуқта маркази OZ ўқида ётган ва радиуси $x = \varphi(u)$ га тенг бўлган айланани чизади: $AM = OP = \varphi(u)$.

Координата чизиқлари: $u = \text{const}$ — параллеллар (айланалар), $v = \text{const}$ — меридианлар. Сиртнинг вектор тенгламаси:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(u)\,\boldsymbol{e}(v) + \psi(u)\,\boldsymbol{k},$$

координат формадаги тенгламалари эса:

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u).$$

Профил чизиқ билан сиртнинг учинчи координатаси бир хилдир, чунки чизиқ OZ ўқи атрофида айланмоқда.

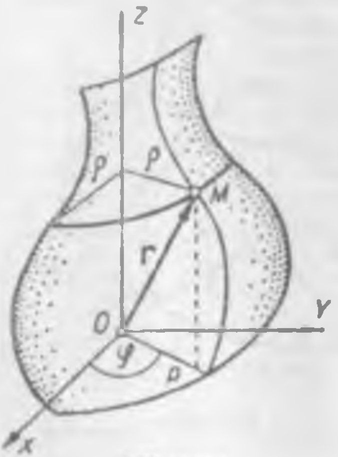
Профилнинг тенгламаси баъзан $z = f(x)$ шаклда ҳам олинади, бу ҳолда x ўрнига ρ ёзилади: $z = f(\rho)$; сиртнинг тенгламаси:

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}(\varphi) + f(\rho)\,\boldsymbol{k}$$

ёки

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = f(\rho), \tag{4}$$

бунда $\rho = \text{const}$ — параллеллар, $\varphi = \text{const}$ — меридианлардир (167-чизма).



167-чизма.

Энди уринма текислик ва нормални аниқлайлик:

$$\boldsymbol{r}_u = \varphi'(u)\,\boldsymbol{e}(v) + \psi'(u)\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_v = \varphi(u)\,\boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

бундан:

$$N = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] = \varphi(u)\{-\psi'(u)\,\boldsymbol{e}(v) + \varphi'(u)\,\boldsymbol{k}\}, \tag{5}$$

бу ердан N нормаль меридиан текислигида ётган вектор деган хулосага келамиз. Демак, айланма сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги нормаль шу нуқтадан ўтувчи меридиан текислигида ётади. (5) дан $|N| = \varphi\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, демак:

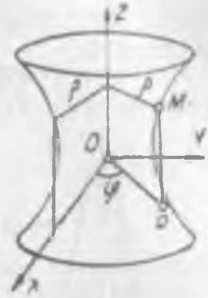
$$\boldsymbol{n} = \frac{-\psi'(u)\,\boldsymbol{e}(v) + \varphi'(u)\,\boldsymbol{k}}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Нормалдаги бирлик векторнинг бу ифодаси кейинроқ бизга кўп марта керак бўлади.

Айланма сиртнинг (4) тенгламаларидан ρ ва φ параметрларни йўқотиш ҳам мумкин: $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Бу вақтда $z = f(x)$ шундай меридианнинг тенгламасики, у XOZ текислигида ётади.

Занжир чизиқни ўз асоси атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт *катеноид* дейилади (168-чизма). Занжир чизиқ ушбу тенглама билан берилган бўлсин:

$$\rho = x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = a\cdot\operatorname{ch}\frac{z}{a}. \quad (6)$$



168-чизма.

Катеноид учун $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ва (6) дан $\frac{2\rho}{a} = \frac{e^{\frac{2z}{a}} + 1}{e^{\frac{z}{a}}}$ ёки, $e^{\frac{z}{a}} = t$ фараз қилсак, $t^2 - \frac{2\rho}{a}t + 1 = 0$, бундан

$$t = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

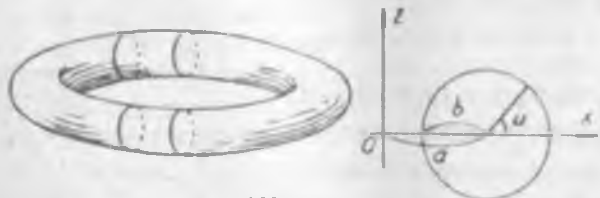
Демак, катеноиднинг параметрик тенгламалари:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = a\cdot\operatorname{arc\,ch}\frac{\rho}{a} = a\cdot\ln\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Занжир чизиқ учун $\rho^2 = a^2 + u^2$ (72-машққа қаранг). Бунда u — меридианнинг бирор параллелдан ҳисобланган узунлигидир. Демак, катеноиднинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$x = \sqrt{a^2 + u^2}\cos\varphi,\ y = \sqrt{a^2 + u^2}\sin\varphi, z = a\cdot\ln\frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}. \quad (7)$$

$$u = \sqrt{\rho^2 - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{z}{a} - 1} = a\operatorname{sh}\frac{z}{a};\ z = a\cdot\operatorname{Arc\,sh}\frac{u}{a}.$$



169-чизма.

(7) даги охирги тенгламани

$$z = a\cdot\operatorname{Arc\,sh}\frac{u}{a} = a\cdot\ln\frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a} \quad (8)$$

шаклда ёзиш ҳам мумкин.

6) Тор. $x = a + b\cos u$, $z = b\sin u$ $(0 < b < a)$ айлана OZ ўқи атрофида айланса, ҳосил қилинган (тешик кулча сингари) сирт *тор* дейилади (169-чизма).

Торнинг параметрик тенгламалари:

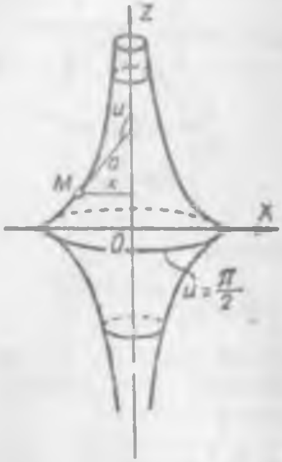
$$x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u$$

ёки вектор формада

$$r = (a + b\cos u)\, e(v) + b\sin u\, k$$

бўлади. Координат чизиқлари: $u = \text{const}$ — айланалар, $v = \text{const}$ — айланалардир.

7) Псевдосфера. Трактрисани (45-бетга қаранг) асоси (асимптотаси) атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт *псевдосфера* дейилади (170-чизма).



170-чизма.

Трактрисанинг параметрик тенгламалари:

$$x = a\sin u,\quad z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right),$$

Бунда u — уринманинг OZ ўқи билан ташкил этган бурчагидир. Псевдосферанинг параметрик тенгламалари:

$$x = a\sin u\cos v,\quad y = a\sin u\sin v,$$

$$z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right).$$

Бу сирт устидаги $u = \frac{\pi}{2}$ чизиқнинг ҳамма нуқталари сиртнинг махсус нуқталарини ташкил қилади (нега?), яъни бу чизиқ псевдосферанинг махсус чизигидир, ёки қиррасидир.

8) Ниҳоят, $x = \sin z$ синусоида OZ ўқи атрофида айлантирилса, чексиз кўп махсус нуқтали сирт ҳосил бўлади; $z = u$ деб қабул қилганда,

$$r = \sin u e(v) + uk$$

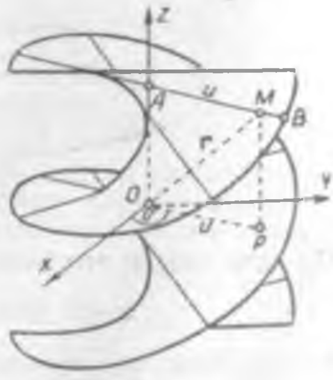
ёки

$$x = \sin u\cos v,\ y = \sin u\sin v,\ z = u$$

келиб чиқади, бунда

$$N = \sin u\,\{-e(v) + k\cos u\}.$$

$u = 0$ да $N = 0$, яъни $(0,\ 0,\ 0)$ — махсус нуқтадир.



171-чизма

9) Геликоид. OZ ўқига тик AB кесманинг шу ўқ атрофида айланишидан ва шунингдек айланиш бурчагига пропорционал тезлик билан OZ бўйлаб силжишидан ҳосил бўлган сиртни тўғри *геликоид* деймиз (171-чизма).

Координаталар:

$$AM = u \text{ ва } \angle XOP = v.$$

Шартга кўра $OA = av$, бунда $a = \text{const}$.

Координат чизиқлари: $u=\text{const}$—винт чизиқлар, $v=\text{const}$—ясовчилар (ҳаракатланувчи тўғри чизиқлар).

Геликоиднинг вектор тенгламаси:

$$r = ue(v) + avk;$$

параметрик тенгламалари:

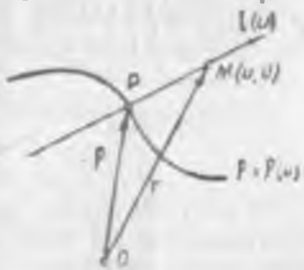
$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av;$$

ошкор тенгламаси:

$$z = a\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

§ 75. Тўғри чизиқли сиртлар

1. *Тўғри чизиқли сирт* деб, тўғри чизиқ (ясовчи)нинг ҳаракатидан ҳосил қилинган сиртга айтамиз. Бир паллали ва икки паллали гиперболоидлар, гиперболик параболоид, цилиндр ва конус бунга мисолдир. Бу синфга кирувчи сиртлар катта аҳамиятга эга.



172-чизма.

Ҳаракат вақтида ясовчилар бирор чизиқ билан доимо кесишиб, бу чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан битта ясовчи ўтса, бундай чизиқ *йўналтирувчи* дейилади. Йўналтирувчи чизиқ $\bar{\rho}=\bar{\rho}(u)$ тенглама билан берилган ҳолда, тўғри чизиқли сиртнинг тенгламасини ёзиш учун ундаги M нуқтанинг эгри чизиқли координаталари сифатида йўналтирувчининг P нуқтасига мос келган u параметрни ва $l(u)$ ясовчи бўйича олинган $PM=v$ масофани қабул қилиш мумкин.

Координат чизиқлари: $u=\text{const}$ — ясовчилар, $v=\text{const}$ — йўналтирувчилар, $v=0$ бўлганда йўналтирувчи $\bar{\rho}=\bar{\rho}(u)$ чизиқнинг ўзи ҳосил қилинади. Сиртнинг тенгламаси:

$$r(v)=\bar{\rho}(u)+vl(u),$$

бунда $l(u)$ — бирлик вектор деб фараз қилиниши мумкин (172-чизма).

Юқорида қаралган геликоид — тўғри чизиқли сиртдир. Унинг йўналтирувчиси OZ ўқидир.

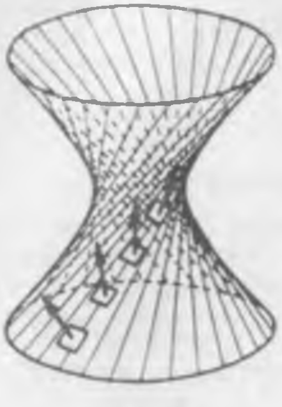
Биз тўғри чизиқли сирт дейиш ўрнига, қисқалик мақсадида *чизиқли сирт* терминини ишлатамиз.

Чизиқли сиртнинг нормалини текширайлик:

$$r_u=\bar{\rho}'(u)+vl'(u), \quad r_v=l(u), \tag{1}$$

$$N=[\bar{\rho}'l]+v[l'l].$$

Маълум бир ясовчи бўйлаб ҳаракат қила борганда, яъни u ни ўзгартмай, v ни ўзгартганда, бу векторнинг йўналиши ва узунлиги, умуман, ўзгара боради. Бу ўзгаришнинг характери (1) га кирувчи $[\bar{\rho}' l]$ ва $[l' l]$ векторларнинг коллинеар бўлиш-бўлмаслигига боғлиқдир. Шу муносабат билан икки ҳолни қарайлик.



173-чизма.

1) $[\bar{\rho}' l] \nparallel [l' l]$ (векторлар коллинеар эмас). Бу ҳолда битта ясовчи бўйлаб ҳаракат қилганда, N нормалнинг йўналиши ўзгара боради, чунки $a + vb$ шаклдаги йиғиндида v ўзгарса, бу йиғиндини ифодаловчи векторнинг йўналиши ҳам ўзгаради (ҳозир бизни N нинг узунлиги қизиқтирмайди).

Ясовчи бўйлаб ҳаракат қилганда, сиртнинг нормали ва унинг билан бирга уринма текислик ҳам гўё қийшайиб боради, чизиқли сирт бу ҳолда *қийшиқ* дейилади. Бу умумий ҳолдир (173-чизма). Юқорида айтилган иккала гиперболоид ва гиперболик параболоид, геликоид худди чизиқли қийшиқ сиртлардир (биз буни кейинроқ исботлаймиз).

2) $[\bar{\rho}' l] \parallel [l' l]$. Бу ҳол фақат l, l', $\bar{\rho}'$ векторлар компланар бўлгандагина юз бера олади; демак, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенгдир:

$$l' l \bar{\rho}' = 0, \quad l = \alpha l' + \beta \bar{\rho}'. \tag{2}$$

(2) тенгликларнинг биринчисини du^2 га кўпайтирсак,

$$l\,dl\,d\bar{\rho} = 0$$

ҳосил бўлади. Бу ҳолда битта ясовчи бўйлаб ҳаракат қилганда, нормаль ўз йўналишини сақлайди [бу гал $a + vb$ йиғинди $a(1 + \lambda v)$ кўринишни олади] — уринма текислик ўзгармайди: ясовчининг битта нуқтасидаги уринма текислик, унинг ҳамма нуқталарида уринма текислик вазифасини бажаради; бошқача айтганда, нормал қийшаймайди (174-чизма). Бу ҳол ҳамма ясовчилар учун юз берса, чизиқли сирт *ёйилувчи*[1]) сирт ёки *торс* дейилади[2]). Равшанки, конус ва цилиндр — торслардир.

---

[1]) Бундай ном берилишининг сабабини кейинроқ тушунамиз.

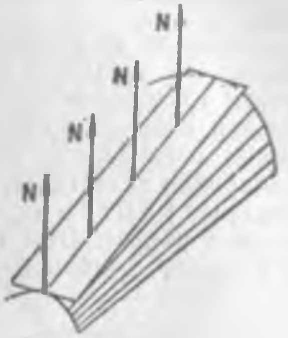
[2]) Чизиқли бўлмаган сиртда ҳам уринма текислик ўз ҳолатини бирор чизиқ бўйлаб сақлаши мумкин, бироқ бу чизиқ сирт учун „махсус чизиқдир“, масалан, тор номли сиртнинг энг юқори ва энг қуйи айланаси, 228-бет. (5) га қаранг.

Геликоид учун йўналтирувчи OZ ўқидир, унинг тенгламаси $\bar{\rho}(u) = a u \boldsymbol{k}$; ясовчиларнинг бирлик вектори $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}(u)$ дир. $\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\bar{\rho}'$ аралаш кўпайтма нолдан фарқли:

$$\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\bar{\rho}' = \boldsymbol{e}(u)\,\boldsymbol{e}\left(u + \frac{\pi}{2}\right) a\boldsymbol{k} = a \neq 0,$$

бу ерда

$$\boldsymbol{e}(u)\,\boldsymbol{e}\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{k} = 1 \neq 0.$$



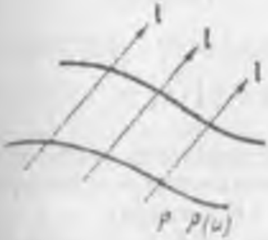
174-чизма.

Энди чизиқли сиртнинг ёйилувчи бўлиш шарти (2) ни анализ қилиб, ёйилувчи сиртлар синфларини аниқлайлик.

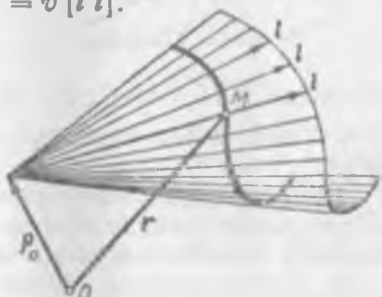
(2) шарт уч ҳолда а й н а н бажарилади.

1) $\boldsymbol{l}' = 0$, яъни $\boldsymbol{l} = \text{const} = \boldsymbol{l}^{\circ}$ — ясовчилар йўналишини сақлайди. Торс цилиндрдан иборат. Унинг нормали $N = [\bar{\rho}'\boldsymbol{l}] = \text{const}$ (175-чизма).

2) $\bar{\rho}' = 0$, демак, $\bar{\rho} = \text{const} = \bar{\rho}_0$ — йўналтирувчи нуқтадан иборат; торс конусдир (176-чизма): $N = v\,[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l}]$.



175-чизма.



176-чизма.

3) $\boldsymbol{l} \parallel \bar{\rho}'$. Бу ҳолда ясовчилар сифатида йўналтирувчининг уринмалари олинади. Демак, торс фазовий чизиқнинг уринмаларидан ясалади[1]).

Биз муҳим натижага келдик: *фазодаги ихтиёрий чизиқнинг уринмаларидан тузилган чизиқли сирт ёйилувчи сиртдир.*

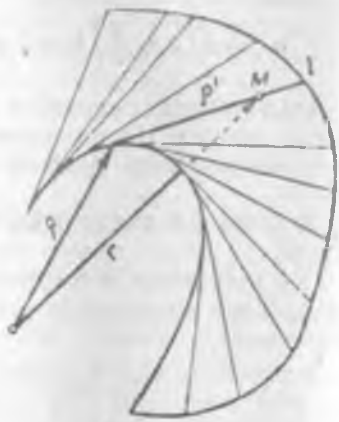
Кўрилган учта ҳолда ёйилувчи сиртлар ҳосил қилинади. Булардан бошқа ҳол йўқ. Шундай қилиб, *ҳар қандай ёйилув-*

[1]) Янги ҳол шугинадир, чунки $\boldsymbol{l} = \alpha\boldsymbol{l}' + \beta\bar{\rho}'$ да $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ фараз қилсак, $\boldsymbol{e} = \alpha\boldsymbol{l}'$ ҳосил бўлади, лекин бирлик $\boldsymbol{l}$ вектор ўз ҳосиласига тикдир. Шу сабабли $\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{l}'$ бўлиши мумкин эмас.

чи сирт ё цилиндр, конус, ёки бирор чизиқнинг уринмаларидан тузилган сиртдир. (Охирги фактни исботсиз келтирдик.)

Цилиндр ва конуслар эътиборга олинмаса, ёйилувчи сирт бирор (Γ) чизиқнинг уринмалари ташкил қилган сиртдир. Агар чизиқ текисликда ётган бўлса, ёйилувчи сирт шу текисликнинг ўзидан иборат. Фазовий (Γ) чизиқни олганда эса, унинг уринмаларидан тузилган сирт шу чизиқдан қайтувчи икки бўлакдан иборат. Шу сабабли бу (Γ) чизиқ *„қайтиш қирраси“*

177-чизма.



178-чизма.

дейилади (177-чизма). Бу сиртнинг нормали $N \parallel [l'l]$, бу ерда $l' = \tau$ деб олиш мумкин, у ҳолда $N = \lambda[\bar{\tau}\bar{\tau}] = -\lambda k \beta$, яъни $N \parallel \beta$.

Шундай қилиб, *ёйилувчи сиртнинг қайтиш қиррасидаги нуқталарда ўтказилган уринма текисликлар шу чизиқнинг ёпишма текисликларидан иборатдир* (178-чизма).

2. *Тўғри чизиқли сиртнинг қисилиш чизиғи.* Бундай сиртнинг иккита чексиз яқин ясовчиси, умуман айтганда, учрашмайди; улар $P(\bar{\rho})$ ва $P'(\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho})$ нуқталардан ўтади дейлик. Уларнинг энг қисқа масофасини ҳисоблаймиз. Бу масофа шу икки ясовчига умумий перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ кесмаси бўлиб, у қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

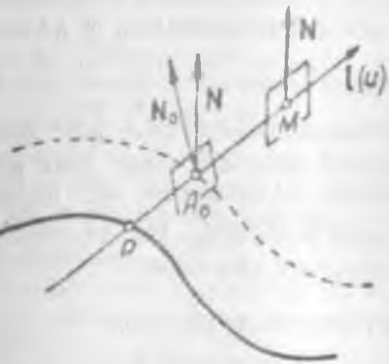
$$\lambda = \frac{(\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho} - \bar{\rho})\,[l, l + \Delta l]}{|[l,\ l + \Delta l]|} = \frac{\Delta\bar{\rho}\, l\, \Delta l}{|[l \Delta l]|}\,^{1)}.$$

Биз цилиндрик сиртларни ҳозир текширмаймиз, чунки уларнинг ҳамма ясовчилари параллел (яъни $l(u) = \mathrm{const}$), демак,

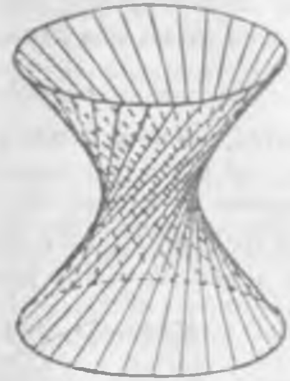
1) $r = r_1 + m a_1$ ва $r = r_2 + m a_2$ тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа $d = \dfrac{(r_2 - r_1)\, a_1 a_2}{|[a_1 a_2]|}$ формула бўйича топилади, Мусхелишвили. Аналитическая геометрия, 270-бетга қаранг.

иккита ясовчининг умумий перпендикуляри аниқмас; лекин, $l(u) \neq \text{const}$ деган талаб эса $l'(u) \neq 0$ талабга келтиради.

Умумий AA' перпендикуляр $A' \to A$ бўлганда, қандайдир лимит вазиятга интилади, у ҳолда A ҳам ўзгара бориб қандайдир A_0 лимит вазиятга интилади. Ана шу A_0 нуқта l ясовчининг *стрикцион (қисилиш) нуқтаси* дейилади (179-чизма). Ҳар бир ясовчида ўзининг стрикцион нуқтаси бордир. Уларнинг геометрик ўрни тўғри чизиқли сиртнинг *стрикцион (қисилиш)*



179 чизма.



180-чизма.

чизиғи дейилади. Бундай ном берилишига сабаб шуки, қисилиш чизиғи сиртни энг тор жойидан ўраб олгандай туйилади. Бир паллали айланма гиперболоидиинг қисилиш чизиғи унинг $XOY(z=0)$ текислик билан кесишган айланасидир. Бу айлана ҳамма ясовчиларни ўткир бурчак остида кесиб ўтади (180-чизма).

Конус учун қисилиш чизиғи нуқтадан — конус учидан иборат, чунки ясовчиларнинг ҳаммаси битта нуқтадан ўтади. Цилиндр учун қисилиш чизиғи мавжуд эмас. Геликоиднинг қисилиш чизиғи унинг ўқидан (171-чизмада OZ ўқидан) иборатдир.

3. *Тақсимланиш параметри.* Умумий ҳолга қайтайлик. „Қўшни" бўлган l ва $l + \Delta l$ ясовчиларни олиб, уларнинг энг қисқа $\Delta\lambda$ масофасини шу ясовчилар орасидаги $\Delta\varphi$ бурчакка бўламиз ва ҳосил қилинган касрнинг $\Delta u \to 0$ даги лимитини қараймиз:

$$p = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}.$$

Тўлароқ муҳокамалар бу лимитнинг мавжудлигини ва қуйидагига тенглигини кўрсатади:

$$p = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{l dl dp}{dl^2}. \qquad (3)$$

Ана шу p лимит, яъни чексиз яқин ясовчилар орасидаги қисқа масофанинг улар орасидаги бурчакка нисбати тўғри чизиқли сиртнинг *тақсимланиш параметри* дейилади.

Ёйилувчи сиртларнинг ҳаммаси учун, масалан, уринмалар сирти учун, (3) даги касрнинг сурати нолга айланади (цилиндр бундан мустасно), демак, бу сиртларнинг тақсимланиш параметри нолга тенг бўлади; уларнинг чексиз яқин ясовчилари „кесишади".

Энди йўналтирувчи чизиқ сифатида стрикцион чизиқ олинган бўлсин, яъни $v = 0$ $(\boldsymbol{r} = \bar{\rho})$ деб фараз қилайлик, у ҳолда

$$\boldsymbol{l}'\bar{\rho}' = 0, \text{ демак, } \boldsymbol{l}' \perp \bar{\rho}'. \tag{4}$$

Ҳақиқатан, $d\boldsymbol{r} = d\bar{\rho} + v d\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l} dv$ дан $d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{l} = d\bar{\rho}\, d\boldsymbol{l} + v d\boldsymbol{l}^2$ ҳосил бўлади, бу эса $v = 0$ билан $d\bar{\rho} d\boldsymbol{l} = 0$ $(d\bar{\rho} \perp d\boldsymbol{l})$ нинг тенг кучли эканини кўрсатади. A_0 қисилиш нуқтасидаги N_0 нормал $N_0 = [\bar{\rho}'\boldsymbol{l}]$, яъни $N_0 \perp \bar{\rho}'$, $N_0 \perp \boldsymbol{l}$; иккинчидан, (4) га асосан. $\boldsymbol{l}' \perp \bar{\rho}'$, демак, $N_0 = m\boldsymbol{l}'$. Буни исботлаш ҳам осон:

$$[N_0\boldsymbol{l}'] = \left[[\bar{\rho}'\boldsymbol{l}']\, \boldsymbol{l}' \right] = (\bar{\rho}'\boldsymbol{l}')\, \boldsymbol{l} - (\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}')\, \bar{\rho}' = 0.$$

Энди m ни аниқлаймиз. Агар $N_0\boldsymbol{l}' = m\boldsymbol{l}'^2$ ни ва $N = [\bar{\rho}'\boldsymbol{l}]$ ни эътиборга олсак:

$$m = \frac{N_0\boldsymbol{l}'}{\boldsymbol{l}'^2} = \frac{\bar{\rho}'\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'}{\boldsymbol{l}'^2} = p, \quad N_0 = p\boldsymbol{l}'.$$

Энди $N = [\bar{\rho}'\boldsymbol{l}] + v\,[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l}]$ дан ушбу ҳосил қилинади:

$$N = p\boldsymbol{l}' + v\,[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l}].$$

Бу ифодага кирган $\boldsymbol{l}'$ ва $[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l}]$ векторлар ўзаро тик ва узунликлари тенгдир. Демак, A_0 ва M нуқталардаги $N_0 \,(= p\boldsymbol{l}')$ ва N нормаллар орасидаги φ бурчакнинг тангенси ушбуга тенг (179-чизма):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{p}.$$

Бундан муҳим натижа келиб чиқади: *стрикцион нуқтадан чиқиб, ясовчи бўйича ҳаракат қилганда сирт нормалининг бурилиш бурчаги юрилган v йўлга пропорционалдир.*

Ёйилувчи сиртнинг тузилишини яна ҳам аниқроқ билиш учун, яна унга қайтайлик. Бу ҳолда $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}'$, $\bar{\rho}'$ векторлар компланар ва $\boldsymbol{l}' \perp \boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}' \perp \bar{\rho}'$, демак, $\boldsymbol{l} \parallel \bar{\rho}'$, яъни *ёйилувчи сирт узининг қисилиш чизиғига ўтказилган уринмалардан тузилгандир.* (Биз $\boldsymbol{l}' \neq 0$, $\bar{\rho}' \neq 0$ деб ҳисобладик.)

Хуллас, олдинги натижаларни эътиборга олсак, *ҳар қандай ёйилувчи сирт ё цилиндр, ё конус, ёки маълум бир фазовий чизиқ уринмаларининг геометрик ўрнидир* деган натижага келамиз.

Машқлар

135. Ушбу сиртларнинг параметрик тенгламалари тузилсин ва координат чизиқларининг характери кўрсатилсин:

1) эллипсоид; 2) бир паллали гиперболоид; 3) гиперболик параболоид.

Жавоб: 1) $r = (a\cos\varphi i + b\sin\varphi j)\cos\psi + c\sin\psi k$ ёки

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = b\sin\varphi\cos\psi, \quad z = c\sin\psi.$$

Бу ерда: $\varphi = \text{const}$ — OZ ўқи орқали ўтувчи текисликда ётган эллипслар; $\psi = \text{const}$ эса XOY текислигига параллел текисликларда ётган эллипслар.

2) $x = a\dfrac{u-v}{u+v}$, $y = b\dfrac{uv+1}{u+v}$, $x = c\dfrac{uv-1}{u+v}$; бунда $u = \text{const}$ — бир серия ясовчилар, $v = \text{const}$ — иккинчи серия ясовчилар.

3) $x = (u+v)\sqrt{p}$; $y = (v-u)\sqrt{q}$; $z = 2uv$.

136. Фазовий чизиқ берилган: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$. Унинг: 1) уринмалари, 2) бош нормаллари, 3) бинормалларидан ташкил этилган тўғри чизиқли сиртларнинг тенгламалари тузилсин.

Жавоб: 1) $r = \bar{\rho}(s) + v\bar{\tau}(s)$; 2) $r = \bar{\rho}(s) + v\bar{\nu}(s)$; 3) $r = \bar{\rho}(s) + v\bar{\beta}(s)$.

137. а) Винт чизиқнинг уринмаларидан ҳосил қилинган сирт тенгламаси ёзилсин;

б) шу масала Вивиани чизиғи учун ечилсин;

в) шу масала коник спираль учун ечилсин.

138. 1) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 - y^2 + z^2)$ сиртнинг $M_0\,(0, 0, 2)$ нуқтасидаги уринма текислигининг ва нормалининг тенгламалари ёзилсин.

2) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ сиртнинг уринма текислиги $x - y + 2z = 0$ текисликка параллел. Уринма текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

Жавоб: $x - y + 2z - \sqrt{\dfrac{7}{4}} = 0$.

3) $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 + v^2$ сиртнинг ихтиёрий $M\,(u_0, v_0)$ нуқтасидаги уринма текислигининг тенгламаси ёзилсин.

$$\text{Жавоб: } \begin{vmatrix} x - (u_0 + v_0), & y - (u_0 - v_0), & z - (u_0^2 + v_0^2) \\ 1 & 1 & 2u_0 \\ 1 & -1 & 2v_0 \end{vmatrix} = 0.$$

139. Сиртнинг *уринма текислиги* деб, шу сиртнинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасидан ўтувчи текисликнинг лимит вазиятига айтилади.

Бу таъриф билан аввалги таърифнинг эквивалентлигини исботланг.

140. $xyz = a^3$ $\left(\text{ёки } x = u;\ y = v,\ z = \dfrac{a^3}{uv}\right)$ сиртнинг ҳамма уринма текисликлари координат текисликлари билан кесишиб, ҳажми ўзгармас тетраэдрни ташкил қилади. Буни исботланг.

Жавоб: Тетраэдрнинг ҳажми: $v = \dfrac{9}{2}a^3$.

141. Сирт берилган: $r = u^3(\sin^3 v i + \cos^3 v j) + (a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}} k$. Унинг уринма текисликлари координат ўқларидан шундай a_1, a_2, a_3 кесмаларни ажратадики, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^6$ бўлади. Буни исботланг.

142. Ушбу $r = ue(v) + a\sin 2vk$ сирт ўзининг уринма текислиги билан эллипс бўйича кесишади. Буни исботланг.

143. $z = x\sin^2\dfrac{y}{x}$ сиртнинг ҳамма уринма текисликлари битта нуқтадан ўтади. Буни исботланг.

Ун иккинчи боб

БИРИНЧИ КВАДРАТИК ФОРМА ВА УНГА БОҒЛИҚ ТУШУНЧАЛАР

§ 76. Сирт устидаги чизиқ

Сирт устида шундай нуқталар тўпламини кўрайликки, уларнинг эгри чизиқли (u, v) координаталари бирор t эркли ўзгарувчининг функциялари бўлсин:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \tag{1}$$

бунда $u(t)$ ва $v(t)$ — узлуксиз ва дифференциалланувчи функциялардир. Бу тенгламалар сиртда ётувчи қандайдир (эгри) чизиқни ифодалайди, чунки сиртнинг $r = r(u, v)$ тенгламасига (1) ни қўйсак,

$$r = r\{u(t), \ v(t)\} = r(t) \tag{2}$$

тенглама ҳосил бўлади, демак, t ўзгариши билан тегишли нуқталар тўплами бир ўлчовли бўлади.

(1) тенгламалардан t ни йўқотиш мумкин:

$$f(u, v) = 0 \text{ ёки } v = v(u). \tag{3}$$

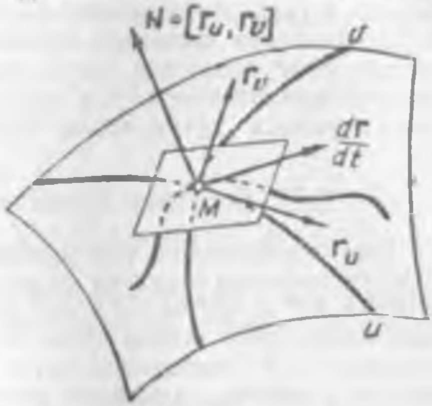
(3) тенглама сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан тенгламасини ифодалайди. Бу — кутилмаган натижа эмас: текисликдаги нуқталарнинг (x, y) ёки (ρ, φ) координаталарини боғловчи тенглама чизиқни беради.

Хусусий ҳолда: $u = \text{const} = u_0$, $v = \text{const} = v_0$ тенгламалар сиртнинг координат чизиқларини тасвирлайди.

Сиртдаги чизиқнинг (2) тенгламасини t бўйича дифференциалласак, ушбу

$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt} \tag{4}$$

вектор ҳосил қилиниб, у чизиғимизга уринмадир, r_u ва r_v эса шу нуқтадан ўтувчи координат чизиқларининг уринмаларидир. Чизиқда олинган M нуқтанинг оддийлигидан, бу уринмаларнинг ҳаммаси бир текисликда (уринма текислигида) ётади. Текисликда чизиқнинг йўналиши $dy:dx$ (ёки $dx:dy$) га боғлиқ бўлгани каби, сирт устидаги чизиқнинг йўналиши ҳам $\frac{dv}{dt}$ ва $\frac{du}{dt}$ нисбатларга боғлиқдир; бошқача айтганда, бу йўналиш $dv:du$ (ёки $du:dv$) нисбатга боғлиқ. Ҳақиқатан, (4) дан кўринадики, $\frac{dr}{dt}$ ҳосила r_u ва r_v билан $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dv}{dt}$ нинг функцияси, бироқ r_u ва r_v — берилган нуқтада ўзгармас векторлардир (181-чизма).



181-чизма.

Мисол. Сферанинг ҳамма меридианларини бир хил бурчак остида кесиб ўтувчи чизиқ *локсодром* дейилади. Унинг тенгламасини топамиз. Бу тенгламани $\varphi=\varphi(\theta)$ шаклда излаймиз.

Сферанинг тенгламаси

$$r = a\,[\cos\theta\, e(\varphi) + \sin\theta k]$$

бўлиб, меридианнинг уринма-вектори:

$$r_\theta = a\,[-\sin\theta\, e(\varphi) + \cos k]$$

(чунки меридиан бўйлаб $\varphi = \text{const}$). Изланган чизиқ учун

$$\frac{dr}{d\theta} = a\left[-\sin\theta e(\varphi) + \cos\theta e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d\varphi}{d\theta} + \cos\theta k\right].$$

Булардан

$$|r_\theta| = a, \quad \left|\frac{dr}{d\theta}\right| = a\sqrt{1+\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}$$

Шартга кўра:

$$\frac{r_\theta \frac{dr}{d\theta}}{|r_\theta|\left|\frac{dr}{d\theta}\right|} = \text{const} = \cos m$$

ёки

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}} = \cos m,$$

бундан $\frac{d\theta}{\cos\theta} = \pm\, d\varphi \operatorname{ctg} m$.

Шундай қилиб, локсодром тенгламаси:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = ce^{\pm\varphi \operatorname{ctg} m} \tag{5}$$

бу ерда

$$c = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right).$$

(5) тенглама икки локсодромии аниқлайди, уларнинг бири ғарбдан шарққа, иккинчиси, аксинча, шарқдан ғарбга йўналгандир (чунки $\pm$ ишоралар бор); θ_0 — локсодромнинг биринчи меридиан билан кесишган нуқтасининг кенглигидир. Бу чизиқ кемаларнинг сузишида катта аҳамиятга эга. Кема шу чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, уни идора қилиш анча соддалашади — кема денгизда „тўғри чизиқ" бўйлаб ҳаракат қилган бўлади[1]).

§ 77. Сиртнинг биринчи квадратик формаси

Агар текисликдаги ёки фазодаги чизиқнинг тенгламаси Декарт системасида берилган бўлса, унинг узунлигини $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ва $ds^2 = dx^2 + dy^2$ формулалар орқали топиш мумкин. Аммо, сирт устида ётган ва тенгламалари сиртнинг эгри чизиқли u, v координаталарнга нисбатан $u = u(t)$, $v = v(t)$ шаклда берилган чизиқнинг узунлигини юқоридаги формулалар ёрдами билан аниқлаш мумкин бўлмайди.

Бу параграфда, сирт устида ётган ва тенгламалари $u = u(t)$, $v = v(t)$ шаклда берилган чизиқларнинг узунликларини топиш учун формула чиқарамиз.

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ сирт устида $u = u(t)$, $v = v(t)$ чизиқ берилган бўлсин. Бу чизиқнинг вектор шаклдаги тенгламасини ёзамиз:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t);\ v(t)].$$

Ҳосил бўлган мураккаб функциядан t бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Унинг модули

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \left|\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \boldsymbol{r}_v^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Иккинчи томондан, $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ (§ 41), бунда ds — чизиқ ёйининг дифференциали. Шу сабабли

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \boldsymbol{r}_v^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

---

[1]) В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, часть II, 1948, 163-бетга қаранг.

ёй дифференциали учун

$$ds = \sqrt{r_u^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2r_u r_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + r_v^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Бунда $r_u = x_u i + y_u j + z_u k$; $r_v = x_v i + y_v j + z_v k$ бўлганидан,

$r_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$; $z_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$; $r_u r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$.

Ёзишни енгиллаштириш мақсадида r_u^2 ни E билан, $r_u r_v$ ни F билан ва r_v^2 ни G билан белгилайдилар, яъни

$$E = r_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = r_u r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Бу вақтда ёй дифференциали:

$$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \quad (1)$$

кўринишни олади. Берилган чизиқнинг $t = t_1$ ва $t = t_2$ қийматларга мос келган нуқталари орасидаги ёй узунлигини топиш учун (1) ни интеграллаймиз:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \quad (2)$$

E, F ва G коэффициентлар t нинг функцияларидир:

$$E = E[u(t),\ v(t)], \quad F = F[u(t), v(t)], \quad G = G[u(t), v(t)].$$

Бунда $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dv}{dt}$ чизиқнинг $u = u(t)$, $v = v(t)$ тенгламаларидан аниқланади.

(1) ни квадратга кўтариб dt га қисқартсак:

$$\Phi_1 = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad (3)$$

келиб чиқади. Бу (3) ифодадаги ҳадлар du ва dv га нисбатан иккинчи даражали бўлгани учун ўнг томонни, яъни

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ифодани сиртнинг *биринчи квадратик формаси* дейилади. E, F ва G қийматлар биринчи квадратик форманинг *коэффициентлари* деб аталади. Юқорида чиқарилган формулаларга асосан, E ва G нинг ҳар бири нолдан катта бўлиб, F эса манфий, ноль ва мусбат қийматларни қабул қилиши мумкин. (3) формулада иштирок этган E, F, G коэффициентлар фақат сиртнинг тенгламасига ва сирт устидаги M нуқтанинг координаталарига боғлиқ, чунки улар u ва v нинг функцияларидир.

Сиртнинг ҳамма нуқталарида $F=0$ бўлса, $r_u \perp r_v$ бўлиб, сиртнинг ҳамма u чизиқлари унинг ҳамма v чизиқлари билан 90° ли бурчак остида кесишади.

(1) формуланинг геометрик маъносини яна қуйидагича тушунтириш мумкин. Агар биринчи тартиблидан юқори чексиз кичикларни эътиборга олмасак, $dr \cong \Delta r$ ва $dr = r_u\,du + r_v\,dv$ дан $\Delta r = r_u du + r_v dv$ ни ҳосил қиламиз. Демак, r_u ва r_v векторлар уринма текисликда ётгани учун, сирт устидаги бир-бирига яқин иккита нуқтани туташтирувчи Δr вектор ҳам уринма текисликда ётади. Сирт устидаги ёйнинг ds дифференциали эса уринма текислик устида ётган Δr векторнинг узунлигига тенг. Демак, биринчи тартиблидан юқори чексиз кичикларни эътиборга олмасак, сиртнинг чексиз кичик қисми, бу қисмга тегишли уринма текисликнинг чексиз кичик қисмига „тенг" бўлади.

Энди сирт ошкор тенглама билан берилган бўлсин: $z=f(x,y)$, у ҳолда

$$dr = dx\,i + dy\,j + (pdx + qdy)\,k, \tag{4}$$

бунда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

(4) ни квадратга кўтарсак:

$$ds^2 = (1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2,$$

демак:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Эслатма. Сиртнинг биринчи квадратик формаси қисқалик мақсадида бу сиртнинг *чизиқли элементи* деб ҳам айтилади.

Мисоллар. 1) $x = \cos u \cos v - \sin u$, $y = \sin u \cos v + \cos u$, $z = u$ сирт устида $u - 2\cos v - 1 = 0$ чизиқ ётади. Бу чизиқнинг $M_0(3, 0)$ дан $M_1\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ гача бўлган ёйининг узунлиги аниқлансин.

Ечиш. Чизиқнинг тенгламасини параметрик шаклга келтирамиз. Бунинг учун, v ни t деб қабул қилсак, $u = 1 + 2\cos t$ бўлади. Чизиқнинг параметрик тенгламалари $u=1+2\cos t$, $v=t$. Энди E, F ва G коэффициентларни аниқлаймиз:

$$x_u = -\sin u \cos v - \cos u; \quad x_v = -\cos u \sin v;$$

$$y_u = \cos u \cos v - \sin u; \quad y_v = -\sin u \sin v;$$

$$z_u = 1; \quad z_v = 0;$$

$$E = 2 + \cos^2 v; \quad F = \sin v; \quad G = \sin^2 v.$$

$\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dv}{dt}$ ларни эгри чизиқ тенгламасидан топамиз ва топилган $\frac{du}{dt} = -2\sin t$; $\frac{dv}{dt} = 1$ қийматларни (2) формулага қўямиз.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(2+\cos^2 v)(-2\sin t)^2 + 2\sin v(-2\sin t)\cdot 1 + \sin^2 v \cdot 1}\, dt.$$

Нуқта чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, яъни t ўзгарганда, u ва v шу билан бирга E, F, G ҳам ўзгаради. Шунинг учун E, F, G қийматларда u ва v ўрнига t нинг чизиқ тенгламасидан аниқланган қийматларини қўямиз. Чизиқнинг тенгламаларидан t_1 ва t_2 қийматларни топамиз:

M_0 (3, 0) нуқтада $3 = 1 + 2\cos t$, $v = t$ тенгламалардан $t_1 = 0$ топилади ва $M_1\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ нуқтада $1 = 1 + 2\cos t$; $v = t$ тенгламадан $t_2 = \frac{\pi}{2}$ топилади. Демак:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2+\cos^2 t)\cdot 4\sin^2 t - 4\sin^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5\sin^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 + 4\cos^2 t}\,\sin t\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2\cos t}{2}\sqrt{5+4\cos^2 t} + \frac{5}{2}\ln\left(2\cos t + \sqrt{5+4\cos^2 t}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 5\ln 5),$$

яъни

$$s = \frac{1}{2}(3 + 5\ln 5).$$

2) Коник сиртнинг биринчи квадратик формаси топилсин:

$$x = av\cos u;\ y = bv\sin u;\ z = v.$$

Ечиш:

$$x_u = -av\sin u;\ \ y_u = bv\cos u;\ \ z_u = 0;\ x_v = a\cos u;$$
$$y_v = b\sin u;\ \ z_v = 1;$$

$$E = a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u;\ F = -a^2 v\sin u\cos u + b^2 v\sin u\cos u;$$
$$G = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1,$$
$$ds^2 = (a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u)\, du^2 + 2(-a^2v\sin u\cos u +$$
$$+ b^2v\sin u\cos u)\, du\, dv + (a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1)\, dv^2.$$

Машқлар

144. $x = a \cos u \cos v$; $y = b \sin u \cos v$; $z = c \sin v$ эллипсоиднинг биринчи квадратик формаси топилсин.

145. $x = a \cos u$; $y = a \sin v$; $z = v$ цилиндрик сирт устида $u = 1 + t$ $v = 1 - t$ чизиқ берилган. Бу чизиқнинг M (1, 1) нуқтасидан M (2, 0) нуқтасигача бўлган ёйнинг узунлиги аниқлансин.

146. $x = v \cdot \sqrt{p} \cos u$; $y = v \cdot \sqrt{p} \sin u$; $z = \frac{1}{2} v^2$ сиртнинг биринчи квадратик формаси топилсин.

147. Сирт берилган: $r = ve(u) + e\left(u + \frac{\pi}{2}\right) + uk$ ёки координат формада:

$$x = v \cos u - \sin u,\ y = v \sin u + \cos u,\ z = u.$$

Бу сиртда ётувчи $u - 2v = 1$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги ёпишма текислиги сиртнинг шу нуқтадаги уринма текислигидир. Буни исботланг.

§ 78. Сиртда ётувчи чизиқлар орасидаги бурчак

Агар сиртнинг биринчи квадратик формаси ва сирт устида бир-бири билан кесишган чизиқларнинг тенгламалари берилган бўлса, бу чизиқлар орасидаги бурчакни аниқлаш мумкин.

Сирт устидаги чизиқларнинг кесишган нуқтасини M билан белгилайлик. Чизиқларнинг бу умумий нуқтадаги уринма векторлари $dr = r_u du + r_v dv$ ва $\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v$ бўлсин. r_u ва r_v қийматлар сиртнинг тенгламасидан топилади. Шу сабабли, иккала dr ва δr вектор учун ҳам, r'_u ва r'_v қийматлар бир хилдир. dr ва δr векторлар орасидаги бурчакни чизиқлар орасидаги бурчак деб қабул қиламиз. Векторлар орасидаги φ бурчакни аниқлаш учун бу векторларни ўзаро скаляр кўпайтирамиз: $(dr \cdot \delta r) = |dr| \cdot |\delta r| \cos \varphi$. Бундан: $\cos \varphi = \frac{(dr \cdot \delta r)}{|dr| \cdot |\delta r|}$,

$$|dr| = ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2};$$
$$|\delta r| = ds_1 = \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}.$$

Чизиқлар орасидаги бурчак учун

$$\cos \varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} \qquad (1)$$

формула ҳосил бўлади. Бундан $du:dv$ ва $\delta u:\delta v$ йўналишдаги чизиқларнинг ортогоналлиги қуйидагини беради:

$$E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

Демак, сиртнинг M нуқтасидаги E, F, G коэффициентлар топилса ва чизиқлар уринмаларининг йўналишлари ($du:dv$ ва $\delta u:\delta v$ ёки $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{\delta u}{dt}, \frac{\delta v}{dt}$) аниқланса, чизиқлар орасидаги бурчакни топиш мумкин. Хусусий ҳолда, эгри чизиқли (u ва v)

координата чизиқлари орасидаги бурчакни топайлик. Бунинг учун u бўйича олинган дифференциалларни du, dv билан, v бўйича олинган дифференциалларни δu, δv билан белгилаймиз. u чизиқ бўйича $du \neq 0$, $dv = 0$ ва v чизиқ бўйича $\delta u = 0$, $\delta v \neq 0$. Шу сабабли, (1) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Координата чизиқларининг ортогоналлик шарти $F = 0$ дир; демак, дифференциаллар кўпайтмасининг нолга тенглиги координата чизиқларининг ортогоналлигини билдиради ва аксинча.

Мисол. $x = u + v$; $y = u - v$; $z = uv$ сирт устида $u = t$, $v = -\frac{1}{2}$ ва $u = t$, $v = \frac{1}{2}t - 1$ чизиқлар берилган. Бу чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Берилган чизиқларнинг кесишган нуқтасини аниқлаймиз. Чизиқларнинг берилган тенгламаларидан t параметрни йўқотиш билан ҳосил қилинган $u + 2v = 0$, $u - 2v - 2 = 0$ системани ечиб, $M_0\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ кесишиш нуқтасини топамиз. Бу ерда t_0 нинг қиймати 1 га тенг бўлади.

E, F, G коэффициентларни чизиқларнинг кесишган $M_0\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ нуқтаси учун ҳисоблаймиз:

$$x_u = 1, \quad x_v = 1, \quad E = 2 + v^2, \qquad E = \frac{9}{4},$$

$$y_u = 1, \quad y_v = -1, \quad F = 1 - 1 + uv, \quad F = \frac{1}{2},$$

$$z_v = v, \quad z_v = u, \quad G = 2 + u^2, \qquad G = 3.$$

Биринчи чизиқнинг тенгламасидан $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}$.

Иккинчи чизиқнинг тенгламасидан $\frac{\delta u}{dt} = 1$, $\frac{\delta v}{dt} = \frac{1}{2}$. Топилган қийматларни (1) формулага қўямиз: $\cos\varphi = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{14}{4}}\cdot\sqrt{\frac{10}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$.

§ 79. Ортогонал траекториялар

Сирт устидаги $M_0(u_0, v_0)$ нуқтанинг атрофида бир параметрли $\varphi(u, v) + c = 0$ чизиқлар оиласи берилган ва $M_0(u_0, v_0)$ нуқтада $\varphi_u'^2 + \varphi_v'^2 \neq 0$ бўлсин. Бу оилага ортогонал бўлган иккинчи оилани топамиз. Биринчи оиланинг йўналишини $\varphi_v : \varphi_u$

билан ва иккинчи оиланинг йўналишини $dv:du$ билан белгилаб, ортогоналлик шартини ёзамиз:

$$E\varphi_v du + F(\varphi_v dv - \varphi_u du) - G\varphi_u dv = 0$$

ёки

$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\,du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\,dv = 0. \qquad (1)$$

Ана шу тенглик иккинчи оиланинг дифференциал тенгламасидир. Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, (1) ни $\mu(u, v)$ интеграл кўпайтувчига кўпайтирганда, унинг чап томони қандайдир $\psi(u, v)$ функциянинг тўлиқ дифференциалига айланади:

$$\mu\{(E\varphi_v - F\varphi_u)\,du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\,dv\} = d\psi.$$

Берилган оилага ортогонал оиланинг тенгламаси

$$\psi(u, v) + c_1 = 0$$

шаклда бўлади. Ҳақиқатан, топилган оила чизиғининг йўналиши $\psi_v:\psi_u$ дир.

$$\psi_u = \mu(E\varphi_v - F\varphi_u); \quad \psi_v = \mu(F\varphi_v - G\varphi_u)$$

бўлганидан $\mu\{(E\varphi_v - F\varphi_u)\psi_v - (F\varphi_v - G\varphi_v)\psi_u\} = 0$. Бу эса $\varphi_v:\varphi_u$ ва $\psi_v:\psi_u$ йўналишларнинг ортогоналлик шартидир. Энди $M_0(u_0, v_0)$ нуқта атрофида эски u ва v координат чизиқларини $\varphi(u, v) + c = 0$, $\psi(u, v) + c_1 = 0$ дан иборат чизиқларга алмаштирамиз. Математик анализ курсидан маълумки,

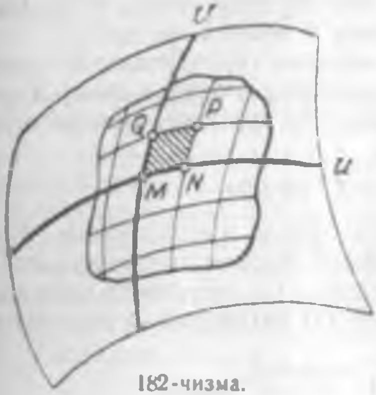
$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0$$

шартида, бу алмаштиришни бажара оламиз. Бизнинг мисолимизда $-\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u = E\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_v^2 \neq 0$. Шундай қилиб, сиртнинг ҳар бир нуқтаси атрофида ортогонал координата чизиқлари доимо мавжуд бўлиб, биринчи оиладаги чизиқларни ихтиёрий равишда танлашимиз мумкин.

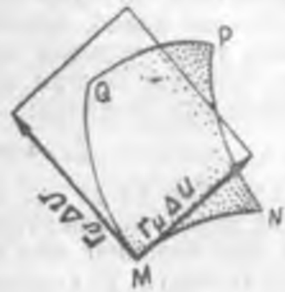
§ 80. Сирт устидаги соҳанинг юзини аниқлаш

Сирт устида содда ёпиқ чизиқ билан чегараланган W соҳа берилган бўлсин. W соҳадаги нуқталардан сони чекли координата чизиқларини ўтказамиз. Бу соҳа эгри чизиқли икки хил тўртбурчакка ажралади. 1) Тўлиқ тўртбурчаклар (бундай тўртбурчакларнинг икки томони u чизиқлар билан ва қолган икки томони v чизиқлар билан чегараланган). 182-чизмада бундай тўртбурчаклардан бири ($\square\, MNPQ$) катта қилиб кўрсатилган.

2) Тўлиқсиз тўртбурчаклар. Бу кўринишдаги тўртбурчакларнинг ҳар бири сирт устидаги соҳани чегаралайдиган чизиқни ҳам қисман қоплайди. Тўртбурчакларнинг ҳар бири кичрайиб борганда, тўлиқсиз тўртбурчаклар соҳани чегаралайдиган чизиққа яқинлашади ва бу тўртбурчакларнинг ҳаммасини эни нолга интиладиган ёпиқ тасма ичига жойлаштириш



182-чизма.



183-чизма.

мумкин бўлади. Шу сабабли иккинчи кўринишдаги тўртбурчакларни эътиборсиз қолдирамиз.

183-чизмадаги эгри чизиқли тўртбурчакни текширайлик. Бунда MN ва PQ томонлар u чизиқларга қарашли. NP ва MQ томонлар эса v чизиқларга қарашлидир. Тўртбурчак учларининг координаталари: $M(u, v)$, $N(u+\Delta u, v)$, $Q(u, v+\Delta v)$, $P(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Шунинг учун $\overline{OM}=r(u, v)$, $\overline{ON}=r(u+\Delta u, v)$

$$\overline{OP}=r(u+\Delta u, v+\Delta v), \quad \overline{OQ}=r(u, v+\Delta v) \text{ бўлиб,}$$

$$\overline{MN}=r(u+\Delta u, v)-r(u, v).$$

Чекли орттирмалар теоремасига асосан, $\overline{MN}=\Delta u\cdot r_u[u+\theta\Delta u, v]$.

Агар биринчи тартиблидан юқори чексиз кичикларни эътиборга олмасак, $\overline{MN}\cong r_u\Delta u$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $\overline{MQ}\cong r_v\Delta v$, $MN\cong|\overline{MN}|\cong|r_u|\Delta u$ ва $MQ\cong|\overline{MQ}|\cong|r_v|\Delta v$ бўлгани учун, эгри чизиқли тўртбурчакнинг юзи ўрнига томонлари $r_u\Delta u$ ва $r_v\Delta_v$ векторлардан иборат тўғри чизиқли параллелограммнинг юзини оламиз, яъни эгри чизиқли $MNPQ$ тўртбурчакнинг юзи деб $r_u\Delta u$ ва $r_v\Delta v$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзини қабул қиламиз. Бу параллелограмм сиртнинг M нуқтасидаги уринма текисликда бўлиб, унинг юзи ушбуга тенг:

$$\Delta\sigma=|[r_u r_v]|\,\Delta u\,\Delta v$$

ёки

$$\Delta\sigma = \sqrt{(r_u r_u)\cdot(r_v r_v) - (r_u r_v)(r_u r_v)}\,\Delta u \Delta v = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v.$$

Демак, юзнинг $\Delta\sigma$ ифодаси сиртнинг биринчи квадратик формасидаги E, G, F коэффициентлар орқали ифодаланади.

$\sqrt{EG - F^2}$ қиймат $|(r_u r_v)|$ га тенг бўлгани учун, у ҳамма вақт нолдан каттадир (оддий нуқтада у нолдан фарқли).

Шундай қилиб, ҳар бир эгри чизиқли тўртбурчакнинг юзи ўрнига тўғри чизиқли параллелограммнинг юзини оламиз. Соҳага тегишли бўлган ҳамма параллелограммлар юзларининг йиғиндисини тузайлик:

$$\sum \Delta\sigma = \sum \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v. \tag{1}$$

Ҳар бир Δu ва Δv қийматларни нолга интилтирамиз. Бу ҳолда эгри чизиқли тўртбурчакларнинг сони чексизликка интилиб, ҳар бирининг юзи нолга интилади. (1) дан лимит оламиз. Сирт устидаги W соҳанинг юзи деб (1) йиғиндининг лимитига айтамиз:

$$S = \lim \sum \Delta\sigma = \lim \sum \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v.$$

Каррали интеграллар назариясига асосан, $\lim \sum \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v$ нинг қиймати сиртдаги эгри чизиқли координат системасига боғлиқ бўлмасдан, фақат соҳанинг шаклига боғлиқ бўлиб, $\sqrt{EG - F^2}$ дан олинган икки ўлчовли интегралга тенг:

$$S = \iint\limits_W \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{2}$$

Натижа. Сирт устидаги эгри чизиқ ёйининг узунлигини, сирт устидаги чизиқлар орасидаги бурчакни ва соҳанинг юзини аниқлаш учун сирт устидаги эгри чизиқли координат системасига нисбатан E, F ва G қийматларни u, v орқали аниқлаш кифоядир. E, F ва G ларни аниқлаш учун, сиртнинг шаклини ва тенгламасини билиш шарт эмас.

Сирт ошкор $z = f(x, y)$ ошкор тенглама билан берилган ҳолда тегишли W соҳанинг юзи учун ушбу формула ҳосил қилинади:

$$S = \iint\limits_W \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Мисоллар. $x = R\cos u \cos v$, $y = R\cos u \sin v$, $z = R\sin u$ сфера ва унинг экватори билан чегараланган соҳанинг юзи аниқлансин.

Ечиш. Сиртнинг тенгламасидан соҳанинг M нуқтаси учун E, F ва G қийматларни аниқлаймиз: $E = R^2$; $F = 0$; $G = R^2\cos^2 u$.

Буларни (2) формулага қўйиб, икки ўлчовли интегрални ҳисоблаймиз. Биринчи интегралнинг чегаралари 0 дан 2π гача ва иккинчи интегралнинг чегаралари 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача бўлгани учун:

$$S=\iint\limits_{W}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\int\limits_{0}^{2\pi}dv\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2\cdot R\cos^2 u-0^2}\,du\,dv=2\pi R^2.$$

Бунинг тўғрилиги элементар геометрия курсидан маълум.

Сирт устидаги ёй, унинг узунлиги (биринчи квадратик форма), соҳанинг юзи тушунчалари соф геометрик характерга эга бўлгани учун, улар сирт устида эгри чизиқли координаталарни танлашга, чизиққа қандай ички синиқ чизиқ чизилишига ёки соҳани параллелограммларга бўлиш усулига боглиқ эмас. Бу тасдиқларнинг исботига биз тўхтамаймиз. N нормал-вектор ҳам инвариант характерга эгадир.

Энди 74-параграфда қаралган сиртларга қайтамиз:

Текислик: $r=xi+yj.\quad dr=dxi+dyj,$

$$\Phi_1=ds^2=dx^2+2\cos\omega\,dx\,dy+dy^2,$$
$$E=1,\ F=\cos\omega,\ G=1,$$
$$\omega=\frac{\pi}{2}\ \text{да}\ F=0,\ ds^2=dx^2+dy^2.$$

Қутб координаталарида:

$$r=\rho e(\varphi),\ dr=d\rho e(\varphi)+\rho e\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi,$$

бундан

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2.$$

Сфера: $r=a[\cos\theta e(\varphi)+\sin\theta k].$

$$dr=a\left[-\sin\theta e(\varphi)\,d\theta+\cos\theta e\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi+\cos\theta d\theta k\right],$$
$$\Phi_1=ds^2=a^2[\cos^2\theta d\varphi^2+d\theta^2].$$

Демак,

$$E=a^2\cos^2\theta,\quad F=0,\quad G=a^2,$$

бунда $F=0$, яъни меридианлар ва параллеллар тикдир.

Айланма сирт: $r=\varphi(u)\,e(v)+\psi(u)\,k.$

$$dr=[\varphi'(u)\,e(v)+\psi'(u)\,k]\,du+\varphi(u)\,e\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv,$$

$$r_u=\varphi'(u)\,e(v)+\psi'(u)\,k,\ r_v=\varphi(u)\,e\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv,$$

$$\Phi_1 = ds^2 = [\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)]\, du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2,$$
$$E = \varphi'^2(u) + \psi'^2(u), \quad F = 0, \quad G = \varphi^2(u).$$

$z = \psi(u) = u$, $x = \varphi(z)$ бўлган хусусий ҳолда, яъни профил чизиқ $x = \varphi(z)$ шаклдаги тенглама билан берилганда:

$$r = \varphi(u)\, e(v) + uk,$$
$$r_u = \varphi'(u)\, e(v) + k, \quad r_v = \varphi(u)\, e\left(v + \frac{\pi}{2}\right)$$

бўлиб, булардан:

$$E = 1 + \varphi'^2(u), \quad F = 0, \quad G = \varphi^2(u).$$

Масалан, $\rho\ (= x) = a \cdot \mathrm{ch}\, \frac{u}{a}$ занжир чизиқни $z\ (= u)$ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган

$$r = a \cdot \mathrm{ch}\, \frac{u}{a}\, e(\varphi) + uk$$

катеноид учун биринчи квадратик форма

$$\Phi_1 = ds^2 = \mathrm{ch}^2 \frac{u}{a}\, du^2 + a^2 \mathrm{ch}^2 \frac{u}{a}\, d\varphi^2. \tag{3}$$

Айланма сирт $z = f(\rho)$ тенглама билан берилса, $x = u = \rho$ фараз қиламиз, у вақтда:

$$r = \rho e(v) + f(\rho)\, k,$$
$$r_\rho = e(v) + f'(\rho), \quad r_v = \rho e\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$E = 1 + f'^2(\rho), \quad F = 0, \quad G = \rho^2,$$
$$\Phi_1 = ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2 + \rho^2 dv^2.$$

Иккала ҳолда ҳам $F = 0$, яъни координат чизиқлари (параллеллар ва меридианлар) ортогоналдир. Охирги тенгликка диққат қилайлик. Агар

$$[1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2 = du^2$$

деб фараз қилинса, у ҳолда du — профил чизиқ $z = f(\rho)$ нинг ёйи узунлиги дифференциалини тасвирлайди, бу ёй бирор параллелдан бошлаб ҳисобланади; $\rho = \mathrm{const}$ га $u = \mathrm{const}$ мос келиб, $u = \mathrm{const}$ ҳам параллелларни ифодалайди. Демак,

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2,$$

яъни

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

Масалан,

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = a\cdot \operatorname{ch}\frac{z}{a}$$

занжир чизиқни ўз асоси атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган катеноид учун $\rho^2 = a^2 + u^2$ бўлиб (72-машққа қаранг), унинг биринчи квадратик формаси қуйидаги шаклни олади:

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2,$$

демак,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2 + u^2.$$

Геликоид: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}(v) + av\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{e}(v), \quad \boldsymbol{r}_v = u\boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + a\boldsymbol{k},$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2 + u^2,$$

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2.$$

Машқлар

148. Қуйидаги сиртларнинг биринчи квадратик формалари топилсин:

1) Доиравий цилиндр $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}(\varphi) + v\boldsymbol{k}$.

