М. КАМОЛОВ

Аналитик геометрия

[illegible]

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Бу китоб олий техника ўқув юртларининг студентлари учун СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги тасдиқлаган 460 соатлик олий математика курси программасининг аналитик геометрия қисмига мувофиқ ёзилди.

Сиртдан, кечки ва қатнаб ўқийдиган студентларни назарда тутиб китобда қаралган асосий материаллар бўйича берилган мисолларнинг кўпроқ бўлишига ва мазмуни олий техника ўқув юртлари учун мосроқ бўлишига эътибор берилди.

Шу билан бирга, назарий масалаларнинг математика нуқтаи назаридан қўйилиши ва исботланиши мумкин қадар тўлатўкис бўлишига ҳаракат қилинди, программадан ташқари берилган материаллар учраган жойларда бу масалалар билан тўла танишмоқни истаган студентлар учун керакли адабиёт кўрсатилди.

Китобнинг қўл ёзмасини доцент Мардон Аюбович Собиров синчиклаб кўриб чиқди ва у кўрсатган муҳим кўрсатма ва тузатишлар эътиборга олинди.

Бунинг учун автор китобнинг махсус редакторлиги вазифасини ўз зиммасига олган М. А. Собировга самимий миннатдорчилик билдиради. Шунингдек, китобнинг қўл ёзмасини муҳокама қилиб, фойдали маслаҳатлар берганлари учун ТЭИС (Тошкент Электротехника алоқа институти) олий математика кафедрасининг ўқитувчиларига ҳамда нашриёт редактори И. Аҳмаджоновга автор ўз ташаккурини билдиради.

Бу китоб олий техника ўқув юртлари учун аналитик геометриядан ўзбек тилида биринчи оригинал китоб бўлгани учун уни камчилик ва хатолардан холи деб бўлмайди. Учраган камчиликларни тугатишда ва китобнинг сифатини яхшилашда китобхонлар ёрдам беради деб ишонамиз.

Автор

М. КАМОЛОВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Ўзбекистон ССР
Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги
олий техника ўқув юртлари учун
ўқув қўлланмаси сифатида
рухсат этган

ТУЗАТИЛГАН ВА ТЎЛДИРИЛГАН
ИККИНЧИ НАШРИ

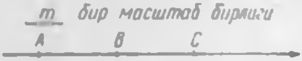
„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
Тошкент—1972

Кесманинг йўналишини таърифлаш учун уни чегараловчи нуқталардан бирини кесманинг боши (учи) деб, иккинчисини кесманинг охири деб олинади.

Бошланғич A нуқтаси ва охирги B нуқтаси кўрсатилган кесма йўналган кесма дейилади ва $\overline{AB}$ *шаклда ёзилади.*

Кесманинг A учидан B охирига томон йўналиш AB кесманинг *йўналиши* ҳисобланади. Шунинг учун $\overline{AB}$ йўналган кесма билан $\overline{BA}$ йўналган кесма бир-бирига қарама-қарши йўналган бўлади.

Агар йўналган бир қанча кесма битта тўғри чизиқда ётса бу кесмаларнинг йўналишларини плюс ёки минус ишора билан ҳам кўрсатиш мумкин. Бунинг учун тўғри чизиқдаги мумкин бўлган икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш деб, иккинчисини эса манфий йўналиш деб олиш керак. Қабул қилинган мусбат йўналиш одатда стрелка билан кўрсатилади (1- чизма). Чизмада чапдан ўнгга томон йўналиш мусбат йўналиш сифатида олинган. Мусбат йўналиши кўрсатилган тўғри чизиқ *ўқ* деб аталади.



1- чизма.

Бирор ўқда ётган кесманинг йўналиши ўқ йўналиши билан бир хил бўлса, кесманинг йўналишини мусбат деб оламиз ва уни + (плюс) ишора билан кўрсатамиз; ўқ билан кесманинг йўналиши турлича бўлса, кесманинг йўналишини манфий деб ҳисоблаймиз ва уни — (минус) ишора билан кўрсатамиз.

Бирор ўқдаги йўналган кесманинг плюс ёки минус ишора билан олинган узунлиги бу кесманинг алгебраик миқдори деб аталади.

Йўналган $\overline{AB}$ кесманинг[1] алгебраик миқдорини бундан кейин AB билан кўрсатамиз.

Кесма *узунлиги* ҳамма вақт олинган масштабда мусбат сон билан ифодаланади. $\overline{AB}$ йўналган кесманинг узунлиги $|AB|$ шаклда ёзилади. Бу таърифга асосан йўналишлари қарама-қарши бўлган $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ кесмаларнинг узунликлари бир-бирига тенг, яъни:

$$|AB| = |BA|.$$

Аммо $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ йўналган кесмаларнинг алгебраик миқдорлари бир-биридан ишораси билан фарқ қилади, яъни:

$$|\overline{AB}| = -|\overline{BA}|.$$

---

[1] Гап ўқдаги йўналган кесманинг алгебраик миқдори устида боряпти, бундан кейин, англашилмовчилик бўлмайдиган ҳолларда, бу ибора ўрнига йўналган кесма миқдори ёки кесма миқдори, $\overline{AB}$ йўналган кесма ўрнига $\overline{AB}$ кесма деб ҳам юритамиз.

Масалан, ED бир масштаб бирлиги бўлганида A ва B нуқталар орасидаги масофа 2,1 масштаб бирлигига, B ва C нуқталар орасидаги масофа 2,05 масштаб бирлигига тенг бўлсин (1- чизма). Бу ҳолда $AB = 2{,}1$; $BC = 2{,}05$ ёки $BA = -2{,}1$; $CB = -2{,}05$ бўлади.

Булардан

$$|AB| = |BA| = 2{,}1 \text{ ва } |CB| = |BC| = 2{,}05.$$

Агар йўналган $\overline{AB}$ кесманинг бошланғич A учи билан унинг охирги B учи устма-уст тушиб қолса, бундай кесмани *ноль кесма* деб атаймиз. Ноль кесманинг узунлиги нолга тенг бўлиб, унинг йўналиши аниқмас.

Энди бирор ўқда учта нуқта олиб, қуйидагини исботлаймиз.

A, B, C дан иборат учта нуқта битта ўқда ҳар қандай жойлашганда ҳам $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ кесмаларнинг алгебраик миқдорлари ўзаро ушбу

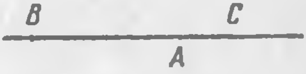
$$AB + BC = AC$$

айният билан боғлангандир. Бу айниятнинг тўғри эканини текширамиз. Дастлаб, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ кесмаларнинг йўналишлари бир хил ва улар нолмас кесмалар деб фараз қиламиз (1- чизма). Бу ҳолда ҳаракат қилаётган нуқта A нуқтадан чиқиб, олдин B нуқтага, ундан кейин C нуқтага етиб келади ва AC масофани ўтади, ҳаракат давомида йўналиш ўзгармайди, яъни $\overline{AC}$ кесманинг узунлиги (ўтилган йўл) $\overline{AB}$ ва $\overline{BC}$ кесмалар узунлиги йиғиндисига тенг:

$$AB + BC = AC.$$

Энди $\overline{AB}$ ва $\overline{BC}$ кесмалар йўналишлари турлича ва нолмас кесмалар деб фараз қиламиз (2- чизма). Бу ҳолда A нуқтадан ҳаракат қила бошлаган нуқта олдин B нуқтагача бориб, ундан кейин орқага қайтиб, C нуқтага келади, бошқача айтганда $\overline{AC}$ кесманинг узунлиги $\overline{AB}$ кесма узунлигидан $\overline{BC}$ кесма узунлигини айрилганига тенг бўлиб, йўналиши бу кесмалардан каттасининг йўналиши билан бир хил; бундай бўлиши чизмадан равшан кўриниб турибди. Бу ҳолда AB ва BC сонлар турли ишорали, $\overline{AC}$ нинг ишораси AB ва BC сонларнинг алгебраик миқдорларига кўра каттасининг ишораси билан бир хил. Бундан йўналган кесмаларнинг алгебраик миқдорларини қўшиш нисбий сонларни қўшиш каби бажарилишини кўрамиз.

2- чизма.



3- чизма.

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Бу нашрда китобга бирмунча тузатишлар киритилди, жумладан биринчи нашрда учраган хатолар тузатилди, бобларнинг деярли барчасида қўшимча машқлар берилди. Булар китобдан масалалар тўплами сифатида ҳам фойдаланиш имконини беради.

Бундан ташқари китобнинг бир неча бобига назарияга тегишли бўлган масалалар ҳам киритилди, булар шубҳасиз, китобда қаралган масалаларни яхши тушуниб олишда китобхонга қулайлик туғдиради. Жумладан, I бобга қўшилган йўналган кесманинг миқдорини ва унинг узунлигини ойдинлаштирувчи мисол, IV бобга киритилган координаталар алмаштириш формуласини проекциялар назариясидан фойдаланмай келтириб чиқариш масаласи ва ҳоказолар.

Китобни иккинчи нашрга тайёрлашда „Ўқитувчи" нашриётининг физика-математика редакциясидаги ўртоқлар бир қатор тузатиш ва контекстни яхшиловчи таклифлар киритдилар. Бу ишлари учун уларга автор ўзининг самимий миннатдорчилигини изҳор қилади.

Автор

Тошкент, 1971 й. июнь

БИРИНЧИ ҚИСМ
ТЕКИСЛИКДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Биринчи боб
ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

1- §. КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

Аналитик геометрия олий математиканинг асосий бўлимларидан бири бўлиб, бу бўлимда геометрик шакллар алгебраик анализ ёрдамида текширилади. Тўлароқ айтганда, аналитик геометриянинг вазифаси: биринчидан, геометрик образларни нуқталарнинг геометрик ўрни деб қараб, шу образларнинг умумий хоссаларига асосан уларнинг тенгламаларини тузиш ва иккинчидан, тенгламаларнинг геометрик маъносини аниқлаб, бу тенгламалар билан ифодаланган геометрик образларнинг шаклини, хоссаларини ва фазода жойланишини ўрганишдан иборат.

Чизиқлар нуқталардан, сиртлар чизиқлардан, жисмлар сиртлардан ташкил топган деб қараш мумкин. Шунинг учун бу геометрик шаклларнинг энг соддасини нуқта деб олиш ва уларнинг фазода олган ҳолатларини нуқталарнинг геометрик ўрни деб аниқлаш табиийдир.

Аналитик геометрияда нуқтанинг чизиқдаги, текисликдаги ва фазодаги ўрни сонлар ёрдамида аниқланади. Нуқтанинг ўрнини аниқловчи сонлар унинг координаталари дейилади. Геометрик шаклларнинг ўрнини аниқлаш усули ёки методи координаталар методи дейилади.

2- §. ЙЎНАЛГАН КЕСМАЛАР

Координаталар методида йўналган кесмалар тушунчаси муҳим роль ўйнайди. Биз бу параграфда йўналган кесмалар ҳақидаги асосий тушунчаларни баён қиламиз.

Тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси орасидаги бўлаги кесма деб аталиши элементар геометриядан маълум. Механика, физикада ва электротехника, радиотехника каби техник фанларда асосан тўғри чизиқли ҳаракатлар қаралади. Бунда тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қиладиган нуқтанинг бошланғич нуқтаси ва ҳаракат тугаган вақтдаги охирги нуқтаси аҳамиятга эга.

Демак, нисбий сонларни қўшиш қоидасига мувофиқ бу ҳолда ҳам

$$AB + BC = AC.$$

Агар A, B ва C нуқталар 3- чизмадагича жойланган булса, у ҳолда юқоридаги каби мулоҳаза юритиш билан қаралаётган айниятнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш осон.

Агар $\overline{AB}$ ва $\overline{BC}$ кесмалардан бирортаси ноль кесма, масалан, $\overline{AB}$ ноль кесма булса, у ҳолда A нуқта билан B нуқта устма-уст тушади, шунинг учун:

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC.$$

Шунга ухшаш $\overline{BC}$ ноль кесма бўлса,

$$AB + BC = AC + CC = AC + 0 = AC.$$

Шундай қилиб, барча ҳолда ҳам курсатилган айният ўринли. Агар AB, BC ва AC ни кесмалар узунликлари деб тушунсак,

$$AB + BC = AC$$

айният фақат B нуқта A ва C нуқталар орасида ётган ҳолдагина уринли булади. Бу узунликлар ишоралари билан қаралган ҳолда эса, B нуқта қаерда бўлмасин, бу тенглик ўз кучини сақлайди.

Шунинг билан бир қаторда бу айниятни умумлаштириш мумкин, яъни A, B_1, $B_2, \ldots B_n$, C нуқталар битта ўқда ҳар қандай жойлашганда ҳам $\overline{AB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\ldots$, $\overline{B_nC}$ кесмаларнинг алгебраик миқдорлари ўзаро

$$AB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_nC = AC$$

айният билан боғланган булади.

Ҳақиқатан ҳам, кесмаларнинг сони $n - 1$ та булганда бу айният тўғри бўлсин. Кесмаларнинг сони n та булганда ҳам бу айният туғри эканини математик индукция методидан фойдаланиб курсатамиз. Фараз қилганимизга биноан:

$$AB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}C = AC.$$

Энди n та кесма олиб,

$$AB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nC = (AB_1 + B_1B_2 + \ldots + \\ + B_{n-1}B_n) + B_nC$$

йиғиндини қараймиз.

Фаразимизга кура қавс ичидаги йиғинди AB_n ни беради, яъни

$$(AB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n) + B_nC = AB_n + B_nC;$$

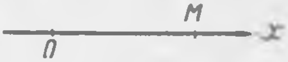
юқорида исбот қилинган айниятга асосан:

$$AB_n + B_nC = AC.$$

Изоҳ. Агар қаралаётган кесмалар бирор ўқда ётмасдан текисликдаги ихтиёрий кесмалар бўлса, у ҳолда кесма узунликларини плюс ёки минус ишора билан олиб қарашнинг ҳеч ҳожати йўқ.

3- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚДАГИ КООРДИНАТАЛАР

Тўғри чизиқдаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш масаласини қараймиз. Бунинг учун бирор тўғри чизиқ олиб, шу тўғри чизиқдаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш деб қабул қиламиз. Шу билан тўғри чизиқ ўққа айланди (4- чизма). Энди узунлик бирлигини танлаб оламиз, масалан, у 1 сантиметр бўлсин; ўқдаги ихтиёрий O нуқтани саноқ бошланадиган нуқта деб қабул қиламиз. Бу ўқни Ox ўқ деб атаймиз. Бу ҳолда Ox ўқдаги ҳар қандай M нуқтанинг ўрни $\overline{OM}$ кесманинг алгебраик миқдори билан аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, Ox ўқдаги ҳар қандай M нуқтага боши O нуқтада, охири M нуқтада бўлган $\overline{OM}$ кесманинг алгебраик миқдори тўғри келади ва, аксинча, боши O нуқтада бўлган ҳар бир кесмага Ox ўқда битта M нуқта тўғри келади.



4 -чизма.

$\overline{OM}$ кесманинг алгебраик миқдорини тасвирловчи сон *M нуқтанинг координатаси* дейилади. Шундай қилиб, Ox ўқдаги ҳар бир нуқтани битта сон билан аниқлаш мумкин ва, аксинча, ҳар бир сонга Ox ўқда битта нуқтани мосликда қўйиш мумкин.

M нуқта Ox ўқда ётса, унинг координатасини топиш учун $\overline{OM}$ кесманинг алгебраик миқдорини қабул қилинган узунлик бирлиги билан ўлчаш кифоя бўлганидек, нуқтани берилган x координатаси бўйича Ox ўқда ясаш мумкин. Бу нуқта алгебраик миқдори x га тенг бўлган $\overline{OM}$ кесманинг охири бўлади. Агар тўғри чизиқда бирор O нуқта белгиланган, мусбат йўналиш кўрсатилган ва узунлик бирлиги танлаб олинган бўлса, *тўғри чизиқда координаталар системаси* белгиланган деб айтамиз. O нуқта *координаталар боши*, тўғри чизиқ эса *координаталар ўқи* дейилади. x сон M нуқтанинг координатаси экани $M(x)$ шаклда ёзилади. O нуқта координаталар ўқини иккита ярим ўққа ажратади; O нуқтадан мусбат йўналиш бўйича кетувчи ярим ўқ *мусбат ярим ўқ*, манфий йўналишда кетувчи ярим ўқ *манфий ярим ўқ* дейилади. Координаталар боши бўлган O нуқтанинг координатаси нолга тенг. Мусбат ярим ўқдаги нуқталарнинг координаталари мусбат сонлар, манфий ярим ўқдаги нуқталарнинг координаталари манфий сонлар бўлади.

1- мисол. $A(-3)$, $B(2)$, $C(5)$, $D(-4)$ нуқталар ясалсин.

Ечиш. Ox ўқда 1 *см* ни узунлик бирлиги деб қабул қиламиз ва $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ва $\overline{OD}$ йўналган кесмаларни алгебраик миқдорларига кўра ясаймиз (5- чизма).

2- мисол. Координаталари:

$$1)\ |x| = 1; \qquad 2)\ |1 - x| = 3; \qquad 3)\ |2 + x| = 2$$

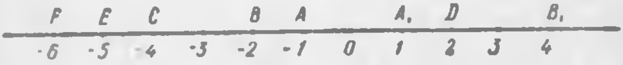
тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқталар ясалсин.

Ечиш. 1) $|x| = 1$ тенглама иккита

$$x = -1 \text{ ва } x = 1$$

5 -чизма.

тенгламага эквивалент (тенг кучли). Шунинг учун координатаси берилган тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар $A(-1)$ ва $A_1(1)$ лардан иборат булади (6- чизма).



6 -чизма.

2) $|1 - x| = 3$ тенглама

ва

$$1 - x = -3$$

тенгламаларга эквивалент. Буларнинг биринчисидан

$$x = -2,$$

иккинчисидан

$$x = 4$$

эканлигини аниқлаймиз. Изланаётган нуқталар $B(-2)$ ва $B_1(4)$ лардан иборат булади (6- чизма).

3) $|2 + x| = 2$ тенглама

$$2 + x = 2$$

ва

$$2 + x = -2$$

тенгламаларга эквивалент. Бу тенгламаларни ечиб,

$$x = 0 \text{ ва } x = -4$$

эканлигини топамиз. Изланаётган нуқталар $O(0)$ ва $C(-4)$ лардан иборат бўлади.

3- мисол. Координаталари:

$$1)\ x-5<0;\ 2)\ -1\leqslant x<2;\ 3)\ \frac{2-x}{x-1}>0;$$

$$4)\ x^2-3x+2\leqslant 0;\ 5)\ |x+5|<1$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг жойлашишини сон ўқида тасвирланг.

Ечиш. 1) $x-5<0$ тенгсизлик $x<5$ тенгсизликка эквивалент. Демак, координаталари бу тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталар сон ўқида $M(5)$ нуқтадан чапда жойлашган бўлади.

2) $-1<x<2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар сон ўқида $A(-1)$ ва $D(2)$ нуқталар орасига жойлашган бўлиб, $A(-1)$ нуқта ҳам бу оралиққа киради. Бу ҳолда $-1\leqslant x<2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар $[-1,2)$ ярим оралиқни ташкил этади.

3) $\frac{2-x}{x-1}>0$ тенгсизлик

$$а)\ 2-x>0 \text{ ва } x-1>0$$

ёки

$$б)\ 2-x<0 \text{ ва } x-1<0$$

бўлганда ўринли бўлади.

а) ҳолдан $1<x<2$ эканлиги келиб чиқади;

б) ҳолдан $x>2$ ва $x<1$ эканлиги келиб чиқади, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки x бир вақтнинг ўзида 1 дан кичик, аммо 2 дан катта бўлолмайди.

Шундай қилиб а) ҳолни қараш етарлидир. Бу ҳолда нуқталар $A_1(1)$ ва $D(2)$ оралиқни ташкил этади.

4) $x^2-3x+2\leqslant 0$ тенгсизликни

$$(x-1)(x-2)\leqslant 0$$

шаклда ёзиш мумкин. Кейинги тенгсизлик

$$а)\ x-1\leqslant 0 \text{ ва } x-2\geqslant 0$$

ёки

$$в)\ x-1\geqslant 0 \text{ ва } x-2\leqslant 0$$

бўлган ҳолларнинг бирида рўй бериши мумкин. Аммо а) ҳолдаги тенгсизликлар бир-бирига зиддир, шунинг учун в) ҳолни қараш етарлидир. Бу ҳолда $x_1\geqslant 1$, $x_2\leqslant 2$. Бу эса $x^2-3x+{}$ $+2\leqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар $A(1)$ ва $D(2)$ кесмани тасвир этишини билдиради.

5) $|x+5| \leqslant 1$ тенгсизлик

$$-1 \leqslant x+5 \leqslant +1$$

тенгсизликка тенг кучли. Кейинги тенгсизликнинг ҳамма томонларига -5 ни қўшамиз:

$$-6 \leqslant x \leqslant -4.$$

Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар $F(-6)$ ва $C(-4)$ нуқталар билан чегараланувчи кесмада ётади.

4- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚДАГИ ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Тўғри чизиқдаги бирор координаталар системасида иккита $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталар орасидаги масофа қандай топилишини қараб чиқамиз. 2- параграфдаги асосий айниятга мувофиқ:

$$OA + AB = OB.$$

Бу тенгликдан:

$$AB = OB - OA.$$

Нуқта координатасининг таърифига асосан:

$$OA = x_1, \quad OB = x_2.$$

Шунинг учун:

$$AB = x_2 - x_1. \qquad (1)$$

Бу тенгликдан *ўқдаги йўналган кесманинг алгебраик миқдори бу кесма охирининг координатаси билан унинг боши координатаси орасидаги айирмага тенг* эканини кўрамиз.

Аммо A, B нуқталар орасидаги масофа $\overline{AB}$ кесманинг узунлигига (модулига) тенг, яъни:

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1|. \qquad (1)$$

Икки нуқта орасидаги масофа кўпинча d ҳарфи билан белгиланади. Демак:

$$d = |x_2 - x_1|, \qquad (2)$$

яъни *икки нуқта орасидаги масофа бу нуқталар координаталари айирмасининг абсолют қийматига тенг.*

1- мисол. $M(3)$ ва $N(-8)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш. Масофани топиш формуласида координаталар айирмасининг абсолют қиймати олингани учун қайси нуқтани биринчи (бошланғич) нуқта деб олиш ихтиёрийдир. Бу мисолда

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -8$$

деб олсак ҳам бўлаверади. Шунинг учун:

$$d = |3 - (-8)| = 11.$$

2- мисол. Агар: 1) $B(3)$ ва $AB = 5$; 2) $B(-5)$ ва $|AB| = 2$ бўлса, A нуқтанинг координатаси топилсин.

Ечиш. 1) A нинг координатасини x_1; B нинг координатасини x_2 десак, у ҳолда (1) формулага мувофиқ:

$$AB = x_2 - x_1.$$

Бизнинг мисолда $x_2 = 3$, шунинг учун

$$3 - x_1 = 5.$$

Бу тенгликдан

$$x_1 = 3 - 5 \text{ ёки } x_1 = -2.$$

2) (2) формулани оламиз:

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Аммо

$$x_2 = -5, \ d = |AB| = 2.$$

Демак,

$$|-5 - x_1| = 2$$

ёки

$$-5 - x_1 = \pm 2.$$

Бу тенглик иккита тенгликка ажралади:

а) $-5 - x_1 = 2$, бу ердан $x_1 = -7$.

б) $-5 - x_1 = -2$, бу ердан $x_1 = -3$.

5-§. ТЕКИСЛИКДАГИ НУҚТАНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

Текисликдаги нуқтанинг ўрнини сонлар ёрдамида аниқлаш учун бирор O нуқтада кесишувчи ва бир-бирига перпендикуляр бўлган иккита тўғри чизиқ оламиз. Одатда булардан бири горизонтал, иккинчиси эса вертикал жойлашган бўлади (7- чизма). Горизонтал тўғри чизиқни абсциссалар ўқи ёки Ox ўқ, вертикал чизиқни ординаталар ўқи ёки Oy ўқ дейилади. Бу ўқларнинг иккаласи координата ўқлари дейилади. Буларнинг кесишган O нуқтаси координаталар боши дейилади. Координаталар боши Ox ўқ учун ҳам, Oy ўқ учун ҳам саноқ бошланадиган нуқта ҳисобланади. Ўқларнинг ҳар бирида мусбат йўналишлар стрелкалар билан кўрсатилади.

Нуқтанинг текисликдаги ўрни ана шу *координаталар системасига* нисбатан аниқланди.

Текисликда бирор M нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун бу нуқтадан Ox ва Oy ўқларга перпендикулярлар туширамиз, координаталар боши бўлса, квадрат учларининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$A(0,\ 0),\ B(5,\ 0),\ C(5,\ 5) \text{ ва } D(0,\ 5).$$

Шунга ўхшаш координаталар боши учун B нуқта олинса, квадрат учларининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$A(-5{,}0),\ B(0{,}0),\ C(0{,}5),\ D(-5{,}5).$$

Агар C нуқта координаталар боши деб олинса, квадрат учларининг координаталари

$$A(-5,\ -5),\ B(0,\ -5),\ C(0{,}0),\ D(-5{,}0);$$

ва ниҳоят D нуқта координаталар боши деб олинса, квадрат учларининг координаталари

$$A(0,\ -5),\ B(5,\ -5),\ C(5{,}0),\ D(0{,}0)$$

бўлади.

3- мисол. $A(3{,}2)$ нуқтага Ox, Oy ўқларнинг ҳар бирига ва координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган нуқталарнинг координаталари топилсин.

Ечиш. $A(3{,}2)$ нуқтага Ox ўққа нисбатан симметрик жойлашган A_1 нуқта A нуқтадан Ox ўққа туширилган перпендикулярнинг давомида ва Ox ўқдан 2 бирлик узоқда бўлади. Шунинг учун: $A_1(3,\ -2)$. Шунга ўхшаш Oy ўққа нисбатан A нуқтага симметрик бўлган нуқта $A_2(-3{,}2)$ дир.

Координаталар боши O га нисбатан A нуқтага симметрик бўлган C нуқта OA нинг давомида, яъни учинчи чоракда ётади. Бу нуқта Oy ўққа нисбатан $A_1(3,\ -2)$ нуқтага симметрик. Демак, изланаётган нуқта $C(-3,\ -2)$.

4- мисол. $xy > 0$ бўлса, $M(x,\ y)$ нуқта қайси чоракларда ётиши мумкин.

Ечиш. $xy > 0$ тенгсизлик ё $x > 0$ ва $y > 0$ бўлганда ёки $x < 0$ ва $y < 0$ бўлган икки ҳолда бажарилади. Шунга кўра $M(x,\ y)$ нуқта ё биринчи чоракда, ёки учинчи чоракда ётиши мумкин.

6- §. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Декарт координаталари системасида $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталар орасидаги $d = AB$ масофани топамиз (2- § да берилган изоҳга қаралсин). Берилган координаталарига кўра A ва B нуқталарни ясаймиз (11- чизма).

$$OC = x_1,\quad OD = x_2,$$
$$CA = y_1,\quad DB = y_2.$$

A нуқтадан *Ox* ўққа параллел чизиқ ўтказиб, уни *DB* ордината билан *R* нуқтада кесишгунча давом эттирамиз, бу ҳолда тўғри бурчакли *ARB* учбурчак ҳосил бўлади. Пифагор теоремасига мувофиқ:

$$d = AB = \sqrt{AR^2 + RB^2}. \quad (1)$$

(Бунда *AR* ва *RB* лар *ARB* учбурчак катетларининг узунлиги.)

Аммо 4- параграфдаги (2) ва (1) формулага кўра:

$$AR = CD = |x_2 - x_1|, \quad (2)$$

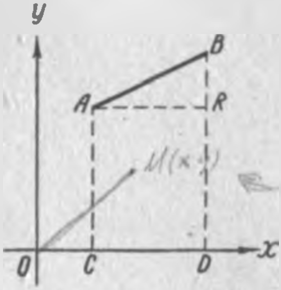
шунга ўхшаш

$$RB = DB - DR = |y_2 - y_1|. \quad (3)$$

(2) ва (3) тенгликлардан *AR* ва *RB* кесмаларнинг узунликларини (1) формулага қўйсак,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

формула ҳосил бўлади[1].



11- чизма.

Бу формулани *текисликда икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи* дейилади.

Координаталар бошидан бирор $M(x, y)$ нуқтагача булган масофа учун (4) формула ушбу

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5)$$

кўринишга келади.

1- мисол. $M(2, -3)$ ва $N(-1, 1)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш. Бу ерда

$$x_1 = 2, \ y_1 = -3; \ x_2 = -1, \ y_2 = 1;$$

(4) формулага биноан:

$$d = \sqrt{(-1-2)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

2- мисол. Координаталар бошида $M(-2; 3)$ нуқтагача булган масофа топилсин.

Ечиш. Бу ерда:

$$x = -2, \ y = 3;$$

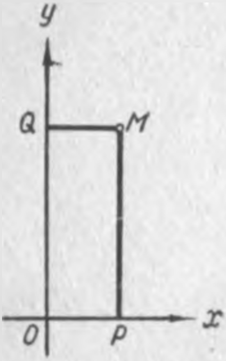
(5) формулага кура

$$d = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

---

[1] Бу формула *A* ва *B* нуқталар текисликда ҳар қандай жойлашганда ҳам ўринли бўлади, чунки x_1, x_2, y_1 ва y_2 лар ихтиёрий миқдорлар.

яъни M нуқтани бу ўқларга проекциялаймиз. Натижада P ва Q нуқталар ҳосил бўлади. M нуқта берилса, P ва Q нуқталар дарҳол аниқланади ва, аксинча, P ва Q нуқталар маълум бўлса, M нуқтанинг ўрнини аниқлаш осон. Маълумки, кесмаларнинг узунликлари бирор узунлик бирлиги билан ўлчанади, шунинг учун биз Ox ва Oy ўқларда узунлик бирлигини танлаб олишимиз керак.



7- чизма.

8- чизма.

OP ва OQ кесмаларни бу бирлик билан ўлчаганда $|OP|$ ва $|OQ|$ сонлар ҳосил бўлади. Энди x билан P нуқтанинг Ox ўқдаги координатасини, y билан Q нуқтанинг Oy ўқдаги координатасини белгиласак, яъни $x = OP$ ва $y = OQ$ бўлса, бу сонлар ёрдамида текисликда фақат битта M нуқтани топамиз ва, аксинча, текисликда M нуқта берилган бўлса, бу сонлар дарҳол аниқланади.

x сони M нуқтанинг *абсциссаси*, y сони эса унинг *ординатаси* дейилади ва $M(x, y)$ кўринишда ёзилади, яъни M нуқтанинг абсциссаси қавс ичида биринчи ёзилади, ундан кейин ординатаси ёзилади. Масалан, $M(3, 4)$ бўлса, бу $x = 3$, $y = 4$ эканини билдиради. x билан y ни биргаликда M нуқтанинг *координаталари* дейилади.

Шундай қилиб, нуқтанинг координаталари маълум бўлса, нуқта берилган бўлади, дейиш мумкин ва аксинча.

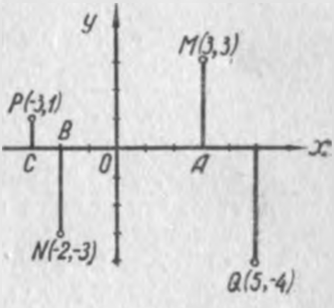
Координата ўқлари бутун текисликни тўртта бўлакка ажратади (8- чизма). Бу бўлаклар квадрантлар ёки чораклар дейилади. Чоракларни чизмада кўрсатилгандек номерлаймиз.

Биринчи чоракда нуқтанинг абсциссаси ҳам, ординатаси ҳам мусбат, иккинчи чоракда—абсцисса манфий, ордината мусбат, учинчи чоракда—абсцисса ҳам, ордината ҳам манфий ва тўртинчи чоракда—абсцисса мусбат, ордината манфий.

Агар нуқта абсциссалар ўқида ётса, унинг ординатаси ноль бўлади, агар ординаталар ўқида ётса, унинг абсциссаси ноль бўлади.

Биз танишган координаталар системасини тўғри бурчакли координаталар системаси ёки координаталар методи ҳақида биринчи бўлиб асар ёзган математик ва философ Декарт номи билан боғлаб, тўғри бурчакли Декарт координаталари системаси ёки қисқача Декарт системаси дейилади. Биз мисол ва масалаларни асосан шу системада ечамиз.

1- мисол. $M(3,\ 3)$, $N(-2,\ -3)$, $P(-3,\ +1)$ ва $Q(5,\ -4)$ нуқталар ясалсин.



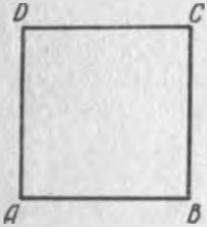
9 -чизма.

Ечиш. Координаталар системасини олиб, унда узунлик бирлиги деб 0,5 *см* кесмани қабул қилайлик. $M(3,\ 3)$ нуқтани ясаш учун абсциссалар ўқида O нуқтадан ўнг томонда узунлиги $x=3$ бирликка тенг бўлган OA кесма оламиз. A нуқтадан Ox ўққа перпендикуляр ўтказиб, унда узунлиги $y=3$ бирликка тенг бўлган кесма ажратамиз (9- чизма).

Бу кесманинг учи биз излаган M нуқта бўлади.

Шунга ўхшаш, $N(-2,\ -3)$ нуқтани ясаш учун Ox ўқда O нуқтадан чапда -2 бирлик кесма оламиз (бу OB кесма), сўнгра B дан Ox ўққа перпендикуляр ўтказамиз, бу перпендикулярда манфий йўналиш бўйича (абсциссалар ўқидан пастда) -3 бирлик олсак, N нуқта топилади.

P ва Q нуқталар ҳам худди шундай ясалади (буни ўзингиз ясаб кўринг).



10 -чизма.

2- мисол. Томонининг узунлиги 5 бирликка тенг бўлган квадрат берилган. Агар координата ўқлари квадратнинг параллел бўлмаган икки томони бўйича йўналган бўлса, унинг учларининг координаталари аниқлансин.

Ечиш. Агар квадратнинг AB томонини Ox ўқ, AD томонини Oy ўқ деб олсак (10- чизма), A нуқта координаталар боши бўлгани учун унинг координаталари (0, 0) бўлади. B уч абсциссалар ўқида ётади, шунинг учун бу нуқтанинг абсциссаси $x=5$, ординатаси $y=0$, C учнинг абсциссалар ўқидаги проекцияси B нуқта бўлгани учун $x=5$, бу нуқта билан B нинг оралиги 5 бирликка тенг, демак, $y=5$, D нуқта ординаталар ўқида ётгани сабабли $x=0$, $y=5$. Шундай қилиб, A нуқта

3- мисол. Учлари $A(-1{,}3)$, $B(1{,}2)$ ва $C(0{,}4)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази ва радиуси аниқлансин.

Ечиш. Учбурчакнинг учлари айланада ётганлиги учун улар айлананинг $N(x,\ y)$ марказидан тенг узоқликда ётади, яъни

$$AN = BN = CN\ (= R)$$

ёки

$$AN^2 = BN^2 = CN^2,$$

яъни

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-4)^2.$$

$AN^2 = BN^2$
$AN^2 = CN^2$

Демак,

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2; \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-4)^2. \end{cases}$$

Бу тенгламаларни соддалаштириб,

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечиб

$$x = \frac{1}{6},\ y = 2\frac{5}{6}$$

ларни топамиз. Демак, айлананинг маркази $N\left(\frac{1}{6},\ 2\frac{5}{6}\right)$ нуқтада бўлиб, унинг радиуси

$$R = AN = \sqrt{\left(\frac{1}{6}+1\right)^2 + \left(2\frac{5}{6}-3\right)^2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{6}$$ га тенг.

4- мисол. Олдинги мисолдаги учбурчак A учининг ички бурчагининг косинуси топилсин.

Ечиш. Учбурчак томонларининг узунликларини ҳисоблаймиз:

$$BC = a = \sqrt{1+4} = \sqrt{5};$$
$$CA = b = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$
$$AB = c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Энди A бурчак косинусини

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b\cdot c}$$

формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\cos A = \frac{2+5-5}{2\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

5- мисол. $A(1,3)$ нуқтага координата ўқларидаги проекциялари $x=3$ ва $y=4$ бўлган куч таъсир этади. Кучни тасвирловчи $\overline{AB}$ йўналган кесманинг охирги B учи ва кучнинг миқдори аниқлансин.

Ечиш. $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталарни туташтирувчи $\overline{AB}$ йўналган кесманинг координата ўқларидаги проекциялари

$$\text{пр}_x \overline{AB} = X = x_2 - x_1,$$
$$\text{пр}_y \overline{AB} = Y = y_2 - y_1$$

эканлигини кўриш қийин эмас (координаталар системасида буни тасвир этишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз).

Бизнинг мисолда:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 3. \quad X = 3,\ Y = 4.$$

Шунинг учун

$$x_2 = x_1 + X = 1 + 3 = 4;$$
$$y_2 = y_1 + Y = 3 + 4 = 7.$$

Демак, кучнинг охирги учи $B(4,7)$ нуқтада экан. Кучнинг миқдори бу кучни тасвирловчи йўналган кесманинг узунлиги билан аниқланади. Шунинг учун:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = 5.$$

7- §. КЕСМАНИ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ

Текисликда икки A, B нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталардан тўғри чизиқ ўтказиб унда мусбат йўналишни аниқласак, ўқ ҳосил бўлади (12- чизма). Бу ўқда B нуқта билан устма-уст тушмайдиган яна битта C нуқта оламиз.

Агар $\overline{AC}$ йўналган кесма миқдорининг[1] $\overline{CB}$ йўналган кесма миқдорига нисбати λ га тенг (λ — сон) бўлса, яъни:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda, \qquad (*)$$

C нуқта AB йўналган кесмани λ нисбатда бўлади дейилади.

C нуқта A ва B нуқталарнинг орасида ёки A нуқтадан чапда B нуқтадан ўнгда ётиши мумкин. Агар C нуқта A ва B нуқталарнинг орасида ётса, AC ва BC миқдорларнинг ишоралари бир хил бўлиб, λ мусбат сон бўлади. Агар C нуқта A ва B нуқталарнинг ташқарисида ётса (12- чизмада A нуқтадан чапда ёки B нуқтадан ўнгда), $\overline{AC}$ ва $\overline{CB}$ йўналган кесмаларнинг ишоралари турлича, шунинг учун λ манфий ишорали

---

[1] „Алгебраик миқдор“ дейиш ўрнига қисқача „миқдор“ термини ишлатилади.

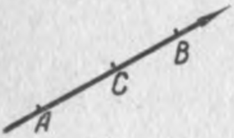
булади. Агар C нуқта A нуқта билан устма-уст тушса, $AC=0$, демак, $\lambda=0$; агар C нуқта B нуқтага яқинлашиб келса, CB миқдор нолга яқинлашиб боради ва (*) тенгликдаги λ ўса боради, аммо C нуқта билан B нуқта устма-уст тушмаслиги лозим, чунки бу ҳолда $CB=0$ булиб (*) тенглик маъносини йўқотади.

Шундай қилиб, C нуқтанинг туғри чизиқдаги турли ҳолатига λ нинг аниқ қийматлари мос келади (бунда C нуқта шартга кура B билан устма-уст тушмаслиги керак).

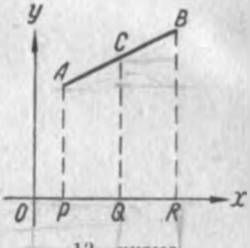
Энди Декарт системасида $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ нуқталар берилган булиб, бу нуқталар орасидаги кесмани берилган λ нисбатда булиш талаб қилинади. Масаланинг талабига кура биз шундай $C(x,y)$ нуқта топишимиз керакки,

$$\frac{AC}{CB}=\lambda \tag{1}$$

тенглик ўринли булсин.



12- чизма.



13- чизма.

Координаталар системасини олиб, унда бу нуқталарни ясаймиз (13- чизма): $OP=x_1$, $OQ=x$, $OR=x_2$, $PA=y_1$; $QC=y$, $RB=y_2$ булсин. Параллел туғри чизиқлар орасидаги кесмалар ўзаро пропорционал булиши элементар геометриядан маълум. Бу фикрни йуналган кесмалар учун

$$\frac{AC}{CB}=\frac{PQ}{QR}$$

шаклда ёзиш мумкин, чунки C нуқта AB кесманинг ичида ёки ташқарисида булганда унга мос Q нуқта PR кесманинг ичида ёки ташқарисида булади ва шунинг учун тенгликнинг иккала томонининг ишораси бир хил булиши юқорида баён қилинган фикрлардан келиб чиқади. Демак, (1) тенгликка мувофиқ:

$$\frac{PQ}{QR}=\lambda. \tag{2}$$

Аммо 4- параграфдаги (1) формулага биноан

$$PQ=x-x_1,$$
$$QR=x_2-x$$

эканини топамиз. Буларни (2) тенгликка қўйсак,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \tag{3}$$

тенглама ҳосил бўлади.

P, *Q*, *R* нуқталар *A*, *C*, *B* нуқталарнинг *Ox* ўқдаги проекцияларидир. Агар *A*, *C*, *B* нуқталарнинг *Oy* ўқдаги проекцияларини олиб (3) тенгламани келтириб чиқаргандагидек фикр юритилса,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \tag{4}$$

тенглама ҳосил бўлади. (3) ва (4) тенгламалар системасини ечиб

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

эканини топамиз. Булар изланаётган *C* нуқтанинг координаталаридир.

Агар $AC = CB$ бўлса, *C* нуқта *A* билан *B* нуқталар орасидаги кесмани тенг иккига бўлади. Бу ҳолда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

бўлиб, (5) формула

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

кўринишга келади. Бу формулалар берилган кесманинг ўртаси координаталарини топиш формуласидир. *Берилган кесма ўртасининг координаталари шу кесма учлари мос координаталари йиғиндисининг ярмига тенг бўлиши* (6) тенгликлардан кўриниб турибди. (5) формулаларда $\lambda \neq -1$ бўлиши керак, чунки $\lambda = -1$ бўлганда формула маъносини йўқотади.

1- мисол. *MN* кесма *M* дан *N* га томон йўналишда *Q*(2,3) нуқтада 3:4 нисбатда бўлинади. Агар *M* нуқтанинг координаталари (4,2) бўлса, *N* нуқтанинг координаталари қандай бўлади?

Ечиш. Масалани ечиш учун (5) формуладан фойдаланамиз. Масаланинг шартига кўра $\lambda = \frac{3}{4}$; *M* нуқта кесманинг боши бўлгани учун

$$x_1 = 4, \ y_1 = 2;$$

Q нуқта кесмани λ нисбатда бўлувчи нуқта бўлгани учун

$$x = 2, \ y = 3.$$

Демак, (5) формулага кўра

$$2 = \frac{4+\frac{3}{4}x_2}{1+\frac{3}{4}}; \quad 3 = \frac{2+\frac{3}{4}y_2}{1+\frac{3}{4}}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} 14 &= 16 + 3x_2, \\ 21 &= 8 + 3y_2. \end{aligned}\right\}$$

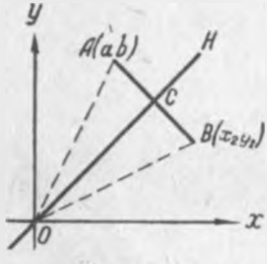
Бу системани ечсак:

$$x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$y_2 = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб, кесманинг охири $B\left(-\frac{2}{3}, \ 4\frac{1}{3}\right)$ нуқтада экан.

2- мисол. $A(a, b)$ нуқта берилган. A нуқтага биринчи координат бурчаги биссектрисасига нисбатан симметрик бўлган B нуқта топилсин.



14 -чизма.

Ечиш. Масалани геометрик тасвирлаш учун 14- чизмада $A(a, b)$ нуқтани ихтиёрий ясаймиз. OH биссектрисани ўтказиб, бунга нисбатан A нуқтага симметрик бўлган $B(x_2, y_2)$ нуқтани ясаймиз (A нуқтадан OH га AC перпендикулярни тушириб, уни AC кесма узунлиги қадар давом эттириб, $B(x_2, y_2)$ нуқтани топамиз). Бу ҳолда C нуқта AB кесмани тенг иккига бўлувчи нуқта бўлади. C нуқтанинг координаталари (x, y) бўлсин. C нуқта биссектрисада ётгани учун

$$x = y \text{ бўлади.} \tag{7}$$

Кесманинг ўртасини топиш формуласига кўра

$$x = \frac{a+x_2}{2}, \quad y = \frac{b+y_2}{2}$$

ёки (7) тенгламага асосан

$$a + x_2 = b + y_2; \tag{8}$$

координаталар боши AB нинг ўртасидан ўтказилган перпендикулярда ётади. Шунинг учун

$$OA = OB.$$

Координаталар бошидан берилган нуқтагача бўлган масофани топиш формуласи бўлган [6- §, (5)] формулага кўра:

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$OB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Демак,

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак,

$$x_2^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$$

ёки

$$x_2^2 - a^2 = b^2 - y_2^2$$

ёки

$$(x_2 - a)(x_2 + a) = (b - y_2)(b + y_2) \qquad (9)$$

эканини кўрамиз. (8) га асосан $a + x_2 = b + y_2$; аммо $a + x_2 \neq 0$, $b + y_2 \neq 0$, акс ҳолда A ва B нуқталар координаталар бошига нисбатан бир-бири билан симметрик нуқталар булиб қоларди, ваҳоланки бу нуқталар биссектрисага нисбатан симметрикдир. (9) тенгликнинг иккала томонини $a + x_2$ га қисқартириб,

$$x_2 - a = b - y_2 \qquad (10)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (8) ва (10) тенгламаларни биргаликда ечиб

$$x_2 = b, \ y_2 = a$$

эканини топамиз. Демак, $B(b;\ a)$.

3- мисол. Учлари $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Ечиш. 1-усул. Учбурчакнинг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган нуқтада бўлади. Медианалар кесишган нуқтаси уни 1 : 2 нисбатда бўлиши маълум.

Учбурчакнинг C учидан AB томонга ўтказилган медианаси AB нинг ўртасидаги нуқтада кесишади. Бу нуқтани $D(x, y)$ билан белгилаймиз ва D нинг x ва y координаталарини (6) формулага биноан топамиз:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0,$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0.$$

Демак, D координаталар бошида ётар экан.

Энди учбурчакнинг оғирлик марказини топамиз. Қаралаётган мисолда

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0\ (D \text{ нуқтанинг координаталари}),$$
$$x_2 = 4,\ y_2 = 3\ (C \text{ нуқтанинг координаталари}),$$
$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Шунинг учун (5) формулага кўра оғирлик марказининг x, y координаталари қуйидагига тенг:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{3} = 1\frac{1}{3},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Демак, учбурчакнинг оғирлик маркази $\left(1\frac{1}{3},\ 1\right)$ нуқтада экан.

2- усул. Юқорида айтиб ўтилганидек учбурчакнинг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган нуқтада бўлгани учун учлари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтани топамиз. Бунинг учун дастлаб BC томонининг ўртасини аниқлаймиз:

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2},\ y = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

$N(\bar{x}, \bar{y})$ нуқта ABC учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\frac{AN}{MD} = 2,$$

демак,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + 2x}{1 + 2},\ \bar{y} = \frac{y_1 + 2y}{1 + 2}$$

ёки

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Бизнинг мисолда $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4.$

$$y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = 3.$$

Демак,

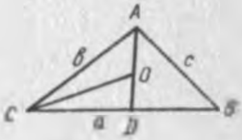
$$\bar{x} = \frac{-2 + 2 + 4}{3} = 1\frac{1}{3},\ \bar{y} = \frac{1 - 1 + 3}{3} = 1.$$

Бундан яна учбурчакнинг оғирлик маркази $\left(1\frac{1}{3},\ 1\right)$ нуқтада деган натижа келиб чиқади.

4- мисол. Учлари $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ ва $C(x_3,\ y_3)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази топилсин.

Ечиш. Учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази биссектрисаларнинг кесишган нуқтаси бўлади.

$D(x',\ y')$ нуқта A ички бурчак биссектрисаси билан CB томоннинг кесишган нуқтаси, a, b, c лар учбурчакнинг томонлари бўлсин. У ҳолда 15- чизмага кўра:



15- чизма.

$$\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{AB}$$

ёки

$$\frac{CD}{DB}=\frac{b}{c},\ (\alpha)$$

яъни D нуқта CB кесмани $\lambda=\frac{b}{c}$ нисбатда бўлади. Демак,

$$x'=\frac{x_3+\frac{b}{c}x_2}{1+\frac{b}{c}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c}.$$

Шунга ўхшаш

$$y'=\frac{by_2+cy_3}{b+c}.$$

$O(\overline{x},\ \overline{y})$ нуқта ABC учбурчак биссектрисаларининг кесишган нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{DO}{OA}=\frac{CD}{CA}.\ (\beta)$$

(α) пропорциядан ҳосила пропорция тузиш йўли билан

$$CD=\frac{ab}{b+c}$$

эканини топамиз. Буни (β) тенгликка қўйиб,

$$\frac{DO}{OA}=\frac{a}{b+c}$$

ни топамиз, яъни $O(\overline{x},\ \overline{y})$ нуқта DA кесмани $\frac{a}{b+c}$ нисбатда бўлади. Шунинг учун

$$\overline{x}=\frac{x'+\frac{a}{b+c}x_1}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{\frac{bx_2+cx_3}{b+c}+\frac{a}{b+c}x_1}{1+\frac{a}{b+c}}$$

ёки

$$\bar{x} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}.$$

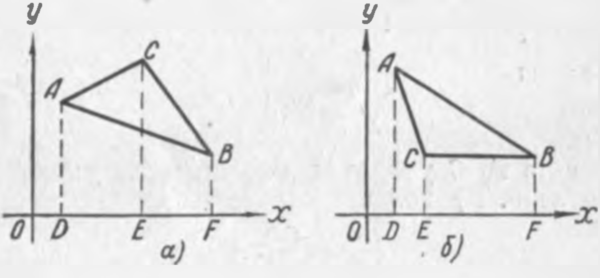
Шунга ўхшаш

$$\bar{y} = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}.$$

Бу формулалардаги учбурчак томонларининг a, b, c узунликлари учбурчак учларининг координаталари орқали икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи орқали аниқланади.

8- §. УЧБУРЧАКНИНГ ЮЗИ

Учбурчак учларининг координаталари берилган ҳолда унинг юзини бу координаталар орқали ифода этиш масаласини қараймиз. Координаталар системасига нисбатан учбурчак учларининг координаталари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ бўлсин (16- *а* чизма). A, B ва C нуқталарда Ox ўққа AD, BF, CE перпендикулярларни туширамиз. Натижада $ADEC$, $CEFB$ ва $ADFB$ трапециялар ҳосил бўлади. Бу трапециялар юзларини мос тартибда S_1, S_2 ва S_3 билан белгилаймиз. ABC учбурчак юзини эса s билан белгилаймиз. У ҳолда ABC учбурчак 16- *а* чизмадаги каби жойлашган бўлса, $s = s_1 + s_2 - s_3$, 16- *б* чизмадаги каби жойлашган бўлса, $s = s_3 - (s_1 + s_2) = -(s_1 + s_2 - s_3)$ бўлади. Аммо геометрик шаклнинг юзи ҳамма вақт мусбат сон бўлгани учун



16 -чизма.

$$s = |s_1 + s_2 - s_3|; \tag{1}$$

ясашга кўра

$$OD = x_1,\ DA = y_1;\ OF = x_2,\ FB = y_2;$$
$$OE = x_3;\ EC = y_3.$$

Шунинг учун

$$s_1 = \frac{DA + EC}{2} DE = \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1);$$
$$s_2 = \frac{EC + FB}{2} EF = \frac{y_3 + y_2}{2} (x_2 - x_3);$$
$$s_3 = \frac{DA + FB}{2} DF = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1).$$

s_1, s_2 ва s_3 нинг топилган бу қийматларини (1) тенгликка қўйиб

$$s = \frac{1}{2} |(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - $$
$$- (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)|$$

эканини топамиз. Ўнг томондаги қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни йиғиб, ҳадларни x нинг ўсиб борувчи индекслари тартибида ёзсак,

$$s = \frac{1}{2} |x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)| \qquad (2)$$

ёки детерминант тушунчасидан (VI боб, 37- §) фойдаланиб

$$s = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \right|$$

формулани ҳосил қиламиз.

1- мисол. Учбурчакнинг юзи 5 *кв. бирлик* бўлиб, унинг иккита учи A (2; 3) ва B (6; 2) нуқтада, учинчи C учининг абсциссаси 4 га тенг, C учининг ординатаси топилсин ва бу учбурчак ясалсин (17- чизма).

Ечиш. Бу мисолда:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4,$$
$$y_1 = 3,\ y_2 = 2,\ y_3 = y,$$

$s = 5$ *кв. бирлик*. Учбурчак юзи учун топилган (2) формулага биноан[1]:

$$5 = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 - 4 & 6 - 4 \\ 3 - y & 2 - y \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} [-2(2 - y) - 2(3 - y)]$$

ёки

$$\pm (2y - 5) = 5$$

бўлади. Бу тенгламанинг чап томонида плюс ишора олинса:

$$2y - 5 = 5,$$

---

[1] C учнинг турли жойланишини эътиборга олиб формула ± ишора билан олинди.

бундан

$$y_1 = 5;$$

минус ишора олинса,

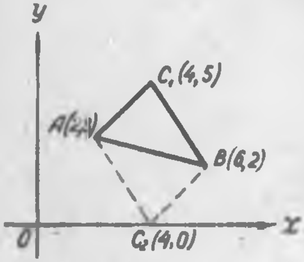
$$-2y + 5 = 5$$

ёки

$$y_2 = 0$$

булади. Шундай қилиб, C нуқтанинг изланаётган ординатаси s юзнинг ишораси ± булгани учун икки қийматли булди.

Ҳосил булган учбурчаклар 17- чизмада тасвирланган.



17- чизма.

2- мисол. Бир жинсли турт бурчакли пластинканинг туртта учи мос равишда $A(2, 1)$; $B(5, 3)$; $C(-1, 7)$ ва $D(-7, 5)$ нуқталарга жойлашган. Унинг оғирлик маркази координаталари аниқлансин.

Ечиш. AC диагонал утказиб, берилган туртбурчакни иккита ABC ва ACD учбурчакка ажратамиз. Бу учбурчакларнинг оғирлик марказларини топамиз. Қаралаётган учбурчакларнинг оғирлик марказлари мос равишда $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ва $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ нуқталарга жойлашган булсин.

Бу ҳолда (7- §, 4- мисолга қаранг):

$$\bar{x}_1 = \frac{2+5-1}{3} = 2, \ \bar{y}_1 = \frac{1+3+7}{3} = 3\frac{2}{3}.$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2-1-7}{3} = -2, \ \bar{y}_2 = \frac{1+7+5}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

ABC ва ACD учбурчакларнинг юзлари мос равишда S_1 ва S_2 булсин. Бу ҳолда (2) формулага мувофиқ:

$$S_1 = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2+1 & 5+1 \\ 1-7 & 3-7 \end{vmatrix} \right| = 12 \text{ кв. бирлик},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2+7 & -1+7 \\ 1-5 & 7-5 \end{vmatrix} \right| = 21 \text{ кв. бирлик}.$$

Пластинканинг изланаётган оғирлик марказини $(\bar{x}, \bar{y})$ нуқтада десак, бу нуқта $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ва $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ нуқталар орасидаги кесмани $\frac{S_2}{S_1}$ нисбатда булувчи нуқта булади (яъни бу нуқта, кесмани унинг учига тупланган массаларига тескари пропорционал булган қисмларга булади). Демак,

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \frac{S_2}{S_1}\bar{x}_2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} = \frac{S_1\bar{x}_1 + S_2\bar{x}_2}{S_1 + S_2}$$

ёки

$$\bar{x} = \frac{12\cdot 2 + 19(-2)}{12+19} = \frac{-14}{31}.$$

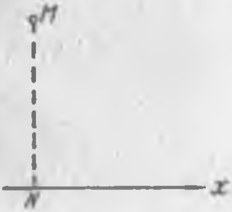
Шунга ўхшаш

$$\bar{y} = \frac{12\cdot\frac{11}{3} + 19\cdot\frac{13}{3}}{12+19} = 2\,\frac{61}{93}.$$

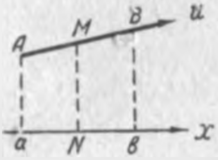
9-§. ПРОЕКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ҚОИДАЛАРИ

М нуқтанинг бирор x ўққа *проекцияси* деб M нуқтадан бу ўққа туширилган MN перпендикулярнинг N асосига айтилади (18- чизма).

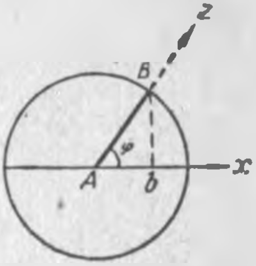
Агар M нуқта бирор u ўқ йўналишида A дан B гача ҳаракат қилиб борса, у йўналган AB кесмани чизади (19- чизма); M нуқтанинг x лар ўқидаги N проекцияси эса ab йўналган кесмани чизади. $\overline{ab}$ кесма $\overline{AB}$ кесманинг x лар ўқидаги *геометрик проекцияси* дейилади.



18- чизма.



19- чизма.



20- чизма.

Аналитик геометриянинг кўп масалаларида геометрик проекциянинг *миқдори* қаралади. Шунинг учун биз бундан кейин AB кесманинг бирор x лар ўқидаги проекцияси деб унинг ab геометрик проекцияси миқдорини тушунишни шартлашиб оламиз. Бу ҳолда йўналган кесманинг бирор ўқдаги проекцияси мусбат, манфий ёки нолга тенг бўлган сон билан тасвирланади.

Йўналган $\overline{AB}$ кесманинг x лар ўқидаги проекциясини $\text{пр}_x\,\overline{AB}$ ёки $\text{пр}\,\overline{AB}$ билан белгилаймиз.

Энди проекциялар назариясининг асосий теоремасини келтирамиз.

Теорема. *Йўналган* $\overline{AB}$ *кесманинг бирор* x *лар ўқидаги проекцияси бу кесма* AB *узунлиги билан проекция ўқи ҳамда кесма йўналиши орасидаги* φ *бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг*, яъни

$$\text{пр}\,\overline{AB} = |AB|\cos\varphi. \tag{1}$$

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун x лар ўқини A нуқтадан ўтади деб фараз қиламиз. Бу фаразия умумийликни бузмайди, чунки проекция ўзига параллел ҳолда бошқа жойга кўчирилса, AB кесманинг проекцияси ва ўқ билан кесма орасидаги бурчак ўзгармайди.

Энди маркази A нуқтада бўлиб, радиуси AB кесма узунлигига тенг бўлган айлана чизамиз (20- чизма). Бу ҳолда чизмадан

$$\cos \varphi = \frac{AB}{|AB|}, \ Ab = \text{пр}_x \overline{AB}$$

экани кўринади. Шунинг учун

$$\text{пр}_x \overline{AB} = |AB| \cos \varphi.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Йўналган кесманинг миқдори ҳақида сўзлаганимизда, бу кесма бирор ўқда ётади деб ҳисоблаб, унинг шу ўқ йўналишига нисбатан миқдорини аниқлаймиз деган эдик. Проекциялар назариясининг асосий теоремасини йўналган кесма миқдори билан ҳам бериш мумкин.

AB йўналган кесманинг x ўқидаги проекцияси бу кесма миқдори билан проекция ўқи ҳамда кесма ётган l ўқ орасидаси φ бурчак косинуси кўпайтмасига тенг (20- чизма), яъни

$$\text{пр}_x \overline{AB} = AB \cos \varphi. \qquad (2)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар AB йўналган кесманинг йўналиши l ўқнинг мусбат йўналиши билан бир хил бўлса, (2) тенгликдаги AB йўналган кесманинг AB миқдори плюс ишорали бўлиб кесманинг узунлигига тенг; x ўқ билан кесма орасидаги бурчак шу ўқ билан l ўқ орасидаги бурчакнинг ўзи бўлади. Шунинг учун (1) тенглик бу ҳолда (2) тенглик шаклида ёзилиши мумкин. Агар $\overline{AB}$ кесманинг йўналиши l ўқ йўналишига қарама-қарши бўлса (21- чизма), у ҳолда x проекция ўқи билан AB йўналган кесма орасидаги бурчак $\pi + \varphi$ га тенг, шу сабабли (1) тенглик

$$\text{пр}_x \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos (\pi + \varphi)$$

ёки

$$\text{пр}_x \overline{AB} = -|\overline{AB}| \cos \varphi$$

кўринишни олади. l ўқ билан $\overline{AB}$ кесманинг йўналиши қарама-қарши бўлгани учун

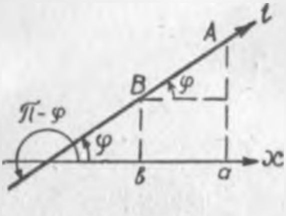
$$-|\overline{AB}| = AB.$$

Демак,

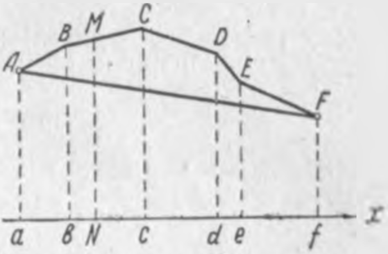
$$\text{пр}_x \overline{AB} = AB \cos \varphi.$$

Шундай қилиб, (2) тенгликнинг тўғри экани равшан бўлди. Энди $ABCDEF$ ихтиёрий синиқ чизиқнинг x ўқидаги проекцияси нимага тенг бўлишини қараймиз.

Бирор M нуқта A нуқтадан ҳаракат қила бошлаб, AB, BC, CD, DE ва EF кесмаларни кетма-кет босиб ўтиб F нуқтага келган бўлсин (22- чизма). Бу ҳолда синиқ чизиқнинг ва уни ташкил қилувчи кесмаларнинг йўналиши M нуқта ҳаракатининг йўналиши билан аниқланади.



21 -чизма.



22 -чизма.

Ташкил қилувчилари йўналган кесмалардан иборат бўлган синиқ чизиқни йўналган синиқ чизиқ деб атаймиз. A, B, C, D, E, F нуқталарни кетма-кет туташтирувчи йўналган синиқ чизиқни $\overline{ABCDEF}$ билан белгилаймиз ва англашилмовчилик бўлмаса, қисқалик учун $\overline{ABCDEF}$ синиқ чизиқ деб юритамиз.

M нуқта $ABCDEP$ синиқ чизиқ бўйича ҳаракат қилганида унинг x ўқидаги N проекцияси x ўқ бўйича a нуқтадан f нуқтага келади ва $\overline{af}$ кесмани чизади. Йўналган $\overline{af}$ кесма $\overline{ABCDEF}$ синиқ чизиқнинг x ўқидаги *геометрик проекцияси* дейилади.

Йўналган сичиқ чизиқ геометрик проекциясининг миқдорини у чизиқнинг проекцияси дейилади.

Бу таърифдан йўналган синиқ чизиқнинг проекцияси сон экани кўринади. af миқдор $ABCDEF$ синиқ чизиқнинг проекцияси экани

$$\text{пр}\,(\overline{ABCDEF}) = af \tag{3}$$

тенглик билан тасвирланади.

af йўналган кесма миқдори бўлгани учун 2- параграфдаги асосий айниятга биноан

$$af = ab + bc + cd + de + ef \tag{4}$$

ёки кесманинг ўқдаги проекцияси таърифини ҳамда (3) тенгликни эътиборга олсак, (4) тенгликни

$$\text{пр}(\overline{ABCDEF}) = \text{пр}\ \overline{AB} + \text{пр}\,\overline{BC} + \text{пр}\,\overline{CD} + \text{пр}\,\overline{DE} + \text{пр}\,\overline{EF}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, *йўналган синиқ чизиқнинг бирор ўқдаги проекцияси бу чизиқни ташкил қилувчи бўғин йўналган кесмаларнинг шу ўққа нисбатан олинган проекциялари йиғиндисига тенг.*

Агар $\overline{ABCDEF}$ синиқ чизиқнинг бошланғич A нуқтаси билан унинг охирги F нуқтасини туташтирсак, AF йўналган кесма ҳосил бўлади. Бу кесма қаралаётган синиқ чизиқнинг *ёпувчиси* дейилади.

22- чизмадан $\overline{AF}$ ёпувчининг x лар ўқидаги проекцияси af эканини кўриш қийин эмас, демак,

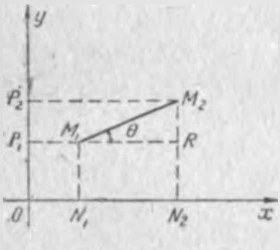
$$\text{пр} = |\overline{AF}| = af.$$

Бу ҳолда (3) тенглик

$$\text{пр}(\overline{ABCDEF}) = \text{пр}(\overline{AF})$$

кўринишни олади, яъни йўналган синиқ чизиқнинг бирор ўқдаги проекцияси шу синиқ чизиқ ёпувчисининг қаралаётган ўқдаги проекциясига тенг.

Агар синиқ чизиқ ёпиқ бўлса, яъни бу синиқ чизиқнинг бошланғич ва охирги нуқталари устма-уст тушган бўлса, унинг ўқдаги проекцияси нолга тенг экани равшан.



23- чизма.

1- мисол. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар берилган. $\overline{M_1M_2}$ йўналган кесманинг координата ўқларидаги проекциялари ҳамда абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан $\overline{M_1M_2}$ кесма орасидаги θ бурчак аниқлансин. (θ бурчак кесманинг қутб бурчаги дейилади.)

Ечиш. $\overline{M_1M_2}$ кесманинг Ox ва Oy координата ўқларидаги проекцияларини мос равишда X ва Y лар билан белгилаймиз (23- чизма).

У ҳолда

$$X = N_1N_2;$$
$$Y = P_1P_2,$$

ёки

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1$$

яъни йўналган кесманинг координата ўқларидаги проекцияларини топиш учун мос равишда унинг охирги учи координаталаридан бошланғич учи координаталарини айириш керак.

Энди тўғри бурчакли M_1RM_2 учбурчакни қараймиз. Бу учбурчакдан:

$$d = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$X = d\cos\theta \text{ ёки } \cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$Y = d\sin\theta \text{ ёки } \sin\theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Кейинги тенгликлардан:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Y}{X} \text{ ёки } \theta = \operatorname{Arctg}\frac{Y}{X}\,(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

2- мисол. Кесманинг узунлиги $d = 12$, унинг қутб бурчаги $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Кесманинг координата ўқларидаги проекциялари топилсин.

Ечиш. 1- мисолдаги

$$X = d\cos\theta,\ Y = d\sin\theta$$

тенгликларни оламиз. Бизнинг мисолда $d = 12, \theta = \frac{2}{3}\pi$ бўлгани сабабли

$$X = 12\cos\frac{2}{3}\pi = 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6,$$

$$Y = 12\sin\frac{2}{3}\pi = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

3- мисол. $ABCDEF$ — томони a га тенг бўлган мунтазам олтибурчак. AE, EF ва FA томонларнинг AC томонга проекциялари ҳисоблансин ва $AEFA$ ёпиқ синиқ чизиқнинг AC томонга проекцияси нолга тенг экани кўрсатилсин.

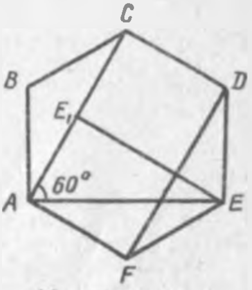
Ечиш. E нуқтадан AC диагоналга перпендикуляр ўтказамиз. Бу ҳолда

$$\text{пр}_{AC}(AE) = AE_1 = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{пр}_{AC}(EF) = -AE_1 = -\frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{пр}_{AC}(FA) = 0, \text{ чунки } \angle FAE_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{пр}_{AC}(AEFA) = \text{пр}_{AC}(AE) + \text{пр}_{AC}(EF) +$$
$$+ \text{пр}_{AC}(FA) = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2} + 0 = 0.$$



24 - чизма.

Машқлар

1. Қуйидаги нуқталарни ясанг:

$$A(5),\ B(2),\ C(-2),\ D\left(\frac{3}{2}\right),\ E\left(-\frac{3}{4}\right),\ F(\sqrt{2}),\ H(-\sqrt{3}).$$

2. Координаталари ушбу

$$1)\ |x| = 1;\ 2)\ |x-2| = 4;\ 3)\ |3+x| = 1$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини чизмада тасвирланг.

3. Координаталари ушбу

$$1)\ x > 0,\quad 2)\ x < 0,\quad 3)\ x-2 < 0,\quad 4)\ 3-x < 0,$$
$$5)\ 2x-3 > 0,\quad 6)\ 1 < x < 2,\quad 7)\ -1 < x < 3,$$
$$8)\ \frac{3-x}{x-2} < 1,\ 9)\ x^2-8x+15 > 0,\ 10)\ x^2-8x+15 < 0$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг жойлашишини геометрик тасвирланг.

4. Қуйидаги маълумотларга асосланиб, A нуқтанинг координатасини аниқланг:

1) $B(1)$ ва $AB = 3$, 2) $B(2)$ ва $AB = -5$,
3) $B(-3)$ ва $BA = 4$, 4) $B(10)$ ва $|AB| = 3$,
5) $B(-3)$ ва $BA = -2$, 6) $B(-4)$ ва $|AB| = 2$.

5. Учларининг координатлари билан берилган кесмаларнинг AB миқдори ва $|AB|$ узунлигини аниқланг.

1) $A(5)$ ва $B(13)$; 2) $A(2)$ ва $B(4)$; 3) $A(-1)$ ва $B(5)$;
4) $A(-3)$ ва $B(-2)$;
5) $A(2)$ ва $B(-2)$.

6. Ушбу

$$A(3,\ 4),\ B(-2,\ 5),\ C(-1,\ 1),\ D(2,\ -3),\ E(6,\ 0),$$
$$F(0,\ 3),\ H\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$$

нуқталарни ясанг.

7. 1) Ox, 2) Oy координата ўқларига ҳамда 3) координаталар бошига нисбатан $A(-2,\ 3)$ нуқтага симметрик бўлган нуқталарни топинг.

8. I ва II координат бурчаклар биссектрисаларига нисбатан $A(-3,\ 4)$ нуқтага симметрик бўлган нуқталарни топинг.

9. Ox ва Oy ўқларга ҳамда координаталар бошига нисбатан $A(a,\ b)$ нуқтага симметрик бўлган нуқталар топилсин.

10. I ва III координат бурчакларига нисбатан $A(a,\ b)$ нуқтага симметрик бўлган нуқта $B(b,\ a)$ эканини кўрсатинг.

11. Томонининг узунлиги 3 бирликка тенг бўлган квадрат берилган. Агар координата ўқлари квадратнинг параллел бўлмаган икки томони бўйича йўналган бўлса, унинг учларининг координаталари қандай бўлади?

12. Томони 1 бирликка тенг бўлган $ABCD$ квадратнинг AC диагоналини абсциссалар ўқи деб (A дан C га қараб йўналиш мусбат йўналиш деб олинган), BD диагоналини эса ординаталар ўқи деб олинган. Квадрат учларининг координаталарини топинг.

13. Учлари $A(2,\ 7)$, $B(5,\ 7)$, $C(5,\ 11)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчак периметрини топинг.

14. $A(-3,\ 2)$ нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилиб $B(5,\ -4)$ нуқтагача борган. Бу нуқта қанча йўл ўтганини топинг.

15. Учлари $A(3, 2)$, $B(5, 5)$, $C(1, 10)$ нуқталарда бўлган учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлишини исботланг.

16. Учлари $A(0, 3)$, $B(6, 10)$, $C(0, 14)$ нуқталарда бўлган ABC учбурчак берилган. Унинг AD медианасини тенг иккига бўлувчи нуқтани топинг.

17. ABC учбурчакнинг учлари: $A(2, 2)$, $B(-5, 1)$ ва $C(3, -5)$. Бу учбурчак медианалари узунликларини 0,1 гача аниқликда ҳисобланг ва медианаларининг кесишган нуқтасини топинг.

18. Учлари $A(-2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(8, 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг AC томони билан B ички бурчаги биссектрисасининг кесишган K нуқтасини топинг.

19. Учлари $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(3, 3)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази ва радиусини аниқланг.

20. $A(3, 4)$ ва $B(2, 5)$ материал нуқталарга мос равишда 2 *кг* ва 4 *кг* ли массалар тупланган. Бу массалар огирлик марказининг координаталарини топинг.

21. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ материал нуқталарга мос равишда m_1, m_2 ва m_3 массалар тупланган. Бу массалар оғирлик марказларининг координаталари топилсин.

22. $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n, y_n)$ нуқталарга мос равишда m_1, m_2, $\ldots$, m_n массалар тўпланган. Бу массаларнинг оғирлик марказларининг координатлари топилсин.

23. Учлари $A(3, 2)$, $B(6, 3)$, $C(4, 4)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини аниқланг

24. Учлари $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(3, 3)$, $D(0, 2)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг юзини топинг.

25. AB кесманинг узунлиги d ва бу кесма Ox ўққа φ бурчак остида қияланиши маълум; шу кесманинг Ox ўқдаги проекциясини топинг:

$$1)\ d = 5,\ \varphi = \frac{\pi}{6},\quad 2)\ d = 5,\ \varphi = \frac{\pi}{4},\quad 3)\ d = 5,\ \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$4)\ d = 7,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\quad 5)\ d = 8,\ \varphi = 0,\quad 6)\ d = 9,\ \varphi = \pi.$$

26. $P(2, -2)$, $Q(5, 1)$, $K(2, 2)$, $M(5, 3)$, $N(-1, 1)$, $R(2, 4)$ нуқталар берилган PQ, KM, NR, PR, NM ва NQ кесмаларнинг координата ўқларидаги проекцияларини топинг.

27. Кесманинг узунлиги 5 бирликка, унинг абсциссалар ўқидаги проекцияси 4 бирликка тенг. Агар кесма билан ординаталар ўқи а) ўткир бурчак, б) утмас бурчак ҳосил қилса, кесманинг бу ўқдаги проекциясини топинг.

Иккинчи боб

ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

10- §. ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ ТУШУНЧАСИ

Ўтган бобда текисликдаги нуқтанинг ўрни икки сон билан аниқланишини ва иккита сон Декарт координаталари системасига нисбатан текисликда бирор нуқтанинг ўрнини аниқлаб беришини кўрдик.

Энди чизиқнинг ҳар қандай нуқтасининг x, y координаталарини чизиқнинг умумий хоссаси асосида бир-бири билан боғлаб, унинг тенгламасини тузиш ва бу тенглама ёрдами билан чизиқнинг шаклини, текисликда жойланишини ва хоссаларини ўрганиш масаласини қараймиз.