2) Доиравий конус $\boldsymbol{r} = \{\cos\alpha\, \boldsymbol{e}(\varphi) + \sin\alpha\boldsymbol{k}\}\, v$.

3) Учи қутбдаги конус $\boldsymbol{r} = v\boldsymbol{l}(u)$.

4) Тор $\boldsymbol{r} = (a + b\cos u)\,\boldsymbol{e}(v) + b\sin u\boldsymbol{k}$.

5) Псевдосфера $\boldsymbol{r} = a\left\{\sin u\boldsymbol{e}(v) + \left[\cos u + \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right]\boldsymbol{k}\right\}$.

6) Тўғри чизиқли сирт

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{l}(u).$$

Жумладан, 136-машқда қаралган уринмалар, бош нормаллар, бинормаллар сиртлари учун: $\boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\tau}(u)$, $\boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\nu}(u)$, $\boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{\beta}(u)$, бунда u — табиий параметр.

7) $\boldsymbol{r} = \sin u\boldsymbol{e}(v) + u\boldsymbol{k}$.

Жавоб: 1) $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dv^2$; 2) $ds^2 = (v\cos\alpha)^2 d\varphi^2 + dv^2$; 4) $ds^2 = b^2du^2 + (a + b\cos u)^2 dv^2$; 5) $ds^2 = a^2\left(\frac{\cos^6 u}{\sin^2 u}du^2 + \sin^2 u\,dv^2\right)$; 6) $ds^2 = (\bar\rho'^2 + 2\bar\rho'\bar e' v + v^2 l'^2)\,du^2 + 2\bar e\bar\rho\, du\,dv + l^2dv^2$

Учта хусусий ҳолда: $ds^2 = (1 + k^2v^2)\,du^2 + 2du\,dv + dv^2$; $ds^2 = [1 + v^2(k^2 + \sigma^2)]\,du^2 + dv^2$; $ds^2 = (1 + v^2\sigma^2)\,du^2 + dv^2$. 7) $ds^2 = (1 + \cos^2 u)\,du^2 + \sin^2 u\,dv^2$.

149. Сиртнинг биринчи квадратик формаси: $ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\,dv^2$ бўлиб, шу сирт устида $u - v = 0$ чизиқ берилган. Бу чизиқ ёйининг узунлиги топилсин.

Жавоб: $s = \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1$.

150. Катеноид устида $u \pm v = 0$ чизиқлар берилган. Улар орасидаги бурчак топилсин.

Кўрсатма. Катеноид учун $ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2$.

Жавоб: $\cos\varphi = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$.

151. $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}(v) + av\boldsymbol{k}$ геликоид устида ётувчи

$$\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + v = \text{const}, \quad \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) - v = \text{const}$$

чизиқларнинг ортогоналлиги исботлансин.

152. $r = a\sqrt{1+u^2}\,i + auj + avk$ сирт ва унинг устида $u = \operatorname{sh} v$ чизиқ берилган. Бу чизиқнинг табиий тенгламалари ёзилсин.

153. Чизиқлар оиласи

$$\frac{dv}{du} = f(u, v)$$

берилган, бунда $f(u, v)$ — узлуксиз функция. Шу оилага „ортогонал" оила топилсин.

Ечиш. Ортогоналликнинг

$$E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

шартидан

$$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{E + F\cdot f(u, v)}{F + G\cdot f(u, v)}$$

ёки

$$\frac{\delta v}{\delta u} = f_1(u, v).$$

Бу эса биринчи тартибли дифференциал тенгламадир. Уни интеграллаб берилган оиланинг ортогонал траекторияларини топамиз.

154. Сиртдаги u чизиқлар ($v = \text{const}$) ва v чизиқлар ($u = \text{const}$) нинг ортогонал траекториялари топилсин.

Жавоб: $E\delta u + F\delta v = 0,\quad F\delta u + G\delta v = 0.$

155. Геликоид устида ётувчи $\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) - v = 4$ чизиқ координата чизиқлари орасидаги бурчакни ҳар бир нуқтада тенг иккига бўлади. Буни исботланг.

156. Изотермик координаталар. Айланма сиртнинг биринчи квадратик формаси учун юқорида ушбу формулани берган эдик:

$$ds^2 = \left[\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)\right] du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2.$$

Бу формуладаги биринчи қўшилувчи — меридиан ёйи дифференциалининг квадратини ифодалайди, уни dl^2 билан белгилаймиз:

$$\left[\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)\right] du^2 = dl^2,$$

у ҳолда:

$$ds^2 = dl^2 + \varphi^2(u)\,dv^2 = \varphi^2(u)\left[\frac{dl^2}{\varphi^2(u)} + dv^2\right].$$

Агар

$$\int \frac{dl}{\varphi(l)} = \xi(u), \quad v = \eta$$

деб фараз қилсак,

$$ds^2 = \varphi^2(\xi)\,[d\xi^2 + d\eta^2]$$

бўлади.

Сиртнинг бу кўринишдаги биринчи квадратик формаси текисликнинг тўғри бурчакли Декарт системасидаги чизиқли элементдан кўпайтувчи билангина фарқланади. ξ ва η — сиртнинг *изотермик параметрлари* дейилади. Масалан, катеноиднинг (3) квадратик формасини изотермик шаклга келтириш осон:

$$ds^2 = a^2\operatorname{ch}^2\xi\,(d\xi^2 + d\eta^2),$$

бунда $\xi = \frac{u}{a}$, $\eta = \varphi$.

157. Тўғри чизиқли $r = \bar\rho(u) + vl(u)$ сиртнинг чизиқли

$$ds^2 = \left(\bar\rho'^2 + 2vl'\bar\rho' + v^2 l'^2\right) du^2 + 2l\bar\rho' du dv + dv^2$$

элементини олиб ва унда u ни табиий параметр сифатида қабул қилиб, ушбу

$$b = l'\rho', \quad c^2 = l'^2, \quad l\rho' = \cos\theta$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда

$$ds^2 = (1 + 2bv + c^2v^2)\,du^2 + 2\cos\theta\,du dv + dv^2.$$

Сиртнинг чизиқли элементи бу сиртдаги (u, v) ва $(u + du, v + dv)$ нуқталар орасидаги масофанинг квадратини беради. Уни қуйидаги шаклда ёзиш мумкинлиги исботлансин:

$$ds^2 = (dv + \cos\theta\,du)^2 + (\sin^2\theta + 2bv + c^2v^2)\,du^2.$$

Агар $dv + \cos\theta\,du = 0$ ва $b + c^2v = 0$ бўлса, ds^2 минимумга эришади (нега?). Демак, ясовчидаги қисилиш нуқтасининг v параметри $v = -\frac{b}{c^2}$ дан аниқланади. Бундай нуқталарнинг геометрик ўрни қисилиш чизиғидир; $b = \rho' l' = 0$ бўлса, $v = 0$ дан иборат йўналтирувчи қисилиш чизиғини ифодалайди (нега?).

158. Тўғри чизиқли сиртнинг ҳамма ясовчилари тайин (йўналтирувчи) текисликка параллел бўлса, у *Каталан сирти* дейилади. Тўғри чизиқли сиртнинг Каталан сирти бўлиш шарти топилсин. Бундай сиртнинг тўла аниқланиши учун, унда ётувчи иккита (йўналтирувчи) чизиқ бўлиши керакми?

Йўналтирувчилари иккита:

$$x^2 + z^2 - 2ax = 0, \qquad y = 0,$$

$$y^2 + z^2 - 2ay = 0, \qquad x = 0$$

айланалардан иборат Каталан сиртининг тенгламаси топилсин.

Кўрсатма. $l(u)$ ясовчи нормал-вектори n дан иборат текисликка доимо параллел бўлса, $nl(u) = 0$, $nl'(u) = 0$, $nl''(u) = 0$ шартлар бажарилади. Булардан:

$$l(u)\, l'(u)\, l''(u) = 0.$$

Жавоб: Сирт икки бўлакдан иборат:

$(x^2 + y^2)^2 + z^2 - 2a(x + y) = 0$ (эллиптик цилиндр),

$$z^4 + z^2[(x - y)^2 - 2a(x + y)] + 4a^2xy = 0.$$

159. Каталан сиртининг[1] ҳамма ясовчилари маълум бир тўғри чизиқ билан кесиша борса, бундай сирт *коноид* дейилади. Бу тўғри (йўналтирувчи) чизиқ йўналтирувчи текисликка тик бўлса, у ҳолда коноид тўғри коноид деб аталади. Геликоид тўғри коноид бўла оладими? Унинг стрикцион чизиғи нимадан иборат? Гиперболик параболоид коноидми?

Коноиднинг шаклини аниқлаш учун йўналтирувчи тўғри чизиқни, текисликни ва яна битта йўналтирувчи чизиқни бериш керак. Масалан, а) йўналтирувчи тўғри чизиқ $y = 0$, $z = h$, йўналтирувчи текислик YOZ ва йўналтирувчи чизиқ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$; б) йўналтирувчи тўғри чизиқ $x = a$, $y = 0$, йўналтирувчи текислик $z = 0$, йўналтирувчи чизиқ $y^2 = 2pz$, $x = 0$.

Жавоб: а) $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{z}{h} - 1\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $a^2y^2 = 2pz(x - a)^2$.

§ 81. Изометрик мослик. Эгиш

1. Умумий мулоҳазалар. Маълум бир сирт берилганда унинг биринчи квадратик формаси топилиб, шу квадратик форманинг коэффициентлари орқали сиртдаги ёй узунлиги, икки чизиқ ора-

[1] Каталан сирти адабиётда баъзан *цилиндроид* дейилади.

сидаги бурчак, соҳанинг юзи аниқланади. Бу хилда иш олиб борилганда, сирт мустақил объект сифатида қаралиб, унинг фазодаги вазиятига эътибор қилинмайди. Текисликнинг ўзини мустақил қараганда ундаги геометрик муносабатлар планиметрияни ҳосил қилганидек, эгри сирт устида қаралган „ўлчашга доир масалалар" унинг ички геометриясини ташкил этади. Биз кўрамизки, бу хоссалар ва уларга тегишли катталиклар биринчи квадратик формага боғлиқдир.

Энди масалани тескари тартибда қўйиб, биринчи квадратик форма сиртни тўла (яъни унинг шаклини) аниқлайдими-йўқми ва ихтиёрий равишда берилган квадратик форманн ўзининг биринчи квадратик формаси сифатида „қабул" қиладиган сирт мавжудми, деган сўроқларни қўйиб, уларга бу параграфда жавоб беришга ҳаракат қиламиз.

Соддалик учун, текширилаётган сиртларни аналитик сиртлар деб, яъни $r(u, v)$ ни аналитик функция деб фараз этамиз.

Таъриф. *Агар икки S_1 ва S_2 сиртнинг нуқталари орасида шундай ўзаро бир қийматли мослик урнатилсаки, бу сиртлардаги ҳар қандай иккита мос эгри чизиқнинг мос ёйлари бир-бирига тенг бўлса, бу сиртлар орасида изометрик мослик урнатилган дейилиб, сиртларнинг узлари ҳам ўзаро изометрик сиртлар дейилади*[1].

S_1 ва S_2 сиртлардан бирини узлуксиз равишда эгиб (деформация қилиб), уни иккинчи сиртга айлантириш мумкин бўлса, у ҳолда бу сиртлар орасидаги нзометрияни *эгилиш* (изгибание) деб айтамиз.

Сирт чўзилмайдиган, лекин эгилувчан (эластик) материалдан тайёрланган ҳолда уни узмасдан ва қатламасдан эгсак, бу сирт устидаги чизиқлар узунлиги, чизиқлар орасидаги бурчаклар, соҳаларнинг юзлари ўзгармайди. Масалан, бир варақ қоғозни ўраб, уни цилиндрга ёки конусга айлантириш — қоғозни эгиш демакдир.

Ҳар қандай (аналитик) сиртни эгиб бўладими? Исталган икки сирт орасида изометрик мослик ўрнатиш мумкинми? Иккинчи саволга салбий жавоб беришга тўғри келади: сферани (ҳатто унинг жуда ҳам кичик қисмини) эгиб, текисликка ёйиш мумкин эмас — сфера билан текислик орасида изометрик мослик йўқ.

Агар сиртнинг чексиз кичик қисми кўзда тутилса, уни умуман айтганда, узлуксиз равишда эгиш мумкин. Бироқ, сирт бутунича қаралганда, узлуксиз эгилишга йўл қўймайдиган ҳоллар бордир. Масалан, барча ёпиқ қаварик сиртлар (сфера, эллип-

[1]) Бундай сиртлар орасида *изометрия мавжуд* деб ҳам айтилади.

соид) — эгилмас сиртлардир. Бу фактларнинг исботи китобимизнинг чегарасидан чиқади.

2. **Эгилувчанлик шартлари.** S_1 ва S_2 сиртларнинг *мос* нуқталари деб, бир хил эгри чизиқли координаталарга эга бўлган нуқталарга айтилади. Шу сабабли, S_1 сиртдаги $u=u(t)$, $v=v(t)$ чизиққа S_2 сиртда худди шундай тенгламалар билан бериладиган чизиқ мос келади[1]). Қисқароқ қилиб айтганда, иккала сиртнинг параметрланиши умумийдир.

Шартга кўра, S_1 ва S_2 сиртлар изометрик, яъни уларнинг бир-бирига мос ёйлари тенгдир.

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{E_1du^2+2F_1du\,dv+G_1dv^2}\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E_2du^2+2F_2du\,dv+G_2dv^2}\,dt. \qquad (1)$$

Бу тенглик исталган $M(t)$ нуқта, яъни исталган t учун бажарилиши лозимлигидан, интеграл остидаги ифодалар бир-бирига айнан тенгдир:

$$\Phi_1=E_1\,du^2+2F_1\,du\,dv+G_1\,dv^2=E_2\,du^2+2F_2\,du\,dv+G_2\,dv^2.$$

Бу шарт исталган $du:dv$ йўналиш учун бажарилиши керак, шу сабабли бу квадратик формаларнинг коэффициентлари тенг:

$$E_1=E_2,\quad F_1=F_2,\quad G_1=G_2. \qquad (2)$$

Икки сиртнинг эгилувчанлиги (изометрияси) учун зарурий ва етарли бўлган (2) шартларни топдик: икки сиртни эгиб бир-бирига ётқизиш мумкин бўлиши учун, улар шундай умумий параметрлашга эга бўлиши зарур ва етарли, бунинг натижасида сиртларнинг мос нуқталаридаги биринчи квадратик формаларининг тегишли коэффициентлари тенг бўлсин.

Бу шартларнинг зарурий бўлиши исботланди. Уларнинг етарли эканлиги ҳам равшан, чунки (2) шартлар бажарилганда, улардан (1) га қайтиш осон, бу эса сиртларнинг изометриклигини билдиради.

Конгруэнт (тенг) сиртлар албатта изометрикдир: бу ҳол ўз-ўзидан равшан бўлиб, диққатга лойиқ эмас. Биз ҳозир шакл жиҳатдан турли бўлсада, изометрик (бир-бирига ётқизилиши мумкин) бўлган сиртларнинг мисолини келтирамиз.

Геликоидни олайлик:

$$x=u\cos v;\quad y=u\sin v;\quad z=av.$$

---

[1]) Бироқ u ва v параметрнинг сон қийматлари тенг бўлса ҳам, сиртларнинг ҳар бирида бу параметрлар турли геометрик маънога эга бўлишлари мумкин.

Бу сиртда $u = \text{const}$ — винт чизиқлар ва $v = \text{const}$ — ясовчилардир. Сиртнинг биринчи квадратик формаси шундан иборат:

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2.$$

Энди катеноидни оламиз:

$$x = \sqrt{a^2 + u'^2}\cos\varphi,\quad y = \sqrt{a^2 + u'^2}\sin\varphi,\quad z = a\cdot\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + u'^2}}{a}.$$

Бунда $u' = \text{const}$ — параллеллар ва $\varphi = \text{const}$ — меридиан (занжир чизиқ) лардир. Катеноиднинг биринчи квадратик формаси:

$$ds^2 = du'^2 + (a^2 + u^2)\,d\varphi^2$$

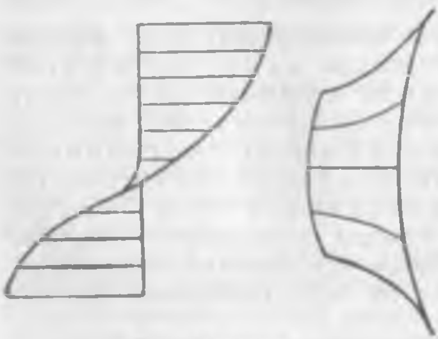
кўринишга эга. Геликоиднинг $M(u, v)$ нуқтасига катеноиднинг шундай $M'(u', \varphi)$ нуқтасини мос келтирайликки, уларнинг эгри чизиқли координаталари тенг бўлсин:

$$u = u';\quad v = \varphi.$$

Бундай ҳолда уларнинг биринчи квадратик формаларининг коэффициентлари тенг бўлади:

$$E_1 = E_2 = 1,\quad F_1 = F_2 = 0,\quad G_1 = G_2 = a^2 + u^2.$$

Демак, геликоиднинг бирор қисми катеноиднинг тегишли қисмига эгилиб, унинг $v = \text{const}$ ясовчилари катеноиднинг $\varphi = \text{const}$ меридианларига ўралади, геликоиднинг $u = \text{const}$,винт чизиқлари эса катеноиднинг параллелларига чексиз кўп марта ўралади (184-чизма).



184-чизма.

Энди биринчи квадратик форма сиртнинг шаклини тўла аниқлайдими, деган саволга жавоб бера оламиз: сирт ёки унинг чексиз кичик соҳаси ўзининг биринчи квадратик формаси билан тўла аниқланмайди, чунки уни эгиш натижасида ҳосил қилинган бошқа шаклдаги сирт ҳам яна ўша биринчи квадратик формага эгадир. (Масалан, геликоид билан катеноид.)

Иккинчи мисол сифатида $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрни олайлик. Цилиндр текисликнинг маълум соҳасига изометрикдир. Бу соҳа XOY текислигида тўғри тўртбурчакдан иборат: $0 < x < a$, $0 < y < a$. *Цилиндрни* $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = v$ тенгламалар билан ифодалаш мумкин. Унинг биринчи квадратик формаси $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dv^2$. Агар $a\,d\varphi = du$ деб фараз қилинса, у ҳолда

$ds^2 = du^2 + dv^2$, $x = u$, $y = v$ тенгликлар билан аниқланган мослик — изометрик мосликдир (чунки текислик учун $ds^2 = dx^2 + dy^2$).

Лекин ўзининг биринчи квадратик формаси билан тўла аниқланадиган чексиз кўп сиртлар синфи ҳам бордир. (Масалан, эллиптик параболоид.) Буни биз исботламаймиз.

§ 82. Ёйилувчи сиртни текисликка ётқизиш

Цилиндр билан конусларни эътиборга олмаганда, ёйилувчи сиртнинг ихтиёрий фазовий чизиқ уринмаларидан тузилганлигини кўрган эдик. Ундай сиртнинг тенгламаси:

$$r = \bar{\rho}(u) + v\bar{\tau}(u)$$

бўлиб, чизиқли элементи:

$$ds^2 = (1 + k^2v^2)\,du^2 + 2du\,dv + dv^2,$$

бунда u — қайтиш қиррасининг табиий параметрини белгилайди.

Чизиқли элементнинг коэффициентлари, қайтиш қиррасининг эгрилигигагина боғлиқ эканини кўриб турибмиз (уларнинг ифодаларига σ бурилма кирмайди); улар $k = k(u)$ функциянинг кўринишига боғлиқдир. Шунинг учун эгрилиги умумий, лекин бурилмалари ҳар хил иккита чизиқни олганимизда, уларнинг уринмаларидан тузилган иккита торснинг изометрик эканини кўрамиз, чунки бундай ҳолда уларнинг чизиқли элементлари умумий бўлади. Энди чизиқнинг эгрилигини ўзгартмасдан, бурилмасини нолга интилтириб деформация қила борсак (k ва σ эркин равишда ўзгаради!), чизиқ эгила бориб яссиликка интилади, унинг уринмалари эса текислик (қисми)ни қоплайди. Сиртнинг ўзи текисликка ётқизилган бўлади.

Цилиндр билан конус учун чизиқли элементлар мос равишда $du^2 + dv^2$ ва $v^2du^2 + dv^2$ га тенг бўлиб, улар текисликнинг Декарт (қутб) координаталаридаги чизиқли элементларидан фарқ қилмайди. Ҳақиқатан, биринчи ҳолда $x = u$, $y = v$ ва иккинчи ҳолда $u = \varphi$, $v = \rho$ десак, $dx^2 + dy^2$ ва $d\rho^2 + \rho^2d\varphi^2$ ҳосил бўлади. Демак, *цилиндр ва конус текисликка изометрик (эгилувчан)дир.*

Хуллас, *учала типдаги ёйилувчи сиртларнинг ҳаммасини текисликка эгиб ётқизиш (ёйиш) мумкин.*

Бундай сирт бир-бирига ёнлашган икки қисмдан иборат бўлгани учун уни текисликка ёйганда, у текисликнинг қайтиш қирраси ташқарисидаги қисмини (икки марта) қоплайди. Маълумки, сиртнинг икки қисмини бир-биридан қайтиш қирраси ажратиб туради (конус ва цилиндр бундан мустасно).

Мисол. Юқоридаги умумий мулоҳазаларни конкрет мисолга — винт чизиқ уринмаларидан тузилган ёйилувчи сиртга қўлланайлик.

Винт чизиқнинг тенгламаси: $\bar{\rho} = ae(u) + \lambda uk$ булиб, унинг уринмаси (147-бетга қаранг):

$$\bar{\rho}' = \bar{\tau} = \frac{ae\left(u + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda k}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}.$$

Уринмалар сиртининг $\bar{r} = \bar{\rho} + v\bar{\tau}$ тенгламаси:

$$r = ae(u) + \lambda uk + \frac{ae\left(u + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda k}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} v$$

кўринишни олади. Бу тенгламани скаляр формада ёзайлик:

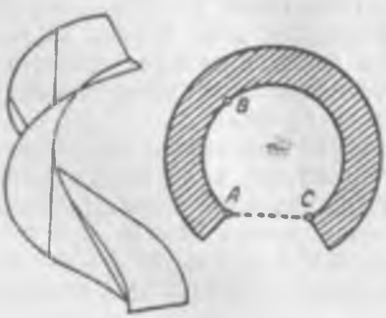
$$x = a\cos u - \frac{av}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \sin u,$$

$$y = a\sin u + \frac{av}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \cos u,$$

$$z = \lambda u + \frac{\lambda v}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}.$$

Бу тенгламалардан $u = \frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}$ нинг ёрдами билан табиий s параметрга ўтиш мумкин.

Бу сиртда $u = \text{const}$ — ясовчилар (винт чизиқнинг уринмалари), $v = \text{const}$ эса — радиуси $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{v^2}{a^2 + \lambda^2}}$ га тенг ва қадами юқоридаги винт чизиқнинг қадамига, яъни $2\pi\lambda$ га тенг яна винт чизиқлардир (149-бетга қаранг).



185-чизма.

Сиртни текисликка ётқизганда винт чизиқ шундай (ясси) чизиққа айланадики, унинг эгрилиги винт чизиқ эгрилигига тенг ва буралмаси нолга тенг бўлади. Текисликда эса эгрилиги узгармас чизиқ фақат айлана бўлиб, унинг радиуси винт чизиқ эгрилигига тескаридир.

Шундай қилиб, винт сиртни текисликка ётқизганда винт чизиқ айланага алмашинади, сиртнинг ўзи эса, шу айлана ташқарисидаги соҳага ёйилиб, уни икки марта қоплайди.

Уринмалар сирти, аксинча, текислик қисмини эгиш йўли билан ҳосил қилиниши мумкин. Бунинг учун (икки варақ қоғозни бир-бири устига қўйиб, уларни бирор ABC айлана бўйлаб қирқамиз. Айлананинг ички қисмини олиб ташлаб, қоғозларни ҳалиги қирқилган чизиқ бўйича тиксак (ёки ёпиштирсак) ва ундан кейин уни очиб эга бошласак, винт сирт ҳосил қилинади (185-чизма). Бу вақтда айлана винт чизиққа алмашинади[1]).

Машқ

160. Ушбу сиртларнинг қисилиш чизиқлари топилсин:

1) $r = ue(v) + f(v)k$ — коноид;

2) $r = ue(v) + (u + v)k$ — коноид;

3) $r = ue(v) + ae\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + avk$.

Координат формада:

$$x = u\cos v - a\sin v,\ y = u\sin v + a\cos v,\ z = av.$$

Жавоб: 1) $u = 0$; 2) OZ ўқи; 3) ясовчилар $v = \mathrm{const}$. Қисилиш чизиғи эса $u = 0$ — винт чизиқдан иборат.

§ 83*. Винт сиртларни, айланма сиртларни, сферани эгиш

1. *Винт сирт* деб, эгри чизиқнинг бирор ўқ атрофида айланиши ва шу билан бирга уша ўқ йўналишида илгариланма ҳаракат қилиши натижасида ҳосил бўладиган сиртга айтамиз. (Иккала ҳаракат тезликлари ўзаро пропорционал деб фараз қилинади.)

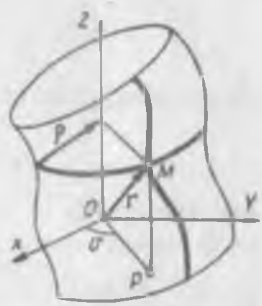
Профил чизиқнинг тенгламаси $z = f(\rho)$ шаклида берилса, винт сиртнинг вектор тенгламаси:

$$r = \rho e(v) + [f(\rho) + mv]k \qquad (1)$$

ёки

$$x = \rho\cos v,\ y = \rho\sin v,\ z = f(\rho) + mv$$

бўлади. Эгри чизиқли координаталар: $\rho = \mathrm{const}$ — винт чизиқлар $v = \mathrm{const}$ — меридианлар (186-чизма).



186-чизма.

Айланма сирт бундай сиртнинг хусусий ҳолидир, у $m = 0$ га мос келади. Геликоид албатта винт сиртдир (у $f(\rho) = 0$ га мос келади).

(1) дан

$$r_\rho = e(v) + f'(\rho)k,\quad r_v = \rho e\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + mk,$$

$$E = 1 + f'^2(\rho),\quad F = mf'(\rho);\quad G = \rho^2 + m^2.$$

[1]) Муфассалроқ: М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия 284—285-бетларга қаранг.

Винт сиртнинг чизиқли элементи:

$$ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2 + 2mf'(\rho)\, d\rho\, dv + (\rho^2 + m^2)\, dv^2. \tag{2}$$

Теорема. *Ҳар қандай винт сирт бирор айланма сиртга эгилади ва унинг винт чизиқлари* ($\rho = \text{const}$) *га айланма сиртнинг параллеллари мос келади; винт чизиқларнинг ортогонал траекториялари меридианларга алмашинади* (Бур теоремаси).

Исбот. Хусусий ҳол, яъни геликоид учун бу теореманинг тўғрилигини § 81 да кўрган эдик: геликоид катеноидга эгилиб, винт чизиқлар параллелларга ва ортогонал траекториялар — ясовчиларга (меридианларга) алмашинган эди.

Винт сиртда винт чизиқлар оиласининг ортогонал траекторияларини топиб (топиш ҳар вақт мумкин!) координат чизиқлари сифатида шу икки оилани оламиз. $\rho = \text{const}$ чизиқлар учун $d\rho : dv = 0:1$ дейиш мумкин. Шу сабабли, ортогоналлик шарти ушбу шаклни олади:

$$F\,du + G\,dv = 0$$

ёки

$$mf'(\rho)\, d\rho + (m^2 + \rho^2)\, dv = 0,$$

бундан эса

$$m \int \frac{f'(\rho)}{m^2 + \rho^2}\, d\rho + v = C.$$

Энди янги ρ_1, v_1 координаталарни қуйидагича киритамиз:

$$\rho_1 = \rho, \quad v_1 = m \int \frac{f(\rho)}{m^2 + \rho_1^2}\, d\rho + v$$

ёки тескарича,

$$\rho = \rho_1, \quad v = v_1 - m \int \frac{f'(\rho)}{m^2 + \rho_1^2}\, d\rho.$$

Булардан

$$d\rho = d\rho_1, \quad dv = dv_1 - \frac{mf'(\rho)}{m^2 + \rho_1^2}\, d\rho_1.$$

Бу ифодаларни (2) га қўйсак, чизиқли элемент формуласи қуйидаги шаклни олади:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{f'^2(\rho_1)\,\rho_1^2}{\rho_1^2 + m^2}\right] d\rho_1^2 + (\rho_1^2 + m^2)\, dv_1^2. \tag{3}$$

Профили $z = \psi(\bar\rho)$ бўлган шундай айланма сиртни танлаб олиш мумкинки, унинг чизиқли элементи:

$$ds_1^2 = [1 + \psi'^2(\bar\rho)]\, d\bar\rho^2 + \bar\rho^2 d\bar v^2 \tag{4}$$

бўлиб, винт сиртнинг (3) чизиқли элементи билан айнан бир хил бўлсин; бунинг учун (3) да қуйидагича фараз қилиш кифоя:

$$v_1 = h\bar{v}, \quad \frac{\bar{\rho}^2}{h^2} = m^2 + \rho_1^2, ^{1)} \tag{5}$$

бунда $h = \text{const}$. Бунинг натижасида (3) даги иккинчи ҳад $\bar{\rho}^2 d\bar{v}^2$ шаклини олади. Бу тенгликларнинг иккинчиси $\bar{\rho}$ билан ρ_1 орасидаги боғланишни беради, биринчиси эса $\psi(\bar{\rho})$ функциянинг кўринишини аниқлайди[2]). (3) тенгликларга ихтиёрий h ўзгарувчи кирганлиги сабабли, берилган винт сиртга изометрик бўлган чексиз кўп айланма сиртлар мавжуддир. Теорема исбот бўлди.

Винт сиртга мисол қилиб қийшиқ геликоидни олиш мумкин: у шундай геликоидки, унинг профили (тўғри чизиқ) винт чизиқнинг ўқи билан доимо ўткир бурчак остида кесишади (187-чизма).

187-чизма.

Бу сиртнинг тенгламаси:

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}(v) + (\lambda\rho + m)\boldsymbol{k} \quad (\lambda \text{ ва } m = \text{const})$$

ёки

$$x = \rho\cos v, \quad y = \rho\sin v, \quad z = \lambda\rho + m.$$

Агар ясовчи ўққа тик, яъни $\lambda = 0$ бўлса, юқорида кўриб ўтилган тўғри геликоид ҳосил қилинади. У минимал сиртдир.

Машқ

161. OZ ўқи билан қийшиқ геликоид α бурчак ташкил қилган бўлса, уни бир паллали айланма гиперболоидга ёткизиш мумкин.

Кўрсатма. Ясовчиларнинг тенгламаси: $z = \rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ шаклда олинсин. У ҳолда

$$\bar{\rho}^2 = h^2(\rho^2 + m^2), \quad (1 + \psi'^2)\,d\bar{\rho}^2 = \left(1 + \frac{\rho^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha}{\rho^2 + m^2}\right)d\rho^2.$$

---

1) Бу ерда $\bar{\rho}$, $\bar{v}$ — янги ўзгарувчиларни белгилайди.

2) Ҳақиқатан, $h^2(m^2 + \rho_1^2) = \bar{\rho}^2$ туфайли, (3) даги биринчи қўшилувчи $U d\bar{\rho}^2$ шаклини олади, бунда U ҳарфи билан $\bar{\rho}$ нинг функцияси белгиланган. (4) ни ҳосил қилиш мақсадида $U = 1 + \psi'^2(\bar{\rho})$ дейиш кифоя. Бундан $\frac{d\psi(\bar{\rho})}{d\bar{\rho}} = \sqrt{U - 1}$ функциянинг кўриниши аниқланади, яъни биз меридианнинг тенгламасини топган бўламиз:

$$z = \int \sqrt{U - 1}\, d\bar{\rho}.$$

Агар $h = \operatorname{ctg}\alpha$ фараз қилсак,

$$\psi'(\bar{\rho}) = \frac{\bar{\rho}\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\bar{\rho}^2 - m^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}$$

бўлади, бундан эса

$$\frac{x^2+y^2}{m^2\operatorname{ctg}^2\alpha} - \frac{z^2}{m^2} = 1.$$

Бу тенглама бир паллали айланма гиперболоидни ифодалайди.

2. *Айланма сиртни эгиш.* Энди айланма сиртни эгиш масаласига ўтиб, берилган айланма S сиртга эгилувчи шундай айланма сиртларни топамизки, уларнинг меридианлари S нинг меридианларига алмашинсин. Агар шундай айланма сиртлар топилса, уларнинг параллеллари ҳам S нинг параллелларига алмашинади, чунки параллеллар меридианларнинг ортогонал траекторияларидир. Эгиш вақтида бурчаклар ўзгармайди.

Айланма сирт S ушбу

$$r = \rho e(v) + f(\rho)k$$

тенглама билан берилган. Унинг чизиқли элементи:

$$ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]\,d\rho^2 + \rho^2 dv^2.$$

Изланаётган айланма сирт S_1 эса:

$$r_1 = \rho_1 e(v_1) + f_1(\rho_1)k$$

тенглама билан берилсин ва унинг чизиқли элементи

$$ds_1^2 = [1 + f_1'^2(\rho_1)]\,d\rho_1^2 + \rho_1^2 dv_1^2$$

бўлсин.

Шартга кўра, $\rho = \text{const}$ параллеллар $\rho_1 = \text{const}$ параллелларга ва $v = \text{const}$ меридианлар $v_1 = \text{const}$ меридианларга алмашинади, яъни

$$\rho_1 = \varphi(\rho), \quad v_1 = \psi(v)$$

ва чизиқли элементлар тенг бўлади:

$$[1 + f'^2(\rho)]\,d\rho^2 + \rho^2 dv^2 = [1 + f_1'^2(\rho_1)]\,d\rho_1^2 + \rho_1^2 dv_1^2. \qquad (6)$$

(4) дан $d\rho_1 = \varphi'(\rho)\,d\rho$, $dv_1 = \psi'(v)\,dv$ келиб чиқади, буларни (5) га қўямиз:

$$[1 + f'^2(\rho)]\,d\rho^2 + \rho^2 dv^2 = [1 + f_1'^2(\rho_1)]\,\varphi'^2(\rho)\,d\rho^2 + \psi'^2(v)\,\rho_1^2 dv^2. \qquad (7)$$

Берилган сирт устидаги эгри чизиқли ρ ва v координаталар — эркли ўзгарувчилардир, демак, уларнинг $d\rho$ ва dv дифференциаллари орасида ҳеч қандай боғланиш йўқ, шу сабабли (7) тенгликнинг $d\rho^2$ ва dv^2 олдидаги коэффициентлари нолга айланиши керак, бундан:

$$1 + f'^2(\rho) = [1 + f_1'^2(\rho_1)]\,\varphi'^2(\rho) \qquad (8)$$

ва

$$\rho = \psi'(v)\rho_1, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \psi'(v). \tag{9}$$

(9) тенгликдан $\psi'(v) = \text{const}$ деган хулосага келамиз, чунки унинг чап ва ўнг томони бир-бирига боғлиқ бўлмаган икки ўзгарувчининг функциясидир. $\psi'(v) = \text{const} = \frac{1}{n}$ деб фараз қилсак, $\rho_1 = n\rho$ ёки

$$\rho_1 = \varphi(\rho) = n\rho, \quad v_1' = \psi'(v) = \frac{1}{n}$$

ҳосил қилинади, бунда $n = \text{const}$. Интеграллаш ўзгармасини ноль фараз этиш билан охирги тенгламани интегралласак,

$$v_1 = \psi(v) = \frac{v}{n}$$

вужудга келади. Бизнинг мақсадимиз $z = f_1(\rho_1)$ функцияни топишдир. Шу мақсадда $\varphi'(\rho) = n$ ни (8) тенгламага қўямиз:

$$1 + f'^2(\rho) = [1 + f_1'^2(\rho_1)]\, n^2 \quad \text{ёки} \quad n^2 f_1'^2(\rho_1) = 1 + f'^2(\rho) - n^2;$$

бу тенгламада

$$f_1'(\rho_1) = \frac{df_1}{d\rho_1} = \frac{df_1}{d\rho}\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{df_1}{d\rho},$$

демак,

$$\left(\frac{df_1}{d\rho}\right)^2 = n^2 f_1'^2(\rho_1) = 1 - n^2 + f'^2(\rho),$$

бундан

$$df_1(\rho_1) = \sqrt{1 - n^2 + f'^2(\rho)}\, d\rho$$

ёки

$$z_1 = f_1(\rho_1) = \int \sqrt{1 - n^2 + f'^2(\rho)}\, d\rho. \tag{10}$$

S_1 нинг профил чизиғи мана шу тенгламага эгадир.

Изланган S_1 сиртнинг вектор тенгламаси:

$$\boldsymbol{r} = n\rho\boldsymbol{e}\left(\frac{v}{n}\right) + \int \sqrt{1 - n^2 + f'^2(\rho)}\, d\rho\boldsymbol{k}$$

ва параметрик тенгламалари:

$$x = n\rho\cos\frac{v}{n}, \quad y = n\rho\sin\frac{v}{n}, \quad z_1 = \int \sqrt{1 - n^2 + f'^2(\rho)}\, d\rho.$$

Бу тенгламалардан S га ёйилувчи S_1 сиртнинг характери тўғрисида тасаввур олиш мумкин; биринчи S сирт ўзининг параллели атрофида бир марта тўла айланса, яъни v бурчак 0 дан 2π гача ўзгарса, унга мос келган иккинчи S_1 сирт 0 дан

$\frac{2\pi}{n}$ гача айланади; шу билан бирга, S нинг ўқидан ρ масофада турган M нуқта S_1 нинг ўқидан $\rho_1 = n\rho$ масофада туради. Демак, $n > 1$ да S сирт S_1 га ёйилиш учун кенгайиши керак. S сирт бу ҳолда S_1нинг фақат бир қисмини қоплайди. $n < 1$ да эса S сирт қисилиши керак ва у S_1 га ёйилганда уни бир неча марта қоплай олади.

3. *Сферани эгиш.* Бутун сферани эгишнинг мумкин эмаслиги исботланган[1]).

Демак, эгиш масаласини сферанинг бирор бўлагига нисбатан қўйиш мумкин. Соддалик мақсадида сферанинг радиусини бирга тенг деб фараз қиламиз. Сфера (ярим) айланани айлантириш натижасида ҳосил қилиниши мумкин. Меридиан сифатида

$$z^2 + \rho^2 = 1$$

айланани оламиз; бу тенгламадан:

$$z = f(\rho) = \sqrt{1-\rho^2}, \quad f'(\rho) = -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Юқоридаги (10) формулага асосан, эгилган сиртнинг меридианини аниқлаш учун, шу формулага $f'(\rho)$ нинг ифодасини қўйиш керак, у ҳолда:

$$z_1 = \int \sqrt{\frac{1-n^2+n^2\rho^2}{1-\rho^2}}\, d\rho. \tag{11}$$

Бу интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмаса ҳам, шарга ётқизиладиган айланма сиртнинг шакли (профили) ҳақида тасаввур бера олади.

Икки ҳолни текширайлик.

а) $n > 1$ ёки $1 - n^2 < 0$. (11) даги интеграл ҳақиқий бўлиши учун ушбу тенгсизликлар бажарилиши керак:

$$n^2\rho^2 > n^2 - 1, \ \rho^2 < 1,$$

яъни:

$$\frac{n^2-1}{n^2} < \rho^2 < 1.$$

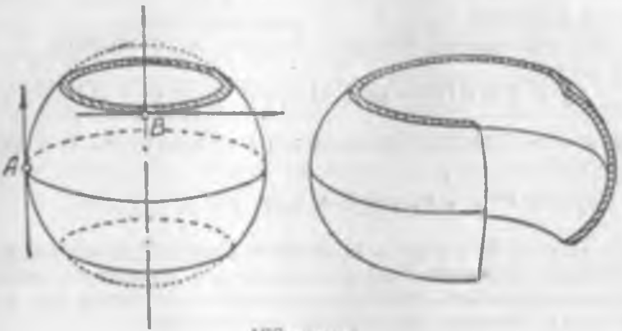
Демак, радиуси $\rho = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$ га тенг икки айлана орасидаги шар камаригина эгилиши мумкин (188-чизма). Унинг меридиани OZ ўқи билан кесишмайди. Чизмадаги A нуқтада меридианга ўтказилган уринма OZ ўқига параллел, B нуқтадаги уринма эса OZ ўқига тикдир. (Буни исботланг!)

---

[1]) В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, М, 1935, § 91.

б) $n < 1$. Бу ҳолда доимо $1 - n^2 + n^2\rho^2 > 0$, шунинг учун z_1 нинг ифодаси $0 < \rho < 1$ шартда мусбатдир; $\rho = 1$ да A нуқта ҳосил бўлади, унда уринма OZ га параллелдир:

$$\frac{dz_1}{d\rho_1} = \frac{1}{n}\frac{dz_1}{d\rho} \to \infty, \quad \rho_1 = n.$$



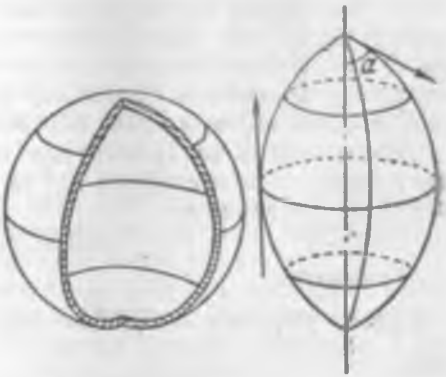
188-чизма.

$\rho = 0$ бўлса,

$$\frac{dz_1}{d\rho_1} = \frac{1}{n}\frac{dz_1}{d\rho} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}, \quad \rho_1 = 0.$$

Бу ҳолда меридиан OZ ўқи билан кесишади ва унга ўтказилган уринма OZ ўқи билан ўткир α бурчак ташкил қилади: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}$.

Иккала ҳолда ҳам шар камаринигина эгиш мумкинлигини кўрдик (189-чизма).



189-чизма.

Машқлар

162. Винт сирт (коноид)

$$r = \rho e(v) + (\rho + v)\,k$$

нинг айланма гиперболоид

$$r = \rho_1 e(v_1) + (\sqrt{\rho_1^2 - 1})\,k$$

га эгилиши учун, уларнинг нуқталари орасида

$$v_1 = v + \operatorname{arc\,tg}\rho, \quad \rho_1^2 = \rho^2 + 1$$

кўринишдаги мослик ўрнатиш кераклиги исботлансин.

Кўрсатма. Бу сиртларнинг чизиқли элементлари:

$$ds^2 = 2\,d\rho^2 + 2\,d\rho\,dv + (\rho^2 + 1)\,dv^2, \quad ds_1^2 = \frac{2\rho_1^2 - 1}{\rho_1^2 - 1}\,d\rho_1^2 + \rho_1^2\,dv_1^2.$$

163. Винт сирт

$$r = \rho e(v) + a\left(\ln\frac{\rho}{a} + v\right)k$$

нинг айланма сирт

$$r = \rho_1 e(v_1) + a\sqrt{2}\,\ln\left(\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - a^2}\right)$$

га эгилишини исботланг ($\rho_1^2 = \rho^2 + a^2$ фараз қилинсин).

164. Ушбу сиртларнинг ёйилувчи эканлиги исботлансин:

$$\text{а) } r = e(v) + (u+v)\,e\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + (u+2v)k$$

ёки $x = \cos u - (u+v)\sin v,\ y = \sin v + (u+v)\cos v,\ z = u + 2v.$

$$\text{б) } x = u^2 + \frac{1}{8}v,\ y = 2u^3 + uv,\ z = u^4 + \frac{2}{3}u^2v.$$

Кўрсатма. а) $N \parallel e(v) + k$, яъни N фақат битта ўзгарувчига боғлиқ.

165. Фазовий чизиқнинг бош нормалларидан тузилган (чизиқли) сиртнинг ёйилучан эмаслигини исботланг. Бинормалга нисбатан ҳам шу масала.

Кўрсатма. Тегишли сиртларнинг тенгламалари:

$$r = \bar{\rho}(s) + v\bar{\nu}(s),\quad r = \bar{\rho}(s) + v\bar{\beta}(s).$$

Бу ерда $\bar{\nu}\,\dot{\bar{\nu}}\,\dot{\bar{\rho}}$ ва $\bar{\beta}\ \ \dot{\bar{\rho}}$ аралаш кўпайтмаларнинг нолга тенг эмаслиги исботлансин.

§ 84*. Конформ мослик. Картографик масала

1. Изометрик сиртлардаги мос чизиқ (ёй)лар, бурчаклар, юзлар ўзаро тенг эди. *Параметрланиши умумий бўлган икки S ва S_1 сирт орасидаги мослик натижасида тегишли чизиқлар орасидаги бурчакларгина ўзаро тенг бўлса, бундай мослик сиртларнинг* ***конформ мослиги*** *дейилади.*

Икки сирт S ва S_1 конформ мосликда бўлиши учун уларнинг чизиқли элементлари ds^2 ва ds_1^2 пропорционал бўлиши зарур ва етарлидир:

$$ds^2 = \lambda^2 ds_1^2.$$

Ҳақиқатан,

$$E_1du^2 + 2F_1du\,dv + G_1dv^2 = \lambda^2(u, v)\,(E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2)$$

ёки

$$E_1 = \lambda^2E,\ F_1 = \lambda^2F,\ G_1 = \lambda^2G$$

шартлар бажарилса, у ҳолда бу сиртлар устида ётган икки жуфт мос чизиқлар орасидаги тегишли бурчаклар тенг бўлади, чунки бу бурчаклар учун чиқарилган

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta u}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

формулага E, F, G, E_1, F_1, G_1 нинг ифодаларини қўйганда, λ^2 қисқариб кетади. Бу сон *бузилиш* (буришиш) *коэффициенти* дейилади.

Конформ мосликнинг яна бир ажойиб хоссаси шуки, S ва S_1 *сиртлардаги етарлича кичик мос соҳалар ўзаро ўхшашдир.*

Изометрик мослик конформ мосликнинг $\lambda^2 = 1$ га тўғри келган хусусий ҳолидир. Берилган S сиртга эгилувчи сиртлар унга изометрик бўлган сиртлар синфини ташкил этади. Масалан, текисликка ётқизилиши мумкин бўлган сиртлар ёйилувчи сиртлар синфини ҳосил қилади. Хуллас S ва S_1 сиртларнинг изометрик мослиги уларнинг конформ мослигига қараганда кучлироқ талабдир, чунки биринчи ҳолда учта тенглик:

$$E_1 = E,\ F_1 = F,\ G_1 = G,$$

иккинчи ҳолда эса иккита тенглик:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}$$

бажарилиши керак. Аниқроқ қилиб айтганда, ушбу теоремани исботлаш мумкин: *агар иккита регуляр S ва S_1 сиртда ихтиёрий икки M ва M_1 нуқта олинган бўлса, у ҳолда ҳамма вақт шундай конформ $(u, v) \to (u_1, v_1)$ мослик мавжудки, у M нинг бирор атрофини M_1 нинг қандайдир атрофига акслатади (қисқача: ихтиёрий иккита регуляр сиртни бир-бирига (локал) конформ акслатиш мумкин).*

Бу теоремани исботлаш учун ҳар қандай сиртни текисликка конформ акслатиш мумкинлигини исботласак бас, чунки текисликка конформ аксланувчи икки сирт ўзаро ҳам конформ аксланади. Охирги тасдиқни исботлаш учун эса ҳар қандай сиртнинг чизиқли элементини изотермик шаклга, яъни ушбу

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda^2(\alpha, \beta)\,(d\alpha^2 + d\beta^2) \qquad (1)$$

кўринишга келтириш мумкинлигини исботлаш кифоя. (1) тенгликнинг ўнг томони — текисликнинг қутб системасидаги чизиқли элементининг ўзгинасидадир (249-бетга қаранг).

Айланма сиртни доимо текисликка конформ акслатиш мумкин. Ҳақиқатан, $r = \rho e(v) + f(\rho)\,k$ сиртнинг чизиқли элементини биз юқорида (252-бет) изотермик шаклга келтирдик. Ўша муҳокамаларни бир оз бошқа шаклда такрорлайлик. Бу сиртнинг чизиқли элементи

$$ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]\,d\rho^2 + \rho^2 dv^2,$$

агар бу ерда $[1 + f'(\rho)]\,d\rho^2 = du^2$ деб фараз қилинса, у ҳолда (u — меридиан ёйи):

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 du^2,\quad ds^2 = \rho^2\left(\frac{du^2}{\rho^2} + dv^2\right).$$

Энди u ва v ўрнига u_1 ва v параметрларни қуйидагича киритайлик:

$$du_1 = \frac{du}{\rho}, \quad u_1 = \int \frac{du}{\rho},$$

у ҳолда:

$$ds^2 = \rho^2 (du_1^2 + dv^2). \tag{2}$$

Агар $(u_1, v) \to (\xi, \eta)$ мосликни қуйидагича қабул этсак:

$$\xi = u_1, \ \eta = v,$$

яъни

$$\xi = \int \frac{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}{\rho} d\rho, \ \eta = v$$

фараз қилсак, айланма сиртнинг (2) чизиқли элементи текисликнинг ξ, η Декарт координаталаридаги чизиқли элементи

$$ds_1^2 = d\xi^2 + d\eta^2 \tag{3}$$

дан фақат ρ^2 кўпайтувчи билан фарқланади. Демак, айланма сирт текисликка конформ аксланади, унинг $\rho = \text{const}$ параллеллари ва $v = \text{const}$ меридианлари мос равишда η ва ξ ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқларга аксланади; шу билан, айланма сиртнинг *картаси* ясалди деймиз.

Ер юзини сферик сирт деб қабул қилсак, унинг географик u ва v координаталарига ($u = \text{const}$ — п а р а л л е л, к е н г л и к ва $v = \text{const}$ — м е р и д и а н, у з о қ л и к) нисбатан тенгламаси

$$\boldsymbol{r} = R\,[\cos u\, \boldsymbol{e}(v) + \sin u\, \boldsymbol{k}]$$

бўлиб, уни айланма сирт деб қараш мумкин. Унинг чизиқли элементи

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u\, dv^2). \tag{4}$$

Юқоридаги муҳокамаларни (4) тенгламага қўлланайлик:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 u \left(\frac{du^2}{\cos^2 u} + dv^2 \right).$$

Энди

$$\frac{du}{\cos u} = d\xi, \ v = \eta,$$

яъни

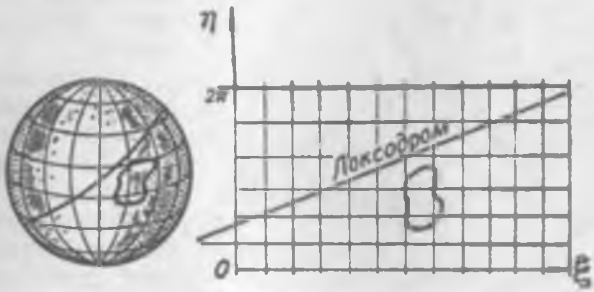
$$\xi = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \ \eta = v \tag{5}$$

деб фараз қилсак, сферанинг ξ ва η га нисбатан тузилган

$$ds^2 = R^2 \cos^2 u\, (d\xi^2 + d\eta^2)$$

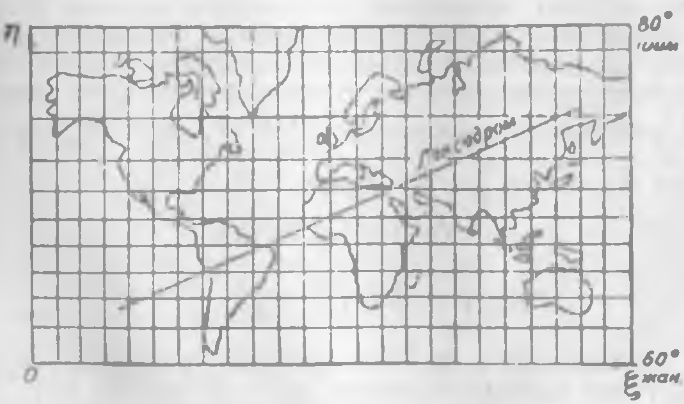
чизиқли элементининг коэффициентлари текисликнинг ξ ва η га нисбатан тузилган (3) чизиқли элементининг коэффициентларига пропорционал бўлади. Шу сабабли (5) формулалар билан аниқланган мослик *Меркатор проекцияси* дейилиб, ер юзининг текисликка *конформ аксини* (тасвирини) беради. Сферанинг меридианлари $O\eta$ ўқига, параллеллари эса $O\xi$ ўқига параллел тўғри чизиқларга алмашинади. Бутун ер юзини акслатиш учун $0 < v < 2\pi$ ва $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ деб олиш керак, у ҳолда ξ ва η координаталар ушбу чегараларда ўзгаради:

$$0 < \eta < 2\pi, \; -\infty < \xi < \infty \quad \text{(190-чизма)}.$$



190-чизма.

191-чизмада ер юзининг 60° ли жанубий кенглигидан 80° ли шимолий кенглигигача бўлган қисмининг картаси келтирилган[1]).



191-чизма.

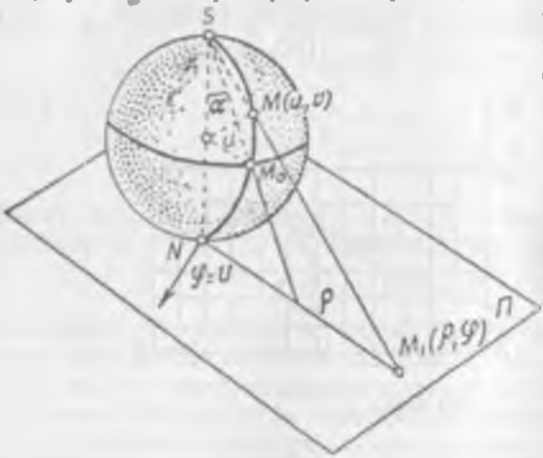
Бу картада сферанинг локсодроми (239-бетга қаранг) $O\xi$ ўқига параллел тўғри чизиқларни бир хил бурчак остида кесиб ўтадиган тўғри чизиққа алмашинади.

---

[1]) В. Р. Каган, Основы теории поверхностей, ч II, 163-бет.

2. *Стереографик проекция.* Ернинг қутбларига яқин соҳаларини (масалан, Антарктикани) текисликда Меркатор проекцияси ёрдами билан тасвирлаш — картасини ясаш ўнғайсиздир. Шунинг учун бундай ҳолларда бошқа конформ мослик ишлатилади.

Сферанинг бирор қутбдан экваториал текисликка проекцияси, унинг *стереографик проекцияси* дейилади. Экваториал текислик ўрнига унга параллел текислик олинса ҳам тасвир ушанинг ўзи бўлади (192-чизма).



192-чизма.

Сферанинг географик координаталари u ва v бўлсин. Сферадаги нуқталарни бу сферанинг шимолий қутбидан жанубий қутбидаги уринма текислигига проекциялайлик. $M(u, v)$ нуқта M_1 нуқтага проекцияланган бўлсин. Бу M_1 нуқтанинг вазиятини ҳалиги текисликда қутб системасига нисбатан аниқлаймиз. Системанинг қутбини N қутбда, қутб ўқини эса (чизмада кўрсатилмаган) бошланғич меридиан текислигида олайлик. У ҳолда M_1 нуқтанинг қутб бурчаги M нуқтанинг узоқлигига тенг бўлади: $\varphi = v$. Қутб радиусини NSM_1 учбурчакдан аниқлаш осон. $\overset{\frown}{NM} = \overset{\frown}{NM_0} + \overset{\frown}{M_0M} = \frac{\pi}{2} + u$.

Аммо $\alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{NM} = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}$. Демак,

$$NM_1 = \rho = 2R\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

ёки

$$\rho = 2R\,\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (6)$$

П текисликнинг ρ ва φ га нисбатан тенгламаси $r = \rho e(\varphi)$ бўлиб, унинг чизиқли элементи: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ ёки

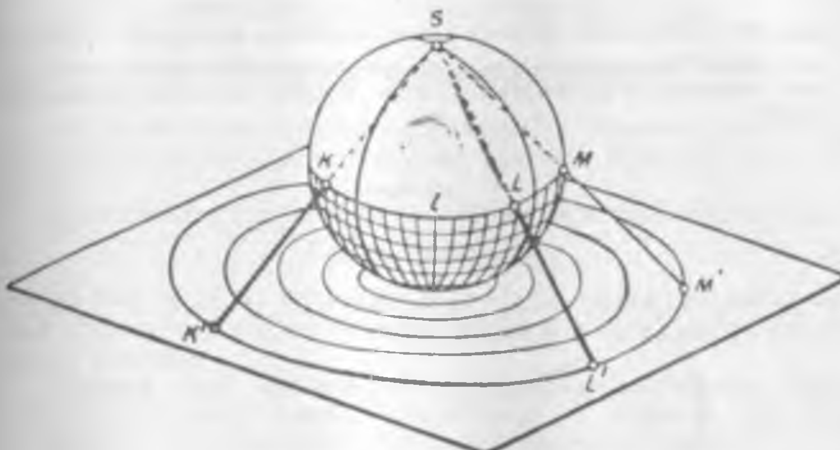
$$ds^2 = \rho^2\left[(d\,\lg\rho)^2 + d\varphi^2\right].$$

Энди (6) дан $\lg\rho = \lg 2R + \lg\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, бу ердан эса $d\lg\rho = \frac{du}{\cos u}$; буни ds^2 нинг ифодасига қўямиз: $ds^2 = \rho^2\left(\frac{du^2}{\cos^2 u} + d\varphi^2\right)$ ёки

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2\varphi}\left(du^2 + \cos^2 u\, d\varphi^2\right).$$

Бу ифода сферанинг чизиқли элементи $ds^2 = R^2 (du^2 + \cos u dv^2)$ га пропорционалдир. Демак, сфера билан текислик орасида ушбу

$$\rho = 2R\,\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi = v$$



193-чизма.

формулалар ёрдами билан мослик ўрнатсак, сферанинг текисликда конформ акси (тасвири) ҳосил қилинади. Бу мосликда сферанинг $u = \text{const}$ параллеллари текисликнинг концентрик $\rho = \text{const}$ айланаларнга, сферанинг $v = \text{const}$ меридианлари эса N қутбдан чиққан тўғри чизиқларга аксланади (193-чизма). Сферанинг текисликда ҳосил қилинган бундай проекцияси унинг *стереографик проекцияси* дейилади. 194-чизмада шимолий қутбга яқин соҳанинг стереографик проекцияси келтирилган.

194-чизма.

Машқ

166. Икки текисликнинг гомотетияси ва, шунингдек инверсион мослиги конформ аксланишдир. Бу исботлансин.

Кўрсатма. Гомотетия: $R = \lambda r$, инверсия эса $R = \frac{r}{r^2}$ $\left(\text{ёки } X = \frac{x}{x^2 + y^2},\ Y = \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$. Булардан биринчи ҳолда $dR = \lambda dr$ ёки $dS^2 = \lambda^2 ds^2$; иккинчи ҳолда эса $dR = \frac{r^2 dr - 2r r dr}{r^4}$. Буни квадратга кўтарганда

$$dR^2 = \frac{r^4 dr^2 - 4r^2 r dr\, dr + 4r^4 dr}{r^8};$$

агар $rdr = rdr$ тенглик (36-бетга қаранг) эътиборга олинса, $dR^2 = \frac{1}{r^4} dr^2$ келиб чиқади. Текисликларнинг чизиқли элементлари пропорционал, демак, уларнинг инверсион ва шунингдек гомотетик мослиги конформ мосликлардан иборат.

Ўн учинчи боб

ЎРАМА СИРТЛАР. ЁЙИЛУВЧИ СИРТЛАР

§ 85. Сиртлар оиласининг ўрамаси

Бир параметрли сиртлар оиласининг[1]) ўрамаси тушунчаси чизиқлар назариясидаги тушунча сингари вужудга келтирилади.

Бир параметрли регуляр сиртлар оиласи берилган бўлсин:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{1}$$

бунда $F(x, y, z, \alpha)$ функция $W\{x, y, z\}$ соҳада регуляр функция бўлиб, шу соҳада учинчи тартибгача ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

Таъриф. *Бир параметрли* (1) *сиртлар оиласининг ўрамаси деб шундай сиртга айтамизки, у ўзининг ҳар бир нуқтасида шу оиланинг тайин бир сиртига уринади.*

Уриниш нуқтаси ўрама ва оиланинг сирти учун о д д и й н у қ т а деб фараз қилинади.

Таърифга кўра, ўрама сиртнинг ҳ а р б и р нуқтасига оиланинг битта сирти мос келади: ўрама бўйлаб ҳаракат қилинса, оиланинг янги-янги сиртлари вужудга келади, бошқача айтганда, α параметр ўзгара боради, демак, бу параметр ўрамадаги $M(x, y, z)$ нуқтанинг бирор функциясидир:

$$\alpha = \alpha(x, y, z).$$

Ўрама (E) сирт мавжуд деб фараз қиламиз ва уни аниқлаш усулини берамиз. Оила тенгламасига $\alpha(x, y, z)$ ни қўйсак, айният ҳосил қилинади: $F(x, y, z, \alpha(x, y, z)) \equiv 0$. Буни α бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \tag{2}$$

ёки

$$\overline{\nabla F} \cdot dr + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0. \tag{3}$$

[1]) Сиртларнинг бир параметрли оиласи дейиш ўрнига биз шу терминни ишлатдик.

Оиланинг ҳар бир сирти учун α ўзгармасдир, шу сабабли (1) ни дифференциалласак

$$\overline{\nabla F} dr = 0 \tag{4}$$

бўлади. Бироқ иккала сиртнинг умумий M нуқтаси оддий бўлгани учун; $\overline{\nabla F} \neq 0$. Энди, шартга кўра, шу нуқтада ҳам оила сирти учун, ҳам ўрама учун $\overline{\nabla F}$ умумийдир (улар умумий уринма текисликка эга), демак, (2) дан $\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0$. Аммо ўрама сирт бўйлаб ҳаракат қилганда $d\alpha \neq 0$, чунки ўраманинг нуқтасидан нуқтасига ўтганда, α параметр ўзгара боради, шунинг учун $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Хуллас, **оиланинг ўрамаси мавжуд бўлса, унинг нуқталари иккита тенгламани қаноатлантиради:**

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \tag{5}$$

Бу икки тенгламадан α йўқотилса, ўраманинг координат формадаги тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Ўраманинг мавжудлиги учун (5) шартлар фақат зарурий бўлганидан, (6) тенглама, умуман айтганда, ўрамадан бошқа сиртларни ҳам ифодалаши мумкин. Шу сабабли уни мустақил равишда қараганда, у оиланинг (D) *дискриминант* сирти дейилади (195-чизма). Бу сиртнинг тенгламасини (6) шаклда ёздик. Бу сирт бўйлаб силжиганда тўртта x, y, z, α ўзгарувчи иккита тенглама билан боғланган бўлади. Шунинг учун бу тенгламалардан тўртта ўзгарувчини иккита эркли u ва v параметрларнинг функциялари қилиб ифодаласак, дискриминант сиртнинг параметрик тенгламалари келиб чиқади.