Текисликда бирор AB чизиқ берилган бўлсин (25- чизма). Бу чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасининг xOy системага нисбатан координаталари (x, y) бўлсин: $x=OP$, $y=PM$. Агар M нуқта AB чизиқ бўйича ҳаракат қилиб, N ёки K нуқта ҳолатини олса, унинг координаталари қуйидагидек ўзгаради:

$$x = OQ, \; y = QN,$$

ёки

$$x = OR, \; y = RK,$$

бу ҳолда $x = OP$ бўлганда, $y = PM$ бўлиши шарт, чунки $x = OP$ бўлганда $y = PM'$ ёки $y = PM''$ бўлса, M' ва M'' нуқталар AB чизиқда ётмаган нуқталар бўлиши чизмадан кўриниб турибди.

Шундай қилиб, AB чизиқ нуқталарининг x, y координаталари ихтиёрий сонлар бўлмай, балки AB чизиқнинг геометрик хоссаларига боғлиқ бўлган маълум шартни қаноатлантириши керак экан.

Бу шарт одатда, x, y ўзгарувчилар орасидаги бирор тенглама билан ифода этилади.

Аналитик геометрияда чизиқ деб нимани айтилишини қараб чиқайлик.

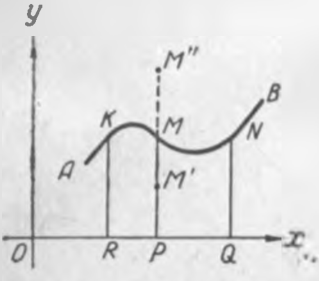
$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

x, y ўзгарувчиларни бир-бири билан боғловчи бирор тенглама бўлсин, дейлик. Бу тенглама ўзгарувчилардан бирини, масалан, y ни иккинчисининг функцияси сифатида аниқлайди, яъни (1) тенгламани y га нисбатан ечсак,

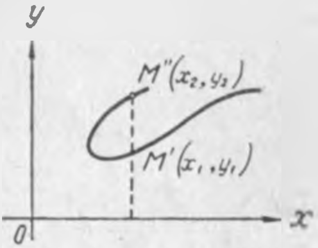
$$y = f(x), \qquad a < x < b \qquad (2)$$

тенглама ҳосил бўлади, бунда $f(x)$ билан x нинг функцияси белгиланган, x бирор (a, b) интервалда ўзгарганда $f(x)$ функция узлуксиз ўзгаради деб фараз қиламиз.

Ҳозирча $f(x)$ ни бир қийматли функция деб қараб, x ва y ларни xOy координаталар текислигидаги бирор M нуқтанинг координаталари деб фараз қилайлик. Бу ҳолда x нинг ҳар бир қиймати учун (2) тенглама y нинг ёлғиз битта қийматини аниқлайди.



25- чизма.



26- чизма.

Демак, x нинг ҳар бир қийматига текисликнинг координаталари x ва $y = f(x)$ бўлган ёлғиз биргина нуқтаси тўғри келади.

Агар x узлуксиз ўзгариб турли қийматлар олса, M нуқта xOy текисликда x ва y қийматларига қараб ўрнини ўзгартира боради ва бирор геометрик ўринни тасвир этади. Бу геометрик ўрин чизиқ деб аталади.

Биз $f(x)$ функцияни бир қийматли функция деб фараз қилган эдик. Бундай қилиш шарт эмас. $f(x)$ кўп қийматли функция бўлиши ҳам мумкин.

Агар $f(x)$ кўп қийматли функция бўлса, яъни x нинг ҳар бир қийматига y нинг бир неча $y_1, y_2, \ldots$ қийматлари тўғри келса, у ҳолда x нинг ҳар бир қийматига xOy текисликда M', M'',... нуқталар тўғри келади. Масалан, $f(x)$ функция икки қийматли функция бўлсин. Бу ҳолда x нинг ҳар бир x_1 қийматига y нинг $y_1 = f(x)$ ва $y_2 = f(x)$ қийматлари тўғри келиб, xOy текисликда x нинг бу қиймати билан иккита $M'(x_1, y_1)$ ва $M''(x_2, y_2)$ нуқта аниқланади (26- чизма). (a, b) интервалда x узлуксиз ўзгарганда M' ва M'' нуқталар ҳам ўринларини узлуксиз ўзгартиради ва чизиқ деб аталган геометрик урнини тасвирлайди.

Шундай қилиб, x ва y координаталари $F(x, y) = 0$ ёки $y = f(x)$ тенгламани қаноатлантирадиган текислик нуқталарининг геометрик ўрнини *чизиқ* деб атаймиз.

$F(x, y) = 0$ ёки $y = f(x)$ ни чизиқ тенгламаси деб атаймиз. x, y ни чизиқдаги нуқтанинг ўзгарувчи координаталари дейилади. Чизиқнинг таърифига қараганда (1) ёки (2) тенглама чизиқнинг тенгламаси бўлиши учун бу тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир жуфт (x, y) қиймат чизиқ нуқтасини тасвирлаши ва чизиқнинг ихтиёрий нуқтасининг координатлари (1) ёки (2) тенгламани қаноатлантириши керак.

Хулоса қилиб айтганда, чизиқ берилган бўлиб, унинг тенгламаси нима, деган саволга шундай жавоб берамиз: берилган чизиқнинг тенгламаси деб шундай $F(x, y) = 0$ тенгламага айтиладики, шу чизиққа қарашли ҳар бир нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради, бу чизиққа тегишли бўлмаган ҳеч бир нуқтанинг координаталари уни қаноатлантирмайди. Демак, чизиқнинг тенгламаси маълум бўлса, координаталари шу тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта шу чизиқда ётади.

Изоҳ. Чизиққа берилган бу таъриф жуда умумий таъриф. Чунки (1) тенглама билан аниқланадиган M', M'', ... нуқталар бир-бири билан боғланмаган геометрик нуқталар тўпламини бериши ҳам мумкин. Масалан,

$$1 + y^2 = \sin x$$

тенгламани координаталари

$$x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \ y = 0 \ (k = 0, + 1, \pm 2, \ldots)$$

бўлган нуқталар тўплами қаноатлантиради.

$$x^2 + y^2 = 0$$

тенгламани эса (0, 0) нуқтанинг координаталаригина қаноатлантиради. Демак, бу тенглама фақат биттагина нуқтани тасвирлайди.

$$(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$$

тенглама координаталари

$$(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$$

бўлган тўртта нуқтанигина тасвирлайди.

$$x^2 + y^2 + 3 = 0$$

тенгламани эса x ва y ўзгарувчиларнинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматлари қаноатлантирмайди, демак ҳеч қандай чизиқни тасвир этмайди.

Чизиққа берилган бу таърифни одатда тасаввур этиладиган чизиқ тушунчасига яқинлаштириб келтириш учун юқоридаги $F(x, y)$ ёки $f(x)$ функцияни баъзи бир шартларга бўйсундириш лозим. Бу шартлар функциянинг узлуксизлиги, унинг маълум тартибли ҳосилаларининг мавжуд бўлиши ва шунга ўхшашлардан иборат. Бу масалалар математик анализ курсида қаралади.

11- §. ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ ТУЗИШ МИСОЛЛАРИ

Текисликдаги ҳар бир чизиқни нуқталарнинг геометрик ўрни деб қараш мумкин. Бу таърифда, чизиқнинг ҳамма нуқталари учун умумий бўлган хоссалар бордир. Ана шу хоссаларни эътиборга олиб xOy системада чизиққа қарашли ҳар бир нуқтанинг x ва y координаталарини $F(x, y) = 0$ шаклдаги тенглама билан боғлаймиз ва бундан сўнг чизиқ хоссасини шу тенгламага асосланиб ўрганамиз. Аналитик геометриянинг асосий вазифаларидан бири ҳар бир чизиққа „тегишли“ тенгламалар мос келтиришдир. Мисоллар қарайлик.

1- мисол. *Ҳар бир M нуқтаси берилган C нуқтадан тенг узоқликда ётган текислик нуқталари геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.*

Ечиш. Масаланинг шартига кўра

$$CM = R. \tag{1}$$

Энди Декарт системасини оламиз. Бу системада M нуқтанинг координаталари (x, y), C нинг координаталари (a, b) бўлсин. Бу ҳолда икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига мувофиқ

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{*}$$

бўлади. (1) тенгламага CM нинг бу қийматини қўйсак ва ҳосил бўлган тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарсак

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу эса изланаётган айлананинг тенгламаси бўлади, чунки (2) тенглама айлананинг ихтиёрий M нуқтасининг x ва y координаталари орасидаги боғланишдир. Аксинча, агар $M(x, y)$ нуқтанинг x ва y координаталари (2) тенгламани қаноатлантирса,

$$CM = R$$

бўлади. Шу билан бирга, (*) тенгламани квадратга кўтарганда ҳосил бўлган (2) тенгламани қаралаётган айлана нуқталаридан бошқа нуқталар қаноатлантирмайди, яъни қўшимча нуқталар пайдо булмайди. Ҳақиқатан ҳам, (*) тенгламани квадратга кутарганда ҳосил булган (2) тенглама (*) тенглама билан

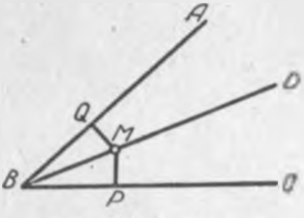
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=-R$$

тенгламанинг иккаласига эквивалент. Аммо кейинги тенгламанинг чап томони мусбат сон булиб, $R>0$ булгани учун бу тенгламанинг маъноси йуқ. Шундай қилиб, (*) тенгламанинг иккала томонини квадратга кутариш билан қаралаётган геометрик уринга янги нуқталар қушилмайди.

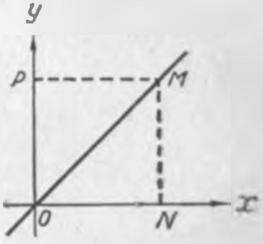
(2) тенглама маркази (a, b) нуқтада булиб, радиуси R га тенг *айлананинг каноник тенгламаси* дейилади.

2- мисол. Координата бурчаклари биссектрисаларининг тенгламалари тузилсин.

Ечиш. *ABC бурчакнинг биссектрисаси бу бурчак ичида ётувчи ва унинг AB ва BC томонларидан баравар узоқликдаги нуқталарнинг геометрик урнидир* (27- чизма).



27- чизма.



28- чизма.

Демак, BD тўғри чизиқ ABC бурчакнинг биссектрисаси булиб, M ундаги ихтиёрий нуқта, $MP \perp BC$ ва $MQ \perp AB$ булса,

$$PM = MQ$$

булади.

Биссектрисанинг бу таърифига асосланиб, I ва III координат бурчакларнинг биссектрисаси тенгламасини тузамиз (28- чизма).

Агар OM биринчи координат бурчагининг биссектрисаси булиб, $M(x, y)$ унинг ихтиёрий нуқтаси булса, биссектриса таърифига мувофиқ

$$NM = PN$$

ёки

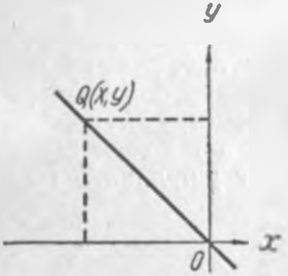
$$y = x. \qquad (3)$$

Агар $M(x, y)$ учинчи координата бурчагининг биссектрисасидаги ихтиёрий нуқта булса, ҳам x, ҳам y манфий сон булиб, уларнинг абсолют қийматлари бир-бирига тенг булади, биз яна (3) тенгламага келамиз.

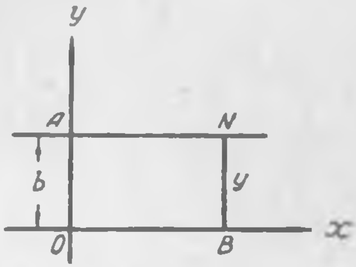
Демак, $M(x, y)$ I ва III координат бурчаклари биссектрисасининг ихтиёрий нуқтаси бўлса, унинг x, y координаталари (3) тенгликни қаноатлантиради. Аксинча, агар бирор $M(x, y)$ нуқтанинг x, y координаталари (3) тенгламани қанотлантирса, бу нуқта I ва III координат бурчаклари биссектрисасининг нуқтаси экани равшан.

Шундай қилиб, (3) тенглама I ва III координат бурчакларининг биссектрисаси тенгламасидир.

Энди II ва IV координат бурчаклари биссектрисасининг тенгламасини тузамиз (29- чизма). $Q(x, y)$ нуқта бу биссектрисанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқта II квадрантда бўлса ҳам, IV квадрантда бўлса ҳам унинг x ва y координаталари абсолют қийматлари бўйича бир-бирига тенг, ишоралари эса қарама-қаршидир, яъни иккала квадрант учун ҳам:



29 -чизма.



30 -чизма.

$$y = -x. \tag{4}$$

Аксинча, бирор $Q(x, y)$ нуқтанинг x, y координаталари (4) тенгламани қаноатлантирса, бу нуқта II ва IV координат бурчакларининг биссектрисасининг нуқтаси бўлиши равшан.

Шундай қилиб, (4) тенглама II ва IV координат бурчаклари биссектрисасининг тенгламаси экан.

3- мисол. Ҳар бир нуқтасидан $A(1, 2)$ нуқтагача масофа $B(-1, -2)$ нуқтагача масофадан икки марта кичик бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрни топилсин.

Ечиш. Агар изланаётган геометрик ўриннинг ихтиёрий нуқтасини $N(x, y)$ билан белгиласак, шартга кўра

$$2AN = BN \tag{5}$$

бўлади. Аммо

$$\left.\begin{aligned} AN &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \\ BN &= \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}. \end{aligned}\right\}$$

AN ва BN нинг бу ифодаларини (5) тенгликка қўйсак

$$2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб, соддалаштирамиз:

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=16\frac{5}{3}.$$

Бу эса маркази $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$ нуқтада, радиуси $\frac{4}{3}\sqrt{15}$ га тенг бўлган айлана тенгламасидир.

4- мисол. Абсциссалар ўқига параллел бўлиб, ундан b масофа узоқликда жойлашган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин (30- чизма).

Ечиш. Абсциссалар ўқига параллел бўлиб, ундан b масофа узоқликда бўлган AN тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси Ox ўқдан b масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрнидир. Бу геометрик ўрин ихтиёрий $N(x, y)$ нуқтасининг x абсциссаси ҳар қандай қиймат қабул қилганда ҳам унинг y ординатаси ҳамма вақт b га тенг:

$$y=b. \tag{6}$$

Аксинча, агар бирор $N(x, y)$ нуқтанинг абсциссаси ҳар қандай қиймат олганда ҳам унинг ординатаси (6) тенгликни қаноатлантирса, бу нуқта биз қараётган AN чизиқда ётади. Демак, (6) тенглама AN чизиқнинг тенгламасидир. Агар $b=0$ бўлса

$$y=0 \tag{7}$$

абсциссалар ўқининг тенгламаси бўлади, чунки бу ҳолда AN тўғри чизиқ Ox ўқ билан устма-уст тушади.

Агар b манфий сон бўлса, AN тўғри чизиқ абсциссалар ўқидан пастга жойлашади. 30- чизмада b мусбат сон бўлган ҳол кўрсатилган.

5- мисол. Ординаталар ўқига параллел бўлиб, ундан a масофада жойлашган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Ўтган мисолни ечишда юритилган фикрга ўхшаш йўл билан бу геометрик ўриннинг тенгламаси

$$x=a \tag{8}$$

эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. $a=0$ бўлганда

$$x=0. \tag{9}$$

Бу ординаталар ўқининг тенгламаси бўлади. $a>0$ бўлса, бу тўғри чизиқ ординаталар ўқидан ўнгда, $a<0$ бўлганда эса чапда жойлашган бўлади.

6- мисол. Текисликдаги шундай нуқталарнинг геометрик ўрнини топингки, бу нуқталарнинг ҳар биридан $x^2+y^2=4$ ва

$(x-2)^2+y^2=1$ айланаларга ўтказилган уринмаларнинг кесмалари ўзаро тенг бўлсин.

Ечиш. $M(x, y)$ — маркази $C(a, b)$ нуқтада бўлиб, радиуси r га тенг бўлган s айлана ташқарисида ётувчи нуқта бўлсин. M нуқтадан айланаларнинг бирига ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасини N билан белгилаймиз; бу ҳолда (чизма ясашни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз):

$$MN=\sqrt{MC^2-CN^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2}.$$

Бу тенгликдан, айлана ташқарисидаги $M(x, y)$ нуқтадан айланага ўтказилган уринма кесмасининг узунлиги айлананинг

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

каноник тенгламаси чап томонига $M(x, y)$ нуқтанинг x ва y координаталарини қўйишдан чиққан натижанинг квадрат илдизига тенг эканлигини кўрамиз. MN_1 ва MN_2 лар мос равишда $M(x, y)$ нуқтадан берилган айланаларга ўтказилган уринмалар узунликлари бўлсин. Бу ҳолда

$$MN_1^2=x^2+y^2-4 \text{ ва } MN_2^2=(x-2)^2+y^2-1.$$

Агар $M(x, y)$ қаралаётган геометрик ўринга тегишли нуқта бўлса,

$$MN_1=MN_2,$$

ёки

$$\sqrt{x^2+y^2-4}=\sqrt{(x-2)^2+y^2-1}.$$

Бу тенглама изланаётган геометрик ўриннинг тенгламасидир.

Тенгламани соддароқ кўринишга келтириш мақсадида унинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$x^2+y^2-4=(x-2)^2+y^2-1$$

ёки

$$x=\frac{7}{4}.$$

Бу — Oy ўққа параллел бўлиб, ундан $+\frac{7}{4}$ бирлик масофада ўтадиган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

Берилган айланаларнинг тенгламаларини биргаликда ечиб, уларнинг кесишиш нуқталари

$$A\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \text{ ва } B\left(\frac{7}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

эканини топамиз.

Демак,

$$x=\frac{7}{4}$$

тўғри чизиқдаги нуқтанинг ординатаси

$$|y| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

га тенг бўлса, бу нуқта берилган айланаларнинг ҳам умумий нуқтаси эканлиги равшан. Шунинг учун $x = \frac{7}{4}$ тўғри чизиқда $|y| < \frac{\sqrt{15}}{4}$ бўлса, тўғри чизиқнинг бундай нуқталари айланаларнинг ичида ётган нуқталар бўлади. Бундай нуқталардан айланаларга уринмалар ўтказиб бўлмайди. Шунинг учун, изланаётган геометрик ўрин $x = \frac{7}{4}$, $|y| > \frac{\sqrt{15}}{4}$ шартлар билан аниқланади. Демак, изланаётган геометрик ўрин учлари $A\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ва $B\left(\frac{7}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ нуқталарда бўлиб, ординаталар ўқига параллел бўлган ярим тўғри чизиқлардан иборатдир.

12-§. ЧИЗИҚНИ БЕРИЛГАН ТЕНГЛАМАСИГА КУРА ЯСАШ

Ўтган параграфда чизиқ тенгламасини тузиш масаласини кўрдик. Энди чизиқнинг

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

тенгламасига кўра уни ясаш масаласини қараймиз.

x, y координаталарини боғловчи бирор тенгламанинг текисликда қандай чизиқни тасвир этишини билиш учун чизиқни шу тенгламага асосланиб ясаш керак. Текисликдаги нуқта эса ўзининг (x, y) координаталари билан аниқланади. Шунинг учун (1) тенгламадаги x га $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ қийматларни берсак

$$F(x_1, y) = 0,\ F_1(x_2, y) = 0, \ldots F(x_n, y) = 0, \ldots \tag{2}$$

тенгламалар ҳосил булади. Бу тенгламалардан x нинг $x_1, x_2, \ldots x_n$, қийматларига мсс бўлган y нинг $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ қийматларини топа оламиз[1], натижада координаталари (1) тенгламани қаноатлантирувчи кетма-кет

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots \tag{3}$$

нуқталарни топамиз. Бу нуқталарни координаталар системасида ясаб, уларни ўзаро туташ чизиқ билан бирлаштирсак, (1) тенгламани тасвир этувчи чизиқ ҳосил булади. Тўғрироғи (1) тенглама билан тасвирланувчи чизиқнинг тақрибий тасвири ҳосил бўлади. Бу тақрибий тасвир амалда ишлатиш учун етарлидир.

---

[1] (2) тенгламаларнинг ҳар биридан y учун бир неча қийматлар келиб чиқиши мумкин. Аммо бу ҳол масаланинг моҳиятини ўзгартирмайди.

1- мисол. $y - x^3 = 0$ тенглама тасвирлайдиган чизиқ ясалсин.

Ясаш. Тенгламадаги x га... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... қийматларни бериб, y учун қуйидаги қийматларни топамиз. Буни жадвал шаклида ёзамиз:

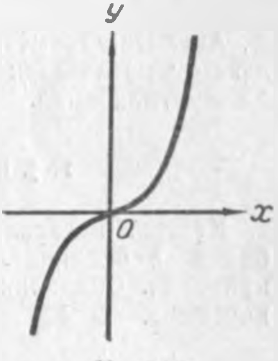
x	.	.	.	-3	-2	-1	0	1	2	3	.	.	.
y	.	.	.	-27	-8	-1	0	1	8	27	.	.	.

Натижада ... $(-3, -27)$, $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 8)$, $(3, 27)$, ... нуқталар кетма-кетлиги ҳосил бўлди. Бу нуқталарни координаталар системасида ясаб, уларни туташ чизиқ билан бирлаштирамиз, натижада $y = x^3$ функциянинг графиги ҳосил бўлади.

2- мисол. $y = x$, $\sqrt{y} = \sqrt{x}$ ва $y^2 = x^2$ тенгламалар билан ифодаланган чизиқларни геометрик талқин этинг.

Ечиш. Бу тенгламалар билан берилган чизиқларни умумий мулоҳазалар юритиш усули билан геометрик талқин этиш мумкин.

$y = x$ тенглама ҳар бир нуқтасининг абсциссаси унинг ординатасига тенг бўлган тенгламани ифодалайди. Бундай хоссага эга бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни I ва III координата бурчакларининг биссектрисалари экани равшан.



31 чизма.

$\sqrt{y} = \sqrt{x}$ тенгламада эса x ва y лар фақат мусбат қийматлар қабул қилиши керак (x ва y лар манфий қийматлар қабул қилса $\sqrt{x}$ ҳамда $\sqrt{y}$ лар мавҳум сонларни беради). Бу тенглама билан тасвир этиладиган геометрик ўрин биринчи координата бурчагининг биссектрисасидир.

$y^2 = x^2$ тенглама абсциссасининг квадрати ординатасининг квадратига тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнини тасвир этади. Бундай хоссага эга бўлган геометрик ўрин координата бурчакларининг биссектрисаларидан иборат ва аксинча. Демак, бу тенглама билан координата бурчакларининг ҳар бир биссектрисаси тасвирланади.

$\sqrt{y} = \sqrt{x}$ тенгламани иккала томонини квадратга кўтариш билан $y = x$ ва энди бу тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариш билан $y^2 = x^2$ тенглама ҳосил бўлади. Аммо $\sqrt{y} = \sqrt{x}$ тенглама биринчи координата бурчагининг биссектрисаси бўлгани ҳолда $y = x$ тенглама биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларини, $y^2 = x^2$ тенглама тўртала координата бурчакларининг биссектрисаларини тасвир этади. Демак, тенгламаларни квадратларга кўтариш билан ҳосил қилинган тенгламалар янги чизиқларни (янги геометрик ўринни) тасвир этиши мумкин экан.

13-§. ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ ҲАҚИДА ИККИ АСОСИЙ МАСАЛА

Юқорида баён қилинган масалалардан чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақида иккита асосий масала келиб чиқади:

1) *Чизиқ текисликдаги нуқталарнинг геометрик урни сифатида берилган. Бу чизиқнинг тенгламаси тузилсин.*

2) *Бирор чизиқнинг тенгламаси берилган. Бу тенглама ёрдами билан чизиқнинг геометрик хоссалари, текисликда жойланиши ва унинг шакли текширилсин.*

Аналитик геометриянинг чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақидаги бу масалалари билан кейинги бобларда системали равишда шуғулланамиз.

14-§. ИККИ ЧИЗИҚНИНГ КЕСИШИШИ

Кўпгина масалаларда тенгламалари билан берилган икки ёки бир неча чизиқнинг кесишиш нуқталарини топиш масаласи қўйилади. Соддалик учун биз бу масалани иккита чизиқ учун қараймиз.

$$\Phi_1(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$\Phi_2(x, y) = 0 \tag{2}$$

тенгламалар билан иккита чизиқ берилган бўлсин. Бу чизиқлар кесишган бўлса, уларнинг кесишиш нуқталари топилсин деган масала қўямиз.

Бу масалани бундай ечса бўлади: (1) ва (2) чизиқларнинг кесишган нуқтаси мавжуд бўлса, у нуқта иккала чизиқнинг умумий нуқтаси бўлади. Бу умумий нуқтанинг координаталари (1) тенгламани ҳам, (2) тенгламани ҳам қаноатлантириши керак, яъни (1) чизиқ ҳам, (2) чизиқ ҳам шу умумий нуқтадан ўтади.

Агар умумий нуқтанинг координаталари (1) ва (2) тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантирар экан, бу координаталар (1) ва (2) тенгламалар системасининг ечимлар системаси бўлиши керак.

Демак, (1) ва (2) чизиқларнинг кесишган нуқталарининг координаталарини топиш учун (1) ва (2) тенгламаларга тенгламалар системаси деб қараб, уларни биргаликда ечиш зарурдир.

Агар (1) ва (2) тенгламалар системаси биргаликдаги система бўлса ва бу системанинг ечимлар системаси ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, бундай ечимлар системасининг ҳар бири (1) ва (2) чизиқларнинг кесишган нуқтаси координаталарини ифода этади.

Агар (1) ва (2) тенгламалар системаси биргаликдаги система бўлмаса ёки системанинг ҳар бир ечимлари системасида x ёки y нинг камида биттаси мавҳум бўлса, (1) ва (2) чизиқлар кесишмайди.

1- мисол.

$$y - x^3 = 0$$

чизиқ билан

$$y - 9x = 0$$

чизиқнинг кесишиш нуқталари топилсин.

Ечиш. Берилган чизиқлар тенгламаларини биргаликда деб қараб, бу системани ечамиз. Тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасидан y ни топиб, биринчи тенгламага қуямиз:

$$9x - x^3 = 0$$

ёки

$$x(9 - x^2) = 0.$$

Бундан

$$x_1 = 0; \; x_{2,3} = \pm 3.$$

Бу қийматларни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб,

$$y_1 = 0, \; y_{2,3} = \pm 27$$

эканини топамиз. Демак, қаралаётган чизиқлар

$$(0,\ 0),\ (3,\ 27) \text{ ва } (-3,\ -27)$$

нуқталарда (3 та нуқтада) кесишар экан.

2- мисол. $x^2 + y^2 = 1$ чизиқ билан $2x^2 + 2y^2 = 1$ чизиқнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Ечиш. Бу системадаги тенгламалар бир-бирига зид келади. Чунки манфий бўлмаган икки сон йиғиндиси бирга тенг бўлгани ҳолда, уларнинг ҳар бирини иккига кўпайтириб қўшсак, яна бирлигича қолаётир, бу эса мумкин эмас. Демак, қаралаётган чизиқлар кесишмайди.

Бу чизиқлар марказлари координаталар бошида бўлиб, радиуслари 1 га ва $\frac{1}{\sqrt{2}}$ га тенг бўлган айланалар эканини кейинроқ билиб оламиз.

3- мисол. $y+x=0$ чизиқ билан $y^2+3x+3=0$ чизиқнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Ечиш. Биринчи тенгламадан y ни топамиз:

$$y=-x;$$

буни иккинчи тенгламадаги y нинг ўрнига қўямиз, натижада

$$x^2+3x+3=0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади, бу тенгламани ечиб,

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3}=-\frac{3}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

эканини топамиз.

Демак, тенгламалар системасининг иккала ечими ҳам $\pm i\sqrt{3}$ мавҳум сонларни ўз ичига олади. Шунинг учун қаралаётган чизиқлар кесишмайди.

15- §. ЧИЗИҚНИНГ ПАРАМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

Механика ва техникада моддий нуқтанинг ҳаракат траекторияси қаралади. Бу траектория t вақтга боғлиқ равишда ўзгаради. Шунинг учун траектория ихтиёрий нуқтасининг x, y кооринаталари t нинг ўзгариши билан ўзгаради, t нинг функциялари бўлади, яъни x ва y учун

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t) \qquad (1)$$

тенгламаларни ёзиш мумкин. Бу тенгламалар моддий нуқтанинг *ҳаракат тенгламалари* дейилади. Геометрия тилида (1) тенгламаларни эгри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* деб аталади. Бунда t ўзгарувчини параметр дейилади. t ҳар доим вақтни билдириши шарт эмас, t параметр x ва y нинг қандай ўзгаришини аниқ тасвирлаш учун ҳамда (1) тенглама каби тенгламани тузиш учун қулайлик берадиган ёрдамчи ўзгарувчидир. (1) тенгламалардан t параметр йўқотилса, эгри чизиқнинг Декарт системасидаги

$$F(x,\ y)=0$$

ёки $y=f(x)$ тенгламаси ҳосил бўлади. (1) тенгламалардан кўринишича, текисликдаги эгри чизиқ параметрик шаклда иккита тенглама билан берилади.

1- мисол. Маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси r га тенг бўлган айлананинг параметрик тенгламалари тузилсин (32- чизма).

Ечиш. $M(x,\ y)$ айлананинг ихтиёрий нуқтаси ҳамда

$$x=OP,$$
$$y=PM$$

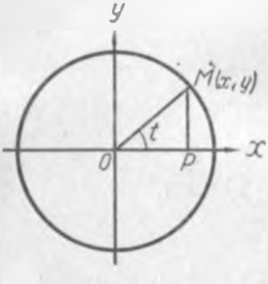
бўлсин. MOP бурчакни t билан белгилаймиз; бу ҳолда MOP тўғри бурчакли учбурчакдан

$$\left.\begin{aligned} OP &= OM\cos t, \\ PM &= OM\sin t \end{aligned}\right\}$$

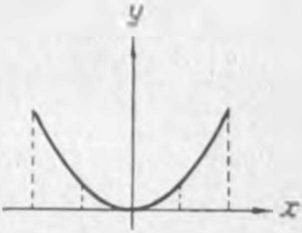
ёки $OM = r$ бўлгани учун

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Бу—айлананинг параметрик тенгламаси. (2) тенгламалардан t параметрни йўқотиб, айлананинг



32 - чизма.



33 - чизма.

Декарт системасидаги тенгламасини ҳосил қиламиз. Бунинг учун (2) тенгламаларни квадратга кўтариб, натижани ҳадлаб қўшамиз:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Бу тенглама маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси r га тенг бўлган айлананинг Декарт системасидаги тенгламасидир.

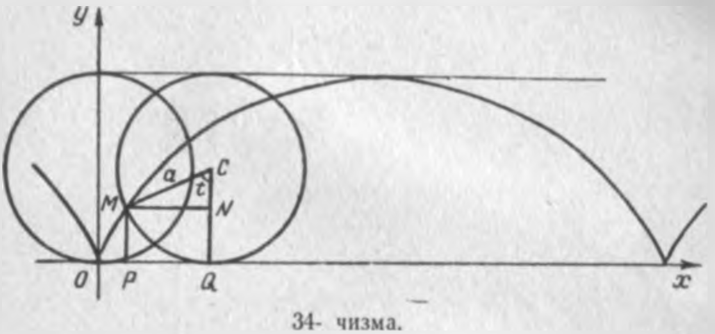
2- мисол. Радиуси a га тенг бўлган доира абсциссалар ўқи бўйича сирпанмай думалаб боради. M — доира айланасидаги бирор нуқта. Доиранинг дастлабки ҳолатида M нуқта координаталар бошига жойлашганлиги маълум бўлса, ҳаракат давомида M нуқтанинг чизган чизиғининг тенгламаси тузилсин (34- чизма).

Ечиш. Координаталар бошини чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб оламиз. Ҳаракат бошлангандан бошлаб бирор вақт ўтгандан кейин M нуқта $\overset{\frown}{OM}$ ни чизиб доира шаклидаги ҳолатда бўлсин. M нуқта билан доиранинг C марказини туташтирамиз ҳамда

$$PM \perp Ox,\ QC \perp Ox,\ MN \parallel Ox$$

кесмалар ўтказамиз. MCN бурчакни t билан белгилаймиз:

$$\angle\ MCN = t.$$



34- чизма.

M нуқтанинг координаталари x ва y бўлсин:

$$x = OP,\ y = PM.$$

Тўғри бурчакли MNC учбурчакда:

$$\left.\begin{aligned} MN &= MC \sin t = a \sin t, \\ NC &= MC \cos t = a \cos t. \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

Аммо

$$MN = PQ = OQ - OP.$$

Ҳаракат сирпанмай бажарилгани учун

$$OQ = \overset{\frown}{MQ},\ \overset{\frown}{MQ} = at.$$

Демак,

$$MN = at - x. \quad (\beta)$$

Чизмадан:

$$NC = QC - QN = QC - PM = a - y. \quad (\gamma)$$

(β) ва (γ) тенгликлардан MN ва NC ларнинг қийматларини (α) тенгликка қўйиб, x ва y ларни топамиз:

$$\begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t), \\ y &= a\,(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Бу изланаётган чизиқнинг параметрик тенгламасидир. Бу чизиқ *циклоида* деб аталади. Циклоиданинг параметрик тенгламасидан t параметрни чиқариб юборсак, унинг Декарт координаталар системасидаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = 2k\pi \pm \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)}\right),$$

бу ерда k — исталган бутун сон.

3- мисол. Чизиқнинг параметрик тенгламаси берилган:

$$x = 2t,$$
$$y = t^2.$$

Бу чизиқ ясалсин.

Ясаш. Параметрик тенгламалардаги t га ... -2, -1, 0, 1, 2, ... қийматларни бериб, бунга мос ҳолда x ва y ўзгарувчиларнинг ушбу қийматларини топамиз:

t	.	.	.	-2	-1	0	1	2	.	.	.
x	.	.	.	-4	-2	0	2	4	.	.	.
y	.	.	.	4	1	0	1	4	.	.	.

Декарт системасини олиб, унда t нинг бу қийматларига тўғри келган (x, y) нуқталарни ясаймиз ва бу нуқталарни туташ чизиқ билан бирлаштирамиз. Натижада 33- чизмада тасвирланган чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ *парабола* деб аталадиган чизиқдир.

Берилган тенгламалардан t параметрни йуқотсак, параболанинг Декарт системасидаги тенгламаси ҳосил бўлади:

$$y = \frac{1}{4} x^2.$$

Машқлар

1. Қуйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар ясалсин:

а) $y = x^3$; б) $y = x^2 - 2$; в) $y = \frac{1}{2} x^3 - 4$; 2) $y = \sqrt{x}$; д) $xy = 3$.

2. Қуйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар Декарт системасида ясалсин:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \sin(2x + 3)$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \operatorname{tg}(2x + 3)$.

3. M нуқта ҳаракат пайтида ҳамма вақт $A(0, 3)$ ва $B(7, -3)$ нуқталардан бир хил узоқликда қолади. M нуқтанинг траекториясини топинг.

4. Ҳар бир нуқтасидан берилган икки $M(-3, 0)$ ва $N(3, 0)$ нуқталаргача масофалари квадратларининг йиғиндиси 50 га тенг бўлган текислик

нуқталари геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг ва бу геометрик ўринни ясанг.

5. Ҳар бир нуқтасидан берилган иккита M ва N нуқтасигача масофаларининг кўпайтмаси ўзгармас a^2 сонга тенг бўлган текислик нуқталари геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг ва тузилган тенгламага кўра чизиқни ясанг (бу чизиқ *Кассини овали* дейилади).

6. 5- масалада берилган M ва N нуқталар орасидаги масофа $MN = 2c$ деб фараз қилинса, $a = c$ бўлган ҳолда Кассини овали *Бернулли лемнискатаси* деб аталади. Бернулли лемнискатасининг тенгламасини тузинг.

7. Параметрик тенгламалари билан берилган эгри чизиқларни ясанг.

$$а)\ x = t^2,\ \ y = \frac{1}{2} t^3,\ б)\ x = t^2,\ y = \frac{t^3}{3} - t.$$

Бу чизиқларнинг Декарт системасидаги тенгламаларини тузинг.

8. $AB = a$ кесманинг учлари Декарт системасининг ўқлари бўйича сирпаниб ҳаракат қилади. Координата ўқларига параллел бўлган AC ва BC тўғри чизиқлар C нуқтада кесишади. C нуқтадан AB га CM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг турли ҳолатларига мувофиқ M нуқтанинг ҳаракат траекторияси тенгламасини тузинг (M нуқтанинг ҳаракат траекторияси *астроида* деб аталади).

9. Жисм v тезлик билан горизонтга α бурчак ҳосил қилиб юқорига отилган. Ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмай, жисмнинг ҳаракат траекторияси тенгламасини тузинг.

Учинчи боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Биз бу бобда тўғри чизиқнинг текисликдаги координаталар системасига нисбатан олган ўрнини турлича аниқланишига қараб унинг тенгламаларини турли кўринишда ҳосил қиламиз ва бу тенгламалар ёрдами билан тўғри чизиққа тегишли баъзи масалаларни ечамиз.

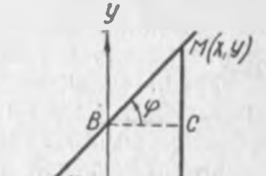
16-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БУРЧАК КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАСИ

Дастлаб ординаталар ўқига параллел бўлмаган тўғри чизиқни қараймиз. Бундай тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан текисликдаги ўрнини абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан тўғри чизиқ орасидаги $\angle OLB = \varphi$ бурчак ва тўғри чизиқнинг ординаталар ўқидан кесган $OB = b$ кесмаси билан аниқлашимиз мумкин (35- чизма).

Бу ерда сўз юритилаётган φ бурчакни ойдинлаштириб ўтиш зарур.

Абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак деб абсциссалар ўқининг мусбат йўналишини соат стрелкасига тескари йўналишида тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча бурганимизда ҳосил бўладиган бурчакка айтамиз.

Энди тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз.



35 -чизма.

$M(x, y)$ нуқта LB тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бунда

$$ON = x, \ NM = y.$$

B нуқтадан Ox ўққа параллел қилиб BC тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу ҳолда $\angle MBC = \varphi$ бўлади.

Тўғри бурчакли MBC учбурчакдан:

$$CM = BC \operatorname{tg} \varphi \qquad tg\varphi = \frac{CM}{BC} \tag{1}$$

эканини топамиз. Аммо 35- чизмадан

$$CM = NM - NC = NM - OB$$

ёки

$$CM = y - b. \tag{2}$$

Шунга ўхшаш

$$BC = ON = x \tag{3}$$

MC ва BC ларнинг топилган бу ифодаларини (1) тенгликка қўямиз:

$$y - b = x \operatorname{tg} \varphi$$

ёки

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + b. \tag{4}$$

Одатда $\operatorname{tg}\varphi = k$ деб белгиланади, шунинг учун (4) тенглама

$$y = kx + b \tag{5}$$

кўринишни олади. Бу тенглама LB тўғри чизиқнинг тенгламасидир, чунки биз бу тўғри чизиқда ётган ҳар қандай $M(x, y)$ нуқтанинг x, y координаталари (5) тенгламани қаноатлантиришини исбот қилдик; демак, LB тўғри чизиқда ётмаган нуқтанинг координаталари (5) тенгламани қаноатлантирмайди ва аксинча.

(5) тенгламадаги k коэффициент тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициенти*, b эса тўғри чизиқнинг *бошланғич ординатаси* дейилади. (5) тенгламага тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади.

Тўғри чизиқнинг тенгламаси ўзгарувчи, x, y координаталарнинг фақат биринчи даражаларини ўз ичига олиши (5) тенгламадан кўриниб турибди.

Олинган тўғри чизиқ ординаталар ўқига параллел бўлиб, ундан a масофада турса, унинг $x = a$ ёки $x - a = 0$ шаклдаги тенглама билан ифодаланишини биз юқорида (7- §) исботлаган эдик, шунинг учун бундан қуйидаги теорема келиб чиқади

Теорема. *Текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ* x ва y *ўзгарувчи координаталар орасидаги муносабатни ифодаловчи биринчи даражали тенглама билан тасвирланади.*

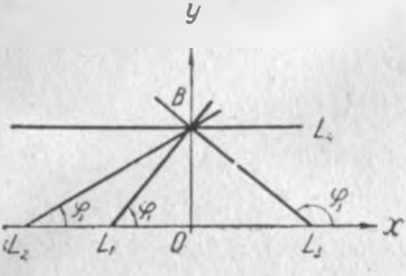
Энди (5) тўғри чизиқ тенгламасида k ва b *параметрлар* ўзгарганда тўғри чизиқнинг қандай ўзгаришини қараймиз.

Агар (5) тенгламада b ўзгармай, $k = k_1, k_2, \ldots$ қийматларни қабул қилса, $k = tg\varphi$ бўлгани сабабли φ бурчак ҳам $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ қийматларини қабул қилиб ўзгаради ва тўғри чизиқ координаталар системасида L_1B, L_2B, L_3B,... каби жойланади (36- чизма), яъни тўғри чизиқ B нуқта атрофида айланади. $k = 0$ бўлса (5) тенглама

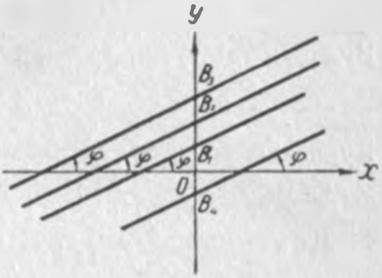
$$y = b \tag{5'}$$

кўринишни олади. Бу ҳолда $\varphi = 0$ бўлгани учун тўғри чизиқ абсциссалар ўқига параллел ва ундан b масофада ётади (BL_4 тўғри чизиқ).

Энди k ўзгармай қолиб, b ўзгариб $b_1, b_2, b_3,\ldots$ қийматларни қабул қиладиган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда тўғри чизиқ ординаталар ўқидан $OB_1 = b_1$, $OB_2 = b_2$, $OB_3 = b_3,\ldots$ кесмаларни кесиб ўтади, аммо абсциссалар ўқи билан бир хил φ бурчак ташкил қилади (37- чизма), яъни тегишли тўғри чизиқлар бир-бирига параллел жойлашади.



36 - чизма.



37 - чизма.

Агар $b = 0$ бўлса, (5) тенглама

$$y = kx \tag{6}$$

кўринишни олади ва бу тенглама билан тасвирланган тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади, аксинча, тўғри чизиқ координата бошидан ўтса $b = 0$, унинг тенгламаси (6) кўринишда бўлади, (5) тенгламада $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, чунки биз тўғри чизиқ ординаталар ўқига параллел эмас деб фараз қилганмиз. Агар $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $k = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2} = \infty$ бўлиб, (5) тенглама маъносини йўқотади.

Ординаталар ўқига параллел тўғри чизиқ

$$x - a = 0 \tag{7}$$

тенглама билан ифодаланади.

Агар (5′) тенгламада $b = 0$ бўлса,

$$y = 0 \tag{5''}$$

тенглама ҳосил бўлади, бу абсциссалар ўқининг тенгламасидир. Шунга ухшаш (7) тенгламада $a = 0$ бўлса,

$$x = 0 \qquad (7')$$

тенглама ҳосил бўлади, бу эса ординаталар ўқининг тенгламасидир.

1- мисол. Абсциссалар ўқи билан 45° ли бурчак ҳосил қилиб, ординаталар ўқидан 5 бирлик узунликда кесма ажратувчи тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кура:

$$\varphi = 45°, k = \operatorname{tg} 45° = 1, b = 5.$$

Буларни (5) тўғри чизиқ тенгламасига қуйсак,

$$y = x + 5.$$

Бу изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

2- мисол. $y = \frac{2}{3}x + 5$ тўғри чизиқ ясалсин.

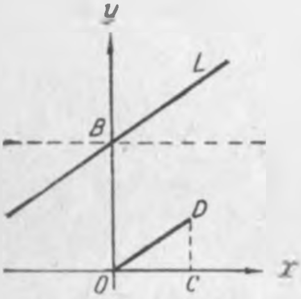
Ясаш. $y = \frac{2}{3}x + 5$ тенгламадан $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$ ва

$$b = 5$$

эканини курамиз. Энди ординаталар ўқида $OB = 5$ бирлик кесма ажратиб, B нуқтани белгилаймиз (38- чизма).

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$$

бўлгани учун бурчак қаршисидаги катетни 2 бирлик, бурчакка ёпишган катетни 3 бирлик деса бўлади. Шуни эътиборга олиб, $OC = 3$ бирлик ва $CD = 2$ бирликни ясаймиз ва O нуқта билан D нуқтани туташтирамиз.



38 -чизма.

Энди OD га параллел қилиб, B нуқтадан BL тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу изланаётган тўғри чизиқдир.

17-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ ВА УНИ ТЕКШИРИШ

Биз ўтган параграфда тўғри чизиқ узгарувчи x, y координаталарга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенглама билан ифодаланади деган теоремани исбот қилдик. Энди шу теореманинг тескариси ҳам уринли эканини кўрсатамиз.

Теорема. *x ва y Декарт координаталарига нисбатан биринчи даражали ҳар қандай алгебраик тенглама текисликдаги бирор тўғри чизиқнинг тенгламасидир.*

Исбот. x ва y ўзгарувчиларга нисбатан ёзилган биринчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўринишини

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

шаклда ёзиш мумкин, бунда A, B ва C ўзгармас коэффициентлар бўлиб, A ва B сонлар бир вақтда нолга тенг эмас деб фараз қилинади.

Энди (1) тенглама тўғри чизиқ тенгламаси эканини кўрсатамиз. Бунинг учун (1) тенгламада $B \neq 0$ деб олиб, уни y га нисбатан ечамиз. Бу ҳолда

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (2)$$

бўлади.

$$-\frac{A}{B} = k, \ -\frac{C}{B} = b \qquad (3)$$

деб фараз қилинса, (2) тенглама

$$y = kx + b$$

кўринишни олади. Бу эса тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

Агар $B = 0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax + C = 0 \ (A \neq 0)$$

ёки

$$x = -\frac{C}{A} = a \qquad (4)$$

бўлади. Бу тенглама ординаталар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси эди. Шундай қилиб, $B \neq 0$ бўлганда ҳам, $B = 0$ бўлганда ҳам (1) тенглама тўғри чизиқнинг тенгламаси экан. Шу билан теорема исбот бўлди.

Энди (1) тенглама ҳадларидан баъзилари тенгламада қатнашмаган ҳолда, у тенглама билан тасвирланадиган тўғри чизиқ координата ўқларига нисбатан қандай жойланишини текшириб чиқамиз.

Агар $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$By + C = 0 \qquad (5)$$

кўринишида бўлади. Бу тенгламани y га нисбатан ечиб, (3) тенгликни эътиборга олсак,

$$y = b$$

бўлади. Бу эса абсциссалар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси эди. Шундай қилиб, (1) тенгламада таркибида x бўлган ҳад қатнашмаса, бу тенглама билан тасвирланадиган тўғри чизиқ абсциссалар ўқига параллел булади.

Агар $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax+C=0 \tag{6}$$

кўринишни олади. Бу тенглама ординаталар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқни тасвирлайди. Буни юқорида кўрган эдик. Шундай қилиб, (1) тенгламада таркибида y бўлган ҳад қатнашмаса, бу тенглама ординаталар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқни тасвирлайди.

Агар $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax+By=0 \tag{7}$$

кўринишни олади. Буни y га нисбатан ечамиз:

$$y=-\frac{A}{B}x.$$

Энди (3) тенгликни эътиборга олсак:

$$y=kx$$

бўлади, бу тенглама координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқни тасвирлайди. Демак, (7) тенглама координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқ тенгламасидир. Шундай қилиб, (1) тенгламада озод ҳад қатнашмаса, у координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Агар $A=0$, $C\neq 0$, $B\neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$By=0 \text{ ёки } y=0$$

кўринишни олади, бу абсциссалар ўқининг тенгламаси эди. Демак, (1) тенгламада таркибида x қатнашган ҳад билан озод ҳад қатнашмаса, тенглама абсциссалар ўқининг тенгламаси бўлади.

Агар $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax=0 \text{ ёки } x=0$$

кўринишни олади, бу ординаталар ўқининг тенгламасидир.

(1) тенгламада A билан B бир вақтда нолга тенг бўлолмайди, чунки $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ бўлганда (1) тенглама $C=0$ кўринишда бўлади, яъни C ҳам нолга тенг бўлади, бу эса қилинган шартга зиддир. Бу ҳолда (1) тенгламанинг маъноси бўлмайди.

Мисоллар.

1) $x+y=0$ тенгламада озод ҳад йўқ, шунинг учун бу тенглама координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқ тенгламасидир.

2) $3x+2=0$ тенгламада y қатнашган ҳад йўқ, демак, бу тенглама ординаталар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир.

3) $y-3=0$ тенгламада x қатнашган ҳад йўқ. Бу тенглама абсциссалар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир.

18-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ КЕСМАЛАРГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Координаталар бошидан ўтмаган тўғри чизиқнинг вазиятини унинг ўқлардан ажратган $OA=a\neq 0$ ва $OB=b\neq 0$ кесмалари билан аниқласа бўлади. Бу ҳолда тўғри чизиқ тенгламасини тузиш учун унда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтани оламиз (39- чизма). $OP=x$, $PM=y$ бўлсин, x билан y орасидаги муносабатни тузиш учун BOA ва MPA ўхшаш учбурчаклардан фойдаланамиз. Ўхшаш учбурчакларнинг мос томонлари пропорционал бўлгани сабабли

$$\frac{PM}{OB}=\frac{PA}{OA} \qquad (1)$$

бўлади. Аммо

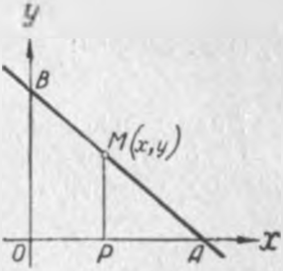
$$OB=b, \qquad PM=y,$$
$$OA=a, \qquad PA=OA-OP=a-x.$$

Буларни (1) тенгликка қўямиз:

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$$

ёки

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2)$$



39- чизма.

Бу изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасидир. Тўғри чизиқ тенгламасининг бу кўриниши *унинг кесмаларга нисбатан тенгламаси дейилади.*

1- мисол. Ox ўқдан ажратган кесмаси 4 ва Oy ўқдан ажратган кесмаси 5 бирлик бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра:

$$a=4, \; b=5;$$

буларни (2) тенгламага қўйсак,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$$

ёки

$$5x+4y-20=0.$$

2- мисол. $3x-2y-6=0$ тўғри чизиқ ясалсин.

Ясаш. Бу тўғри чизиқни координата ўқларидан ажратган кесмаларини топиш йўли билан ясаймиз.

Абсциссалар ўқида ордината ҳамма вақт нолга тенг. Шунинг учун берилган тенгламада

$$x = a, \ y = 0$$

деб фараз қиламиз. Бу ҳолда тенглама

$$3a - 6 = 0$$

кўринишни олади. Бундан:

$$a = 2.$$

Шунга ўхшаш, берилган тенгламада

$$x = 0,$$
$$y = b$$

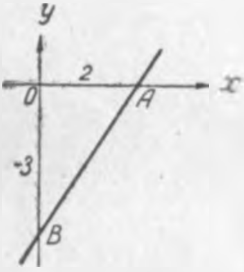
десак,

$$-2b - 6 = 0$$

бўлади. Бундан:

$$b = -3.$$

Энди абсциссалар ўқида $a = 2$ бирлик, ординаталар ўқида $b = -3$ бирлик олиб, ҳосил бўлган кесмалар учларини чизғич билан туташтириб, иккала томонга давом эттирамиз (40- чизма). Натижада биз излаган AB тўғри чизиқни ҳосил қиламиз.



40- чизма.

3- мисол. $Ax + By + C = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг координата бошидан ўтмаслиги маълум. Бу тенглама тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламасига келтирилсин.

Ечиш. Шартга кўра берилган тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтмайди. Шунинг учун тўғри чизиқ координата ўқларини $M(a, 0)$ ва $N(0, b)$ нуқталарда кесиб ўтсин, деб фараз қилишимиз мумкин. M ва N нуқталар тўғри чизиқ нуқталари бўлгани учун уларнинг координаталари тўғри чизиқнинг берилган тенгламасини қаноатлантириши керак, яъни

$$Aa + C = 0$$

ва

$$Bb + C = 0.$$

Бу тенгликлардан:

$$A = -\frac{C}{a},$$
$$B = -\frac{C}{b}.$$

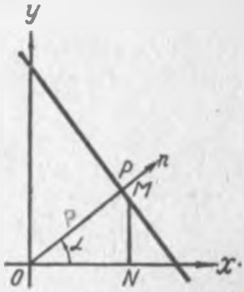
Топилган A ва B коэффициентларнинг қийматларини берилган тенгламага қўйиб, кейин C га қисқартирсак (C коэффициентни нолга тенг эмас деб фараз қиламиз)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқ тенгламасининг биз излаган кўринишидир.

19-§ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Координаталар бошидан бу тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган n тўғри чизиқни ўтказамиз, уни *нормаль* деб атаймиз. Берилган тўғри чизиқ билан n нормалнинг кесишган нуқтасини P билан белгилаймиз. Нормалда, стрелка билан кўрсатилгандек, O координаталар бошидан P нуқта томон йўналишни мусбат йўналиш учун қабул қиламиз. Агар берилган тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтса, P нуқта билан O координаталар боши устма-уст тушади, бу ҳолда мусбат йўналишни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. n нормалда мусбат йўналиш аниқланиши билан у ўққа айланади.



41- чизма.

Тўғри чизиқнинг олинган Декарт системасига нисбатан вазиятини OP перпендикулярнинг p узунлиги ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан нормаль орасидаги α бурчак тўла аниқлайди. p билан α берилган бўлсин. Тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз (41- чизма). Бунинг учун тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта оламиз.

$$ON = x,\ NM = y$$

бўлсин. Чизмада ҳосил бўлган $\overline{ONMP}$ синиқ чизиқнинг n ўқ йўналишига проекциясини оламиз. Проекциялар назариясига мувофиқ:

$$\text{пр}\,(\overline{ONMP}) = \text{пр}\,(\overline{OP})$$

ёки

$$\text{пр}\,(\overline{ON} + \text{пр}\,(\overline{NM}) + \text{пр}\,(\overline{MP}) = \text{пр}\,\overline{OP}. \qquad (1)$$

Лекин кесманинг бирор ўққа нисбатан проекцияси кесма миқдори ва бу ўқ билан кесма орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг. Демак,

$$\left.\begin{aligned} &\text{пр}\,(\overline{ON}) = ON\cos(-\alpha) = x\cos\alpha,\\ &\text{пр}\,(\overline{NM}) = NM\cos(90^\circ-\alpha) = y\sin\alpha,\\ &\text{пр}\,(\overline{MP}) = MP\cos 90^\circ = 0,\\ &\text{пр}\,(\overline{OP}) = OP = p. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

(2) тенгликлардан топилган проекциялар қийматларини (1) тенгликка қўйсак,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

ёки

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (3)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама тўғри чизиқнинг *нормал тенгламаси* дейилади.

(3) тенгламада x ва y ўзгарувчи координаталарнинг коэффициентлари битта α бурчакнинг синус ва косинусларидан иборат бўлгани учун

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (4)$$

ва тенгламадаги p перпендикулярнинг кесмаси бўлгани учун ҳамма вақт мусбат ва, демак, (3) тенгламадаги озод ҳад

$$-p \leqslant 0. \qquad (5)$$

Бу икки муносабат тўғри чизиқ нормал тенгламасининг характерловчи белгилардир.

Мисол. Координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги 3 га тенг; Ox ўқ билан бу перпендикуляр орасидаги бурчак 30°. Тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра:

$$\alpha = 30^\circ,\ p = 3.$$

Демак, $\cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Буларни (3) тенгламага қўямиз:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 3 = 0.$$

20-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИНИ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАГА КЕЛТИРИШ

Тўғри чизиққа доир масалаларни ечишда унинг бир кўринишдаги тенгламасидан бошқа кўринишдаги тенгламасига ўтиш керак бўлади. Биз юқорида бундай масалаларнинг бир нечтасини кўриб ўтдик, аммо тўғри чизиқ тенгламасини унинг нормал тенгламага келтириш юқоридаги усуллардан фарқ қилади. Шунинг учун тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага келтириш масаласини қараймиз.

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси бўлсин. Бу тенгламани нормал тенгламага келтириш учун унинг иккала томонини бирор ихтиёрий M сонга кўпайтирамиз:

$$AMx + BMy + CM = 0. \tag{2}$$

M нинг ихтиёрий сон эканлигидан фойдаланиб, уни (2) тенгламадаги AM, BM ва CM коэффициентлар 19 - параграфдаги (3) нормал тенгламанинг мос коэффициентларига тенг бўладиган қилиб танлаб оламиз, яъни

$$AM = \sin\alpha; \ BM = \cos\alpha; \ CM = -p \tag{3}$$

бўлсин. Бу тенгламаларнинг биринчи иккитасини квадратга кўтариб, қўшамиз:

$$M^2(A^2 + B^2) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Бундан

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \tag{4}$$

Ўнг томондаги ± ишоралардан қайси бирини олиш (3) тенгликларнинг учинчиси билан аниқланади. $-p < 0$ эканини биламиз. Демак,

$$CM = -p$$

тенглик ўринли бўлиши учун C билан M нинг ишораси бир-бирига қарама-қарши бўлиши керак. Шунинг учун (4) тенгликда M нинг ишораси (1) тенгликдаги C нинг ишорасига қарама-қарши қилиб олинади.

(4) тенгликдан M нинг топилган қийматини (2) тенгламага қўямиз:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{5}$$

Бу (1) тенгламанинг нормал тенгламага келтирилган кўринишидир, чунки (3) ва (4) тенгликларга кўра

$$\sin\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

бўлиб, бу тенгликларга асосан 19- параграфдаги (4) ва (5) тенгликларнинг ўринли бўлишини кўриш қийин эмас. (4) тенглик билан аниқланган M ни *нормалловчи кўпайтувчи* дейилади.

Юқорида баён қилинганлардан *тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага келтириш учун унинг* *иккала томонини нормалловчи кўпайтувчига купайтириш керак* деган хулоса келиб чиқади.

Мисол. Тўғри чизиқнинг умумий $3x + 4y - 5 = 0$ тенгламаси унинг нормал тенгламасига келтирилсин.

Ечиш. Нормалловчи купайтувчини топамиз:

$$M = \frac{1}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

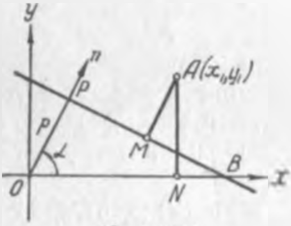
Берилган тенгламанинг иккала томонини бу кўпайтувчига купайтирамиз:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Бу тўғри чизиқнинг изланаётган нормал тенгламасидир.

21-§. НУҚТАДАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚАЧА БЎЛГАН МАСОФА

Текисликда бирор $A(x_1, y_1)$ нуқта ва ихтиёрий тўғри чизиқ берилган бўлсин. *Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа деб бу нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтамиз.* $A(x_1, y_1)$ нуқтадан қаралаётган тўғри чизиққача бўлган масофани d билан белгилаймиз. Бизнинг вазифамиз A нуқтанинг x_1 ва y_1 координаталари ва берилган тўғри чизиқ тенгламасига кура d $(d > 0)$ масофани топишдан иборат. $\pm d$ га тенг бўлган сонни $A(x_1, y_1)$ нуқтанинг тўғри чизиқдан *четланиши* деб атаймиз ва уни δ билан белгилаймиз. Шунингдек, агар A нуқта билан O координаталар боши тўғри чизиқнинг турли томонига жойлашган бўлса, $\delta = +d$ деб, бир томонига жойлашган бўлса $\delta = -d$ деб оламиз.



42- чизма.

Қуйилган масалани ечиш учун биз дастлаб $A(x_1, y_1)$ нуқтанинг

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

тенглама билан берилган тўғри чизиқдан δ четланишини аниқлаймиз (42- чизма).

Бизга A нуқта берилган, яъни

$$x_1 = ON, \; y_1 = NA.$$

A нуқтадан берилган PB тўғри чизиққа AM перпендикулярни туширамиз. $\overline{ONAMP}$ йўналган синиқ чизиқнинг n ўқ йўналишига проекциясини оламиз. Бу ҳолда

$$\text{пр}\,(\overline{ONAMP}) = \text{пр}\,(\overline{OP})$$

ёки

$$\text{пр}\,(\overline{ON}) + \text{пр}\,(\overline{NA}) + \text{пр}\,(\overline{AM}) + \text{пр}\,(\overline{MP}) = \text{пр}\,(\overline{OP}). \qquad (1)$$

Аммо

$$\left.\begin{aligned}
&\text{пр}\,(\overline{ON}) = ON\cos(-\alpha) = x_1\cos\alpha,\\
&\text{пр}\,(\overline{NA}) = NA\cos(90^\circ-\alpha) = y_1\sin\alpha,\\
&\text{пр}\,(\overline{AM}) = -\delta,\\
&\text{пр}\,(\overline{MP}) = 0,\\
&\text{пр}\,(\overline{OP}) = OP = p.
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

(2) тенгликлардан топилган проекциялар қийматларини (1) тенгликка қўйсак,

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - \delta = p$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан:

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \qquad (3)$$

тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган $A(x_1, y_1)$ нуқтанинг берилган

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

тўғри чизиқдан четланишини топиш учун бу тенгликдаги x ва y ўзгарувчи координаталар ўрнига A нуқтанинг x_1 ва y_1 координаталарини қўйиш керак. Натижа δ ни беради.

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа бу нуқтанинг тўғри чизиқдан четланиши абсолют қийматига тенг, шунинг учун:

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|.$$

Агар тўғри чизиқнинг умумий

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламаси берилган бўлса, олдин бу тенгламани нормал тенгламага келтирамиз, ундан кейин ўзгарувчи x ва y лар ўрнига $A(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз. Натижада d масофа

$$\boxed{d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|}$$

формула билан ҳисобланади.

1- мисол. (3, 8) нуқтадан

$$4x - 3y - 5 = 0$$

тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Дастлаб берилган тенгламани нормал тенгламага келтирамиз:

$$\frac{4x-3y-5}{-\sqrt{4^2+3^2}}=0.$$

Энди x, y нинг ўрнига $x_1=3$, $y_1=8$ ни қуямиз, натижада

$$d=\left|\frac{4\cdot3-3\cdot8-5}{-5}\right|=\frac{7}{5}$$

экани келиб чиқади. Бунда δ нинг манфий сон бўлиб чиқиши берилган (3, 8) нуқта билан координаталар боши $4x-3y+5=0$ тўғри чизиқнинг бир томонига жойлашган эканини билдиради.

22-§. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

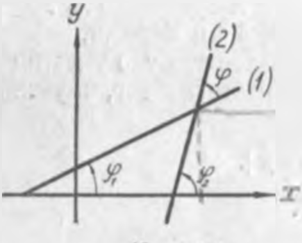
Иккита тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли

$$y=k_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y=k_2x+b_2 \tag{2}$$

тенгламалари берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг ҳеч бири Oy ўққа параллел эмас, деб фараз қиламиз. Бу икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин, деган масалани қўямиз.

(1) тўғри чизиқ билан (2) тўғри чизиқ *орасидаги бурчак* деб (1) тўғри чизиқни (2) тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча ёки параллел бўлиб қолгунча бурганимизда ҳосил бўлган φ бурчакка айтамиз (43- чизма).



43- чизма.

(1) тўғри чизиқни π бурчакка бурсак, ўз-ўзи билан устма-уст тушади. Шунинг учун икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак бир қийматли равишда аниқланмайди. Одатда икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак сифатида улар орасида ҳосил қилиниши мумкин бўлган икки қўшни бурчаклардан ўткир бурчак олинади.

Юқорида берилган (1) ва (2) тўғри чизиқларнинг абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаклари, φ_1 ва φ_2 бўлсин дейлик, яъни:

$$k_1=\operatorname{tg}\varphi_1,\ k_2=\operatorname{tg}\varphi_2 \tag{3}$$

Бу ҳолда 43- чизмадан

$$\varphi_2=\varphi_1+\varphi \tag{4}$$

эканини кўрамиз.

Бизга φ_1 ва φ_2 бурчакларнинг тангенслари берилган. $\operatorname{tg}\varphi$ ни шу бурчаклар орқали ифода қиламиз. Бунинг учун(4) тенгликдан φ ни топиб, тригонометриядан маълум бўлган формулани ишлатамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$$

ёки (3) тенгликка мувофиқ

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.} \tag{5}$$

Бу формула икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласидир.

Агар берилган (1) ва (2) тўғри чизиқлардан камида биттаси абсциссалар ўқига перпендикуляр бўлса, улар орасидаги бурчакни (5) формула билан ҳисоблаб бўлмайди, чунки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$ бўлгани сабабли (5) формула маъносини йўқотади. Бу ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни (4) формула билан ҳисоблаш керак.

Агар (1) ва (2) тўғри чизиқлар бир-бирига параллел бўлса, бу ҳолда

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

ёки

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2,$$

ёки

$$k_1 = k_2. \tag{6}$$

Буни (5) формуладан ҳам ҳосил булишини куриш осон. Аксинча, агар (6) тенглик ўринли булса, у ҳолда бу тенгликдан

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

экани келиб чиқади, яъни (1) ва (2) тўғри чизиқлар параллел.

Шундай қилиб, (1) ва (2) *тўғри чизиқларнинг бир-бирига параллел булиши учун $k_1 = k_2$ булиши зарур ва етарлидир.*

(6) тенгликни икки тўғри чизиқнинг бир-бирига параллелик шарти деб юритилади.

Агар (1) ва (2) тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр бўлса, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ва (4) тенгликка мувофиқ

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = -\operatorname{ctg}\varphi_1$$

ёки

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -1,$$

ёки

$$k_1 k_2 = -1. \tag{7}$$

Аксинча, (7) тенглик бажарилса, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлади, яъни (1) ва (2) тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр.

Шундай қилиб, *икки тўғри чизиқ бир-бирига перпендикуляр бўлиши учун уларнинг бурчак коэффициентлари кўпайтмасининг минус бирга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

1- мисол. $y = \frac{1}{2}x - 3$ ва $y = 3x + 8$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Бу мисолда

$$k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = 3.$$

(5) формулага мувофиқ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = 1,$$

демак,

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2- мисол. $5x + 8y - 3 = 0$ ва $10x + 16y + 9 = 0$ тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар, чунки бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари

$$k_1 = -\frac{5}{8}$$

ва

$$k_2 = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$$

бўлиб, бу тўғри чизиқлар учун

$$k_1 = k_2.$$

3- мисол. k нинг қандай қийматида

$$3kx - 4ky + 8 = 0 \text{ ва } 5kx - 6y + 7 = 0$$

тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр тўғри чизиқлар бўлади?

Ечиш. Берилган тўғри чизиқ тенгламаларини y га нисбатан ечиб, уларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{8}{4k},$$

$$y = \frac{5k}{6}x + \frac{7}{6},$$

демак,

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{5k}{6}.$$

Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартига мувофиқ:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k = -1.$$

Бу тенгламадан

$$k = -\frac{8}{5}.$$

23-§. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН МАЪЛУМ ЙЎНАЛИШ БЎЙИЧА ЎТГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

$A(x, y)$ нуқта берилган бўлсин. Тўғри чизиқнинг

$$y = kx + b \tag{1}$$

бурчак коэффициентли тенгламасини оламиз.

Агар (1) тўғри чизиқ $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтса, бу нуқтанинг (x_1, y_1) координаталари (1) тенгламани қаноатлантириши керак, яъни:

$$y_1 = kx_1 + b \tag{2}$$

бўлиши керак.

Тўғри чизиқнинг йўналиши унинг бурчак коэффициенти k билан аниқланади. Шунинг учун биз k ҳам берилган деб ҳисоблаймиз. Энди (1) ва (2) тенгликларда b ихтиёрий параметр бўлиб қолди. Уни тенгламалардан чиқариш учун (1) дан (2) тенгламани ҳадлаб айирамиз. Бу ҳолда

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{3}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу берилган $A(x_1, y_1)$ нуқта орқали берилган k йўналиш бўйича ўтган тўғри чизиқ тенгламасидир.

Агар k берилган бўлмаса, k нинг турли қийматлари учун (3) тенглама A нуқтадан мумкин бўлган йўналишлар бўйича ўтган тўғри чизиқлар тенгламаси бўлади. Шунинг учун бу ҳолда (3) тенгламани $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтувчи *тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси* дейилади. $A(x_1, y_1)$ нуқтани эса бу дастанинг *маркази* дейилади.

(1) тенглама ординаталар ўқига параллел бўлмаган тўғри чизиқ тенгламаси экани маълум.

Агар $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ординаталар ўқига параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузиш талаб этилса, биз ординаталар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқнинг

$$y = a$$

тенгламасида $a = x_1$ фараз қилишимиз керак. Демак,

$$y = x_1$$

тенглама $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ординаталар ўқига параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

1- мисол. (— 1, 4) нуқтадан ўтиб

$$x - 2y + 5 = 0$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу мисолда

$$x_1 = -1, \ y_1 = 4.$$

(— 1, 4) нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

$$y - 4 = k \ (x + 1)$$

бўлади. Бу тўғри чизиқлардан

$$x - 2y + 5 = 0$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни топишимиз керак. Бунинг учун икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидан фойдаланамиз:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Қаралаётган мисолда

$$k_1 = k, \ k_2 = \frac{1}{2}\cdot$$

Демак,

$$\frac{1}{2}\cdot k = -1$$

ёки

$$k = -2.$$

Изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси

$$y - 4 = -2\,(x + 1)$$

ёки

$$2x + y - 2 = 0.$$

2- мисол. (2,—5) нуқтадан ўтиб, $4x - 3y + 1 = 0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. (2,—5) нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

$$y + 5 = k\,(x - 2).$$

Бу тўғри чизиқлар орасидан $4x-3y+1=0$ билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқни ажратиб олишимиз керак. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласига мувофиқ (бурчакни изланаётган тўғри чизиқдан бошлаб ҳисобласак):

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{4}{3}-k}{1+\frac{4}{3}k} = 1$$

ёки

$$\left(1+\frac{4}{3}k\right) = \frac{4}{3}-k,$$

бу тенгликдан k ни топамиз:

$$k=\frac{1}{7}.$$

Буни тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасига қўямиз:

$$y+5=\frac{1}{7}(x-2)$$

ёки

$$x-7y-37=0.$$

Агар бурчак берилган тўғри чизиқдан бошлаб ҳисобланса

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k} = 1; \qquad k=-7$$

ва

$$7x+y-9=0.$$

Шундай қилиб, масаланинг иккита ечими бор экан.

3- мисол. $(-1, 2)$ нуқтадан ўтиб, $4x-3y+14=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу масаланинг жавобини тўғридан-тўғри ёзиш ҳам мумкин. Чунки масала шартидан

$$x_1=-1, \qquad y_1=2$$

ва

$$k=\frac{4}{3}$$

эканини кўриш осон. Демак,

$$y-2=\frac{4}{3}(x+1)$$

ёки соддалаштирилгандан кейин

$$4x - 3y + 10 = 0$$

изланаётган туғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

4- мисол. (6, 1) нуқтадан ўтиб, абсциссалар ўқи билан 135° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу масала ечимини ҳам тўғридан-тўғри ёзамиз:

$$y - 1 = -1(x - 6), \qquad (k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1)$$

ёки

$$x + y - 7 = 0.$$

5- мисол. $2x + 5y - 3 = 0$ ва $x - 3y + 7 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтиб, $2x - y + 8 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу масалани икки усул билан ечиш мумкин.

1- усул. Берилган:

$$2x + 5y - 3 = 0,$$
$$x - 3y + 7 = 0$$

тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топамиз. Бунинг учун 14- параграфда айтилганига биноан иккала тенгламани биргаликда ечиб, тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталарининг координаталари

$$x = -\frac{26}{11}, \quad y = \frac{17}{11}$$

эканини топамиз.

$$2x - y + 8 = 0$$

тенгламадан

$$k = 2$$

эканини топамиз. Демак,

$$y - \frac{17}{11} = 2\left(x + \frac{26}{11}\right)$$

ёки

$$22x - 11y + 69 = 0$$

изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

2- усул. Масалани тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топмасдан ҳам ечиш мумкин. Дастлаб масалани умуман

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

ва

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{5}$$

тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топмай туриб тузишдан бошлаймиз.

(4) ва (5) тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси (агар улар кесишса) уларнинг умумий нуқтаси бўлгани учун, бу нуқтанинг координаталари (4) тенгламани ҳам, (5) тенгламани ҳам қаноатлантириши керак.

Энди (4) ва (5) тенгламалардан ташкил топган

$$Ax + By + C + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \tag{6}$$

тенгламани қарайлик, бундаги λ ихтиёрий ўзгармас сон. Қаралаётган тўғри чизиқлар кесишган нуқтасининг координаталари бу тенгламани ҳам қаноатлантиради. (6) тенглама x, y координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама, шунинг учун бу тўғри чизиқ тенгламасидир. Демак (6) тўғри чизиқ (4) ва (5) тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтади. λ ихтиёрий сон бўлгани учун турли қийматларни қабул қила олади ва λ нинг ҳар бир қийматида (6) тенглама (4) ва (5) тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтган бирор тўғри чизиқни тасвирлайди, яъни (6) тенглама бу нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасидир.

Шундай қилиб, *(6) тенглама (4) ва (5) тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасидир.*

λ ни аниқлаш учун бирор қўшимча шарт берилган бўлиши керак. Масалан, қараётган мисолимизда бундай шарт (6) тўғри чизиқни бошқа бир тўғри чизиққа параллел бўлиши шартидан иборат.

Энди 5- мисолнинг 2- усулда ечилиши бизга анча ойдинлашиб қолди. (6) тенгламани тузамиз:

$$2x + 5y - 3 + \lambda(x - 3y + 7) = 0$$

ёки

$$(2 + \lambda)x + (5 - 3\lambda)y + (7\lambda - 3) = 0;$$

буни y га нисбатан ечсак,

$$y = \frac{2 + \lambda}{3\lambda - 5}x + \frac{7\lambda - 3}{3\lambda - 5}.$$

λ ни аниқлаш учун изланаётган тўғри чизиқ билан

$$2x - y + 8 = 0$$

тўғри чизиқнинг параллел бўлиш шартидан фойдаланамиз:

$$\frac{2 + \lambda}{3\lambda - 5} = 2.$$

Бу тенгламадан:

$$\lambda = \frac{12}{5}.$$

Демак,

$$2x + 5y - 3 + \frac{12}{5}(x - 3y + 7) = 0$$

ёки

$$22x - 11y + 69 = 0,$$

бу эса изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

6-мисол. M (3, 4) нуқтага $3x + 4y - 12 = 0$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган нуқта топилсин.