195-чизма.

Юқоридаги муҳокамалардан равшанки, урама сирт дискриминант сирт таркибига киради. Аксинча, дискриминант сиртнинг оила сиртларидаги махсус нуқталардан холи бўлган қисмлари, албатта, ўрамани тасвирлайди. Охирги тасдиқни исботлаш ҳам осон. Дискриминант сирт бўйлаб силжиганда (3) ва (5) тенгликлар кучга эгадир, демак, (4) тенглик ҳосил қилинади, шунинг учун оила сиртнинг $\overline{\nabla F}$ нормали (D) сирт бўйича силжиб борган dr векторга тик бўлиб, иккала сиртнинг уринма текисликлари бир хилдир. Биз ўрама нуқталарининг оддий ($\overline{\nabla\varphi} \neq 0$) эканини эслатиб ўтамиз.

α параметрнинг ҳар бир қийматида (5) тенгламалар иккита сиртни ифодалайди. Бу сиртлар кесишса, кесишиш чизиғи оила сиртининг *характеристикаси* дейилади. Дискриминант (ва ўрама) сирт оила сиртларининг характеристикаларидан тузилгандир. Оила сиртининг характеристикаси ажойиб хоссага эга: ўрама сирт оила сиртига характеристика бўйлаб уринади, чунки унинг нуқталарида α ўз қийматини сақлаб, ўраманинг (5) тенгламаларини қаноатлантиради.

196-чизма.

Оиланинг барча характеристикалари эгри чизиқларнинг бир параметрли оиласини ташкил қилади. Характеристикаларнинг ўрамаси мавжуд бўлса, у сиртлар оиласининг *қайтиш қирраси* дейилади (196-чизма). Унинг тенгламаси $r = r(t)$ бўлсин.

***Теорема.** Қайтиш қиррасининг нуқталари қуйидаги учта тенгламани қаноатлантиради:*

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0. \qquad (7)$$

Исбот. Ҳақиқатан, қайтиш қиррасининг ҳар бир нуқтаси тайин характеристикага қарашлидир[1]), шу сабабли, $r = r(t)$ ни [ёки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ни] (5) га қўйганда иккита айният ҳосил қилинади. Унинг иккинчисини t бўйича дифференциаллайлик:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\frac{d\alpha}{dt} = 0. \qquad (8)$$

Қайтиш қиррасининг $\frac{dr}{dt}$ уринмаси $F = 0$ ва $F_\alpha = 0$ сиртларнинг уринма текисликларида ётади, демак, у $F_\alpha = 0$ сиртнинг

$$\overline{\nabla F_\alpha}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z}\right\}$$

---

[1]) Қайтиш қиррасининг нуқталари оиланинг *характеристик нуқталари* дейилади.

градиент векторига тикдир:

$$\overline{\nabla F_\alpha}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial z}\frac{dz}{dt}=0,$$

буни эътиборга олсак, (8) дан $\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}=0$ ҳосил бўлади. Шуни исботлаш керак эди.

Қайтиш қиррасининг тенгламаларини ҳосил қилиш учун (7) тенгламалардан α ни йўқотиб, $\Phi_1(x, y, z)=0$ ва $\Phi_2(x, y, z)=0$ ни топамиз, ёки x, y, z ни α орқали ифодалаймиз:

$$x=x(\alpha),\ y=y(\alpha),\ z=z(\alpha),\ r=r(\alpha).$$

Чизиқлар назариясидаги сингари, сиртлар оиласига қарашли бир-бирига яқин иккита (α) ва $(\alpha+\Delta\alpha)$ сирт бир-бири билан кесишса ва $\Delta\alpha\to 0$ да кесишиш чизиғининг лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит чизиқ (α) да ётувчи характеристикадан иборат бўлади. Буни исботлашни ўқувчига топширамиз.

Эслатма. Биз бир параметрли сиртлар оиласининг ўрамаси ҳақида сўзладик. Агар сиртларнинг икки параметрли оиласи

$$F(x, y, z, \alpha, \beta)=0$$

берилиб, унинг ўрамаси мавжуд бўлса, у учта тенгламани қаноатлантиради:

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\beta}=0.$$

Бироқ икки параметрли оила умумий ҳолда ўрамага эга эмас. Биз буни исботламаймиз.

Мисоллар. 1) Марказлари $\bar\rho=\bar\rho(s)$ чизиқда ётган ва радиуслари ўзгармас бўлган шарлар оиласининг ўрамасини топайлик. Шарнинг тенгламаси ушбудир:

$$[r-\bar\rho(s)]^2-a^2=0\quad (a=\text{const}).$$

Буни s параметр бўйича дифференциаллаcак, у ҳолда характеристика

$$[r-\rho(s)]^2=a^2,\ [r-\bar\rho(s)]\,\bar\tau=0 \tag{9}$$

тенгламалардан ва қайтиш қирраси эса

$$(r-\bar\rho)^2=a^2,\ (r-\bar\rho)\,\bar\tau=0,\ (r-\bar\rho)\,k\bar\nu-1=0 \tag{10}$$

тенгламалардан аниқланади. (9) дан кўринадики, оила характеристикалари: шарларнинг „марказлар чизиги“ (C) даги нормал текисликлар билан кесишиш чизиқларидан (яъни катта доиралардан) иборатдир. Ўрама сирт шу доиралардан тузилиб, у *канал сирт* дейилади.

(10) даги учинчи текислик (C) нинг бош нормалига тик бўлиб, $\bar{\rho}(s)$ нуқтадан k масофада туради ва (10) даги иккинчи текислик билан (C) нинг эгрилик ўқи бўйлаб кесишади (§ 68 га қаранг). Оиланинг қайтиш қирраси эса (C) нинг эгрилик ўқлари билан шарларнинг кесишиш нуқталаридан тузилган ва (C) га „параллел" бўлган иккита чизиқдан иборатдир. Қайтиш қиррасининг тенгламасини (10) дан фойдаланиб топамиз.

$$r = \bar{\rho} + \frac{\bar{\nu}}{k} \pm \sqrt{a^2 - \frac{1}{k^2}}\,\bar{\beta}.$$

2) Биринчи мисолда олинган шарларнинг радиуслари ўзгарувчи, яъни $a = a(s)$ бўлсин, у ҳолда шарлар оиласининг тенгламаси

$$[r - \bar{\rho}(s)]^2 - a^2(s) = 0$$

бўлади. Буни s бўйича дифференциалласак, текислик тенгламаси ҳосил бўлади:

$$(r - \rho)\,\bar{\tau} - a\frac{da}{ds} = 0.$$

Оиланинг характеристикаси шу текисликда ётувчи айланадир; текисликнинг ўзи эса (C) нинг нормал текислигига параллел бўлиб, ундан $d = a\left|\frac{da}{ds}\right|$ масофада туради. Агар $d < a$, яъни $\left|\frac{da}{ds}\right| < 1$ шарти бажарилса, айланалар (характеристикалар) мавжуд бўлади; бу ҳолда ўрама ҳам мавжуддир. Шарлар оиласининг ўрамаси *циклида* дейилади.

3) Марказлари айланада ётган ва радиуслари ўзгармас бўлган сфералар оиласининг ўрамаси *тор* дейилади. Марказлар чизиғи $\rho = be(\varphi)$ айланада ётиб, оила сфераларининг радиуслари a га тенг бўлса, у ҳолда оила тенгламаси

$$[r - (be(\varphi)]^2 - a^2 = 0 \text{ ёки } (x - b\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0$$

кўринишга, характеристика тенгламаси эса

$$[r - be(\varphi)]\,e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ ёки } bx\sin\varphi - by\cos\varphi = 0$$

кўринишга эга бўлади, бундан $\frac{\sin\varphi}{y} = \frac{\cos\varphi}{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Агар бу тенгламалардан $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ ни йўқотсак, торнинг тенгламаси вужудга келади:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Қайтиш қиррасини топинг.

Машқлар

167. Координат текисликлари билан кесишиб, ҳажмлари тенг тетраэдрларни ажратган текисликлар оиласининг ўрамаси топилсин.

Айтилган текисликлар оиласи: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ бўлиб, тегишли ҳажм $v=\frac{1}{6}\cdot abc$, бундан $c=\frac{6v}{ab}$. Демак,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{ab}{6v}z-1=0.$$

Буни a ва b бўйича дифференциаллаб, сўнгра a ва b ни йўқотсак, ўрама сирт сифатида учинчи тартибли алгебраик сиртни ҳосил қиламиз:

$$xyz=\frac{2}{9}v.$$

168. Марказлари XOY текислигида ётган ўзгармас радиусли шарлар ўрамаси топилсин.

Жавоб: Оила тенгламаси $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-r^2=0$ $(r=\text{const})$. Ўрама иккита $z=\pm r$ текисликдан иборат.

169. Ярим ўқларининг йиғиндиси ўзгармас бўлган эллипсоидлар оиласининг ўрамаси топилсин.

Жавоб: Оила тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, бунда $a+b+c=\text{const}=l$; ўрама сирт $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

§ 86. Бир параметрли текисликлар оиласи

Олдинги параграфда баён қилинган назарияни текисликларнинг бир параметрли оиласига қўлланайлик. Уч ўлчовли фазода барча текисликлар уч параметрли оилани ташкил қилади. Биз ҳозир фақат бир параметрли оила билан шуғулланамиз. Уларнинг вектор тенгламасини

$$rn(\alpha)+D(\alpha)=0 \tag{1}$$

кўринишда ва координат системасидаги тенгламасини

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Оила текислигида ётувчи характеристика: (1) текисликнинг ушбу

$$rn'(\alpha)+D'(\alpha)=0^{1)} \tag{2}$$

текислик билан кесишган чизиғи, яъни тўғри чизиқдир[2].

---

[1]) (2) тенглама (1) ни α бўйича дифференциаллашдан ҳосил қилинган.

[2]) (1) ва (2) текисликлар кесишади, чунки $n'=\lambda n$ бўлса, n нинг йўналиши ўзгармай қолиб, олинган оила параллел текисликлар оиласи бўлар эди.

Барча характеристикалар тўғри чизиқлардан иборат бўлгани учун (1) оиланинг (E) ўрамаси (тўғри) чизиқли сиртдир. Бу сиртнинг ёйилувчи сирт, яъни торс эканини исботлаш осон. Ҳақиқатан, характеристика (яъни тўғри чизиқ) бўйлаб ҳаракат қилганда, ўрама сирт оиладаги сиртларга уринна боради; оила сиртлари текисликлардан иборат бўлгани учун, ўрама сирт уларнинг ҳар бирига битта ясовчининг ҳамма нуқталарида уринади — шу ясовчи бўйлаб борганда, ўраманинг уринма текислиги ўзгармайди. Бу эса (E) нинг торслигидан дарак беради.

Теорема. *Ёйилувчи ҳар қандай сирт (торс) ни текисликларнинг бир параметрли оиласининг ўрамаси деб қараш мумкин.*

Исбот. Ҳақиқатан, торснинг ясовчилари бир параметрли оилани ташкил қилади. Ҳар бир ясовчидан ягона уринма текислик ўтади, демак, торснинг барча уринма текисликлари ҳам бир параметрли оилани ташкил қилади ва торс бу оила учун ўрама вазифасини бажаради.

Бу теоремани олдинги муҳокамалар билан биргаликда қараганда, қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади:

Сиртнинг ёйилувчи (торс) бўлишлиги учун, у бир параметрли текисликлар оиласининг ўрамаси бўлиши зарур ва етарлидир.

Энди яна умумий ҳолга ўтиб, оиланинг қайтиш (R) қиррасини аниқлаймиз. Унинг радиус-вектори ушбу учта тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\boldsymbol{rn}(\alpha) + D(\alpha) = 0,\ \boldsymbol{rn}'(\alpha) + D'(\alpha) = 0,\ \boldsymbol{rn}''(\alpha) + D''(\alpha) = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламалар $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$ га нисбатан чизиқлидир, система детерминанти ушбуга тенг:

$$\Delta = \boldsymbol{nn'n''} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Икки ҳолни кўрамиз.

1) $\Delta = \boldsymbol{nn'n''} \neq 0$. Бу ҳолда (3) системани $\boldsymbol{r}$ га нисбатан бир қийматли равишда ечиб, $\boldsymbol{r}$ ни α орқали ифодалаймиз:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha)\{x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha)\}. \quad (4)$$

Агар $\boldsymbol{r}(\alpha)$ — ўзгарувчи вектор бўлса, (4) тенглама эгри чизиқни — (R) қайтиш қиррасини ифодалайди. Унинг ёпишма текисликлари қаралаётган оиланинг текисликларидан иборат бўлади. Ҳақиқатан, характеристика (3) нинг биринчи ва иккинчи тенгламалари билан берилган текисликларда ётади, демак, унинг

r' уринмаси шу текисликларнинг нормаллари бўлган n ва n' векторларга тикдир:

$$r'n = 0,\ r'n' = 0.$$

Бу тенгликлардан биринчисини α бўйича дифференциаллаб, иккинчисига асосан, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r''n = 0.$$

Шундай қилиб, $n \perp r''$; демак, оила текислиги (R) га уриниб, r'' ни ўз ичига олади.

Кўрилган ҳол умумий бўлиб, торснинг тузилиши ҳақида тўла тасаввур беради (197-чизма).

-чизма.

Биз $r = \text{const} = r_0$ ни ташлаб кетдик. Бу ҳолда қайтиш қирраси нуқтага айланиб, барча характеристикалар битта нуқтадан ўтади. Оила текисликларининг ўрамаси коник сирт бўлади.

2) $\Delta = nn'n'' = 0$. Демак, n, n', n'' векторлар компланардир, шу сабабли, уларга тик N вектор мавжуд бўлиб, оила текисликлари N га параллел, яъни n, n', n'' векторлар ётган текисликка тикдир. Ўрама бу ҳолда йўналиши ўзгармас характеристиканинг ҳаракатидан ҳосил қилиниб, цилиндрик сиртни тасвирлайди.

Хуллас, бир параметрли текисликлар оиласининг ўрамаси юқорида кўрилган учта типли ёйилувчи сиртни беради: уринмалар сирти, коник сирт, цилиндрик сирт (охирги ҳолда қайтиш қирраси мавжуд эмас).

Теорема. *Агар сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилса, унинг ёйилувчи сирт бўлиши учун $rt - s^2$ ифода нолга тенг, яъни:*

$$rt - s^2 = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир, бунда $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. (Бу белгиларни Монж киритган.)

Исбот. Берилган $z = f(x, y)$ сирт ёйилувчи бўлсин, у ҳолда унинг уринма текисликлари:

$$Z = pX + qY + z - px - qy,\ p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

бир параметрли оилани ташкил қилади, яъни учта p, q, $z - px - qy$ коэффициент битта α параметрга боглиқ бўлади:

$$p = \varphi_1(\alpha),\ q = \varphi_2(\alpha),\ z - px - qy = \varphi_3(\alpha).$$

Бу тенгламаларнинг олдинги иккитасидан p ва q ўзаро боғлиқ деган хулосага келамиз: $q = \varphi(p)$; демак, улардан тузилган якобиан нолга тенг:

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0.$$

Тескари теореманинг исботига тўхтамаймиз. (5) шартнинг геометрик маъноси § 82, 86 да ойдинлашади.

Эслатма. Торслардан бошқа ихтиёрий сиртларни олганда, уларнинг уринма текисликлари икки параметрли оилани ташкил қилади[1]). Демак, торсларнинг характеристик хоссаси уларнинг уринма текисликлари оиласининг бир параметрли бўлишидир.

§ 87*. Фазовий чизиққа боғлиқ торслар, уларнинг эволютаси

1) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ тенгламали (Γ) чизиқдаги нормал текисликларнинг оиласи

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s))\,\bar{\tau}(s) = 0 \tag{1}$$

тенглама билан ифодаланиб (s параметр), уларнинг ўрамаси берилган чизиқнинг *қутбий сирти* дейилади. Оиланинг характеристикасини топиш учун, (1) ни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s))\,k\bar{\nu} - 1 = 0. \tag{2}$$

Бу тенглама (Γ) чизиқнинг тўғриловчи текислигига параллел ҳолда эгрилик марказидан ўтган текисликни ифодалайди. Оиланинг характеристикалари эгрилик марказларидан ўтиб бинормалларга параллел бўлган тўғри чизиқларни тасвирлайди; демак, улар берилган (Γ) чизиқнинг эгрилик ўқларидан иборатдир (§ 68 га қаранг). Улардан тузилган сирт (торс) (Γ) нинг қутбий сиртидир. Бу сиртнинг қайтиш қиррасини топиш учун, (2) тенгламани s бўйича дифференциаллаб, ҳосил қилинган тенгламани (1) ва (2) билан бирга қарасак, яъни § 68 даги муҳокамаларни такрорласак, ёпишма сферанинг марказини аниқловчи формулага келамиз $\left(\boldsymbol{r}(s) + \frac{1}{k}\bar{\nu} + \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}}{\varkappa}\bar{\beta}\right)$, ва шу билан, оиланинг характеристик нуқталари ёпишма сфе-

[1]) Чунки сиртнинг ҳар бир оддий (u, v) нуқтасига фақат битта уринма текислик мос келади.

раларнинг марказларидан иборатлигини ва қайтиш қирраси шу нуқталарнинг геометрик ўрни эканлигини кўрамиз. Фазовий чизиқ эволюталари учун қутбий сирт катта аҳамиятга эга.

Ясси чизиқнинг қутбий сирти цилиндрик сиртдан иборат бўлиб, унинг ясовчилари шу чизиқ ётган текисликка тикдир. Цилиндрнинг йўналтирувчиси сифатида чизиқнинг эволютасини қабул қилиш мумкин (198-чизма).

198-чизма.

Сферада ётган бирор (Γ) чизиқни олсак, унинг қутбий сирти — учи сфера марказидаги конусдир, чунки унинг ҳамма нормал текисликлари битта нуқтадан — сфера марказидан утади.

2) Ёпишма текисликлар оиласи

$$(R - r(s))\,\bar{\beta}(s) = 0 \qquad (3)$$

тенглама билан ифодаланиб, бунда s параметр ҳисобланади. Характеристика (3) тенгламадан ва уни s бўйича дифференциаллаш билан ҳосил қилинган

$$(R - r(s))\,\bar{\nu}(s) = 0 \qquad (4)$$

тенгламадан аниқланади. (3) ва (4) дан $R - r$ вектор $\bar{\tau}$ бўйича йўналган деган хулосага келамиз, чунки у ν ва β векторларга тикдир. *Оиланинг характеристикалари (Г) чизиқнинг тегишли уринмаларидан иборат.* Бу торснинг қайтиш қирраси (Γ) чизиқнинг ў з и д и р. Ҳақиқатан, уни излаш учун (4) ни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$(R - r)(-k\bar{\tau} + \sigma\bar{\beta}) = 0$$

ва (3) ни эътиборга олиб, ушбуга эга бўламиз:

$$(R - r(s))\,\bar{\tau}(s) = 0.$$

Шундай қилиб, $R - r$ вектор $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ нинг учаласига ҳам тик; бироқ бу учта вектор компланар эмас, шунинг учун $R - r(s)$ нинг ўзи ноль векторга айланади; демак, $R = r(s)$. Айтганимиз шу билан исботланади.

3) Тўғриловчи текисликлар оиласини олайлик:

$$(R - r(s))\,\bar{\nu}(s) = 0.$$

Характеристика ана шу текисликнинг ушбу

$$(R - r(s))(-k\bar{\tau} + \sigma\bar{\beta}) = 0$$

текислик билан кесишган (тўғри) чизиғидан иборат бўлиб, у

$$[\bar{\nu}(-k\bar{\tau} + \sigma\bar{\beta})] = k\bar{\beta} + \sigma\bar{\tau}$$

вектор (яъни Дарбу вектори) бўйича йўналгандир. Характеристикалардан тузилган торс *тўғриловчи сирт* дейилади.

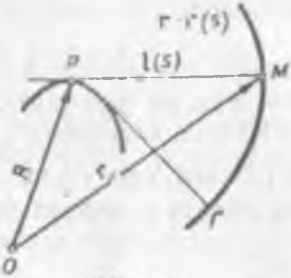
Бундай номнинг берилишига сабаб шуки, бирор (Γ) чизиқнинг s қутбий сирти шу чизиқ орқали ўтиб, s ни текисликка ёйганда (Γ) чизиқ тўгри чизиққа алмашинади. Бунинг исботига биз тўхтамаймиз[1]).

Натижа. Фазовий чизиқдаги табиий учёқликнинг қирралари орасида фақат уринмалар торсни ташкил қилади, чунки $ldld\bar{\rho}=0$ шартни бош нормаллар ва бинормалларга қўлланганда:

$$\bar{\nu}\,d\bar{\nu}\,d\bar{\rho}=-\sigma ds^2\neq 0,\quad \bar{\beta}d\bar{\beta}\,d\bar{\rho}=\sigma ds^2\neq 0$$

бўлади. Бу учёқлик ёқларининг учаласи ҳам торсларни ҳосил қилади: ёпишувчи, нормал, тўғриловчи текисликларнинг ўрамалари мос равишда *уринмалар сирти, қутбий сирт* ва *тўғриловчи сиртдан* иборатдир.

4) Бош ва бинормаллардан тузилган сиртларнинг ёйилувчи эмаслигини кўрдик. Чизиқнинг шу хоссага эга бўлган бошқа нормали йўқми, деган сўроқни қўямиз.



199-чизма.

Бош нормаль билан θ бурчак ташкил қилган бирлик нормал l бўлса, у бинормаль билан $\frac{\pi}{2}-\theta$ бурчакни ҳосил қилади; демак:

$$l=\bar{\nu}\cos\theta+\bar{\beta}\sin\theta. \tag{5}$$

Агар бу нормаллардан тузилган сирт торс бўлса, улар шу торснинг қайтиш қиррасига урина боради ва демак, бу нормаллар урамага эга бўлади. $MP=u$ дейлик (199-чизма). Бизнинг вазифамиз қайтиш қиррасини (яъни P нуқталар тўпламини, бошқача айтганда, u параметрни) ва θ бурчакни аниқлашдир. Изланаётган торснинг қайтиш қирраси унинг йўналтирувчиси сифатида олинган. Қирранинг тенгламаси:

$$R=r(s)+ul(s)=r(s)+u(\bar{\nu}\cos\theta+\bar{\beta}\sin\theta), \tag{6}$$

бу ерда s — табиий параметр, u — масофа (s нинг функцияси). Шартга кўра, $dR=\lambda l$, яъни

$$dr+udl+ldu=\lambda l. \tag{7}$$

---

[1]) Муфассалроқ: М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М., 1940, § 55.

Бу тенгликнинг иккала томонини l га скаляр кўпайтирсак,

$$ldr + du = \lambda$$

бўлади. Бироқ, $ldr = 0$, демак, $du = \lambda$ бўлиб, (7) тенглама ушбу

$$dr + udl = 0$$

шаклни олади. Бу тенгламага (5) дан dl нинг қийматини қўйилик:

$$dl = \bar{\nu}\cos\theta + \bar{\beta}\sin\theta - \bar{\nu}\sin\theta\, d\theta + \bar{\beta}\cos\theta\, d\theta.$$

у ҳолда:

$$\bar{\tau}(1 - uk\cos\theta)\, ds + u\,(d\theta + \sigma ds)\,(-\bar{\nu}\sin\theta + \bar{\beta}\cos\theta) = 0.$$

Учта вектор $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ компланар эмасдир, шу сабабли:

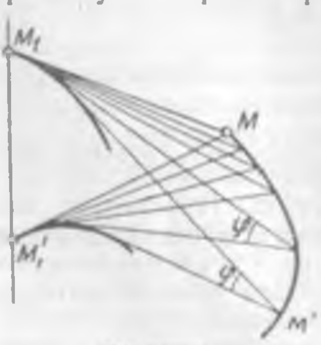
$$d\theta + \sigma ds = 0,\ 1 - uk\cos\theta = 0.$$

Булардан:

$$\theta = -\int \sigma ds + C, \quad u = \frac{1}{k\cos\theta} = \frac{\rho}{\cos\theta} \tag{8}$$

(ρ — эгрилик радиуси).

Қўйган масаламиз ҳал қилинди: ҳар бир нуқтада бош нормал билан $\theta = -\int \sigma ds$ га тенг бурчакни ташкил этган нормаллар ёйилувчи сиртни беради; характеристик P нуқталар тўплами (яъни қайтиш қирраси) M нуқтадан $u = \frac{\rho}{\cos\theta}$ масофада туради. Ёйилувчи сирт шу билан тўла аниқланади.



200-чизма.

θ ни ифодаловчи формулага C ўзгармас киради. Бу факт қизиқ геометрик маънога эга: берилган (Γ) чизиқнинг θ_1 ва θ_2 бурчаклар билан аниқланувчи нормалларидан тузилган иккита торсни олсак, бу бурчакларнинг иккаласи ҳам (8) нинг биринчи тенглигини қаноатлантиради:

$$\theta_1 = -\int \sigma ds + C_1,\ \theta_2 = -\int \sigma ds + C_2,$$

булардан $\varphi = \theta_2 - \theta_1 = C_2 - C_1 = \text{const}$. Демак, *торсни ташкил қилувчи ҳамма нормалларни нормал текисликлардан чиқармай туриб, бир хил бурчакка бурсак, улар янги вазиятда ҳам торсни ташкил қилади* (200-чизма).

Бош ёки бинормаллардан тузилган сиртнинг фазовий чизиқ учун торс бўла олмаслигини энди тушуниш осон: бош нормал учун $\theta = 0$ ва бинормал учун $\theta = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, иккала ҳолда ҳам $d\theta = 0$. Демак, $d\theta = -\sigma ds$ дан $\sigma = 0$ деган хулосага келамиз. Бундан маълум бўладики, олинган чизиқ — ясси чизиқдир, шу сабабли $\theta = \text{const}$ чизиқнинг бинормаллари ўзгармас йўналишга эга: $\overline{\beta} = \text{const} = \overline{\beta}^\circ$, бундан $l\overline{\beta}^\circ = \sin\theta = \text{const}$. Шундай қилиб, бинормаллар цилиндр ҳосил қилади, қайтиш қирраси шу цилиндрдаги винт чизиқлардан тузилади.

5. *Эволюта ва эвольвента* тушунчалари фазовий чизиқ учун ясси чизиқ ҳолидаги таърифдан бир оз фарқ қилади: *берилган фазовий* (C) *чизиқнинг эволютаси деб шундай* (C_1) *чизиқни айтамизки, унинг уринмалари* (C) *нинг нормаллари вазифасини адо этади. Берилган* (C) *чизиқ* (C_1) *нинг эвольвентасидир.*

Юқоридаги муҳокамаларни такрорласак, муҳим хулосалар келиб чиқади: а) эволютага уринувчи нормаллар оиласи торсни ташкил қилиб, бу торснинг қайтиш қирраси шу эволютанинг ўзидан иборат бўлади;

б) берилган (C) чизиқнинг эволюталари чексиз кўп бўлиб, уларнинг ҳаммаси (C) нинг қутбий сиртида, яъни нормал текисликларига мос келган торсда ётади, чунки эволюта нормалларга уриниши билан, нормал текисликларга ҳам характеристик нуқталарда урина боради; шу билан бирга, эволюта нормал текисликларнинг ўрамаси (тўғриловчи сирти) да ҳам ётади;

в) (C_1) чизиқнинг эвольвентаси бу чизиққа ўтказилган уринмаларнинг ортогонал траекториясидир.

Берилган эвольвента бўйича эволютани аниқлаш масаласини биз олдинги пунктда ҳал қилган эдик. Эвольвента (чизиқ) берилган ҳолда, ясовчиларининг ортогонал траекториялари шу эвольвентадан иборат бўлган чексиз кўп торсларни ясадик; уларнинг ясовчилари шу эвольвентада бир хил бурчак остида кесишади (бу жиҳатдан ясси чизиққа қараганда катта фарқ бор: ясси чизиқнинг фақат битта эволютаси бор эди).

Айланадан бошқа бирор ясси чизиқни олганда ҳам юқоридаги муҳокамалар ўринлидир: қутбий сирт бу ҳолда цилиндрик сиртдир, эволюталар эса винт чизиқлардир; улар орасида битта ясси эволюта ҳам бор бўлиб, у $\theta = 0$ га мос келади.

Энди эвольвента бўйича эволютани аниқлаш формуласини ҳам бериш мумкин: (6) тенгламада u ни $\frac{\rho}{\cos\theta}$ билан алмаштирсак, эволютанинг тенгламаси ҳосил бўлади:

$$R_* = r + \rho\overline{\nu} + \rho \operatorname{tg} \theta\overline{\beta}. \tag{9}$$

Ниҳоят, эволюта бўйича эвольвентани топайлик, бошқача айтганда, торснинг қайтиш қирраси бўйича ясовчиларнинг ортогонал траекториясини аниқлайлик.

кисликда ётгани учун $r'n = 0$). $R = r$ қиймат $(R - r)\,n = 0$ ва $(R - r)n' = 0$ тенгламаларни қаноатлантиради. Характеристика тенгламаси

$$R = r + \lambda\,[nn'']$$

бўлади.

181. Нормал текисликлари умумий бўлган икки чизиқ „параллел“ чизиқлар дейилади. Икки параллел (C ва C_1) чизиқнинг умумий нормалларидан тузилган сиртнинг ёйилувчи (торс) эканини исботланг.

Кўрсатма. Бундан олдинги масалага қаралсин.

182. Параллел текисликларга жойлашган иккита (Γ) ва (Γ_1) чизиқлар берилган. Қандай шарт бажарилганда, бу икки чизиқдан ўтган тўғри чизиқли сирт ёйилувчи бўлади?

Жавоб: Тўғри чизиқли сиртнинг ясовчилари сифатида (Γ) ва (Γ_1) нинг шундай M ва M_1 нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар олиниши керакки, бу нуқталардаги уринмалар параллел бўлсин.

183. Иккита ясси (Γ) ва (Γ_1) чизиқ орқали ўтувчи торсни ҳосил қилишнинг геометрик усули кўрсатилсин.

Кўрсатма. (Γ) ва (Γ_1) чизиқлар қайси текисликларда ётган бўлса, шу текисликларнинг кесишган тўғри чизиғидаги нуқталардан (Γ) ва (Γ_1) га уринмалар ўтказиб, ясовчилар сифатида уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар олинсин.

184. Бундан олдинги масала иккита фазовий (Γ) ва (Γ_1) чизиқ учун ҳал қилинсин.

Кўрсатма. (Γ) ва (Γ_1) нинг уринмаларидан торслар ясаб, бу торсларнинг кесишган (Γ') чизиғидаги нуқталардан (Γ) ва (Γ_1) га уринмалар ўтказиб, ясовчилар сифатида уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар олинсин.

Ўн тўртинчи боб

ИККИНЧИ КВАДРАТИК ФОРМА. СИРТНИНГ ЭГРИЛИГИ.

§ 88. Умумий мулоҳазалар

Олдинги учта бобда сирт тушунчаси, унинг биринчи квадратик формаси, бу квадратик форма билан боғланган изометрия ва эгилиш масалалари, сиртнинг ички геометрияси етарлича муҳокама қилинди. Ички геометрия деганда сирт мустақил объект сифатида қаралиб, унинг устида ўлчашга доир масалалар кўрилади. Бу жиҳатдан сирт планиметрияда қараладиган текисликни эслатади. У ерда текислик гўё фазо билан алоқасиз равишда „ҳаёт кечириб", ўзи шундай соҳа ролини ўйнайдики, биз шу соҳадаги турли фигураларнинг хоссаларини ўрганамиз. Стереометрияда эса текисликни нуқта ва тўғри чизиқ билан бирга қараб, уларнинг ўзаро вазиятларини текширилади.

Эгри сиртни планиметрик нуқтаи назардан қараш ички геометрия тушунчасига келтиради. Биринчи квадратик форма ва унга доир муносабатлар радиус-вектордан (ёки унинг координаталаридан) олинган биринчи тартибли ҳосилаларгагина боғлиқдир. Энди биз сиртнинг „стереометрик" хоссаларини ўрганишга ўтамиз.

§ 89. Сиртнинг уринма текисликдан четланиши. Иккинчи квадратик форма

Сиртнинг фазодаги эгрилигини характерлаш учун, du ва dv га нисбатан иккинчи квадратик формани киритишга тўғри келади. Сиртнинг M нуқтасидан M' нуқтасига йўналган векторни Δr, шу нуқтадаги бирлик нормаль векторни n ва сиртдаги M нуқтада ўтказилган уринма текислигининг шу сиртдан четланишини h десак, бу четланиш скаляр $n\Delta r$ кўпайтмага тенг булади:

$$h = n\Delta r = ndr + \frac{1}{2} nd^2r + \varepsilon (du^2 + dv^2).$$

Бу формулада $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$ билан бирга ε ҳам 0 га интилади, ёки бошқача айтганда, у du ва dv га нисбатан юқори тартибли чексиз кичикни ифодалайди. Бу ерда $ndr = 0$, чунки dr уринма n га тик бўлган текисликда ётади, демак:

$$h = \frac{1}{2} nd^2r + \varepsilon (du^2 + dv^2).$$

Четланишнинг бош қисми $\frac{1}{2} nd^2r$. Аммо $nd^2r = n(r_{uu}du^2 + 2r_{uv}dudv + r_{vv}dv^2 + r_u d^2u + r_v d^2v)$. Энди $nr_u = nr_v = 0$ ни эътиборга олсак,

$$nd^2r = nr_{uu}du^2 + 2nr_{uv}du\ dv + nr_{vv}dv^2$$

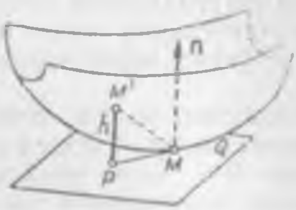
бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томони du ва dv га нисбатан квадратик формадир, унинг коэффициентлари қуйидагича белгиланади[1]):

$$D = nr_{uu},\ D' = nr_{uv},\ D'' = nr_{vv}.$$

Ҳосил бўлган $Ddu^2 + 2D\,du\,dv + D''du$ форма сиртнинг *иккинчи квадратик* формаси дейилади:

$$\Phi_2 = nd^2r = D\ du^2 + 2D'du\ dv + D''dv^2.$$

Агар биринчи квадратик форма сиртнинг ички геометриясини аниқловчи ёй элементини берган бўлса, иккинчи квадратик форма сиртнинг ташқи кўринишини акс эттиради (202-чизма). Бу ерда $\frac{\Phi_2}{2} = \frac{1}{2} nd^2r$ ифода h четланишнинг бош қисмига тенг бўлгани учун, сиртни эгиб унинг шаклини ўзгартганда, h четланиш ва, демак, у билан бирга иккинчи квадратик форма ҳам ўзгаради (биринчи квадратик ds^2 форманинг ўзгармаслигини эсланг!).



202-чизма.

Сиртнинг биринчи квадратик формаси M га яқин ҳамма M' нуқталар учун ҳар вақт мусбат эди, лекин иккинчи квадратик форма эса M даги (Q) уринма текисликдан бир томонда ётувчи нуқталар учун[2]) мусбат бўлиб, (Q) нинг иккинчи томонидаги нуқталар учун манфийдир (чунки иккинчи квадратик форма h четланишдаги бош қисмнинг ярмига тенг).

Равшанки, текислик учун четланиш айнан нолга тенг, $h=0$; демак, иккинчи квадратик форма ва шу билан унинг коэффициентлари ҳам айнан нолга тенг:

$$D = D' = D'' = 0.$$

Кейинча бунинг тескарисини ҳам исботлаймиз: бирор сирт учун иккинчи квадратик форма айнан нолга тенг бўлса, у

---

[1]) Бу белгилашларни Гаусс киритган.

[2]) Аниқроқ айтганда, n вектор томонида ётувчи нуқталар учун.

сирт — текисликдир. Бироқ, $D = D' = D'' = 0$ шарт сиртнинг айрим нуқталаридагина бажарилса, биз уларни сиртнинг *зичланиш* нуқталари деймиз. Геометрик мулоҳазалардан ($h \approx 0$ дан) равшанки, зичланиш нуқтаси атрофида сирт ўзининг уринма текислигига одатдаги нуқталарга қараганда зичроқ жипслашади (h — камида учинчи тартибли чексиз кичикдир).

Иккинчи квадратик форма ва унинг коэффициентлари учун бошқа ифодаларни берайлик.

$\boldsymbol{n}d\boldsymbol{r} = 0$ ни дифференциаллаймиз:

$$\boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{n}d\boldsymbol{r} = 0, \ \boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r} = -d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{n}.$$

Шу сабабли

$$\Phi_2 = \boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r} = -d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{n}$$

ва

$$D = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u, \ D' = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u,$$
$$D'' = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v.$$

Бирлик вектор $\boldsymbol{n}$ учун юқорида ушбу ифодани берган эдик:

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{W}[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v], \ W^2 = EG-F^2.$$

Бундан фойдалансак, иккинчи квадратик форма

$$\Phi_2 = \boldsymbol{n}d^2\boldsymbol{r} = -d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{n} = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

кўринишни олади ва унинг коэффициентлари учун ушбу формулалар ҳосил қилинади:

$$D = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uu} = -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u = \frac{1}{W}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

$$D' = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uv} = -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v = \frac{1}{W}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}; \qquad (2)$$

$$D'' = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{vv} = -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v = \frac{1}{W}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Бу ерда

$$2h \approx D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2. \qquad (4)$$

Жумладан, сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса,

$$x = u, \ y = v, \ z = f(u, v) \text{ ва } r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

фараз қилиб, (1), (2), (3) дан D, D', D'' учун ушбу ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$D=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad D'=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad D''=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Биринчи квадратик форма ва унга доир муносабатлар эгри чизиқли координаталарнинг биринчи тартибли ҳосилаларига боғлиқ эди. Иккинчи квадратик форма ва унинг коэффициентлари орқали ифодаланувчи муносабатлар иккинчи тартибли ҳосилаларга боғлиқдир. Профессор С. П. Фиников терминологияси бўйича айтганда, *биринчи квадратик форма сирт нуқтасининг биринчи тартибли дифференциал атрофини, иккинчи квадратик форма эса унинг иккинчи тартибли дифференциал атрофини характерлайди,* чунки иккинчи квадратик форма r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} орқали ифодаланади. Бу терминлардан биз баъзан фойдаланамиз.

Мисоллар. 1) *Текислик* $Ax+By+Cz+D=0$ берилган. $C\neq 0$ фараз этсак, $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ бўлади. Бунда

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\equiv 0,\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\equiv 0,\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv 0.$$

Демак, иккинчи квадратик форма айнан нолга тенг. Аксинча, бу учта ҳосила айнан нолга тенг бўлса, сирт — текисликдир; ҳақиқатан:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\equiv 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\equiv 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv 0$$

бўлганда, буларни интеграллаб $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ кўринишдаги тенгламага келамиз. Хуллас, *фақат текисликнинг иккинчи квадратик формаси айнан нолга тенг.* Шу билан юқорида айтиб ўтган тасдиқимиз исботланди.

2) *Сфера.* Координат боши сфера марказида ётган бўлиб, бирлик нормал n бўлса, сферанинг тенгламаси $r=Rn$ (R — сфера радиуси) кўринишга эга бўлади. Бундан $r_u=Rn_u$, $r_v=Rn_v$ ва

$$r_u^2=Rr_un_u,\ r_ur_v=Rr_vn_u,\ r_v^2=Rr_vn_v$$

ёки, (1), (2) ва (3) формулаларга асосан,

$$E=-RD,\ F=-RD',\ G=-RD'',$$

булардан:

$$\frac{D}{E}=\frac{D'}{F}=\frac{D''}{G}=-\frac{1}{R}. \tag{5}$$

Шундай қилиб, сфера учун биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг мос коэффициентлари пропорционалдир. Аксинча (иккинчи тартибли чексиз кичикларгина назарда тутилса), шу хоссага эга бўлган ҳар қандай сирт сферадир. Биз буни исботламаймиз. Агар (5) муносабатлар сиртнинг айрим нуқталарида юз берса, улар *думалоқланиш* нуқталари дейилади.

3) *Айланма сирт.* Унинг тенгламаси: $\boldsymbol{r} = \varphi(u)\boldsymbol{e}(v) + \psi(u)\boldsymbol{k}$ ёки $x = \varphi(u)\cos v$, $y = \varphi(u)\sin v$, $z = \psi(u)$. Бу ерда профил чизиқ $x = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ тенгламалар билан берилганини эслатиб ўтамиз. Қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\boldsymbol{r}_u = \varphi'\boldsymbol{e}(v) + \psi'\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v = \varphi(u)\boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$E = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2;$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{W} = \frac{\varphi'(u)\boldsymbol{k} - \psi'\boldsymbol{e}(v)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}};$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \varphi''\boldsymbol{e}(v) + \psi''\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_{uv} = \varphi'\boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\boldsymbol{r}_{vv} = -\varphi\boldsymbol{e}(v).$$

Булардан:

$$D = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad D' = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = 0, \quad D'' = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \tag{6}$$

Иккинчи квадратик форманинг ўзи эса:

$$\Phi_2 = \frac{(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')\,du^2 + \varphi\psi'\,dv^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, айланма сирт учун иккала квадратик форманинг ҳам ўрта коэффициентлари нолга тенг экан:

$$F = 0, \quad D' = 0.$$

Профил чизиқ $z = f(\rho)$ тенглама билан берилса,

$$E = 1 + f'^2(\rho), \quad F = 0, \quad G = \rho^2$$

бўлиб, иккинчи квадратик форма коэффициентлари учун (6) дан ушбу ифодалар келиб чиқади (бу ерда $u = \rho$, $\varphi(\rho) = \rho$, $z = f(\rho)$ фараз қилдик ва $\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$, $\psi' = f'(\rho)$ ни эътиборга олдик):

$$D = \frac{f''(\rho)}{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{\rho f'(\rho)}{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}. \tag{7}$$

Демак:

$$\Phi_2 = \frac{f''(\rho)\,d\rho^2 + \rho f'(\rho)\,dv^2}{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}},$$

$$2h \approx \frac{f''d\rho^2 + \rho f' dv^2}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Профил чизиқ $x=\varphi(z)$ тенглама билан берилганда эса қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$z=\varphi(u)=u,\ \varphi'=1,\ \varphi''=0;$$

$$E=1+\varphi'^2(z),\ F=0,\ G=\varphi^2(z),\ n=\frac{\varphi' k-e(v)}{\sqrt{1+\varphi'^2}};\qquad (8)$$

$$ds^2=[1+\varphi'^2(z)]\,dz^2+\varphi^2(z)\,dv^2$$

ва

$$D=\frac{-\varphi''(z)}{\sqrt{1+\varphi'^2}},\ D'=0,\ D''=\frac{\varphi(z)}{\sqrt{1+\varphi'^2}};\qquad (9)$$

$$\Phi_2=\frac{-\varphi''(z)dz^2+\varphi(z)dv^2}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Жумладан, катеноид ($x=a\cdot\mathrm{ch}\frac{z}{a}$ занжир чизиқни Oz атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт) учун

$$D=-\frac{1}{a},\ D'=0,\ D''=a,$$

$$\Phi_2=a\left(-\frac{dz^2}{a^2}+dv^2\right).$$

Бу квадратик формага меридиан (занжир чизиқ) ёйини ифодаловчи u ни киритайлик (229-бетдаги (8) га қаранг); бунинг учун $\frac{z}{a}=\mathrm{Ar\,sh}\,\frac{u}{a}$ ни дифференциаллаймиз:

$$\frac{dz}{a}=\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Бу вақтда иккинчи квадратик форма ушбу шаклни олади:

$$\Phi_2=a\left(-\frac{du^2}{a^2+u^2}+dv^2\right),\qquad (10)$$

$$2h\approx a\left(-\frac{du^2}{a^2+u^2}+dv^2\right).$$

4) *Тўғри геликоид*: $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{e}(v)+av\boldsymbol{k}$. Ушбуларга эгамиз:

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{e}(v),\ \boldsymbol{r}_v=u\boldsymbol{e}\left(v+\frac{\pi}{2}\right)+a\boldsymbol{k},\ W=\sqrt{a^2+u^2};$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=0,\ \boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{e}\left(v+\frac{\pi}{2}\right),\ \boldsymbol{r}_{vv}=-u\boldsymbol{e}(v);$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{-a\boldsymbol{e}\left(v+\frac{\pi}{2}\right)+u\boldsymbol{k}}{\sqrt{a^2+u^2}};$$

$$D=0,\ D'=-\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}},\ D''=0;$$

$$\Phi_2=-\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}du\,dv.$$

5) Қайтиш қирраси $\bar\rho = \bar\rho(u)$ (бу ерда u — табиий параметр) чизиқдан иборат *торс* (яъни *уринмалар сирти*) учун иккинчи квадратик формани аниқлайлик.

Торснинг тенгламаси: $r = \bar\rho(u) + v\bar\tau(u)$. Қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$r_u = \bar\tau + vk\bar\nu, \quad r_v = \bar\tau(u), \ E = 1 + v^2k^2, \ F = 1,$$

$$G = 1, \ W = vk; \ n = \frac{1}{W}[r_u r_v] = -\bar\beta;$$

$$r_{uu} = -k^2v\bar\tau + (k - v\dot k)\bar\nu + vk\sigma\bar\beta, \ r_{uv} = k\bar\nu, \ r_{vv} = 0,$$

$$D = -k\sigma v, \ D' = 0, \ D'' = 0;$$

$$\Phi_2 = -k\sigma v\, du^2.$$

Бундан

$$2h \approx |v|\,\omega\omega'^{1)},$$

бу ерда ω ва ω' — уринмалар ва бинормалларнинг қўшнилик бурчакларидир. Охирги формуладан шундай натижа чиқадики, торс ўзининг ҳар бир нуктасида ($\sigma \neq 0$) қайтиш қиррасининг ёпишма текислигидан (яъни уринма текисликдан) бир томонда ётади, чунки бу формулага $du:dv$ кирмайди.

Машқлар

185. Занжир чизиқ $z = a \cdot \mathrm{Arc}\ \frac{\rho}{a}$ тенглама билан берилган деб фараз қилиб, (7) тенгликларга асосан (10) формула исботлансин.

186. Ушбу сиртларнинг иккинчи квадратик формалари топилсин:

а) цилиндрик сирт $r = \rho(u) + ve$, $e = \mathrm{const}$, $|e| = 1$, u — табиий параметр;

б) коник сирт $r = v\rho(u)$;

в) винт сирт $r = ue(v) + [\tau(u) + mv]\,k$;

г) гиперболик параболоид $z = xy$;

д) псевдосфера $r\left\{a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right)\right\}$

ёки

$$r = a\left\{\sin u\, e(v) + \left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right)k\right\}.$$

Жавоб: а) $D = \frac{k}{\sin\omega}(\bar\tau\,\bar l\,\bar\nu)$, $D' = 0$, $D'' = 0$, бунда $\omega = (\widehat{l\,\tau})$;

б) $D = \frac{1}{W}kv(\bar\tau\,\bar\rho\,\bar\nu)$, $D' = 0$, $D'' = 0$, $W = \sqrt{v^2\rho^2 - v\bar\rho\,\bar\tau}$;

---

1) $k \approx \frac{\omega}{\Delta u}$, $\sigma \approx \frac{\omega'}{\Delta u}$ ни эслаш керак.

в) $DW = u\varphi''$, $D'W = -m$, $D''W = u^2\varphi'$, $W = \sqrt{m^2 + u^2(1+\varphi'^2)}$;

г) $\Phi_2 = \dfrac{2dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $D = -a \operatorname{ctg} u$, $D'' = a \cos u \sin u$;

д) $D = -a \operatorname{ctg} u$, $D' = 0$, $D'' = a \cos u \sin u$.

§ 90. Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, Менье теоремаси

Иккинчи квадратик форма тушунчасининг киритилиши сирт устидаги чизиқларнинг эгрилигини аниқлаб, шу билан бирга, сиртнинг ҳам эгрилигини аниқлашга имкон беради.

Фараз этайлик,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k}$$

бирор регуляр сиртнинг вектор формадаги тенгламаси бўлиб, бу ерда

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

функциялар (u, v) соҳада m марта узлуксиз дифференциалланувчи, яъни сирт ўзининг ҳар бир нуқтаси атрофида (1) шаклдаги параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин.

Бу сирт устида регуляр (Γ) чизиқни олайлик:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s); \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Бу (Γ) чизиқнинг эгрилигини k билан, унинг M нуқтасида сиртнинг бирлик нормал векторини $\boldsymbol{n}$ билан, шу нуқтадаги бош нормаль ва $\boldsymbol{n}$ вектор орасидаги бурчакни θ билан белгиласак, у ҳолда $\Phi_2 = d^2\boldsymbol{r}\boldsymbol{n} = D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2$ ни $\Phi_1 = ds^2$ га бўлиб ва $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = k\vec{\nu}$ ни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = k(\vec{\nu}\boldsymbol{n})$$

ёки

$$k \cos\theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\text{[1]}. \tag{2}$$

Бу ажойиб муносабат сиртлар назариясининг асосий формулаларидан биридир. Унинг ўнг томонига иккала форманинг E, F, G, D, D', D'' коэффициентлари киради, тайин M нуқта берилган тақдирда бу коэффициентлар ўзгармас сонлардир. Ўнг томонга $du:dv$ ҳам киради, бу эса M нуқтадаги йўналишни аниқлайди. Демак, M нуқтада умумий уринмали икки чизиқ (Γ) ва (Γ') олинса, улар учун (2) нинг, шунингдек, k' ва

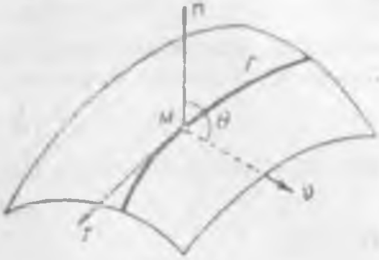
---

[1]) Бунда $(\boldsymbol{n}\vec{\nu}) = \cos\theta$ ҳисобга олинган, 203-чизма.

θ' га нисбатан тузилган худди шундай тенгликнинг ўнг томонлари ва, демак, чап томонлари ҳам тенг бўлади[1]), яъни

$$k\cos\theta = k'\cos\theta'. \tag{3}$$

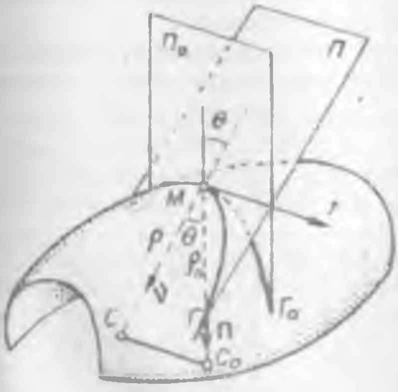
Энди M нуқтада умумий уринмали (Γ) ва (Γ') чизиқлар шу нуқтада умумий бош нормалга, демак, умумий ёпишма текисликка эга бўлса, у ҳолда $\theta=\theta'\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$ бўлиб, (3) дан $k=k'$ келиб чиқади, яъни чизиқларнинг шу нуқтадаги эгрилиги умумий бўлади. Бундан хулоса:



203-чизма.

Сирт устида ётиб, М нуқтада умумий ёпишма текисликка эга бўлган икки чизиқнинг шу нуқтадаги эгрилиги бир хилдир.

Бу хулосага асосан, берилган чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш ўрнига у билан шу нуқтада умумий ёпишма текисликка эга бўлган бошқа соддароқ чизиқнинг эгрилигини ҳисоблаш мумкин. Масалан, сиртни (Γ) чизиқнинг (Π) ёпишма текислиги билан кесганда шундай ясси (Γ') чизиқ ҳосил қилинадики, унинг ҳам ёпишма текислиги шу (Π) нинг ўзидан иборат бўлади. Шундай қилиб, (Γ) чизиқни сиртнинг ясси кесими деб фараз қилиш мумкин.



204-чизма.

Энди MT уринмадан ва сиртнинг шу M нуқтасидаги n нормалидан ўтувчи (Π_0) текисликни олайлик. Кесимда уринмаси MT дан иборат (Γ_0) чизиқ ҳосил қилинади (204-чизма). Уни биз *нормал кесим* деймиз. Унинг ёпишма текислиги (Π_0) дан иборат бўлиб, нормали n бўйича йўналган. Демак, бу (Γ_0) чизиқ учун $\theta_0=0$ ёки $\theta_0=\pi$, яъни $\cos\theta_0 = \pm 1$. (Γ) ва (Γ_0) чизиқлар умумий MT уринмага эгадир, шунинг учун юқоридаги хулосага асосан:

$$k_0\cos\theta_0 = k\cos\theta \text{ ёки } \pm k_0 = k\cos\theta. \tag{4}$$

[1]) Биз $k\cos\theta\neq 0$ деб ҳисоблаймиз; $k\cos\theta=0$, яъни $Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2=0$ ҳоли кейинроқ қаралади. Бундай тенгламани қаноатлантирувчи $du:dv$ йўналишлар *асимптотик йўналишлар* дейилади.

Фазовий чизиқ учун ҳар вақт $k>0$ деб ҳисобланади. Ясси чизиқнинг (нисбий) эгрилиги мусбат ва манфий қийматлар қабул қила олади деб юқорида (§ 47 да) айтган эдик. Шу фикрга суяниб, сиртнинг берилган нуқтасидаги нормал кесимларининг эгриликларини ишора жиҳатидан ҳам фарқлаш учун, нормал кесимнинг ботиқлиги сиртнинг n нормали томонига қаратилган булса, бу кесимнинг эгрилигини мусбат ($k_0>0$) деб, акс ҳолда манфий ($k_0<0$) деб ҳисоблаймиз, 204-чизмада $k_0>0$. Бундай келишув натижасида $\pm$ ишорали k_0 эгриликни $\tilde{k}$ оилан белгилаймиз: $\pm k_0=\tilde{k}$. Энди юқоридаги (4) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\tilde{k}=k\cos\theta \text{ [1]} \tag{5}$$

ёки эгрилик радиуслари киритилса:

$$\rho=\tilde{R}\cos\theta \text{ [2]}, \tag{6}$$

бу ерда

$$\rho=\frac{1}{k} \text{ ва } \tilde{R}=\frac{1}{\tilde{k}}.$$

(6) тенглик ушбу Менье теоремасини ифодалайди: *сирт устида ётувчи (Г) чизиқнинг М нуқтасидаги эгрилик радиуси (маркази) шу нуқтадан ўтган нормал кесимнинг эгрилик радиуси (маркази) ни (Г) чизиқнинг ёпишма текислигига проекциялаш натижаси ҳосил бўлади.*

Менье теоремаси сирт устидаги чизиқ эгрилигини топишни енгиллаштиради: (Г) чизиқнинг берилган нуқтасидаги нормал кесимнинг ($\tilde{k}$) эгрилиги *нормал эгрилик* дейилади. Демак, сиртда ётувчи чизиқнинг одатдаги k эгрилигидан ташқари, яна нормал эгрилик тушунчаси киритилади. Кейинча бундай чизиқ учун геодезик эгрилик (§ 106) тушунчасини ҳам киритамиз.

Менье ўз теоремасини дастлаб қуйидагича ифодалаган:

Сирт устида ётувчи ва сиртнинг берилган нуқтасидан утувчи ҳамма умумий уринмали чизиқларнинг эгрилик марказлари — диаметри шу нуқтадаги нормал кесимнинг эгрилик радиусига тенг булиб, ўзи эса чизиқларнинг умумий нормал текислигида ётган айланада (Менье айланасида) жойлашгандир.

MT уринма *M* нуқта атрофида айлантирилса, турли йўналишларга мос келган *Менье айланалари битта сферада ётади.*

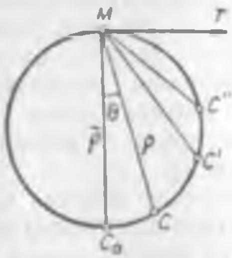
---

[1] *MT* га тик бўлган n ва ν нормаллар орасидаги θ бурчак сиртни кесувчи TMC_0 ва TMC текисликлар орасидаги бурчакка тенгдир.

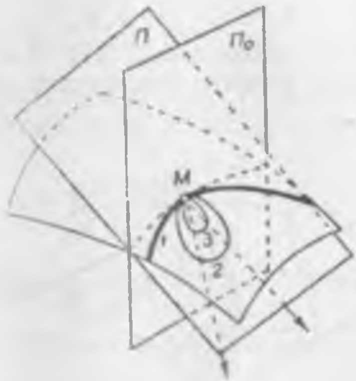
[2] Бу тенгликдан ушбу натижа чиқади: $0<\rho<|\tilde{\rho}|$.

Юқоридаги мулоҳазаларга асосланиб, M нуқтадан ўтувчи чизиқлар уринига сиртнинг шу нуқтадаги (қийшиқ) ясси кесимлари ҳақида сўзлаш мумкин. Агар кесувчи (Π) текислик n нормаль орқали ўтадиган (Π_0) текисликдан четлашиб MT атрофида айланса, у ҳолда турли (ясси) кесимлар ҳосил қилиниб, уларнинг эгрилик марказлари Менье айланасида ётади (205-чизма).

Бу кесимлар учун θ бурчак 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгарса, 205 ва 206-чизмалардан кўринадики, кесувчи (Π) текислик (Π_0) дан



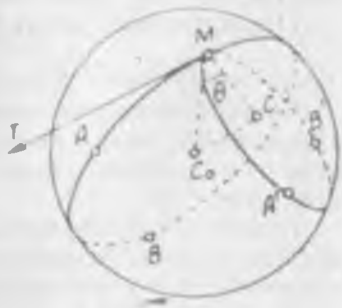
205-чизма.



206-чизма.

узоқлаша борганда, тегишли кесим ҳам кўпроқ эгила боради. Эгрилиги энг кам булган чизиқнинг ёпишма текислиги сиртга тик бўлган чизиқдан иборатдир.

Биз юқорида $k\cos\theta = 0$ ҳолини кўрмай ўтдик. Бундай йўналишдаги нормаль кесимнинг эгрилиги нолдир: $k = 0$. Бу хилдаги йўналишларни *сиртнинг асимптотик йўналишлари* деган эдик, биз уларнинг хоссалари билан § 97 да шуғулланамиз.



207-чизма.

Менье теоремаси сфера учун ўз-ўзидан равшандир. Унинг MT йўналишдаги нормал кесими катта MAB доирадир (207-чизма); шу йўналишдаги қийшиқ кесим кичик $MA'B'$ доирадир. Элементар геометрия теоремасига кўра:

$$MC = MC_0 \cos\theta.$$

Менье теоремаси ҳам шуни тасдиқлайди.

§ 91. Эгрилик индикатрисаси, сирт нуқталарини синфларга ажратиш

Сирт устида ётувчи чизиқнинг берилган M нуқтасидаги нормал эгрилиги $\tilde{k}$ ҳақида тушунча киритдик: энди олдинги параграфдаги (5) ва (2) ни ўзаро солиштириб,

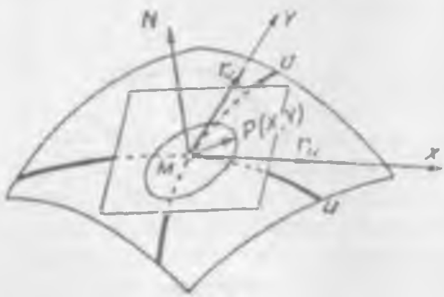
$$\tilde{k} = k\cos\theta = \frac{Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2} \tag{1}$$

ни ҳосил қиламиз.

Сиртнинг думалоқланиш нуқталарида иккала квадратик форма коэффициентлари пропорционал:

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G} = \lambda$$

бўлгани сабабли, (1) дан $\tilde{k} = \text{const} = \lambda$ деган хулосага келамиз; бу хилдаги нуқталарда сиртнинг ҳамма йўналишларидаги нормал кесимларининг эгриликлари ўзаро тенгдир. Масалан, сферанинг ҳамма нуқталари думалоқланиш нуқталаридир; ҳамма нормал кесим (катта доира)ларнинг эгриликлари бир хилдир.



208-чизма.

Чизиқнинг нормал эгрилиги тушунчаси сиртлар назарияси учун муҳим, чунки Менье теоремасига асосан, сирт устидаги ҳар қандай чизиқнинг эгрилиги унинг нормал эгрилиги билан жуда содда муносабатдадир. Бу тушунчани чуқурроқ ўрганишга киришамиз.

(1) формулани қуйидагича ёзайлик:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\tilde{R}} = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + D''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{2}$$

Кесувчи текислик нормаль атрофида айланса, яъни $du:dv$ ўзгара борса, тегишли нормал кесимнинг $\tilde{k}$ эгрилиги ҳам ўзгара боради. Биз ҳозир шу ўзгаришнинг характерини ўрганмоқчимиз.

Бунинг учун, сиртнинг M нуқтасидаги уринма текислигида ҳар бир нормал кесимнинг уринмасига шундай MP кесмани қўямизки, у шу кесимнинг эгрилик радиусининг абсолют қийматидан олинган илдизга тенг бўлсин: $MP = \sqrt{|\tilde{R}|}$. Уринма текисликда ҳосил қилинган P нуқталарнинг геометрик ўрни *эгрилик индикатрисаси* дейилади. Баъзан у *Дюпен индикатрисаси* деб ҳам айтилади. Сиртдаги ҳар бир нуқтада маълум бир индикатриса бордир (208-чизма). Биз унинг тенгламасини чиқарамиз.

Сирт ўзининг параметрик тенгламалари билан берилган деб фараз қилиб, уринма текисликда афин системани урнатамиз. Базис векторларни r_u ва r_v билан, бу системага нисбатан P нуқтанинг координаталарини ξ ва η билан белгилайлик, у ҳолда:

$$MP = \xi r_u + \eta r_v. \qquad (2')$$

$\overline{MP}$ векторнинг бирлик векторини $\bar{\tau}$ билан белгиласак, ушбуга эга бўламиз:

$$\overline{MP} = \sqrt{|R|}\,\bar{\tau} = \sqrt{|\bar{R}|}\left(r_u\frac{du}{ds} + r_v\frac{dv}{ds}\right). \qquad (3$$

(2′) ва (3) дан:

$$\xi r_u + \eta r_v = \sqrt{|\bar{R}|}\left(r_u\frac{du}{ds} + r_v\frac{dv}{ds}\right). \qquad (4)$$

Олинган M нуқта оддий бўлгани учун, r_u ва r_v векторлар коллинеар эмас, демак, (4) тенгликда r_u ва r_v олдидаги коэффициентлар нолга тенг, бундан:

$$\xi = \sqrt{|\bar{R}|}\frac{du}{ds}, \quad \eta = \sqrt{|\bar{R}|}\frac{dv}{ds}$$

ёки

$$\frac{du}{ds} = \frac{\xi}{\sqrt{|\bar{R}|}}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\eta}{\sqrt{|\bar{R}|}}.$$

Бу ифодаларни (2) га қўйсак, ушбу тенгликка келамиз:

$$\frac{|\bar{R}|}{\bar{R}} = D\xi^2 + 2D'\xi\eta + D''\eta^2,$$

аммо

$$\frac{|\bar{R}|}{\bar{R}} = \pm 1,$$

демак,

$$D\xi^2 + 2D'\xi\eta + D''\eta^2 = \pm 1. \qquad (5)$$

Индикатрисанинг тенгламаси мана шудир; ундан индикатриса иккинчи тартибли марказий чизиқ деган хулосага келамиз. Бу чизиқнинг M нуқтадан ўта олмаслигини назарга олсак, бу чизиқ — эллипс ё иккита қўшма гипербола, ёки иккита параллел тўғри чизиқ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шу муносабат билан сиртнинг нуқталари уч синфга бўлинади:

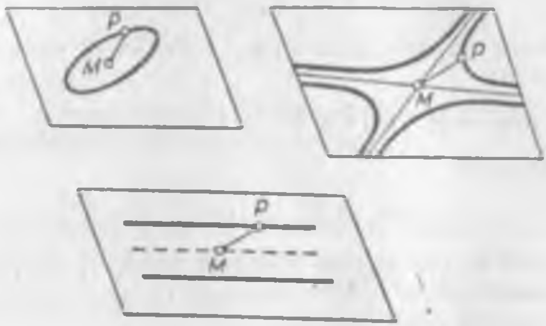
1) Индикатриса эллипсдан иборат бўлса, у ҳолда $DD'' - D'^2 > 0$ бўлиб, M — *эллиптик* нуқта дейилади.