Ечиш. Берилган тўғри чизиққа нисбатан $M(3, 4)$ нуқтага симметрик бўлган нуқтани $M'(x, y)$ билан ҳамда $M(3, 4)$ нуқтанинг берилган тўғри чизиқдаги проекциясини $P(\bar{x}, \bar{y})$ билан белгилаймиз.

Дастлаб $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ларни топамиз. Бунинг учун $M(3, 4)$ нуқтадан берилган тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр тенгламасини тузамиз:

$$y - 4 = + \frac{4}{3}(x - 3)$$

ёки

$$4x - 3y = 0.$$

Энди

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0, \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини биргаликда ечиб, проекция координаталарини топамиз:

$$\bar{x} = 1\frac{11}{25}, \quad \bar{y} = 1\frac{23}{25}.$$

$P\left(1\frac{11}{25}, \ 1\frac{23}{25}\right)$ нуқта MM' кесмани тенг иккига бўлувчи нуқта, шунинг учун

$$1\frac{11}{25} = \frac{x + 3}{2},$$

$$1\frac{23}{25} = \frac{y + 4}{2}.$$

Бу тенгламалардан

$$x = -\frac{3}{25}, \quad y = -\frac{4}{25}.$$

Демак, изланаётган нуқта

$$M'\left(-\frac{3}{25}, \ -\frac{4}{25}\right).$$

7- мисол. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси $x+2y=0$ тўғри чизиқдан иборат бўлиб, унинг ён томонларидан бири $x-y+$ $+5=0$ тўғри чизиқ, иккинчи ён томони (4, 2) нуқтадан ўтади. Бу ён томоннинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Учбурчак асосини ташкил қилувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти:

$$k_1 = -\frac{1}{2}.$$

Берилган ён томон тенгламасидан, унинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_2 = 1.$$

Асос билан берилган ён томон орасидаги бурчакнинг тангенси:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Учбурчак асоси билан изланаётган ён томон орасидаги бурчакни β билан белгилаймиз, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha = -3$$

бўлади, чунки асосни берилган ён томон билан устма-уст тушириш учун асосни бир томонга буриш керак бўлса, изланаётган ён томон билан устма-уст тушириш учун уни қарама-қарши йўналиш бўйича буриш керак бўлади. Энди k_3 билан изланаётган ён томоннинг бурчак коэффициентини белгилаймиз. Бу ҳолда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$$

ёки

$$-3 = \frac{k_3 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} k_3}.$$

Бу тенгламани ечиб

$$k_3 = 7$$

эканини топамиз. Энди берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузиш қоидасига асосан:

$$y - 2 = 7(x - 4)$$

ёки

$$7x - y - 26 = 0.$$

Бу изланаётган ён томон тенгламаси.

24-§. БЕРИЛГАН ИККИ НУҚТАДАН ЎТУВЧИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда тўғри чизиқнинг ўрни икки нуқта билан аниқланиши мумкин. Бизга $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз. Бунинг учун дастлаб $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини оламиз:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1}$$

Бу тўғри чизиқлар орасидан $B(x_2, y_2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқни ажратиб олишимиз керак. Тўғри чизиқ $B(x_2, y_2)$ нуқтадан ўтса, бу нуқтанинг координаталари унинг тенгламасини қаноатлантиради, яъни биз излаётган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \tag{2}$$

шартни қаноатлантирадк. Бу тенгламадан k ни аниқлаб (1) тенгламага қўйсак, яъни (1) ва (2) тенгламалардан k ни йўқотсак, берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузган бўламиз. Аммо k ни йўқотиш учун (1) тенгламани (2) тенгламага ҳадлаб бўлсак ҳам бўлади; бўлиш натижасида

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

(2) тенгламадан (3) тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш қулай:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

1- мисол. $A(2, -3)$ ва $B(-4, 7)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу мисолда

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -3, \quad x_2 = -4, \quad y_2 = 7.$$

Буларни (3) тенгламага қўямиз:

$$\frac{y + 3}{7 + 3} = \frac{x - 2}{-4 - 2}$$

ёки ўхшаш ҳадларни ихчамласак,

$$5x + 3y - 1 = 0$$

тенглама ҳосил бўлади.

2- мисол. $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ва (1, 3) нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу мисолда қўйилган масалани ечиш учун берилган тенгламаларни биргаликда ечиб, тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топиш ва топилган бу нуқта билан (1, 3) нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини биринчи мисолдаги каби тузиш мумкин.

Аммо берилган тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топмасдан ҳам масалани ечса бўлади. Биз бу масаланинг шу йўл билан ечилишини кўрсатамиз. Бунинг учун ўтган параграфда баён қилинган (5- мисол) икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини мисолда берилган тўғри чизиқлар учун ёзамиз:

$$x - 3y + 10 + \lambda(x + 4y - 2) = 0. \qquad (5)$$

Бу тўғри чизиқ (1, 3) нуқтадан ўтса, унинг координаталари шу тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантириши керак, шунинг учун бу тенгламада $x = 1$, $y = 3$ деб оламиз:

$$1 - 3\cdot 3 + 10 + \lambda(1 + 4\cdot 3 - 2) = 0.$$

Бу тенгламадан λ ни топамиз:

$$\lambda = -\frac{2}{11}.$$

(5) тенгламадаги λ нинг ўрнига $\lambda = -\frac{2}{11}$ ни қўямиз:

$$x - 3y + 10 - \frac{2}{11}(x + 4y - 2) = 0$$

ёки

$$9x - 41y + 114 = 0.$$

Бу изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

3- мисол. Учлари $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(3, 3)$ нуқталарида ётадиган учбурчак мавжудми?

Ечиш. Агар берилган нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаса, уларни бир-бири билан туташтириб учбурчак ясаш мумкин. Агар бу уч нуқта бир тўғри чизиқда ётса, бу нуқталардан учбурчак ясаб бўлмайди. Демак, A, B, C нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши ёки ётмаслигини аниқлашимиз лозим. Буни аниқлаш учун икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини оламиз:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Агар бу тўғри чизиқ $M(x_3, y_3)$ нуқтадан ўтса, бу нуқтанинг x_3, y_3 координаталари (3) тенгламани қаноатлантириши керак, яъни

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6)$$

бўлиши керак. Бу тенглик *уч нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиш шартидир.*

Бизнинг мисолда:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3,$$
$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 2, \qquad y_3 = 3.$$

(6) шартни текшириб кўриш учун бу координаталарни (6) муносабатга қўямиз:

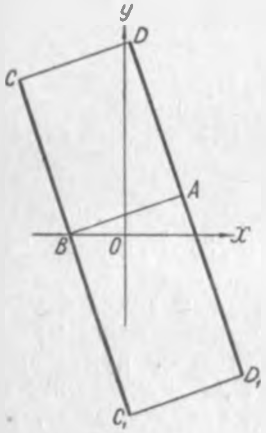
$$\frac{3-1}{2-1} = \frac{3-1}{2-1},$$

бундан (6) шартнинг бажарилгани кўриниб турибди.

Демак, A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётар экан. Бу нуқталар ёрдамида учбурчак ясаб бўлмайди.

25- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ДОИР МАСАЛАЛАР

1- масала. $ABCD$ тўғри тўртбурчак AB томонининг учлари $A(3, 2)$ ва $B(-3,0)$ нуқталарда ётади; AD томонининг узунлиги 8 *см* га тенг. Бу тўғри тўртбурчак томонларининг тенгламалари ёзилсин.



44 -чизма.

Ечиш. Масалани ечишдан олдин ёрдамчи чизма ясаб, ундан фойдаланиш яхши натижа беради (44- чизма).

Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасига кўра AB томонининг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{y-2}{0-2} = \frac{x-3}{-3-3}$$

ёки

$$x - 3y + 3 = 0.$$

Бу тенгламани y га нисбатан ечиб, AB томонининг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k = \frac{1}{3}.$$

Икки тўғри чизиқнинг бир-бирига перпендикуляр бўлиш шартидан ($k_1k_2 = -1$) фойдаланиб, A ва B учлардан ўтувчи AD ва BC томонларнинг бурчак коэффициентларини топамиз. Бу бурчак коэффициентлар бир хил бўлиб,

$$k_1 = -3$$

га тенг. Энди тўғри чизиқлар дастасининг

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

тенгламасидан фойдаланиб, *AD* нинг тенгламасини ёзамиз:

$$y-2=-3(x-3)$$

ёки

$$3x+y-11=0.$$

BC нинг тенгламаси:

$$y-0=-3(x+3)$$

ёки

$$3x+y+9=0.$$

Тўғри тўртбурчакнинг тўртинчи томонини топиш учун унинг *AB* томонга параллеллигидан ва *AB* дан 8 *см* узоқда эканлигидан фойдаланамиз (*AB* дан 8 *см* узоқликда *AD* ёки AD_1) бўлиши мумкин. Шунинг учун ечим икки хил бўлади.

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топиш формуласига биноан:

$$\frac{x-3y+3}{-\sqrt{1+9}}=\pm 8.$$

Демак, *CD* томоннинг тенгламаси:

$$x-3y+(3-8\sqrt{10})=0.$$

C_1D_1 нинг тенгламаси эса:

$$x-3y+(3+8\sqrt{10})=0.$$

2- масала. *Учлари* $A\,(1,\,0{,}5)$, $B\,(3{,}2)$, $C\left(1\,\frac{1}{2},\,4\right)$, $D\left(-1\,\frac{1}{2},\,\frac{7}{4}\right)$ нуқталарда бўлган тўртбурчак трапеция экани кўрсатилсин ва унинг баландлиги ҳисоблансин.

Ечиш. Бу масалани трапецияни ясамасдан ечамиз. Агар тўртбурчак трапеция бўлса, унинг икки томони бир-бирига параллел бўлади. Демак, берилган тўртбурчакнинг икки томони бир-бирига параллел эканини кўрсатиш, унинг трапеция эканлигининг етарли далили бўла олади. Тўғри чизиқларнинг ўзаро параллел бўлиши учун уларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлиши керак. Тўртбурчакнинг ҳамма томонларининг бурчак коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0{,}5}{3-1}=\frac{1{,}5}{2}=\frac{3}{4};\quad k_{BC}=\frac{4-2}{\frac{3}{2}-3}=\frac{2}{3};$$

$$k_{CD}=\frac{\frac{7}{4}-4}{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4};\quad k_{DA}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{4}}{1+\frac{3}{2}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

AB ва CD томонларининг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг экани кўриниб турибди, демак, бу томонлар параллел ва берилган тўртбурчак трапециядир.

Ҳисобланган бурчак коэффициентлар BC томон билан CD томонининг бир-бирига перпендикуляр эканини кўрсатади. Демак, C нуқтадан AB томонгача бўлган масофа трапециянинг баландлиги булади.

AB нинг тенгламаси:

$$\frac{y-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{x-1}{3-1}$$

ёки

$$3x-4y-1=0.$$

Трапециянинг баландлиги:

$$BC=\left|\frac{3\cdot\frac{3}{2}-4\cdot4-1}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{5}{2}=2{,}5 \text{ масштаб бирлиги.}$$

Бу масалада баландликни B ва C нуқталар орасидаги масофани топиш формуласи бўйича ҳам топса булади:

$$d=\sqrt{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2+(2-4)^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5 \text{ масштаб бирлиги.}$$

3- масала. $3x-4y+3=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, ундан 2 бирлик масофада ўтган тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиққа ихтиёрий $M(X, Y)$ нуқта оламиз. Бу нуқтанинг X ва Y координаталари орасидаги муносабатни масала шартига мувофиқ топсак, изланаётган тўғри чизиқ тенгламасини тузган бўламиз. $M(X, Y)$ нуқтадан берилган тўғри чизиққача масофани топамиз. Бунинг учун берилган тўғри чизиқни нормал шаклга келтирамиз:

$$\frac{3x-4y+3}{-\sqrt{9+16}}=0.$$

Энди x, y координаталар ўрнига M нуқтанинг X ва Y координаталарини қўямиз, бу ҳолда изланаётган тўғри чизиқдан берилган тўғри чизиққача булган масофа топилади. Нуқтанинг тўғри чизиқдан четланишини эътиборга олсак,

$$\frac{3X-4Y+3}{-5}=\pm 2$$

ёки

$$3X-4Y+3=\pm 10.$$

Бундан:

$$3X - 4Y - 7 = 0, \quad 3X - 4Y + 13 = 0$$

тенгламаларни ёза оламиз. Бу изланаётган туғри чизиқлар тенгламаларидир. Масала шартини иккита тўғри чизиқ қаноатлантирар экан.

Бу масалада берилган тўғри чизиқ билан изланаётган тўғри чизиқнинг ўзгарувчи координаталарини бир-биридан ажратиш учун катта X ва Y ҳарфлар ишлатилди. Буларни кичик x ва y ҳарфлар билан алмаштирилса, тўғри чизиқларнинг координаталар системасига нисбатан олган ўрни ўзгармайди. Демак, топилган тенгламаларни

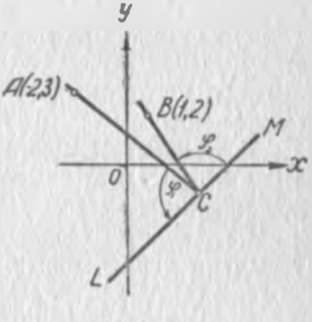
$$3x - 4y - 7 = 0 \text{ ва } 3x - 4y + 13 = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин.

4- масала. $2x - 3y - 6 = 0$ (I) ва $4x - 6y + 7 = 0$ (II) параллел тўғри чизиқлар орасида ётувчи ва улар орасидаги масофани (I) туғри чизиқдан бошлаб ҳисоблаганда 1:2 нисбатда бўлувчи тўғри чизиқ топилсин.

Ечиш. 45- чизмада берилган ва изланаётган тўғри чизиқлар тасвирланган.

45- чизма.



46- чизма.

Изланаётган тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта оламиз. M нуқтанинг (I) тўғри чизиқдан четланишини δ_1 билан, (II) тўғри чизиқдан четланишини δ_2 билан белгиласак, масаланинг шартига биноан

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1}{2}$$

бўлади (δ_1 ва δ_2 четланишларнинг ишоралари ҳозирча номаълум).

Берилган тенгламаларни нормал тенгламага келтириб, $M(x, y)$ нуқтанинг координаталарини тенгламадаги координаталар ўрнига қуямиз:

$$\delta_1 = \frac{2x-3y-6}{\sqrt{4+9}} = \frac{2x-3y-6}{\sqrt{13}},$$
$$\delta_2 = \frac{4x-6y+7}{\sqrt{16+36}} = \frac{-4x+6y-7}{2\sqrt{13}}.$$

Берилган тўғри чизиқлар координаталар бошининг турли томонига жойлашган бўлиб, M нуқта билан координаталар боши (I) тўғри чизиқнинг ҳам (II) тўғри чизиқнинг ҳам бир томонига жойлашган. Шунинг учун δ_1 ва δ_2 четланишлар бир хил ишорали, демак,

$$\left|\frac{\delta_1}{\delta_2}\right| = \frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{2x-3y-6}{\sqrt{13}} : \frac{-4x+6y-7}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$$

ёки

$$12x - 18y - 17 = 0.$$

Бу изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

5- масала. $A(-2,3)$ нуқтадан ўтувчи ёруғлик нури $x-y-2=0$ тўғри чизиққа тушиб, ундан аксланиб қайтиб $B(1,2)$ нуқтадан ўтади.

Тушувчи ва қайтган (аксланган) нурлар тенгламалари топилсин.

Ечиш. Масалани ечиш учун аввал чизма ясаб оламиз (46- чизма).

Тушувчи (AC) ва қайтган (CB) нурларни ясаш учун уларнинг берилган LM тўғри чизиқ билан кесишган C нуқтаси маълум бўлиши керак.

Нурларнинг синиш қонунидан φ_1 тушиш бурчаги φ_2 қайтиш бурчагига тенг эканини биламиз, яъни:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \, (\varphi_1 = \angle ACL = \angle BCM).$$

C нуқтанинг координаталари x_1, y_1 бўлсин.

Тушувчи нурнинг бурчак коэффициенти k_1, қайтган нурнинг бурчак коэффициенти k_2 бўлсин. Бу ҳолда тушувчи нур тенгламаси

$$y - 3 = k_1(x+2),$$

қайтган нур тенгламаси

$$y - 2 = k_2(x-1)$$

бўлади. C нуқта бу нурлар билан берилган тўғри чизиқнинг умумий нуқтаси бўлгани учун:

$$\begin{aligned} y_1 - 3 &= k_1(x_1+2), \\ y_1 - 2 &= k_2(x_1-1), \\ x_1 - y_1 - 2 &= 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

$\varphi_1 = \varphi_2$ бўлгани учун $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$ ёки икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласидан фойдалансак,

$$\frac{1-k_1}{1+k_1} = \frac{k_1-1}{1+k_2}$$

ёки

$$k_1k_2 = 1. \qquad (^{**})$$

Бу тенгликдан k_2 ни топиб (*) тенгламага қўямиз, ҳосил бўлган натижа билан (*) системанинг биринчи тенгламасини ҳадлаб кўпайтирамиз:

$$(y_1-2)(y_1-3) = (x_1-1)(x_1+2).$$

(*) системанинг учинчи тенгламасидан y_1 нинг ифодасини топиб, бу тенгламага қўямиз:

$$(x_1-4)(x_1-5) = (x_1-1)(x_1+2);$$

бу тенгламани ечиб, $x_1 = 2{,}2$ ва $y_1 = 0{,}2$ эканини топамиз, (*) системанинг биринчи иккита тенгламасига топилган қийматларни қўйиб,

$$k_1 = -\frac{2}{3}, \quad k_2 = -\frac{3}{2}$$

эканини топамиз. Демак, тушувчи нур тенгламаси:

$$y-3 = -\frac{2}{3}(x+2)$$

ёки соддалаштирсак,

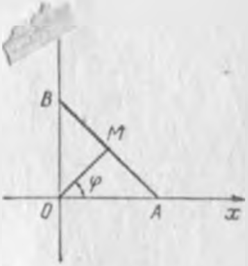
$$2x+3y-5=0;$$

қайтувчи нурнинг тенгламаси:

$$y-2 = -\frac{3}{2}(x-1)$$

ёки соддалаштирсак,

$$3x+2y-7=0.$$



47 -чизма.

6- мисол. Узунлиги $2a$ $(a>0)$ га тенг бўлган AB кесма учлари билан бирор тўғри бурчак томонлари бўйича сирпаниб ҳаракат қилади. Тўғри бурчакнинг O учидан бу кесмага OM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг ҳаракати давомида OM перпендикулярнинг ҳар хил ҳолатларида M асосининг мос траекторияси топилсин ва бу траекториянинг шакли текширилсин (47- чизма).

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $AB = 2a$, M нуқта тўғри бурчакнинг O учидан AB кесмага туширилган перпендикулярнинг асоси.

Изланаётган геометрик ўриннинг қутб координаталар системасига нисбатан тенгламасини тузамиз. Тўғри бурчакнинг O

учини қутб учун ва томонлардан бирини, масалан, OA ни қутб ўқи учун қабул қиламиз. M нуқтанинг координаталарини ρ ва φ орқали белгилаймиз: $M(\rho, \varphi)$.

AOM тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$OM = OA \cos \varphi$$

ёки

$$\rho = OA \cos \varphi$$

$\triangle\ AOB$ дан

$$OA = AB \sin \varphi$$

ёки

$$OA = 2a \sin \varphi.$$

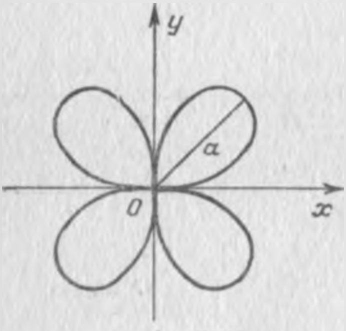
Демак,

$$\rho = 2a \sin \varphi \cos \varphi$$

ёки

$$\rho = a \sin 2\varphi. \qquad (a)$$

Бу тенглама изланаётган геометрик ўриннинг (M нуқта ҳаракатининг траекториясининг) қутб координаталар системасидаги тенгламасидир.



48 -чизма.

Энди ҳосил қилинган тенглама қандай кўринишдаги чизиқни тасвирлашини текширамиз.

ρ қутб радиуснинг энг катта қиймати $\sin 2\varphi$ энг катта қийматга эга бўлганда, яъни $\sin 2\varphi = 1$ бўлганда, ёки кейинги тенгликдан кўринишича $\varphi = 45°, 225°, \ldots$ бўлганда ҳосил бўлади. φ нинг бу қийматларида қутб радиуснинг энг катта қиймати $\rho = a$ дан иборат бўлади.

ρ қутб радиуснинг энг кичик қиймати $\sin 2\varphi$ энг кичик қийматга эга бўлганда, яъни $\sin 2\varphi = -1$ бўлганда, ёки кейинги тенгликдан кўринишича $\varphi = 135°, 315°, \ldots$ бўлганда ҳосил бўлади. ρ нинг бу энг кичик қиймати $\rho = -a$ дир.

Агар $\varphi = 0°, 90°, 180° \ldots$ бўлса, $\rho = 0$ бўлади. Энди φ нинг юқорида қаралган қийматлари орасидан бир нечтасини олиб ρ нинг унга мос бўлган қийматларини топамиз ва қутб координаталар системасида мос нуқталарни ясаймиз. Натижада 48- чизмада кўрсатилган чизиқни ҳосил қиламиз. Бу чизиқ *тўрт япроқли гул* деб аталади (48- чизмада $a = 10$ деб қабул қилинган).

Машқлар

1. Oy уқдан миқдори 7 бирликка тенг кесма кесиб, Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан: 1) 30°; 2) 120°; 3) 135° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

2. Oy ўқдан миқдори 2 бирликка тенг кесма кесиб, Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 150° ли бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

3. Координаталар бошидан ўтиб Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 1) 45° ли; 2) 135° ли бурчак ҳосил қилувчи туғри чизиқ тенгламасини тузинг.

4. Қуйида тўғри чизиқлар тенгламалари берилган. Бу тўғри чизиқлар координата уқларига нисбатан қандай жойлашганини айтиб беринг.

1) $2x - y = 0$; 2) $x - 3 = 0$; 3) $x - 5 = 0$;
4) $x = 0$; 5) $y = 0$.

5. Тўғри чизиқнинг умумий куринишдаги тенгламалари берилган. Уларни бурчак коэффициентли тенгламалар шаклига келтиринг:

1) $x - 2y + 1 = 0$, 2) $3x + 5y - 1 = 0$, 3) $8x + 3y = 0$.

6. Абсциссалар ўқидан ажратган кесмасининг миқдори 2 бирлик, ординаталар укидан ажратган кесмасининг миқдори 3 бирлик бўлган чизиқнинг тенгламасини тузинг.

7. Абсциссалар ўқидан ажратган кесмасининг миқдори -5 бирлик, ординаталар укидан ажратган кесмасининг миқдори 5 бирлик бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

8. Ушбу

1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $3x - 5y - 15 = 0$; 3) ax [illegible] $- ab = 0$;
4) $y = 5x - 2$; 5) $y = x + 1$; 6) [illegible] $= - bx + c$

тўғри чизиқларнинг тенгламаларини уларнинг кесмаларга нисбатан тенгламалари шаклида ёзинг.

9. O (0,0) ва A ($-$ 5,0) нуқталар берилган бўлиб, OA кесмада диагоналлари B (0,3) нуқтада кесишувчи параллелограмм ясалган. Бу параллелограммнинг томонлари ҳамда диагоналларининг тенгламаларини тузинг.

10. M (5,2) нуқтадан утиб, координата бурчагидан юзи 20 *кв.* бирликка тенг учбурчак кесувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

11. Ромбнинг диагоналлари мос равишда 6 ва 4 бирликка тенг бўлиб, улар координата ўқлари учун қабул қилинган. Ромбнинг томонлари тенгламалари ёзилсин.

12. Қуйидаги тенгсизликларнинг геометрик маъносини аниқланг.

1) $y > 2x + 1$, 2) $y < 2x + 1$, 3) $x > 3$, 4) $x < 3$.

13. M (x, y) нуқта ҳаракати давомида A ($-$ 3,3) ва B (3, $-$ 3) нуқталаргача масофалар квадратларининг айирмаси ҳамма вақт 36 га тенг бўлиб қолади. Бу нуқта траекторияси тенгламасини тузинг.

14. Томонлари

$$x - 2y = 0, \qquad 4x - 3y - 3 = 0, \qquad 3x - y - 7 = 0$$

тўғри чизиқлардан иборат учбурчакнинг юзини топинг.

15. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг тенгламасини нормал куринишга келтиринг:

1) $3x + 4y - 20 = 0$, 2) $2x - 3y = 6$.

16. Координаталар бошидан тўғри чизиққа ўтказилган перпендикулярнинг узунлиги 2 бирлик бўлиб, бу перпендикуляр билан Ox уқ орасидаги бурчак: 1) 45°, 2) 135°, 3) 60°. Тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг ва берилган маълумотларга биноан тўғри чизиқни ясанг.

17. $A(2, 3)$ ва $B(3, 0)$ нуқталарнинг ҳар биридан $3x + 4y - 20 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

18. $y = kx + 3$ тўғри чизиқ координаталар бошидан $\sqrt{3}$ масофа узоқдан ўтган. Бурчак коэффициент k топилсин.

19. $4x - 3y = 0$ тўғри чизиқдан 5 бирлик узоқда ётувчи текислик нуқталарининг геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

20. Қуйидаги берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

1) $5x - y - 7 = 0$ ва $3x + 2y = 0$; 3) $3x + 2y + 7 = 0$ ва $2x - 3y - 3 = 0$;
2) $x - 2y - 4 = 0$ ва $2x - 4y + 3 = 0$; 4) $3x - 2y - 1 = 0$ ва $5x + 2y + 3 = 0$.

21. $M(1, 2)$ нуқтадан ўтиб, $3x + 2y - 5 = 0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

22. $A(-4, 5)$ нуқта диагонали $7x - y + 8 = 0$ тўғри чизиқла ётган квадратнинг битта учидир. Квадратнинг томонлари ва иккинчи диагоналининг тенгламаларини тузинг.

23. Квадратнинг иккита қарама-қарши учи $A(-1,3)$ ва $C(6,2)$ нуқталарда ётади. Квадрат томонларининг тенгламаларини тузинг.

24. $A(-2,3)$ нуқтадан Ox ўқ билан α бурчак ташкил қилувчи ёруғлик нури юборилган. Нур Ox ўққа етиб бориб, ундан қайтган. Тушган ва қайтган нурлар тенгламаларини тузинг.

25. $x - 2y + 5 = 0$ тўғри чизиқ бўйича йўналтирилган ёруғлик нури $3x - 2y + 7 = 0$ тўғри чизиқдан қайтган. Қайтган нур тенгламасини тузинг.

26. $M(x, y)$ нуқтадан ўтиб, $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тугри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

27. 21- машқнинг натижасига асосланиб $M(1, 4)$ нуқтадан ўтиб:

$$1)\ x - 3y + 5 = 0,\ 2)\ 3x - 4y + 5 = 0,\ 3)\ 8x - 12y + 3 = 0,$$
$$4)\ 5x - 2 = 0, \qquad 5)\ 6y - 5 = 0$$

тўғри чизиқларнинг ҳар бирига параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

28. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашишини 27- машқнинг натижасига мувофиқ текширинг:

1) $x + 2y + 5 = 0$ ва $3x - 6y + 8 = 0$; 3) $9x - 12y - 4 = 0$ ва $8x + 6y + 1 = 0$;
2) $9x - 12y - 4 = 0$ ва $8x + 6y + 1 = 0$; 4) $4x + 6y - 7 = 0$ ва $12x + 18y - 21 = 0$.

29. $M(-1,2)$ нуқтадан ўтиб: 1) $5x - 2y + 3 = 0$, 2) $x + 4y - 1 = 0$, 3) $3x + 7y - 8 = 0$, 4) $2x + 3y + 5 = 0$ тугри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

30. Иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак аниқлансин:

$$\begin{array}{ll} 1)\ 3x - y + 5 = 0 & 2)\ \dfrac{y}{12} - \dfrac{x}{3} = 1 \\[2ex] 2x + y - 7 = 0, & \dfrac{x}{25} - \dfrac{y}{15} = 1. \end{array}$$

31. Учлари $A(2, 1)$, $B(3, 1)$ ва $C(1, 2)$ нуқтада бўлган учбурчак томонларининг узунликлари ва ички бурчакларини топинг.

32. Координаталар бошидан ўтиб: 1) $y = 2x + 3$ тўғри чизиққа параллел бўлган, 2) $x - 3y - 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган: 3) $y = 3x - 5$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

33. Учбурчакнинг иккита учи $A(3,4)$ ва $B(5,1)$ нуқтада бўлиб, унинг баландликлари $(4,1)$ нуқтада кесишади. Учбурчакнинг учинчи C учини топинг.

34. $2x + 3y - 6 = 0$ тўғри чизиқ Ox, Oy ўқларни A, B нуқталарда кесиб ўтади. C нуқта AB кесмани $AC : CB = 1 : 2$ нисбатда бўлади. C нуқтадан AB тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламасини тузинг.

35. Учбурчакнинг $3x + 4y - 12 = 0$ ва $3x - 7y + 21 = 0$ томонлари берилган. $M(4,3)$ нуқта унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси эканлиги маълум. Учбурчакнинг учинчи томони тенгламаси тузилсин.

36. Биринчи чоракда жойлашган ва томонининг узунлиги 5 узунлик бирлигига тенг бўлган ромбнинг икки томони абсцисса ўқи ва $4x - 3y = 0$ тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. Ромбнинг қолган томонларининг тенгламалари ва диагоналлари тенгламалари тузилсин.

37. Координаталари мос равишда $(1, -1)$, $(5, 2)$ ва $(4, 5)$ бўлган A, B, C нуқталар берилган. AC тўғри чизиққа нисбатан B нуқтага симметрик бўлган D нуқтанинг координаталари топилсин ва шу нуқтадан A, C нуқталар орқали ўтказилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари тузилсин.

38. Параллелограмм икки учининг координаталари мос равишда $(1, 1)$ ва $(2, -2)$ нуқталарда бўлиб, диагоналлари $(-1,0)$ нуқтада кесишади. Параллелограмм томонларининг тенгламалари тузилсин.

39. $2x + 3y - 12 = 0$ тўғри чизиқда $(4,5)$ ва $(1, -2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқтанинг координаталари топилсин.

40. $A(-3,5)$ нуқтадан ўтувчи ва ордината ҳамда абсцисса ўқларидан кесган кесмаларининг узунликлари нисбати $1:2$ каби бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

41. $A(-1,3)$ нуқтадан ўтувчи шундай тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсинки, бу тўғри чизиқнинг $x + 2y + 5 = 0$ ва $x + 2y - 2 = 0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги кесмасининг ўрта нуқтаси $2x - 3y - 11 = 0$ тўғри чизиқда ётсин.

42. Текисликдаги $x - 2y + 2 = 0$ тўғри чизиққа $x + 2y - 6 = 0$ тўғри чизиққа нисбатан икки марта яқин жойлашган нуқталар геометрик ўринларининг тенгламалари тузилсин.

43. Учлари $A(-2,1)$, $B(2,5)$ ва $C(2, -1)$ нуқталарда жойлашган учбурчакка ташқи чизилган айлана марказининг координаталари топилсин ва радиусининг узунлиги ҳисоблансин.

44. Координата бошидан ўтувчи ва $A(1, 3)$ нуқтага $B(4, 2)$ нуқтага нисбатан 4 марта яқин масофадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

45. Гипотенузасининг тенгламаси $3x + 2y - 6 = 0$ бўлган ва учи $A(-1, -2)$ нуқтада жойлашган тўғри бурчакли тенг томонли учбурчакнинг қолган икки томони тенгламалари тузилсин.

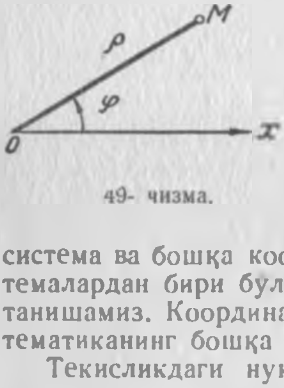
46. Биринчи чоракда жойлашган ромбнинг икки томони $x - 3y + 4 = 0$ ва $3x - y - 4 = 0$ тенгламалар билан ифодаланган. Шу томонларнинг кесишиш нуқтасидан ўтган диагоналининг узунлиги $4\sqrt{2}$ узунлик бирлигига тенг. Ромбнинг қолган томонларининг ва диагоналларининг тенгламалари тузилсин.

Туртинчи боб

ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

26-§. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Биз юқорида туғри бурчакли Декарт координаталари системаси билан танишдик. Бу системада нуқта урнини унинг координаталари билан аниқладик ва чизиқлар, шу жумладан, туғри чизиқ бу системага нисбатан тенглама билан ифода этилишини ва, аксинча, x ва y узгарувчиларни боғловчи тенглама Декарт системасига нисбатан бирор чизиқни тасвирлаши мумкин эканини курдик.



49- чизма.

Бундай масалаларни фақат туғри бурчакли Декарт системасидагина эмас, балки бошқа координаталар системасида ҳам ҳал қилиш мумкин. Бундай координаталар системасига Декартнинг қийшиқ бурчакли координаталар системаси, қутб координаталар системаси, цилиндрик координаталар системаси деб аталадиган система ва бошқа координаталар системаси киради. Биз бу системалардан бири булган қутб координаталар системаси билан танишамиз. Координаталарнинг бошқа системалари олий математиканинг бошқа булимларида курилади.

Текисликдаги нуқталарнинг ўрнини қутб координаталар системасида аниқлаш учун унда бирор O нуқта олиб, бу нуқтадан Ox туғри чизиқни ўтказамиз (49- чизма) ва бу туғри чизиқда мусбат йуналишни белгилаймиз (бу йуналиш одатда 49- чизмада кўрсатилгандек олинади). O нуқтани *қутб* деб, Ox уқни эса *қутб ўқи* деб атаймиз.

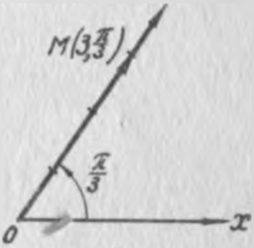
Энди маълум масштаб бирлиги танлаб олиб, текисликдаги ихтиёрий M нуқтанинг урнини O қутбга ва Ox қутб уқига нисбатан аниқлаймиз. Бунинг учун M нуқта билан O қутбни туташтирамиз. Натижада қутбдан M нуқтагача бўлган OM масофа ва қутб ўқи билан $\overline{OM}$ йўналган кесма орасидаги $\varphi = \angle xOM$ бурчак ҳосил бўлади. $\rho = |\overline{OM}|$ ни M нуқтанинг *қутб радиуси*, φ бурчакни эса M нуқтанинг *қутб бурчаги* дейилади. φ бурчакни тригонометрияда қараладиган бурчак деб тушунишга келишиб оламиз, яъни бу бурчакни ишораси билан $\pm 2k\pi$ қушилувчи аниқлигида қараймиз. ρ ва φ ни M нуқтанинг *қутб координаталари* деб атаймиз ва $M(\rho, \varphi)$ шаклда ёзамиз. M нуқта қутб бурчагининг

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматини M нуқта қутб бурчагининг *бош қиймати* деб аталади.

1- мисол. $M\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ нуқта ясалсин.

Ясаш. Текисликда O қутбни белгилаб, ундан Ox қутб ўқини ўтказамиз. Ox ўқ билан $\frac{\pi}{3}$ бурчак ташкил қилувчи OM тўғри чизиқ ўтказамиз, яъни Ox ўқни мусбат йўналишда $\frac{\pi}{3}$ бурчакка бурамиз ва унда мусбат йўналишда 3 бирлик кесма ажратамиз, натижада OM кесма ҳосил бўлади. Бу кесманинг M учи изланаётган нуқта бўлади (50- чизма).



50- чизма.

Юқорида айтилганларга биноан қутб координаталари учун

$$\rho \geqslant 0 \text{ ва } -\pi < \varphi \leqslant \pi$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Қутб координаталарига бундай шартни қуймаслик ҳам мумкин. Бу ҳолда ρ билан φ ни умуман $-\infty$ дан $+\infty$ гача узгаради деб қаралади. ρ билан φ $-\infty$ дан $+\infty$ гача узгарганда қутб координаталар системаси *умумлашган қутб координаталари* дейилади.

Умумлашган қутб координаталар системасида M нуқтани ясаш учун Ox қутб ўқини O қутб атрофида φ бурчакка буриб, ўқ ясаймиз. Бу ўқда йўналишни эътиборга олиб, $\overline{OM}$ йўналган кесма ясаймиз. Унинг M учи изланаётган M нуқта бўлади.

2- мисол. $A\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$ нуқта ясалсин.

Ясаш. Ox қутб ўқини ўтказиб, уни $\frac{\pi}{4}$ бурчакка бурамиз ва шу билан $\overline{OM}$ мусбат йўналишини аниқлаймиз. Энди $\rho = -2$ булгани учун OM нинг тескари йўналишдаги давомида $|-2| = 2$ бирлик масштабни оламиз, бу кесманинг учи изланаётган $A\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$ нуқтани беради (51- чизма).