2) Индикатриса иккита қўшни гипербола бўлган ҳолда $DD'' - D'^2 < 0$ бажарилиб, M — *гиперболик* нуқта дейилади.

3) Индикатриса иккита параллел тўгри чизиқни ифодалаганда, $DD'' - D'^2 = 0$ бўлади ва M — *параболик* нуқта дейилади (209-чизма).

Сиртнинг эллиптик, гиперболик, параболик нуқталари атрофидаги тузилишини биз 94-параграфда ўрганамиз.

Эслатма. Сиртнинг берилган нуқтасидаги ҳамма нормал кесимларнинг эгрилик марказлари шу нуқтадаги нормалда жойлашади. Эллиптик нуқтада бу марказлар уринма текислик-



209-чизма.

дан бир тарафда, гиперболик нуқтада ундан турли тарафда жойлашади, чунки биринчи ҳолда (2) квадратик форманинг ишораси сақланади, иккинчи ҳолда эса сақланмайди.

§ 92. Эйлер формуласи. Бош йўналишлар

Индикатрисанинг тенгламасини ҳар бир нуқтадаги локал (маҳаллий) афин системада ёздик. Энди, бу тенгламани соддалаштириб нормал кесимнинг сирт нуқтасида олинган йўналишга қараб тақсимланишини кўрсатувчи формулани берамиз.

Фазодаги Декарт системасининг бошини сиртнинг M нуқтасига кўчириб, уринма текисликни XOY текислиги сифатида оламиз ва OZ ўқини сиртнинг шу нуқтадаги N нормали бўйича йўналтирамиз, сўнгра сиртни $z=f(x, y)$ ёки $x=u$, $y=v$, $z=f(u, v)$ тенгламалар билан берилган деб фараз қиламиз. Бундай ҳолда нормалнинг йўналтирувчи косинуслари ушбу

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

формулалардан аниқланиб $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ бўлгани сабабли, $p=0$ ва $q=0$ бўлади. Агар $r=ui+vj+f(u, v)k$ дан O нуқтада ҳосила олсак:

$$r_u = i + pk, \quad r_v = j + qk$$

бўлиб, булардан $r_u = i$ ва $r_v = j$ натижа келиб чиқади. Шу билан биз уринма текисликдаги афин система ўрнига одатдаги

Декарт системасини олдик. Лекин ҳозиргача $O\xi$ ва $O\eta$ ўқларининг йўналиши ихтиёрий эди. Аналитик геометрия усулидан фойдаланиб, бу ўқларни индикатрисанинг бош ўқлари (яъни бош йўналишлари) бўйича йўналтирамиз.

Энди $\overline{MP} = xi + yj$, яъни $\xi = x$, $\eta = y$.

Индикатрисанинг бош йўналишларидаги нормал кесимларини *бош кесимлар* деб, уларнинг эгриликларини *бош эгриликлар* ($\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$) деб, эгрилик марказларини эса бош *эгрилик марказлари* ($\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$) деб айтамиз.

$\overline{MP}$ йўналишдаги нормал кесимнинг биринчи бош кесим билан ташкил қилган бурчагини φ десак, $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ бўлади (чунки танлаб олинган система Декарт системасидир). Координат ўқлари бош йўналишлар бўйича йўналгани сабабли $D' = 0$ (қўшмалик шарти) ва $F = 0$ (ортогоналлик шарти) бажарилади. У ҳолда $\bar{k}$ нинг ифодасида D' бўлмайди:

$$\bar{k} = D\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + D''\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = D\cos^2\varphi + D''\sin^2\varphi.$$

Шартга кўра, $\varphi = 0$ ва $\varphi = \frac{\pi}{2}$ да мос равишда биринчи ва иккинчи бош йўналишлар ҳосил қилинади, яъни

$$\varphi = 0 \text{ да } \bar{k}_1 = D\cos 0 = D,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ да } \bar{k}_2 = D''\sin\frac{\pi}{2} = D''.$$

$\bar{k}$ учун ушбу формула ҳосил қилинади:

$$\bar{k} = \bar{k}_1\cos^2\varphi + \bar{k}_2\sin^2\varphi. \tag{1}$$

Бу Эйлер формуласидир. *У, берилган нормал кесимнинг эгрилиги $\bar{k}$ ни бош эгриликлар $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ орқали ва шу нормал кесимнинг биринчи бош кесим билан ташкил қилган φ бурчаги* орқали ифодалайди.

Танланган системада индикатриса тенгламаси ҳам соддалашади:

$$Dx^2 + D''y^2 = \pm 1,$$

$$\bar{k}_1 x^2 + \bar{k}_2 y^2 = \pm 1.$$

Эйлер формуласидан муҳим хулосалар чиқариш мумкин:

1) Бош йўналишга симметрик иккита нормал кесимнинг эгрилиги бир хилдир, чунки (1) формулада φ ўрнига $-\varphi$ қўйилса, натижа ўзгармайди.

2) Бир-бирига тик бўлган ҳар қандай иккита нормал кесим эгриликларининг $\bar{k} + \bar{k}'$ йиғиндиси бош эгриликларнинг $\bar{k}_1 + \bar{k}_2$ йиғиндисига тенгдир.

Ҳақиқатан, (1) формулада φ ўрнига $\varphi+\frac{\pi}{2}$ ни қўйсак:

$$k'=\bar{k}_1\sin^2\varphi+\bar{k}_2\cos^2(\varphi)$$

бўлиб, буни яна (1) билан ҳадма-ҳад қўшсак, $k+k'=\bar{k}_1+\bar{k}_2$ келиб чиқади.

3) Агар M думалоқланиш нуқтаси булмаса ($\bar{k}_1\neq\bar{k}$), бош кесимларнинг $\bar{k}_1$ ва $\bar{k}_2$ эгриликлари k нинг экстремал қийматларидан иборатдир. Масалан, $\bar{k}_1<\bar{k}_2$ бўлсин. У ҳолда (1) дан

$$\bar{k}=\bar{k}_1+(\bar{k}_2-\bar{k}_1)\sin^2\varphi,\ k=\bar{k}_2-(\bar{k}_2-\bar{k}_1)\cos^2\varphi$$

вужудга келиб, булардан:

$$\bar{k}_1\leqslant\bar{k}\leqslant\bar{k}_2$$

ҳосил бўлади; бошқача айтганда, нормал эгрилик бош йўналишда максимум ва минимум қийматларга эришади. Муфассалроқ текширишлар шуни кўрсатадики, φ бурчакнинг 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача олинган қийматлари билан чегараланиб қолиш мумкин ва шу чегарада $\bar{k}$ эгрилик $\bar{k}_1$ дан $\bar{k}_2$ гача м о н о т о н ўсади.

§ 93. Бош эгриликлар, тўлиқ ва ўрта эгрилик

Сиртнинг берилган нуқтасидаги *бош йўналишлар* деб, шу нуқтадаги индикатрисанинг бош йўналишларини айтган эдик. Бош йўналишлардаги нормал кесимларнинг эгриликларига *бош эгриликлар* номи берилган эди. Энди сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги бош йўналишларни ва бош эгриликларни ҳисоблашга киришамиз.

Аналитик геометриядан маълумки, иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналншлари ҳар вақт ҳақиқий бўлиб, улар 1) ўзаро тик, 2) бир-бирига қўшмадир[1]. Қўшма диаметрлар (йўналишлар) координат ўқлари сифатида олиниши учун, қуйидаги иккита шарт бажарилиши зарур ва етарлидир:

$$F=0,\ D'=0,$$

бундан кўринадики, иккала квадратик формада ҳам эгри чизиқли координат дифференциалларининг купайтмаси иштирок

---

[1]) Эслатиб ўтамиз: иккинчи тартибли чизиқнинг қўшма диаметрлари деб, бири иккинчисига параллел ватарларни тенг иккига бўладиган иккита диаметрга айтилади.

этмайди. Бу шартнинг биринчиси равшан, иккинчиси эса, индикатрисанинг

$$D\xi^2 + 2D'\xi\eta + D''\eta^2 = \pm 1$$

шаклда ёзилган тенгламасидан тушунарлидир[1].

Агар бош йўналишлар координат ўқларининг йўналишлари билан устма-уст тушмаса, у ҳолда иккита бош йўналишни аниқловчи $du:dv$ ва $\delta u:\delta v$ нисбатлар ортогоналлик ва қўшмалик шартларини қаноатлантиради:

$$E\,du\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\delta v = 0, \tag{1}$$

$$D\,du\delta u + D'\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''dv\,\delta v = 0. \tag{2}$$

Бу икки тенгламани δ_u ва δ_v га нисбатан бир жинсли деб қарасак, системанинг ечилиш шартидан ушбуни ҳосил қиламиз[2].

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'dv, & D'du + D''dv \\ E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Бу тенглама $du:dv$ га нисбатан квадратик тенгламани ифодалаб, бу йўналишнинг бош йўналишдан иборат бўлиши учун зарурий ва етарли шартни беради. Уни очиқ ёзайлик:

$$(FD - ED')\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (GD' - FD'')\,dv^2 = 0,$$

бу сўнгги тенгламани эсда сақлаш учун қулай шаклда ёзиш мумкин:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

---

[1] Координат ўқларининг йўналишлари $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ чизиққа нисбатан қўшма бўлиши учун зарурий ва етарли шарт: $a_{12} = 0$.

[2] Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, 442-бетга қаранг; бу китобда тенгламаси (А) шаклдаги чизиққа нисбатан k ва k' йўналишларнинг қўшмалик шарти $a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0$ бўлиб, бунга $k = \frac{dy}{dx}$ ва $k' = \frac{\delta y}{\delta x}$ қўйилса, биз кўраётган ҳол учун текстдаги (2) тенглама вужудга келади.

Бу тенгламадан: координат чизиқларининг бош йўналишларга эга бўлиши учун, $F = D' = 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли эканини кўриш мумкин. Ҳақиқатан, $F = D' = 0$ бўлса, ундан $\begin{vmatrix} D & D'' \\ E & G \end{vmatrix} du\,dv = 0$ бўлиб, бу тенгламани эса $du = 0$, $dv = 0$ қаноатлантиради, ва аксинча, $\frac{D}{E} \neq \frac{D''}{G}$ шартда $du = 0$, $dv = 0$ келиб чиқади. Думалоқланиш нуқталарини биз олмадик, шу сабабли (1) ва (2) даги коэффициентлар пропорционал эмасдир.

$du:dv$ га нисбатан бу квадратик тенглама бўлиб, айният эмасдир, чунки фақат қуйидаги икки ҳолдагина (4) тенглама айнан бажарилади: 1) думалоқланиш нуқтасида детерминантнинг иккинчи ва учинчи сатрлари пропорционалдир; бундай нуқтада бош йўналишлар аниқмас, яъни бундай нуқтада бир-бирига тик исталган икки йўналиш бош йўналишлар ролини ўйнайди. Шу билан бирга бу нуқтада барча йўналишлардаги нормал кесимларнинг $\tilde{k}$ эгриликлари бир хилдир. Бундай нуқталарни биз олмаган эдик; 2) сиртнинг зичланиш нуқтасида $D=D'=D''=0$ бўлиб, бундай нуқтада исталган йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилиги нолга тенгдир: $\tilde{k}\equiv 0$.

Бу икки ҳолни текширмай, сиртнинг берилган нуқтасидаги бош эгриликларини ҳисоблайлик.

(3) тенгликдан иккинчи тартибли детерминантнинг сиртлари пропорционал деган натижа келиб чиқади:

$$D\,du+D'dv=\lambda(E\,du+F\,du),\quad D'du+D''dv=\lambda(F\,du+G\,dv),$$

бу ерда λ — пропорционаллик коэффициенти. Биринчи тенгликни du га ва иккинчисини dv га кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшсак:

$$D\,du^2+2D'du\,dv+D''dv^2=\lambda\,(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$$

бўлиб, демак, λ кўпайтувчи нормал кесимнинг эгрилигига тенгдир: $\lambda=\tilde{k}$ (300-бет, (1) га қаранг). Шу сабабли,

$$\begin{aligned} D\,du+D'dv&=\tilde{k}\,(E\,du+F\,dv),\\ D'du+D''dv&=\tilde{k}\,(F\,du+G\,dv). \end{aligned}\tag{5}$$

Бироқ бу ерда $du:dv$ нисбат бош йўналишга доир бўлганидан, $\tilde{k}$ ўрнига $\tilde{k}_1$ ва $\tilde{k}_2$ ни қўйиш ҳам мумкин ва бундан фойдаланиб, биз $\tilde{k}_1$ ва $\tilde{k}_2$ ни ҳам топамиз.

(5) дан

$$(D-\tilde{k}E)\,du+(D'-\tilde{k}F)\,dv=0,$$
$$(D'-\tilde{k}F)\,du+(D''-\tilde{k}G)\,dv=0.$$

Бу икки тенглама du ва dv дифференциалларга нисбатан бир жинсли системани ифодалагани учун, унинг нолдан фарқли ечимга эга бўлиш шартини ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} D-\tilde{k}E, & D'-\tilde{k}F \\ D'-\tilde{k}F, & D''-\tilde{k}G \end{vmatrix}=0$$

ёки

$$DD''-D'^2-(ED''-2FD'+GD)\tilde{k}+(EG-F^2)\,\tilde{k}^2=0.\tag{6}$$

Равшанки, бу тенгламанинг икки илдизи $\tilde{k}_1$ ва $\tilde{k}_2$ — бош эгриликлардир. Виета формулаларига кўра:

$$\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}.$$

Берилган нуқтадаги бош эгриликларнинг кўпайтмаси *сиртнинг* шу нуқтадаги *тўлиқ* (баъзан *Гаусс) эгрилиги* деб ва уларнинг ярим йиғиндиси — сиртнинг шу нуқтадаги *ўрта эгрилиги* деб аталади. Уларни биз K ва H билан белгилаймиз:

$$K = \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad 2H = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}. \tag{7}$$

Шундай қилиб, тўлиқ эгрилик биринчи ва иккинчи квадратик форма дискриминантларининг нисбатига тенгдир.

Энди (6) тенглама ушбу шаклни олади:

$$\tilde{k}^2 - 2H\tilde{k} + K = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $\tilde{k}_1$ ва $\tilde{k}_2$ — ҳар вақт ҳақиқийдир, чунки тенгламанинг дискриминанти:

$$\Delta = H^2 - K = \frac{1}{4}(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2)^2 - \tilde{k}_1\tilde{k}_2 = \frac{1}{4}(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)^2 > 0.$$

Сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилган ҳолда,

$$D = \frac{r}{W}, \quad D' = \frac{s}{W}, \quad D'' = \frac{t}{W}$$

тенгликларни эътиборга олиб, тўлиқ ва ўрта эгриликлар учун ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad 2H = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

(7) дан ушбу хулосани чиқарамиз: сиртнинг эллиптик нуқталарида $K > 0$ ва гиперболик нуқталарида $K < 0$ бўлиб, параболик нуқталарида $K = 0$.

(8) формулаларнинг биринчисидан кўринадики, ёйилувчи сирт учун $rt - s^2 = 0$ ёки $K = 0$, яъни *ёйилувчи ҳар қандай сирт учун тулиқ эгрилик нолга тенгдир* (кейинроқ бунинг тескарисини *ҳам исботлаймиз*).

Мисоллар. 1) *Сфера.* Сферанинг ҳар қандай йўналишдаги нормал кесими катта доирадир. Бу кесимнинг радиуси сфера радиусига тенг. Сферанинг исталган нуқтасидаги индикатриса айланадир, чунки унинг ҳар бир нуқтасидан $\sqrt{R}$ га тенг кесмани қўя борсак, маркази шу нуқтадаги айлана ҳосил бўлади. Тегишли формулалардан равшанки:

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad 2H = \frac{2}{R}.$$

2) *Айланма сирт* учун бош эгрилик радиусларини ва марказларини Менье теоремасидан фойдаланиб топиш мумкин. Бу сирт, координат чизиқлари параллеллар ва меридианлардан иборат системадаги қандай тенглама билан берилса ҳам (яъни профил чизиқ

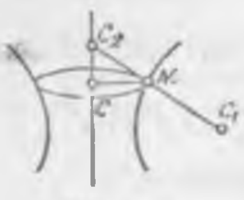
$$x = \varphi(u),\ z = \psi(u)\ \text{ё}\ z = f(\rho),\ \text{ёки}\ x = \varphi(z)$$

бўлса ҳам) сиртнинг иккала квадратик формасидаги ўрта коэффициент нолга тенг бўлади:

$$F = 0 \text{ ва } D' = 0.$$

Демак, параллел ва меридианларнинг ҳар бир нуқтадаги йўналишлари бош йўналишлардир.

Айланма сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги нормали меридиан текисликда жойлашган (228-бетга қаранг), демак, меридиан йўналишида олинган нормал кесим шу меридианнинг ўзидир, унинг эгрилик маркази, яъни битта бош марказ яна шу меридианнинг C_1 эгрилик марказидир (210-чизма), бош радиус эса меридианнинг эгрилик радиусидир:



210-чизма.

$$MC_1 = R_1 = \frac{1}{k_1}.$$

Иккинчи бош эгрилик радиуси параллелнинг радиусига тенг эмас, чунки параллел ётган текислик сиртнинг нормали орқали ўтмайди. Параллелнинг йўналишидаги нормал кесимнинг эгрилик маркази, Менье теоремасига асосан, шу параллелнинг C марказига проекцияланиши керак. Шунга кўра, иккинчи бош эгрилик маркази C_2 айланиш ўқида ётиши керак, чунки C нуқта параллел текислигида ва айланиш ўқида ётади. *Иккинчи бош кесимнинг эгрилик радиуси нормалнинг M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган MC_2 кесмасига тенг:* $MC_2 = R_2 = \frac{1}{k_2}$.

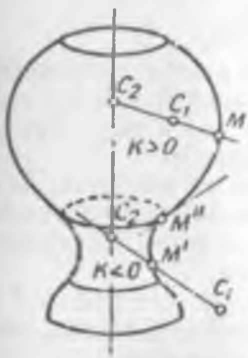
Айланма сиртнинг M нуқтасидаги тўлиқ эгриликнинг мусбат ёки манфийлиги C_1 ва C_2 нуқталарнинг вазиятига боғлиқ: $K = k_1 k_2 = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2}$. Бундан MC_1 ва MC_2 кесмалар бир хил ишорали бўлса, яъни C_1 ва C_2 нуқталар M нинг бир томонида ётса[1]) бошқача айтганда, профил чизиқ ўзининг ботиқлиги билан айланиш ўқига қаратилган бўлса, у ҳолда бундай нуқтада тўлиқ эгрилик $K > 0$ бўлади. Бу вақтда M — эллиптик

[1]) C_2 нуқта ҳар вақт айланиш ўқида ётади.

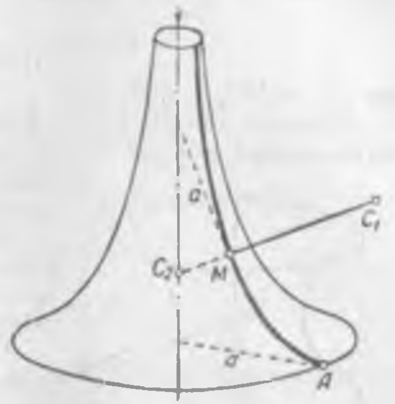
нуқтадир. Агар C_1 ва C_2 нуқталар M нинг турли томонида ётса, яъни профил чизиқ ўзининг қавариқлиги билан айланиш ўқига қаратилган бўлса, C_1M ва C_2M кесмалар турли ишорали бўлиб, $K < 0$.

Бу ҳолда текширилаётган нуқта — гиперболик нуқтадир (211-чизмада M').

Ниҳоят, профил чизиқнинг ботиқлиги қавариқликка алмашинадиган M'' нуқтасида эгрилик нолга тенг (140-бетга қаранг),



211-чизма.



212-чизма.

эгрилик радиуси MC_1 эса $\to \infty$. Тўлиқ эгрилик бундай нуқтада нолга тенг:

$$K = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2} = 0; \quad M'' \text{ — параболик нуқта.}$$

Конкрет мисол сифатида трактрисани ўз асоси атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган псевдосферани олайлик (212-чизма). Бу сирт учун $MC_1 = |R| = \frac{a^2\,{}^{1)}}{MC_2}$, бунда MC_2 — нормаль узунлиги. Трактриса ўзининг асосига қавариқлиги билан қаратилган, MC_1 ва MC_2 кесмалар тескари ишорали, демак, сиртнинг ҳамма нуқталари гиперболик бўлиб,

$$K = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2} = -\frac{1}{a^2} = \text{const}.$$

Псевдосферанинг тўлиқ эгрилиги ҳамма жойида б и р х и л, лекин манфий. Сферанинг тўлиқ эгрилиги ўзгармас, бироқ мусбатдир. Шунинг учун, биринчи сиртга п с е в д о с ф е р а (ё л ғ о н сфера) номи берилган.

---

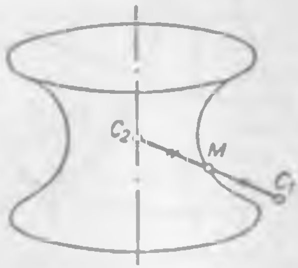
[1]) Бу муносабатнинг трактриса учун характерли эканини исботлашни ўқувчига тавсия қиламиз.

Ҳозир келтирилган мулоҳазаларни катеноидга (яъни занжир чизиқни ўз асоси атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сиртга) қўлланиш мумкин. Занжир чизиқ учун эгрилик радиусн нормаль узунлигига, яъни MC_1 кесма MC_2 кесмага тенг[1], бироқ бу занжир (профил) чизиқ айланиш ўқига ўзининг қавариқлиги билан қараганлиги учун, MC_1 ва MC_2 кесмаларининг абсолют қийматлари тенг бўлиб, ишоралари тескаридир: $MC_1 = -MC_2$, шу сабабли:

$$K = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2} = -\frac{1}{MC_1^2} < 0$$

ва $2H = MC_1 + MC_2 = 0$.

Шундай қилиб, катеноиднинг ҳамма нуқталари гиперболик нуқталардан иборат бўлиб, унинг ўрта эгрилиги нолга тенгдир (ўрта эгрилиги нолга тенг сирт *минимал сирт* дейилади).



213-чизма.

Айланма сиртга нисбатан, аслида, синтетик усул билан чиқарилган бу натижаларни аналитик йўл билан исботлаш ҳам осон.

Профил чизиқ $x = \varphi(z) > 0$ тенглама билан берилган ҳолда, уни OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт учун биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг коэффициентларини биз топган эдик (294-бетдаги (8). ва (9) га қаранг):

$$E = 1 + \varphi'^2,\ F = 0,\ G = \varphi^2,$$

$$D = -\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{1/2}},\ D' = 0,\ D'' = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

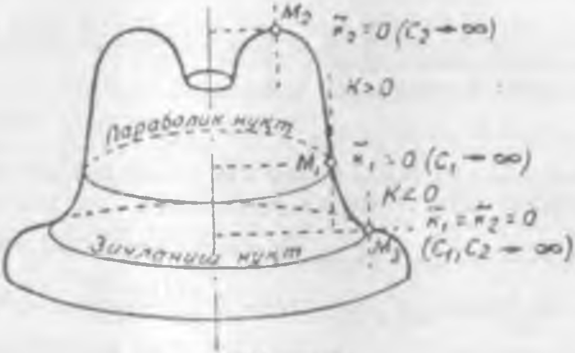
Координат чизиқлари бош йўналишлар (параллел ва меридианлар) бўйича йўналганлигидан, уларнинг эгриликларини топиш учун § 91, (1) формулада $dv = 0$ десак, меридиан эгрилиги $\tilde{k}_1 = \frac{D}{E}$ ни ва $du = 0$ десак, параллел эгрилиги $\tilde{k}_2 = \frac{D''}{G}$ ни ҳосил қиламиз. Буларга E, G, D, D'' нинг ифодаларини қўйсак:

$$\tilde{k}_1 = -\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}},\ \tilde{k}_2 = \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2}},\ R_2 = \varphi\sqrt{1+\varphi'^2},$$
$$K = \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 = -\frac{\varphi''}{\varphi(1+\varphi'^2)^2},\ 2H = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \frac{1+\varphi'^2-\varphi\varphi''}{\varphi(1+\varphi'^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

Айланма сирт нуқталарининг характери ҳақидаги юқорида чиқарилган хулосаларни мана шу (9) формуладан фойдаланиб

[1]) Буни исботлаш ўқувчига тавсия қилинади.

бевосита ҳосил қилиш мумкин. Биринчи бош кесим меридиандан иборат бўлгани сабабли, унинг $\tilde{k}_1$ эгрилиги учун кутилган формула ҳосил қилинди. Агар меридиан OZ ўқига ўзининг ботиқлиги билан қаратилган, яъни $\varphi''<0$ бўлса, $\tilde{k}_1>0$ ва меридиан OZ ўқига ўзининг қавариқлиги билан қаратилган, яъни $\varphi''>0$ бўлса, $\tilde{k}_1<0$. Эгилиш нуқтасида $\varphi''=0$ ва $\tilde{k}_1=0$ $(C_1\to\infty)$[1].



214-чизма.

Тўлиқ эгриликнинг ифодасидан кўрамизки, биринчи ҳолда $K>0$, иккинчи ҳолда $K<0$ ва учинчи ҳолда $K=0$. Шундай қилиб, айланма сиртларнинг эллиптик нуқталари профилнинг „ботиқлик нуқталари"дан, гиперболик нуқталари „қавариқлик нуқталари"дан ва, ниҳоят, параболик нуқталари „эгилиш нуқталари"дан ҳосил қилинади (214-чизма). Параболик нуқталар, айланма сиртнинг эллиптик нуқталари билан тўлган соҳасини гиперболик нуқталари билан тўлган соҳасидан ажратиб туради.

Айланма сиртнинг юқорида айтилганлардан бошқа яна параболик нуқталари бордир: уларнинг ҳар бири профил чизиқнинг шундай нуқтасидан ҳосил қилинадики, у нуқтадаги уринма OZ ўқига тик, демак, нормаль бу ўққа параллел, яъни $C_2\to\infty$ ва $\tilde{k}_2=0$ (214-чизмада M_2 нуқта).

Қайрилиш нуқтасида $\tilde{k}_1=0$ ва $C_1\to\infty$ (M_1 нуқтада уринма OZ га параллел, нормаль эса тик). Иккала ҳолда ҳам $K=0$; демак, тегишли параллеллар параболик чизиқлардир.

Ниҳоят, M_3 нуқта қайрилиш нуқтасини билдиргани ҳолда ($\tilde{k}_1=0$), ундаги уринма OZ ўқига тик бўлса, $\tilde{k}_1=\tilde{k}_2=0$ бажарилади ва бу нуқтани айлантиришдан сиртнинг зичланиш (параболик) нуқталари ҳосил қилинади.

---

[1] $\varphi(z)>0$ эканини эслатамиз.

Биз, иккинчи бош кесимнинг эгрилик радиуси: сирт (ва шу билан бирга меридиан) нормалининг M нуқтадан ўққача олинган MC_2 кесмасига тенг деган натижага келган эдик. Бу хулоса аналитик йўл билан енгил исботланади. Меридиан нормалининг узунлиги ушбуга тенг: $R_2 = \varphi \sqrt{1+\varphi'^2}$.

Машқлар

187. Ушбу сиртларнинг тўлиқ ва ўрта эгриликлари аниқлансин:
а) геликоид $r = ue(v) + avk$;
б) винт сирт $r = ue(v) + (u+v)k$;
в) $r = e(v) + (u+v)e\left(v+\frac{\pi}{2}\right) + (u+2v)k$
ёки $x = \cos v - (u+v)\sin v$, $y = \sin v + (u+v)\cos v$, $z = u + 2v$;
г) уринмалар сирти (торс) $r = \bar{\rho}(u) + v\bar{\tau}(u)$.

Жавоб: а) $\tilde{k}_1 = -\tilde{k}_2 = \frac{a}{a^2+u^2}$, $K = -\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$, $2H = 0$;

б) $K = -\frac{1}{(2u^2+1)^2}$, $2H = -\frac{2(1+v^2)}{(2u^2+1)^{3/2}}$;

в) $\tilde{k}_1 = 0$, $k_2 = -\sqrt{2}(u+v)$, $K = 0$, $2H = -\sqrt{2}(u+v)$.

188. Сиртнинг берилган нуқтасидаги нормал эгриликларининг ўрта қиймати сиртнинг ўрта эгрилигига тенг, яъни

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{k}d\theta = 2H.$$

Буни исботланг.

189. Геликоиднинг бош йўналишлари ясовчи билан винт чизиқ орасидаги бурчакни тенг иккига бўлади, яъни уларнинг ҳар бири билан 45° ли бурчак ташкил этади. Буни исботланг.

190. Берилган нуқтада $du:dv$ йўналишда ўтувчи нормал кесимнинг $\tilde{k}$ эгрилиги учун чиқарилган ифодани ушбу $\tilde{k} = \lim\limits_{l\to 0}\frac{2h}{l^2}$ формулага асосланиб исботланг.

Кўрсатма: M' дан MP уринмага (яъни уринма текисликка) $M'P$ перпендикуляр тушириб, $2h \approx Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$ ва $l \approx (\Delta s)^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ ни эътиборга олсак, $\tilde{k} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ ҳосил қилинади. (Тегишли чизма чизилсин.)

191. Менье теоремасидан ва эллипс айлананинг проекцияси бўлишидан фойдаланиб, эллипснинг учларидаги эгрилиги топилсин.

Жавоб: $\rho_{max} = \frac{a^2}{b}$, $\rho_{min} = \frac{b^2}{a}$, $a > b$.

192. Айланма сирт $r = \rho e(v) + f(\rho)k$ тенглама билан берилган. Тўлиқ ва ўрта эгрилик топилсин.

Жавоб: $K = \frac{f'(\rho)f''(\rho)}{\rho(1+f'^2)^2}$, $2H = \frac{\rho f''(\rho) + f'(\rho)[1+f'^2]}{\rho(1+f'^2)^{3/2}}$.

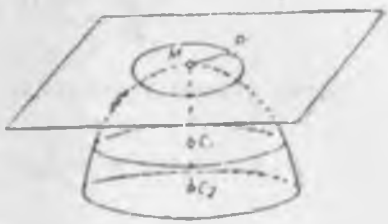
§ 94. Сиртнинг берилган нуқтаси атрофида тузилиши

Сирт назариясига бағишланган олдинги параграфларда сиртнинг берилган нуқтаси атрофидаги тузилиши ҳақида анча маълумот олдик. Энди уни чуқурлаштириш максадида сиртнинг турли типдаги нуқталарига яна қайтайлик.

1. *Эллиптик нуқта*: $DD''-D'^2>0$; биринчи квадратик форманинг дискриминанти $EG-F^2>0$, шунинг учун $K=\bar{k}_1\bar{k}_2>0$. Бу ҳолда бош эгриликлар бир хил ишорали, масалан, $\bar{k}_1>0$, $\bar{k}_2>0$ бўлади[1]). Бундан, Эйлер формуласига биноан, исталган йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилиги $\bar{k}>0$ деган хулоса келиб чиқади. Сиртнинг эллиптик нуқтасидаги ҳамма нормал кесимларнинг ботиқлиги бир томонга қаратилган. Эгрилик индикатрисаси бундай нуқтада эллипсдир:

$$\bar{k}x^2+\bar{k}_2y^2=1.$$

M нуқта атрофида сирт ўзининг уринма текислигидан бир томонда туради (215-чизма).



215-чизма

Эллипсоид, икки паллали гиперболоид, эллиптик параболоиднинг ҳамма нуқталари эллиптикдир.

Эллиптик нуқтада асимптотик йўналиш йўқ, чунки ҳамон $\bar{k}>0$.

2. *Гиперболик нуқта:* $DD''-D'^2<0$. Бу ҳолда $K=\bar{k}_1\bar{k}_2<0$, яъни $\bar{k}_1$ ва $\bar{k}_2$ турли ишорали, масалан:

$$\bar{k}_1<0,\quad \bar{k}_2>0.$$

Биринчи бош кесимнинг ботиқлиги—$\mathbf{n}$ томонига ва иккинчисиники $\mathbf{n}$ томонига қаратилган. Нормал эгрилик баъзи йўналишлар учун мусбат, баъзилари учун манфийдир. Энди $D\neq 0$ деб фараз қилсак, у ҳолда $\left(\text{бунда } \dot{u}=\frac{du}{ds},\ \dot{v}=\frac{dv}{ds}\right)$

$$\bar{k}=D\dot{u}^2+2D'\dot{u}\dot{v}+D''\dot{v}^2=\frac{1}{D}\left[(D\dot{u}+D'\dot{v})^2+(DD''-D'^2)\dot{v}^2\right]$$

тенгликдан кўринадики, $\bar{k}$ эгрилик ўз ишорасини сақламайди: бу ерда $\bar{k}>0$, $\bar{k}<0$ ва $\bar{k}=0$ бўлиши мумкин. Индикатриса иккита қўшма гиперболадир:

$$\frac{x^2}{R_1^2}-\frac{y^2}{R_2^2}=\pm 1.$$

---

[1]) Сирт нуқтасидаги нормалнинг йўналиши бизнинг ихтиёримизда бўлганлигидан, уни ҳар вақт шундай йўналтириш мумкинки, $\bar{k}_1$ ва $\bar{k}_2$ мусбат бўлсин.

Бу икки гиперболага қарашли умумий асимптоталарнинг йўналишлари, яъни

$$\tilde{k} = D\dot{u}^2 + 2D'\dot{u}\dot{v} + D''\dot{u}^2 = 0.$$

ёки

$$Ddu^2 \pm 2D'\,du\,dv + D''dv^2 = 0$$

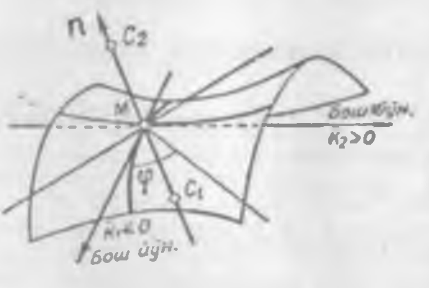
тенгламани қаноатлантирувчи $du:dv$ йўналишлар сиртнинг M нуқтасидаги икки асимптотик йўналишлардир:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-D' \pm \sqrt{-(DD'' - D'^2)}}{D''}.$$

Агар уринма текисликда ушбу

$$\tilde{k} = \tilde{k}_1 \cos^2\varphi + \tilde{k}_2 \sin^2\varphi = 0,\ \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2}}$$

бурчак коэффициентлари билан аниқланувчи иккита тўғри чизиқ ўтказсак, уларнинг йўналишларидаги нормал кесимларнинг эгриликлари нолга тенг бўлади. Гиперболик нуқтада бундай йўналишлар расо иккита. Улар уринма текисликни икки жуфт вертикал бурчакларга ажратади: биринчи бош кесим қайси бурчакка тушса, ўшандаги йўналишда олинган нормал кесимларнинг эгрилиги манфий бўлиб, бу кесимлар — n томонига, бошқача айтганда, сирт ўзининг ботиқлиги билан „паст"га қаратилган бўлади. Уринмаси қолган иккита вертикал бурчакка тушган нормал кесимларнинг эгрилиги мусбат бўлиб, бу кесимлар n томонига, бошқача айтганда, сирт ўзининг ботиқлиги билан „юқори"га қаратилган бўлади (216-чизма).

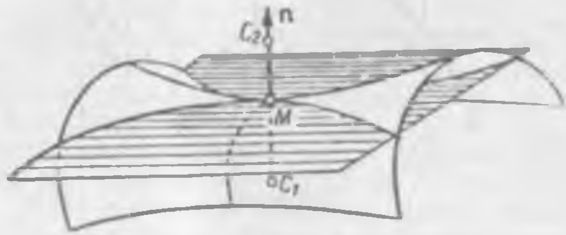


216-чизма.

Агар M нуқтани сирт устида ётган етарлича кичик ёпиқ контур билан ўраб олиб, шу контур бўйича бир марта тўла айланиб чиқмоқчи бўлсак, сиртнинг M нуқтадаги уринма текисликдан юқори турган қисмидан пастда турган қисмига икки марта тушиш ва шунингдек пастда турган қисмидан юқорида турган қисмига икки марта кўтарилиш керак бўлади. Сирт M нуқта атрофида эгарсимон тузилгандир. C_1 ва C_2 нуқталар M нуқтадаги уринма текисликнинг турли томонида ётади (217-чизма).

Бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоид — гиперболик нуқталардан иборат сиртлардир.

3. *Параболик нуқта:* $DD'' - D'^2 = 0$; $K = \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 = 0$; бу нуқтада бош эгриликлардан бирини нолга тенг, масалан, $\tilde{k}_2 = 0$ деб фараз қилиш[1]) ва умумийликни бузмасдан, $\tilde{k}_1$ ни манфий



217-чизма.

деб ҳисоблаш мумкин (акс ҳолда n нинг йўналишини ўзгартамиз). Биринчи бош кесим „паст"га қаратилган бўлиб, иккинчиси учун эса M нуқта тўғриланиш нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтада иккинчи бош кесимнинг эгрилиги 0 га тенг. Мураккаб ҳоллар текширилмаганда, бу нуқта кесим учун қайрилиш нуқтаси бўлади, кесим шу нуқтада уринманинг бир томонидан иккинчи томонига ўтади. C_2 нуқта чексизликка кетади ва C_1 нуқта n вектор томонида ётади.

Индикатриса иккита параллел тўғри чизиқдан иборат:

$$x^2 = R_1, \quad x = \pm \sqrt{R_1},$$

бу ҳолда фақат битта асимптотик йўналиш бор:

$$\tilde{k} = \tilde{k}_1 \cos^2 \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

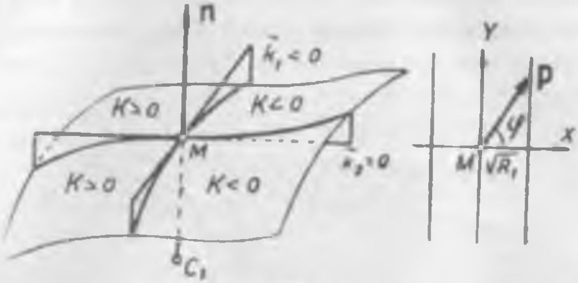
Бу йўналиш OY ўқининг йўналиши бўлиб, шу билан бирга бош йўналишдир. Сирт M нуқта атрофида „чала эгарсимон" характерга эга (218-чизма).

Сиртнинг параболик нуқталари одатда унинг эллиптик нуқталарини гиперболик нуқталаридан ажратиб турувчи чизиқни ташкил қилади. Масалан, қўнғироқдаги $M'M''M'''$ чизиқ пара-

[1]) $\tilde{k}_1$ ва $\tilde{k}_2$ нинг иккаласи бирданига нолга тенг бўла олмайди, чунки акс ҳолда исталган йўналишда $k = 0$ бўлиб, M — зичланиш нуқтаси бўлар эди.

болик чизиқдир (219-чизма). Қўнғироқнинг бу чизиқдан юқоридаги нуқталари эллиптик, пастдаги нуқталари гиперболикдир.

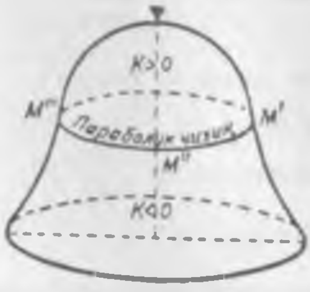
Бу фактни тушуниш қийин эмас: эллиптик, гиперболик нуқталар учун тегишинча, $K(u, v) > 0$ ва $K(u, v) < 0$ бўлиб,



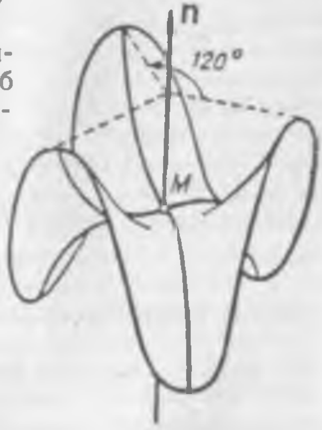
218-чизма.

параболик нуқталар учун эса $K(u, v) = 0$. Сўнгги тенглама эгри чизиқли u ва v координаталарни ўзаро боғлайди; демак, умуман, сирт устида бирор чизиқни беради. Тенгсизликлар эса эллиптик ва гиперболик нуқталарнинг қандайдир соҳаларини беради.

Сиртнинг параболик нуқта атрофидаги тузилишида хилма-хил мураккаб ҳоллар юз бериши, жумладан, чизиқ-



219-чизма.



220-чизма.

ни ташкил қилмайдиган айрим („ажралган") параболик нуқталар шу вақтнинг ўзида думалоқланиш нуқталари характерига эга бўлиши мумкин. Бундай нуқтада ҳар қандай йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилиги нолга тенг. Текисликнинг исталган нуқтаси бунга мисол бўла олади. Бу тривиал ҳолдир. 220-чизмада M нуқтаси худди шу кўрилаётган типдаги нуқтадан иборат сиртнинг мисоли келтирилган. Бу нуқтада $\bar{k} = \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$ бўлиб, барча нормал кесимлар „қайрилади". Бу сиртни шу нуқтадаги нормаль атрофида 120° га айлантирсак, сирт яна аввалги ҳолига келади. Немисча математика адабиётида бу сирт „маймун эгари" номи билан юритилади. „Маймун эгари" шундай сиртни эслатадики, у бир-бирига улашган учта тепаликдан тузилган бўлиб, ҳар бир тепалик қаршисида битта нишоб туради[1]).

Ҳамма нуқталари параболик нуқталардан иборат сирт билан биз кейинроқ шуғулланамиз — у ёйилувчи сиртдир.

S сиртнинг тайин нуқтаси атрофида тузилишини чуқурроқ билиш учун бу сиртни уринма текислик ва унга яқин текислик билан кесишиш натижасида ҳосил қилинган „кесимларини" ўрганиш фойдалидир.

Координат бошини сиртнинг оддий M нуқтасига кўчириб, нормални OZ ўқи бўйича йўналтириб ва M нуқтадаги уринма текисликни XOY текислиги сифатида қабул қилиб, сиртни $z = f(x, y)$ тенглама билан берсак, у ҳолда маълумки (302-бет)

$$f(0, 0) = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad q = \frac{\partial z}{y} = 0,$$

демак,

$$D = r, \quad D' = s, \quad D'' = t.$$

Сиртнинг уринма текисликдан четланишини ифодаловчи h учун 291-бетдаги (4) формула ушбу шаклни олади:

$$h = \frac{1}{2}(rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy) + \dots \quad .$$

Бу ерда dx ва dy дифференциаллар (орттирмалар) (0, 0, 0) нуқта атрофига доир бўлгани учун, улар ўрнига x ва y ни ёзиш мумкин:

$$h = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \dots \quad . \tag{1}$$

Энди $z = f(x, y)$ функцияни (0, 0, 0) нуқта атрофида қаторга ёйлик:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \dots \quad . \tag{2}$$

(1) билан (2) ни солиштириб қуйидагини кўрамиз: (1) тенглама сиртнинг шундай нуқталари тўпламини ифодалайдики, уларнинг ҳаммаси уринма $z = 0$ (яъни XOY) текислигидан h масофада ётади; бошқача айтганда, тенгламаси (2) дан иборат

[1]) 214-чизмада M_3 нуқта — параболик бўлиб, ундан ҳосил қилинган чизиқ—параболик ва шу билан бирга зичланиш нуқталарининг геометрик ўрнидир. Шундай қилиб, бу ерда зичланиш нуқталарининг геометрик ўрни учрайди.

сиртнинг XOY текислигига параллел $z=h$ текислик билан кесимини беради. Агар иккинчи даражали ҳадлар билангина чегаралансак, у ҳолда S нинг M га яқин нуқталари учун кесимнинг тенгламаси

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2h \tag{3}$$

бўлиб, M нуқтадаги эгрилик индикатрисаси

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1 \tag{4}$$

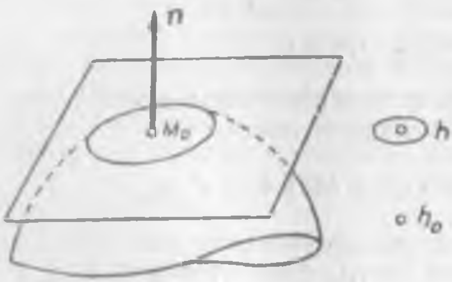
га ўхшаш эгри чизиқдир. Ҳақиқатан, индикатрисанинг радиус векторларини $1:\sqrt{2h}$ нисбатда ўзгартсак, (4) тенглама (3) га айланади.

$h=0$ деб фараз қилсак, сиртнинг уринма текислиги билан кесими ҳосил қилинади:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0. \tag{5}$$

Бу чизиқ ҳам индикатрисага ўхшашдир.

Хуллас, *S сиртни M нуқтадаги уринма текислигига параллел ва унга яқин $z=h$ текислик билан ёки шу уринма текислигининг ўзи билан кесишиш натижасида эгрилик индикатрисасига ўхшаш чизиқ ҳосил қилинади*[1].



221-чизма.

Ана шу натижага асосан, S ни M нуқтадаги уринма текислиги билан кесиб, кесимда ҳосил бўладиган (5) чизиқнигина текширамиз. Қисқалик учун биз бу чизиқни (h_0) дейлик.

Чизиқларнинг махсус нуқталари назариясига асосан (§ 21), (0, 0, 0) нуқта бу кесим учун икки каррали нуқтадир. Шу билан бирга:

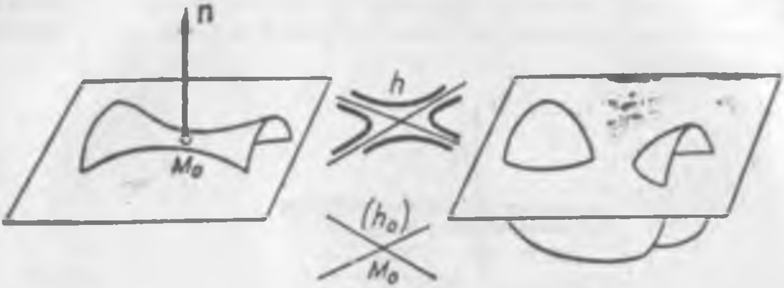
1) $rt - s^2 > 0$ бажарилса, яъни M_0 эллиптик нуқта бўлса, у ҳолда (h_0) кесим учун бу M_0 нуқта ажралган нуқтани билдиради; (3) кесим эса эллипсни ифодалайди (221-чизма). Сфера ёки эллипсоидни олганда, (h_0) чизиқ нуқта бўлиб, (h) чизиқ эса айлана ёки эллипс бўлади.

2) $rt - s^2 < 0$ бажарилса, яъни M_0 — гиперболик нуқта бўлса, у ҳолда (h_0) кесим учун M_0 тугун нуқта бўлади. Бу нуқтадаги иккита уринма ушбу

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0 \tag{6}$$

[1]) $z=h$ текислик билан кесиб ҳосил қилинган кесимни (h) билан белгилаймиз.

тенгламадан аниқланади (§ 21 га қаранг). Қўйилган шартда (6) тенглама M_0 нуқтада кесишувчи иккита ҳақиқий тўғри чизиқни ифодалайди. Бу чизиқларнинг йўналишлари сиртнинг шу нуқтадаги асимптотик йўналишларидир. Ҳақиқатан, (6) тенглама асимптотик йўналишларни аниқловчи $Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = 0$ тенгламанинг ўзидан иборат.



222-чизма.

(h) кесим бу ҳолда иккита гиперболадир (222-чизма).

3) Энди $rt - s^2 = 0$, яъни M_0 параболик нуқта бўлган ҳол умуман жуда мураккабдир. Бу вақтда (h_0) чизиқ турли кўринишни олиши мумкин. Бу ҳолни кенгроқ текшириш мақсадида (2) ёйилмани мукаммалроқ ёзайлик:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}x^2y + \right.$$

$$\left. + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}y^3\right) + \ldots = 0$$

ёки, $r \neq 0$ ва $rt - s^2 = 0$ шартида,

$$z = \frac{1}{2r}(rx + sy)^2 + \frac{1}{6}(\ldots) + \ldots = 0.$$

Аналитик геометриядан маълумки, бундай тенгламани ушбу шаклга келтириш мумкин (координат) ўқларини буриш йўли билан[1]):

$$z = ay^2 + bx^3 + cx^2y + dxy^2 + ey^3 + \ldots. \tag{7}$$

Энди h масофада кесувчи $z = h$ текисликни ўтказсак, кесимнинг тенгламаси:

$$h = ay^2 + bx^3 + cx^2y + dxy^2 + ey^3 + \ldots \tag{8}$$

бўлади, бунда h нинг кичиклик тартиби y^2 нинг кичиклик

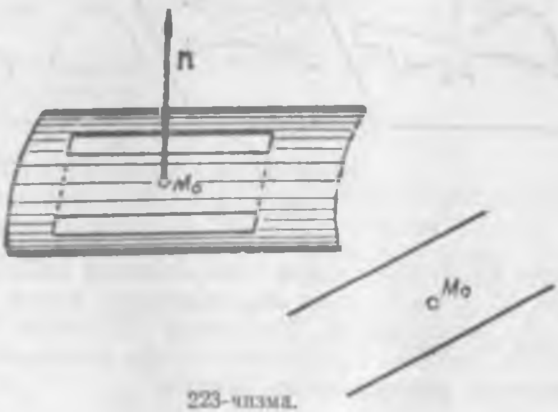
[1]) Н. И. Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, § 255, 492-бет.

тартиби билан бир хил қилиб олинган. Иккидан юқори даражали ҳадларни ташласак, кесимни ифодаловчи

$$h = ay^2 \quad \text{ёки} \quad y\sqrt{a} \pm \sqrt{h} = 0$$

тенгламалар ҳосил бўлади; булар OX ўқига параллел иккита тўғри чизиқни беради. Демак, индикатриса [ёки, барибир, (h) ёки (h_0) чизиқ] иккита параллел тўғри чизиқдир (223-чизма).

Цилиндрик сиртнинг исталган нуқтаси шу типдаги параболик нуқтадир.



223-чизма.

Биз параболик нуқтанинг энг содда ҳоли билан танишдик. Энди мураккаброқ ҳолин кўрайлик. (7) ёйилмада $a \neq 0$ фараз этиб, y^2 ва x^3 нинг (0, 0, 0) нуқтадаги кичиклик тартибини бир хил дейлик (қолган ҳадлар, демак, улардан юқори тартибли). У ҳолда кесимни ифодаловчи

$$ay^2 + bx^3 = h$$

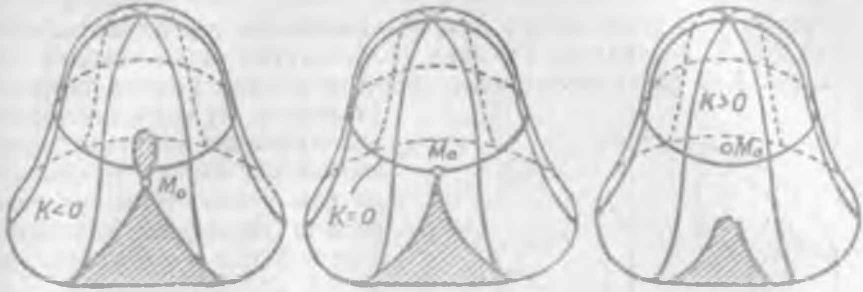
тенглама ҳосил қилинади. Бу тенглама билан ифодаланган чизиқ иккинчи тартибли чизиқ эмасдир. Бу чизиқ учун (0, 0, 0) нуқта биринчи типли қайтиш нуқтасидир ($a \neq 0$ шартида).

Учала ҳолни кўз олдимизга келтириш учун, қўнғироқни унинг гиперболик, параболик, эллиптик нуқталарида ўтказилган уринма текисликлари билан кессак, биринчи ҳолда кесимда тугун нуқтага, иккинчи ҳолда биринчи типли қайтиш нуқтасига, учинчи ҳолда эса ажралган нуқтага эга бўламиз[1]) (224-чизма).

Бундан ҳам мураккаброқ ҳолни, яъни параболик нуқта шу вақтнинг ўзида яна думалоқланиш нуқтаси характерига эга

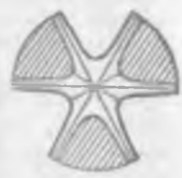
[1]) Д. Гильберт и С. Кон-фоссен, Наглядная геометрия, М. 1951, 204-бетга қаранг.

бўлган ҳолни (маймун эгарини) юқорида текширган эдик. Бундай нуқтада сирт ўзининг уринма текислиги билан 225-чизмада келтирилган чизиқ бўйлаб кесишади[1].



224-чизма.

Мисол. $x = a + b\cos u$, $z = b\sin u$ айланани OZ ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сиртни (торни) текширайлик. Бунда $a > b$ фараз қилинади.



225-чизма.

Торнинг вектор формадаги тенгламаси: $\boldsymbol{r} = (a + b\cos u)\, \boldsymbol{e}(v) + b\sin u \boldsymbol{k}$ бўлиб,

$$\boldsymbol{r}_u = -b\sin u\, \boldsymbol{e}(v) + b\cos u\, \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_v = (a + b\cos u)\, \boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E = b^2,\ F = 0,\ G = (a + b\cos u)^2,$$

$$\boldsymbol{n} = -\sin u\, \boldsymbol{k} - \cos u\, \boldsymbol{e}(v).$$

Иккинчи ҳосилалар:

$$\boldsymbol{r}_{uu} = -b\cos u\, \boldsymbol{e}(v) - b\sin u\, \boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{r}_{uv} = -b\sin u\, \boldsymbol{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_{vv} = -(a + b\cos u)\, \boldsymbol{e}(v).$$

Булардан:

$$D = b,\ D' = 0,\ D'' = \cos u\,(a + b\cos u).$$

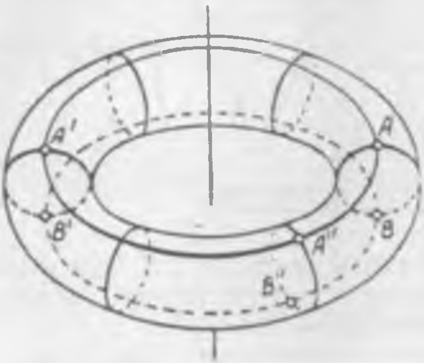
Тўлиқ эгрилик:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{a + b\cos u}.$$

Шартга кўра $a > b$; демак, $a + b\cos u$ махраж нолдан катта. Энди $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ёки $2\pi > u > \frac{3}{2}\pi$ қийматларда $K > 0$, яъни торнинг ташқи қисмида тўлиқ эгрилик мусбат; $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi$ қийматларда эса $K < 0$, яъни торнинг ички қисмида тўлиқ эгрилик

[1]) Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М., 1951. 198-бетга қаранг.

манфийдир, ниҳоят, $u = \pm \frac{\pi}{2}$ қийматларда, яъни 226-чизмадаги A ва B нуқталар чизган иккита энг юқори ва энг қуйи айланаларда (параллелларда) $K = 0$, яъни тўлиқ эгрилик нолга тенгдир. Торнинг параболик чизиқлари ана шу иккита $AA'A''$ ва $BB'B''$ айланадир. Бу икки айлана торни икки қисмга бўлади. Ҳар қайси айлананинг бирор нуқтасида уринма текислик



226-чизма.

ўтказилса, бу текислик тор билан шу айлана бўйига кесишиб, айлананинг бошқа нуқталарида ҳам уринма текислик вазифасини бажаради. Ҳақиқатан, $n = -k \sin u - e(v) \cos u$ да $u = \frac{\pi}{2}$ фараз қилсак, $n = -k$ (=const) ҳосил бўлади (v нинг турли қийматларида, яъни параллелнинг ҳамма нуқталарида нормаль ўз йўналишини сақлайди). Бу ерда қизиқ ҳодиса юз беради: сиртдаги параболик чизиқнинг бирор нуқтасида сиртга ўтказилган уринма текислик бу сирт билан кесишиб, биринчи типли қайтиш нуқтасига эга б ў л м а г а н чизиқни ҳосил қилади (бу ерда $a = 0$ эканлиги текшириб курилсин).

Э с л а т м а. Шундай қилиб, тор устидаги иккала параболик чизиқ нуқталарида ҳам сиртнинг уринма текислиги ўз вазиятини ўзгартмайди. Бизга маълумки, бундай ҳол фақат ёйилувчи сиртлар учун ўринли бўлиб, бироқ у ерда уринма текислик и с т а л г а н ясовчи нуқталарида ўз вазиятини сақлар эди. Демак, сиртдаги а й р и м чизиқларгина кўзда тутилса, бундай ҳол бошқа сиртлар учун ҳам ўринли бўлишини кўрамиз.

Машқлар

193. Сиртларнинг параболик чизиқлари топилсин:

а) $x = u^3$, $y = v + v^3$, $z = au + \frac{1}{2a} v^3$;

б) $x = u^3$, $y = v^3$, $z = u + v$;
в) $z = x^3 + xy^2$.

Жавоб: а) 1) $u = 0$; 2) $v = -\frac{1}{2}$;

б) 1) $u = 0$; 2) $v = 0$;
в) $y^2 - 3x^2 = 0$.

194. Сиртларнинг думалоқланиш нуқталари топилсин:
1) $y = \sin x$ ни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган айланма сиртнинг.

2) $xyz = a^3$ сиртнинг.

Жавоб: 1) синусоида учларидан ҳосил қилинган нуқталар сиртнинг учларидир;

2) $x^2 = y^2 = a^2$.

195. Сирт $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилган. Унинг тўлиқ ва ўрта эгрилиги топилсин. Қайси шарт бажарилганда, бу сирт ёйилувчи бўлади?

Жавоб:

$$K = \frac{-\Delta}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2H = \frac{\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{yz} & F_{zz} & F_z \\ F_y & F_z & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} & F_x \\ F_{xz} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

196. Иккинчи тартибли ҳар қандай сиртнинг кесими иккинчи тартибли чизиқдир; шу сабабли, кесувчи текислик сиртни тўғри чизиқли ясовчилари бўйича кесиб ўтса, нормал кесимнинг эгрилиги нолга айланади (нега?). Бунга асосланиб, эллипсоид, икки паллали гиперболоид ва эллиптик параболоиднинг ҳамма нуқталари эллиптик нуқталар эканлиги, бир паллали параболоид ва гиперболик параболоиднинг ҳамма нуқталари гиперболик нуқталар эканлиги, цилиндр ва конуснинг ҳамма нуқталари эса параболик нуқталар эканлиги исботлансин.

§ 95. Сферик тасвир. Гаусс эгрилиги

Сиртга нисбатан эгрилик тушунчаси табиий геометрик равишда киритилмади. Сиртнинг берилган нуқтасидаги тўлиқ эгрилиги сифатида шу нуқтадаги бош эгриликларнинг $k_1 k_2$ кўпайтмаси олинди. Ваҳолонки, ясси ёки фазовий чизиқ назариясидаги индикатриса ғоясидан фойдаланиб, сирт учун ҳам эгрилик тушунчасини бевосита киритиш мумкин.

Маркази координат бошида ётиб, радиуси бирга тенг бўлган сферанинг марказидан S сиртнинг ориентацияли нормалларига параллел нурлар ўтказсак, сиртнинг ҳар бир M нуқтаси ва, шу билан бирга, уни ўраб олувчи бирор соҳа сферага аксланиб, M нуқта сферанинг қандайдир M' нуқтасига алмашинади[1]).

M нуқта M нинг *сферик тасвири* дейилади.

S сирт $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ тенглама билан берилган бўлса, унинг бирлик нормал вектори ҳам u ва v нинг функцияси бўлади:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v). \tag{1}$$

[1]) Биз ҳозирча $K \neq 0$ деймиз, яъни ҳамма нуқталарида тўлиқ эгрилиги нолга тенг сиртни қарамаймиз.

Бу векторнинг охири сферани ёки унинг бирор қисмини чизади, бу қисм S сиртда олинган соҳага мос келиб, унинг тасвирини беради. (1) тенгламани сферанинг тенгламаси деб қараш мумкин, чунки сфера учун радиус-вектор ролини $\boldsymbol{n}$ бажаради. Бир-бирига мос M ва M' нуқталарга эгри чизиқли u ва v координатларнинг бир хил қийматлари мос келади деб фараз қиламиз.

227-чизма.

Энди, сирт устида бирор ёпиқ L чизиқ олинса (227-чизма), унга сферада яна ёпиқ L' чизиқ мос келади. L' чизиқ ичидаги (L') соҳанинг юзини S' билан ва L чизиқ ичидаги (L) соҳанинг юзини S билан белгилаб, S' нинг S га нисбатини олайлик ва L ни M нуқтагача кичрайтиб борайлик. Бу вақтда L' ҳам кичрая борганликдан, S' ва S юзлар ҳам борган сари кичрайиб, уларнинг нисбати маълум бир лимит қийматга интилади

$$\lim_{(L)\to M}\frac{S'}{S}=K_{г}. \tag{2}$$

Ана шу лимит сиртнинг *Гаусс эгрилиги* дейилади. Шундай қилиб, *сиртнинг M нуқтасидаги Гаусс эгрилиги бу нуқтани ўраб олувчи соҳага мос сферик соҳа юзининг шу соҳа юзига бўлган нисбатининг соҳа M нуқтагача кичрайиб боргандаги лимитидир.*

Гаусс эгрилигининг математик ифодасини чиқариш мақсадида, сирт ва сферанинг M ва M' нуқталаридаги нормаллари ўзаро ва уринма текисликлари ўзаро параллеллигини назарга оламиз. Бундан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]\parallel[\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v]$$

ёки

$$[\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v]=\lambda[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v].$$

λ кўпайтувчини аниқлаш учун, бу тенгликнинг иккала томонини $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ га скаляр кўпайтирамиз. У ҳолда

$$[\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v][\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]=\lambda[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]^2$$

ёки, векторлар алгебрасининг маълум формуласига асосан,

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u, & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v\\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u, & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_u^2, & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u, & \boldsymbol{r}_v^2\end{vmatrix}.$$

Детерминант элементларини биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг тегишли коэффициентлари билан алмаштириш мумкин:

$$DD'' - D'^2 = \lambda(EG - F^2).$$

Сиртнинг тўлиқ K эгрилиги λ га тенг бўлгани учун:

$$[n_u n_v] = K[r_u r_v]. \tag{3}$$

Биз $K \neq 0$ ва $r_u \neq r_v$ (M—оддий нуқта) деб фараз қилганмиз, шу сабабли, $[n_u n_v] \neq 0$.