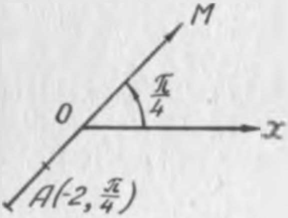
Бундан кейин алоҳида шарт қуйилмаса, ρ ни $-\infty$ дан $+\infty$ гача, φ ни эса $(-\pi, \pi)$ оралиқда қараймиз.

27-§. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАРИДАН ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИГА ЎТИШ

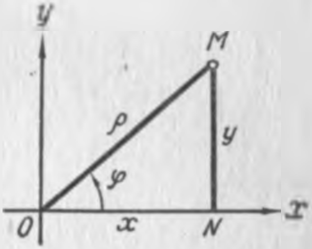
Математика ва техника фанларининг кўпгина масалаларини ечишда координаталарнинг бир системасидан иккинчи системасига ўтиш масаланинг ечилишини осонлаштиради, шунинг учун координаталарнинг бир системасидан бошқасига ўтиш масаласи катта қизиқиш уйғотади.

Биз бу параграфда Декарт системасидан қутб системасига ўтиш ва, аксинча, қутб системасидан Декарт системасига ўтиш масаласини қараймиз.

Текисликдаги бирор M нуқтанинг Декарт координаталари x, y, қутб координаталари ρ, φ бўлсин (52- чизма). Агар O координаталар бошини қутб деб, Ox ўқни қутб ўқи деб олсак ва M нуқтанинг уларга нисбатан ўрнини аниқласак, у ҳолда тўғри бурчакли OMN учбурчак ҳосил бўлади.



51 -чизма.



52 -чизма.

Бу учбурчакдан:

$$ON = OM\cos\varphi,$$
$$MN = OM\sin\varphi$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бу формула нуқтанинг Декарт координаталарини унинг қутб координаталари орқали ифода этади.

Энди нуқтанинг қутб координаталарини унинг Декарт координаталари орқали ифода этиш учун OMN учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра:

$$ON^2 + NM^2 = OM^2$$

ёки

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

ва шу учбурчакдан

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

эканини топамиз. Шундай қилиб:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Бу формулалар қутб координаталарини Декарт координаталари орқали ифодаловчи формулалардир.

Нуқтанинг қутб координаталари берилган бўлса, (1) формулалар ёрдами билан унинг Декарт координаталари топилади, агар бирор геометрик образнинг тенгламаси Декарт системасида берилган бўлса, ундаги x, y ўрнига бу ўзгарувчиларнинг ρ, φ орқали ифодалари қўйилса, қаралаётган геометрик образнинг берилган тенгламасидан унинг қутб координаталардаги тенгламасига ўтилган бўлади.

(2) тенгламалар ёрдамида ҳам худди шундай масалалар қаралади. Шунинг учун ҳам (1) ва (2) формулаларни *ўтиш формулалари* дейилади.

Мисол. $M(2, -2)$ нуқтанинг қутб координаталари топилсин.

Ечиш. Бу мисолда

$$x = 2, \qquad y = -2.$$

(2) формулага биноан:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{2}\right) = \operatorname{arctg}(-1).$$

M нуқтанинг Декарт координаталаридан кўринишича y ордината манфий, шунинг учун φ нинг $\frac{3}{4}\pi$ ва $-\frac{\pi}{4}$ қийматларидан $-\frac{\pi}{4}$ ни олиш керак, яъни:

$$y = \rho\sin\varphi$$

тенгликда y билан $\sin\varphi$ нинг ишорасини бир хил олиш керак:

$$(\rho \geqslant 0, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi).$$

Шундай қилиб берилган нуқтанинг қутб координаталари: $\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

28-§. ЧИЗИҚЛАРНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Текисликдаги Декарт координаталари системасида x, y ўзгарувчиларни боғловчи

$$y = f(x) \tag{1}$$

тенглама ёки

$$F(x, y) = 0 \tag{1'}$$

тенглама текисликда бирор чизиқнинг тенгламаси экани маълум. Худди шунга ўхшаш қутб координаталари системасида ρ, φ ўзгарувчиларни боғловчи

$$\rho = f_1(\varphi) \text{ ёки } F_1(\rho, \varphi) = 0 \tag{2}$$

тенглама текисликда қутб системасига нисбатан бирор чизиқ тенгламасини тасвирлайди.

Текисликдаги чизиқнинг қутб системасига нисбатан тенгламасини тузиш учун у чизиқни нуқталарнинг геометрик ўрни деб қараб, бу геометрик ўрин нуқталарининг умумий хоссасига асосан (1) ёки (1′) тенгламаларни тузганимиздек, (2) тенгламани тузамиз. Чизиқнинг (2) тенгламасини унинг Декарт системасидаги (1) ёки (1′) тенгламалари маълум бўлган ҳолда, бу тенгламалардан фойдаланиб, ўтган параграфдаги (1) формула ёрдами билан тузиш ҳам мумкин.

Бу масалаларни биз бир неча мисолларда кўрамиз.

1- мисол. Тўғри чизиқ Декарт системасида ўзининг нормал тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{3}$$

бунда

$$p \neq 0.$$

Бу тенгламадаги x, y ўрнига уларнинг

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

ифодаларини қўямиз:

$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha - p = 0,$$

$$\rho\cos(\varphi - \alpha) = p \tag{4}$$

ёки

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{5}$$

Бу тенглама тўғри чизиқнинг қутб координаталари системасидаги тенгламасидир.

Агар $p = 0$ бўлса, яъни (3) тўғри чизиқ қутбдан ўтса, бундай тўғри чизиқ (5) тенглама билан ифода этилмайди. Кейинги ҳолда тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси

$$\varphi = \varphi_0 \,(-\infty < \rho < \infty)$$

бўлиши равшан (53- чизма).

Тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги (5) тенгламасини ўтиш формулаларидан фойдаланмай, бевосита ҳосил қилиш ҳам мумкин.

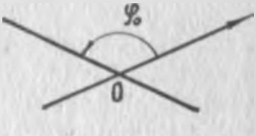
Бунинг учун MN тўғри чизиқнинг текисликдаги ўрнини қутб системасига нисбатан қутбдан тўғри чизиққа ўтказилган $OP = p$ перпендикуляр узунлиги ва Ox ўқ билан OP орасидаги α бурчак орқали аниқлаймиз (54- чизма). M нуқта тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқта, ρ, φ лар эса унинг қутб координаталари бўлсин. Бу ҳолда:

$$\rho = OM, \quad \varphi = \angle MON.$$

Тўғри бурчакли OPM учбурчакдан:

$$OP = OM \cos(\varphi - \alpha).$$

$$p = \rho \cos(\varphi - \alpha)$$



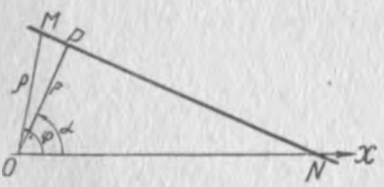
53- чизма.

ёки

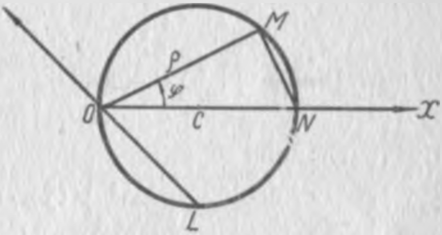
$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

экани келиб чиқади.

2- мисол. Радиуси R га тенг бўлган айлана берилган бўлсин. Айлананинг марказидан ўтган горизонтал диаметрни Ox қутб ўқи деб ва бу диаметрнинг айланадаги O учини қутб деб қабул қилайлик (55- чизма).



54- чизма.



55- чизма.

Бу ерда ρ, φ — умумлашган қутб координаталари деб фараз қилинади. $M(\rho, \varphi)$ — айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқта билан қутб ўқининг айлана билан кесишган иккинчи учини туташтирсак, тўғри бурчакли OMN учбурчак ҳосил бўлади. Бу учбурчакдан

$$OM = ON \cos\varphi$$

тенглик ҳосил бўлади. Аммо

$$OM = \rho, \quad ON = 2R$$

бўлгани учун:

$$\rho = 2R\cos\varphi; \qquad (1)$$

бу тенглама айлананинг танлаб олинган қутб системасидаги тенгламаси бўлади.

Агар бу мисолда ρ фақат мусбат қийматларни қабул қилади десак, φ нинг баъзи қийматларида (1) тенгламадан аниқланган ρ манфий бўларди ва φ учун бу қийматни бериш мумкин бўлмас эди, масалан, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ бўлса, (1) тенгламадан

$$\rho = -R\sqrt{2}$$

эканини топардик. Демак, φ га $\frac{3}{4}\pi$ қийматни бериш мумкин бўлмай қолар эди, агар ρ манфий қийматларни ҳам қабул қила олади десак, ρ нинг бу қиймати ҳақиқатан ҳам айлана нуқтасини беради, бу нуқта L нуқтадир.

3- мисол. Ушбу

$$\rho = 2a\sin\varphi$$

тенглама Декарт системасида ёзилсин.

Ечиш. Ўтиш формуласини оламиз [27- §. (1) ва (2) формулалар]:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Буларни берилган тенгламага қўямиз:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

буни махраждан қутқарамиз:

$$x^2 + y^2 = 2ay.$$

Бу тенгламани

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

шаклда ёзиш мумкин. Демак, мисолда берилган тенглама маркази (O, a) нуқтада бўлиб, радиуси a га тенг бўлган айлана тенгламаси экан.

4- мисол. LH тўғри чизиқ ўзининг дастлабки xx ҳолатидан бошлаб бирор O нуқта атрофида айлансин. M нуқта эса LH тўғри чизиқ бўйича ҳамма вақт бир хил йўналишда ҳаракат қилсин ва OM масофа xOM бурчакка пропорционал бўлсин (56- чизма). M нуқтанинг чизган чизиғи Архимед спирали дейилади.

Архимед спиралининг бу таърифини эътиборга олиб, унинг тенгламасини тузамиз. O ни қутб, Ox ўқни қутб ўқи деб оламиз.

M нуқта O нуқтадан бошлаб ҳаракат қилиб, φ қутб бурчаги 0 дан 2π гача ўзгарганда, M_1 нуқта A нуқтага келган бўлиб:

$$OA = a$$

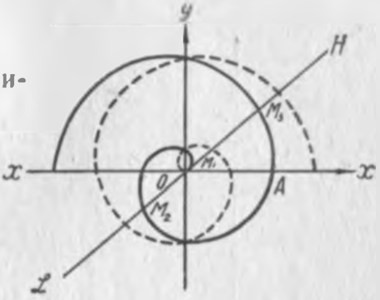
бўлсин. Бу ҳолда Архимед спиралининг таърифига биноан:

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

ёки

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\varphi$$

бўлади. Агар $\frac{a}{2\pi} = k$ деб фараз қилинса,



56- чизма.

$$\rho = k\varphi.$$

Бу Архимед спиралининг тенгламасидир.

Агар M нуқта LH тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилганда φ билан ρ манфий қийматларни ҳам қабул қилса, Архимед спиралига яна битта ўрама қўшилади (чизмада бу ўрама пунктир чизиқ билан кўрсатилган). Архимед спирали чексиз кўп ўрамалардан иборат.

5- мисол. $\rho = ae^{k\varphi}$ (a ва k — ўзгармас мусбат сонлар) тенглама билан тасвирланган чизиқ ясалсин ва бу чизиқнинг Декарт координаталари системасидаги тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу тенглама билан тасвирланган чизиқ логарифмик спираль дейилади. Уни ясаш учун φ бурчакка ихтиёрий қийматлар бериб, бу қийматларни берилган тенгламага қўямиз ва ундан φ нинг бу қийматларига мос бўлган ρ нинг қийматларини аниқлаймиз.

Агар $\varphi = \ldots, -\pi, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$ қийматларни қабул қилиб ўсиб борса, тенгламадан аниқланган ρ нинг қийматлари қуйидагича бўлади:

$$\rho = \ldots, ae^{-k\pi}, ae^{-\frac{k\pi}{2}}, a, ae^{\frac{k\pi}{2}}, ae^{k\pi}, \ldots,$$

$$\ldots, (ae^{-k\pi}, -\pi), \left(ae^{-\frac{k\pi}{2}}, \frac{\pi}{-2}\right), (a, 0), \ldots$$

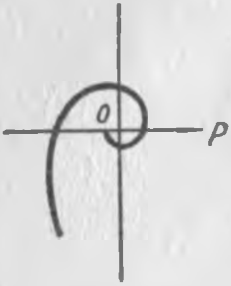
нуқталарни қутб системасида ясасак, логарифмик спираль ҳосил бўлади (57- чизма).

Энди логарифмик спиралнинг Декарт системасидаги тенгламасини тузамиз. Бунинг учун логарифмик спиралнинг қутб системасидаги тенгламасида ρ, φ ўрнига ўтиш формуласи бўйича унинг

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ва} \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

ифодаларини қўямиз, у ҳолда:

$$\sqrt{x^2+y^2}=ae^{k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$



57- чизма.

тенглама ҳосил булади. Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб,

$$x^2+y^2=a^2e^{2k\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

кўринишда ёзса ҳам булади. Бундан қутб системасида жуда содда шаклда бўлган тенглама Декарт системасида анча мураккаб куринишда булишини кўриб турибмиз.

29-§. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ СИСТЕМАСИНИ АЛМАШТИРИШ

Текисликда нуқтанинг ўрни координаталар системасига нисбатан аниқланиши маълум. Агар координаталар системасининг вазияти узгартирилса, нуқтанинг координаталари ҳам албатта ўзгаради.

Шунга ухшаш чизиқ тенгламаси бир системада бир хил кўринишда булса, бошқа системада бошқача кўринишда бўлишини утган параграфда кўриб ўтдик. Декарт координаталари системаси бошини ва уқларининг йўналишини ўзгартириш билан чизиқнинг бу системада ёзилган тенгламасини мураккаб ёки содда куринишга келтириш мумкин.

Бундай масалалар нуқтанинг координаталари бирор системада маълум бўлса, унинг бошқа системадаги координаталарини топиш масаласига келади. Кейинги масалани ечиш учун биз нуқтанинг бир системадаги координаталари билан шу нуқтанинг бошқа системадаги координаталари орасидаги боғланишни топишимиз керак. Бу боғланишни: а) координаталар бошини бошқа жойга кўчирилиб, координата ўқлари эски уқлар билан параллел булган ҳол учун, б) координаталар боши узгармай координата уқлари бирор α бурчакка бурилган ҳол учун ва в) ҳам координата боши, ҳам уқларининг йуналиши узгарган ҳол учун топамиз.

а) Координаталар боши кўчирилиб, координата уқлари эски уқларга параллел булган ҳол. Координата уқлари бир-бирига параллел булиб, координаталар боши O ва O_1 нуқталарда (уқларнинг йуналиши ва масштаб бир хил) булган иккита xoy, XO_1Y Декарт координаталар системаси берилган бўлсин (58- чизма). Янги система XO_1Y нинг боши O_1 нинг эски xOy системага нисбатан координаталари a, b бўлсин. Текисликда бирор M нуқта олайлик; бу нуқтанинг $x0y$ системага нисбатан координаталари x, y нуқтанинг янги XO_1Y системага нисбатан координаталари X ва Y бўлсин, яъни:

$$\left.\begin{aligned} OA = a,\quad AO_1 = b,\quad ON = x,\quad NM = y,\\ O_1P = X,\quad PM = Y.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Энди x, y билан X, Y координаталар орасидаги боғланишни топиш керак. Бунинг учун 58- чизмада кўрсатилганига биноан:

$$\left.\begin{aligned} ON = OA + AN\\ NM = NP + PM\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

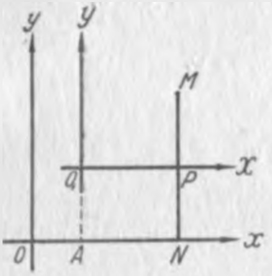
тенгликларни ёзамиз. Аммо

$$AN = O_1P = X,\quad NP = AO_1 = b$$

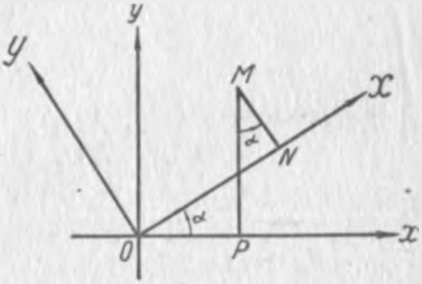
бўлгани учун (1) тенгликка асосланиб (2) тенгликларни

$$\left.\begin{aligned} x = a + X\\ y = b + Y\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

кўринишда ёза оламиз. Бу муносабатлар M нуқтанинг эски ва янги координаталар орасидаги боғланишдир. Шундай қилиб, *эски координаталар янги координаталар бошининг координаталари билан янги координаталар йиғиндисига тенг.*



58- чизма.



59- чизма.

Агар (3) тенгликларни X, Y координаталарга нисбатан ечиб, янги координаталарнинг эски координаталар орқали ифодасини топсак:

$$\left.\begin{aligned} X = x - a,\\ Y = y - b.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

б) Координаталар бошини ўзгартмай координата ўқлари α бурчакка бурилган ҳол. Энди Декарт системасининг O бошини ўзгартмай Ox ўқни α бурчакка буриб, янги XOY системани ҳосил қилган бўлайлик (59- чизма).

Текисликдаги бирор M нуқтанинг xOy системадаги координаталари $x = OP$, $y = PM$ бўлсин. Бу нуқталарнинг янги XOY системадаги координаталари $X = ON$, $Y = NM$ бўлсин, дейлик. Бу x, y ва X, Y координаталар орасидаги боғланишни топайлик. Масалани ечиш учун $\overline{ONMP}$ йўналган синиқ чизиқни Ox ўққа проекциялаймиз. Синиқ чизиқнинг бирор ўққа проекцияси уни ёпувчи бўғиннинг шу ўқдаги проекциясига тенг бўлгани учун

$$\text{пр}_{Ox}(\overline{ONMP}) = \text{пр}_{Ox}\overline{OP}. \qquad (5)$$

Аммо синиқ чизиқнинг проекцияси унинг ташкил қилувчи кесмаларининг проекциялари йиғиндисига тенг бўлгани сабабли (5) тенгликни ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$\text{пр}_{Ox}(\overline{ON}) + \text{пр}_{Ox}(\overline{NM}) + \text{пр}_{Ox}(\overline{MP}) = \overline{OP}; \qquad (6)$$

бунда $\text{пр}_{Ox}\overline{OP} = \overline{OP}$ эканлиги равшан.

9- параграфдаги (2) ва (3) формулаларга кўра:

$$\text{пр}_{Ox}(\overline{ON}) = ON\cos\alpha = X\cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Ox}(\overline{NM}) = MN\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -Y\sin\alpha.$$

$$\text{пр}_{Ox}(\overline{MP}) = MP\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Бу тенгликларга асосан (6) тенглик

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \qquad (7)$$

кўринишга келади.

Энди ўша $\overline{ONMP}$ синиқ чизиқни Oy ўққа проекциялаймиз; бу ҳолда (6) тенгликка ўхшаш

$$\text{пр}_{Oy}(\overline{ON}) + \text{пр}_{Oy}(\overline{NM}) + \text{пр}_{Oy}(\overline{MP}) = \text{пр}_{Oy}(\overline{OP}) \qquad (8)$$

тенглик ҳосил бўлади. Лекин бу тенгликда

$$\text{пр}_{Oy}(\overline{ON}) = ON\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = x\sin\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}(\overline{NM}) = NM\cos\alpha = Y\cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}(\overline{MP}) = MP\cos(-\pi) = -MP = -y,$$

$$\text{пр}_{Oy}(\overline{OP} = OP\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Бу муносабатларга мувофиқ (8) тенглик

$$X \sin \alpha + Y \cos \alpha - y = 0$$

ёки

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \tag{9}$$

шаклга келади.

(7) ва (9) формулалар нуқтанинг эски координаталарини унинг янги координаталари орқали ифода этади.

Агар (7) ва (9) тенгликларни биргаликда қараб, уларни X ва Y га нисбатан ечсак:

$$\left.\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Бу формула нуқтанинг янги координаталарини унинг эски координаталари орқали ифода этади. (7) ва (9) формулаларни проекциялар назариясидан фойдаланмай ҳам келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан ҳам (60- чизма) $\triangle OPM$ дан

$$x = OP = OM \cos (\alpha + \beta)$$

ёки

$$x = OM \cos \alpha \cos \beta - OM \sin \alpha . \sin \beta. \tag{*}$$

$$y = PM = OM \sin (\alpha + \beta),$$

ёки

$$y = OM \sin \alpha \cos \beta + OM \sin \beta \cos \alpha. \tag{**}$$

$\triangle ONM$ дан

$$X = ON = OM \cos \beta; \; Y = NM = OM \sin \beta.$$

Буларни (*) ва (**) тенгликларга қўйсак:

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha,$$
$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

ҳосил бўлади.

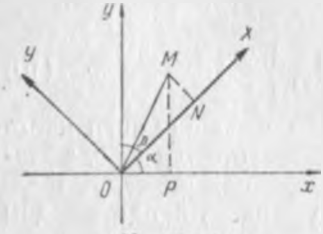
в) Координаталар боши кўчирилиб, координата ўқларининг йўналишлари ўзгарган ҳол.

Координаталарнинг иккита Декарт системаси берилган бўлиб, уларнинг бошлари O ва O_1 нуқталарда ва ўқларнинг йўналишлари турлича бўлсин. a ва b янги координаталар боши O_1 нинг эски системадаги координаталари, α — Ox ва O_1X ўқлар орасидаги бурчак ва иккала система учун масштаб бир хил бўлсин (61- чизма). Текисликда бирор M нуқта олиб, бу нуқтанинг эски xOy системадаги координаталарини x, y ва янги системадаги координаталарини X, Y билан белгилаймиз ва нуқтанинг эски ва янги координаталари орасидаги муносабатни топамиз.

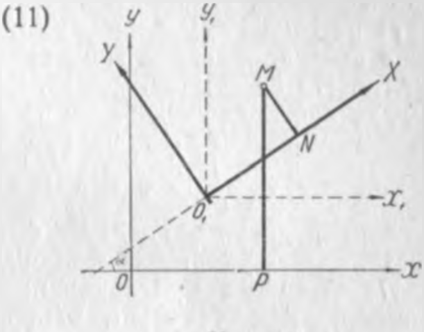
7*

Бунинг учун O_1 нуқтадан Ox ва Oy ўқларга параллел қилиб O_1x_1 ва O_1y_1 ёрдамчи ўқлар ўтказамиз, натижада ёрдамчи $x_1O_1y_1$ система ҳосил бўлади. M нуқтанинг бу системадаги координаталарини x_1y_1 билан белгиласак, (3) формулага мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_1, \\ y &= b + y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$



60 -чизма.



61 -чизма.

тенгликлар ҳосил бўлади. Энди нуқтанинг (x_1, y_1) координаталари билан унинг (X, Y) координаталари орасидаги муносабатни (7) ва (9) тенгликларга асосланиб ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X\cos\varphi - Y\sin\alpha, \\ y_1 &= X\sin\alpha - Y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

x_1, y_1 нинг бу ифодаларини (11) тенгликка қўямиз, натижада:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y &= b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Бу кейинги формулалар қаралаётган умумий ҳолда нуқтанинг эски системадаги координаталарини унинг янги координаталари орқали ифода этади. (13) формулаларда $\alpha = 0$ деб олинса, ундан (3) формулалар келиб чиқади; $a = b = 0$ деб олинса, ундан (7) ва (9) формулалар келиб чиқади. Шундай қилиб, (13) формулалар координаталар алмаштиришнинг умумий формулалари бўлади.

Агар (13) формулаларни X, Y га нисбатан ечсак:

$$\left.\begin{aligned} X &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ Y &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

тенгликлар ҳосил булади.

1- мисол. xOy системада M нуқтанинг координаталари (2, 3) координата ўқларини эски Ox, Oy ўқларга параллел қилиб олиб, координаталар боши $O_1(-1, 2)$ нуқтага кучирилган. M нуқтанинг янги XO_1Y системадаги координаталари топилсин.

Ечиш. M нуқтанинг янги XO_1Y системадаги координаталарини X, Y билан белгиласак, (4) формулаларга биноан:

$$X = x - a, \qquad Y = y - b$$

тенгликлар ўринли бўлади, бизнинг мисолда

$$a = -1, \quad b = 2,$$
$$x = 2, \quad y = 3.$$

Демак,

$$X = 2 - (-1) = 3,$$
$$Y = 3 - 2 = 1.$$

Шундай қилиб, M нуқтанинг янги XO_1Y системадаги координаталари (3,1) бўлади.

2-мисол. Чизиқнинг xOy системадаги тенгламаси

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \tag{15}$$

кўринишда, координаталар бошини шундай O нуқтага кўчирингки, натижада бу тенглама

$$Y = aX^2$$

кўринишга келсин. Бунда X, Y — (15) чизиқда ётган ихтиёрий нуқтанинг янги координаталар системасидаги координаталари.

Ечиш. Координата ўқларини эски система ўқларига параллел ҳолда олиб, координаталар бошини $O_1(x_0, y_0)$ нуқтага кўчирамиз; бунда x_0, y_0 — ҳозирча ихтиёрий сонлар. Бу ҳолда (3) формулага биноан:

$$x = x_0 + X,$$
$$y = y_0 + Y.$$

x, y нинг бу ифодаларини (15) тенгламага қўямиз:

$$y_0 + Y = a(X + x_0)^2 + b(X + x_0) + c.$$

Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$y = aX^2 + (2ax_0 + b)X + (ax_0^2 + bx_0 + c - y_0). \tag{15'}$$

Энди x_0, y_0 нинг ихтиёрий эканлигидан фойдаланиб, уларни

$$\left.\begin{aligned} &2ax_0 + b = 0, \\ &ax_0^2 + bx_0 + c - y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

тенгламаларни қаноатлантирадиган қилиб танлаб оламиз. Бу тенгламаларни x_0 ва y_0 га нисбатан ечамиз:

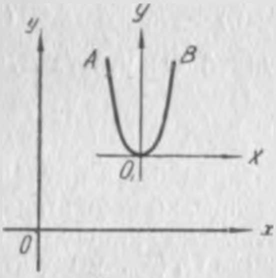
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{17}$$

Демак координаталар боши (x_0, y_0) нуқтага кўчирилса ва бу координаталар (17) тенгликлар билан аниқланса, улар (16) тенгликларни қаноатлантиради ва (15′) тенглама

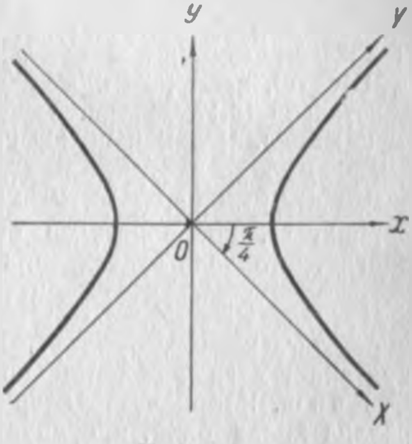
$$Y = aX^2 \qquad (18)$$

кўринишни олади (62- чизма).

(15′) тенглама билан тасвирланган чизиқ AO_1B бўлиб, бу чизиқ xOy системада (15) тенглама билан ифода этилади; шу чизиқнинг ўзи XO_1Y системада соддароқ бўлган (18) тенглама билан ифода этилади. AO_1B чизиқ *парабола* дейилади. (15) ва (18) тенгламалар параболанинг тенгламасидир. Биз кейинги бобда парабола билан тўлароқ танишамиз.



62- чизма.



63- чизма.

3- мисол. Чизиқнинг xOy системадаги тенгламаси

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (19)$$

кўринишда. Координаталар системасини шундай алмаштириш кераккн, янги системада бу тенглама

$$2XY = a^2$$

кўринишда бўлсин (63- чизма).

Ечиш. Координаталар системасини $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ бурчакка бурамиз. Бу ҳолда (10) формулаларга мувофиқ:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha = X\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - Y\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha = X\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + Y\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ёки

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y - X).$$

x, y нинг бу қийматларини (19) тенгламага қўямиз:

$$\frac{1}{2}\left[(X+Y)^2-(Y-X)^2\right]=a^2.$$

Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$2XY=a^2. \qquad (20)$$

(19) тенглама билан тасвирланган чизиқни *тенг томонли гипербола* дейилади.

Шундай қилиб, xOy системада тенг томонли гипербола (19) тенглама билан ифодаланса, янги XOY системада у (20) тенглама билан тасвирланади.

30- §. ЧИЗИҚЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Аналитик геометрияда ҳар қандай чизиқ ўзгарувчи координаталар орасидаги бирор тенглама билан тасвирланишини биламиз. Бу тенглама координаталар системасининг турига (Декарт ёки қутб координаталар системаси) ва қаралаётган чизиқнинг бу системаларга нисбатан жойланишига кура турлича булади. Масалан, Декарт системасида маркази координаталар бошида булиб, радиуси r га тенг бўлган айлана

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

тенглама билан тасвирланади; агар координаталар бошини (a, b) нуқтага, координата ўқларини эски ўқларга параллел қилиб кўчирсак, ўша айлананинг ўзи янги системада

$$(X+a)^2+(Y+b)=r^2 \qquad (2)$$

тенглама билан тасвирланади. Агар айлана марказини қутб деб, қутб ўқи горизонтал диаметр бўйича йўналган деб олинса, (1) айлананинг тенгламаси

$$\rho=r \qquad (3)$$

булиб, қутб диаметр бўйича учида бўлса, бу айлана

$$\rho=2r\cos\varphi \qquad (4)$$

тенглама билан тасвирланади.

Бу мисолда (1), (2) ва (3) тенгламалар x, y ёки ρ, φ узгарувчиларга нисбатан алгебраик тенгламалар булиб, (4) тенглама трансцендент тенгламадир. (1) ва (2) тенгламалардан Декарт системаларининг айланага нисбатан жойланиши қандай бўлмасин, унинг тенгламасини алгебраик турда сақланиши ва x билан y нинг иккинчи даражаларини ўз ичига олган ҳадларнинг коэффициентларини бир хил эканлиги (сақланиши) кўринмоқда.

(3) ва (4) тенгламалардан қутб координаталар системасида системани узгартириш билан айлана тенгламасининг алгебраик

тури трансцендент турига айланиб жуда катта ўзгариш бўлаётганлигини кўрамиз.

Декарт координаталари системасида чизиқ тенгламасининг алгебраик ёки трансцендент бўлиши координаталарнинг узгаришига боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан ҳам, ўтиш формулалари ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламалардир, шунинг учун алгебраик тенгламалардаги ўзгарувчи координаталарни ўтиш формулаларидаги узгарувчи координаталар билан алмаштирсак, биринчидан, янги координаталар системасига ўтган бўламиз, ва иккинчидан, тенгламанинг алгебраик хоссаси ўзгармайди. Бундан ҳар қандай трансцендент тенглама Декарт координаталарини алмаштириш натижасида яна трансцендент тенгламага ўтади, деган натижа келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар трансцендент тенглама координаталар алмаштиришда алгебраик тенгламага алмашса эди, Декарт координаталарини тескари алмаштириш натижасида алгебраик тенглама трансцендент тенгламага ўтган бўларди, бундай бўлиши мумкин эмас.

Демак, чизиқ ёки чизиқ тенгламасининг алгебраик ёки трансцендент бўлиши чизиқнинг узига хос бўлган хоссаларига боғлангандир. Шунинг учун чизиқларни Декарт системасидаги тенгламаларига кура икки турга ажратамиз.

Агар

$$F(x,\ y) = 0 \tag{5}$$

Декарт координаталар системасида бирор чизиқнинг тенгламаси бўлиб, бу алгебраик тенглама булса, у чизиқни алгебраик чизиқ дейилади. Алгебраик бўлмаган ҳар қандай чизиқ трансцендент чизиқ дейилади.

Алгебраик тенгламани касрдан ва радикаллардан қутқариб, уни

$$\sum_{h,k=1}^{n} A_{hk}\ x^h, y^k = 0 \tag{6}$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда A_{hk} — ўзгармас сон, h, k — бутун сонлар, $h + k$ йиғинди $A_{hk}x^hy^k$ ҳаднинг *ўлчови* дейилади. (6) тенгламанинг чап томонидаги йиғинди ҳадлари ўлчовларининг энг каттаси (6) алгебраик тенгламанинг *даражаси* дейилади. Масалан:

$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8}$$

тенгламалар алгебраик тенгламалар бўлиб, (7) тенглама A, B сонлар бир вақтда нолга тенг бўлмаса, биринчи даражали алгебраик тенглама, (8) тенглама эса иккинчи даражали алгебраик тенгламадир (A, B, C ларнинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг эмас).

Агар чизиқ Декарт координаталари системасида n-даражали алгебраик тенглама билан тасвирланса, уни n-тартибли чизиқ дейилади.

Масалан, (7) тенглама биринчи тартибли чизиқни тасвирлайди. У туғри чизиқнинг тенгламаси эканини кўрган эдик. Демак, туғри чизиқ биринчи тартибли алгебраик чизиқ, (8) тенглама 2- даражали алгебраик тенглама, демак бу тенглама билан тасвирланган чизиқ иккинчи тартибли чизиқдир.

Энди ушбу теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Агар чизиқ бирор тўғри бурчакли Декарт системасида n-даражали алгебраик тенглама билан тасвирланса, бу системани алмаштиришдан ҳосил бўлган ҳар қандай бошқа Декарт системасида ҳам у чизиқ n-даражали алгебраик тенглама билан ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам, бирор чизиқ Декарт системасида n-даражали алгебраик тенглама билан тасвирланган бўлсин. Координаталарнинг xOy системасини янги $x'Oy'$ система билан алмаштирамиз. Чизиқ тенгламасидаги x, y ўзгарувчилар

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha$$

формулалар ёрдамида янги x', y' ўзгарувчи координаталарга алмашинади. Бу формулаларда x', y' нинг фақат биринчи даражалари қатнашгани учун чизиқнинг янги системадаги тенгламасининг даражаси бўлган n' сон n дан катта бўлолмайди, яъни:

$$n' < n. \tag{9}$$

Энди чизиқни янги $x'Oy'$ системадаги тенгламасидан (29 -§, (10))

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

ўтиш формуласи билан эски xOy системага ўтсак, n'-даражали янги алгебраик тенгламадан эски n-даражали алгебраик тенгламага ўтамиз, демак,

$$n < n'. \tag{10}$$

(9) ва (10) муносабатлар чизиқнинг янги системадаги алгебраик тенгламасининг даражаси унинг эски системадаги алгебраик тенгламасининг даражасидан катта ҳам, кичик ҳам бўлолмаслигини билдиради, демак,

$$n = n'.$$

Бу теорема *чизиқ тенгламасининг тартиби Декарт координаталар системасининг танлаб олинишига боғлиқ бўлмай, балки чизиқнинг ўзига хос хоссалар билан боғлиқ эканини билдиради.*

Юқорида биз қутб координаталар системасида алгебраик тенглама билан тасвирланган бир чизиқ (айлана) қутбни ўзгартириш билан трансцендент тенгламага ўтиб қолганини кўрдик. Шу сабабли чизиқни қутб системадаги тенгламасига кўра синфларга (турларга) ажратишнинг маъноси йўқ.

Машқлар

1. Қутб координаталари билан берилган нуқталар ясалсин:

$$1)\ A(5,0);\ 2)\ B\left(2, \frac{\pi}{4}\right);\ 3) C\left(3, \frac{\pi}{2}\right);\quad D\ \left(4, -\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Қутб ўқига нисбатан қуйидаги нуқталарга симметрик бўлган нуқталарнинг қутб координаталари топилсин.

$$1)\ M\left(5, \frac{\pi}{4}\right);\ 2)\ N\left(2, \frac{\pi}{3}\right);\ 3)\ P\left(3, -\frac{\pi}{2}\right);\ 4)\ Q\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Қутбга нисбатан қуйидаги нуқталарга симметрик булган нуқталарнинг қутб координаталари топилсин:

$$1)\ A\left(2, \frac{\pi}{4}\right);\ 2)\ B\left(4, \frac{\pi}{2}\right);\ 3)\ C\left(3, -\frac{\pi}{3}\right);\ 4)\ D\left(1, \frac{5}{6}\pi\right).$$

4. Нуқталарнинг қутб координаталари берилган;

$$M_1(5,0);\ M_2\left(2, \frac{\pi}{4}\right);\ M_3\left(4, \frac{\pi}{3}\right);\ M_4\left(4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$M_5\left(2, -\frac{\pi}{6}\right),\ M_6\left(8, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Қутбни координаталар боши деб, қутб ўқини абсциссалар ўқи деб олиб, бу нуқталарнинг Декарт координаталарини топинг.

5. Нуқталарнинг Декарт координаталари берилган:

$$A(\sqrt{3}, 1);\ B(1, -\sqrt{3});\ C(3, 0);\ D(0, -4);\ M(-1, -1).$$

Қутб учун координаталар бошини, қутб ўқи учун абсциссалар ўқининг мусбат йўналишини олиб, бу нуқталарнинг қутб координаталарини аниқланг

6. Чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси

$$\rho = 3\cos\varphi.$$

Қуйидаги нуқталар бу чизиқда ётадими:

$$M_1(3, 0),\ M_2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right),\ M_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right),\ M_4\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$M_5\left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ M_6\left(2, \frac{\pi}{4}\right),\ M_7\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right),\ M_8\left(2, \frac{\pi}{3}\right)?$$

Бу чизиқ ясалсин.

7. $\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$ чизиқда қутб бурчаги; 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $+\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{4}$ бўлган нуқталарни топинг ва чизиқни ясанг.