Маълумки, (§ 80):

$$S = \iint_\Sigma |[r_u r_v]|\, du\, dv, \quad S' = \iint_\Sigma |[n_u n_v]|\, du\, dv,$$

бунда Σ — эгри чизиқли u ва v координатларнинг ўзгариш соҳаси (бу соҳа сирт ва сфера учун умумий).

(3) га асосан:

$$S' = \iint_\Sigma |K|\, |[r_u r_v]|\, du\, dv. \tag{4}$$

$(L) \to M$ да $(L') \to M'$. Энди бу интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлланамиз:

$$S' = |K_9| \iint_\Sigma |[r_u r_v]|\, du\, dv = |K_9|\, S,$$

бунда K_9 билан K нинг Σ соҳа ичида ётган бирор нуқтадаги қийматини белгиладик. Охирги тенгликдан:

$$\frac{S'}{S} = |K_9|$$

ҳосил бўлиб, демак, (2) тенглик ушбуни беради:

$$K_г = \lim_{(L)\to M} \frac{S'}{S} = \lim_{(L)\to M} |K_9| = |K|.$$

Шундай қилиб, *Гаусс эгрилиги тўлиқ эгриликнинг абсолют қийматига тенгдир.*

Сиртнинг тўлиқ эгрилиги K мусбат, ноль ва манфий бўлиши мумкин. Маъносига қараганда, Гаусс эгрилиги мусбат қийматгагина эга бўлиши керак эди (чунки у иккита юзнинг нисбати), бироқ умумийликни кўзда тутиб, Гаусс эгрилиги тўлиқ эгриликнинг ишорасига эга деб қабул қилинади:

$$K_г = K.$$

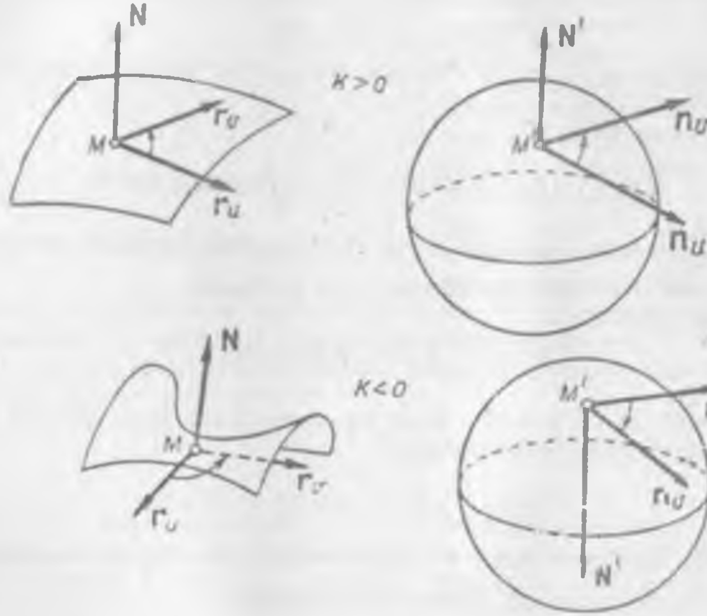
Бунинг маъносини ҳозир англаб оламиз.

Сиртнинг эллиптик нуқтасида $K > 0$, шунинг учун (3) дан равшанки, бу ҳолда

$$N = [r_u r_v] \text{ ва } N' = [n_u n_v]$$

векторлар бир томонга йўналтирилган, яъни ҳаракат r_u дан r_v га томон соат стрелкаси бўйича йўналган булса, n_u дан n_v га томон ҳам худди шундай йўналган бўлади.

Сиртнинг гиперболик нуқтасида эса $K<0$, шу сабабли иккала ҳаракатнинг йўналиши қарама-қаршидир (228-чизма).



228-чизма.

Хуллас, L контур сиртда мусбат гардишли бўлса, $K>0$ шартида L' ҳам мусбат гардишли бўлиб, $K<0$ шартида эса L' манфий гардишлидир.

Сферик тасвир тушунчаси тўлиқ (Гаусс) эгрилиги нолдан фарқли бўлган сиртлар учун баён қилинди. Ҳамма нуқталарида $K=0$ бўлган ёйилувчи сиртни параболик чизиғи мавжуд (масалан, қўнғироқ, тор каби) сиртни ёки, ниҳоят, *айрим* параболик нуқтага эга бўлган сиртни (масалан, маймун эгарини) олсак, уларнинг сферик тасвирини текшириш анча оғир ишдир. Бу ҳақда Д. Гильберт ва С. Кон-Фоссеннинг ажойиб китобига[1]) мурожаат қилишни ўқувчига тавсия қилиб, фақат қуйидагини таъкидлаб ўтамиз.

Текисликнинг сферик акси нуқтадир. Ёйилувчи сирт (масалан, уринмалар сирти) учун сферик тасвир бирор чизиқ-

[1]) Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия. Гостехиздат, 2-е изд., М., 1951, 205—210-бетлар.

дан иборат, чунки ҳар бир ясовчи бўйлаб сиртнинг нормаллари ўзаро параллел бўлгани учун, ҳар бир ясовчига нуқта мос келиб, уларнинг (бир параметрли) оиласига сферада чизиқ мос келади. Мисол тариқасида ихтиёрий цилиндрик сиртни олсак, унинг сферик акси катта доиранинг ёйидан иборатдир.

Илова. Сиртнинг сферик тасвири муносабати билан, сирт устидаги бирор соҳанинг интеграл эгрилиги тушунчасини киритиш фойдалидир.

(4) формула бўйича сферик тасвирнинг юзи мусбат ҳисобланади; бироқ бу юзни ишора билан қуйидагича таъминлаш мумкин: унинг ишораси тасвирланувчи соҳанинг тўлиқ эгрилиги K нинг ишораси билан бир хил деб фараз қилинади. У ҳолда (4) формула ўрнига ушбу формула ҳосил бўлади:

$$S = \iint_{\Sigma} K \,|[r_u r_v]|\, du\, dv = \iint_{\Sigma} K \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \qquad (5)$$

Ана шу ишора билан таъминланган юз Σ *соҳанинг интеграл эгрилиги* дейилади (немисча адабиётда кўпинча *curvatura integra* термини ишлатилади).

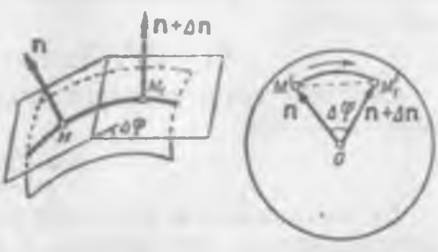
(5) ўрнига қуйидаги формулани ёзиш ҳам мумкин:

$$I = S' = \iint_{\Sigma} K\, d\sigma, \qquad (6)$$

бунда $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ — юз элементдир.

§ 96*. Сиртнинг учинчи квадратик формаси

Сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари табиий равишда вужудга келди. Унинг бирор йўналишдаги эгрилигини билиш мақсадида нормал эгрилик (k) тушунчасини киритиб, $k = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ формулага келган эдик. Сиртнинг бирор йўналишдаги эгрилигини билиш учун геометрик характерга эга бўлган усулни келтириш мумкин.



229-чизма.

Сиртнинг берилган йўналишдаги эгрилиги деб, уринма текисликларнинг қўшнилик бурчаги билан сиртдаги тегишли ёй узунлигининг нисбатига айтилади (чизиқ эгрилигини эсланг).

Уринма текисликлар орасидаги бурчак сиртнинг тегишли нормаллари орасидаги бурчакка тенг, бу сўнгги бурчак эса

Гаусс сферасидаги $\overset{\frown}{M M_1'}$ ёй билан ўлчанади (229-чизма). Демак, бу маънодаги эгриликни

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{\overset{\frown}{M'M_1'}}{MM_1}\approx\frac{|\Delta n|}{|\Delta s|}\to\frac{dn}{ds}$$

нисбат билан ўлчаш мумкин. Хуллас, $\frac{dn}{ds}$ нисбатни ва унинг $\frac{dn^2}{ds^2}$ квадратини қарашга тўғри келади. Сўнгги касрнинг махражи биринчи квадратик форма бўлиб, сурати

$$dn^2=(n_u du+n_v dv)^2=n_u^2 du^2+2n_u n_v du\,dv+n_v^2 dv^2$$

эса du ва dv га нисбатан квадратик формадир. Бу форманинг коэффициентлари одатда e, f, g билан белгиланади:

$$e=n_u^2,\ f=n_u n_v,\ g=n_v^2,$$

$$dn^2=edu^2+2f\,du\,dv+gdv^2. \tag{1}$$

Бу форма сиртнинг Гаусс тасвири учун чизиқли элемент ролини ўйнайди, чунки $n=n(u,v)$ сферанинг тенгламаси бўлиб, n радиус-вектор вазифасини бажаради. Маълумки, $d\varphi=|dn|$, шунинг учун: $d\varphi^2=dn^2$. Иккита қўшни нуқтадан ўтувчи уринма текисликлар орасидаги бурчак дифференциалининг квадратини ифодалаган (1) форма *сиртнинг учинчи квадратик формаси* дейилади:

$$\Phi_3=d\varphi^2=dn^2=edu^2+2fdu\,dv+gdv^2.$$

Сиртнинг учта квадратик формасидан аввалги иккита квадратик Φ_1 ва Φ_2 формаси катта аҳамиятга эга, чунки учинчи Φ_3 форма улар орқали ифодаланади, демак, Φ_3 — мустақил форма эмас. Бу ифодаланишни биз 211-машқда кўрамиз. Шундай қилиб,

$$\Phi_1=dr^2,\ \Phi_2=-dr\,dn,\ \Phi_3=dn^2.$$

Сиртнинг Гаусс эгрилиги ҳақида ўтган параграфда тушунча киритилган эди:

$$K=\lim_{(L)\to M}\frac{S'}{S}. \tag{2}$$

Бу тенгликда S ва S' — сирт билан сферадаги мос юзларнинг элементларидир, шу сабабли, S ва S' ўрнига уларнинг дифференциалларини олиш мумкин:

$$K=\frac{dS'}{dS}=\frac{\sqrt{eg-L^2}\,du\,dv}{\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv},$$

бундан

$$K=\frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{3}$$

Бу формулани тўлиқ эгриликнинг

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$$

ифодаси билан солиштириб, муҳим натижага келамиз:

$$(DD' - D'^2)^2 = (EG - F^2)(eg - f^2),$$

яъни *иккинчи квадратик форманинг дискриминанти биринчи ва учинчи квадратик формаларнинг дискриминантларига ўрта пропорционалдир.*

(2) ёки (3) муносабатлардан яна бир муҳим хулоса чиқариш мумкин:

ёйилувчи сиртнинг ҳамма нуқталари параболик нуқталардир (§ 82), чунки $DD' - D'^2 = 0$ да $K = 0$. Аксинча, сиртнинг ҳамма нуқталари параболик бўлса, у ёйилувчи сиртдир. Шунинг учун, (L) нинг сферик тасвирини ифодаловчи (L') нинг юзи нолга тенгдир. Бу ҳол эса бутун S сирт сферадаги нуқтага ёки чизиққа аксланганида, яъни S — ёйилувчи сирт (хусусий ҳолда текислик) бўлганнда юз беради.

Ўн бешинчи боб

СИРТ УСТИДА БАЪЗИ ЧИЗИҚЛАР ТЎРИ

§ 97. Қўшма йўналишлар. Қўшма тўр

Сирт устида чизиқларнинг иккита оиласи берилиб, сиртнинг ҳар бир нуқтасидан бу оилаларга қарашли биттадан чизиқ ўтса, сирт устида бу икки оила *турни* ташкил қилади деймиз. Биз бу бобда хоссалари диққатга сазовор бўлган тўрлар билан танишамиз.

Таъриф. *Сиртнинг берилган нуқтасида унга уринувчи икки тўғри чизиқ, шу нуқтадаги эгрилик индикатрисасига нисбатан қўшма бўлса, бу чизиқларнинг йўналишлари қўшма дейилади.*

Сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилиб, XOY текислиги сифатида M нуқтадаги уринма текислик қабул қилинса, $k_1 = \frac{dy}{dx}$, $k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}$ йўналишларнинг қўшмалик шартини [305-бет, (2)] ушбу

$$D + D'(k_1 + k_2) + D'' k_1 k_2 = 0$$

ёки

$$D\,dx\,\delta x + D'(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + D''\,dy\,\delta y = 0$$

шаклда ёзиш мумкин. Эгри чизиқли u ва v координаталарда эса бу шарт:

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0 \qquad (1)$$

кўринишни олади.

Агар (1) шарт чизиқларнинг бир параметрли икки оиласи учун бажарилса, яъни уларнинг кесишган ҳар бир нуқтасидаги уринмалари сиртнинг шу нуқтадаги индикатрисасига нисбатан қўшма бўлса, бу *икки оила ўзаро қўшма* дейилади.

(1) тенгликнинг муҳим геометрик маъноси бор. Сирт бўйича силжиш векторини $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v \delta v$ билан ва нормалнинг дифференциалини $\delta\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u \delta u + \boldsymbol{n}_v \delta_v$ билан белгилаб, иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари ўрнига уларнинг қий-

матларини тегишли формулалардаи қўйсак, ушбу тенглик ҳосил қилинади:

$$-r_u n_u du\,\delta u - r_u n_v (dv\,\delta u + du\,\delta v) - r_v n_v dv\,\delta v = 0,$$

$$(r_u du + r_v dv)(n_u \delta u + n_v \delta v) = 0$$

ёки

$$(r_u \delta u + r_v \delta v)(n_u du + n_v dv) = 0.$$

Буларни қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dr\,\delta n = 0, \quad \delta r\,dn = 0. \tag{2}$$

Сирт устида L билан белгиланган $r = r(t)$ чизиқни ва унинг ҳар бир нуқтасида сиртга уринма текисликни олайлик. Бундай текисликларнинг оиласи бир параметрлидир; оила тенгламаси

$$(R - r(t))\,n(t) = 0 \tag{3}$$

кўринишга эга. Оиланинг характеристикаси (тўғри чизиқ) мана шу (3) тенгламани ва уни t бўйича дифференциаллаш билан ҳосил қилинган ушбу

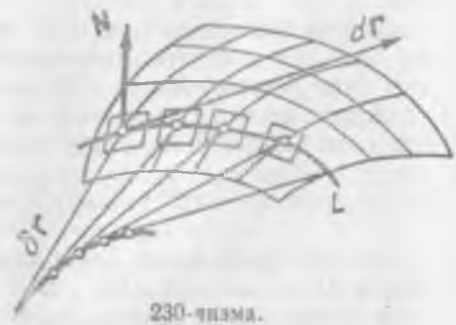
$$(R - r)\,dn - n\,dr = 0$$

тенгламани қаноатлантиради; аммо доимо $ndr = 0$, демак,

$$(R - r)\,dn = 0 \tag{4}$$

бўлиб, $\overline{MP} = R - r$ вектор сиртга уринувчи характеристика бўйлаб йўналгандир. Бу вектор сиртга ўтказилган δr вектор билан бир хил йўналишга эга, бунда δ — характеристика бўйлаб олинган дифференциалдир (δr—характеристика бўйлаб силжишни ифодалайди).

(4) тенгламага $R - r$ ўрнига унга коллинеар δr векторни қўйсак, $\delta r\,dn = 0$ тенглама келиб чиқади.



230-чизма.

(2) га асосан, $\delta r\,dn = 0$ ўрнига $dr\,\delta n = 0$ ни ёзиш мумкин; демак, *икки оиланинг қўшмалик шарти симметрикдир*. Текисликлар оиласи бир параметрли бўлгани учун, улар ёйилувчи сирт ҳосил қилади, яъни уларнинг характеристикалари ўрамага эга бўлиб, тегишли торснинг қайтиш қиррасига уринади (230-чизма).

Геометрик хулосаларга келдик. Уриниш нуқталарида характеристикаларга уринувчи чизиқларни ўтказа борсак, улар бир параметрли оилани ташкил қилади. Шунинг учун:

Чизиқларнинг бир параметрли икки қўшма оиласидан бирига қарашли чизиқнинг иккинчи оила чизиқлари билан кесишган нуқталарида бу чизиқларга ўтказилган уринмалар ёйилувчи сиртни ташкил қилади.

Юқоридаги муҳокамалардан бунинг тескариси ҳам келиб чиқади: *сиртдаги L чизиқнинг нуқталарида шу сиртга ўтказилган уринмалардан ёйилувчи сиртни (торсни) ташкил қилиш учун, бу уринмаларнинг йўналишлари L нинг уринмаларига қўшма бўлиши зарур ва етарлидир.*

Чизиқларнинг бир оиласи $f(u, v) = C$ тенглама билан берилган бўлса, унга қўшма оила ушбу биринчи тартибли

$$\left(D\frac{\partial f}{\partial v} - D'\frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \left(D'\frac{\partial f}{\partial v} - D''\frac{\partial f}{\partial u}\right)dv = 0 \tag{5}$$

дифференциал тенгламадан аниқланади. Ҳақиқатан, $f(u, v) = C$ дан $\delta u:\delta v = -\frac{\partial f}{\partial v}:\frac{\partial f}{\partial u}$ ҳосил бўлиб, буни қўшмалик шартига қўйсак, талаб қилинган тенглама келиб чиқади.

Координат чизиқларининг қўшма бўлишлик шарти ушбудан иборат:

$$D' = 0.$$

Таъриф. *Агар иккита оилага қарашли чизиқларнинг кесишган нуқталаридаги уринмалар қўшма йўналишли бўлса, бу икки оила* **қўшма** ***турни*** *ташкил қилади деб айтамиз.*

Сирт устида ихтиёрий $f(u, v) = C$ оила берилса, унга қўшма оила (5) дифференциал тенгламадан топилади; демак, ҳар бир сирт устида чексиз кўп қўшма турлар мавжуддир.

Лекин оила $\delta v:\delta u = \varphi(u, v)$ тенглама билан берилган бўлса, унга қўшма оила ушбу тенгламадан топилади:

$$(D''\varphi + D')\frac{dv}{du} + D'\varphi + D = 0.$$

Бу тенглама фақат параболик нуқтада айниятга айланади, чунки $D''\varphi + D' = 0$, $D'\varphi + D = 0$ шартлар $DD'' - D'^2 = 0$ дагина бажарилади. Демак, параболик нуқталар соҳасида асимптотик йўналишлар исталган оила билан қўшмадир.

Мисол. $r\{u + v,\ u - v,\ uv\}$ сирт ва унинг устида $u + v = \text{const}$ чизиқлар оиласи берилган. Унга қўшма оилани топайлик.

(5) тенглама қуйидагини беради:

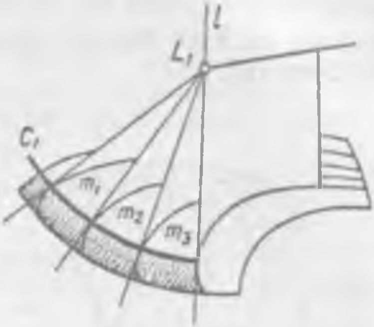
$$du - dv = 0,$$

бундан изланган оила тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$u - v = \text{const}.$$

Берилган сирт устидаги қўшма тўрларни топишни енгиллаштирувчи усулни К ё н и г с кўрсатган.

Фазода бирор l тўғри чизиқни оламиз ва S сиртни кесиб ўтадиган қилиб бу тўғри чизиқ орқали турли текисликлар ўтказамиз. Бу текисликлар S сиртни $m_1, m_2, m_3, \ldots$ чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади. Олинган l чизиқдаги бирор L_1 нуқтадан m_1, m_2, m_3, ... чизиқларга уринма тўғри чизиқлар ўтказа борсак, улар S га бирор C_1 чизиқ бўйлаб уринадиган конусни ташкил қилади. Бу конус—қайтиш қирраси битта L_1 нуқтадан иборат торсдир, L_1 нуқта ўрнига l да бошқа $L_2, L_3, \ldots$ нуқталарни олсак, сиртда яна C_2, C_3, ... чизиқларни ҳосил қиламиз (231-чизма).



231-чизма.

Сирт устидаги чизиқларнинг икки оиласи $m_1, m_2, \ldots$ ва $C_1, C_2, \ldots$ қўшма тўрни беради. Ҳақиқатан, C_1 чизиқ нуқталарида $m_1, m_2, \ldots$ чизиқларга ўтказилган уринмалар торсни ташкил қилган эди, бу эса икки оиланинг қўшмалик шартидир.

C_1 чизиқ баъзан „с о я л а р ч и з и ғ и“ дейилади, чунки L_1 нуқтада ёруғлик манбаи жойлашган бўлса, бу C_1 чизиқ сиртнинг ёритилган қисмини ёритилмаган қисмидан ажратиб туради. C_2, $C_3, \ldots$ чизиқлар ҳам шу хоссага эгадир.

Н а т и ж а. Соялар чизиқлари $C_1, C_2, \ldots$ ва ясси кесимлар қўшма тўрни ташкил қилади (Кёнигс).

Мисол тариқасида к ў ч и р м а сиртларни олайлик.

Бирор $r = r\ (u)$ чизиқ фазода ўз-ўзига параллел ҳаракат қила борганда, унинг ҳар бир нуқтаси тайин бир вектор („кўчириш вектори“) йўналишида ҳаракат қилиб, шу вектор узунлигига тенг масофани ўтса, бу чизиқнинг ҳосил қилган сирти *кўчирма сирт (поверхность переноса)* дейилади.

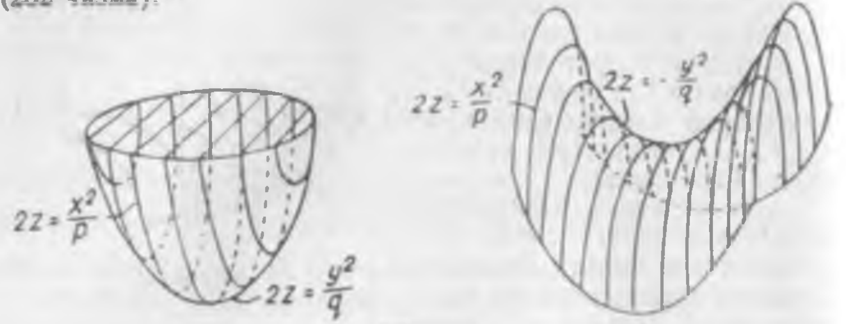
„Кўчириш вектори“ ни $\bar{\rho}$ билан белгиласак, бу векторни L чизиқ нуқталарида бирор v ўзгарувчининг функцияси деб қараш мумкин. Кўчирма сирт тенгламасини ушбу

$$R\ (u,\ v) = r\ (u) + \bar{\rho}(v) \tag{6}$$

кўринишда ёза оламиз. (6) тенгламага $r(u)$ ва $\bar{\rho}\ (v)$ функциялар симметрик равишда киради: бу шуни билдирадики, қаралаётган кўчирма сиртни икки усул билан, яъни ё $r\,(u)$ чизиқни $\bar{\rho}(v)$ чизиқ бўйлаб ёки, аксинча, $\bar{\rho}\,(v)$ чизиқни $r\,(u)$ чизиқ бўйлаб параллел кўчириш йўли билан ҳосил қилиш мумкин.

$r(u)$ ва $\overline{\rho}(v)$ чизиқлар сиртда қўшма тўрни тузади, чунки $r(u)$ (ёки $\overline{\rho}(v)$) нинг уринмалари параллел ҳаракат қилиб, цилиндрик сиртни—торсни ташкил этади.

Эллиптик параболоид $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ — кўчирма сиртдир. Тенгламаси $2z = \frac{x^2}{p}$ дан иборат параболанинг учи $2z = \frac{y^2}{q}$ парабола бўйича силжиб борса, эллиптик параболоид ҳосил бўлади (232-чизма).



232-чизма.

Худди шунинг сингари гиперболик параболоид $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ ҳам кўчирма сиртдир: $2z = \frac{x^2}{p}$ парабола ўзининг учи билан $2z = -\frac{y^2}{q}$ парабола бўйлаб параллел ҳаракат қилса, гиперболик параболоид ҳосил қилинади (232-чизма). Иккала параболоид учун ҳам ҳаракатдаги парабола билан ҳаракатсиз парабола текисликлари ўзаро тикдир.

Тўғри геликоид ҳам кўчирма сиртдир, буни исботлашни ўқувчига тавсия қиламиз.

Машқлар

197. Қуйидаги исботлансин: сирт устидаги иккита йўналишдан ҳар бири иккинчисининг сферик тасвирига тик бўлса, улар қўшмалик хоссасига эга бўлади.

Кўрсатма. $dr\,\delta n = 0$ ёки $\delta r\,dn = 0$ шартнинг геометрик маъноси очилсин.

198. Сирт берилган: $r = ue(v) + e^u k$. Бу сиртда $u - v = \text{const}$ онлага қўшма онла топилсин.

Жавоб: $u = ce^{-v}$.

199. $r = r(u)$ ва $\overline{\rho} = \overline{\rho}(v)$ чизиқлар берилган. Учлари шу чизиқларда ётган кесмалар ўрталарининг геометрик ўрни кўчирма сиртни ташкил қилади. Буни исботланг.

Жавоб: Сирт тенгламаси: $R(u, v) = \frac{r(u) + \overline{\rho}(v)}{2}$.

§ 98. Асимптотик чизиқлар

Таъриф. *Ҳар бир нуқтасидаги уринмаси сиртнинг шу нуқтадаги асимптотик йўналиши бўйича йўналган чизиқ сиртнинг асимптотик чизиғи дейилади.*

Асимптотик йўналишдаги чизиқнинг нормал эгрилиги нолга тенг: $\bar{k} = k \cos\theta = 0$ (§ 89); демак, асимптотик чизиқнинг ҳам ҳамма нуқталарида нормал эгрилиги нолга тенг.

$du : dv$ йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилиги иккинчи квадратик форманинг биринчи квадратик формага бўлган нисбатига тенг, шу сабабли, асимптотик чизиқларнинг дифференциал тенгламаси ушбудан иборат:

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = 0, \tag{1}$$

бундан $D'' \neq 0$ шартида:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-D' \pm \sqrt{-(DD''-D'^2)}}{D''}. \tag{2}$$

Сиртнинг эллиптик нуқталарида $\Delta = DD'' - D'^2 > 0$, $K > 0$; демак, сиртнинг бу нуқталардан иборат соҳасида асимптотик чизиқлар йуқ. Гиперболик нуқталарда $DD'' - D'^2 < 0$, $K < 0$; шу сабабли, (2) тенгламанинг иккита ҳақиқий илдизи бор:

$$dv : du = \varphi_1\,(u,\ v),\ dv : du = \varphi_2\,(u,\ v).$$

Бу икки дифференциал тенглама асимптотик чизиқларнинг иккита оиласини аниқлайди, улар сирт устида (тўғрироқ айтганда, гиперболик соҳада) асимптотик тўрни ташкил қилади.

Параболик нуқталарда $DD'' - D'^2 = 0$, $K = 0$; демак, (2) тенгламанинг каррали битта ҳақиқий илдизи бор: $dv : du = \varphi\,(u,\ v)$. Бу ҳолда асимптотик уринмалар устма-уст тушади. Бу тенглама асимптотик чизиқларнинг битта оиласини аниқлайди. Параболик нуқтада асимптотик уринма шу нуқтадаги бош йўналишларнинг бири бўйлаб кетади ($\bar{k}_2 = 0$ ни ҳисобга олиб, Эйлер формуласига қаралсин).

Параболик нуқталардаги асимптотик чизиқлар шу нуқталардан ўтувчи чизиқларнинг исталган оиласи билан қўшма тўрни ташкил қилади (332-бет).

Сиртнинг уринма текислигидан четланиши

$$2h = D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 + \ldots$$

эди, демак, асимптотик чизиқ бўйлаб сиртнинг уринма текислигидан четланиши du ва dv га нисбатан камида учинчи тартибли чексиз кичикдир (одатда, тартиб 2 га тенг), чунки асимптотик чизиқ бўйлаб $\Phi_2 = 0$.

Бундан ташқари, берилган нуқтадаги асимптотик уринмалар шу нуқтадаги уринма текисликнинг сирт билан кесишган чизиги учун икки каррали нуқта хизматини ўтайди; демак, асимптотик уринмалар сиртни тўрт соҳага бўлади, уларнинг иккитаси уринма текисликдан „юқорида" ётса, иккитаси „пастда" ётади.

Ниҳоят, $\bar{k} = k\cos\theta = 0$ тенгликдан муҳим хулоса чиқади. Бу ерда иккита имконият юз бериши мумкин.

1) **Чизиқнинг ҳамма нуқталарида** $k = 0$; бу чизиқ—тўғри чизиқдир. Тамомила *сирт устида жойлашган ҳар қандай тўғри чизиқ унинг асимптотик чизиғидир.*

Масалан, иккинчи тартибли сиртлардан бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоиднинг ясовчилари бу сиртларнинг асимптотик чизиқларидир. Улар икки оила ташкил қилади.

Муфассалроқ муҳокамалар ушбу тасдиқнинг тўғрилигини кўрсатади: *иккинчи тартибли сиртлар эътиборга олинмаса, тўғри чизиқли ҳар қандай сирт устида тўғри чизиқларнинг биттагина оиласи ва ундан ташқари, иккитадан ортиқ тўғри чизиқли йўналтирувчи ёта олмайди* (масалан, геликоид устида ясовчилар оиласи ва йўналтирувчи OZ ўқи ётади). Бунинг исботига тўхтамаймиз.

2) $\cos\theta = 0$, $(\widehat{n\nu}) = \theta = \frac{\pi}{2}$. Сиртнинг n нормали чизиқнинг бош нормалига тик. Аммо $n \perp \tau$, демак, n нормаль—чизиқнинг ёпишма текислигига тикдир. *Асимптотик чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги ёпишма текислиги, сиртнинг шу нуқтадаги уринма текислиги вазифасини адо этади.* Юқорида кўрилган 1) ҳолда чизиқнинг ёпишма текислиги аниқ эмас.

Гиперболик нуқталар соҳасида асимптотик чизиқларни координат чизиқлари сифатида олиш мумкин, у ҳолда (1) тенгламани $du = 0$ ва $dv = 0$ қийматлар қаноатлантириши керак, бу эса қуйидагига келтиради:

$$D = 0, \; D'' = 0. \tag{3}$$

Аксинча, (3) шарт бажарилса, координат чизиқларининг йўналиши асимптотикдир. Бундай системада иккинчи квадратик форма соддалашади:

$$\Phi_2 = 2D'du\,dv.$$

Мисол тариқасида айланма сиртнинг асимптотик чизиқларини топайлик. Профил чизиқ $x = \varphi(z)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бу ҳолда асимптотик чизиқнинг тенгламаси (§ 89 га қар.):

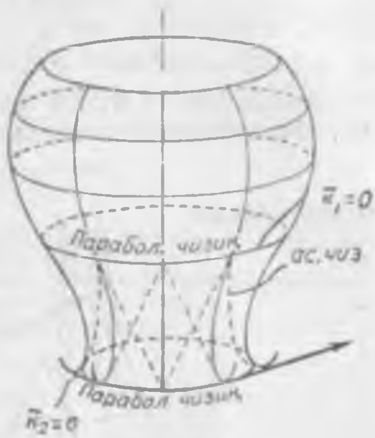
$$\frac{-\varphi'' du^2 + \varphi\, dv^2}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = 0$$

ёки

$$dv = \pm \sqrt{\frac{\varphi''}{\varphi}}\, du, \quad v = \pm \int \sqrt{\frac{\varphi''}{\varphi}}\, du + C.$$

$\varphi'' > 0$ ($K < 0$), яъни гиперболик соҳада асимптотик чизиқлар ҳақиқийдир. Улардан бирини шу соҳада C бурчакка бурсак, у асимптотик характерини йўқотмайди.

Асимптотик чизиқларнинг уринмалари асимптотик йўналишли бўлгани сабабли, бу уринмалар параболик чизиқ билан кесишганда биринчи типли қайтиш нуқталарини беради (336-бет).



233-чизма.

Меридианнинг эгилиш нуқтасидан ҳосил қилинган параболик нуқталарда $k_1 = 0$ бўлиб, нормал кесим, яъни меридианнинг ўзи асимптотик йўналишга эгадир. Шунинг учун, асимптотик чизиқлар шу параболик чизиқ нуқталарида меридианларга уриниб, эллиптик соҳага ўтмасдан, яна „орқага“ қайтадилар (бир оила чизиқлари иккинчи оила чизиқларининг давомини ташкил этади).

§ 94 да айланма сирт учун $\tilde{k}_2 = 0$ га мос келган, яъни уринмаси OZ ўқига тик бўлган нуқталардан ҳосил қилинувчи параболик чизиқни текширган эдик. Бу чизиқнинг ўзи асимптотик йўналишли бўлиб (чунки $\tilde{k}_2=0$), унинг нуқталарида асимптотик чизиқлар унга уринади. Бу параболик чизиқ асимптотик чизиқларнинг ўрамасидир (233-чизма).

Ҳақиқатан, $\tilde{k}_2 = \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi'^2(z)}}$ (310-бет), бундан $\tilde{k}_2 = 0$ қийматда $\varphi'(z) = \frac{dx}{dz} \to \infty$, яъни умумий нуқтада шу параболик чизиқ билан асимптотик чизиқнинг ҳам уринмаси OZ га тик. Хуллас, иккала параболик чизиқ нуқталарида асимптотик чизиқлар асимптотик йўналишдаги уринмаларга (тегишинча меридиан ва параллелларга) уринади.

Катеноид айланма сиртдир. Унинг учун $x = \varphi(z) = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$; $\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{1}{a^2}$. Асимптотик чизиқнинг дифференциал тенгламаси $dv = \pm\frac{du}{a}$ бўлиб, бундан икки оилани ҳосил қиламиз: $u = av + C$ ва $u = -av + C$. Бизда $u = z$ ва v — бурчакдир.

Катеноиднинг асимптотик чизиқлари винт чизиқ сингари унга ўралади, чунки $u = z$ масофа v бурчакка пропорционал равишда ўзгаради.

Псевдосфера

$$r = a\left\{\sin u\, e(v) + \left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right) k\right\}$$

ҳам айланма сиртдир.

Иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари

$$D = -a \operatorname{ctg} u,\ D' = 0,\ D'' = a \cos u \sin u$$

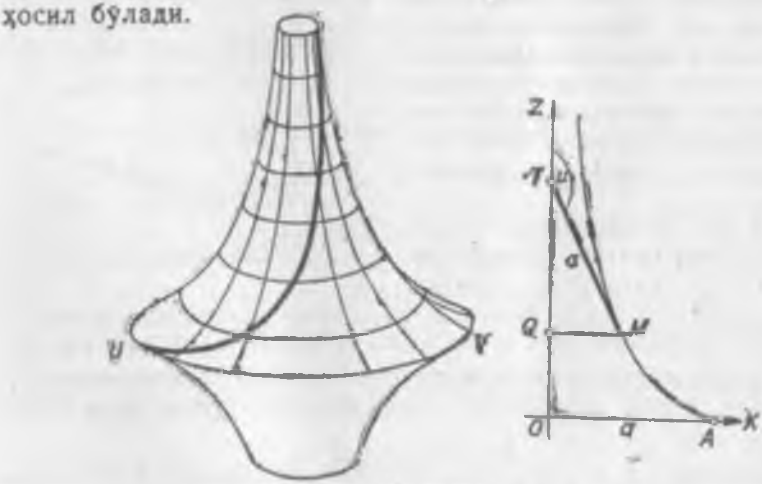
бўлиб, асимптотик чизиқ тенгламаси

$$du^2 - \sin^2 u\, dv^2 = 0,\ du = \sin u\, dv,\ du = -\sin u\, dv$$

кўринишга эга. Охирги икки тенгламадан бирини текширсак бас. Биринчисини интеграллаган:

$$v - v_0 = \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} \tag{4}$$

ҳосил бўлади.



234-чизма.

Асимптотик чизиқдаги нуқтанинг кенглиги v билан меридиандаги M нуқтага мос $u = \angle MTZ$ бурчак орасидаги бу боғланишнинг геометрик маъносини ойдинлаштириш мақсадида, OT кесмани топамиз (234-чизма).

Трактриса тенгламаларидан:

$$z = OQ = a \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + a\cos u,\ x = a \sin u$$

ва чизмадан:

$$QT = -a \cos u,$$

демак,

$$OT = OQ + QT = a \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}. \tag{5}$$

(4) ва (5) дан эса:

$$v - v_0 = \frac{1}{a} \cdot OT.$$

Шундай қилиб, меридиан ётган текислик билан бошланғич меридиан текислиги орасидаги бурчак OT кесмага пропорционалдир. Лекин OT кесма доимо ўсиб борганлиги сабабли асимптотик чизиқ сирт атрофида куп марта ўрала боради ва A нуқтада трактрисанинг уринмаси OZ ўқига тик бўлгани учун A га мос келган параболик чизиқ трактрисанинг UV қиррасини беради, шунингдек асимптотик чизиқ унинг билан кесишган нуқтасида унга уринади (234-чизма).

Биринчи оилага қарашли асимптотик чизиқлардан бири топилгандан кейин уларнинг қолганлари шу чизиқни OZ ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади. Иккинчи оила биринчига симметрикдир.

Машқлар

200. Бирор (L) чизиқнинг бош нормалларидан тузилган (S) сирт учун шу (L) нинг ўзи асимптотик чизиқдир. Буни исботланг.

Кўрсатма. (L) нинг бирор нуқтасида (S) га ўтказилган уринма текислик шу нуқтадаги уринма ва бош нормал орқали ўтади.

201. Ушбу сиртнинг асимптотик чизиқлари топилсин:

$$xyz = a(x^2 + y^2).$$

Жавоб: $\frac{x}{y} = c_1, \ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = c_2.$

202. Қуйидаги айланма сиртнинг асимптотик чизиқлари топилсин:

$$r = ue(v) + \ln uk.$$

Жавоб: $u = ce^{v}, \ u = e^{-v}.$

203. Ҳамма нуқталарида ўрта эгрилиги нолга тенг сирт *минимал сирт* дейилади. Бундай сиртнинг бош эгриликлари ва тўлиқ эгрилиги қандай хоссага эга?

Жавоб: $2H = \overset{\smile}{k}_1 + \overset{\smile}{k}_2 = 0, \ \overset{\smile}{k}_1 = -\overset{\smile}{k}_2, \ K = -\overset{\smile}{k}{}_1^2 < 0$; ҳамма нуқталари гиперболик; $\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\overset{\smile}{k}_1}{\overset{\smile}{k}_2}}$ дан $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ ҳосил бўлади. Асимптотик чизиқлар ўзаро ортогонал ва бош йўналишлар орасидаги бурчакнинг биссектрисасидир.

204. Барча айланма минимал сиртлар топилсин.

Ечиш. Профил чизиқ $x = \varphi(z)$ бўлса, $1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0$ тенгламани интеграллаймиз. Бу тенгламадан $\frac{\varphi'\varphi''}{1+\varphi'^2} = \frac{\varphi'}{\varphi}$ ҳосил бўлиб, бундан $\varphi = a\sqrt{1+\varphi'^2}$, $a = \text{const}$. Охирги тенгламадан:

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2} - 1}} = 1.$$

бу ердан эса $\ln\left(\frac{\varphi}{a}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{a^2}-1}\right)=\frac{z}{a}$, $x=\varphi(z)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$. Демак, изланган сирт катеноиддир.

205. Барча тўғри чизиқли минимал сиртлар топилсин.

Ечиш. Тўғри чизиқли сиртнинг ясовчилари асимптотик чизиқларнинг битта оиласини ташкил қилади. Иккинчи оила уларнинг ортогонал траекторияларидан тузилади (203-масала). Ҳар бир ясовчи траекторияларнинг ҳар бири учун бош нормал ролини ўйнайди, чунки бу ясовчи бинормал бўйича йўналган сирт нормалига тикдир (нега?). Демак, барча ортогонал траекториялар умумий бош нормалга эга бўлиб, улар Бертран чизиқларнинг махсус синфини ҳосил қилади. Бу синф винт чизиқлардан иборат эди (193-бет). Сирт винт чизиқнинг бош нормалларидан тузилган булиб, геликоиддир.

Жавоб: Фақат геликоид.

Эслатма. Бу хулосани соф аналитик равишда исботлаш ҳам қийин эмас. Геликоиднинг бош эгриликлари:

$$\widetilde{k}_1=-\frac{a^2+u^2}{a},\quad \widetilde{k}_2=\frac{a^2+u^2}{a},\quad 2H=\widetilde{k}_1+\widetilde{k}_2=0.$$

Буни исботланг.

§ 99. Эгрилик чизиқлари

Индикатриса тушунчаси сирт устида жойлашган чизиқларнинг яна бир ажойиб синфи билан танишиш имкониятини беради.

Таъриф. *Сирт устида ётган чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги уринмаси сиртнинг[1]) шу нуқтадаги бош йўналишларидан бири бўйича йўналган бўлса, бундай чизиқ сиртнинг эгрилик чизиғи дейилади.*

Таърифга кўра, эгрилик чизиғи бош уринмаларга уринади, бу эса унинг дифференциал теигламасини келтириб чиқаришга имкон беради:

$$\begin{vmatrix} D\,du+D'dv, & D'du+D''dv \\ E\,du+F dv, & F du+G dv \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Ҳақиқатан, сиртнинг берилган нуқтасидаги $du:dv$ йўналиш бош йўналишдан иборат бўлиши учун, (1) тенглама зарурий ва етарли шарт эди. Агар думалоқланиш ва зичланиш нуқталари қаралмаса, бу тенглама $du:dv$ га нисбатан иккинчи даражали бўлиб, унинг илдизлари ҳамма вақт ҳақиқийдир, чунки сирт ўзининг ҳар бир нуқтасида доимо иккита ҳақиқий бош

[1]) Индикатрисанинг.

йўналишга эгадир: *исталган сиртнинг ҳар бир нуқтасидан иккита эгрилик чизиғи ўтади.*

Сирт (индикатриса)нинг ҳар бир нуқтасидаги бош йўналишлари ўзаро тик бўлгани сабабли, эгрилик чизиқлари сиртда ортогонал түрни ташкил қилади ва бу тўр (1) квадрат тенгламани $du:dv$ га нисбатан ечиш натижасида ҳосил бўлган биринчи тартибли иккита

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v)$$

дифференциал тенгламадан аниқланади.

Сирт устида танлаб олинган координат турининг эгрилик чизиқлари тўридан иборат бўлиши учун, бундай координаталар системасида иккала форманинг ўрта коэффициентлари нолга тенг, яъни

$$F = 0, \quad D' = 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Бу тасдиқ исботга муҳтож эмас, чунки у бош йўналишларини аниқлаш темасида исботланган эди. Лекин шуни таъкидлаб ўтиш керакки, $F = 0$ тенглик координат чизиқларининг тиклигини, $D' = 0$ тенглик эса уларнинг қўшмалигини билдиради (эгрилик чизиқлари ортогоналлик ва қўшмалик хоссасига эгадир).

Сфера ва текислик учун (1) тенглама айнан бажарилади; демак, сфера ёки текислик устидаги ихтиёрий чизиқлар эгрилик чизиқлари вазифасини адо эта олади (сфера учун $\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}$, текислик учун $D = D' = D'' = 0$).

Айланма сиртда эгрилик чизиқлари параллел ва меридианлардан иборат, чунки улар сиртнинг ҳар бир нуқтасида бош йўналишларга уринади. Чиндан ҳам, айланма сиртда меридиан ва параллеллар координат чизиқлари сифатида олинса, бундай системада $F = 0$, $D = 0$ булади.

Родриг теоремаси. *Бирор (d) йўналиш сиртнинг бош йўналишидан иборат бўлса, ушбу тенглик ўринли бўлади:*

$$dn = -\tilde{k}\, dr, \tag{2}$$

бунда $\tilde{k}$ — шу йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилигидир. Аксинча, (d) йўналишда dn ва dr векторлар коллинеар бўлса:

$$dn = \lambda dr, \tag{3}$$

бундай (d) йўналиш бош йўналишдир.

Исбот. Ҳақиқатан, $dn \perp n$, шунинг учун dn вектор уринма текисликда ётади. Бош йўналишлардан иккинчисини (δ) билан белгиласак, dn вектор бир-бирига тик dr ва δr векторлар текислигида ётади, шу сабабли:

$$dn = \lambda_1 dr + \lambda_2 \delta r. \tag{4}$$

Энди $(d) \perp (\delta)$ ни ва бу йўналишларнинг қўшмалигини ҳисобга олсак, ушбуга эга бўламиз:

$$dr\,\delta r = 0, \quad dn\,\delta r = 0.$$

(4) нинг иккала томонини δr га кўпайтирамиз:

$$dn\,\delta r = \lambda_1 dr\,\delta r + \lambda_2 \delta r^2 = \lambda_2 \delta r^2 = 0,$$

бу ердан $\lambda_2 = 0$; демак, $dn = \lambda_1 dr$; бунинг иккала томонини dr га кўпайтирсак, $dndr = \lambda_1 dr^2$ ёки

$$-\Phi_2 = \lambda_1 \Phi_1, \quad \lambda = \frac{-\Phi_2}{\Phi_1} = -\tilde{k}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, (2) тенглик исботланди.

Аксинча, (3) тенглик ўринли бўлсин; агар (δ) йўналиш (d) йўналишга тик бўлса, (3) ни δr га кўпайтириб, $dn\delta r = 0$ ни, яъни қўшмалик шартини ҳосил қиламиз, бироқ ортогонал ва қўшма йўналиш бош йўналишдир. Демак, теорема исботланди.

Исботланган (2) формула *Родриг формуласи* дейилиб, у сиртнинг эгрилик чизиқлари учун характерлидир[1]).

Родриг формуласи (1) тенгламадан ҳам бевосита исботланиши мумкин. Ундан (306-бетга қаранг):

$$D\,du + D'dv = \tilde{k}\,(E\,du + F\,dv),$$

$$D'du + D''dv = \tilde{k}\,(F\,du + G\,dv).$$

Бу тенгликларга E, F, G, D, D', D'' нинг ифодаларини қўйиб, ҳосил қилинган тенгликларни соддалаштирсак:

$$r_u\,(dn + \tilde{k}dr) = 0, \quad r_v\,(dn + \tilde{k}dr) = 0.$$

Уринма текисликда ётган $dn + \tilde{k}dr$ вектор r_u ва r_v га тикдир. Бироқ $r_u \nparallel r_v$, шу сабабли $dn + \tilde{k}dr = 0$, бундан $dn = -\tilde{k}du$.

Эгрилик чизиқлари учун характерли (2) тенглик ўрнига, унга эквивалент иккита тенгликни ёзиш мумкин:

$$dn = -\tilde{k}_1 dr, \quad \delta n = -\tilde{k}_2 \delta r.$$

Булар (d) ва (δ) йўналишларга мос келган эгрилик чизиқлари учун ёзилган (235-чизма).

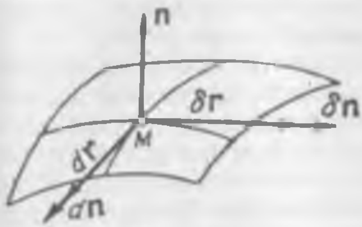
---

[1]) Бош йўналишдаги нормал кесим ясси чизиқ бўлиб, эгрилик чизиғи у билан фақат умумий уринмаға эгадир; уларнинг эгрилик радиуслари Менье формуласи билан боғланган. Бу фарқни кўзда тутиш керак. Бироқ Родриг формуласи улар учун умумийдир.

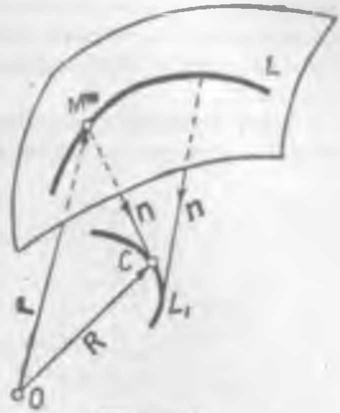
Энди эгрилик чизиқларининг соф геометрик хоссасига ўтайлик.

Теорема. *Сиртнинг эгрилик чизиғи бўйлаб олинган нормаллари ёйилувчи сиртни* (торсни) *ташкил этади.*

Бошқача айтганда, *эгрилик* L *чизиғи бўйлаб ҳаракат қилганда, сирт нормаллари ўрамага эга бўлади, яъни бу нормаллар қандайдир* L_1 *чизиққа урина боради* (236-чизма).



235-чизма.



236-чизма.

Исбот. Сирт устида $r = r(s)$ чизиқни олиб, сиртнинг бу чизиқ нуқталаридаги нормаллари ўрамага эга бўлсин деб талаб қиламиз. Нормалдаги (яъни ўрамадаги) нуқтанинг радиус-векторини R десак,

$$R = r + an \tag{5}$$

бўлади. Шартга асосан, $dR \parallel n$, $dR = \lambda n$ ёки

$$\lambda n = dr + da\, n + adn.$$

Бу тенгликни n га скаляр кўпайтирсак, $\lambda = da$ келиб чиқади; шу сабабли

$$dr + adn = 0. \tag{6}$$

Бу тенгликка кирган a коэффициент — сиртнинг M нуқтасидан қайтиш қиррасидаги (характеристик) нуқтасигача бўлган масофасидир; (6) тенглик эгрилик чизиқлари учун характерли бўлиб, унда a коэффициент $\bar{R}_1 \left(= \frac{1}{k_1}\right)$ ёки $\bar{R}_2 \left(= \frac{1}{k_2}\right)$ га тенгдир.

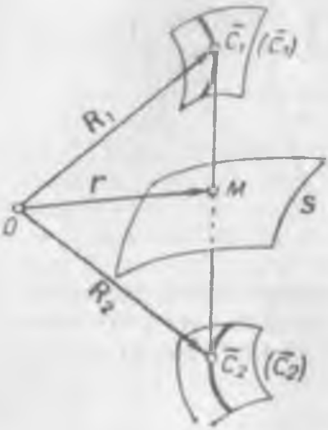
Аксинча, сирт устидаги бирор L чизиқ бўйлаб (6) шарт бажарилса, $dR \parallel n$ шарт ўринли бўлади, яъни нормаллар (5) чизиққа уринади. Ҳақиқатан, $dR = \underbrace{dr + adn}_{0} + dan = dan$.

Теорема исботланди.

Бу теоремани бошқача исботлаш ҳам мумкин. Нормаллардан тузилган сиртнинг ёйилувчи сирт бўлиш шартини ифодаловчи $drndn = 0$ тенглик эгрилик чизиқлари учун айнан бажарилади, чунки Родриг формуласига кўра, $dn \parallel dr$.

Геометрик мулоҳазалар ёрдами билан, (5) даги a коэффициентнинг бош эгрилик R_1 ёки R_2 радиусига тенг бўлишини аниқладик. § 85 да келтирилган усул бўйича ўрамадаги характеристик нуқтани қидирсак ҳам, шу хулосага келар эдик. Бу тасдиқнинг тўгрилигини текшириб кўришни ўқувчига топширамиз.

Сирт устидаги ҳар бир эгрилик чизиғига битта ўрама мос келиб, эгрилик чизиқларининг бир оиласига ўрамалар оиласи мос келади, бу ўрамалар „марказлар сиртида" ётади.



237-чизма.

Берилган S сиртга эса марказларнинг иккита сирти мос келади. S сирт устидаги нуқталарнинг характерига қараб, улар S га нисбатан турлича жойлашади. Уларнинг тенгламалари қуйидагилардан иборат:

$$\bar{R}_1 = r + \bar{R}_1 n, \quad \bar{R}_2 = r + \bar{R}_2 n.$$

Бу иккала сирт бирга қаралса, улар битта сиртнинг иккита „палласини ифодалагандай туйилади. Биз уларни (C_1) ва (C_2) билан белгилаймиз. M нуқта S сирт бўйлаб ҳаракат қилса, бош эгриликнинг $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ марказлари эволюталардан тузилган иккита сиртни чизади. Бу сиртлар S сиртнинг *эволютаси* дейилади (237-чизма).

Текисликда ва сферада ҳар қандай чизиқ — эгрилик чизиғидан иборатдир, чунки бу чизиқ бўйлаб олинган нормаллар биринчи ҳолда цилиндрни, иккинчи ҳолда конусни ташкил қилади. Улар ёйилувчи сиртлардир.

Айланма сирт меридианининг нуқталаридаги нормаллари текисликни, параллелининг нуқталаридаги нормаллари эса конусни ташкил қилади. Шундай қилиб, эгрилик чизиқлари параллель ва меридианлардан иборатдир. Бу ерда (C_1) сирт меридианлар эволюталарининг сиртига ва (C_2) сирт OZ ўқига айланади (238-чизма).

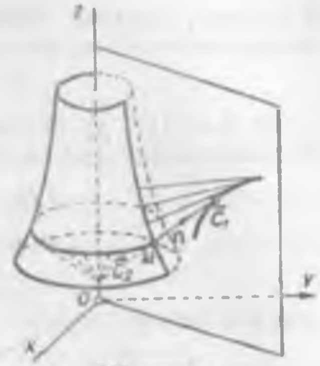
Эгрилик чизиқларини излашда Иохимсталнинг қуйидаги иккита теоремаси катта ёрдам беради:

1) *Агар S_1 ва S_2 дан иборат иккита сиртнинг кесишган чизиғи уларнинг ҳар бири учун эгрилик чизиғи бўлса, бу сиртлар ўзгармас бурчак остида кесишади.*

2. *Агар S_1 ва S_2 сиртлар бирор C чизиқ бўйлаб бир хил бурчак остида кесишса ва бу чизиқ сиртларнинг бири учун эгрилик чизиғи бўлиб хизмат қилса, у иккинчи сирт учун ҳам эгрилик чизиғи бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, 1) S_1 ва S_2 нинг C чизиқ нуқталаридаги нормаллари иккита торсни ташкил қилиб, уларнинг ясовчилари учун C чизиқ умумий ортогонал траектория бўлади. У чоғда торсларнинг ясовчилари (берилган S_1 ва S_2 сиртларнинг нормаллари) C чизиқ нуқталарида бир хил бурчак остида кесишади.

2) C чизиқ S_1 учун эгрилик чизиғи бўлгани сабабли, S_1 нинг нормаллари торсни ташкил қилади. S_2 сирт нормаллари S_1 сирт нормаллари билан C чизиқ нуқталарида бир хил бурчакларни ташкил қилади; бу нормаллардан ҳосил қилинган сирт биринчи торсни ўзгармас бурчакка буриш натижасида вужудга келади деб қаралиши мумкин. Бундай сирт—торсдир (§ 87).



238-чизма.

Хулоса. Сфера ёки текислик бирор сирт билан бир хил бурчак остида кесишса, кесишиш чизиғи шу сиртнинг эгрилик чизиғидир. Масалан, канал сиртни олганда (§ 85, 277-бет) унинг характеристикалари эгрилик чизиқларининг битта оиласини ташкил қилади, чунки канал сирт характеристикаларга уриниб, улар билан бир хил (нолга тенг) бурчак ҳосил қилади.

Мисоллар. 1. Торснинг битта ясовчисига қарашли нуқталарда нормаллар ўзаро параллелдир; бу нормаллар текисликни ташкил қилади. Эгрилик чизиқларининг бир оиласи—ясовчилар бўлиб, иккинчи оиласи уларнинг ортогонал траекторияларидир.

2. Геликоид: $r = ue\ (v) + avk$.

Бу ерда

$$E = 1,\ F = 0,\ G = a^2 + u^2;$$

$$D = 0,\ D' = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}},\ D''=0.$$

Бош йўналишлар тенгламасидан:

$$du : dv = \pm\sqrt{a^2 + u^2} \tag{A}$$

ҳосил бўлади. Ясовчининг йўналиши учун $\delta v = 0$; демак, (A) чизиқ билан ясовчи орасидаги бурчак:

$$\cos\theta = \frac{du}{\sqrt{du^2+(a^2+u^2)\,dv^2}} = \frac{du}{\sqrt{2\ du^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\theta = \pm \frac{\pi}{4}$. Ясовчилар билан винт чизиқлар ортогоналдир, шу сабабли, геликоиднинг эгрилик чизиқлари ясовчилар билан винт чизиқлар орасидаги бурчакларни тенг иккига бўлади.

(А) тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} - dv = 0, \quad \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} + dv = 0,$$

булардан, эгрилик чизиқларининг чекли тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$u = \pm a \cdot \operatorname{sh}(v - v_0).$$

3) $z = f(x, y)$ тенглама билан берилган сирт учун эгрилик чизиқларининг дифференциал тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

шаклга эгадир. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

эллипсоид учун шу тенглама:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ \frac{a^4z^2+c^4x^2}{a^4} & \frac{c^4xy}{a^2b^2} & \frac{b^4z^2c^4y^2}{b^4} \\ b^2-y^2 & xy & a^2-x^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

кўринишни олади. (7) дан z^2 нинг қийматини аниқлаб, (8) га қўйсак, қуйидаги дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$b^2\beta xy\,dx^2 - (b^2\beta x^2 - a^2\alpha y^2 + a^2b^2\gamma)\,dx\,dy - a^2\alpha xy\,dy^2 = 0, \tag{9}$$

бу ерда

$$\alpha = b^2 - c^2, \quad \beta = c^2 - a^2, \quad \gamma = a^2 - b^2.$$

(9) тенгламани интеграллаш учун уни Монж яна бир марта дифференциаллаб, сўнгра ҳосил қилинган тенглама билан (9) тенгламадан ўзгармасларни чиқарган. Бунинг натижасида иккинчи тартибли дифференциал тенглама ҳосил қилган:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Бу тенгламанинг интеграли ушбудан иборат:

$$y^2 = c_1x^2 + c_2$$

ёки

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 1.$$

Бу тенглик Монж теоремасини ифодалайди: *эллипсоиднинг эгрилик чизиқларини бу эллипсоиднинг бош диаметрал XOY текислигига проекциялаcак, эллипслар ва гиперболалар ҳосил бўлади.*

МАСАЛАЛАР, ИЛОВАЛАР

206. Гиперболик параболоиднинг эгрилик чизиқлари топилсин.

Жавоб: Дифференциал тенгламалар:

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0,$$

уларнинг интеграллари:

$$\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{a^2 + y^2}\right) = c_1, \quad x + \sqrt{a^2 + x^2} = c\left(y + \sqrt{a^2 + y^2}\right).$$

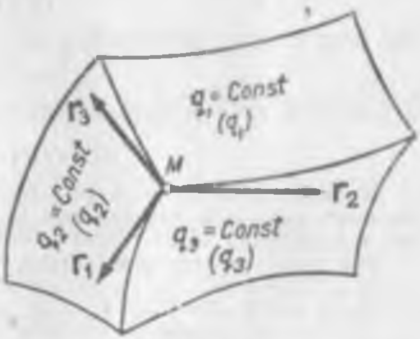
207. Эгрилик чизиқларининг нуқталаридаги уринмалари ўзларининг сферик тасвирларига параллелдир. Буни исботланг.

Кўрсатма. Родриг формулаларига қаралсин.

208. Фазода сиртларнинг бир параметрик учта оиласи берилган:

$$F_1(x, y, z) = C_1, \; F_2(x, y, z) = C_2, \; F_3(x, y, z) = C_3.$$

Фазонинг ҳар бир M нуқтасидан бу оилаларнинг ҳар бирига қарашли битта сирт ўтади. Бу сиртларнинг уринма текисликлари ҳар бир M нуқтада ортогонал бўлса, *бу учта оила уч карра ортогонал системани ташкил қилади деймиз.* Фазодаги қутб системасининг координат сиртлари: OZ ўқидан ўтувчи текисликлар, учи O нуқтада ётиб, ўқи OZ дан иборат бўлган тўғри доиравий конуслар, маркази O нуқтадаги сфералар оилалари уч карра ортогонал системани ташкил қилади. Цилиндрик координат системасининг сиртлари ҳам шундайдир[1]).



239-чизма.

Дюпен теоремаси. Уч каррали ортогонал системани ташкил қилувчи оилалардан иккитасига қарашли исталган икки сирт ўзаро эгрилик чизиқлари бўйича кесишади (239-чизма).

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$q_1 = F_1(x, y, z), \; q_2 = F_2(x, y, z), \; q_3 = F_3(x, y, z).$$

Фазода q_1, q_2, q_3 ни M нуқтанинг эгри чизиқли координаталари деб, яъни унинг r радиус-векторини шу параметрларнинг функциялари

$$r = r(q_1, q_2, q_3)$$

деб қараш мумкин.

[1]) Мусхелишвили, Аналитическая геометрия, § 61, 62 га қаранг.

Агар $q_3 = C_3 = \text{const}$ фараз қилинса, сиртларнинг ушбу

$$r = r(q_1, q_2, C_3)$$

ёки

$$F_3(x, y, z) = C_3$$

тенглама билан берилган учинчи оиласи ҳосил қилинади (бунда параметрлар q_1, q_2). Уни биз (q_3) билан белгилаймиз.

$r_i = \frac{\partial r}{\partial q_i}$ векторлар координата чизиқларига уриниб r_1 ва r_2 векторлар эса (q_3) га уринади.

Шартга кўра:

$$r_1 r_2 = 0, \quad r_2 r_3 = 0, \quad r_3 r_1 = 0. \tag{10}$$

Бу тенгликларни, мос равишда q_3, q_1 ва q_2 бўйича дифференциаллаб, натижаларни қуйидагича белгилайлик:

$$r_{13} r_2 + r_1 r_{23} = 0, \quad r_{21} r_3 + r_2 r_{31} = 0, \quad r_{32} r_1 + r_3 r_{12} = 0. \tag{11}$$

Агар (11) тенгликларни қўшиб, 2 га қисқартсак, у ҳолда:

$$r_{13} r_2 + r_{23} r_1 + r_{12} r_3 = 0$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликдан (11) нинг биринчи тенглигини айирсак, натижада $r_{12} r_3 = 0$ келиб чиқади; шу сингари $r_{23} r_1 = 0$ ва $r_{31} r_2 = 0$. Демак, $r = r(q_1, q_2, C_3)$ сирт учун

$$r_2 r_3 = 0, \quad r_1 r_3 = 0, \quad r_{12} r_3 = 0;$$

булардан r_1, r_2 ва r_{12} векторлар компланар деган хулосага келамиз, яъни

$$r_1 r_2 r_{12} = 0$$

ёки, эски u ва v параметрларга қайтсак,

$$r_u r_v r_{uv} = 0.$$

Шу сабабли, $D' = 0$, лекин шартга асосан,

$$F = r_1 r_2 = r_u r_v = 0.$$

Қаралаётган $F_3(x, y, z) = C_3$ сирт учун координат чизиқлари, яъни бу сиртнинг биринчи ва иккинчи оила сиртлари билан кесишган чизиқлари эгрилик чизиқларидир. Қолган икки оилага бу мулоҳазаларни қўлланинг.

209. Ушбу сиртлар оилаларининг уч карра ортогоналлиги исботлансин:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \; y = C_2 x, \; x^2 + y^2 = C_3 z^2;$

б) $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 x, \; z = C_2 y, \; (x^2 + y^2 + z^2)^2 = C_3 (y^2 + z^2).$

210. Дюпен теоремаси иккинчи тартибли марказий сиртларга қўллансин:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad a > b > c.$$

Бу сиртни фокусдош „уч карра ортогонал оилага“ киритилсин:

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1, \; \lambda \text{ — параметр.}$$

Фокусдош бу оилалар эгрилик чизиқлари бўйича кесишади. Исботланг.

211. Сиртнинг биринчи, иккинчи, учинчи квадратик формалари орасидаги ушбу боғланиш исботлансин:

$$K\Phi_1 - 2H\Phi_2 + \Phi_3 = 0. \tag{12}$$

Исбот. Сирт устидаги исталган силжишни бош йўналишлар бўйича силжишларга ёйиш мумкин:

$$dr = d_1 r + d_2 r, \quad dn = d_1 n + d_2 n = -(\bar{k}_1 d_1 r + \bar{k}_2 d_2 r).$$

Булардан

$$\Phi_1 = dr^2 = d_1 r^2 + d_2 r^2,$$

$$\Phi_2 = -dr dn = (\bar{k}_1 d_1 r^2 + \bar{k}_2 d_2 r^2),$$

$$\Phi_3 = dn^2 = \bar{k}_1^2 d_1 r^2 + \bar{k}_2^2 d_2 r^2.$$

Бу уч тенгламадан $d_1 r^2$, $d_2 r^2$ ни йўқотамиз:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & 1 & 1 \\ \Phi_2 & \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \\ \Phi_3 & \bar{k}_1^2 & \bar{k}_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Энди $\bar{k}_2 - \bar{k}_1$ ни нолдан фарқли фараз этиб, детерминантни очсак, талаб қилинган (12) муносабат келиб чиқади. Ундан:

$$e = 2HD - KE, \quad f = 2HD' - KF, \quad g = 2HD'' - KG.$$

212. Қуйидаги Эннепер-Бельтрами теоремаси исботлансин:
Асимптотик чизиқ буралмасининг квадрати сиртнинг тескари ишора билан олинган тўлиқ эгрилигига тенг.

$$\sigma^2 = -K \quad \text{ёки} \quad \sigma = \pm\sqrt{-K}.$$

Исбот. Асимптотик чизиқ бўйлаб силжиганимизда, сиртнинг нормали бу чизиқнинг бинормали бўйлаб йўналган бўлади: $n = \pm\bar{\beta}$. Буни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dn}{ds} = \pm\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \pm\sigma\bar{\nu},$$

демак, $\sigma^2 = \frac{dn^2}{ds^2} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1}$. Аммо асимптотик чизиқ нуқталарида $\Phi_2 = 0$; (12) га асосан, $\frac{\Phi_3}{\Phi_1} = -K$.

§ 100*. Яна тўғри чизиқли сиртлар ҳақида

Тўғри чизиқли сиртни олайлик:

$$r(u, v) = \bar{\rho}(u) + vl(u).$$

Бундан:

$$r_{uu} = \bar{\rho}'' + vl'', \quad r_{uv} = l', \quad r_{vv} = 0.$$

Сиртнинг бирлик нормали:

$$n = \frac{[\bar{\rho}' l] + v[l' l]}{W}.$$

Иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари:

$$D = r_{uu} n = \frac{1}{W}(av^2 + bv + c), \quad D' = \frac{1}{W}d, \quad D'' = 0$$

бўлиб, бу ерда

$$a = (l''l'l), \quad b = (\bar{\rho}''l'l) + (l''\bar{\rho}'l),$$

$$c = (\bar{\rho}''\bar{\rho}'l), \quad d = (ll'\bar{\rho}').$$

Асимптотик чизиқнинг дифференциал тенгламаси қуйидаги шаклни олади:

$$[(av^2 + bv + c)\,du + 2d \cdot dv]\,du = 0. \qquad (1)$$

Сиртнинг тўлиқ эгрилиги:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{-d^2}{W^4}. \qquad (2)$$

(1) тенгламадан $du = 0$ келиб чиқади, яъни ясовчилар асимптотик чизиқларнинг битта оиласини ташкил қилади. Иккинчи оила

$$(av^2 + bv + c)\,du + 2d \cdot dv = 0 \qquad (3)$$

тенгламадан аниқланади.

Юқорида биз $d = (ll'\bar{\rho}') \neq 0$ ҳолга мос келган чизиқли сиртни қийшиқ сирт деб атадик ва унинг хоссаларини текширдик. Унинг ҳамма нуқталарида, (2) га асосан, $K < 0$, яъни бу нуқталарнинг ҳаммаси гиперболикдир.

Энди $d = (ll'\bar{\rho}') = 0$ ни оламиз, яъни ёйилувчи сиртга яна қайтамиз. (3) тенглама бу ҳолда яна $du = 0$ ни беради; шундай қилиб, асимптотик чизиқларнинг иккала оиласи ҳам бирлашиб, ясовчилар оиласидан иборат бўлади.

Текширилаётган ҳолда (2) дан: $K = 0$ келиб чиқади; демак, ёйилувчи сиртнинг тўлиқ эгрилиги нолга тенгдир. Бу фактни § 86 (280-бет) ва § 89 да бошқа усул билан тайинлаган эдик.

Бош эгриликларнинг иккаласи ҳам нолга тенг бўла олмайди, чунки биз зичланиш нуқтасини ҳозирча қарамаймиз. Бу ерда $\bar{k}_2 = 0$, $\bar{k}_1 < 0$ деб фараз қилиш мумкин (315-бет) ва $\bar{k}_2 = 0$ га мос келган асимптотик чизиқ шу вақтнинг ўзида яна эгрилик чизиғи вазифасини ҳам адо этади. Сиртнинг ҳамма нуқталари параболикдир.

Тескари теорема. *Агар сиртнинг ҳамма нуқталари параболик, яъни $K = 0$ бўлса, бу сирт албатта ёйилувчи сирт бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, $K = 0$, $(\bar{k}_2 = 0, \bar{k}_1 < 0)$, бўлса, у ҳолда сиртнинг асимптотик чизиқларидан тузилган иккала оила ҳам эгрилик чизиқларининг битта оиласи билан устма-уст тушади. Шу йўналишдаги силжиш, Родриг формуласига асосан, $dn = -\bar{k}_2 dr = 0$, яъни асимптотик чизиқ бўйлаб сирт нормалининг бирлик вектори ўзгармасдир: $n = \text{const} = n^\circ = \pm \bar{\beta}$. Сиртнинг битта асимптотик чизиғи нуқталаридаги уринма текисликлар ўзгармайди.

Хуллас, асимптотик чизиқлар бир параметрли (тўғри) чизиқлар оиласини ташкил қилиб, бундай ҳар бир чизиқнинг нуқталаридаги уринма текисликлар ўз вазиятини ўзгартмаганлиги сабабли, бу текисликлар оиласи ҳам бир параметрли бўлади ва сирт улар учун ўрама ролини ўйнайди. Маълумки, бир параметрли уринма текисликларга эга бўлган сирт учун ёйилувчилик хоссаси ўринлидир. Теорема исботланди.

Машқлар

213. Ҳамма нуқталари зичланиш нуқталаридан иборат сиртнинг текислик эканлиги исботлансин.

214. Ҳамма нуқталари думалоқланиш нуқталаридан иборат сиртнинг сфера эканлиги исботлансин.

Ўн олтинчи боб

СИРТЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАРИ ВА ТЕНГЛАМАЛАРИ

§ 101. Тензорлар анализида белгилашлар

Ёзувни қисқартиш мақсадида бундан буён сирт устидаги нуқтанинг эгри чизиқли координаталарини u^1 ва u^2 билан белгилаб, бу координаталар бўйича олинган ҳосилаларни тегишли индекслар билан таъминлаймиз, яъни:

$$r = r(u, v) = r(u^1, u^2),$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u^1} = r_1, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial u^2} = r_2.$$

$$\frac{\partial n}{\partial u} = \frac{\partial n}{\partial u^1} = n_1, \quad \frac{\partial n}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial u^2} = n_2,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^1} = r_{11}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} = r_{12}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2 \partial u^2} = r_{22}.$$

Биринчи, иккинчи ва учинчи квадратик форма коэффициентларини тегишинча g_{11}, g_{12}, g_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{22} билан белгиласак, яъни

$$E = g_{11} = r_1 r_1 = r_1^2, \; F = g_{12} = r_1 r_2, \; G = g_{22} = r_2 r_2 = r_2^2,$$

$$D = b_{11} = r_{11} n = -r_1 n_1, \; D' = b_{12} = r_{12} n = -r_1 n_2,$$
$$D'' = b_{22} = r_{22} n = -r_2 n_2,$$

$$e = c_{11} = n_1 n_1 = n_1^2, \; f = c_{12} = n_1 n_2, \; g = c_{22} = n_2 n_2 = n_2^2,$$

у ҳолда квадратик формалар учун қисқача ёзиш имконияти туғилади:

$$\Phi_1 = ds^2 = dr^2 = g_{11} du^1 du^1 + 2 g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^2 du^2 =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

$$\Phi_2 = d^2 r n = -dr dn = b_{11} du^1 du^1 + 2 b_{12} du^1 du^2 + b_{22} du^2 du^2 =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

$$\Phi_3 = dn^2 = c_{11}du^1du^1 + 2c_{12}du^1du^2 + c_{22}du\, d^2u^2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} c_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}.$$

Бу тенгликларни ёзишда g_{ik}, b_{ik}, c_{ik} символларнинг i, k индексларга нисбатан симметриклиги, яъни

$$g_{ik} = g_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}$$

бўлиши эътиборга олинади.

А. Эйнштейннинг таклифи билан тензорлар анализида

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha}b^{\alpha} = a_1b^1 + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$$

кўринишдаги йиғиндини қисқа шаклда қуйидагича ёзиш қабул қилинган:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha}b^{\alpha} = a_{\alpha}b^{\alpha},$$

бу ерда йиғинди α индекс бўйича 1 дан n гача олинади. Йиғиш индекслари одатда юнонча ҳарфлар билан белгиланади (α, β, γ, δ, ...), лекин лозим бўлганда, латин ҳарфларини ҳам шу мақсадда ишлатаверамиз. Қабул қилинган шартга кўра:

$$\Phi_1 = ds^2 = g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta},$$

$$\Phi_2 = d^2rn = b_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta},$$

$$\Phi_3 = dn^2 = c_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}.$$

Мисол тариқасида dr нинг ифодасини „тензор форма“да ёзайлик:

$$dr = r_1du^1 + r_2du^2 = r_{\alpha}du^{\alpha}.$$

Квадратик форма коэффициентлари симметрик шаклни олади:

$$g_{ik} = r_ir_k, \quad b_{ik} = r_{ik}n = -r_in_k = -r_kn_i, \quad c_{ik} = n_in_k.$$

Йиғиш индекси икки ўлчовли фазода 1 дан 2 гача, n ўлчовли фазода 1 дан n гача олинади.

Биринчи квадратик форманинг дискриминантини g билан белгилаб, g_{ik} элементнинг келтирилган минорини g^{ik} билан белгилаймиз:

$$g = \left|g_{ik}\right| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \quad (1)$$

Равшанки, $|g_{ik}|\cdot|g^{ik}| = 1$, яъни $\|g_{ik}\|$ ва $\|g^{ik}\|$ матрицалар бирбирига тескаридир.

§ 102. Асосий формулалар

Чизиқлар назариясининг асосий тенгламалари деб ҳисобланган Френе формулалари: чизиқнинг ҳар бир нуқтасида олинган табиий учёқлик қирраларидаги $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$, $\overline{\beta}$ бирлик векторларнинг $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$, $\frac{d\overline{\nu}}{ds}$, $\frac{d\overline{\beta}}{ds}$ ҳосилаларини шу векторлар орқали ифодалайди. Чизиқларга доир хоссалар ва масалалар шу тенгламаларга зич боғланган дейиш мумкин.

Сиртлар назариясида ҳам, сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги координат чизиқларига утказилган r_1, r_2 уринма-векторларни ва шу нуқтадаги (бирлик) n нормал-векторни табиий учёқлик сифатида қараймиз. Уларнинг u^1, u^2 буйича олинган

$$r_{11}=\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^1},\quad r_{12}=\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2},\quad r_{22}=\frac{\partial^2 r}{\partial u^2 \partial u^2},\quad n_1=\frac{\partial n}{\partial u^1},\quad n_2=\frac{\partial n}{\partial u^2}$$

ҳосилаларини шу r_1, r_2, n векторлар орқали ифодалаймиз:

$$\begin{aligned} r_{11}&=\Gamma^1_{11}r_1+\Gamma^2_{11}r_2+\alpha_{11}n,\\ r_{12}&=\Gamma^1_{12}r_1+\Gamma^2_{12}r_2+\alpha_{12}n,\\ r_{22}&=\Gamma^1_{22}r_1+\Gamma^2_{22}r_2+\alpha_{22}n \end{aligned} \tag{1}$$

ёки қисқача

$$r_{ik}=\Gamma^1_{ik}r_1+\Gamma^2_{ik}r_2+\alpha_{ik}n. \tag{1'}$$

Бу тенгламаларга тўққизта номаълум Γ^j_{ik}, α_{ik} коэффициент киради. Агар $r_{kl}=r_{ik}$ ни эътиборга олсак,

$$\Gamma^j_{ik}=\Gamma^j_{kl},\quad \alpha_{ik}=\alpha_{kl}$$

эканини кўрамиз. Шу номаълум коэффициентларни аниқлашга киришамиз. (1) нинг иккала томонини n га скаляр кўпайтириб, $n^2=1$ ни эътиборга олсак,

$$r_{11}n=\alpha_{11},\quad r_{12}n=\alpha_{12},\quad r_{22}n=\alpha_{22}$$

бўлишни, яъни α_{11}, α_{12}, α_{22} коэффициентлар иккинчи квадратик форманинг коэффициентларига тенг эканини курамиз:

$$\alpha_{11}=b_{11},\quad \alpha_{12}=b_{12},\quad \alpha_{22}=b_{22},\quad \alpha_{ik}=b_{ik}.$$

Γ^j_{ik} коэффициентларни аниқлаш мақсадида (1′) нинг ҳар бир тенглигини навбат билан r_1 ва r_2 га купайтирамиз ва ҳосил қилинган скаляр $r_{ik}\cdot r_1$, $r_{ik}\cdot r_2$ кўпайтмаларни қуйидагича белгилаймиз:

$$r_{ik}r_1=\Gamma_{ik,1},\quad r_{ik}r_2=\Gamma_{ik,2} \tag{2}$$

ёки

$$r_{ik}r_j=\Gamma_{ik,j},\quad (i,\ j,\ k=1,\ 2).$$

Бу олтита $\Gamma_{ik,j}$ коэффициент *Христоффелнинг биринчи тур символлари* дейилади. Равшанки $\Gamma_{ik,j}=\Gamma_{ki,j}$. Демак:

$$\begin{matrix} \Gamma^1_{ik}g_{11}+\Gamma^2_{ik}g_{21}=\Gamma_{ik,1}, \\ \Gamma^1_{ik}g_{12}+\Gamma^2_{ik}g_{22}=\Gamma_{ik,2}. \end{matrix} \quad (i,\ k=1,2) \tag{3}$$

Агар i, k га маълум қийматларни берсак, (3) системадан иккита Γ^1_{ik}, Γ^2_{ik} номаълумни топиш мумкин. Бу соф алгебраик масаладир. Келтирилган минорлар ифодасидан фойдалансак [353-бет, (1)],

$$\Gamma^1_{ik}=g^{11}\Gamma_{ik,1}+g^{12}\Gamma_{ik,2},\ \Gamma^2_{ik}=g^{21}\Gamma_{ik,1}+g^{22}\Gamma_{ik,2} \tag{4}$$

бўлади.

Номаълум Γ^j_{ik} коэффициентлар биринчи тур Христоффел символлари орқали ифодаланади. Бу символлар эса биринчи квадратик форманинг g_{ik} коэффициентлари ва уларнинг u^1, u^2 бўйича олинган хусусий ҳосилалари орқали ифодаланади. Ҳақиқатан, буни кўрсатиш учун тензорлар анализида кенг миқёсда ишлатиладиган бир усулдан фойдаланамиз.

$\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k=g_{ik}$ ифодада i, j, k индексларни айланиш тартибда оламиз:

$$\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k=g_{jk},\quad \mathbf{r}_k\mathbf{r}_i=g_{ki},\quad \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j=g_{ij}.$$

Бу тенгликларни, мос равишда, u^i, u^j, u^k бўйича дифференциаллаймиз:

$$\Gamma_{ji,k}+\Gamma_{ki,j}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i},$$

$$\Gamma_{kj,i}+\Gamma_{ij,k}=\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j},$$

$$\Gamma_{ik,j}+\Gamma_{jk,i}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Олдинги иккита тенгликни ҳадма-ҳад қўшиб, йиғиндидан учинчини яна ҳадма-ҳад айирсак, ушбу натижа ҳосил бўлади:

$$2\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_k=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

демак, (2) га асосан:

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right). \tag{5}$$

Тасдиқимиз исботланиб, шу билан бирга, сиртлар назариясида катта аҳамиятга эга бўлган муҳим (5) формула ҳосил қилинди. Христоффелнинг бир-биридан фарқли символлари олтитадир: $\Gamma_{11,1}$, $\Gamma_{11,2}$; $\Gamma_{12,1}$, $\Gamma_{12,2}$; $\Gamma_{22,1}$, $\Gamma_{22,2}$. Буларнинг ифодаларида

$i, j, k = 1, 2$ фараз этиб (5) дан ушбуларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1};\ \Gamma_{11,2} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},\ \Gamma_{12,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},\\ &\Gamma_{12,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},\ \Gamma_{22,1} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},\ \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}.\end{aligned}\right| \tag{6}$$

Бизни қизиқтирган Γ^j_{ik} коэффициентларни аниқлаш имкониятига эришдик. Аввало (4) даги иккита тенглик ўрнига битта тенглик ёзамиз:

$$\Gamma^j_{ik} = g^{j\alpha}\Gamma_{ik,\alpha}. \tag{7}$$

Энди $\Gamma_{ik,\alpha}$ ўрнига (5) даги қийматни қўяйлик, у ҳолда:

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{j\alpha}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\alpha}\right). \tag{8}$$

Бу ифодага қуйидаги олтита коэффициент киради (чунки $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$):

$$\Gamma^1_{11},\ \Gamma^2_{11};\quad \Gamma^1_{12},\ \Gamma^2_{12};\quad \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}.$$

Биринчи квадратик форманинг коэффициентлари ва уларнинг u^1, u^2 бўйича ҳосилалари орқали ифодаланувчи бу олтита Γ^j_{ik} коэффициент *Христоффелнинг иккинчи тур символлари* дейилади. Хуллас, r_{ik} нинг ёйилмаси ушбу шаклни олади:

$$r_{ik} = \Gamma^\alpha_{ik} r_\alpha + b_{ik} n. \tag{9}$$

Бу муносабатлар Гausснинг *деривацион формулалари* деб аталади. (derivée — французча термин бўлиб, ҳосилани билдиради.)

Табиий учёқликнинг иккита кирраси бўйлаб йўналган r_1 ва r_2 векторларнинг ҳосилаларини ёйиш учун (9) формулани топдик. Энди n дан олинган n_1, n_2 ҳосилаларга ўтамиз.

n_1, n_2 векторлар n га тик бўлганлиги сабабли, улар уринма текисликда жойлашган, шунинг учун улар фақат r_1, r_2 бўйича ёйилади:

$$n_1 = a^1_1 r_1 + a^2_1 r_2,\quad n_2 = a^1_2 r_1 + a^2_2 r_2$$

ёки қисқача

$$n_i = a^1_i r_1 + a^2_i r_2. \tag{10}$$

Тўртта номаълум a^1_1, a^2_1, a^1_2, a^2_2 коэффициентни топишгина қолади. (10) тенгликларни навбат билан r_1 ва r_2 га купайтирайлик, у ҳолда:

$$n_i r_1 = a^1_i g_{11} + a^2_i g_{12},\quad n_i r_2 = a^1_i g_{21} + a^2_i g_{22}.$$

Аммо $n_i r_k = -b_{ik}$ (353-бет), шу сабабли

$$-b_{i1} = a^1_i g_{11} + a^2_i g_{12},\quad -b_{i2} = a^1_i g_{21} + a^2_i g_{22} \tag{11}$$

ёки қисқача

$$-b_{ik} = a_i^{\alpha} g_{k\alpha}.$$

(11) тенгламаларни a_i^1 ва a_i^2 га нисбатан ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$-a_i^1 = b_{i1}g^{11} + b_{i2}g^{21} = b_{i\alpha}g^{\alpha 1}, \quad -a_i^2 = b_{i1}g^{12} + b_{i2}g^{22} = b_{i\alpha}g^{\alpha 2}$$

ёки қисқача

$$-a_i^k = b_{i\alpha}g^{\alpha k}. \tag{12}$$

(12) формулада α индекс бўйича йиғилади, бу ерда i, k — эркин индекслар; демак (12) да i, k га 1, 2 қийматлар берилса, тўртта коэффициент ҳосил бўлади. Қуйидагича белгилашни шарт қилайлик:

$$b_{i\alpha}g^{\alpha k} = b_i^k,$$

яъни $-a_i^k = b_i^k$ дейлик. Энди изланган муносабатларни қуйидагича ёза оламиз:

$$b_{ik} = b_i^{\alpha} g_{\alpha k}, \quad n_i = -b_i^1 r_1 - b_i^2 r_2. \tag{12'}$$

Охирги муносабат n_1, n_2 ҳосилаларнинг ёйилмаларини бергани сабабли, буларга *иккинчи группа деривацион* формулалари ёки *Вейнгартен формулалари* деймиз. Иккала группани биргалаштириб ёзайлик (r_1, r_2, n учун):

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial r_1}{\partial u^i} = \Gamma_{1i}^1 r_1 + \Gamma_{1i}^2 r_2 + b_{1i}n \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u^i} = \Gamma_{2i}^1 r_1 + \Gamma_{2i}^2 r_2 + b_{2i}n \end{array}\right| r_{ik} = \Gamma_{ik}^{\alpha} r_{\alpha} + b_{ik}n; \\ \dfrac{\partial n}{\partial u^i} = -b_i^1 r_1 - b_i^2 r_2 = -b_i^{\alpha} r_{\alpha} \quad (i,\ k = 1,\ 2). \end{array}\right| \tag{13}$$

Сиртлар назариясининг асосий формулалари ана шу деривацион формулалардир. Улар r_1, r_2, n векторлардан олинган хусусий ҳосилаларни шу векторларнинг ўзлари орқали ифодалайди. Фазодаги чизиқ учун Френе формулалари қайси ролни ўйнаса, сирт учун бу формулалар ўша ролни ўйнайди. Жумладан, бу формулалар r_1, r_2, n нинг исталган тартибли хусусий ҳосилаларини яна шу r_1, r_2, n векторлар ва g_{ik}, b_{ik} орқали, шунингдек, уларнинг u^1, u^2 бўйича олинган хусусий ҳосилалари орқали ифодалаш имкониятини беради (k, σ нинг вазифасини g_{ik}, b_{ik} бажармоқда).

(13) система r_{11}, r_{12}, r_{22}, n_1, n_2 векторларга нисбатан хусусий ҳосилали бешта дифференциал тенгламалар системасидир. Координаталарга ўтганда, хусусий ҳосилали 15 та дифференциал тенгламалар системаси вужудга келади. Уларнинг ечилиш шартларини текшириш муҳим геометрик мулоҳазаларга ва натижаларга олиб келади.

Машқлар

215. Христоффелнинг иккинчи тур олтита символи учун g_{ik}, $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}$ орқали ифодалар берилсин.

Жавоб:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}}{2g}, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{-g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + 2g_{11}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}}{2g},$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}}{2g}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}}{2g},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{-g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + 2g_{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - g_{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}}{2g}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}}{2g}.$$

216. (7) ва (8) дан фойдаланиб, ушбу муносабат исботлансин:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma^\alpha_{ij} g_{k\alpha} + \Gamma^\alpha_{kj} g_{i\alpha}.$$

Кўрсатма: $g_{ik} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k$, бундан $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i}$.

217. Ушбу тенглик исботлансин:

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^l} = \Gamma^\alpha_{l\alpha}. \qquad (\alpha — \text{йиғиш индекси}).$$

Исбот $\frac{\partial g}{\partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^l}(g_{11}g_{22} - g^2_{12}) = g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^l} + g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^l} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^l}$.

Маълумки (353-бет):

$$g_{22} = gg^{11}, \quad g_{12} = -gg^{21}, \quad g_{11} = gg^{22},$$

буларни юқоридаги ифодага қўйсак:

$$\frac{\partial g}{\partial u^l} = g\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^l} + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^l} + 2g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^l}\right) = gg^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^l}$$

бўлади; олдинги машқ натижасига кўра:

$$\frac{\partial g}{\partial u^l} = gg^{\alpha\beta}\left(\Gamma_{\alpha l,\beta} + \Gamma_{\beta l,\alpha}\right) = g\left(\Gamma^\alpha_{\alpha l} + \Gamma^\beta_{\beta l}\right).$$

Бу ерда $\Gamma^\alpha_{\alpha l} = \Gamma^\beta_{\beta l}$, чунки $\sum_{\alpha=1}^{2}\Gamma^\alpha_{\alpha l} = \sum_{\beta=1}^{2}\Gamma^\beta_{\beta l}$, шу сабабли $\frac{\partial g}{\partial u} = 2g\Gamma^\alpha_{\alpha l}$, бундан эса талаб қилинган тенгликни келтириб чиқариш осон.

218. Деривацион формулалар, биринчи ва иккинчи тур Христоффел символлари эски ёзув ва белгилар ёрдами билан ифодалансин (яъни $u^1 = u$, $u^2 = v$, E, F, G, D, D', D'' га қайтилсин).

219. Сиртнинг биринчи квадратик формаси ушбу шаклда берилган:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Иккинчи тур Христоффел символлари топилсин:

Жавоб:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = 0;$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

220. Ушбуни исботланг:

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2=\frac{\partial}{\partial u^2}(\Gamma_{11\cdot 2})-\frac{\partial}{\partial u^1}(\Gamma_{12\cdot 2})=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}\right).$$

Исбот.

$$r_{11}r_{22}-r_{12}r_{12}=\frac{\partial}{\partial u^2}(r_{11}r_2)-\frac{\partial}{\partial u^1}(r_{12}r_2)=\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11\cdot 2}-\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12\cdot 2},$$

$$r_{11}r_{22}-r_{12}r_{12}=\frac{\partial}{\partial u^1}(r_{22}r_1)-\frac{\partial}{\partial u^2}(r_{12}r_1)=\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{22\cdot 1}-\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{12\cdot 1}.$$

Энди $\Gamma_{11\cdot 2}$, $\Gamma_{12\cdot 2}$ ўрнига уларнинг тегишли ифодалари қўйилсин (355-бет).

221. Қутб системадаги тенглама билан берилган текислик учун Христоффел символлари топилсин.

Жавоб: $r=u^1e(r^2)$, бунда $u^1=\rho$, $u^2=\varphi$ фараз қилинса,

$$g_{11}=1;\quad g_{12}=0;\quad g_{22}=(u^1)^2$$

ва

$$\Gamma_{12\cdot 2}=\Gamma_{21\cdot 2}=u^1,\quad \Gamma_{22\cdot 1}=-u^1,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{u^1},\quad \Gamma^1_{22}=-u^1.$$

Қолган символлар нолга тенг.

222. Айланма сирт $r=u^1e(u^2)+f(u^1)k$ учун ҳам шу масала.

Жавоб: $\Gamma_{11\cdot 2}=-u^1$, $\Gamma_{12\cdot 1}=\Gamma_{21\cdot 1}=u^1$, $\Gamma_{22\cdot 2}=f'f''$,

$$\Gamma^1_{11}=-\frac{u^1}{1+f_{,2}},\quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{u^1}\quad \Gamma^2_{22}=\frac{f'f''}{1+f_{,2}}.$$

§ 103. Гаусс теоремаси

Олдинги параграфда чизиқлар назарияси билан сиртлар назарияси орасида чуқур аналогия борлигини таъкидлаб ўтдик. Чизиқнинг фазодаги вазиятидан қатъи назар, унинг эгрилиги ва буралмаси бу чизиқнинг шаклини (формасини) тўла аниқлаб беради. Тегишли теореманинг аниқ ифодасини ҳозирча бермасак ва сиртнинг фазодаги вазиятига эътибор қилмасак, биринчи ва иккинчи квадратик формалар бу сиртнинг шаклини бемалол тайинлайди. Бу параграфда исботланадиган Гаусс теоремаси мана шу фактга доир бўлиб, тегишли теорема эса § 106 да исботланади.

Бирор S сиртни фазода бир жойдан иккинчи жойга кўчирсак, унинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари ўзгармайди. Бу факт геометрик нуқтаи назардан равшан. Демак, фазодаги вазиятлари билан фарқ қиладиган иккита S ва S' сиртда шундай умумий эгри чизиқли u, v координаталарни танлаб олиш мумкинки, бу сиртларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари бир хил бўлсин.

Масалани тескарича қўйиб, биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан берилган сирт тўла (бир қийматли равишда) аниқланадими, деган саволни бериш мумкин. Бу саволга ушбу теорема жавоб беради:

Агар бирор S сирт ўзининг биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан берилса, яъни g_{ik}, b_{ik} коэффициентлар u^1, u^2 нинг функциялари деб қаралса, у ҳолда сиртнинг геометрик шакли (формаси) мана шу шартлар билан тўла аниқланади, яъни худди шу квадратик формаларга эга бўлган ҳар қандай иккинчи сирт S сиртдан фазодаги вазияти билангина фарқланади.

Бу теоремани фазовий чизиқларнинг табиий тенгламалари ҳақидаги теорема (§ 56) сингари исботлаш анча узун ва сердиққат бўлгани сабабли, биз унинг аналитик исботини § 106 да берамиз. Ҳозир эса Гаусснинг машҳур теоремасини исботлаймиз.

Гаусс теоремаси. *Сиртнинг тулиқ $K=k_1k_2$ эгрилиги унинг биринчи квадратик формасининг g_{ik} коэффициентлари орқали ва бу коэффициентларнинг эгри чизиқли u^1, u^2 координаталар бўйича олинган биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари орқали ифодаланади.* Бошқача айтганда, *сиртнинг биринчи квадратик формаси унинг тўлиқ эгрилигини аниқлайди, яъни бу эгрилик сиртнинг ички геометриясига доир катталик бўлиб, сиртни эгишда ўзгармайди.*

Бу теоремани исботлаш учун шуни кўрсатншимиз лозимки, иккинчи квадратик форманинг $DD''-D'^2=b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ дискриминанти $g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}, \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j}$ орқали ифодаланади[1]), яъни g_{ik} коэффициентлар берилган бўлса, b_{ik} коэффициентларни ихтиёрий равишда танлаб олиш мумкин эмас. Демак, бу коэффициентларни эркли равишда олиш ҳам мумкин эмас экан. Бу мулоҳазалар эса g_{ik}, b_{ik} коэффициентларни ўз ичига олган деривацион тенгламаларнинг ечилиш шартларини излашга мажбур қилади.

Деривацион формулаларни ёзайлик:

$$r_{11}=\Gamma_{11}^1 r_1+\Gamma_{11}^2 r_2+b_{11}n,$$
$$r_{12}=\Gamma_{12}^1 r_1+\Gamma_{12}^2 r_2+b_{12}n,$$
$$r_{22}=\Gamma_{22}^1 r_1+\Gamma_{22}^2 r_2+b_{22}n.$$

Бизни қизиқтирган $b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ ифодадир. Бунинг учун $r_{11}r_{22}-r_{12}^2$ ни тузамиз ва $r_ir_k=g_{ik}$, $r_in=0$, $n^2=1$ ни эътиборга оламиз. Бу вақтда:

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2=(\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1)\,g_{11}+(\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2)\,g_{12}+$$
$$+(\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1)\,g_{21}+(\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2)\,g_{22}+b_{11}b_{22}-b_{12}^2.$$

---

[1]) Чунки $K=\dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$.

Йнғиш қоидасига кўра, бу сўнгги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2=(\Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta}-\Gamma_{12}^{\alpha}\Gamma_{12}^{\beta})g_{\alpha\beta}+b_{11}b_{22}-b_{12}^2. \qquad (1)$$

Иккинчи томондан (220-машқ):

$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}\right). \qquad (2)$$

Энди (1) ва (2) дан

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}+(\Gamma_{12}^{\alpha}\Gamma_{12}^{\beta}-\Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta})g_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Бу Гаусс тенгламасидир. Шу билан теорема исботланди. Шундай қилиб, иккинчи квадратик форма дискриминантининг ифодасига g_{ik} коэффициентлар ва уларнинг биринчи, иккинчи тартибли ҳосилалари, шунингдек бу коэффициентлар ва уларнинг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари орқали ифодаланувчи Христоффел символлари киради.

Натижалар. 1) Гарчи эгиш пайтида сирт ўзининг шаклини ўзгартса ҳам, унинг тўлиқ эгрилиги K ўзгармайди, шу билан бирга бош эгриликларнинг ҳар бири ўзгарса ҳам, уларнинг $K=k_1k_2$ кўпайтмаси ўзгармайди.

2) Эгиш процессида сиртнинг тўлиқ эгрилиги K ўзгармаганлиги сабабли, текисликка ётқизиладиган сирт ёйилувчи сирт бўлади, чунки текислик учун $K=0$.

3) Бу натижани § 82 даги теорема билан таққослаб, қуйидаги муҳим хулосага келамиз: *бирор сиртнинг ёйилувчан сирт бўлишлиги учун, унинг текисликка ётқизиладиган бўлиши зарур ва етарлидир.*

Бу параграфни якунлаб, сиртнинг тўлиқ эгрилиги учун турли формулаларни берамиз:

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g}=\frac{1}{g^2}\{(r_1r_2r_{11})(r_1r_2r_{22})-(r_1r_2r_{12})^2\}.$$

Иккита аралаш кўпайтмани кўпайтириш қоидасидан фойдалансак, ушбу тенглик[1]) ҳосил бўлади:

$$g^2K=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \Gamma_{22,1} \\ g_{21} & g_{22} & \Gamma_{22,2} \\ \Gamma_{11,1} & \Gamma_{11,2} & r_{11}r_{22}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \Gamma_{12,1} \\ g_{21} & g_{22} & \Gamma_{12,2} \\ \Gamma_{12,1} & \Gamma_{12,2} & (r_{12})^2\end{vmatrix}$$

ёки

$$g^2K=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \Gamma_{22,1} \\ g_{21} & g_{22} & \Gamma_{22,2} \\ \Gamma_{11,1} & \Gamma_{11,2} & r_{11}r_{22}-r_{12}^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \Gamma_{12,1} \\ g_{21} & g_{22} & \Gamma_{12,2} \\ \Gamma_{12,1} & \Gamma_{12,2} & 0\end{vmatrix}. \qquad (4)$$

---

[1]) $(abc)(a_1b_1c_1)=\begin{vmatrix} aa_1 & ab_1 & ac_1 \\ ba_1 & bb_1 & bc_1 \\ ca_1 & cb_1 & cc_1\end{vmatrix}$.

220-машқдаги натижага кўра:

$$\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^{2}=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

Агар (4) га $\Gamma_{ik,j}$ нинг қийматларини қўйсак, ушбу натижага эга бўламиз:

$$g^2K=\begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ g_{21}, & g_{22}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, & \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, & \dfrac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1} \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ g_{21}, & g_{22}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, & 0 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Координат чизиқлари ортогонал ($g_{12}=0$) бўлса, бу формула симметрик шаклни олади:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right)\right\}.$$

Эскича белгилашларда эса (соддалаштиргандан сўнг):

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Жумладан, $E=1$ бўлса, $K=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$.

Чизиқли элемент „изотермик“ параметрларда, яъни $ds^2=\lambda(u, v)(du^2+dv^2)$ шаклда берилса,

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial v^2}\right)$$

бўлади.

Машқлар

223. Тўлиқ эгриликни „симметрик“ координаталарда, яъни

$$ds^2=2\lambda(u, v)\,du\,dv$$
$$E=0,\ F=\lambda(u, v),\ G=0$$

шартларда ҳисобланг.

Жавоб:

$$K=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\ln\lambda}{\partial u\,\partial v}$$

224. Биринчи квадратик формаси $du^2+(a^2+u^2)\,dv^2$ бўлган сирт (геликоид, катеноид) нинг тулиқ эгрилиги топилсин.

Кўрсатма: Бунда $E = 1$, $F = 0$, $G = a^2 + u^2$, $G_u = 2u$; демак, (6) формулага асосан:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{a^2+u^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{2u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right) = -\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}.$$

225. Ёйилувчи сирт $r = \bar{\rho}(u) + v\bar{\tau}(u)$ нинг чизиқли элементи (257-бет):

$$ds^2 = (1 + k^2v^2)\,du^2 + 2du\,dv + dv^2.$$

Бу сиртнинг тўлиқ эгрилиги нолга тенг. Буни исботланг.

226. Чизиқли элементи ушбу

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2+y^2+a^2)^2}$$

шаклда берилган сиртнинг тўлиқ эгрилиги топилсин.

Жавоб: $K = 4a$.

227. Чизиқли элементи

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$$

бўлган сиртнинг тўлиқ эгрилиги топилсин.

Жавоб: $K = -1$.

§ 104*. Петерсон-Майнарди тенгламалари

Биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг g_{ik}, b_{ik} коэффициентлари орасидаги боғланишни излаш мақсадида, уларни ўз ичига олган деривацион тенгламаларнинг ечилиш шартларини тузишимиз керак эди.

Олдинги параграфнинг асосий мақсади, Гаусс теоремасини исботлаш бўлганлигидан, бундай шартларни бевосита келтириб чиқариш ўрнига, хийла айланма (лекин мумкин қадар осон) йўл билан бориб, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ ни туздик ва бу ифоданинг g_{ik}, $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}$, $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^l}$ орқали тасвирланишини исботладик. Шу билан бирга, g_{ik}, b_{ik} коэффициентларнинг Гаусс тенгламаси билан боғланганлигини кўрдик.

Геометрик нуқтаи назардан қараганда, бу фактнинг маъноси шундаки, сиртнинг ички хоссалари унинг барча ташқи хоссаларини аниқламаса ҳам, лекин айрим ташқи хоссаларини тўла аниқлайди. Масалан, сиртнинг ташқи геометриясига тааллуқли бўлган $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ бош эгриликларнинг $\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2$ кўпайтмасини, шунингдек сферик тасвирини ички геометрия тўла аниқлаб беради.

Энди шу йўсинда муҳокама юргизиб, яна бошқа геометрик хоссаларни қўлга киритиш мақсадида, g_{ik}, b_{ik} коэффициентлар билан уларнинг ҳосилалари орасида бошқа богланишлар борми-йўқми деган саволни қўямиз ва деривацион тенгламалар системасининг ечилиш шартларини қидирамиз.

Деривацион тенгламаларда r_{11}, r_{12}, r_{22}, n_1, n_2 векторлар r_1, r_2, n векторлар орқали ифодаланади. Бу тенгламалар системасининг ечилиш шарти аралаш ҳосилаларда дифференциаллаш тартибини ўзгартиш имкониятига боглиқдир; шундай қилиб, биз учта тенглама ёзишимиз керак:

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial u^2}=\frac{\partial r_{12}}{\partial u^1},\ \frac{\partial r_{12}}{\partial u^2}=\frac{\partial r_{22}}{\partial u^1},\ \frac{\partial n_1}{\partial u^2}=\frac{\partial n_2}{\partial u^1} \tag{1}$$

ёки қисқача:

$$r_{ijk}=r_{ikj},\ n_{ij}=n_{ji},\ (i,\ j,\ k=1,\ 2) \tag{2}$$

бунда

$$r_{ijk}=\frac{\partial^2 r_{ij}}{\partial u^k}.$$

(1), шунингдек (2) ҳам учта тенгламадан тузилган: i, j, k индексларга бир хил қийматлар берганда, (2) дан айният ҳосил қилинади (масалан, $r_{111}=r_{111}$). Деривацион формулалардан яна бир карра фойдаланиб, (1) тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини r_1, r_2, n орқали ифодаласак, натижада бу векторларга нисбатан ушбу кўринишдаги учта тенглама ҳосил қилинади:

$$\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\alpha_3 n=0;\ \beta_1 r_1+\beta_2 r_2+\beta_3 n=0;$$
$$\gamma_1 r_1+\gamma_2 r_2+\gamma_3 n=0, \tag{3}$$

бу ерда α_i, β_i, γ_i коэффициентлар тўққизта скаляр бўлиб, улар g_{ik}, b_{ik} ва $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u}$, $\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}$ ҳосилаларга боглиқдир. Ҳосил қилинган (3) тенгламалар r_1, r_2, n векторларнинг компланарлигидан дарак беради. Бироқ, бу векторлар компланар эмасдир Шу сабабли, (3) тенгламалардаги тўққизта коэффициентнинг ҳаммаси нолга тенг:

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0;\ \beta_1=\beta_2=\beta_3=0;\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0. \tag{4}$$

(4) тенгламаларни пухта анализ қилсак, улар орасида фақат учта эркин тенглама борлигини кўрамиз. Юқоридаги муҳокамалар ҳам эркин тенгламалар сонининг учтадан иборатлигини тасдиқлаган эди. Улардан бири Гаусс тенгламасидир. Қолган иккита тенгламани тузишда (1) тенгламалар билан иш кўриш ўрнига, бу ерда ҳам айланма йўл билан борамиз. Бевосита исботлаш йўлини келгуси параграфда кўрамиз.

Иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари асосий r_1, r_2, n векторлар орқали ифодаланади:

$$b_{i1}=-n_1 r_i,\ b_{i2}=-n_2 r_i.$$

Булардан биринчисини u^2 бўйича ва иккинчисини u^1 бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}=-n_{12}r_i-n_1 r_{i2},\quad \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}=-n_{21}r_i-n_2 r_{i1}.$$

Тengликларни ҳадма-ҳад айиришда $n_{12}=n_{21}=\frac{\partial^2 n}{\partial u^1 \partial u^2}$ ни эътиборга оламиз:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}=n_2 r_{i1}-n_1 n_{i2}.$$

Деривацион формулалардан r_{i1}, r_{i2} нинг қийматларини бу тенгликка қўямиз ва $n_i n=0$ ни ҳамда $n_i r_k=-b_{ik}$ ни назарга оламиз:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}=n_2(\Gamma^1_{i1}r_1+\Gamma^2_{i1}r_2)-n_1(\Gamma^1_{i2}r_1+\Gamma^2_{i2}r_2)$$

ёки

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{i1}b_{12}+\Gamma^2_{i1}b_{22}=\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{i2}b_{11}+\Gamma^2_{i2}b_{21}. \tag{5}$$

Бу ердан $i=1,\ 2$ қийматларда:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{11}b_{12}+\Gamma^2_{11}b_{22}=\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{12}b_{11}+\Gamma^2_{12}b_{21}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{21}b_{12}+\Gamma^2_{21}b_{22}=\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{22}b_{11}+\Gamma^2_{22}b_{21} \tag{7}$$

келиб чиқади.

Хусусий ҳосилали (6) ва (7) тенгламалар *Петерсон-Майнарди тенглама (шарт)лари* дейилади.

Йиғиш индексини ишлатсак, бу тенгламаларнинг ёзилиш қонуни ойдинлашади:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}+\Gamma^\alpha_{ij}b_{\alpha k}=\frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j}+\Gamma^\alpha_{ik}b_{\alpha j}. \tag{8}$$

Христоффел символининг пастдаги индекслари дифференциалланувчи b_{ij} нинг индекслари билан бир хил; тенгламада хусусий ҳосилалар қайси u^i ўзгарувчи бўйича олинган бўлса, тенгламага чизиқли равишда кирган b_{ij} нинг бир индекси ўша ўзгарувчининг номери билан бир хил бўлиб, иккинчи индекси эса Γ нинг юқоридаги индекси билан бир хилдир.

(5) даги иккита эркин тенглама, яъни Петерсон-Майнарди тенгламаларидан (6) тенглама $\alpha_2=\gamma_1=0$ га, (7) тенглама эса $\beta_2=\gamma_2=0$ га, ва ниҳоят, Гаусс тенгламаси $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=\beta_2=$ $=0$ га мос келади.

Шундай қилиб, сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларидаги g_{ik}, b_{ik} коэффициентларни эркин равишда танлаб олиш мумкин эмас, улар Гаусс ва Петерсон-Майнарди тенгламаларини қаноатлантириши зарур.

Кенгроқ ва чуқурроқ мулоҳазалар шуни тасдиқлайдики, g_{ik}, b_{ik} коэффициентларни ва уларнинг биринчи, иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини боғловчи бошқа муносабатлар йўқдир.

§ 105*. Иккинчи исбот

Гаусс ва Петерсон-Майнарди тенгламаларини олдинги параграфдаги усулга қараганда симметрикроқ усул билан келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз.

Олдинги параграфда деривацион тенгламалардан фойдаланиб, ушбу

$$r_{ijk} = r_{ikj}$$

тенгламани тузган эдик. Бу ерда r_{ijk} ни ҳисоблайлик:

$$r_{ij} = \Gamma^\alpha_{ij} r_\alpha + b_{ij} n \quad \text{дан}$$

$$r_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial u^k} r_\alpha + \Gamma^\alpha_{ij} r_{\alpha k} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} n + b_{ij} n_k$$

келиб чиқади. Бунга $r_{\alpha k}$ ва n_k нинг қийматларини (деривацион тенгламалардан олиб) қўямиз, у ҳолда:

$$r_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial u^k} r_\alpha + \Gamma^\alpha_{ij} (\Gamma^\beta_{\alpha k} r_\beta + b_{\alpha k} n) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} n - b_{ij} b^\alpha_k r_\alpha.$$

Бу тенгламаларнинг $\Gamma^\alpha_{ij} \Gamma^\beta_{\alpha k} r_\beta$ ҳадларида йиғиш индекслари ролини ўйновчи α, β нинг ўринларини алмаштирсак, $\Gamma^\beta_{ij} \Gamma^\alpha_{\beta k} r_\alpha$ ни ҳосил қиламиз. Бунинг натижасида юқоридаги ёйилма қуйидаги кўринишни олади:

$$r_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^\beta_{ij} \Gamma^\alpha_{\beta k} - b_{ij} b^\alpha_k \right) r_\alpha + \left(\Gamma^\alpha_{ij} b_{\alpha k} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} \right) n.$$

Бу тенгликларда j ва k индексларнинг ўринларини алмаштирамиз, у ҳолда:

$$r_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^\beta_{ik} \Gamma^\alpha_{\beta j} - b_{ik} b^\alpha_j \right) r_\alpha + \left(\Gamma^\alpha_{ik} b_{\alpha j} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} \right) n.$$

Энди $r_{ijk} = r_{ikj}$ тенгликни тузиб, r_1, r_2, n векторлар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштирамиз. Дастлаб n олдидаги коэффициент нолга тенглаштирилса, ушбу

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^\alpha_{ij} b_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{ik} b_{\alpha j} = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама эса олдинги параграфдаги (8) тенгламанинг, яъни Петерсон-Майнарди муносабатининг ўзгинасидир:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^\alpha_{ij} b_{\alpha k} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^\alpha_{ik} b_{\alpha j}.$$

Энди r_α олдидаги коэффициентга ўтайлик. Бу коэффициентда α индекс бўйича 1 дан 2 гача йиғиш бор.

r_1, r_2 (яъни r_l) олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириш билан ҳосил қилинган тенгламаларни (α ўрнига l ни қўйиб) қуйидагича ихчам шаклда ёзамиз:

$$b_{ik} b^l_j - b_{ij} b^l_k = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^\beta_{ik} \Gamma^l_{\beta j} - \Gamma^\beta_{ij} \Gamma^l_{\beta k}.$$

Тўрт индексли $b_{ik} b^l_j - b_{ij} b^l_k$ ифодани R^l_{ijk} символ билан белгилайлик (β ўрнига α ни қуйиб). У ҳолда:

$$R^l_{ijk} = b_{ik} b^l_j - b_{ij} b^l_k = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^\alpha_{ik} \Gamma^l_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{ij} \Gamma^l_{\alpha k}. \qquad (1)$$

Тўрт индексли R^l_{ijk} символ *Риманнинг аралаш тензори* дейилади. Унинг ўрнига *Риманнинг одатдаги тензорини* киритайлик. Бунинг учун R^l_{ijk} ни g_{mn} га кўпайтириб, қуйидагича йиғиндини тузамиз:

$$\sum g_{\alpha n} R^\alpha_{ijk} = g_{\alpha n} R^\alpha_{ijk}.$$

Бу символ ҳам тўрт индекслидир, уни R_{nijk} билан белгилаймиз:

$$R_{nijk} = g_{\alpha n} R^\alpha_{ijk}. \qquad (2)$$

(1) дан:

$$R_{nijk} = g_{\alpha n} (b_{ik} b^\alpha_j - b_{ij} b^\alpha_k). \qquad (3)$$

§ 102 даги (12) га кўра: $g_{\alpha n} b^\alpha_j = b_{nj}$, $g_{\alpha n} b^\alpha_k = b_{nk}$. Шу сабабли (2) ва (3) дан:

$$R_{nijk} = b_{ik} b_{nj} - b_{ij} b_{nk}$$

ёки n индекс ўрнига l ни қўйсак:

$$R_{lijk} = b_{ik} b_{lj} - b_{ij} b_{lk}. \qquad (4)$$

Ана шу R_{lijk} символ *Риманнинг одатдаги эгрилик тензори* дейилади. Унга бундай ном берилиши бечиз эмас, чунки у сиртнинг эгрилиги билан боғлангандир. Биринчи қарашда унинг жуда кўп „компонентлари“ борга ўхшайди: ҳақиқатан, i, j, k, l индексларнинг ҳар бирига 1, 2 қийматларни берсак, R_{lijk} символи 16 та қийматни қабул қилади.

Бироқ, бу қийматларнинг фақат иккитаси бир-биридан фарқли бўлиб, қолганлари эса ё нолга ёки шу икки қийматга тенгдир. Ҳақиқатан, (4) дан равшанки, i, j, k, l га бир хил қийматлар берилганда ноль ҳосил бўлади. Энди $b_{ik} = b_{ki}$ ни назарга олсак, у ҳолда ik ва lj жуфтларда ва ҳар бир жуфтнинг индексларида ўрин алмаштириш R нинг қийматини ўзгартмайди:

$$R_{lijk} = R_{jkli}.$$

Жуфтларнинг бирида ўрин алмаштирилса, ишора ўзгаради:

$$R_{lijk} = -R_{likj}, \quad R_{lijk} = -R_{iljk}.$$

Бу хоссаларни ҳисобга олсак, фақат $R_{1212} = -R_{2121}$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b^2_{12}, \quad R_{2112} = b^2_{12} - b_{11} b_{22}. \qquad (5)$$

Шундай қилиб, Риман тензорининг муҳим компоненти иккинчи квадратик форманинг дискриминантига тенгдир.

Энди (1) тенглама Гаусс тенгламаси шаклини олади. Принципиал жиҳатдан бу масалани биз ҳал қилдик. Бу тенгламанинг ўнг томонига Христоффелнинг биринчи ва иккинчи тур символлари ва уларнинг ҳосилалари кирган бўлиб, улар биринчи квадратик форма коэффициентлари орқали ифодаланади.

(1) нинг ўнг томонини $g_{\alpha n}$ га кўпайтириб, юқоридаги сингари йиғамиз. Биринчи ҳадни соддалаштиришда $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i}$ ни эътиборга оламиз (216-машқ):

$$g_{\alpha n} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} (g_{\alpha n} \Gamma^{\alpha}_{ik}) - \Gamma^{\alpha}_{ik} \frac{\partial g_{\alpha n}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{ik,n}) - \Gamma^{\alpha}_{ik}(\Gamma_{\alpha j,n} + \Gamma_{nj,\alpha}).$$

Шунинг сингари:

$$g_{\alpha n} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij,n}) - \Gamma^{\alpha}_{ij} (\Gamma_{\alpha k,n} + \Gamma_{nk,\alpha}).$$

Охирги икки ҳадни (α ўрнига β ни қуйиб) соддалаштирайлик:

$$g_{\alpha n} (\Gamma^{\beta}_{ik} \Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{ij} \Gamma^{\alpha}_{\beta k}) = \Gamma^{\beta}_{ik} \Gamma_{\beta j,n} - \Gamma^{\beta}_{ij} \Gamma_{\beta k,n}.$$

Сўнгги тенгликда йиғиш индекси ролини ўйнаган β ўрнига яна α ни қўйиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаштиргандан кейин, ушбу тенгликка келамиз:

$$R_{lijk} = \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik,l} - \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij,l} + \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma_{lk,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma_{lj,\alpha}. \tag{6}$$

(5) га асосан:

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b^2_{12} = \frac{\partial}{\partial u^1} \Gamma_{22,1} - \frac{\partial}{\partial u^2} \Gamma_{21,1} + \Gamma^{\alpha}_{21} \Gamma_{12,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{22} \Gamma_{11,\alpha}.$$

Бу тенгликка $\Gamma_{22,1}$, $\Gamma_{12,1}$ нинг қийматларини қўямиз [§ 102, (6)]:

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \Gamma_{22,1} - \frac{\partial}{\partial u^2} \Gamma_{12,1} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2}.$$

Белгилашларимизга кўра [§ 102, (3)]:

$$\Gamma_{12,\alpha} = g_{\alpha\beta} \Gamma^{\beta}_{12}, \quad \Gamma_{11,\alpha} = g_{\alpha\beta} \Gamma^{\beta}_{11}.$$

Буларни эътиборга олсак, (6) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b^2_{12} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} + (\Gamma^{\alpha}_{12} \Gamma^{\beta}_{12} - \Gamma^{\alpha}_{11} \Gamma^{\beta}_{22}) g_{\alpha\beta}.$$

Бу эса худди Гаусс тенгламасининг ўзидир [§ 103, (3)].

Хуллас, биринчи ва иккинчи квадратик формалар орасидаги боғланишни қайси усул билан изласак ҳам, Гаусс ва Петерсон-Майнарди тенгламаларига келамиз. Тўлароқ муҳокамалар шу учта тенгламадан бошқа мустақил муносабат умуман юз бера олмаслигини тасдиқлайди.

Машқлар

228. Айланма сирт учун эгрилик тензорининг компонентлари топилсин.

Жавоб: Сиртнинг тенгламаси $r = u^1 e(u^2) + f(u^1) k$ шаклда берилган бўлсин. У ҳолда:

$$R_{1212} = \frac{u^1 f' f''}{1 + f'^2}; \quad R^1_{212} = \frac{f' f''}{u^1 (1 + f'^2)}; \quad R^2_{121} = \frac{u^2 f' f''}{(1 + f'^2)^2}.$$

229. Тўғри коноид $\boldsymbol{r} = u^1 \boldsymbol{e}(u^2) + au^2 \boldsymbol{k}$ учун Риман тензорининг компонентлари тузилсин.

Жавоб:

$$R_{1212} = -\frac{a^2}{a^2 + (u^1)^2}, \quad R^1_{212} = -\frac{a^2}{[(u^1)^2 + a^2]^2}, \quad R^2_{121} = -\frac{a^2}{[(u^1)^2 + a^2]^2}.$$

106*. Асосий теорема ва Бонне теоремаси

Чизиқларнинг табиий тенгламаларига доир иккита теорема исбот қилинган эди (§ 56—58). Уларнинг биринчиси, табиий тенгламалари бўйича чизиқнинг қанчалик аниқланганлиги ҳақида [$k = k(s) > 0$, $\sigma = \sigma(s)$ тенгламаларга доир теорема, 167-бет], иккинчиси эса берилган иккита узлуксиз $\varphi(s) > 0$, $\psi(s)$ функция бўйича табиий тенгламалари $k = \varphi(s)$, $\sigma = \psi(s)$ бўлган чизиқни топиш ҳақида эди. Иккала ҳолда ҳам, чизиқ „фазодаги вазиятигача аниқлик" билан топилган эди.

Сиртлар назариясида ҳам, шу икки теоремага мос теоремаларни тайинлашга ҳаракат қиламиз.

Асосий теорема: *агар бирор S сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta > 0$, $b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$, яъни уларнинг $g_{ik}(u^1, u^2)$, $b_{ik}(u^1, u^2)$ коэффициентлари берилган бўлса, шу билан S сиртнинг шакли тўла аниқланади. Бошқача айтганда, S_1 сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари S сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан бир хил бўлса, S_1 сирт S дан ўзининг фазодаги вазияти билангина фарқ қилиши мумкин.*

Исбот. Биринчи ва иккинчи квадратик формалари бир хил бўлган S ва S_1 сиртлар берилган деб, яъни бу сиртларда шундай эгри чизиқли u^1, u^2 координаталар олинганки, g_{ik} ва b_{ik} коэффициентлар u^1, u^2 нинг бир хил функциялари сифатида аниқланган деб фараз қилайлик. S ва S_1 сиртлардаги u^1, u^2 нинг бир хил қийматларига мос келган M ва M_1 нуқталар *ўзаро мос* нуқталар дейилади. Шундай қилиб, мос нуқталарда g_{ik} ва b_{ik} нинг қийматлари иккала сирт учун бир хилдир. Демак, S_1 ни фазода ҳаракатлантириб, S билан устма-уст тушириш мумкин.

Ҳақиқатан, S да бирор M^0 нуқтани ва S_1 да унга мос M_1^0 нуқтани бошланғич нуқталар сифатида олайлик. g_{11}, g_{12}, g_{22} коэффициентлар иккала сирт учун M^0 ва M_1^0 нуқталарда бир хил қийматларга эга, шу сабабли $\boldsymbol{r}_1^2$, $\boldsymbol{r}_2^2$ ва $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ҳам M^0 ва M_1^0 да бир хил қийматларга эга. Бундан эса $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ векторлар M^0 ва M_1^0 нуқталарда бир хил узунликка эга бўлиб, ораларидаги бурчаклари тенг деган натижа келиб чиқади. Шунинг учун M^0 ва M_1^0 нуқталардаги $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ векторлардан ташкил топган фигуралар конгруэнт (тенг) дир. Демак, S_1 ни ҳаракатлантириш натижасида M_1^0 ни M^0 устига тушириш ва бу нуқталардаги r_1, r_2 векторларни ҳам устма-уст тушириш мумкин. У ҳолда, сиртларнинг бу нуқталардаги r_1, r_2 бирлик нормал векторлари ҳам устма-уст тушади, чунки уларнинг йўналишлари доимий шартимизга кўра $[r_1 r_2]$ нинг йўналиши билан бир хилдир.

Шундай қилиб, M_1^0 нуқта M^0 устига ва улардаги асосий r_1, r_2, n (мос) векторлар бир-бири устига тушади. Энди S ва S_1 сиртларнинг бутунлай (ҳамма нуқталари билан) устма-уст тушишини исботлаш қолади. Бунинг учун S сиртда $t=0$ қийматга мос M^0 нуқтадан ўтувчи ихтиёрий $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ чизиқни оламиз, у Γ бўлсин. У ҳолда S_1 сиртда худди ўша тенгламалар билан ифодаланувчи ва Γ чизиққа мос келувчи Γ_1 чизиқ ётади. Бу чизиқ $t=0$ қийматда M_1^0 дан ўтади.

Γ чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, асосий r_1, r_2, n векторларнинг ўзгариш характерини ўрганиш учун, уларнинг t бўйича ҳосилаларини тузиш табиийдир:

$$\frac{dr_1}{dt} = r_{11}\frac{du^1}{dt} + r_{12}\frac{du^2}{dt};\quad \frac{dr_2}{dt} = r_{21}\frac{du^1}{dt} + r_{22}\frac{du^2}{dt};$$

$$\frac{dn}{dt} = n_1\frac{du^1}{dt} + n_2\frac{du^2}{dt}.$$

Бу тенгламаларга r_{11}, r_{12}, r_{22}, n_1, n_2 нинг қийматларини деривацион формулалардан [§ 102, (13)] олиб қўямиз, у ҳолда:

$$\frac{dr_1}{dt} = \left(\Gamma_{11}^1\frac{du^1}{dt} + \Gamma_{12}^1\frac{du^2}{dt}\right)r_1 + \left(\Gamma_{11}^2\frac{du^1}{dt} + \Gamma_{12}^2\frac{du^2}{dt}\right)r_2 +$$
$$+\left(b_{11}\frac{du^1}{dt} + b_{12}\frac{du^2}{dt}\right)n;$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \left(\Gamma_{21}^1\frac{du^1}{dt} + \Gamma_{22}^1\frac{du^2}{dt}\right)r_1 + \left(\Gamma_{21}^2\frac{du^1}{dt} + \Gamma_{22}^2\frac{du^2}{dt}\right)r_2 +$$
$$+\left(b_{21}\frac{du^1}{dt} + b_{22}\frac{du^2}{dt}\right)n;$$

$$\frac{dn}{dt} = -\left(b_1^1\frac{du^1}{dt} + b_2^1\frac{du^2}{dt}\right)r_1 - \left(b_1^2\frac{du^1}{dt} + b_2^2\frac{du^2}{dt}\right)r_2.$$

Агар бу тенгламаларда r_1, r_2, n векторлар t нинг номаълум функциялари деб қаралса, бу чизиқли тенгламалар системасини Коши системаси[1]) деб қараш мумкин (§ 56—58), чунки бу тенгламаларда r_1, r_2, n нинг t бўйича ҳосилалари шу векторларнинг ўзлари ва $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ ҳосилалар орқали чизиқли ифодаланган бўлиб, Γ_{ik}^l, b_{ik} коэффициентлар $u^1(t)$, $u^2(t)$ нинг, яъни t нинг маълум функцияларидан иборатдир.

---

[1]) Степанов, Дифференциальные уравнения, М., 1950, VII боб, § 1, 2 га қаранг.

Бу системани S_1 сиртда Γ_1 чизиқ бўйлаб қарасак ҳам, унинг кўриниши ва коэффициентлари худди юқоридагидек бўлади. Чунки t нинг бирор қиймати учун S ва S_1 сиртларда мос нуқталар ҳосил қилиниб, у нуқталарда g_{ik}, b_{ik}, Γ^j_{ik} бир хил қийматларга эгадир.

Хуллас, S сиртда Γ чизиқ ва S_1 сиртда Γ_1 чизиқ бўйлаб $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{n}$ функциялар Кошининг битта системасини қаноатлантиради ва $t = 0$ нуқтада бу функциялар иккала сиртда ҳам бир хил бошланғич қийматларни қабул қилади. Дифференциал тенгламалар назариясидаги мавжудлик теоремасига кўра, бундай ҳолда $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{n}$ функциялар t нинг бир қийматли функциялари бўлиб аниқланади. Демак, бу векторлар Γ ва Γ_1 мос чизиқлар бўйлаб бутунлай бир хилдир.