8. Тенгламалари: 1) $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$; 2) $\rho = 10 \sin\varphi$ бўлган чизиқлар ясалсин.

9. Тенгламалари: 1) $\rho = 3\varphi$; 2) $\rho = \frac{\varphi}{\pi}$; $\rho = -\frac{\varphi}{\pi}$ бўлган чизиқлар ясалсин.

10. Радиуси $r = 7$ бўлган айлана қутбдан ўтади ва унинг маркази қутб ўқида ётади. Бу айлананинг қутб системадаги тенгламасини тузинг.

11. Нур қутбдан чиқиб, қутб ўқи билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Қутб координаталар системасида нурнинг тенгламаси тузилсин.

12. Тўғри чизиқ қутб ўқига перпендикуляр бўлиб, бу ўқдан (қутбдан бошлаб ҳисоблаганда) 5 бирлик кесма ажратади. Бу тўғри чизиқнинг қутб системасидаги тенгламасини тузинг.

13. Радиуси R га тенг бўлган айлана қутб ўқига қутбда уринади. Қутб координаталар системасида бу айлана тенгламаси тузилсин.

14. Қутб ўқидан бир хил a масофада ётган текислик нуқталари геометрик ўрнининг қутб системадаги тенгламасини тузинг.

15. Қутб координаталар системасида чизиқлар қуйидаги тенгламалар билан берилган:

1) $\rho = 3 + \sin\varphi$; 2) $\rho = a\cos^2\varphi$; 3) $\rho = 2 + \cos\varphi$;
4) $\rho\cos\theta = a$; 5) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

Бу тенгламалар Декарт координаталар системасида ёзилсин.

16. Координата ўқларининг йўналиши ўзгармай, координаталар боши: 1) $O_1(1,2)$; 2) $O_2(-2,2)$; 3) $O_3(-1,-1)$, $O_4(3,-4)$ нуқталарга кўчирилган. Координаталар алмаштириш формулаларини ёзинг.

17. Координаталар боши $O'(-2,1)$ нуқтага кўчирилган бўлиб, координата ўқларининг йўналиши ўзгармай қолган. Янги координаталар системасида нуқталар бундай берилган:

$$M_1(1,2),\ M_2(-3,0),\ M_3(-1,3),\ M_4(1,-1).$$

Бу нуқталарнинг эски координаталар системасидаги координаталарини аниқланг.

18. Ушбу $A(5,5)$, $B(2,-3)$, $C(-2,3)$ нуқталар берилган. Координата ўқлари ўзгармай қолиб координаталар боши: 1) A нуқтага; 2) B нуқтага; 3) C нуқтага кўчирилган. A, B, C нуқталарнинг координаталарини янги системага нисбатан аниқланг.

19. Координата ўқлари $\alpha = 30°$ га бурилган бўлиб, янги координаталар системасида $A(1,1)$, $B(\sqrt{3},2)$, $C(0,2\sqrt{3})$. Бу нуқталарнинг координаталарини эски системага нисбатан аниқланг.

20. Координата ўқларини параллел кўчириш усули билан қуйидаги келтирилаётган эгри чизиқлар тенгламалари $xy = k$ кўринишга келтирилсин, эгри чизиқлар эски ҳамда янги координаталар системасида ясалсин:

$$1)\ y = \frac{4x+1}{2x+6};\qquad 2)\ y = \frac{2x+5}{2x+1};\qquad 3)\ y = \frac{2x-3}{x-1}.$$

21. Эгри чизиқнинг қуйидаги тенгламаларини соддалаштиринг ва янги системада чизиқни ясанг:

$$1)\ y = x^2 - 8x + 15;\qquad 2)\ y = -x^2 + 4x + 1.$$

22. Координата ўқларини параллел кўчириш ва буриш усули билан эгри чизиқнинг

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 8y - 139 = 0$$

тенгламасини соддалаштиринг.

Бешинчи боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТАР НАЗАРИЯСИ

31-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда A, B, C, D, E, F — ўзгармас коэффициентлар бўлиб, булардан A, B, C коэффициентларнинг камида биттаси нолга тенг бўлмаслиги керак.

(1) тенглама ундаги коэффициентларнинг қийматларига қараб, турли эгри чизиқларни тасвирлаши мумкин. Биз кейинги параграфларда (1) тенглама коэффициентларининг қандай қийматида қандай чизиқни тасвир этиши масаласи билан танишамиз.

32-§. АЙЛАНАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

11- параграфда маркази $C\ (a, b)$ нуқтада бўлиб, радиуси r га тенг бўлган айлананинг тенгламаси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (1)$$

эканини кўрган эдик. Қавсларни очиб, бу тенгламани

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

шаклда ёза оламиз. Бу иккинчи даражали алгебраик тенгламадир. Демак, *айлана иккинчи тартибли чизиқдир.* (2) тенгламани (1) кўринишдаги умумий тенглама билан таққосласак, иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси айланани ифода этиши учун унда $A = C$, $B = 0$ бўлиши зарурлигини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда эгри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

кўринишда бўлади. Агар

$$a = -\frac{D}{2A},\ b = -\frac{E}{2A},\ r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} \qquad (4)$$

бўлса, (3) тенглама (2) тенгламага айланади ва, аксинча, (2) тенгламадан (4) формулалар воситасида (3) тенгламага ўтиш мумкин.

Шундай қилиб, *x, y га нисбатан иккинчи тартибли умумий тенглама айлананинг тенгламаси бўлиши учун:* 1) *ундаги x^2, y^2 қатнашган ҳадлар олдидаги коэффициентлар тенг бўлиши ва* 2) *xy кўпайтма олдидаги коэффициентнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Масалан:

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$$

тенглама айлананинг тенгламасидир, чунки: 1) x^2 ва y^2 олдидаги коэффициентлар тенг, 2) xy кўпайтма қатнашган ҳад тенгламада йўқ.

Бу тенглама айлананинг тенгламаси экан, унинг маркази қайси нуқтада ва радиуси неча бирликка тенг деган савол туғилади. Бу саволларга (4) формулалар ёрдамида жавоб бериш мумкин; берилган тенгламага кўра $A = B = 1$, $D = -2$, $E = 3$, $F = 2$. Шунинг учун, (4) га мувофиқ:

$$a = -\frac{D}{2A} = -\frac{-2}{2} = 1,\ b = -\frac{E}{2A} = \frac{-3}{2\cdot 1} = \frac{-3}{2}.$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} = 1 + \frac{9}{4} - 2 = \frac{5}{4},\ r = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Демак, айлананинг маркази $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ нуқтада, радиуси эса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ га тенг.

Аммо қўйилган саволларга жавоб бериш учун қаралаётган тенгламани (1) шаклга келтириш ҳам кифоя қилади. Бунинг учун берилган тенгламада x ли ҳадларни олиб, ундан тўла квадрат ажратамиз:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1,$$

сўнгра y ли ҳадларни олиб, ундан тўла квадрат ажратамиз:

$$y^2 + 3y = y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Энди берилган тенглама

$$(x - 1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

кўринишда ёзилади. Бу

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

ёки

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

шаклга келади. Бу тенгламадан a, b, r нинг қийматлари дарҳол топилади.

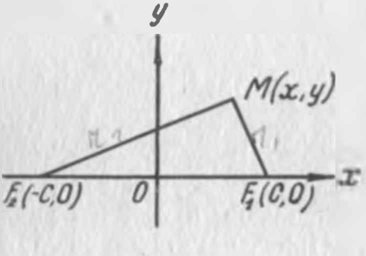
33- §. ЭЛЛИПС

1. Эллипснинг каноник тенгламаси. *Эллипс деб ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача (фокусларгача) масофаларининг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг булган текислик нуқталарининг геометрик урнига айтилади.* Бу ўзгармас сон фокуслар орасидаги масофадан катта булиши шарт[1].

Эллипснинг таърифига асосланиб унинг тенгламасини тузамиз. M — эллипснинг ихтиёрий нуқтаси, F_1, F_2 — берилган икки нуқта булсин. F_1, F_2 фокуслар орасидаги масофани $2c$ билан белгилаймиз. Эллипснинг таърифига биноан F_1M+F_2M йиғинди ўзгармас сон бўлиши керак; бу ўзгармас сонни $2a$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда таъриф бўйича

$$F_1M+F_2M=2a \tag{1}$$

булади.



64- чизма.

F_1, F_2 фокуслардан ўтган тўғри чизиқни абсциссалар ўқи, F_1F_2 кесманинг ўртасини координаталар боши O деб; O нуқтадан абсциссалар ўқига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни ординаталар ўқи деб оламиз (64-чизма). M нуқтанинг бу системага нисбатан координаталарини x, y билан белгилаймиз; F_1 F_2 нуқталарнинг координаталари мос тартибда (c, O) ва $(-c, O)$ бўлади. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра (6- §, (4)):

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{2}$$

F_1M, F_2M нинг бу ифодаларини (1) тенгликка қўямиз:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \tag{*}$$

бу эса эллипснинг танлаб олинган Декарт системасидаги тенгламасидир.

---

[1] Чунки учбурчак икки томонининг йиғиндиси учинчи томонидан катта бўлади.

Бу тенгламани соддалаштириш мумкин. Бунинг учун тенгламани радикаллардан қутқариш керак. Битта радикални тенгламанинг ўнг томонига ўтказамиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Энди тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз ва қавсларни очамиз:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+$$
$$+c^2+y^2.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз:

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Бу тенгламани

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

шаклда ёзамиз ва яна бир марта квадратга кўтарамиз:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

ёки

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c)^2. \qquad (3)$$

F_1MF_2 учбурчакда

$$MF_1+MF_2>F_1F_2$$

бўлади. (1) га мувофиқ:

$$2a>2c,$$

яъни

$$a>c.$$

Демак, $a^2>c^2$ ёки $a^2-c^2>0$. Бу тенгсизлик a^2-c^2 айирманинг мусбат сон эканини билдиради. Ҳар қандай мусбат сонни бирор соннинг квадрати деб қараш мумкин. Шунинг учун бу айирмани b^2 билан белгилаймиз, яъни:

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (4)$$

Демак, (3) тенглик

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (5)$$

кўринишни олади. Бунинг иккала томонини a^2b^2 га бўлсак, эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

кўринишга келади. (6) тенглама (*) тенгламадан икки марта квадратга кўтариб радикалдан қутқариш йўли билан ҳосил қилинди. Шунинг учун бу тенглама (*) тенглама билан тасвирланадиган нуқталарнинг геометрик ўрнига қўшимча нуқталар киритиб қўймайдими, деган савол келиб чиқади. Биз ҳозир шу масалани кўриб чиқамиз.

(2) формулаларнинг чап томонидаги F_1M, F_2M ни мос равишда r_1 ва r_2 билан белгиласак, (*) тенглама

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ёки

$$r_2 = 2a - r_1 \qquad (**)$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак, ҳосил бўлган тенглама (**) тенгламага ва

$$r_2 = -(2a - r_1)$$

тенгламага эквивалент бўлади. Кейинги тенгламада $2a > r_1$ ёки $2a - r_1 > 0$ ва $r_2 > 0$ бўлгани сабабли бу тенгламанинг ечими бўлмайди (ўнг томон чап томонга зидлик қилади).

(**) тенгламани квадратга кўтариш натижасида

$$r_2^2 - r_1^2 = 4a(a - r_1)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани яна бир марта квадратга кўтариш билан (6) тенглама ҳосил бўлади. Аммо бу тенгламани (**) тенгламага асосланиб соддалаштирсак, яна

$$r_1 + r_2 = 2a$$

тенгламанинг ўзи келиб чиқади, яъни янги тенглама ҳосил бўлмайди.

Демак, (*) тенгламани икки марта квадратга кўтариб, (6) тенгламани ҳосил қилиш билан қаралаётган геометрик ўринга қўшимча янги нуқталар қўшилмайди. (6) тенглама *эллипснинг каноник* тенгламаси дейилади. (6) тенгламадан эллипснинг 2-тартибли чизиқ экани кўринади.

2. Эллипснинг шакли. Эллипснинг шаклини унинг тенгламасига кўра текширамиз. Эллипснинг (6) тенгламасига x ва y нинг квадратларигина киради, шу сабабли (x, y) нуқта эллипснинг нуқтаси бўлса, $(\pm x, \pm y)$ нуқталар ҳам эллипснинг нуқталари бўлади. Демак, эллипс координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган. Эллипс шаклини биринчи квадрантда текширишнинг ўзи кифоя, бошқа квадрантлардаги шаклини симметриядан фойдаланиб тасаввур қилиш осон.

Биринчи квадрантдаги нуқталар учун (6) тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (7)$$

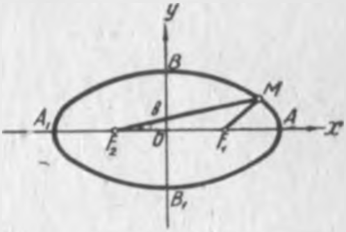
Бу тенгликда y ҳақиқий сон бўлиши учун

$$a^2 - x^2 \geqslant 0$$

бўлиши ёки

$$|x| < a$$

бўлиши керак. Демак, $|x|$ 0 дан $+a$ гача ўсиб бориши мумкин. $x = 0$ бўлганда $y = b$ бўлиб, $x = a$ бўлганда $y = 0$ бўлади, яъни x абсцисса 0 дан a гача ўсиб борганда, y ордината b дан 0 гача камайиб боради, яъни BA ёй эллипснинг биринчи квадрантдаги ёйи бўлади. Энди симметрияга асосланиб, эллипснинг 2, 3 ва 4- квадрантлардаги ёйлари $\overset{\frown}{BA_1}$ $\overset{\frown}{A_1B_1}$ ва $\overset{\frown}{B_1A}$ ёйлар эканини кўриш қийин эмас. Демак, эллипс 65- чизмада кўрсатилгандек чизиқ экан.



65 -чизма.

Координата ўқлари эллипснинг *симметрия ўқлари* дейилади. Фокуслар ётган симметрия ўқ эллипснинг *фокал ўқи* дейилади. Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси эллипснинг *маркази* дейилади. (6) тенглама билан берилган эллипс учун *фокал ўқ Ox* ўқ бўлиб, эллипснинг маркази координаталар бошидир.

Эллипснинг симметрия ўқлари билан кесишган нуқталари унинг *учлари* дейилади. 65- чизмада кўрсатилган A $(a,\ 0)$, A_1 $(-a,\ 0)$, B $(0,\ b)$ ва B_1 $(0, -b)$ нуқталар эллипснинг учлари. $\overline{AA_1} = 2a$ эллипснинг *катта ўқи*, $\overline{BB_1} = 2b$ эллипснинг *кичик ўқи* дейилади (бунда $a > b$ бўлиши шарт).

Агар (6) тенгламада $a = b$ деб олинса, (6) тенглама

$$x^2 + y^2 = a^2$$

кўринишни олади. Бу тенглама радиуси a га тенг бўлган айлананинг тенгламасидир. Демак, агар эллипснинг катта ярим ўқи кичик ярим ўқига тенг бўлса, у айлана бўлиб қолар экан.

3. Эллипснинг эксцентриситети. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг унинг катта ўқи узунлигига нисбати эллипснинг *эксцентриситети* деб аталади ва у e ҳарфи билан белгиланади:

$$e = \frac{2c}{2a}, \text{ яъни } e = \frac{c}{a};$$

c нолдан a гача бўлган қийматларни қабул қилиши мумкин бўлгани сабабли

$$0 < e < 1.$$

(4) тенгликдан:

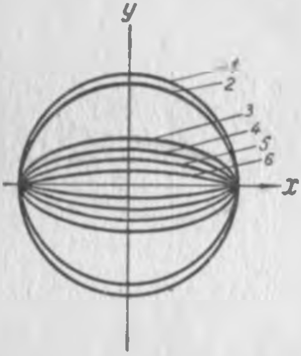
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Шунинг учун

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \qquad (8)$$

Бу тенгликда a ни ўзгаришсиз қолдириб, b ни ўзгартириб кўрайлик. Агар $a = b$ бўлса, эллипс айлана бўлиб қолади. Бу ҳолда (8) тенгликдан $e = 0$ экани келиб чиқади.

Агар b нинг қиймати a дан нолгача камайса, e 0 дан 1 гача ўсиб боради; эллипснинг кўриниши 66- чизмада тасвирлангандек 1, 2, 3, 4, 5, 6 ҳолатларни қабул қилади, яъни айланадан бошлаб торайиб боради.



66 -чизма.

Шундай қилиб, эллипснинг e эксцентриситети нолга қанча яқин бўлса, эллипснинг шакли айланага шунча яқин ва эксцентриситет 1 га қанча яқин бўлса, у шунча ингичкалаша боради.

4. Эллипс нуқтасининг фокал радиуслари. *Эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан фокусларигача масофалари эллипсдаги бу нуқтанинг фокал радиуси дейилади.*

Бу таърифга қараганда F_1M билан F_2M эллипсдаги M нуқтанинг фокал радиусларидир, буларни мос равишда r_1 ва r_2 билан белгилаймиз, бу ҳолда (2) формулаларга биноан:

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \; r_2 = F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Бунда x, y лар M нуқтанинг координаталаридир. Фокал радиусларни ифодалаш учун соддароқ формула топиш мақсадида бу тенгликларнинг иккала томонини квадратга кўтариб, чиққан натижанинг иккинчисидан биринчисини ҳадлаб айирсак,

$$r_2^2 - r_1^2 = 4\,cx$$

тенглик ҳосил бўлади. Буни

$$(r_2 - r_1)(r_1 + r_2) = 4\,cx \qquad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (1) тенгликка фокал радиусларнинг ифодаларини қўйсак, у

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (10)$$

кўринишга келади. Буни (9) тенгликка қўйсак,

$$2a(r_2 - r_1) = 4cx$$

ёки

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x \tag{11}$$

тенглик ҳосил бўлади. (10) тенгликдан (11) тенгликни ҳадлаб айирамиз ва натижани 2 га қисқартириб ёзамиз:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x. \tag{12}$$

Энди (10) тенглик билан (11) тенгликни ҳадлаб қўшамиз ва натижани 2 га қисқартирамиз:

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x. \tag{13}$$

$e = \frac{c}{a}$ бўлгани учун (12) ва (13) формулаларни

$$r_1 = a - ex,\ r_2 = a + ex \tag{14}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(14) формулалар абсциссаси x га тенг бўлган эллипс нуқтасининг фокал радиусларини шу x орқали чизиқли ифодалайди.

1- мисол. $2x^2 + 4y^2 = 8$ эллипс фокусларининг координаталари, эксцентриситети ва абсциссаси 1 га тенг бўлган нуқтасининг фокал радиуслари топилсин.

Ечиш. Эллипс тенгламасининг иккала томонини 8 га бўламиз:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Бу тенгликдан

$$a^2 = 4,\ a = 2;$$
$$b^2 = 2,\ b = \sqrt{2}$$

эканини кўрамиз. (4) формулага биноан:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}.$$

Демак, $F_1(\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ нуқталар эллипснинг фокусларидир. Эллипснинг эксцентриситети:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(14) формулаларга биноан $x = 1$ бўлгани сабабли

$$r_1 = a - ex = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2},$$

$$r_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2};$$

булар берилган эллипсдаги $x = 1$ нуқтанинг фокал радиусидир.

5. Эллипснинг директрисалари.

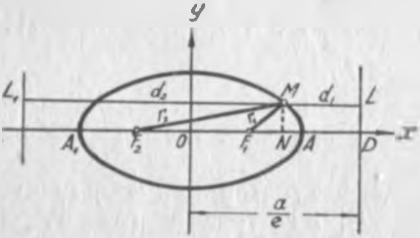
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b)$$

эллипснинг директрисалари деб, унинг катта ўқига перпендикуляр бўлган ва марказдан $\left| \pm \frac{a}{e} \right|$ *масофа узоқликдан ўтадиган иккита тўғри чизиққа айтилади.*

Бу таърифга мувофиқ эллипс директрисаларининг тенгламаси

$$x = + \frac{a}{e} \text{ ва } x = - \frac{a}{e}$$

бўлади.



67- чизма.

Эллипсда $e < 1$ бўлгани сабабли $\frac{a}{e} > a$. Демак, директрисалар эллипснинг A ва A_1 учларидан ташқарида жойлашган (67- чизма).

Директрисалар қуйидаги хоссага бўйсунади.

Теорема. *Эллипснинг ихтиёрий M (x, y) нуқтасидан фокусларигача бўлган масофаларнинг мос директрисаларгача бўлган масофаларга нисбати e га (ўзгармас сонга) тенг.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун

$$\frac{r_1}{d_1} = e, \frac{r_2}{d_2} = e$$

эканини кўрсатишимиз керак; бунда $d_1 = ML$, $d_2 = ML_1$ сонлар M нуқтадан директрисаларгача бўлган масофалар бўлиб, r_1, r_2 — фокал радиуслардир (67- чизма). Чизмадан:

$$d_1 = ML = OD - ON = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}$$

экани кўриниб турибди. Демак,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - ex}{\frac{a - ex}{e}} = e.$$

Шунга ўхшаш $$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a+ex}{\frac{a+ex}{e}} = e.$$

2- мисол. Катта ярим ўқи 3 ва кичик ярим ўқи 2 бўлган эллипснинг тенгламаси ва унинг директрисалари тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра

$$a = 3, \qquad b = 2.$$

Эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

эксцентриситети эса

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9-4}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

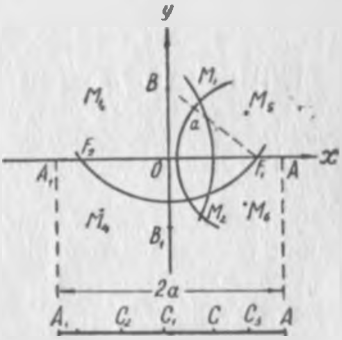
га тенг.

Директрисаларнинг тенгламалари:

$$x = \pm\frac{a}{e}, \quad x = \pm\frac{3\cdot 3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{9}{5}.$$

6. Эллипсни ясаш. Эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари ёки эллипснинг тенгламаси берилган бўлса, бу ҳолда эллипсни циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш мумкин. Бунинг учун бирор Декарт системасини олиб, Ox ўқда $OA = a$ ва Oy ўқда $OB = b$ кесмаларни ясаймиз (68-чизма). B нуқтани марказ деб олиб, a радиус билан айлана чизамиз. Бу айлана Ox ўқни F_1 ва F_2 нуқталарда кесиб ўтади; бу нуқталар эллипснинг фокуслари бўлади, чунки тўғри бурчакли OF_1B, OF_2B учбурчаклардан:

$$c = OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

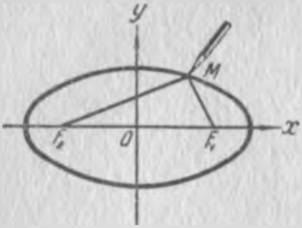


68 -чизма.

Энди $AA_1 = 2a$ кесмани олиб, уни ихтиёрий C нуқта ёрдамида иккита кесмага ажратамиз. $AC = r_1$ ва $A_1C = 2a - r_1 = r_2$ радиуслар билан F_1 ва F_2 нуқталарни марказ қилиб (фокуслар) айланалар чизамиз; булар M_1 ва M_2 нуқталарда кесишади. Бундан кейин AA_1 кесмада $C_1, C_2, C_3, \ldots$ нуқталар олиб, $AC_1, A_1C_1, AC_2, A_1C_2, \ldots,$ радиуслар билан ўша F_1 ва F_2 марказлардан айланалар чизамиз, уларнинг кесишган $M_3, M_6, M_4, M_5, \ldots$ нуқталари эллипснинг нуқталари бўлади, чунки бу нуқталардан F_1, F_2 фокусларгача масофалар йиғиндиси $2a$ га тенг:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Эллипснинг M_1, M_2, ...нуқталарини унинг фокусларини топмасдан туриб тенгламасига биноан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун функция графигини ясашдаги каби эллипс тенгламасидаги x га ихтиёрий қийматлар бериб, x га берилган қийматларга мос бўлган y нинг қийматларини топамиз. Натижада (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...нуқталар топилади. Бу нуқталарни узлуксиз чизиқ билан туташтирсак, эллипс ҳосил бўлади.



69 -чизма.

Эллипсни механик усулда чизиш ҳам мумкин. Бунинг учун Ox ўқда OF_1, OF_2 кесмалар олиб, эллипс фокусларини ясаймиз (69- чизма). Узунлиги $2a$ га тенг бўлган ип олиб, унинг бир учини F_1 фокусга ва иккинчи учини F_2 фокусга бириктирамиз ва қалам учи билан ипга F_1MF_2 учбурчак шаклини бериб, қаламни узлуксиз ҳаракатлантирсак, эллипс чизилади, чунки бу ҳолда ҳамма вақт

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

тенглик сақланади.

34-§. ГИПЕРБОЛА

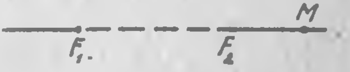
1. Гиперболанинг каноник тенгламаси. *Гипербола деб ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача (фокусларгача) масофаларининг айирмаси ўзгармас сонга тенг бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрнига айтилади.*

Таърифда айтилган айирма фокуслар орасидаги масофадан кичик булиши ҳамда нолдан фарқли бўлиши шарт.

Гипербола тенгламасини келтириб чиқаришдан илгари бу шарт маъносини кўриб ўтамиз. F_1, F_2 — иккита тайин нуқта, M — бирор ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу ҳолда

$$MF_1 - MF_2$$

айирма M нуқта F_1F_2 кесма давомида ҳосил бўладиган иккита ярим тўғри чизиқнинг бирида ётган ҳолдагина F_1, F_2 нуқталар орасидаги масофага тенг бўлади (70- чизма).



70- чизма.

Демак, ҳар бир нуқтасидан берилган икки F_1, F_2 нуқтагача масофаларининг айирмаси F_1 F_2 нуқталар орасидаги ўзгармас масофага тенг булган нуқталарнинг текисликдаги геометрик ўрни F_1, F_2 кесманинг иккала давомидан иборат булган ярим тўғри чизиқларни тасвирлайди.

Агар

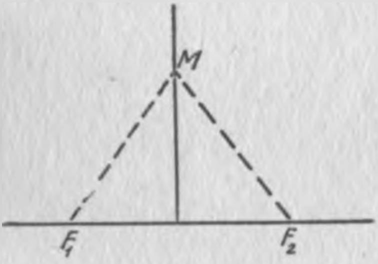
$$MF_1 - MF_3$$

айирма нолга тенг булса, яъни бирор M нуқтадан берилган икки F_1, F_2 нуқтагача булган масофалар айирмаси нолга тенг бўлса, у ҳолда бу нуқта F_1, F_2 нуқталардан тенг узоқликда ётади. Аммо ҳар бир нуқтасидан берилган икки F_1 ва F_2 нуқтагача масофаларнинг айирмаси нолга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни F_1 F_2 кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр бўлиб ўтган тўғри чизиқни тасвирлайди (71- чизма).

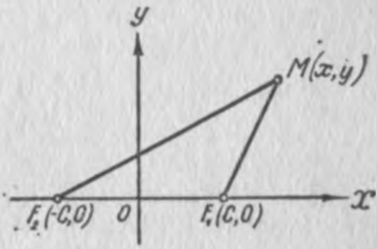
Қуйида гипербола эгри чизиқ булишини кўрамиз. Шунинг учун гипербола таърифида юқоридаги шартлар қўйилиши лозим.

Энди гиперболанинг таърифига асосланиб унинг тенгламасини тузамиз. M нуқта гиперболанинг ихтиёрий нуқтаси, F_1,F_2 нуқталари унинг фокуслари ва таърифда айтилган ўзгармас сон $2a$ маълум бўлсин. Бу ҳолда гипербола таърифига асосан:

$$MF_2 - MF_1 = \pm 2a \qquad (1)$$



71 -чизма.



72 -чизма.

(агар $MF_2 > MF_1$ бўлса, ўнг томонда + ишора, $MF_2 < MF_1$ бўлса, — ишора олинади). F_1, F_2 фокуслардан ўтган тўғри чизиқни Ox ўқ, F_1 F_2 нинг ўртасидан Ox ўққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни Oy ўқ деб оламиз (72- чизма). M нуқтанинг координаталари (x, y) бўлсин, F_1 фокуснинг координаталари (c, 0) ва F_2 фокусники эса ($-c$, 0) бўлади; шунинг учун,

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \; F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

(2) даги F_1M, F_2M нинг ифодаларини (1) га қўйсак,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (*)$$

Бу гиперболанинг танлаб олинган Декарт системасидаги тенгламасидир. Уни соддалаштириш учун иккинчи радикални ўнг томонга ўтказамиз ва ундан кейин иккала томонини квадратга кўтариб, ўхшаш ҳадларини ихчамлаймиз; натижада

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

тенглик ҳосил бўлади. Бунинг иккала томонини яна бир марта квадратга кўтарамиз ва соддалаштирамиз. У ҳолда

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2\,(c^2-a^2) \tag{3}$$

тенглик ҳосил бўлади. F_2MF_1 учбурчакда

$$MF_2-MF_1<F_2F_1$$
$$2a<2c,\ a<c$$

ёки

$$a^2<c^2,\ c^2-a^2>0.$$

c^2-a^2 мусбат бўлгани сабабли уни b^2 билан белгиласак бўлади, яъни

$$c^2-a^2=b^2. \tag{4}$$

Демак, (3) тенгликни

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \tag{5}$$

ёки иккала томонини a^2b^2 га бўлиб,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

кўринишда ёзиш мумкин, (6) тенглама (*) тенгламани икки марта квадратга кўтариб, радикалдан қутқариш натижасида ҳосил бўлади. Шунинг учун бу тенгламаларнинг эквивалентлигини ёки квадратга кўтаришлар қаралаётган геометрик ўринга қўшимча нуқталар киритмаганлигини кўрсатишимиз керак. Ҳозир шу масалани ҳал қиламиз.

(*) тенгламани

$$r_2-r_1=\pm 2a$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда

$$r_1=F_1M,\ r_2=F_2M$$

(33- параграфдаги (13) тенгликка қаранг). Бу тенгламадан

$$r_2=\pm 2a+r_1 \tag{**}$$

кейинги тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак, уни қаноатлантирадиган қўшимча $-r_2=\pm 2a+r_1$ қиймат келиб чиқади; уларни

$$r_1+r_2=2a,$$
$$r_1+r_2=-2a$$

кўринишда ёзсак, $2a < 2c$ бўлгани сабабли биринчи тенгламанинг маъноси йўқ (чунки учбурчак икки томонининг йиғиндиси учинчи томонидан кичик бўлолмайди). Иккинчи тенгламанинг эса $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $2a > 0$ бўлгани сабабли маъноси йўқ эканини кўрамиз. (**) тенгламани квадратга кўтарганимизда

$$4ar_1 + 4a^2 + r_1^2 = r_2^2$$

тенглама ҳосил бўлади ва бу тенгламани яна бир марта квадратга кўтариш (6) тенгламани беради. Аммо бу тенгламанинг чап томонида ± ишора тургани учун уни яна бир марта квадратга кўтариш ҳеч қандай қўшимча тенглама бермайди.

Демак, (*) тенгламани икки марта квадратга кўтариб, (6) тенгламани ҳосил қилишимиз билан қаралаётган геометрик ўринга ҳеч қандай қўшимча нуқталар қўшилмайди.

Шундай қилиб, (6) тенглама ҳам гиперболанинг тенгламаси экан. (6) тенглама гиперболанинг *каноник тенгламаси* дейилади. Гипербола ҳам иккинчи тартибли чизиқ экани бу тенгламадан кўриниб турибди.

2. **Гиперболанинг шакли.** Гипербола шаклини унинг (6) тенгламасига кўра текширамиз. Бу тенгламага x, y нинг квадратлари киради, шунинг учун агар (x, y) нуқта гипербола нуқтаси бўлса, $(\pm x, \pm y)$ нуқталар ҳам гиперболанинг нуқталари бўлади, бу эса гипербола нуқталарининг координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашганини билдиради. Демак, гипербола шаклини биринчи чоракда (квадрантда) текширсак, унинг бошқа чораклардаги қисмларининг шакли ҳам аниқланган бўлади. (6) тенгламадан y ни топамиз (биринчи чоракдаги нуқтанинг координаталари мусбат):

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad a \geqslant 0. \tag{7}$$

Бу тенгликда y ҳақиқий сон бўлиши учун

$$x^2 - a^2 \geqslant 0$$

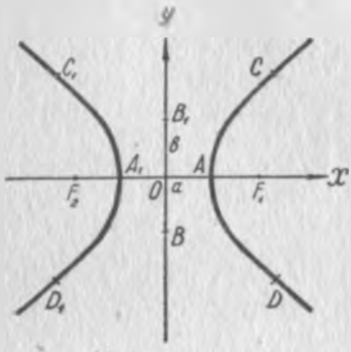
ёки

$$|x| \geqslant a$$

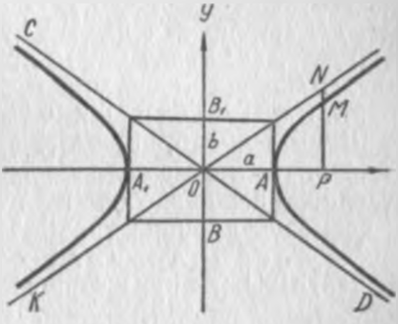
бўлиши керак. x ўзгарувчи a дан ∞ гача ўсиб борганда (7) тенгликдан y нинг 0 дан ∞ гача ўсиб боришини кўрамиз. Бундан гиперболанинг биринчи чоракдаги ёйи AC чизиқ эканини кўриш осон. Энди симметриядан фойдаланиб, қолган чораклардаги гипербола ёйларини чизсак, гиперболанинг CAD ва $C_1A_1D_1$ дан иборат шохларини (тармоқларини) ҳосил қиламиз (73- чизма).

Тенгламаси каноник шаклда берилган (6) гипербола учун координата ўқлари симметрия ўқлари эканлиги равшан. Фокуслардан ўтган симметрия ўқи унинг *фокал ўқи* дейилади.

Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси гиперболанинг *маркази* дейилади. (6) тенглама билан тасвирланган гипербола учун Ox ўқ фокал ўқ, координата боши унинг маркази бўлади, $A(a, 0)$ ва $A_1(-a,0)$ нуқталар гиперболанинг *учлари* дейилади. Гиперболанинг Oy ўқ билан умумий нуқтаси йўқ. $AA_1 = 2a$ кесма гиперболанинг *ҳақиқий ўқи*, $BB_1 = 2b$ гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади. $c > a$ бўлгани учун гиперболанинг фокуслари гипербола учларидан „нарироқда" жойлашгандир.



73 -чизма.



74 -чизма.

3. **Гиперболанинг асимптоталари.** Гиперболанинг AA_1 ва BB_1 ўқларига ясалган тўғри тўртбурчак диагоналлари давомида ҳосил бўлган KN ва CD тўғри чизиқларни олиб, улар билан гипербола шохлари орасидаги муносабатни қараймиз (74- чизма). Бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари: $y = \pm \frac{b}{a}x$. Биз қарайдиган муносабатни биринчи чоракдагина кўришнинг ўзи кифоя. Бошқа чораклар учун у муносабат симметрикликдан очиқ кўриниб қолади. Биринчи чоракда нуқталарнинг координаталари мусбат бўлгани учун

$$Y = \frac{b}{a}x \tag{8}$$

тенгламани ва гипербола учун эса (7) тенгламани оламиз:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(8) тенглама KN тўғри чизиқда $x = OP$ абсциссали N нуқтанинг Y ординатасини, (7) тенглама гиперболада ўша $x = OP$ абсциссали M нуқтанинг $y = PM$ ординатасини ифода этади. Шунинг учун

$$MN = PN - PM = Y - y;$$

бу айирма абсциссаси бир хил бўлган тўғри чизиқ нуқтаси ординатаси билан гипербола нуқтаси ординатаси орасидаги айирмадир.

Энди биз x чексиз ўсганда бу айирманинг нолга интилишини кўрсатамиз. (7) ва (8) тенгликларга мувофиқ

$$Y - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$x \to \infty$ да бу ифоданинг лимитини топамиз:

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Суратдаги қавсларни очиб, қисқартгандан кейин:

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Шундай қилиб, M нуқта гипербола шохи (тармоғи) бўйича марказдан етарли узоқлашганда, яъни $x \to \infty$ бўлганда, $MN = Y - y$ айирма нолга интилади. Бу фикрни симметрияга асосан $Y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ билан гипербола шохлари устида ҳам такрорлаш мумкин. Бу икки тўғри чизиқ гиперболанинг асимптоталари дейилади. Шундай қилиб, гипербола асимптоталарининг тенгламалари:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{9}$$

Бу асимптоталарнинг бурчак коэффициентлари $\pm \frac{b}{a}$ бўлгани сабабли улар томонлари $2a$ ва $2b$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак диагоналлари бўйича йўналган бўлади. Бу фикрдан гиперболани ясашда фойдаланиш анча қулайлик туғдиради.

1- мисол. Гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи 3, мавҳум ярим ўқи 2 га тенг. Гиперболанинг ва унинг асимптоталарининг тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра

$$a = 3, \qquad b = 2.$$

Буларни (6) тенгламаларга қўйиб, гиперболанинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

эканини ва (9) тенгламаларга мувофиқ асимптоталарнинг тенгламалари

$$y = \pm \frac{2}{3} x$$

эканини топамиз.