Энди S сиртда Γ чизиқ бўйлаб M_0 нуқтадан M нуқтага силжийлик. Силжиш вектори ушбу интеграл орқали ифодаланади:

$$\overline{M_0M} = \int_0^t d\boldsymbol{r} = \int_0^t \left(\boldsymbol{r}_1 \frac{du^1}{dt} + \boldsymbol{r}_2 \frac{du^2}{dt}\right) dt.$$

Мос $\overline{M_1^0M_1}$ вектор ҳам шу сингари ифодаланади. Иккала ҳолда ҳам интеграл остидаги $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ функциялар t нинг бир хил функцияларидир. Шу сабабли, $\overline{M^0M} = \overline{M_1^0M_1}$. Лекин M^0 ва M_1^0 нуқталар устма-уст тушган эди. Демак, Γ ва Γ_1 чизиқлардаги M ва M_1 нуқталар ҳам устма-уст тушади. Олинган Γ ва Γ_1 чизиқлар ихтиёрий бўлгани сабабли S ва S_1 сиртлар айнан устма-уст тушади, яъни улар конгруэнт деган натижага келамиз. Теорема исботланди.

Эслатма. Чизиқлар назариясида: эгриликлари бир хил ва буралмалари ишораси билан фарқланувчи икки чизиқ бирор текисликка нисбатан симметрик равишда жойлашиб, уларнинг бири иккинчисидан ҳаракатланиш ва сўнгра текисликка нисбатан симметрия алмашиниш натижасида ҳосил қилинган эди. Шу сингари, бу ерда ҳам биринчи квадратик формалари бир хил, лекин иккинчи квадратик формалари ишораси билан фарқланувчи икки сиртнинг бири иккинчисидан ҳаракатланиш ва сўнгра „кўзгуда акселаниш" натижасида ҳосил қилинади.

Шундай қилиб, сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларини бериш унинг табиий тенгламаларини бериш демакдир.

Биз, чизиқнинг табиий тенгламалари ҳақида асосий теоремани исботлаб (§ 56), унинг кетидан умумийроқ бўлган $[k = \varphi(s) > 0,\ \sigma = \psi(s)!]$ теоремани исботлаган эдик (§ 59).

Сиртлар назариясида ҳам шу йўл билан бориб, О. Бонне томонидан кўрсатилган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Фараз этайлик, u^1, u^2 ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳасида иккита ихтиёрий квадратик*

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}du^{1^2} + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}du^{2^2}, \\ &b_{11}du^{1^2} + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}du^{2^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

форма берилган бўлиб, уларнинг биринчиси мусбат, яъни

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \quad g_{11} > 0$$

бўлсин. Ундан ташқари, *бу формаларнинг коэффициентлари Гаусс ва Петерсон-Майнарди тенгламаларини қаноатлантирсин.*

Бу шартларда сиртнинг фазодаги вазиятига эътибор қилинмасдан фақат шаклигина кўзда тутилса, бу ҳолда биттагина шундай сирт мавжуд бўлиб, (1) *формалар бу сирт учун тегишинча биринчи ва иккинчи квадратик формалар ролини ўйнайди.*

А. В. Погорелов томонидан берилган исботни сал ўзгартирилган ҳолда келтирамиз[1]).

u^1, u^2 нинг функциялари бўлган учта x, y, z векторни киритиб, уларнинг u^1, u^2 бўйича олинган ҳосилаларини тегишли индекслар ёрдами билан белгилаймиз: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2. Бу векторлар қуйидаги дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантирсин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u^1} &= x_1 = \Gamma_{11}^1 x + \Gamma_{11}^2 y + b_{11} z, \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} &= x_2 = \Gamma_{12}^1 x + \Gamma_{12}^2 y + b_{12} z, \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} &= y_1 = \Gamma_{12}^1 x + \Gamma_{12}^2 y + b_{12} z, \\ \frac{\partial y}{\partial u^2} &= y_2 = \Gamma_{22}^1 x + \Gamma_{22}^2 y + b_{22} z, \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} &= z_1 = \gamma_{11} x + \gamma_{12} y, \\ \frac{\partial z}{\partial u^2} &= z_2 = \gamma_{21} x + \gamma_{22} y. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Бу системага кирувчи Γ_{ik}^j ва γ_{ik} коэффициентлар берилган квадратик формаларнинг коэффициентлари орқали ифодаланади (§ 102).

---

[1]) А. В. Погорелов, Лекции по дифференциальной геометрии, 2-е издание, Харьков, 1956, 160-бет.

Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, u_0^1, u_0^2 нуқтада бошланғич $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ қийматлар берилган бўлиб, интеграллaниш шартлари, яъни ушбу

$$(\Gamma_{11}^1 x + \Gamma_{12}^1 y + b_{11} z)_2 = (\Gamma_{12}^1 x + \Gamma_{12}^2 y + b_{12} z)_1$$
$$(\Gamma_{12}^1 x + \Gamma_{12}^2 y + b_{12} z)_2 = (\Gamma_{22}^1 x + \Gamma_{22}^2 y + b_{22} z)_1$$
$$(\gamma_{11} x + \gamma_{12} y)_2 = (\gamma_{21} x + \gamma_{22} y)_1$$

тенгликлар (2) система туфайли айнан бажарилса, бу система бирдан-бир ечимга эгадир[1]). Интегралланиш шартлари Гаусс ва Петерсон-Майнарди шартларининг ўзгинаси эканини тушуниш қийин эмас.

Берилган (1) квадратик формалар учун Гаусс-Петерсон-Майнарди шартлари ўринли деб қилган фаразимизга асосан, қўрилаётган (2) система учун интегралланиш шартлари бажарилгандир.

x_0, y_0, z_0 векторлар қуйидагича танлаб олинган бўлсин:

$$x_0^2 = E(u_0^1, u_0^2),\ x_0 y_0 = F(u_0^1, u_0^2),\ y_0^2 = G(u_0^1, u_0^2),$$
$$x_0 z_0 = 0,\ y_0 z_0 = 0,\ z^2 = 1.$$

Системамизнинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини

$$x(u_0^1, u_0^2) = x_0,\ y(u_0^1, u_0^2) = y_0,\ z(u_0^1, u_0^2) = z_0$$

кўринишда белгилайлик.

u^1, u^2 нинг функциялари бўлган x, y, z учун $\frac{\partial x}{\partial u^2} = \frac{\partial y}{\partial u^1}$. Шу сабабли, шундай $r(u, v)$ вектор-функция мавжудки, унинг учун $r_1 = x$, $r_2 = y$ бажарилади.

Энди, $r = r(u^1, u^2)$ тенглама билан берилган сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари, мос равишда, қуйидагилардан иборатлигини исботлайлик:

$$g_{11} du^{1^2} + 2 g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^{2^2}$$

ва

$$b_{11} du^{1^2} + 2 b_{12} du^1 du^2 + b_{22} du^{2^2}.$$

Ушбу олтита катталик:

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ xy,\ yz,\ zx$$

[1]) Қавслардан кейин қўйилган 1, 2 индекслар тегишли ифодаларни u^1, u^2 бўйича дифференциаллашни билдиради.

ни олиб, уларнинг u^1, u^2 бўйича ҳосилаларини [(2) системадан фойдаланиб] шу катталиклар орқали ифодалайлик. У ҳолда қуйидаги 12 та тенглама ҳосил қилинади:

$$\left.\begin{array}{l} (x^2)_1 = R_1(x^2,\ y^2,\ z^2\ldots), \\ (x^2)_2 = R_2(x^2,\ y^2,\ z^2\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (zx)_1 = R_{11}(x^2,\ y^2,\ z^2,\ldots), \\ (zx)_2 = R_{12}(x^2,\ y^2,\ z^2,\ldots). \end{array}\right| \qquad (3)$$

Булардаги R_1, R_2, ... R_{11}, R_{12} ифодалар x^2, y^2, ..., zx га нисбатан чизиқли ва бир жинслидир.

(3) системани x^2, y^2, ..., zx га нисбатан дифференциал тенгламалар системаси деб қараш мумкин. Агар x^2, xy, y^2,... ўрнига E, F, G, 0, ..., 0 ни қўйсак, бу система қаноатланади (буни бевосита текшириб кўриш мумкин). Иккала ечим ҳам [$(u_0^1,\ u_0^2)$ нуқтада] бир хил бошланғич қийматларга эгадир. Ечимнинг ягоналигига асосланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x^2 = E,\ xy = F,\ y^2 = G,\ xz = 0,\ yz = 0,\ z^2 = 1.$$

Аммо $r_{u^1} = x$, $r_{u^2} = y$, шу сабабли:

$$r_1^2 = x^2 = E,\ r_1 r_2 = xy = F,\ r_2^2 = y^2 = G.$$

Шундай қилиб, ясалган сиртнинг биринчи квадратик формаси худди:

$$g_{11}du^{1^2} + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}du^{2^2}$$

дан иборат.

Агар $xz = yz = 0$ ва $z^2 = 1$ ни назарга олсак, z нинг ясалган сирт учун нормаль вазифасини адо этганлигини кўрамиз. Шу сабабли, $r = r(u^1,\ u^2)$ сиртнинг иккинчи квадратик формасидаги коэффициентлар қуйидагилардан иборат:

$$x_{u^1}z,\ x_{u^2}z,\ y_{u^2}z.$$

x_{u^1}, x_{u^2}, y_{u^2} ҳосилаларнинг x, y, z орқали ифодаланишини ва $zx = 0$, $yz = 0$, $z^2 = 1$ муносабатларни назарга олиб, ушбуларни топамиз:

$$x_{u^1}z = b_{11},\ x_{u^2}z = b_{12},\ y_{u^2}z = b_{22}.$$

Демак, ясалган сиртнинг иккинчи квадратик формаси

$$b_{11}du^{1^2} + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}du^{2^2}.$$

Хуллас, биринчи ва иккинчи квадратик формалари олдиндан кўрсатилган формалардан иборат сиртнинг мавжудлиги исботланди.

Фазодаги вазиятига эътибор қилинмаса, бундан сиртнинг ягоналиги олдинги асосий теоремадан дарҳол келиб чиқади. Ҳақиқатан, олинган квадратик формалар ясалган сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари ролини ўйнагани учун, улар сиртнинг шаклини аниқлаб беради. Шу билан исбот тугайди.

Ўн еттинчи боб

СИРТНИНГ ИЧКИ ГЕОМЕТРИЯСИ

§ 107. Геодезик эгрилик

Бу бобда сиртнинг ички геометрияси („планиметрияси“) ҳақидаги маълумотларни кенгайтирамиз ва чуқурлаштирамиз. Сиртнинг ички геометрияси деганда, сирт устидаги чизиқларнинг узунликларига боғлиқ хоссаларни урганувчи бўлимни тушунамиз. Бу хоссалар биринчи квадратик форма билан аниқланиб, улар ҳақида биз олдинги бобларда қисман гапирган эдик. Энди ички геометрияга доир янги тушунчаларни киритамиз. Бу бобни биз г е о д е з и к   э г р и л и к тушунчасидан бошлаймиз.

Сирт устида ётувчи чизиқнинг k_n нормал эгрилиги $k_n = \ddot{\bar r}\bar n = k\cos\theta$ кўринишда ифодаланишига эга эканини эслайлик. Бу ифоданинг ўзидан равшанки, чизиқнинг эгрилик вектори бўлган $\frac{d\bar\tau}{ds} = \ddot{\bar r} = k\bar\nu$ векторни сиртнинг нормалига проекциялаганда, k_n нормал эгрилик ҳосил қилинади. Бундай проекция, яъни нормал эгрилик сиртнинг ички геометриясига тааллуқли эмас, чунки бу ерда сиртнинг „ташқари“сидаги $\bar n$ нормаль, φ бурчак, $\bar\nu$ бош нормаль билан иш кўришга тўғри келаётир. Сиртни эгиш процессида k_n ўзгаради[1]).

Сирт устида ётувчи Γ чизиқнинг шу сирт „ичида“ қанчалик эгилганлигини билиш мақсадида чизиқнинг берилган M нуқтасида сиртга уринма Π текислик ўтказиб, чизиқдаги M нуқтанинг етарлича кичик атрофини шу текисликка проекциялаймиз. Бу вақтда уринма текисликда қандайдир Γ' чизиқ ҳосил қилинади. Ана шу Γ' чизиқнинг M нуқтасидаги эгрилиги Γ чизиқнинг M нуқтадаги *геодезик эгрилиги* дейилади ва у k_g билан белгиланади. Адабиётда геодезик эгрилик термини билан бир қаторда „ички (ёки „тангенциал“) эгрилик“ термини ҳам ишлатилади.

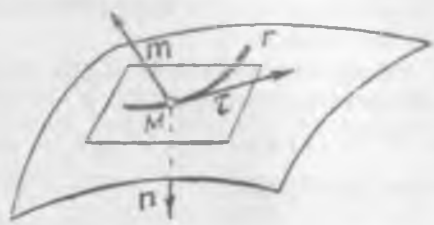
---

[1]) Нормал эгриликни ҳозир k_n билан белгиладик.

Геодезик чизиқнинг ифодасини келтириб чиқариш мақсадида, M нуқтадаги уринма текисликда шундай бирлик m вектор ясаймизки, у бирлик уринма $\bar{\tau}$ вектор билан сирт нормалидаги бирлик n векторнинг векториал кўпайтмасига тенг бўлсин:

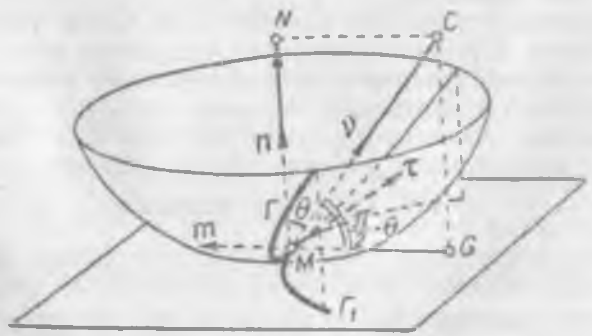
$$m = [n\bar{\tau}] = [n\dot{r}]. \tag{1}$$

Бу вектор Γ чизиқнинг нормалларидан биридир ($\dot{r}$ векторга, яъни уринмага тик бўлгани сабабли). Бу учта τ, m, n вектор M нуқтада Γ чизиқ учун табиий учёқлик ролини ўйнайди (240-чизма). Γ нинг ёй узунлигини параметр деб қараб, Френе формулаларига ўхшаш формулаларни келтириб чиқариш мумкин.



240-чизма.

Учта вектор, яъни эгрилик вектори $\ddot{r} = \overline{MC} = k\nu$, сиртнинг нормали n ва ясалган m вектор Γ чизиқнинг нормал текислигида ётади (бунда $\theta = \widehat{n\nu}$). Шунинг учун, улардан бирини қолган иккитасининг йўналиши бўйича ёйиш мумкин: $\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{MG}$. Бу ердаги $\overline{MN}$ ва $\overline{MG}$ векторларни: эгрилик вектори $\overline{MC}$ нинг сирт нормалига (яъни n нинг йўналишига) ва уринма текисликка (m нинг йўналишига) туширилган проекциялари деб қараш мумкин (241-чизма).



241-чизма.

Ясси Γ_1 чизиқ учун нормаль ролини m вектор ўйнайди.

Равшанки, $\overline{MN} = k_n n$; биз бу векторни Γ чизиқнинг *нормал эгрилик вектори* деб атаймиз. $\overline{MG}$ векторни *геодезик эгрилик вектори* деймиз, унинг тегишли ишора билан олинган узунлигини эса *геодезик эгрилик* деб айтамиз. $\overline{MG}$ ва m векторлар коллинеардир: $\overline{MG} = k_g m$. Агар $\overline{MG}$ ва m бир хил йуналишда бўлса, $k_g > 0$ деб, ва акс ҳолда, $k_g < 0$ деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб,

$$\ddot{r} = k\bar{\nu} = k_n n + k_g m. \qquad (2)$$

Энди геодезик эгрилик учун формула берамиз. (1) ва (2) дан

$$k_g = \ddot{r} m = \ddot{r}\,[n\dot{r}] = \dot{r}\ddot{r}n$$

келиб чиқади.

Агар одатдагича θ ҳарфи билан n ва $\bar{\nu}$ орасидаги бурчакни белгиласак, равшанки,

$$k_n = \ddot{r}n = k\cos\theta \quad \text{ва } k_g = \ddot{r}m = k\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k\sin\theta$$

бўлади. Хуллас,

$$k_g = k\sin\theta = \dot{r}\ddot{r}n. \qquad (3)$$

Ҳозирдаёқ иккита муҳим хулосани чиқариш мумкин:

1) сирт устидаги ҳар қандай тўғри чизиқнинг геодезик эгрилиги нолга тенгдир (чунки тўғри чизиқ учун $k = 0$ ёки, барибир, $\ddot{r} = 0$).

2) $\theta = 0$ да $k_g = 0$, яъни бош нормали сирт нормали бўйлаб йўналган чизиқ учун ҳам $k_g = 0$.

Сирт устида ётувчи чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги геодезик эгрилиги нолга тенг бўлса, у чизиқ сиртнинг геодезик чизиғи дейилади.

Сирт устида ётувчи ҳар қандай тўғри чизиқ унинг геодезик чизиғидир. Сферанинг геодезик чизиқлари катта доиралардан иборат бўлиб, уларнинг бош нормаллари сферанинг нормаллари бўйлаб йўналгандир. Айланма сиртнинг меридиани — унинг геодезик чизиғидир, чунки меридианнинг нормаллари сирт учун ҳам нормаль ролини ўйнайди (228-бет).

§ 108. Геодезик чизиқлар

Олдинги параграфда сиртнинг геодезик чизиғи деб, ҳамма нуқталарида геодезик эгрилиги k_g (ва шу билан бирга, геодезик эгрилик вектори $\overline{MG}$ ҳам) нолга тенг бўлган чизиққа айтилган эди. Демак, сиртнинг „планиметриясида" геодезик чизиқлар тўғри чизиқлар ролини бажаради. Ҳақиқатан, чизиқнинг уринма текисликка туширилган проекциясининг эгрилиги нолга тенг бўлса, бундай чизиқ сирт устида „энг тўғри" бўлиб туйилади, яъни текисликдаги тўғри чизиқ сингари у ўз йўналишини ўзгартмайди. Ўзи эгри чизиқ бўла туриб, йўналишини сақлайдиган чизиқни тасаввур этиш учун, тоғ этагидан тоғ тепасига кўтариладиган йўлни кўз олдимизга келтирайлик. Агар бу йўл ўнг ёки чап томонга қайрилмаса, биз уни „тўппа-тўғри" йўл деб ҳисоблаймиз. Демак, шу йўл бўйича қилинган ҳаракат ўз йўналишини ўзгартниши учун, бу йулнинг „пастдаги" (уринма) текисликка туширилган проекцияси ўз йўналишини ўзгартиши керак. Хуллас, чизиқнинг одатдаги эгрилиги ўрнига, геодезик эгрилигини ҳисобга оламиз. Геодезик чизиқнинг геодезик эгрилиги нолга тенг бўлгани сабабли, бу чизиқ „йўналиши ўзгармас" чизиқдир[1]).

Бу нуқтаи назардан текисликнинг геодезик чизиқлари тўғри чизиқлардан иборатдир.

Геодезик чизиқларнинг бошқа хоссаларини ўрганиш мақсадида геодезик эгриликнинг бошқа формулаларини келтириб чиқарамиз ва геодезик чизиқларнинг дифференциал тенгламаларини тузамиз.

Олдинги параграфдаги (3) формуладан фойдаланамиз. Γ чизиқ бўйлаб эгри чизиқли u^1, u^2 координаталарни s ёйнинг функциялари деб ҳисоблаймиз. У ҳолда,

$$\dot{\boldsymbol r} = \boldsymbol r_1 \dot u^1 + \boldsymbol r_2 \dot u^2,$$
$$\ddot{\boldsymbol r} = \boldsymbol r_{11} (\dot u^1)^2 + 2\boldsymbol r_{12}\dot u^1 \dot u^2 + \boldsymbol r_{22} (\dot u^2)^2 + \boldsymbol r_1 \ddot u^1 + \boldsymbol r_2 \ddot u^2.$$

Қисқача белгилаш усули билан ёзсак, бу икки формула симметрик шаклни олади: $\dot{\boldsymbol r} = \boldsymbol r_\alpha \dot u^\alpha$, $\ddot{\boldsymbol r} = \boldsymbol r_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta + \boldsymbol r_\gamma \ddot u^\gamma$.

Биринчи группа деривацион формулалардан фойдаланиб (356-бет), иккинчи $\boldsymbol r_{\alpha\beta}$ ҳосилаларни алмаштирамиз.

$$\boldsymbol r_{\alpha\beta} = \Gamma^1_{\alpha\beta}\boldsymbol r_1 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\boldsymbol r_2 + b_{\alpha\beta}\boldsymbol n.$$

У ҳолда

$$\ddot{\boldsymbol r} = \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \boldsymbol r_1 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \boldsymbol r_2 + b_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \boldsymbol n + \boldsymbol r_1 \ddot u^1 + \boldsymbol r_2 \ddot u^2. \qquad (1)$$

Энди $[\dot{\boldsymbol r}\ddot{\boldsymbol r}]$ ни тузамиз ва ушбу

$$[\boldsymbol r_1 \boldsymbol r_1] = [\boldsymbol r_2, \boldsymbol r_2] = 0,\ [\boldsymbol r_1 \boldsymbol r_2] = -[\boldsymbol r_2 \boldsymbol r_1],\ [\boldsymbol n\boldsymbol n] = 0,$$
$$\boldsymbol n\boldsymbol n = 1,\ [\boldsymbol r_1 \boldsymbol r_2] = -[\boldsymbol r_2 \boldsymbol r_1] = \sqrt{g}\, n, \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

тенгликларни эътиборга олиб, $\dot r \ddot r n$ аралаш кўпайтмани ҳисоблаймиз:

$$k_g = \dot{\boldsymbol r}\ddot{\boldsymbol r}\boldsymbol n = \sqrt{g}\,(\Gamma^2_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \dot u^1 - \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \dot u^2 + \dot u^1 \ddot u^2 - \dot u^2 \ddot u^1) \qquad (2)$$

ёки

$$k_g = \sqrt{g}\ [\dot u^1 (\ddot u^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta) - \dot u^2(\ddot u^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta)]. \qquad (3)$$

---

[1]) Геодезик эгрилик термини ўрнига Гаусс *„ён эгрилик"* (боковая кривизна — Seitenkrümmung) терминини ишлатар эди.

Геодезик эгрилик учун изланган формула шудир. Йиғиш индексларини ишлатмасак, у қуйидаги шаклни олади:

$$k_g = \sqrt{g}[\ddot{u}^2 \dot{u}^1 - \ddot{u}^1 \dot{u}^2 + \Gamma^2_{11}(\dot{u}^1)^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})(\dot{u}^1)^2 \dot{u}^2 -$$
$$- (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\dot{u}^1(\dot{u}^2)^2 - \Gamma^1_{22}(\dot{u}^2)^3]. \tag{4}$$

Охирги икки формуладан муҳим натижа келиб чиқади: *Сирт устидаги чизиқнинг геодезик эгрилиги сиртнинг ички геометриясига таалуқли бўлиб, фақат шу чизиқнинг шаклига боғлиқдир.* У, иккинчи квадратик формага мутлақо боғлиқ бўлмаганлиги сабабли, *сиртни эгиш процессида ўзгармайди.*

Чиндан ҳам (2) ёки (3) формулага кирувчи Γ^j_{ik} символлар биринчи квадратик форманинг коэффициентлари орқали маълум равишда ифодаланади ва эгиш процессида эгри чизиқли u^1, u^2 координаталарнинг қийматларини ўзгартмасак, бу символлар ўз қийматларини сақлайди. Ёй бўйича олинган $\dot{u}^l$, $\ddot{u}^l$ ҳосилалар ҳам ўзгармайди, чунки эгиш процессида ёй узунлиги ҳам ўз қийматини сақлайди.

Геодезик чизиқнинг дифференциал тенгламасини ҳосил қилиш мақсадида, унинг эгрилик вектори $\ddot{r}$ учун бошқа ифода берамиз. (1) да r_1, r_2 векторлар олдидаги коэффициентларни йиғамиз:

$$\ddot{r} = (\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) r_1 + (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) r_2 + b_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta n. \tag{5}$$

Бу векторларнинг уринма текисликда ётган *ташкил этувчиси* $\overline{MG}$ вектордир; демак, бу векторни (5) дан ҳосил қилиш учун сирт нормалининг n бўйича йўналган қисмини ташлаш кифоядир:

$$\overline{MG} = (\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) r_1 + (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) r_2. \tag{6}$$

Геодезик чизиқ учун геодезик эгрилик нолга тенг ва, шу билан бирга, геодезик вектор ҳам ноль-векторга тенгдир; $\overline{MG} = 0$.

Сирт устидаги махсус нуқталар қаралмаганлиги сабабли, (6) га кирувчи r_1, r_2 векторлар коллинеар эмасдир. Демак, $\overline{MG}$ вектор ноль-векторга тенг бўлиши учун, r_1, r_2 векторлар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0, \quad \ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0 \tag{7}$$

ёки

$$\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0, \quad \frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0, \tag{8}$$

ёки

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (i = 1,\ 2) \tag{9}$$

(3) дан равшанки, (7) шартлар бажарилганда: $k_g = 0$.

Шундай қилиб, геодезик чизиқ бўйлаб эгри чизиқли u^1, u^2 координаталар s нинг (яъни ёй узунлигининг) функциялари деб ҳисобланса, улар иккита иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама системаси бўлган (8) системани қаноатлантиради, $u^1(s)$, $u^2(s)$ функциялар ушбу шартни ҳам қаноатлантириши керак:

$$g_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + g_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 1.$$

(8) система Коши системасидир, чунки унга кирувчи Γ^k_{ij} символлар u^1, u^2 нинг тайин функцияларидир ва иккинчи тартибли ҳосилалар маълум равишда биринчи тартибли ҳосилалар орқали ифодалангандир. Ҳақиқатан, (8) ни очиб ёзайлик:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = -\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Биз бу ерда u^1, u^2 дан эскича белгилашларга, яъни u, v га қайтдик.

Бу системани текширишни осонлаштириш мақсадида, эркли ўзгарувчи деб ҳисобланган s ўрнига u (ёки v) ни олиб, ундан u, v га нисбатан иккинчи тартибли битта дифференциал тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Шу мақсадда, геодезик эгриликнинг (4) даги ифодасини энди

$$v = v\,(u)$$

тенглама билан берилган чизиққа мослайлик.

Эркли ўзгарувчи ҳозир бизда $u\,(= u^1)$ бўлиб, $v\,(= u^2)$ унинг функциясидир. v нинг u га нисбатан ҳосилаларини штрихлар билан белгилаймиз:

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{\dot v}{\dot u}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2} = \frac{\dot u\,\ddot v - \ddot u\,\dot v}{\dot u^3}.$$

Энди (4) да $\dot u^3\,[= (\dot u^1)^3]$ ни қавсдан чиқариб,

$$ds = \sqrt{g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2}$$

ўрнига $ds = du\sqrt{g_{11} + 2g_{12}\,v' + g_{22}\,v'^2}$ ни қўйсак, ушбу муҳим формула ҳосил қилинади:

$$k_g = \sqrt{g}\,\frac{v'' + \Gamma^2_{11} + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\,v' - (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\,v'^2 - \Gamma^1_{22}\,v'^3}{(g_{11} + 2g_{12}v' + g_{22}\,v'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Бу ҳолда геодезик чизиқнинг дифференциал тенгламаси ушбу шаклни олади:

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3+(2\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22})\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(\Gamma^1_{11}-2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du}-\Gamma^2_{11}. \qquad (11)$$

Машқлар

230. Қўрилаётган сиртни текислик фараз қилиб, ундаги чизиқнинг геодезик эгрилиги одатдаги эгрилиги билан бир хил эканини исботланг.

Е ч и ш. Бу ҳолда уринма текислик ҳамма нуқта учун шу текисликнинг ўзидир, шунинг учун чизиқни уринма текисликка проекциялаганда яна шу чизиқнинг ўзини ҳосил қиламиз. (10) формула ҳам шу натижага бевосита келтиради. Ҳақиқатан, текисликда Декарт ортогонал системаси танланиб олинса, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, яъни $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ бўлиб, g_{ik} нинг ҳосилалари орқали ифодаланувчи барча $\Gamma_{ij,k}$, Γ^k_{ij} символлар нолга тенг бўлади ва (10) формула ушбу шаклни олади:

$$k_g = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}.$$

Бу эса ясси чизиқнинг одатдаги эгрилиги учун чиқарилган $k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ формуланинг ўзидир, бу ерда $y'' = 0$ ва демак, $k = 0$; шундай қилиб, тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

231. Координат чизиқларининг геодезик эгриликлари учун тегишли формулалар берилсин.

Жавоб: (4) формулада $u^2 = \text{const}$ ва $u^1 = \text{const}$ десак, қуйидагилар ҳосил қилинади:

$$(k_g)_{u^1=\text{const}} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{g}}{(g_{22})^{3/2}}, \quad (k_g)_{u^2=\text{const}} = \Gamma^2_{11}\frac{\sqrt{g}}{(g_{11})^{3/2}}, \qquad (12)$$

бу ерда $\dot{u}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$, $\dot{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$ эканлиги эътиборга олинган. Буларни исботланг.

232. Олдинги мисолда координат чизиқларини ортогонал фараз этиб ($g_{12} = 0$), k_g ни ҳисобланг.

Жавоб: Ортогонал система учун (358-бет, 215-машқ):

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Демак,

$$\left.\begin{aligned}(k_g)_{u^1=\text{const}} &= \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial u^1}(\lg\sqrt{g_{22}}),\\ (k_g)_{u^2=\text{const}} &= -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial u^2}(\lg\sqrt{g_{11}}).\end{aligned}\right| \qquad (13)$$

233. Берилган чизиқнинг одатдаги эгрилиги нормал эгрилиги билан геодезик эгрилиги орқали ифодалансин.

Жавоб: $k\nu = k_n n + k_g m$ дан

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}.$$

Бундан: геодезик чизиқ учун ($k_g = 0$!) одатдаги эгрилик нормал эгриликка тенг деган хулоса чиқади: $k = k_n$.

234. Радиуси a га тенг сфера устида жойлашган r радиусли айлананинг геодезик эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k_g = \frac{1}{ar}\sqrt{a^2 - r^2}$.

235. Профил чизиғи (меридиани) $z = f(\rho)$ чизиқдан иборат айланма сиртдаги параллелнинг (айлананинг) геодезик эгрилиги топилсин.

Жавоб: Айланиш ўқи OX (яъни $O\rho$) ҳисобланса,

$$k_g = \frac{f'(\rho)}{f(\rho)\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}$$

бўлади.

236. Сферик локсодромнинг геодезик эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k_g = \frac{1}{a}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\theta$.

237. Геликоид берилган:

$$r = ue(v) + avk.$$

Унинг винт чизиқлари (яъни $u = \mathrm{const}$ чизиқлари) нинг геодезик эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k_g = \frac{u}{a^2 + u^2}$.

238. Биринчи квадратик формаси $ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$ шаклда берилган сирт устидаги чизиқнинг геодезик эгрилиги топилсин.

Жавоб: $k_g = \frac{-\sqrt{G}}{1 + Gv'^2}\left(v'' + \frac{1}{2}G_u v'^3 + \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}v'^2 + \frac{G_u}{G}v'\right)$.

§ 109*. Геодезик чизиқлар „сони“

Олдинги параграфдаги (11) тенглама сирт устидаги геодезик чизиқларнинг дифференциал тенгламасидир:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)\frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2. \qquad (1)$$

Геодезик чизиқ тенгламасини $v = v(u)$ шаклда изласак, (1) дан шуни кўрамизки, номаълум $v(u)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи унинг биринчи ҳосиласига нисбатан учинчи даражали кўпҳад шаклида ифодаланади. Бу кўпҳад (тенглама) нинг коэффициентлари эса u аргументнинг ва изланган v функциянинг маълум (узлуксиз) функцияларидир.

Текширилаётган тенглама $\frac{d^2v}{du^2} = F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$ шаклдаги дифференциал тенглама бўлганидан, унинг интеграли иккита ихтиёрий ўзгармасга боғлиқдир:

$$v = v(u, C_1, C_2).$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенглама интегралининг мавжудлик теоремасига асосан[1]), бошланғич u_0, v_0, $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ қиймат-

[1]) В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, М, 1950, 140-бет.

ларни ихтиёрий равишда танлаб олиб, $u = u_0$ қийматда номаълум v функция v_0 га, унинг ҳосиласи эса $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ га тенг бўлишини талаб қилиш мумкин:

$$v\Big|_{u=u_0} = v_0, \quad \frac{dv}{du}\Big|_{u=u_0} = \left(\frac{dv}{du}\right)_0.$$

Бу ҳолда $u = u_0$ қиймат яқинида қуйилган ана шу шартларни қаноатлантирувчи ягона ечнмнинг борлигини мавжудлик теоремаси тасдиқлайди.

Бу мулоҳазаларни геометрия тилида ифодалаш мумкин. $M_0(u_0, v_0)$ нуқта сиртдаги бошланғич нуқтани, $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ эса у нуқтадан чиқувчи геодезик чизиқ йўналишини ифодалайди.

Демак, сирт устидаги геодезик чизиқлар икки параметрли оилани ташкил қилиб, *ҳар бир $M_0(u_0, v_0)$ нуқтадан ҳар бир $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$ йўналишда фақат биттагина геодезик чизиқ ўтказиш мумкин.* $M_0(u_0, v_0)$ нуқта атрофида бу чизиқ $v = v(u)$ тенглама билан ифодаланади.

Сиртдаги геодезик чизиқларнинг бу хоссаси текисликдаги тўғри чизиқлар хоссасини эслатади; ҳар бир нуқтадан берилган йўналишда фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Геодезик эгриликнинг сиртни эгиш процессида ўзгармаслигини юқорида (§ 106) исботлаган эдик. Демак, сирт устидаги чизиқ учун $k_g = 0$ бўлса, сиртни эгишдан кейин ҳам, бу k_g нолга тенглигича қолади. Хуллас, эгиш процессида геодезик чизиқлар яна геодезик чизиқлигича қолади, бундан эса *геодезик чизиқ тушунчаси сиртнинг ички геометриясига тааллуқли* деган натижа келиб чиқади.

Бу натижани ёйилувчи сиртга татбиқ этсак, у ҳолда ёйилувчи сиртни текисликка ётқизганда, бу сиртнинг геодезик чизиқлари текисликнинг тўғри чизиқларига алмашинади деган хулосага келамиз.

Мисоллар. 1) Айланма сиртнинг геодезик чизиқларини топайлик. Унинг чизиқли элементи $ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2$ днр, бунда u — меридиан ёйи, v — узоқлик (бурчак), (ρ эса параллел радиуси бўлиб, u нинг тайин функциясидир[1]). Бу ерда $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = \rho^2$. Христоффелнинг Γ^2_{11}, Γ^2_{12}, Γ^2_{22} символларини тегишли формулалар бўйича ҳисоблаш мумкин (358-бет, 215-машқ).

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma_{12} = \frac{\rho_u}{\rho}, \quad \Gamma^2_{22} = 0.$$

---

[1]) $[1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2$ du^2 ни эслатиб ўтамиз.

Олдинги параграфдаги (8) тенгламаларнинг иккинчисига мурожаат қилайлик:

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0.$$

Бу тенглама ушбу шаклни олади:

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{2\rho_u}{\rho}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}=0.$$

Буни интеграллаш учун икки томонини ρ^2 га кўпайтирамиз:

$$\rho^2\frac{d^2v}{ds^2}+2\rho\rho_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}=0.$$

Бу вақтда тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$\frac{d}{ds}\left(\rho^2\frac{dv}{ds}\right)=0,$$

бундан „биринчи интеграл" ҳосил қилинади:

$$\rho^2\frac{dv}{ds}=c_1,\ c_1=\text{const}. \qquad (1)$$

(1) тенглама биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлиб, уни интеграллаш қийин эмас:

$$\rho^2 dv=c_1 ds=c_1\sqrt{du^2+\rho^2 dv^2}$$

ёки, ихчамлаштиргандан кейин,

$$dv=\frac{c_1 du}{\rho\sqrt{\rho^2-c_1^2}},$$

демак,

$$v=c_1\int\frac{du}{\rho\sqrt{\rho^2-c_1^2}}+c_2. \qquad (2)$$

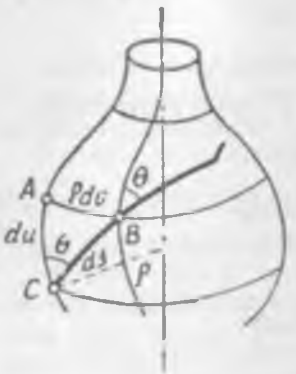
Конкрет айланма сирт берилса, унинг ҳамма геодезик чизиқлари шу (2) тенгламадан аниқланади. (2) тенгламага иккита c_1 ва c_2 ўзгармас киради.

„Биринчи интеграл" (1) — ажойиб геометрик маънога эга. Сиртнинг чизиқли элементида $u=\text{const}$ фараз қилинса, $ds_u=\rho dv$ ҳосил бўлади, бу эса параллель ёйининг дифференциалини беради. Геодезик чизиқнинг ёйн $\overset{\frown}{BC}\approx ds$, параллелнинг ёйи $\overset{\frown}{AB}\approx\rho dv$ ва меридианнинг $\overset{\frown}{AC}$ ёйи билан ҳосил қилинган „тўғри бурчакли" ABC учбурчакдан кўрамизки, $\frac{\rho dv}{ds}=\sin\theta$, бунда θ — геодезик чизиқ билан меридиан орасидаги бурчакдир (242-чизма). Энди (1) тенглама

$$\rho\sin\theta=c_1 \qquad (3)$$

кўринишни олади. Агар ρ нинг бу ерда сирт нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган масофа эканини эътиборга олсак, (1) тенглик Клеро томонидан 1733 йилда исботланган ушбу теоремани ифодалайди:

Айланма сирт устидаги бирор чизиқнинг геодезик чизиқдан иборат бўлиши учун, бу чизиқ билан меридиан орасидаги бурчакнинг параллел радиусига кўпайтмаси ўзгармас бўлиши зарур ва етарлидир.



242-чизма.

$\rho \sin\theta = \mathrm{const}$, шу сабабли айланма сиртдаги геодезик чизиқ меридианлар билан кесишиб, параллелнинг радиуси камайган сари меридиандан узоқлаша боради. Унинг меридиан билан ташкил қилган θ бурчагининг синуси ўққача бўлган масофага тескари пропорционалдир.

Геометрик мулоҳазалардан айланма сирт меридиани бу сиртнинг геодезик чизиги эканини юқорида аниқлаган эдик (меридиан нормали сирт нормали бўйича йўналганлигини эсланг). Бу фактга соф аналитик йўл билан ҳам келиш мумкин: (3) тенгликда $c_1 = 0$ десак, $\theta = 0$ бўлади.

2) Доиравий цилиндрнинг геодезик чизиқлари унинг ясовчилари билан винт чизиқларидан иборатдир.

Ҳақиқатан, доиравий цилиндр учун $\rho = \mathrm{const}$ бўлганлиги сабабли, Клеро теоремасидан $\theta = \mathrm{const}$ деган хулоса келиб чиқади, яъни геодезик чизиқлар цилиндр ясовчиларини бир хил бурчак остида кесиб ўтади, демак, улар винт чизиқлардир.

3) Умумий цилиндрик сиртнинг геодезик чизиқлари унинг устидаги ён бағир чизиқлардир, чунки цилиндрик сиртни текисликка ётқизганда ён бағир чизиқ тўғри чизиққа алмашинади.

4) Силлиқ сирт устида ҳаракатланувчи моддий нуқтага ташқи кучлар таъсир этмаса, бундай нуқта геодезик чизиқни чиза боради.

Буни исботлаш учун, нуқтанинг сирт устида қилган ҳаракатининг умумий тенгламасини ёзамиз:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F + Rn - \mu |R| \tau,$$

бунда F — ташқи куч, R — сиртнинг (нормал) реакцияси, μ — ишқаланиш коэффициенти, n — сирт нормалининг бирлик вектори, τ — траекториянинг бирлик уринмаси.

Энди:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{r}\frac{ds}{dt}$$

тенгликдан:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}$$

ҳосил бўлиб, кўрилаётган ҳолда $F=0$, шу сабабли юқоридаги тенглама ушбу шаклни олади:

$$m\left\{\ddot{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{r}\frac{d^2s}{dt^2}\right\} = Rn - \mu\,|R|\,\dot{r}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини $[\dot{r}n]$ га скаляр кўпайтириб, ўшбуни ҳосил қиламиз:

$$\dot{r}\,\ddot{r}\,n = 0,$$

бу тенглама эса геодезик чизиқнинг дифференциал тенгламасидир [378-бет, (3) тенглама].

5) Силлиқ сирт устида ётган ва оғирлиги эътиборга олинмаган ип шу сирт устида ҳаракат қилиб, ундан четга чиқа олмайдиган бўлсин. Агар бу ип сиртга маълум куч билан тортилган ҳолда мувозанатда бўлса, у геодезик чизиқ шаклини (формасини) қабул қилади (ипга тортилиш кучи билан сирт реакциясидан бошқа куч таъсир этмайди деб фараз этилади).

Ҳақиқатан, тортилиш кучи T билан белгиланса, бу куч ипнинг уринмаси бўйича йўналган бўлиб, $T\bar{\tau}$ га тенгдир (бу ерда $\bar{\tau}$ — бирлик уринма). Ҳар бир нуқтадаги тортилиш кучларининг *тенг таъсир этувчиси* $d(T\bar{\tau}) = \bar{\tau}dT + Td\bar{\tau}$ дан иборатдир. Ип мувозанатда бўлгани сабабли, бу *тенг таъсир этувчи* куч сиртнинг қаршилиги билан мувозанат ҳолатга келади (йўқолади); силлиқ сиртнинг қаршилиги (яъни тенг таъсир этувчи) фақат нормаль бўйлаб йўналгандир. Шу сабабли, $d(T\bar{\tau})$ вектор n нормаль бўйича йўналган бўлиб, демак, $\bar{\tau}$ га тикдир, бундан эса унинг $\bar{\tau}dT$ ясовчиси нолга тенг деган хулоса чиқади, яъни $dT=0$ ва $T=\text{const}$. Шундай қилиб, $Td\bar{\tau}$ вектор сиртнинг нормали бўйлаб йўналган, шу сабабли $d\bar{\tau}\,\|\,n$ ёки $\frac{d\bar{\tau}}{ds}\,\|\,n$, яъни $\ddot{r}\,\|\,n$; бундан, чизиқнинг бош (ν) нормали n га коллинеар деган хулоса чиқади. Демак, ип геодезик чизиқ формасини (шаклини) олади[1]). Айтганимиз исботланди.

§ 110*. Ярим геодезик система. Экстремал хосса

Сирт устидаги геодезик чизиқлар икки параметрли оилани ташкил қилишини ва иккинчи тартибли дифференциал тенгла-

[1]) М. Т. Ўрозбоев, Назарий механика, Тошкент, Ўздавнашр, 1950. II қисм, § 136.

мадан аниқланишини кўрган эдик. Аммо бу тенглама айрим ҳоллардагина охиргача интегралланади. Шунга қарамай, тенгламани интегралламасдан туриб, сирт устидаги геодезик чизиқларни „сифат жиҳатидан" анализ қилиш мумкин. Бундай анализни олиб бориш учун эгри чизиқли координаталарни тегишинча танлаб олиш катта роль ўйнайди.

Сирт (ёки сирт устида жойлашган U соҳа) даги геодезик чизиқларнинг бир параметрли оиласини олайлик. Бу оилага нисбатан қўйилган талаблардан бизга ҳозир керак бўлгани шуки, U соҳанинг ҳар бир нуқтасидан битта геодезик чизиқ ўтади, яъни соҳа ичида оила чизиқлари кесишмайди (соҳанинг ташқарисида кесишса майли). Соҳа ичидаги ҳар бир нуқтадан ҳар бир йўналишда фақат битта геодезик чизиқ ўтгани учун бундай оила „геодезик чизиқлар майдони"ни ташкил қилади деб айтилади.

Бир параметрли оиланинг геодезик чизиқларига ортогонал бўлган чизиқлар оиласини ҳар вақт топиш мумкин (246-бет, § 79). Ана шу икки оилани координат чизиқлари сифатида танлаб олайлик; бу вақтда координат тўрига қарашли битта оила *геодезик чизиқлардан*, иккинчиси эса уларнинг *ортогонал траекторияларидан* иборат бўлади. Бундай координат тўри *ярим геодезик тўр* ва тегишли система эса *ярим геодезик система* дейилади.

Текисликда қутб системага қарашли икки оила (тўғри чизиқлар дастаси ва уларга ортогонал айланалар оиласи ярим геодезик системани, шунинг сингари, айланма сиртда меридианлар (геодезик чизиқлар) ва параллеллар ярим геодезик тўрни ташкил қилади.

u^1 чизиқлар (яъни $u^2 = v = \text{const}$) сифатида геодезик чизиқларни ва u^2 чизиқлар (яъни $u^1 = u = \text{const}$) сифатида бу геодезик чизиқларнинг ортогонал траекторияларини қабул қиламиз. Бундай системада сиртнинг чизиқли элементи содда шаклни олади: $ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2$, бу ерда $v = \text{const}$ геодезик чизиқ бўлгани учун, 382-бетдаги (11) тенгламада $dv = 0$, $d^2v = 0$ фараз этсак,— $\Gamma^2_{11} = 0$ келиб чиқади (§ 108). U соҳанинг ҳамма нуқталарида:

$$\Gamma^2_{11} = 0, \quad g_{12} = 0. \tag{1}$$

Координат тўрининг ортогоналлик шарти $g_{12} = 0$ ни эътиборга олсак, Γ^2_{11} нинг ифодаси (382-бет, 232-машқ) соддалашади:

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial v}.$$

Демак, (1) шарт

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0, \quad g_{12} = 0$$

шартига эквивалент, яъни g_{11} коэффициент фақат u нинг функцияси (v га боғланмаган) бўлади. Хуллас,

$$ds^2 = g_{11}(u)\,du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2.$$

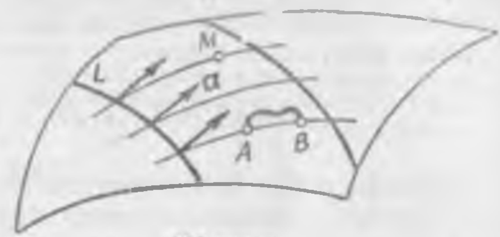
Бу ифодани яна ҳам соддалаштириш мумкин: u чизиқ (v=const) нинг ёйи:

$$\int \sqrt{g_{11}(u)}\,du$$

бўлиб, у фақат u га боғлиқдир. Бу интеграл ёрдами билан u ўзгарувчи ўрнига янги ξ узгарувчини киритамиз, бироқ ҳарфлар сонини орттирмаслик мақсадида уни яна u билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2. \qquad (2)$$

Ярим геодезик системада ds^2 мана шу шаклни олади, яъни $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$. Бирор геодезик чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, v = const бўлиб, у ҳолда $ds = du$, бу эса янги u параметрнинг геодезик чизиқ учун ёй узунлиги ролини ўйнаганини кўрсатади ва $u = a$, $u = b$ га мос келувчи иккита ортогонал траектория орасидаги u чизиқнинг узунлиги $b - a$ га тенг деган хулосага келтиради. Бу узунлик v га боғлиқ бўлмаганлигидан, у, шу икки траектория орасидаги ҳамма u чизиқлар (v = const) — геодезик чизиқлар учун бир хил эканини кўрамиз.



243-чизма.

Бу мулоҳазалар геодезик чизиқлар оиласининг ортогонал траекторияларини *геодезик параллеллар* деб аташга асос беради. Иккита траектория орасини геодезик чизиқ ёйи билан ўлчаганда бир хил „масофа" ҳосил қилинади.

Бу хосса текисликдаги параллел тўғри чизиқларни эслатади: уларга тик бўлган ҳар қандай икки тўғри чизиқ улардан бир хил кесмалар ажратади.

Сирт устида қурилган ярим геодезик система ва чизиқли элементнинг (2) ифодаси, геодезик чизиқларнинг экстремал хоссасини исботлашга имкон беради. Қисқача (лекин аниқсизроқ) қилиб айтганда, сиртнинг A ва B нуқталаридан ўтувчи геодезик чизиқ ёйи, шу нуқталардан ўтувчи ҳар қандай бошқа ёйдан қисқадир (243-чизма).

A ва B нуқталардан геодезик чизиқ ўтади деб фараз қилайлик. Бу чизиқни геодезик чизиқларнинг бир параметрли оиласи таркибига киритамиз ва уларни ярим геодезик системанинг координат чизиқлари ($v = \text{const}$) сифатида қабул қиламиз[1]).

Бу шартлар бажарилса, қуйидаги теоремани исботлаш мумкин:

Агар берилган геодезик чизиқнинг A ва унга етарлича яқин B нуқталарини туташтирувчи ёйини геодезик чизиқлар майдонига киритиш мумкин булса, бу AB ёй A ва B нуқталарни туташтирувчи бошқа ёйларга қараганда энг қисқа масофани беради.

Исбот. Юқорида олиб борилган муҳокамаларга мувофиқ, берилган геодезик чизиқни A нуқтанинг етарлича кичик атрофида ярим геодезик системанинг $u\,(v = \text{const})$ чизиғи деб қараш мумкин. u параметрнинг A ва B нуқталарга мос келган қийматлари a ва b бўлса, бизга маълумки, $\overset{\frown}{AB} = b - a$ ($b > a$ деб ҳисоблаганда) бўлади.

Энди шу A ва B нуқталардан ўтиб, геодезик чизиққа яқин турган бошқа бирор чизиқни олайлик. Унинг ёйи ушбу интегралга тенг:

$$s = \int_A^B \sqrt{du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2} > \int_A^B |du|, \tag{3}$$

чунки $g_{22} = r_v^2 > 0$. Ўнг томондаги интегрални баҳолаймиз; интегралнинг маълум хоссасига кўра, ушбуни ёза оламиз:

$$\int_A^B |du| \geq \left| \int_A^B du \right| = b - a. \tag{4}$$

Агар $\overset{\frown}{AB}$ ёйда u параметр ҳамон ўса борса ($du > 0$) у ҳолда (4) муносабатда тенглик ишорасини ёзамиз, u тебраниб турган ҳолда эса $>$ ишорасини ёзамиз.

Хуллас, (3) ва (4) дан

$$\int_A^B \sqrt{du^2 + g_{22}(u, v)\,dv^2} > b - a$$

ҳосил бўлиб, шу билан теорема исботланади.

Исбот вақтида $\overset{\frown}{AB}$ ёйни геодезик майдонга киритиш мумкинлиги ва A, B нуқталарнинг бир-бирига яқинлиги кўзда тутилиши керак эди. Бу шартлар бузилса, теорема ўз кучини йўқотиши мумкин. Мисол тариқасида сферанинг геодезик чизиғини — катта доира айланасини олайлик. Бу айланадаги ик-

---

[1]) Бу мулоҳазаларимиз жиддийлик талабига жавоб бермайди. Тегишли фактларнинг жиддий исботи китобимизнинг чегарасидан ташқарига чиқади. Биз бу ерда аёний мулоҳазалар билан кифояландик.

кита A ва B нуқта уни икки қисмга бўлади (биз A ва B нуқталарни диаметрал қарама-қарши нуқталар эмас деб фараз қиламиз), уларнинг бири ярим айланадан кам, иккинчиси ортиқдир. Биринчи қисм энг қисқа масофани беради, иккинчиси эса бундай хоссага эга эмасдир: геодезик чизиқнинг ярим айланадан ортиқ бўлган ёйини геодезик чизиқлар майдонига киритиб бўлмайди, чунки бундай ёй билан кесишмайдиган битта ҳам катта доира йўқдир.

МАШҚЛАР, ИЛОВАЛАР

239. Геодезик чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги, шу нуқтада бу чизиққа уринувчи бошқа ҳамма чизиқларнинг эгрилигидан камдир, яъни у, сирт устида „мумкин қадар" кам эгилган чизиқдир.

Исбот. Чизиқнинг эгрилик вектори $\bar{r}$ ўзининг иккита проекцияси билан, яъни нормал эгрилиги k_n ва геодезик эгрилиги k_g билан тўла аниқланади. Уринмаси умумий бўлган ҳамма чизиқларнинг нормал эгрилиги бир хил (Менье теоремасини эсланг). Демак, геодезик эгрилик қанча кам бўлса, чизиқнинг эгрилиги ҳам шунча кам бўлади.

240. Айланма сиртнинг геодезик чизиқларини тўларок текширайлик. Уларни характерловчи $\rho \sin \theta = c_1$ муносабатдан $|c_1| < \rho$ ни топамиз; демак, геодезик чизиқ айланиш ўқига $\rho = c_1$ масофадан яқинроқ келмайди. Айланма сиртнинг $\rho = a$ (максимал) ва $\rho = b$ (минимал) параллеллар орасидаги соҳасини кўздан кечирайлик.

а) $c_1 = a$ бўлса, $\rho = a$ ва $\theta = \frac{\pi}{2}$; c_1 параметри a га тенг геодезик чизиқ энг катта параллелнинг ўзидан иборат, чунки у, меридианга $\rho = a$ нуқтада уриниб, унга тикдир.

б) $b < c_1 < a$ бўлса, геодезик чизиқ $\rho = a$ параллелни $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ бурчак остида кесиб ўтади $\left(\sin \theta_0 = \frac{c_1}{a}\right)$; ρ камайиши билан, $\frac{c_1}{\rho}$ каср ва демак, $\sin \theta$ (яъни θ бурчак) орта боради. Геодезик чизиқ $\rho = c_1$ параллелга уринади (чунки бу ҳолда яна $\theta = \frac{\pi}{2}$). Бу геодезик чизиқ орқага қайтиб, энг катта параллелни яна $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ бурчак остида кесади: сўнгра $\rho = c_1$ параллелгача бориб, унга урингандан кейин орқага қайтади.

в) $c_1 = b$ қийматда геодезик чизиқ энг кичик $\rho = b$ параллелдан иборат бўлади, чунки бу ҳолда меридианга $\rho = b$ нуқтада ўтказилган уринма айланиш ўқига параллелдир; сиртнинг нормали эса параллелнинг текислигида ётади.

г) $c_1 < b$ да геодезик чизиқ $\rho = a$ параллелдан пастга тушиб, энг кичик $\rho = b$ параллелни $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ бурчак $\left(\sin \theta_1 = \frac{a}{b}\right)$ остида кесиб ўтади ва ундан кейин $\rho = c_1$ параллел билан кесишгунча давом этади.

д) $c_1 = 0$ да геодезик чизиқ меридианнинг ўзидир.

241. *Гауссиинг геодезик айланалари*. Сиртнинг берилган (оддий) M_0 нуқтасидан чиққан ҳамма геодезик чизиқлар ва уларнинг ортогонал траекторияларн ярим геодезик системани ташкил қилади (нега?). Бу системада $ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)\, dv^2$, бунда u — геодезик чизиқ ёйидир; бу ҳолда геодезик параллеллар (ортогонал траекториялар) маркази M нуқтадаги айланалардан, яъни ёпиқ чизиқлардан иборат бўлади. Бу айланалар *Гаусс айланалари*

дейилади. Уларнинг M_0M радиуси u га тенг. Қурилган системада M нуқтанинг координаталари u, v бўлиб, улар текисликдаги қутб системани эслатади ($ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$). Шу сабабли, M_0 нуқтадаги геодезик чизиқлар дастаси ва уларнинг ортогонал траекториялари (Гаусс айланалари) **геодезик қутб системаси** дейилади. Бу ерда u, v координаталар ρ, φ ролини ўйнайди (нега?). Агар параметр сифатида u чизиққа ($v = \text{const}$) M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг „бошланғич" $v_0 = 0$ чизиқ билан ташкил қилган бурчагини олсак, қутб система билан бўлган ўхшашлик яна кучаяди.

Геодезик қутб системанинг махсус нуқтаси M_0 дир (нега?); унга $u = 0$, $v = 0$ мос келади. Энди $u \to 0$ фараз қилиб, қуйидаги исботлансин:

$$g_{22} \to 0, \quad \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u} \to 1.$$

Ечилиш. Координат бошини M нуқтага кўчириб, Ox ўқи сифатида $v = 0$ чизиққа ўтказилган уринмани олиб, Oz ўқини сиртнинг шу нуқтадаги нормали бўйича йўналтирамиз. Бундай параметризацияда $M_0(0, 0)$ нуқта махсус бўлиб, унга яқин M нуқтанинг x, y, z координаталари учун ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$x = u \cos v + \varepsilon_1, \quad y = u \sin v + \varepsilon_2, \quad z = \lambda u^2 + \varepsilon_3,$$

бу ерда ε_1, ε_2, ε_3 лар u га нисбатан камида учинчи тартибли чексиз кичик, λ фақат u га боғлиқ, z эса сиртдаги M нуқтанинг уринма текисликкача масофаси. Бу тенгликлардан

$$g_{22} = G(u, v) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2 + \eta.$$

Сўнгги ифодага кирган η ҳам u га нисбатан камида учинчи тартибли чексиз кичикдир. Бу ердан:

$$G(0, v) = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{G(0, v)}}{\partial u} = 1. \tag{5}$$

Тўлиқ эгриликнинг $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$ ифодасидан ёки унга тенг кучли ушбу

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -K\sqrt{G}$$

ф одадан яна иккита муносабат ҳосил қилинади:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G(0, v)}}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \sqrt{G(0, v)}}{\partial u^3} = -K_0,$$

бунда K_0 — сиртнинг $M(0, 0)$ нуқтадаги Гаусс эгрилигидир.

Юқоридагиларни эътиборга олиб, $\sqrt{G}$ ни $u = 0$ атрофида u нинг даражалари бўйича ёйиш мумкин:

$$\sqrt{G} = u - \frac{K_0}{6} u^3 + \ldots$$

M нуқтадан ўтиб, ўзгармас геодезик масофага эга бўлган чизиқ *геодезик айлана* дейилади. Унинг узунлигини C билан белгиласак:

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dv$$

ёки

$$C = 2\pi u - \frac{\pi K_0}{3} u^3 + \varepsilon$$

ҳосил бўлади, ўнг томондаги ε қўшилувчи u га нисбатан учинчи тартибли чексиз кичикдир.

242. Дарбунинг *геодезик айланаси* деб, геодезик эгрилиги ўзгармас бўлган чизиққа айтилади. Бу чизиқлар, умуман айтганда, ёпиқ эмас (цилиндрдаги винт чизиқлар сингари). Айланма сиртнинг параллеллари Дарбу айланаларидир (нега?). Шарда Дарбу ва Гаусс айланалари орасида фарқ бўлмасдан, улар одатдаги катта доиралардир.

243. Сирт устида ярим геодезик система ўрнатилган бўлса ($ds^2 = du^2 + g_{22}dv^2$), геодезик чизиқнинг тенгламасини ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u},$$

бунда α — берилган геодезик чизиқнинг $v = \text{const}$ чизиқ (яъни u оила чизиғи) билан ташкил қилган бурчагидир. Жумладан, $\alpha = \text{const}$ бўлса, бундан олдинги масаладаги натижа келиб чиқади. Буларни исботланг.

244. Фақат ясси геодезик чизиқ шу вақтнинг ўзида яна эгрилик чизиғи ҳам бўлиши мумкин. Буни исботланг.

Кўрсатма. Геодезик чизиқнинг бош нормаллари сирт нормаллари бўйлаб йўналган; бу нормаллар эса, фақат ясси чизиқ учун ёйилувчи сиртни ҳосил қилади.

245. Берилган фазовий чизиқнинг ҳамма эволюталари бу чизиқнинг қутбий сирти учун геодезик чизиқлар ролини ўйнайди. Буни исботланг.

246. Берилган йўналишдаги геодезик чизиқнинг бурилмаси, шу йўналишдаги геодезик бурилма дейилади. Унинг ифодаси келтириб чиқарилсин.

Кўрсатма. Френенинг иккинчи формуласидан ушбуни ҳосил қиламиз: $\sigma = \sigma_g = \overline{\beta}\frac{d\overline{\nu}}{ds}$; геодезик чизиқ учун $\overline{\nu} = \pm n$; демак, $\sigma_g = \pm \overline{\beta}\frac{dn}{ds}$, аммо $\overline{\beta} = [\overline{\tau}\,\overline{\nu}] = \pm \left[\frac{dr}{ds} n\right]$, шу сабабли:

$$\sigma_g = \frac{dr\,dn\,n}{ds^2}.$$

247. Сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги $\overline{\tau}$, n, m {бунда: $m = [n\dot{r}]$} векторлардан s бўйича олинган $\dot{\tau}$, $\dot{m}$, $\dot{n}$ ҳосилалар учун формулалар келтириб чиқарилсин.

Жавоб: $\dot{\tau} = \alpha m - \beta n$, $\dot{m} = -\alpha\tau + \gamma n$, $\dot{n} = \beta\tau - \gamma m$, бу ерда:

$$\alpha = \dot{\tau} m = -\dot{m}\tau = k_g \text{ — геодезик эгрилик},$$

$$\beta = \dot{n}\tau = -\dot{\tau}n = k_n \text{ — нормал эгрилик},$$

$$\gamma = \dot{m}n = -\dot{n}m = \sigma_g \text{ — геодезик бурилма}.$$

Охирги формуладан олдинги машқдаги натижа чиқарилсин.

Кўрсатма. $m = [n\dot{r}]$ ни дифференциаллаб, натижани n га скаляр кўпайтирилсин.

248. Сиртнинг чизиқли элементи берилган: $ds^2 = v\,(du^2 + dv^2)$. Унинг геодезик чизиқлари (u, v) текисликда параболалардан иборатдир. Буни исботланг.

249. Чизиқли элементи

$$ds^2 = [\varphi(u) + \psi(v)](du^2 + dv^2)$$

кўринишга эга бўлган сирт *Лиувил сирти* дейилади. Унинг геодезик чизиқларининг дифференциал тенгламаси квадратураларга келтирилади:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)-c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\psi(v)+c}} + c_1,$$

бу ерда c ва c_1 — ўзгармас. Буни исботланг.

§ 111*. Тўлиқ эгрилиги ўзгармас сиртлар ҳақида

Сирт устида ярим геодезик системанинг тайинланиши тўлиқ (Гаусс) эгрилиги ўзгармайдиган сиртларни синфларга ажратишга ва уларнинг турли хоссаларини ўрганишга имкон беради.

Аввало тўлиқ эгрилиги ($K = \text{const}$) ўзгармайдиган сиртнинг биринчи квадратик формасини топиш масаласини қўямиз.

Юқорида айтилгандек, u чизиқлар ($v = \text{const}$) сифатида геодезик чизиқларни ва v чизиқлар ($u = \text{const}$) сифатида уларнинг ортогонал траекторияларини оламиз. Ундан ташқари, u параметр геодезик чизиқнинг ёйини билдирса, ярим геодезик система ҳосил бўлади; бу системада (389-бет):

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

Агар $u = 0$ геодезик чизиқни, v эса унинг ёйини билдирса, $ds = dv$ дан

$$G(0, v) = 1, \quad \frac{\partial \sqrt{G(0, v)}}{\partial u} = 0 \tag{1}$$

ни ҳосил қиламиз. Бироқ бизда $v = 0$ нинг ўзи ҳам геодезик чизиқдир. $u = \text{const}$ чизиқнинг [382-бет (13)] геодезик эгрилигининг ушбу:

$$(k_g)_{u=\text{const}} = \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u}$$

ифодасидан $\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u} = 0$, яъни $\frac{\partial \sqrt{G(0, v)}}{\partial u} = 0$ деган хулосага келамиз[1]).

Тўлиқ эгрилик ифодаси қуйидагича эди:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{2}$$

Уч ҳолни текширайлик.

---

[1]) g_{22} ўрнига G ни олганимизни ва сиртнинг етарлича кичик қисми билан иш кўраётганлигимизни эсда тутамиз.

1) $K=0$ — сиртнинг Гаусс эгрилиги нолга тенг, бу ҳолда

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}=0,$$

бундан $\sqrt{G}=\varphi(v)+\psi(v)u$, бу ерда $\varphi(v)$, $\psi(v)$ — ихтиёрий функциялар. Бошланғич (1) шартларни назарга олсак, $\varphi(v)=1$ ва $\psi(v)=0$. Демак,

$$ds^2=du+dv^2\,{}^{1)}. \tag{3}$$

Тўлиқ эгрилиги нолга тенг бўлган ҳамма сиртларнинг биринчи квадратик формаси (3) кўринишга эга.

2) Тўлиқ эгрилиги мусбат (ўзгармас) бўлган сиртни олайлик: $K=\frac{1}{a^2}>0$. (2) дан:

$$a^2\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}+\sqrt{G}=0;$$

ўзгармас коэффициентли бу иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими:

$$\sqrt{G}=\varphi(v)\cos\frac{u}{a}+\psi(v)\sin\frac{u}{a}.$$

Бошланғич (1) шартлардан фойдалансак, бу ерда ҳам $\varphi(v)=1$ ва $\psi(v)=0$ эканини кўрамиз; демак, $\sqrt{G}=\cos\frac{u}{a}$.

Тўлиқ эгрилиги мусбат $\left(=\frac{1}{a^2}\right)$ бўлган барча сиртларнинг биринчи квадратик формаси ушбу кўринишга эга:

$$ds^2=du^2+\cos^2\frac{u}{a}\,dv^2. \tag{4}$$

3) Тўлиқ эгрилиги манфий (ўзгармас) бўлган сирт учун $K=-\frac{1}{a^2}<0$ тегишли дифференциал тенглама ушбудан иборат:

$$a^2\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}-\sqrt{G}=0.$$

Унинг ечими:

$$\sqrt{G}=\varphi(v)\operatorname{ch}\frac{u}{a}+\psi(v)\operatorname{sh}\frac{u}{a},$$

бу ерда ҳам $\varphi(v)=1$ ва $\psi(v)=0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Тегишли форманинг шакли қуйидагича:

$$ds^2=du^2+\operatorname{ch}^2\frac{u}{a}\,dv^2. \tag{5}$$

Учала ҳолда ҳам, ҳосил қилинган дифференциал тенгламанинг бошқа ечимларга эга эмаслигини исботлаш осон.

---

1) $\varphi^2(v)\,dv^2$ ўрнига соддалик учун dv^2 ёзилган.

Хуллас, Гаусс эгрилиги ўзгармас бўлган сиртларнинг чизиқли элементлари ушбулардан иборат:

1) $K=0$ да $ds^2 = du^2 + dv^2$,

2) $K=\frac{1}{a^2}>0$ да $ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}\,dv^2$,

3) $K=-\frac{1}{a^2}<0$ да $ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\frac{u}{a}\,dv^2$.

Энди қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Тўлиқ (Гаусс) эгриликлари ўзгармас бўлган икки сиртдан бирини иккинчисига ётқизиш (эгиш) мумкин бўлиши учун, уларнинг бундай эгриликлари тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Ҳақиқатан, тўлиқ эгрилиги ўзгармас сиртнинг чизиқли элементи шу эгриликнинг қиймати билан тўла аниқланади; демак, икки сиртнинг эгрилиги бир хил бўлса, уларнинг чизиқли элементларини бир хил шаклга келтириш мумкин. Бу эса сиртлардан бирини иккинчисига ётқизиш (эгиш) мумкинлигидан дарак беради (§ 81). Иккинчи томондан, Гаусс теоремасига кўра, тўлиқ эгриликларнинг бир хил бўлиши сиртларнинг бир-бирига эгилувчанлиги учун зарурий шартдир.

Гаусс эгрилиги нолга тенг бўлган ҳамма сиртларни текисликка ётқизиш мумкинлигини биз илгаридан биламиз.

Юқоридаги теоремадан қизиқ натижалар келиб чиқади: эгрилиги ўзгармас ва мусбат $\left(k=\frac{1}{a^2}>0\right)$ бўлган ҳамма сиртларни эгиб сферага ётқизиш мумкин. Бунда S сиртдаги $M(u, v)$ нуқта сферадаги $M'\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}\right)$ нуқтага алмашиниб M' нуқта учун $\frac{u}{a}$ ва $\frac{v}{a}$ кенглик ва узоқлик ролини бажаради (шакл чизинг); шу координаталарга нисбатан сферанинг чизиқли элементи айнан (4) кўринишга эгадир. Агар икки сирт S ва S' шундай хоссага эга бўлса, уларни ҳам бир-бирига эгиб ётқизиш мумкин.

Бу икки сиртни бир-бирига (локал равишда) ётқизиш усули биттами, деган сўроқни қўйиш табиий. Бу сўроқнинг жавоби салбийдир, чунки ўзгармас ва бир хил Гаусс эгрилигига эга бўлган икки сиртни бир-бирига чексиз кўп усуллар билан ётқизиш мумкин.

Ҳақиқатан, S ва S' сиртларнинг ҳар бирида $u=0$ чизиқ сифатида ихтиёрий чизиқлар олинади; шунингдек бу чизиқлардаги бошлангич нуқталар (масалан, $v=0$ нинг нуқталари) ҳам ихтиёрий тайинланади. Демак, иккала сиртнинг нуқталари орасидаги мосликни шундай усул билан ўрнатиш мумкинки, бу сиртлардаги ихтиёрий икки M, M' нуқта ва улардан чиқувчи ихтиёрий икки йўналиш α, α' (масалан, $u=0$ га мос геодезик чизиқларнинг йўналишлари) бир-бирига мос келадиган бўлсин.

Юқоридаги муҳокамалар эгрилиги мусбат ўзгармас бўлган сиртларга тааллуқли эди. Лекин айтилганларнинг ҳаммаси эгрилиги манфий ўзгармас бўлган, яъни чизиқли элементи (5) шаклда берилган сиртларга ҳам тааллуқлидир: бундай сиртларни қирраси (уринма узунлиги) нинг радиуси a га тенг псевдосферага эгиб ётқизиш мумкин (234-чизма). Бу натижалардан яна бир муҳим хулоса чиқара оламиз.

Эгрилиги ўзгармас сиртдаги бирор M нуқтанинг етарлича кичик атрофини текширайлик. Бу атрофни хаёлимизда сиртдан ажратиб олиб, уни эгамиз ва яна шу сиртга шундай қилиб ётқизамизки, M нуқта сирт устидаги ихтиёрий M_1 нуқтага тушсин. Жумладан, M нуқтани яна ўз жойига қайтариб, ундан чиққан бирор a йўналишни мутлақо ихтиёрий a' йўналиш билан устма-уст тушириш мумкин.

Демак, *эгрилиги ўзгармас сирт устидаги ҳар қандай фигурани эгиб, шу сирт буйлаб силжитиш, яъни ундаги ҳар қандай фигурани ўз-ўзига тенглигича қолиш шарти билан ҳаракатлантириш* мумкин. Француз математиги Э. Картан бундай ҳолларда фигуралар эркин ҳаракатчанликка (свободная подвижность) эга дейди[1]).

Бу жумлани қуйидагича тушунамиз. Қаралаётган сиртдаги фигуранинг ҳар қандай нуқтасини сирт устидаги исталган нуқта билан ва шу нуқтадан чиққан ҳар қандай йўналишни исталган бошқа йўналиш билан устма-уст тушириш мумкин бўлгани учун, бу фигура илгарилама ва айланма ҳаракатда бўла олади. Шундай қилиб, фигуранинг текисликдаги ҳаракати қанчалик эркинликка эга бўлса, унинг эгрилиги ўзгармас сиртдаги ҳаракати ҳам шунчалик эркинликка эга бўлади. Бундай ҳол фақат эгрилиги ўзгармас сиртлар учунгина юз беради, чунки сиртдаги бирор M нуқтанинг атрофини ўрнидан қўзғатиб, шу сиртдаги исталган бошқа нуқта атрофига ётқизиш мумкин бўлса, Гаусс теоремасига асосан, мос нуқталарда тўлиқ эгрилик бир хил қийматга эга, яъни $K = \text{const}$ бўлиши керак.

Муфассалроқ муҳокамалар кўрсатадики, тўлиқ эгрилиги ўзгармас сиртдаги фигуранинг ҳаракати учта эркинлик даражасига эгадир. Эркинлик даражаси иккита бўла олмайди. Эркинлик даражаси битта бўлган ҳолда, сиртлар айланма сиртлардангина иборат бўлади[2]).

Сирт устидаги фигуранинг „ҳаракати" бу фигура таркибидаги чизиқлар узунликларини ва бурчакларни „бузмайди", яъни ички геометрия нуқтаи назаридан дастлабки ҳолатдаги фигура ҳосил қилинган фигурага „тенгдир" („конгруэнтдир").

---

[1]) Э. Картан, Геометрия римановых пространств, М., ОНТИ, 1936, 114—115-бетлар.

[2]) Муфассалроқ: М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М., 1949, § 85.

Бу мулоҳазалар шундан дарак берадики, эгрилиги ўзгармас сиртда, элементар планиметрия сингари, геометрия қуриш мумкин. Биз бу ишни бажардик десак, хато қилмаган бўламиз. Эгрилиги мусбат ўзгармас сиртнинг ички геометрияси сферик геометриядир. Эгрилиги манфий ўзгармас сиртнинг ички геометрияси улуғ рус олими Н. И. Лобачевский (1792—1856) яратган геометрик системанинг планиметриясидир (бу ҳақда § 113 га қаралсин).

Машқлар

250. Сферадаги M нуқта учун u ни меридиан деб қараб, уни экватордан бошлаб ҳисобласак ва параллель радиусини ρ га тенг десак, у ҳолда $\rho = a\cos\frac{u}{a}$ бўлади (a — сфера радиуси). Буни исботланг ва $ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2$ нинг ифодасини сферанинг биринчи квадратик формаси билан солиштиринг.

251. Тўлиқ эгрилиги $k = -\frac{1}{a^2}$ бўлган сирт (псевдосфера ёки унга эгилувчи сирт) учун (5) ифодадан ташқари, ушбуни исботланг:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2.$$

Кўрсатма. $a^2 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{du^2} - \sqrt{G} = 0$ тенгламанинг ечимини ушбу кўринишда излаш мумкин:

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\, e^{\frac{u}{a}} + \psi(v)\, e^{-\frac{a}{v}}.$$

Бошланғич шартлар яна $\varphi(v) = 1$, $\psi(v) = 0$ га келтиради.

252. Псевдосферанинг чизиқли элементи ушбу шаклга келтирилси

$$ds^2 = a^2\, \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{y_1^2}.$$

Ечилиши. $x = \xi(u)$, $z = \eta(u)$ шаклдаги айланма сиртнинг чизиқли элементини изотермик шаклга келтирган эдик (156-машқ):

$$ds^2 = dl^2 + \xi^2(u)\, dv^2,$$

бунда $dl = \sqrt{(\xi'^2 + \eta'^2)}\, du$ — меридиан ёйининг дифференциалидир. Иккинчи томондан, меридианнинг l ёйи шу меридиандаги нуқтанинг ξ абсциссаси билан қуйидагича боғланган:

$d\xi = dl\, \sin\varphi$. (φ — уринма билан OZ ўқи орасидаги бурчак.)

Трактриса учун $\xi = a\sin\varphi$.

Бу тengликлардан $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{dl}{a}$

келиб чиқади. Чизиқли элемент эса:

$$ds^2 = dl^2 + \xi^2 dv^2 = a^2\left(\frac{d\xi}{\xi}\right)^2 + \xi^2 dv^2$$

ёки

$$ds^2 = a^2\xi^2\left[\left(\frac{d\xi}{\xi^2}\right)^2 + \left(\frac{dv}{a}\right)^2\right] \tag{6}$$

бўлади. Энди янги

$$x_1 = \frac{v}{a}, \; y_1 = \frac{1}{\xi}$$

ўзгарувчиларни киритамиз. Бу ҳолда (6) ушбу шаклни олади:

$$ds^2 = a^2\,\frac{dx_1^2 + dy_1^2}{y_1^2}.$$

Бундан яна $K = -\frac{1}{a^2}$ деган хулосага келамиз.

Ўн саккизинчи боб

СИРТНИНГ ИЧКИ ГЕОМЕТРИЯСИ (ДАВОМИ). КОВАРИАНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ

§ 112. Параллел кўчириш

1. *Умумий мулоҳазалар.* Сиртнинг ички геометриясини — планиметриясини ривожлантириб, эгри сирт устида параллеллик ва, умуман, параллел кўчириш тушунчаларига ўтамиз. Текислик учун бу тушунчалар катта роль ўйнаб, унинг планиметриясининг муҳим қисмини ташкил қилади. Эгри сиртларга нисбатан параллел кўчириш тушунчаси анчагина мураккаб тусни олади.

Таъриф. *Сиртнинг берилган нуқтасидаги уринма текислигида ётиб, шу нуқтада сиртга уринган вектор — сирт вектори ёки шу нуқтада сиртга қарашли вектор деб аталади.*

Сиртнинг оддий M нуқтасида уринма текислик $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} = \boldsymbol{r}_1$ ва $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2} = \boldsymbol{r}_2$ векторлар.билан аниқланади. Шу нуқтада сиртга қарашли $\boldsymbol{a}$ векторни $\boldsymbol{r}_1$ ва $\boldsymbol{r}_2$ векторлар бўйича ёйиш мумкин:

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{r}_1 + a^2\boldsymbol{r}_2, \tag{1}$$

бунда a^1 ва a^2 — ёйилма коэффициентларидир. Сиртга қарашли ҳар бир $\boldsymbol{a}$ вектор иккита координата билан аниқланади деб айтамиз ва уни $\boldsymbol{a}\ \{a^1,\ a^2\}$ кўринишда ифодалаймиз. Бу координаталар локал (маҳаллий) u^1, u^2 системага нисбатан олиниб улар бошқа эгри чизиқли $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$ координаталарга ўтганда ўзгаради, чунки $\boldsymbol{r}_1$ ва $\boldsymbol{r}_2$ векторлар ўзгаради.

Аммо сиртни эгиш процессида $\boldsymbol{a}$ векторнинг a^1, a^2 координаталари ўз қийматларини сақлайди, чунки $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ дан иборат „базис векторлар" яна базис $\bar{\boldsymbol{r}}_1$, $\bar{\boldsymbol{r}}_2$ векторларга алмашинади. Ҳақиқатан, $\boldsymbol{r}_1^2 = g_{11}$, $\boldsymbol{r}_2^2 = g_{22}$ бўлиб, g_{11}, g_{12}, g_{22} коэффициентлар (u^1, u^2 ни ўзгартмасдан) сиртни эгиш вақтида ўзгармайди.

2. *Параллел кўчириш.* Текисликда ёки фазода: эркин вектор ҳақида, бошқача айтганда, йўналишини ўзгартмай туриб, бир нуқтадан иккинчи нуқтага кучирилиши мумкин бўлган, яъни дифференциали нолга тенг ($d\boldsymbol{a} = 0$) вектор ҳақида сўзлаш

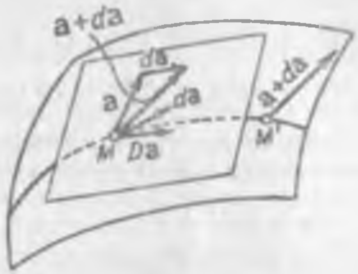
мумкин. Лекин сиртга қарашли векторни бу тарзда кўчириш мумкин эмас, чунки a векторни M нуқтадан M' нуқтага одатдаги маънода параллел кўчирсак, у M' нуқтадаги уринма текисликда ётмаслиги, яъни шу нуқтада сиртга қарашли бўлмаслиги мумкин.

Бу дастлабки мулоҳазалар, эгри сиртга нисбатан параллел кўчириш тушунчасини тегишли равишда „умумлаштириш" ни талаб қилади. Бундай умумлаштириш локал характерга эгадир,— у сиртнинг чексиз кичик қисмини кўзда тутади.

Сиртда бирор Γ чизиқ:

$$r = r(t)$$

берилиб, бу чизиқ нуқталарида сиртга қарашли $a(t)$ векторларни, яъни векторлар майдонини олайлик. $a(t)$ векторнинг Γ чизиқдаги бирор M нуқтада олинган одатдаги da дифференциали, умуман айтганда, шу нуқтадаги уринма текисликда ётмайди. Бу векторни уринма текисликка проекцияласак, сиртга қарашли вектор ҳосил қилинади. Бунга асосланиб қуйидаги таърифни берамиз:



244-чизма.

Таъриф. *Сиртнинг M нуқтасида унга қарашли a векторнинг абсолют (ички ёки ковариант) дифференциали деб, унинг шу одатдаги da дифференциалининг шу M нуқтадаги уринма текисликка туширилган проекциясига айтилади.* Абсолют (ковариант) дифференциални Da билан белгиласак, таърифга кўра:

$$\text{пр}_t\, da = Da \tag{2}$$

бўлади.

M нуқтадаги da векторни: сиртдаги n нормаль ва уринма текисликдаги ясовчи бўйича ёйиш мумкин:

$$da = d_t a + d_n a,$$

бу ерда уринма текисликдаги ясовчи Da га тенг, яъни $d_t a = Da$ (244-чизма). Энди, „нормал ясовчини" ҳисоблайлик. Унинг катталиги nda га тенг (нега?), ўзини ҳосил қилиш учун, уни яна бирлик n векторга кўпайтириш керак: $d_n a = (nda)\, n$. Хуллас:

$$da = Da + (nda)\, n,$$

бундан:

$$Da = da - (nda)\, n. \tag{3}$$

Модомики, da нинг уринма текисликка проекцияси Da экан, (244-чизма) $a+da$ нинг проекцияси $a+Da$ дир, яъни

$$\text{пр}_t(a+da)=a+Da.$$

Агар ички дифференциал $Da=0$ бўлса, $\text{пр}_t(a+da)=a$ ҳосил қилинади. Бу тенгликнинг ажойиб геометрик маъноси бор. Бу ҳолда $a+da$ векторни M' нуқтадан унга чексиз яқин M нуқтадаги уринма текисликка одатдагича кўчириб, сўнгра шу текисликка проекциялясак, яна a векторнинг (M нуқтадаги) дастлабки қиймати ҳосил қилинади — гўё a вектор „параллел кўчирилди" ва da дифференциал фақат n вектор бўйича йўналган. Ана шундай ҳолда, *$a+da$ вектор a векторни M нуқтадан чексиз яқин M' нуқтага параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинган* деб айтамиз ва a векторнинг Γ бўйлаб параллел кўчирилиши ҳақида сўзлаймиз.

Абсолют дифференциал учун тегишли ифода келтириб чиқарамиз. Бунинг учун (1) ни дифференциаллаймиз:

$$da=da^1r_1+da^2r_2+a^1(r_{11}du^1+r_{12}du^2)+a^2(r_{12}du^1+r_{22}du^2).$$

Иккинчи r_{11}, r_{12}, r_{22} ҳосилаларнинг тегишли ифодаларини бу тенгликка қўйиб ихчамласак, қуйидаги ифода ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned}da=&(da^1+\Gamma^1_{11}a^1du^1+\Gamma^1_{12}a^1du^2+\Gamma^1_{21}a^2du^1+\Gamma^1_{22}a^2du^2)\,r_1+\\&+(da^2+\Gamma^2_{11}a^1du^1+\Gamma^2_{12}a^1du^2+\Gamma^2_{21}a^2du^1+\Gamma^2_{22}a^2du^2)\,r_2+\\&+\{b_{11}a^1du^1+b_{12}(a^1du^2+a^2du^1)+b_{22}a^2du^2\}\,n\end{aligned}$$

ёки қисқача:

$$da=(da^\alpha+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma)\;r_\alpha+b_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta n.$$

Таърифга асосан, бу дифференциалнинг уринма ясовчиси абсолют дифференциалдир, яъни

$$\begin{aligned}Da=&(da^1+\Gamma^1_{11}a^1du^1+\Gamma^1_{12}a^1du^2+\Gamma^1_{21}a^2du^1+\Gamma^1_{22}a^2du^2)\,r_1+\\&+da^2+\Gamma^2_{11}a^1au^1+\Gamma^2_{12}a^1du^2+\Gamma^2_{21}a^2du^1+\Gamma^2_{22}a^2du^2)\,r_2\end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned}Da=&(da^1+\Gamma^1_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma)r_1+(da^2+\Gamma^2_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma)\,r_2=\\&=(da^\alpha+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma)\,r_\alpha.\end{aligned}$$

Агар Γ чизиқ бўйлаб, a вектор параллел кўчирилса, $Da=0$ бўлади; шу сабабли r_1 ва r_2 нинг коэффициентлари нолга тенгдир ($r_1 \nparallel r_2$ эканлигини эсда сақлаймиз):

$$da^1+\Gamma^1_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma=0,\;\; da^2+\Gamma^2_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma=0.$$

Йиғиш индекслари деб қаралган β, γ ўрнига α, β ёзилиши мумкин:

$$da^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta} a^\alpha du^\beta = 0, \quad da^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta} a^\alpha du^\beta = 0 \tag{4}$$

ёки

$$da^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} a^\alpha du^\beta = 0. \tag{5}$$

Сиртга қарашли $\boldsymbol{a}$ векторнинг сиртдаги Γ чизиқ бўйлаб M нуқтадан чексиз яқин M' нуқтага параллел кўчирилиши учун зарурий ва етарли шартлар (4) тенгликлардан иборатдир.

Шуни ҳам таъкидлаш фойдалики, параллел кўчирилаётган векторнинг одатдаги (тўла) $d\boldsymbol{a}$ дифференциали сиртнинг нормали бўйлаб йўналгандир:

$$d\boldsymbol{a} = d_n \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{n} \ (= b_{\alpha\beta} a^\alpha du^\beta \boldsymbol{n}).$$

Сирт устида бажариладиган параллел кўчиришни одатдаги параллел кўчиришдан фарқ қилиш мақсадида, биз бу ерда ички параллел кўчириш тушунчасини киритамиз ва бундан буён уни кўзда тутамиз.

3. *Баъзи хулосалар, натижалар.* Олдинги пунктда векторни сиртнинг M нуқтасидан унга чексиз яқин M' нуқтасига параллел кўчирган эдик. Энди олинган Γ чизиқнинг чекли ёйи бўйича параллел кўчириш масаласини қўямиз. (4) система бу масалани ечишга имкон беради.

Γ чизиқ $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ тенгламалар билан берилган бўлиб, унинг бирор бошланғич $t = 0$ нуқтасида сиртга қарашли тайин $\boldsymbol{a}_0$ векторни олайлик.

Таъриф. *Агар Γ чизиқнинг ҳар бир t нуқтасида сиртга қарашли $\boldsymbol{a}(t)$ вектор берилган бўлиб, t нуқтадан $t + dt$ нуқтага ўтганда $\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{a}$ векторнинг параллел кўчирилган вазиятини билдирса (яъни ҳамон $d\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{n}$ шартлар бажарилса) ва $t = 0$ нуқтада $\boldsymbol{a}(t)$ вектор $\boldsymbol{a}_0$ га тенг бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a}_0$ вектор Γ чизиқ бўйлаб параллел кўчирилган* деб айтилади.

Параллел кўчирилаётган $\boldsymbol{a}(t)$ векторнинг $a^1(t)$, $a^2(t)$ координаталари (4) системани ёки унга эквивалент ушбу

$$\frac{da^1}{dt} + \Gamma^1_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} = 0, \quad \frac{da^2}{dt} + \Gamma^2_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} = 0 \tag{6}$$

оддий чизиқли дифференциал (ёки қисқача)

$$\frac{da^i}{dt} + \Gamma^i_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} = 0 \tag{7}$$

тенгламалар системасини қаноатлантиради. Бу система Коши системасидир: a^1, a^2 нинг t бўйича ҳосилалари a^1, a^2 билан чизиқли боғланган; коэффициентлар ролини ўйновчи Христоффел символлари u^1, u^2 нинг (демак, чизиқ бўйлаб t нинг) тайин функцияларидир. Ундан ташқари, бошлангич шартлар ҳам бажарилган: $t=0$ нуқтада номаълум a^1, a^2 функциялар a_0 векторнинг координаталари деб қаралган a_0^1, a_0^2 қийматларни қабул қиламиз[1]).

Кошининг мавжудлик теоремасига асосан, (6) система, берилган бошланғич шартларда $a^1(t)$, $a^2(t)$ функцияларни ягона (бир қийматли) қилиб аниқлайди, бу эса сиртдаги чизиқ бўйлаб векторни биргина усул билан параллел кўчириш мумкинлигидан дарак беради.

Олиб борилган муҳокамалар шуни кўрсатадики, сирт устидаги параллел кўчиришнинг натижаси: бошланғич M_0 ва охирги M нуқталарга, $a(t)$ нинг бошланғич a_0 қийматига ва, ниҳоят, кўчириш йўлининг танлаб олинишига боғлиқдир. Бу богланиш (Гаусс-Бонне теоремаси) билан биз келгуси параграфда танишамиз.

Юқоридаги (6) системадан яна муҳим хулосалар келиб чиқади:

Сиртга қарашли векторни параллел кўчириш ва бу векторнинг абсолют дифференциали сиртнинг ички геометриясига доир бўлиб, улар сиртни эгиш процессида ўзгармайди.

Ҳақиқатан, (6) системага кирувчи Христоффел символлари ва u^1, u^2 координаталар эгиш процессида ўзгармайди. Системага қарашли иккита векторни ундаги бирор чизиқ бўйлаб параллел кўчирганда, бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси ҳам ўзгармайди. Ҳақиқатан, $\boldsymbol{ab}$ скаляр кўпайтмадан дифференциал олайлик:

$$d(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{b}\,d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{b}.$$

Бу ерда $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар параллел кўчирилаётганлиги сабабли, уларнинг $d\boldsymbol{a}$ ва $d\boldsymbol{b}$ дифференциаллари сирт нормали бўйлаб йўналгандир, шунинг учун улар сиртга уринувчи $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларга тикдир:

$$d(\boldsymbol{ab}) = 0, \quad \boldsymbol{ab} = \text{const}.$$

Хусусий, яъни $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ бўлган ҳолда, $\boldsymbol{a}^2 = \text{const}$ векторнинг узунлиги ва шу билан бирга $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак ҳам сақланади (чунки $\cos(\boldsymbol{ab}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$).

Пировардида текисликдаги ички параллел кўчириш билан одатдаги параллел кўчиришнинг бир хил маънога эгалигини таъкидлаб ўтамиз.

4. *Эгри чизиқни текисликка ёйиш.* Агар икки сирт S_1 ва S_2 бирор Γ чизиқ бўйлаб уринса, уларнинг шу чизиқ нуқта-

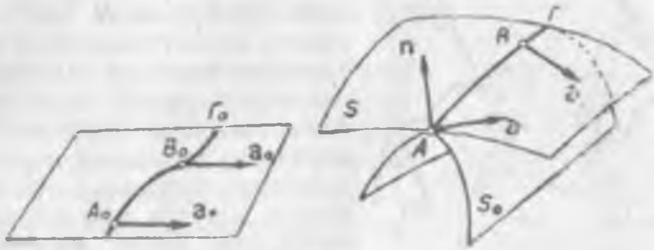
---

[1]) (7) системани ушбу $\frac{da^i}{dt} = -\Gamma^i_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt}$ кўринишда ёзиш фойдали.

ларидаги нормаллари бир хил бўлади. Бирор $\boldsymbol{a}$ вектор S_1 да Γ бўйлаб „параллел кўчирилса“, у ҳолда бу вектор S_2 да ҳам Γ бўйлаб параллел кўчирилган бўлади.

Сиртга нисбатан параллел кўчириш тушунчасини биринчи киритган Италия математиги Леви-Чивита ана шу фактдан фойдаланиб, ихтиёрий сиртдаги чизиқ бўйлаб параллел кўчиришни геометрик жиҳатдан ойдинлаштирди ва бу масалани одатдаги параллелизмга яқинлаштирди.

Γ чизиқ нуқталарида S сиртга уринма текисликлар ўтказсак, улар бир параметрик оилани ташкил қилгач, ёйилувчи



245-чизма.

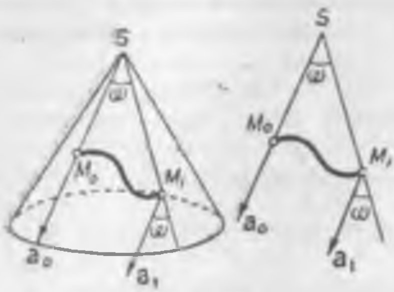
бирор S_0 сиртни ҳосил қилади: S ва S_0 сиртлар Γ чизиқ бўйлаб уринади. Энди S сиртда параллел кўчириш ўрнига S_0 сиртдаги параллелизм ҳақида сўзлаш мумкин. Ниҳоят, S_0 ни текисликка ёйсак, Γ чизиқ қандайдир Γ_0 чизиққа алмашинади. Бунинг натижасида ясси Γ_0 чизиқ бўйлаб одатдаги параллелизм ҳақида гапириш ва шу билан бирга S даги аҳвол тўғрисида тасаввур ҳосил қилиш мумкин (245-чизма).

Ҳақиқатан, S даги Γ чизиқнинг A нуқтасида $\boldsymbol{a}$ вектор берилиб, уни шу чизиқнинг B нуқтасига параллел кўчириш керак бўлса, у ҳолда аввало Γ бўйлаб ёйилувчи S_0 сиртни чизамиз ва сўнгра уни текисликка ётқизамиз; бу вақтда Γ чизиқ қандайдир Γ_0 чизиққа ва A, B нуқталар қандайдир A_0, B_0 нуқталарга алмашинади. Ундан кейин S сиртга қайтиб, B нуқтада шундай векторни оламизки, у $\boldsymbol{a}_0$ векторни A_0 нуқтадан B_0 нуқтага (текисликда) параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинган бўлсин.

Юқорида олиб борилган муҳокамалардан яна бир муҳим натижа келиб чиқади. *Агар $\boldsymbol{a}$ вектор Γ чизиқ бўйича параллел кўчирилиб, бу чизиқнинг нуқталарида сиртга қарашли (узунлиги ўзгармас) бошқа $\boldsymbol{b}$ вектор шу $\boldsymbol{a}$ билан бир хил бурчакни ташкил қила борса, у ҳолда $\boldsymbol{b}$ ҳам Γ бўйлаб параллел кўчирилади.* Исботни ўқувчига топширамиз.

Мисоллар. а) Доиравий тўғри конус устидаги M_0 нуқтадан $\boldsymbol{a}_0$ векторни бирор M_0M_1 йўл билан M_1 нуқтага параллел кўчирайлик. Бу ерда a_0 вектор M_0 нуқтадаги ясовчи бўйлаб йўналган бўлсин ва „кўчириш йўли" ҳар бир ясовчи билан биттадан ортиқ нуқтада кесишмасин (биз энг содда ҳол билан чегараланамиз).

Конус сиртининг SM_0M_1S қисмини текисликка ёйсак, у, M_0M_1 томони эгри чизиқдан иборат SM_0M_1 учбурчак шаклини олади (246-чизма). Энди a_0 векторни текисликда одатдагича M_0 нуқтадан M_1 нуқтага кўчирсак, бу M_1 нуқтада SM_1 ясовчи билан ω бурчакни ташкил этувчи a_1 вектор ҳосил бўлади. Бу бурчак S дан чиққан иккита ясовчи орасидаги M_0SM_1 бурчакка тенгдир. Юқорида айтилгандек қилиб, ясси учбурчакни конусга ётқизсак, исбот қилинган теоремага асосан, текисликда параллел кўчирилган вектор конусда ҳам шу хоссага эга бўлади. Демак, a_1 вектор M_1 нуқтадаги ясовчи билан ω бурчакни ташкил қилиб, бу векторни a_0 нинг M_0M_1 йўл бўйлаб M_0 дан M_1га параллел кўчирилиш вазияти деб қараш мумкин.



246-чизма.

M_0M_1 йўл ўрнига конус асосидаги айлана олинган бўлса (чизма ясалсин), a_0 векторни шу айлана бўйлаб параллел кўчирганимизда, у илгариги нуқтага қайтиб келгандан кейин, ясовчи билан мана бундай ω бурчакни ташкил қилади:

$$\omega = \frac{2\pi r}{l}, \tag{8}$$

бу ерда r — асосдаги айлана радиуси ва l — ясовчининг узунлиги.

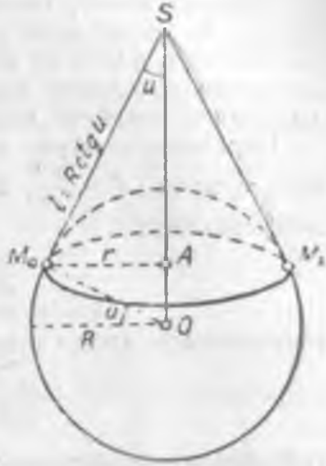
б) Сферанинг катта доираси бўйича сферага қарашли векторни параллел кўчирсак, бу доирани тўла айланиб чиққан вектор яна илгариги вазиятига келади. Геометрик нуқтаи назардан бу равшан фактдир.

Энди кичик доирани, яъни кенглиги нолдан фарқли ($u \neq 0$) параллелни олайлик. Бу ерда сфера устидаги параллел кўчириш ишини шу доира бўйлаб сферага уринувчи доиравий конус (торс) да бажарамиз (247-чизма). Конус ўқи билан ясовчиси орасидаги бурчак u кенгликка тенг бўлиб, конуснинг асоси — қаралаётган доирадан иборатдир.

Айлана узунлиги $2\pi r = 2\pi R \cdot \cos u$ га (R — сфера радиуси) ва ясовчининг l узунлиги $l = R \operatorname{ctg} u$ га тенг. Юқоридаги (8) формулага мувофиқ, параллел бўйлаб „айлантирилган" векторнинг ясовчидан четланиш бурчаги деб қаралган ω бурчак бу ерда ушбуга тенг:

$$\omega = \frac{2\pi r}{l} = \frac{2\pi R\cos u}{R\operatorname{ctg} u} = 2\pi\sin u. \qquad (9)$$

в) Векторни конус ўрнига бошқа айланма сиртнинг бирор параллели бўйлаб параллел кўчирганда ҳам, бу векторнинг дастлабки вазиятидан четланиш бурчаги (9) формула билан аниқланади. „Айлантириш" ўқи шу сиртнинг ўқидан иборат ва ўзи параллелга уринувчи доиравий конусда бажарилган деб тасаввур этиш керак.



247-чизма.

5. *Параллел кўчириш ва геодезик чизиқлар.* Энди сиртда ётувчи Γ-чизиқ бўйлаб бу чизиқнинг (бирлик) уринма $\bar\tau$ векторларини олсак, шу Γ чизиқ бўйлаб $\bar\tau$ векторлардан тузилган майдон ҳосил қилинади. Бу ерда a вектор ўрнига $\bar\tau = \frac{d\bar r}{ds}$ ни олмоқдамиз. Унинг абсолют дифференциали $D\bar\tau$ бўлиб, абсолют ҳосиласи $\frac{D\bar\tau}{ds}$ дир[1]). Бу вектор эса, таърифга кўра, эгрилик вектори бўлган $\frac{d\bar\tau}{ds} = k\bar\nu$ нинг уринма текисликдаги ташкил этувчисидир. Аммо эгрилик векторининг уринма текисликка туширилган проекцияси билан аниқланувчи вектор чизиқнинг геодезик эгрилик вектори эди. Хуллас (2) га асосан

$$d_t\bar\tau = D\bar\tau \quad \text{ва} \quad \frac{D\bar\tau}{ds} = \overline{MG}.$$

Бу формуладан дарҳол:

$$k_g = \left|\frac{D\bar\tau}{ds}\right|$$

келиб чиқади.

Шу билан геодезик эгриликнинг янги геометрик маъноси очилади.

Геодезик чизиқнинг ҳамма нуқталарида геодезик эгрилик нолга тенг бўлгани учун, $\frac{D\bar\tau}{ds} = 0$ ва $D\bar\tau = 0$ деган хулосага келамиз, бу эса $\bar\tau$ векторнинг Γ бўйлаб параллел кўчирилганлигидан дарак беради.

---

[1]) Бу ерда ҳосила одатдаги усул билан топилади: ҳосила тегишли дифференциаллар нисбатидир.

Биз ҳозир геодезик чизиқларнинг жуда муҳим хоссасини қўлга киритдик:

Сирт устидаги бирор чизиқнинг геодезик чизиқдан иборат бўлиши учун, унинг бирлик $\bar{\tau}$ уринма векторларидан тузилган майдон, $\bar{\tau}$ ни шу чизиқ бўйлаб (бирор бошланғич нуқтадан бошлаб) параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинган бўлиши зарур ва етарлидир.

Шундай қилиб, геодезик чизиқнинг уринмалари „параллел“ бўлиб, бу чизиқ сирт устидаги „энг тўғри“ чизиқдир; юқорида (378-бет, § 108) бу фактни биз фақат соф аёний муҳокамаларгагина асосланиб таъкидлаган эдик. Ҳозир эса биз тасдиқимизнинг аналитик исботини бердик.

Пировардида шуни ҳам таъкидлаб ўтиш фойдалики, a ўрнига $\bar{\tau}$, яъни $a^1 = \frac{du^1}{ds}$, $a^2 = \frac{du^2}{ds}$ десак, параллел кўчиришнинг дифференциал

$$\frac{da^i}{dt} + \Gamma^i_{\alpha\beta} a^\alpha \frac{du^\beta}{dt} = 0$$

тенгламалари худди геодезик чизиқнинг дифференциал

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0$$

тенгламаларига айланади. Шундай қилиб, бу факт энди охиригача тушунарли бўлди.

Геодезик эгрилик учун чиқарилган формулани [§ 108, (4)] абсолют ҳосиланинг тегишли ифодасидан фойдаланиш йўли билан ҳам исботлаш мумкин. Буни ўқувчига топширамиз.

Машқлар

253. Винт чизиқнинг уринмаларига бир хил кесмалар қўйила боради. Ҳосил қилинган геометрик ўриннинг геодезик эгрилиги топилсин.

Кўрсатма. Уринмалар сирти текисликка ёйилсин.

254. Вивиани чизиги сферада ёки цилиндрда ётади деб фараз қилиб, унинг уринмасини параллел кўчиринг ва ω бурчакни ҳисобланг.

255. Қандай чизиқ учун уринманинг бирлик $\bar{\tau}$ векторининг абсолют дифференциали оддий дифференциалига тенг?

256. Улуғ рус математиги П. Л. Чебишев сиртда шундай чизиқлар тўрини текширдики, бу тўрни координат тўри сифатида қабул қилганда, сиртнинг чизиқли элементи ушбу шаклни олади:

$$ds^2 = du^2 + 2F du\ dv + dv^2,$$

бу ерда $du = ds_u$, $dv = ds_v$. Шу сабабли u, v параметрлари координат чизиқлари учун табиий параметрлар ролини ўйнайди.

Қуйидаги исботлансин: а) координат „параллелограмнинг“ қарама-қарши томонлари тенг, яъни $v = \text{const}$ оилага қарашли ҳамма чизиқларнинг

$u = \text{const}$ оилага қарашли иккита чизиқ орасидаги ёйлари тенг; б) бир оилага қарашли чизиққа утказилган уринмалар иккинчи оилага қарашли мос чизиқ буйлаб параллел кучирилади ёки, бошқача айтганда, r_u векторлар $u = \text{const}$ чизиқ буйлаб, r_v векторлар эса $v = \text{const}$ чизиқ буйлаб параллел кучирилади.

Исбот. а) исбот $ds_u = du$, $ds_v = dv$ дан равшан; б) $E = G = 1$ булгани сабабли $r_u^2 = r_v^2 = 1$. Энди $r_u^2 = 1$ ни v буйича ва $r_v^2 = 1$ ни u буйича дифференциаллайлик: $r_u r_{uv} = 0$, $r_v r_{vu} = 0$, булардан

$$r_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(r_u) = \lambda_1 n, \quad r_{vu} = \frac{\partial}{\partial u}(r_v) = \lambda_2 n \tag{10}$$

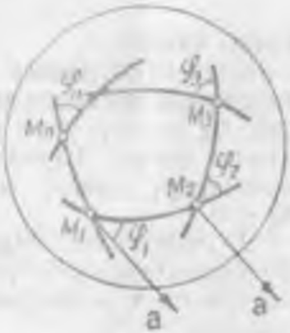
деган хулосага келамиз (иккала томон қайта n га кўпайтирилсин). Ҳосил қилинган (10) шартлар координат чизиқларига нисбатан $da = \lambda n$ шартнинг узидир.

Кузлари квадратлардан иборат булиб, эгри сирт устига ёпилган балиқ тури Чебишев тури формасини олади. Бундай турнинг характеристик хоссаси: уни координат тури сифатида қабул қилганда, $\Gamma_{12}^1 = 0$ ва $\Gamma_{12}^2 = 0$ бажарилади. Буни исботланг.

§ 113. Гаусс-Бонне теоремаси

Сиртлар назариясида катта аҳамиятга эга бўлган Гаусс-Бонне теоремасига ўтамиз. Бу теоремани Бонне 1848 йилда исботлаган; бироқ теореманинг мазмуни ундан олдин Гауссга маълум эди. Бу ерда биз § 67 даги сферик купбурчаклар юзига доир муҳокамалардан фойдаланамиз[1]).

1. *Сферик контур.* Сферада бирор қавариқ $M_1 M_2 M_3, \ldots M_n$ кўпбурчакни олиб, унинг томонлари буйлаб бирор бирлик векторни мусбат йўналишда параллел кўчирайлик (248-чизма). Кўпбурчакнинг ташқи бурчаклари $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ бўлсин ва ҳаракат M_1 учидан бошланиб, $M_n M_1$ томонга қараб бажарилсин. Бу купбурчак томонлари сферада геодезик чизиқлар ролини ўйнагани[2]) сабабли, векторни $M_1 M_2$ томон буйлаб параллел кўчирганда унинг шу томон билан ташкил қилган бурчаги ўзгармайди. Бу бурчакни соат стрелкасига тескари йўналишда ҳисоблай бориб, M_1 ва M_2 нуқталарда бу бурчак $2\pi - \varphi_1$ га



248-чизма.

[1]) Бу параграфдаги исботларнинг ғояси проф. А. П. Норденга тегишлидир (Дифференциальная геометрия, 1948, 202—204-бетлар; Теория поверхностей, 1955, § 79).

[2]) Кўпбурчак томонлари катта доираларнинг ёйларидан иборатлигини ва томонларининг бош нормаллари сирт (сфера) нормаллари бўйлаб йуналганлигини эслатиб ўтамиз.

тенг бўлишини кўрамиз ($\boldsymbol{a}$ векторнинг сферага қарашли эканини ва шунингдек $\omega=\frac{2\pi r}{l}$ га доир муҳокамаларни эсланг). Векторни M_2 нуқтага келтирганда, у M_2M_3 томон билан $2\pi-\varphi_1-\varphi_2$ бурчакни ташкил қилади ва M_3 нуқтада ҳам бурчакнинг қиймати сақланади. Ниҳоят, M_n нуқтага келтирилган вектор M_nM_1 томон билан

$$\Delta\varphi=2\pi-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \tag{1}$$

бурчакни ташкил қилади. Векторни M_n нуқтадан M_1 нуқтага кўчирганда ҳам бу бурчак ўзгармайди. Шу сабабли, векторни ёпиқ сферик кўпбурчак периметри бўйлаб параллел кўчирганда, унинг айланиш бурчаги (1) формуладан аниқланади. (1) нинг ўнг томонида турган ифода ўрнига $\frac{S'}{R^2}$ ни қўйиш мумкин (§ 67); демак,

$$\Delta\varphi=\frac{S'}{R^2}, \tag{2}$$

бунда R — сфера радиуси, S' эса олинган контур ичидаги соҳанинг юзи. $R=1$ қийматда

$$\Delta\varphi=S' \tag{3}$$

келиб чиқади.

Энди кўпбурчакли соҳа ўрнига бирор (силлиқ) эгри чизиқли сферик контурни олсак, одатдаги лимит процессини қўллаиб, бу контур учун ҳам (2) формула ўз кучини сақлаганини куриш енгил. Шуни таъкидлашгина қоладики, S' юз доимо мусбатдир; демак, мусбат айланишда $\Delta\varphi>0$, акс ҳолда $\Delta\varphi<0$.

2. *Эгри сирт.* Энди эгри сирт ҳолига ўтиб, унинг ҳозирги муҳокамаларимизда „уч карра дифференциалланувчи" бўлиши зарурлигини таъкидлаймиз ва сферага доир натижаларни қўлланамиз.

Сиртнинг сферик тасвири тушунчасидан фойдаланиб (§ 95), M нуқтада сиртга қарашли $\boldsymbol{a}$ векторни M нинг сферик тасвири бўлган M' нуқтада сферага ҳам қарашли дейиш мумкин. Ҳақиқатан, M ва M' нуқталардаги тегишли уринма текисликлар бир-бирига параллелдир, чунки $\boldsymbol{n}$ вектор сирт ва сфера учун нормаль вазифасини ўтайди. Шу сабабли, берилган сирт бўйлаб параллел кўчиришнинг $d\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{n}$ шарти сферада ҳам параллел кўчириш шартини ифодалайди. Хуллас, *эгри сиртда, бирор чизиқ бўйлаб векторни параллел кўчириш ўрнига уни шу чизиқнинг сферик тасвири бўйлаб сферада параллел кўчириш мумкин.*

(3) формуладан сиртнинг ўзига тааллуқли формулага ўтиш учун, сирт устида етарлича кичик шундай Σ соҳани оламизки, унинг сферик акси бир қийматли бўлсин, бу эса $K \neq 0$ деган шартга эквивалентдир {ҳақиқатан, $[n_u n_v] = K[r_u r_v]$ бўлиб, $K \neq 0$ да $[n_u n_v] \neq 0$}.

Юқорида [§ 95, (6)] сферик тасвирнинг тегишли ишора билан олинган юзини Σ соҳанинг *интеграл эгрилиги* деб айтган эдик. Шунга асосан,

$$\Delta\varphi = S' = J = \iint_{\Sigma} K\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

ёки

$$\Delta\varphi = \iint_{\Sigma} K d\sigma. \tag{4}$$

Векторни сирт устидаги ёпиқ соҳанинг периметри бўйлаб параллел кўчиришда бу векторнинг айланиш бурчаги сиртнинг шу контур билан чегараланган соҳасининг интеграл эгрилигига тенгдир.

Параллел кўчириш тушунчаси сиртнинг тўлиқ (Гаусс) эгрилиги ҳақидаги муҳим бир натижани келтириб чиқаришга имкон туғдиради. (4) тенгликка ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлланамиз:

$$\Delta\varphi = K_C \iint_{\Sigma} d\sigma = K_C \cdot S,$$

бунда C — соҳа ичидаги нуқта ва S — соҳанинг юзи. Соҳани M нуқтагача кичрайтира борсак, охирги тенгликдан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$K_M = \lim_{\Sigma \to M} \frac{\Delta\varphi}{S}.$$

Демак, *сиртнинг M нуқтасидаги тўлиқ (Гаусс) эгрилиги шу нуқтани ўраб олувчи Σ соҳа контури бўйлаб бирор a векторнинг айланиш бурчагини соҳа юзига бўлишдан ҳосил қилинган нисбатнинг $\Sigma \to M$ даги лимитига тенгдир.*

Бу хулоса, сиртни эгиш процессида унинг тўлиқ эгрилиги ўзгармас (инвариант) бўлишини яна бир карра тасдиқлайди.

(4) тенгликдан қуйидаги хулосаларни чиқарамиз.

а) $K = 0$ бўлса, яъни ёйилувчи сирт (торс) олинса, $\Delta\varphi$ ҳам нолга тенг булади. Параллел кўчирилган вектор яна чиққан нуқтасига қайтиб келиб, ўша нуқтадаги бошланғич вазияти билан устма-уст тушади.

б) $K = \text{const}$ бўлган ҳолда

$$\Delta\varphi = KS,$$

яъни векторнинг айланиш бурчаги $\Delta\varphi$ — соҳанинг юзига пропорционалдир.

3. *Умумий ҳол.* Фараз қилайлик: сирт устидаги Γ контур бир боғли соҳани чегаралаб, бўлак-бўлак силлиқ контурни ифодаласин (унинг уринмалари ва эгриликлари узлуксиз ўзгарсин); ундан ташқари, M_1, M_2, M_3, $\ldots, M_n$ нуқталар соҳанинг „учлари"ни белгиласин ва контур ёйларининг бу учларда ҳосил қилган бурчаклари θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_n бўлсин. У ҳолда соҳанинг интеграл эгрилиги, „интеграл геодезик $\int\limits_{\Gamma} k_g ds$ эгрилик"[1]) ва θ_i бурчаклар ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади:

$$\iint\limits_{\Sigma} K d\sigma + \int\limits_{\Gamma} k_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi. \tag{5}$$

Ана шу тенглик *Гаусс-Бонне теоремасини* ифодалайди. Бу теоремани исботлаш олдидан битта леммани кўриб ўтамиз.

Лемма. Γ чизиқнинг геодезик эгрилигини яна қуйидагича таърифлаш мумкин:

$$k_g = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

бунда $\Delta\varphi$ — берилган Γ чизиқ билан шу чизиқ бўйлаб параллел кўчириладиган вектор орасидаги бурчак орттирмаси, Δs — тегишли ёй орттирмаси. Γ — геодезик чизиқни ифодалаган ҳолда эса, $\varphi = \text{const}$ ва $k_g = 0$. Бу таъриф эски таъриф билан тенг кучли.

Ҳақиқатан, Γ чизиқ бўйлаб сиртга уринувчи торсни ясаш ва уни текисликка ёйиш натижасида вужудга келган ясси Γ_0 чизиқнинг (одатдаги) k эгрилиги шу чизиқ уринмаси билан бирор ўзгармас a_0 вектор орасидаги бурчак орттирмасининг ёй узунлиги орттирмасига нисбатининг (бу сўнгги орттирма нолга интилгандаги) лимитига тенгдир:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Текисликдан сиртга қайтиб, текисликдаги a_0 векторга мос келган a векторни Γ бўйлаб параллел кўчирсак, Γ нинг уринмаси a билан яна ўша φ бурчакни ташкил қилади ва s ўзгармайди.

Т е о р е м а н и н г и с б о т и. Γ чизиқнинг бирлик уринма вектори τ шу чизиқ бўйлаб параллел кўчирилаётган бирлик a вектор ва яна b вектор берилган булсин (b ҳам параллел

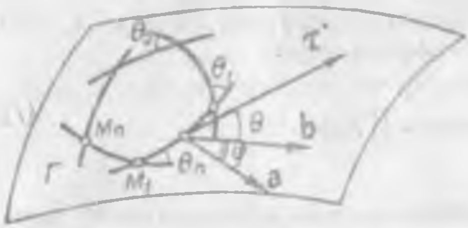
---

[1]) Ёпиқ Γ чизиқнинг „интеграл геодезик эгрилиги" шу чизиқ нуқталарида қаралган геодезик эгриликдан олинган интегралдир.

кўчирилади). Учта φ, ψ, θ бурчакни қуйидагича аниқлайлик (249-чизма):

$$\hat{a\,b} = \varphi, \quad \hat{a\,\tau} = \psi, \quad \hat{b\,\tau} = \theta = \psi - \varphi, \quad \psi = \varphi + \theta.$$

Γ контурдаги қисмий Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n контурлар бўйлаб ҳаракат қилганда, юқоридаги учта бурчак ҳам орттирмалар қабул қилиб, улар орасида ушбу боғланиш мавжуд бўлади:



249-чизма.

$$\Delta\varphi_i + \Delta\theta_i = \Delta\psi_i. \tag{9}$$

Исботланган леммага асосан:

$$\Delta\theta_i = \int_{\Gamma_i} \frac{d\theta}{ds} ds = \int_{\Gamma_i} k_g\, ds.$$

(6) тенгликларни бутун Γ контур бўйлаб йиғамиз ва θ бурчакнинг контур учларида қўшимча θ_1, θ_2, ..., θ_n орттирмаларни қабул қилишини эътиборга оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\psi_i.$$

Чап томондаги биринчи йиғиндини, соҳанинг интеграл эгрилиги тушунчаси сингари (контур бўйлаб) и н т е г р а л г е о д е з и к э г р и л и к деб аташ табиийдир[1]. Иккинчи ($\Delta\varphi$ га тенг бўлган) йиғинди Γ контур бўйлаб параллел кўчирилган векторнинг айланиш бурчагини, яъни интеграл эгрилик $\left(\iint_S K d\sigma\right)$ ни ифодалайди. Учинчи йиғинди — „учларда"ги бурчаклар йиғиндисидир.

Ўнг томондаги йиғинди $\Delta\psi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\psi_i = \int_{\Gamma} d\psi$ бўлиб, бу интеграл $2\pi k$ га тенгдир. Ҳақиқатан, уринма вектор параллел кўчиришдан кейин ўзининг дастлабки вазиятига келади ва $k = 1$ бўлади (чунки Γ деформацияланиб, ички нуқтагача кичрая борса, k сон ўзгармайди ва лимит вазиятда τ вектор бир марта 2π га айланади). Хуллас:

$$\iint_S K d\sigma + \int_{\Gamma} k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi.$$

---

[1]) 412-бет остидаги изоҳга қаралсин.

Шундай қилиб теорема исботланди.

Икки хусусий ҳол.

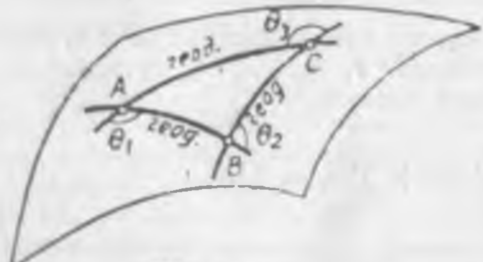
а) Силлиқ контур ($\theta_i = 0$) учун:

$$\iint_{\Sigma} K d\sigma + \int_{\Gamma} k_g ds = 2\pi.$$

б) Γ контур сифатида геодезик кўпбурчак олинса, $k_g = 0$ бўлиб, (5) муносабат ушбу шаклни олади:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi - \iint_{\Sigma} K d\sigma. \tag{7}$$

Бу тенглик планиметрияда исботланадиган кўпбурчакнинг ташқи бурчаклари йиғиндиси ҳақидаги теоремани умумлаштиради. $K=0$ бўлса, яъни сиртнинг ички геометрияси текислик планиметриясини тасвирласа, $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi$ бўлади, бу эса планиметриядаги тегишли теореманинг худди ўзидир.



250-чизма.

(7) тенгликни геодезик учбурчакка ($n = 3$) қўллланайлик. Агар $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ „геодезик учбурчак"нинг ички бурчакларини билдирса, у ҳолда (250-чизма):

$$\theta_1 = \pi - \angle A, \quad \theta_2 = \pi - \angle B, \quad \theta_3 = \pi - \angle C$$

бўлиб, (7) тенглик ушбу шаклни олади:

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \iint_{\Sigma} K d\sigma.$$

Катта аҳамиятга эга бўлган бу формула „Геометрия асослари" номли курс учун зарурдир. Ундан:

а) $K > 0$ шартида $\angle A + \angle B + \angle C > \pi$;
б) $K < 0$ „ $\angle A + \angle B + \angle C < \pi$;
с) $K = 0$ „ $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$.

Жумладан, $K = \text{const}$ бўлса,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + KS.$$

Биринчи ҳолда эллиптик, иккинчи ҳолда гиперболик геометрия ва учинчи ҳолда Эвклид геометрияси (планиметриясн) юз беради.

$K<0$, масалан, псевдосфера учун $K=-\frac{1}{a^2}$ бўлган шартда учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180° дан кичикдир (учбурчак „нуқсони" мусбатдир, яъни $\Delta=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)>0$. Псевдосферанинг геодезик чизиқлари (айланалар) тўғри чизиқлар сифатида қаралса, бу сиртда улуғ рус олними Н. И. Лобачевский яратган геометрия локал равишда (яъни сиртнинг етарлича кичик қисмларида) бажарилади.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯНИНГ ҚИСҚАЧА ТАРИХИ

Математик анализ билан бирга ривожлана бошлаган дифференциал геометриянинг асосий тушунчалари ва мазмуни дифференциал ва интеграл ҳисоблари вужудга келгандан кейин тараққий топди. XVII—XVIII асрларда техника ва саноатнинг талабига жавобан, анализ ва у билан бирга дифференциал геометрия жуда тез ўса бориб, Бернулли, Эйлер, Монж, Гаусс ва бошқа олимлар бу фаннинг асосини қурдилар.

1760 йилда Петербург академиясининг аъзоси Леонард Эйлер сиртлар назариясига йирик ҳисса қўшди („Бош эгриликлар", „Эйлер формуласи").

Дифференциал геометриянинг асосий масалаларини биринчи марта систематик равишда баён этган олим Гаспар Монж эди (1746—1818). У „Чексиз кичиклар анализининг геометрияга татбиқи" номли муҳим асарини ёзди. Монжнинг шогирдлари Дюпен, Менье ва бошқалар бу соҳадаги тадқиқотларни давом эттириб, янги ҳисса қўшдилар.

Сиртларнинг умумий назарияси, ички геометрия тушунчаси, эгри чизиқли координаталар ва квадратик формаларни Ф. Гаусс (1777—1855) ўзининг геодезия соҳасидаги амалий фаолияти муносабати билан яратди. Эгиш процессида сиртнинг тўлиқ эгрилиги ўзгармай қолиши ҳақидаги теоремани Гаусс ўз фаолиятининг энг самарали натижаси деб ҳисоблар эди.

XIX асрдан бошлаб рус олимлари дифференциал геометрияга йирик ҳиссалар қўшдилар. Улуғ рус олими Николай Иванович Лобачевский ўз фазосининг аналитик ва дифференциал геометриясига пойдевор қурди.

Петербург академиясининг корреспондент аъзоси Ф. Миндинг (1806—1885), унинг Москвада яшаган шогирди К. Петерсон сиртлар назариясига оид янги тушунчалар киритдилар (геодезик эгрилик, эгишда унинг инвариантлиги, эгрилиги ўзгармас сиртлар геометрияси ва ҳ. к.).

Йирик рус олимларидан Д. Ф. Егоров (1869—1930), Б. К. Млодзеевский (1858—1923) тадқиқотлари ҳам диққатга сазовордир.

Улуғ Октябрь социалистик революциясидан кейин Совет республикаларида барча фанлар, шу жумладан, математика ҳам жуда тез тараққий эта бошлади. Илгари асосан Москва, Ленинград шаҳарларида вужудга келган геометрлар коллективлари қаторига ҳозир Қозон, Боку, Тбилиси, Тошкент, Самарқанд ва бошқа шаҳарлардаги коллективлар ҳам киради.

Биз асосий геометрик „мактаблар" намояндаларини кўрсатиб ўтамиз: Москвадаги Ломоносов номидаги Давлат Университетининг профессори С. П. Фиников ва унинг шогирдлари; шу университетнинг профессорлари К. Ф. Каган (1869—1953), П. К. Рашевский, Н. В. Ефимов; В. И. Ленин номидаги Қозон университетидаги Н. И. Лобачевский кафедрасининг ҳозирги мудири профессор А. П. Норден, Саратов университетидаги геометрия кафедрасининг мудири профессор В. В. Вагнер, Ленинград университетининг профессори ва ректори А. Д. Александров ва бошқалар. Бу намояндалар геометриянинг турли соҳаларида тадқиқотлар олиб бориш билан бирга, ажойиб дарсликлар ва монографиялар ҳам яратмоқдалар.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

1. А. Д. Александров. Кривые и поверхности, в книге „Математика, ее содержание, методы и значение", II том, издательство АНСССР, М., 1956.
2. В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ОНТИ, М., 1935.
3. В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, Гостехиздат, М., 1957.
4. С. С. Бюшгенс, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М., 1940.
5. М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М., 1949.
6. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, Гостехиздат, 2-е изд. М., 1951.
7. Э. Гурса, Курс математического анализа, I том, 2 часть, ГТТИ, М., 1933.
8. Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, 4-е изд. Гостехиздат, М., 1950.
9. Я. С. Дубнов и П. С. Моденов, Теория кривых в векторном изложении; Уч. записки Моск. Гос. пед. института, М., 1938, 57—228-бетлар.
10. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, Гостехиздат, ч. I, М., 1947, ч. II, 1948.
11. В. И. Милинский, Дифференциальная геометрия, Ленинград, Кубуч, 1934.
12. П. С. Моденов, Сборник задач по дифференциальной геометрии, Учпедгиз, М., 1949.
13. А. П. Норден, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, М., 1948.
14. А. П. Норден, Теория поверхностей, Гостехиздат, М., 1956.
15. А. В. Погорелов, Лекции по дифференциальной геометрии, Издательство Харьковского университета, 2-е изд. 1956.
16. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 4-е изд. М., 1956.
17. С. П. Фиников, Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М., 1952.
18. С. П. Фиников, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, М., 1955.
19. С. П. Фиников, Теория поверхностей, Москва, 1934.
20. М. Т. Ўрозбоев, Назарий механика, I ва II қисмлар, Тошкент, 1950.
21. L. P. Eisenhart, An introduction to differential geometry, Princeton, 1940.
22. Kreyszig Erwin, Differential geometrie, Leipzig, 1957.

МУНДАРИЖА

Бешинчи боб. **Чизиқларнинг ўрамалари**

Олтинчи боб. **Ёпишма чизиқлар ва сиртлар**

Еттинчи боб. **Френе формулалари, эгрилик, бурилма**

Саккизинчи боб. **Эволюта ва эвольвента**

Тўққизинчи боб. **Чизиқнинг табиий тенгламаси**

Ўн бешинчи боб. **Сирт устида баъзи чизиқлар тўри**

Ўн олтинчи боб. **Сиртлар назариясининг асосий формулалари ва тенгламалари**

Ўн еттинчи боб. **Сиртнинг ички геометрияси**

Ўн саккизинчи боб. **Сиртнинг ички геометрияси (давоми). Ковариант дифференциал ва параллел кўчириш**

На узбекском языке

САБИРОВ МАРДАН АЮБОВИЧ,
ЮСУПОВ АБРАМ ЯКУБОВИЧ

**КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

Учпедгиз УзССР — 1959 — Ташкент

Редактор *М. Одилов*
Техн. редактор *С. Ахтамова*
Корректор *Ж. Нуриддинова*

Теришга берилди 16/IV-1959 й. Босишга рухсат этилди 14/XI 1959 й. Қоғози $60\times92^{1}/_{16}$. Физик босма л. 26,5. Нашр. л. 28,57. Тиражи 3000. Р 00912. ЎзССР Давлат ўқув-педагогика нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 58-1958. Баҳоси 8 с. 60 т. Муқоваси 1 с. 50 т.

ЎзССР Маданият министрлиги Ўзглавиздатининг 1-босмахонаси.
Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1959 й. Заказ № 878.