4. Гиперболанинг эксцентриситети. *Гипербола фокуслари орасидаги масофанинг гипербола ҳақиқий ўқи узунлигига нисбати гиперболанинг эксцентриситети дейилади* ва у e орқали белгиланади, яъни

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{10}$$

Гиперболада $c > a$ бўлгани сабабли

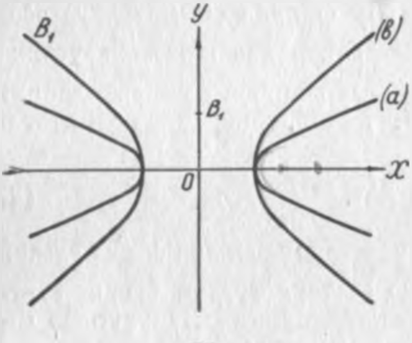
$$e > 1,$$

демак, гиперболанинг эксцентриситети ҳамма вақт бирдан катта бўлади. (4) формуладан

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

экани келиб чиқади; c нинг бу ифодасини (10) формулага қўйсак,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{11}$$



75- чизма.

тенглик ҳосил бўлади. Агар a ўзгармай қолиб, b нинг қиймати a га нисбатан жуда кичик бўлса, e бирга анча яқин бўлади ва бу ҳолда гиперболанинг шохлари сиқиқ бўлади (75- чизма, (a) ҳол), агар a ўзгармай қолиб, b катталашиб борса, гиперболанинг эксцентриситети 1 дан анча катта қийматлар олади ва бу ҳолда гипербола шохлари кенгайиб боради (75- чизма (b) ҳол).

Шундай қилиб e бирга қанча яқин булса, гиперболанинг шохлари шунча сиқиқ ва e бирдан қанча катта бўлса, гипербола шохлари шунча ёйиқ жойлашган бўлади.

5. Гиперболанинг фокал радиуслари. Гиперболанинг исталган M (x, y) нуқтасидан унинг F_1 $(c, 0)$ ва F_2 $(-c_1, 0)$ фокусларигача бўлган масофалари шу M нуқтанинг фокал радиуслари дейилади.

Гипербола фокал радиусларини r_1 ва r_2 билан белгиласак, таърифга биноан (76- чизма),

$$r_1 = F_1M, \; r_2 = F_2M$$

деб ёзсак бўлади. (1) тенглик бу ҳолда

$$r_2 - r_1 = \pm 2a \tag{12}$$

кўринишни олади; агар M нуқта гиперболанинг ўнг шохида бўлса, бу тенгликда $+$ ишора, M нуқта гиперболанинг чап шохида бўлса, $-$ ишора олинади.

Гиперболанинг фокал радиусларининг x орқали ифодасини топайлик. (2) тенгликларнинг иккала томонини квадратга кўтариб, иккинчи тенгликдан биринчи тенгликни айирамиз, натижада

$$r_2^2 - r_1^2 = 4ex$$

ёки

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx$$

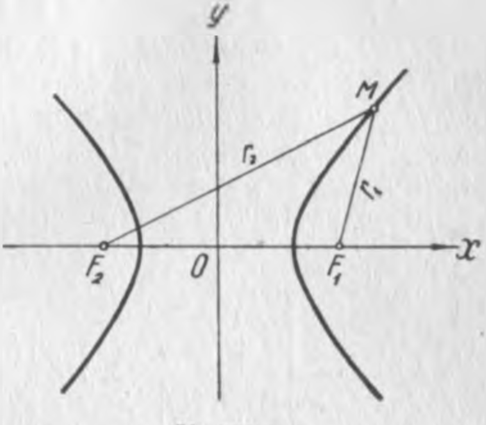
тенглик ҳосил бўлади. (10) ва (12) тенгликка биноан бундан

$$r_2 + r_1 = \pm 2ex$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу тенглик билан (12) тенгликни биргаликда ечиб,

$$r_1 = -a + ex, \ r_2 = a + ex \text{ (ўнг шох учун);}$$
$$r_1 = a - ex, \ r_2 = -a - ex \text{ (чап шох учун)} \qquad (13)$$

эканини топамиз. Бу формулалар гиперболанинг абсциссаси x га тенг бўлган нуқтасининг фокал радиусларини топиш учун хизмат қилади.



76- чизма.

2- мисол. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболанинг абсциссаси 8 га тенг. Ординатаси мусбат бўлган нуқтасининг фокал радиуслари ҳисоблансин.

Ечиш. Абсциссаси $x = 8$, ординатаси мусбат ($y > 0$) бўлган нуқта биринчи квадрантда ётади ва гиперболанинг ўнг шохида бўлади; шунинг учун

$$r_1 = -a + ex, \ r_2 = a + ex$$

формулалардан фойдаланиб, нуқтанинг фокал радиусларини топамиз. Мисолда берилган гипербола тенгламасига кўра:

$$a = 4, \ b = 3.$$

Демак,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{5}{4}.$$

Бу қийматларни r_1 ва r_2 учун ёзилган формулаларга қўямиз:

$$r_1 = -4 + \frac{5}{4} \cdot 8 = 6,$$

$$r_2 = 4 + \frac{5}{4} \cdot 8 = 14.$$

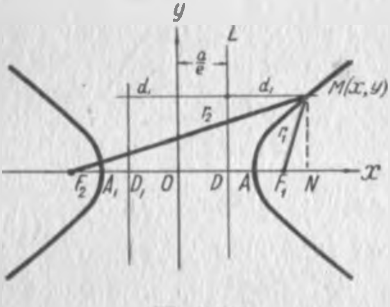
6. Гиперболанинг директрисалари.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболанинг директрисалари деб, унинг марказидан $\pm \frac{a}{e}$ *масофада фокал ўқига перпендикуляр бўлиб ўтадиган иккита тўғри чизиққа айтилади.*

Бу таърифга қараганда гипербола директрисаларининг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = + \frac{a}{e} \text{ ва } x = - \frac{a}{e}.$$



77- чизма.

Гиперболада $e > 1$ бўлгани сабабли $\frac{a}{e} < a$ бўлади; демак, гиперболанинг директрисалари унинг O маркази билан A ва A_1 учлари орасига жойлашган (77- чизма).

Қуйидаги хоссани исбот қиламиз.

Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан фокусгача масофанинг мос директрисагача бўлган масофага нисбати e (ўзгармас) сонга тенг.

Исбот. Бу хоссанинг исботини гиперболанинг ўнг фокуси ва унга мос директрисаси учун берамиз; унинг чап фокуси ва унга мос директрисаси учун теореманинг тўғри экани симметриядан келиб чиқади. Гиперболанинг M (x, y) нуқтасидан DL директрисагача бўлган масофа d_1 бўлсин. Чизмадан кўринишича

$$ON = OD + DN$$

ёки

$$x = \frac{a}{e} + d_1.$$

Бу тенгликдан:

$$d_1 = x - \frac{a}{e}.$$

Агар M нуқта гиперболанинг чап шохида бўлса, у ҳолда шунга ўхшаш усул билан

$$d_1 = \frac{a}{e} - x$$

бўлишини кўриш қийин эмас. Энди $\frac{r_1}{d_1}$ нисбатни тузамиз, M нуқта ўнг шохда бўлган ҳолда бу нисбат

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a+ex}{x-\frac{a}{e}} = \frac{e(-a+ex)}{ex-a} = e$$

га тенг бўлади. M нуқта чап шохда бўлганда эса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a-ex}{\frac{a}{e}-x} = \frac{e(a-ex)}{a-ex} = e$$

га тенг бўлади. Иккала ҳолда ҳам бу нисбат ўзгармас e сонга тенг экани исбот қилинади.

3- мисол. Гипербола директрисалари орасидаги масофа унинг фокуслари орасидаги масофадан 3 марта кичик. Гиперболанинг мавҳум ўқи 4 га тенг. Гиперболанинг эксцентриситети ва директрисалари тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Гиперболанинг фокуслари орасидаги масофа $2e$, директрисалари орасидаги масофа $2\frac{a}{e}$ экани юқорида баён қилинганлардан маълум.

Масаланинг шартига кўра:

$$3\left(2\frac{a}{e}\right) = 2c$$

ёки

$$3a = ce.$$

Аммо

$$e = \frac{c}{a},$$

демак,

$$3a = \frac{c^2}{a},$$

$$\frac{c^2}{a^2} = 3,$$

бундан

$$e = \sqrt{3}.$$

Директрисалар тенгламаларини тузамиз:

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

a ни топиш керак. Гипербола учун

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

демак,

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 3 \quad \text{ёки} \quad b^2 = 2a^2;$$

масаланинг шартига кўра $2b = 4$, бундан $b = 2$; демак,

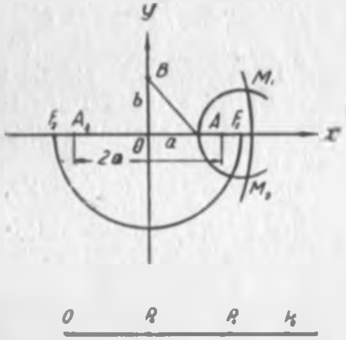
$$2a^2 = 4, \quad a = \pm \sqrt{2}.$$

a ва e қийматларини директриса тенгламаларига қўямиз:

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ёки

$$\sqrt{3x} \pm \sqrt{2} = 0.$$



78- чизма.

7. Гиперболани чизиш. Гиперболани циркуль ва чизғич ёрдами билан чизиш мумкин. Бунинг учун гипербола тенгламасидан a, b ярим ўқлар узунлигини аниқлаймиз. Координаталар бошидан бошлаб Ox ўқда $OA = a$ ва $OB = b$ кесмаларни ажратамиз (78- чизма), бу ҳолда

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

булади. Энди абсциссалар ўқида F_1 $(c, 0)$ ва F_2 $(-c, 0)$ фокусларни ясаймиз. Бу фокусларни марказ қилиб олиб, $r_1 = OP_0$ ва $r_2 = 2a + r_1 = OP_1 + P_1P_2 = OP_2$ радиуслар билан айлана ёйларини чизамиз (бунда $OP_1 = 2a$). Бу ёйларнинг кесишган M_1 ва M_2 нуқталари гипербола ўнг шохининг нуқталари булади, чунки $r_2 - r_1 = 2a$ тенглик бу нуқталар учун ўринлидир (ясашга кўра).

Энди r_1, r_2 радиуслар катталикларини ўзгартириб, гипербола ўнг шохи нуқталарини кетма-кет ҳосил қила борамиз. Гипербола чап шохи нуқталарини ҳам шу йўсинда

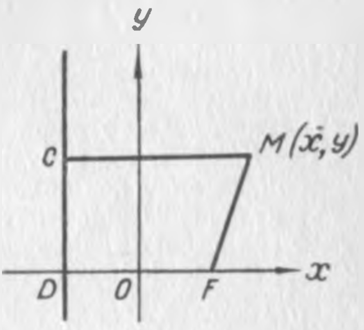
$$r_2 - r_1 = -2a$$

тенглик билан ҳосил қилинади.

35- §. ПАРАБОЛА

1. Параболанинг каноник тенгламаси. *Парабола деб ҳар бир нуқтасидан берилган бир нуқтагача (фокусгача) ва берилган бир тўғри чизиққача (директрисагача) масофалари ўзаро тенг бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрнига айтилади.* Директриса фокусдан ўтмаслиги шарт.

Бу таърифга асосланиб, параболанинг Декарт системасидаги тенгламасини ёзамиз. Берилган нуқта F ва берилган тўғри чизиқ CD бўлсин (79- чизма). F нуқтадан CD тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни Ox ўқ деб, CD тўғри чизиқ билан F фокуснинг ўртасидан Ox ўққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни Oy ўқ деб оламиз. M нуқтанинг ҳосил бўлган xOy системадаги координаталари (x, y) ва F фокус билан CD орасидаги масофа p бўлсин.



79- чизма.

Бу ҳолда $OF = \frac{p}{2}$ ва $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ бўлади.

Параболанинг таърифига кўра:

$$FM = MC. \qquad (1)$$

Ясашга биноан C нуқтанинг координаталари $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига биноан:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad MC = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Буларни (1) тенгликка қўямиз:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \qquad (*)$$

Буни соддалаштириш учун иккала томонини квадратга кўтарамиз ва ўхшаш ҳадларини ихчамласак,

$$y^2 = 2px \qquad (2)$$

тенглама ҳосил бўлади.

(*) тенгламани квадратга кўтариб радикалдан қутқариш йўли билан (2) тенгламани ҳосил қилдик. Бу билан қаралаётган геометрик ўринга қўшимча нуқталар кириб қолмаганлигини кўрсатишимиз керак.

(*) тенгламани квадратга кўтарганимизда ҳосил бўладиган тенглама (*) тенгламанинг ўзига ва

$$-\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \qquad (^{**})$$

тенгламага эквивалент бўлади. Аммо (**) тенгламанинг ўнг томони чап томонига зидлик қилади, яъни тенгламанинг маъноси (ечими) йўқ. Ҳақиқатан ҳам, $x \geqslant 0$ бўлса, (**) тенгламанинг ўнг томони мусбат, чап томони манфий миқдор бўлади. Шунинг учун бу ҳолда тенгламанинг маъноси бўлмайди. Агар $x < 0$ бўлса,

$$\left|\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right|=\sqrt{\left|\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2\right|}\leqslant\sqrt{\left|x-\frac{p}{2}\right|^2}=$$

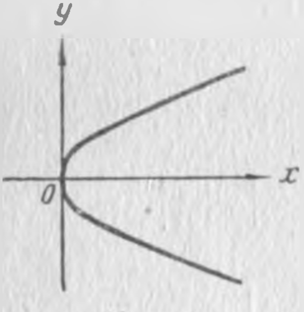
$$=\left|x-\frac{p}{2}\right|<|x|+\left|\frac{p}{2}\right|=|x|+\frac{p}{2}, \quad (p>0).$$

(**) тенглама чап томонининг абсолют қиймати эса (*) нинг чап томонидан кичик. Шунинг учун бу ҳолда ҳам (**) тенгламанинг ўринли бўлиши мумкин эмас.

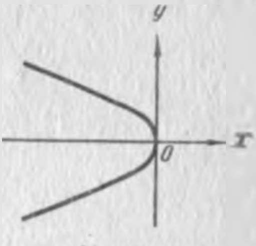
Шундай қилиб, (*) тенгламани квадратга кўтариш янги тенгламага олиб келмайди ва қўшимча нуқталар киритмайди. (2) тенглама параболанинг *каноник тенгламаси* дейилади.

2. Параболанинг шакли. Парабола шаклини унинг (2) тенгламаси бўйича текширамиз; бу тенгламадан

$$y=\pm\sqrt{2px} \qquad (3)$$



80- чизма.



81- чизма.

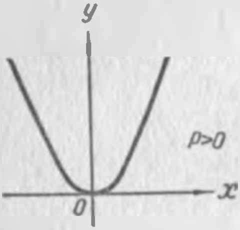
экани кўринади. Агар $p > 0$ бўлса, y мавҳум қийматли бўлмаслиги учун $x \geqslant 0$ бўлиши керак. Демак, x турли қийматлар олса, бу қийматлар 0 дан $+\infty$ гача бўлган оралиқда бўлиши керак, x нинг бундай қийматларига y нинг 0 дан $\pm\infty$ гача қийматлари тўғри келади, яъни биринчи квадрантда x нинг қийматлари 0 дан $+\infty$ гача ўсиб борганда y ҳам 0 дан $+\infty$ гача ўсиб боради.

Шундай қилиб, парабола 80 - чизмада тасвирланган чизиқдан иборат (параболанинг Ox ўққа нисбатан симметрик экани (2) тенгламадан кўринади). Агар параболанинг (2) тенгламасида $p \leqslant 0$ бўлса, бу ҳолда $x \leqslant 0$ бўлиши керак ва параболанинг шакли 81- чизмадаги каби бўлади. O нуқта параболанинг учи, p эса унинг *параметри* ва Ox ўқ параболанинг симметрия ўқи ёки фокал ўқи дейилади.

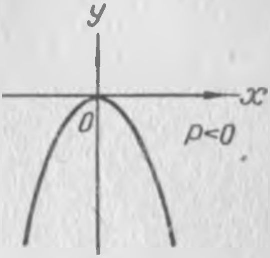
Агар параболанинг (2) тенгламасида x билан y ни ўринларини алмаштирсак, параболанинг тенгламаси

$$x^2 = 2\ py \tag{4}$$

кўринишни олади; бу ҳолда парабола координата ўқларига нисбатан 82 — 83- чизмаларда курсатилгандек жойлашади.



82 - чизма.



83 - чизма.

3. **Параболанинг эксцентриситети ва директрисаси.** Параболанинг ихтиёрий нуқтасидан унинг фокусигача бўлган масофасини r билан, директрисагача булган масофани d билан белгиласак, парабола таърифидан

$$r = d$$

экани келиб чиқади. Бундан:

$$\frac{r}{d} = 1$$

экани равшан. Шунинг учун параболанинг эксцентриситети бирга тенг:

$$e = 1.$$

Координаталар бошидан (2) параболанинг директрисасигача масофа — $\frac{p}{2}$ га тенг бўлиб, директриса Oy уққа параллел булгани сабабли унинг тенгламаси

$$x = -\frac{p}{2} \tag{5}$$

бўлади.

Параболанинг (4) тенгламаси учун директрисанинг тенгламаси

$$y = -\frac{p}{2} \tag{6}$$

кўринишда бўлиши равшан.

1- мисол. *Ox* ўқ параболанинг симметрия ўқи, унинг учи координаталар бошида ётади. Парабола фокусидан учигача бўлган масофа 4 бирликка тенг. Параболанинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига биноан параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2px$$

кўринишда бўлади. Масалада p ни топиш керак экан. Буни топиш учун масаланинг кейинги шартидан фойдаланамиз; бу шартга кўра:

$$OF = 4,$$

демак,

$$\frac{p}{2} = 4$$

ёки

$$p = 8.$$

Бу қийматни парабола тенгламасига қўямиз:

$$y^2 = 2 \cdot 8x$$

ёки

$$y^2 = 16x.$$

2- мисол. Параболанинг учи координаталар бошида, унинг симметрия ўқи *Ox* ўқнинг манфий йўналиши билан бир хил бўлиб, параметри $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ гиперболанинг фокусларидан асимптоталаригача бўлган масофага тенг. Парабола тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига биноан параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2px$$

куринишда бўлиб, бунда $p < 0$ булиши керак, p ни топиш учун кейинги шартдан фойдаланамиз.

Гипербола тенгламасидан:

$$a = 3,\ b = 2.$$

Демак, гипербола асимптоталарининг тенгламалари

$$y = \pm \frac{2}{3}x,$$

фокуслари $(\sqrt{13},\ 0)$ ва $(-\sqrt{13},\ 0)$ нуқталарда $(c = +\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13})$.

Биз

$$y = -\frac{2}{3}x$$

асимптотадан $F(-\sqrt{13}, 0)$ фокусгача бўлган масофани топишимиз керак. Нуқтадан тўғри чизиққача масофани аниқлаш формуласига биноан:

$$\left|\frac{2x_1 + 3y}{\sqrt{13}}\right|_{\substack{x_1 = -\sqrt{13} \\ y_1 = 0}} = 2.$$

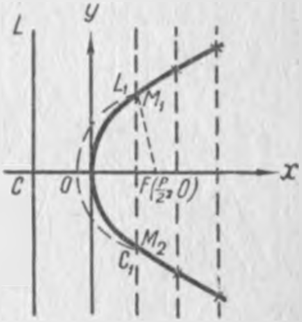
Қуйилган шартга кўра $p = d$ ва $p < 0$ бўлгани учун

$$p = -2.$$

Демак, $y^2 = 2px = 2\cdot(-2)x$, яъни $y^2 = -4x$.

4. Параболани чизиш. Параболани циркуль ва чизғич ёрдамида чизишни қараймиз. Параболанинг тенгламасидан p параметрни аниқлаймиз ва координаталар системасининг Ox ўқида $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ фокусни ҳамда 0 дан чап томонда абсциссалар уқига перпендикуляр бўлган ва Oy ўқдан $\frac{p}{2}$ масофа узоқликда CL тўғри чизиқни ўтказамиз (84- чизма). Энди CL чизиқдан d масофа узоқликда $\left(d > \frac{p}{2}\right)$ унга параллел C_1L_1 тўғри чизиқ ўтказамиз. Фокусни марказ қилиб олиб, $r = d$ радиус билан айлана ёйини чизамиз. Бу ёй билан C_1L_1 тўғри чизиқнинг кесишган M_1 ва M, нуқталари парабола нуқталаридир, чунки бу нуқталар учун

$$r = d.$$



84 - чизма.

Энди d ни ўзгартириб, бу усулни давом эттирсак, параболанинг кетма-кет нуқталарини топа борамиз, бу нуқталарни узлуксиз чизиқ билан бирлаштирсак, парабола ҳосил бўлади.

36-§. КОНУС КЕСИМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Элементар математикада урганилган тўғри доиравий конусни учидан иккала томонга давом эттирилиши мумкин деб қараймиз. Бу конусни унинг учидан утмайдиган турли текисликлар билан кессак, кесимда эллипс, гипербола ва парабола ҳосил булишини исбот қилиш мумкин[1]. Агар кесувчи текислик конус

---

[1] Биз бу фактни исботсиз қабул қиламиз. Бунинг исботи билан қизиқувчи китобхон аналитик геометриядан муфассалроқ ёзилган бошқа дарсликлардан қараб олиши мумкин.

ясовчиларининг бирортасига ҳам параллел бўлмаса, кесимда *эллипс* ҳосил бўлади.

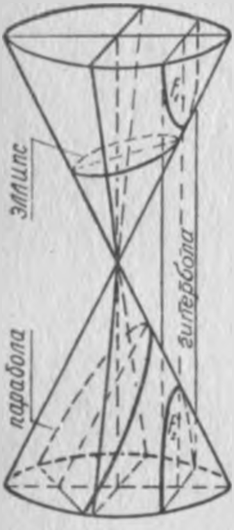
Агар кесувчи текислик конус ясовчиларидан фақат биттасига параллел бўлса, кесимда *парабола* ҳосил бўлади.

Агар кесувчи текислик конус ясовчиларидан иккитасига параллел бўлса, кесимда *гипербола* ҳосил бўлади (85- чизма). Шунинг учун эллипс, гипербола ва параболаларни *конус кесимлари* деб аталади.

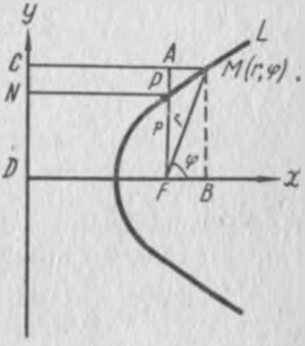
Ўтган параграфлардан конус кесимларининг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан фокусгача бўлган масофасининг мос директрисагача бўлган d масофага нисбати ўзгармас e сонига тенг экани бизга маълум.

Агар бу ўзгармас $e < 1$ бўлса конус кесими эллипс, $e > 1$ бўлса гипербола ва $e = 1$ бўлса парабола бўлади.

Эллипс, гипербола ва параболанинг бу хоссаларини уларга янги таъриф беришга асос қилиб олиш мумкин, яъни



85 - чизма.



86 - чизма.

ҳар бир нуқтасидан берилган бир нуқтагача (фокусгача) ва берилган бир тўғри чизиққача (директрисагача) масофаларининг нисбати ўзгармас (e) сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни $e < 1$ бўлганда эллипс, $e > 1$ бўлганда гипербола ва $e = 1$ бўлганда эса парабола дейилади.

Эллипс ва гипербола учун бу теорема таъриф шаклида 33 ва 34- параграфларда исбот қилинди.

Энди биз конус кесимларининг қутб координаталар системасидаги тенгламаларини келтириб чиқарамиз.

L чизиқ конус кесими чизиқларининг бирига қарашли ёй бўлсин (эллипс, парабола ёки гиперболанинг ўнг шохи). F нуқта конус кесимининг фокуси, DC бу фокусга мос бўлган директриса бўлсин (86- чизма). F фокусни қутб, F дан DC директрисага перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни қутб ўқи деб ва DC дан F фокусга томон йўналишни бу ўқнинг мусбат йўналиши деб оламиз. $M(r, \varphi)$ нуқта L чизиқдаги ихтиёрий нуқта бўлсин. F фокусдан Fx қутб ўқига перпендикуляр чиқарамиз ва бу перпендикуляр билан L чизиқнинг учрашган нуқтаси P бўлсин. Конус кесимининг хоссасига асосан:

$$\frac{FM}{CM} = e. \tag{1}$$

Аммо $FM = r$,

$$CM = CA + AM = CA + FB = CA + r\cos\varphi. \tag{2}$$

Конус кесимининг ихтиёрий нуқтаси учун (1) тенглик ўринли эди, шу сабабли бу муносабат P нуқта учун ҳам ўринли:

$$\frac{FP}{PN} = e;$$

FP конус кесимидаги абсциссаси фокуснинг абсциссасига тенг бўлган нуқтанинг ординатаси бўлиб, конус кесимининг *фокал параметри* дейилади ва p билан белгиланади. Буни эътиборга олсак, кейинги тенгликни

$$\frac{p}{NP} = e$$

ёки

$$NP = \frac{p}{e}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (L чизиқ парабола бўлса, $NP = p$, $e = 1$.) Шаклга қараганда $PN = AC$ бўлгани учун (2) тенгликни

$$CM = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

деб ёзса бўлади. FM ва CM нинг ифодаларини (1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{r}{\frac{p}{e} + r\cos\varphi} = e,$$

бундан:

$$r = p + re\cos\varphi$$

ёки

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Бу тенглама конус кесимининг қутб системасидаги тенгламасидир. Агар $e < 1$ бўлса, (3) тенглама эллипс тенгламаси, $e > 1$ бўлса, гипербола бир шохининг тенгламаси, $e = 1$ бўлганда эса параболанинг тенгламаси бўлади.

Мисол. Конус кесимининг қутб системасидаги тенгламаси

$$r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}.$$

Бу тенглама билан тасвирланган чизиқнинг Декарт системасидаги каноник тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Берилган тенгламани (3) кўринишга келтирамиз. Бунинг учун ўнг томондаги касрнинг сурат ва махражини 4 га бўламиз:

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\varphi}.$$

Бу тенгламадан:

$$e = \frac{5}{4} > 1,$$

демак, берилган тенглама гиперболани ифода этади. Бу мисолда $p = \frac{9}{4}$ эканлиги маълум. p ни гиперболанинг a, b ўқлари орқали ифода этиш учун гиперболанинг каноник тенгламасида $x = c$, $y = p$ деб олиш керак, чунки p параметр F фокус „устидаги“ нуқтанинг ординатасидир. Демак,

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^4} = 1,$$

бу тенгламани $c^2 = a^2 + b^2$ эканини эътиборга олиб p га нисбатан ечсак,

$$p = \frac{b^2}{a}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, a ва b ни аниқлаш учун

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \text{ ва } \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Тенгламадаги c нинг ўрнига

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

ни қўямиз ва тенгламаларни a ва b га нисбатан ечамиз; натижада

$$a = 4, \ b = 3$$

ҳосил бўлади. Демак, берилган гиперболанинг каноник тенгламаси:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Машқлар

Айлана

1. Маркази (5, 4) нуқтада бўлиб, радиуси 3 бирликка тенг бўлган айлана тенгламасини тузинг ва бу айланани ясанг.

2. Маркази (1, 2) нуқтада бўлган айлана (— 1, — 1) нуқтадан утади. Бу айлананинг тенгламасини тузинг.

3. Қуйидаги айланаларнинг марказлари ва радиусларини топинг:

1) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$; 5) $x^2 + y^2 - 6x = 0$.
3) $x^2 + y^2 - 10x = 0$;

4. Радиуси 5 бирликка тенг бўлган айлана Ox ўққа (— 3,0) нуқтада уринади. Бу айлана тенгламасини тузинг.

5. Ox ўққа координаталар бошида уриниб, Oy ўқни (0, — 8) нуқтада кесиб ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

6. Координаталар бошида Oy ўққа уриниб, Ox ўқни (— 10,0) нуқтада кесиб ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

7. Oy ўққа уриниб, Ox ўқни (1,0) ва (6,0) нуқталарда кесиб ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

8. Ox ўққа уриниб, Oy ўқни (0, — 1) ва (0,3) нуқталарда кесиб ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

9. (2,2), (+3,4) ва (+ 5, + 3) нуқталардан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

10. Абсциссалар ўқида $N(a, 0)$ нуқта берилган. M нуқтанинг ҳаракати давомида OMN учбурчакнинг OMN бурчаги доимо тўғри бурчаклигича қолади. M нуқта ҳаракатининг траекториясини топинг.

11. $x^2 + y^2 = 9$ айлананинг $A(-3, 0)$ нуқтасидан AB ватар ўтказилган ва бу ватар $BM = AB$ масофагача давом эттирилган. M нуқта ҳаракати давомида бу тенглик доимо сақланади. M нуқта ҳаракатининг траекториясини топинг.

12. M нуқтанинг ҳаракати давомида шу нуқтадан координаталар бошигача ва A $(a, 0)$ нуқтагача масофалар квадратларининг йиғиндиси a^2 га тенг булиб қолади. M нуқта ҳаракатининг траекториясини топинг.

13. $M(x, y)$ нуқтанинг ҳаракати давомида ундан

$$N(a, 0), P(-a, 0), Q(0, a)$$

нуқталаргача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси $3a^2$ га тенг бўлиб қолади. M нуқта ҳаракатининг траекториясини топинг.

14. Ox қутб ўқида 0 қутбдан бошлаб узунлиги $2a$ га тенг кесма ажратилган; $OA = 2a$ ни диаметр деб олиб айлана чизилган. Шу айлана тенгламасини тузинг.

Эллипс

15. Катта ўқи 6, кичик ўқи 4 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг.

16. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 6 *см*, унинг кичик ўқи 8 *см*. Эллипснинг тенгламасини тузинг ва эксцентриситетини топинг.

17. Эллипснинг фокуси билан кичик ўқини туташтирувчи тўғри чизиқ абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан 120°ли бурчак ҳосил қилади. Эллипснинг эксцентриситетини топинг.

18. Ер меридианини эллипс деб қараса бўлади. Бу ҳолда ернинг ўқи бу эллипснинг кичик ўқи бўлиб, унинг узунлиги тахминан 12 712 *км*, катта ўқи тахминан 12 754 *км*. Ер меридианининг эксцентриситетини топинг.

19. Ер Қуёш атрофида эллипс бўйича айланади. Қуёш эса бу эллипснинг битта фокусига жойлашган бўлади. Ер орбитасининг катта ўқи

$2a = 300\,000\,000$ *км*. Орбитанинг эксцентриситети $e = \frac{1}{60}$. Ер орбитасининг маркази Қуёшдан қанча масофада ётади? Қуёшдан Ергача энг кичик масофа (декабрда) энг катта масофадан (июнда) қанча қисқа? Ер орбитасининг кичик уқи унинг катта ўқидан қанча қисқа?

20. Эллипс кичик ўқининг учи билан катта ўқининг учи орасидаги масофа унинг фокуслари орасидаги масофадач 1,5 марта катта. Эллипснинг эксцентриситетини топинг.

21. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофа унинг катта ўқининг учи билан кичик ўқининг учи орасидаги масофага тенг. Эллипснинг эксцентриситетини топинг.

22. Координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган эллипс $M\left(3,3\frac{1}{5}\right)$ нуқтадан ўтади. Бу эллипснинг фокуси Ox ўқда бўлиб, эксцентриситети $e = 0{,}8$. Эллипснинг каноник тенгламасини тузинг ва M нуқтанинг фокал радиусини топинг.

23. $4x^2 + 9y^2 = 36$ эллипсда $M(x, y)$ нуқтадан ўнг фокусгача бўлган масофа чап фокусгача бўлган масофадан 3 марта кичик. M нуқтани аниқланг.

24. $x^2 + y^2 = 16$ айлананинг барча нуқталарининг ординаталарини 2 марта кичрайтириш натижасида ҳосил бўлган эгри чизиқ тенгламасини ёзинг.

25. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипснинг ўқларига ясалган тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенгламаларини ёзинг ва бу диагоналлар узунликларини топинг.

26. M нуқта $F(2{,}0)$ нуқтага $x = 9$ тўғри чизиққа қараганда 3 марта яқиндан туриб ҳаракат қилади. M нуқтанинг ҳаракат траекториясини топинг.

27. Узунлиги ўзгармас $a + b$ бўлган AB кесма A ва B учлари билан Ox ва Oy уқлар бўйича сурилиб ҳаракат қилади. M нуқта AB кесмани $BM = a$ ҳамда $MA = b$ қисмларга ажратади. M нуқта ҳаракати траекториясини топинг.

28. Ромбнинг томони 5 га, баландлиги эса 4,8 га тенг бўлиб, унинг иккита қарама-қарши учидан эллипс ўтади, бошқа икки қарама-қарши учига эллипснинг фокуслари жойлашган. Ромб диагоналларини координата ўқлари учун қабул қилиб эллипснинг каноник тенгламасини тузинг.

29. Эллипснинг катта ўқи 10 бирликка тенг бўлиб, унинг директрисаларининг тенгламаси: $x = \pm 12$. Эллипснинг тенгламасини, эксцентриситети ва абсциссаси $x = 3$ бўлган нуқтасининг фокал радиусларини топинг.

30. Эллипснинг симметрия ўқлари координата ўқларига параллел бўлиб, эллипснинг ўзи абсциссалар ўқига $A(5, 0)$, ординаталар ўқига эса $B(0{,}3)$ нуқтада уринади. Эллипснинг тенгламасини тузинг.

31. Эллипснинг симметрия ўқлари координата ўқларига параллел бўлиб, у Oy ўққа $A(0, 5)$ нуқтада уринади, Ox ўқни эса $B(5{,}0)$ ва $C(11{,}0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Эллипс тенгламасини тузинг.

32. Қутб координаталар системасида

$$1)\ \rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}; \qquad 2)\ \rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}; \qquad 3)\ \rho = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$$

тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг Декарт системасидаги тенгламасини ёзинг.

Гипербола

33. Ҳақиқий ўқининг узунлиги 10 га, мавҳум ўқининг узунлиги 6 га тенг бўлган гипербола тенгламасини ёзинг.

34. Гипербола учлари орасидаги масофа 10 га, фокуслари орасидаги масофа 12 га тенг. Гиперболанинг тенгламасини тузинг ва эксцентриситетини ҳисобланг.

35. Гипербола фокуслари орасидаги масофа 14 бирликка тенг бўлиб, унинг эксцентриситети $\frac{5}{4}$ га тенг. Гиперболанинг тенгламасини тузинг ва абсциссаси 8 га тенг бўлган нуқтанинг фокал радиусларини ҳисобланг.

36. Ҳақиқий ярим ўқи $\sqrt{15}$ га тенг бўлган гипербола $(5, -2)$ нуқтадан ўтади. Гипербола тенгламасини тузинг, фокуслар орасидаги масофани, эксцентриситетини топинг.

37. Гиперболалар

$$1)\ 4x^2 - 9y^2 = 36;\ 2)\ 16x^2 - 25y^2 = 400;\ 3)\ 25x^2 - 144y^2 = 3600$$

тенгламалар билан берилган. Бу гиперболаларнинг ҳар бир ўқлари узунлигини, фокусларининг координаталарини ва эксцентриситетларини топинг.

38. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ гиперболада абсциссаси 6 га тенг бўлиб, ординатаси мусбат бўлган нуқта олинган. Бу нуқтанинг фокал радиусларини ҳисобланг ҳамда гиперболанинг директрисалари тенгламасини тузинг.

39. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс берилган. Учлари эллипснинг фокусларида, фокуслари эллипснинг учларида ётадиган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

40. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболада чап фокусгача масофаси ўнг фокусгача масофасидан икки марта кичик бўлган нуқтанинг абсциссасини топинг.

41. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптоталари тенгламасини тузинг, фокусдан асимптотагача бўлган масофа ва асимптоталар орасидаги бурчакни топинг.

42. Гипербола асимптотаси унинг ҳақиқий ўқи билан: 1) $60°$ли бурчак, 2) $\alpha°$ бурчак ҳосил қилади. Гипербола эксцентриситетини топинг.

43. Гипербола директрисалари орасидаги масофз 8 га, фокуслари орасидаги масофа 12 га тенг. Гипербола тенгламасини тузинг.

44. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ гипербола асимптоталарининг тенгламаларини ёзинг эксцентриситети, асимптоталари орасидаги бурчак φ билан e эксцентриситети орасидаги муносабатни топинг.

45. Гипербола асимптоталари $y = \pm x$ тенгламалар билан берилган бўлиб, унинг фокуслари орасидаги масофа 8 га тенг. Гипербола тенгламасини тузинг.

46. $(10, -3\sqrt{3})$ нуқтадан ўтадиган гиперболанинг асимптоталари $y = \pm \frac{3}{5}x$ тенгламалар билан берилган. Гипербола тенгламасини тузинг.

47. Ҳар бир нуқтасидан $x = 1$ тўғри чизиққача бўлган масофаси $F(4,0)$ нуқтагача масофасидан икки марта кичик бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.

48. $A(-a, 0)$ ва $B(2a, 0)$ нуқталар берилган. M нуқта ҳаракати пайтида AMB учбурчакнинг A бурчаги унинг B бурчагидан икки марта кичик бўлиб қолаверади. M нуқта ҳаракатининг траекториясини топинг.

Парабола

49. Координаталар бошидан ўтган парабола: 1) ўнг ярим текисликка жойлашган бўлиб, Ox ўқ симметрия ўқи, параметри $p = 2$; 2) чап ярим текисликка жойлашган бўлиб, Ox ўқ симметрия ўқи, параметри $p = \frac{1}{3}$; 3) юқори ярим текисликка жойлашган бўлиб, Oy ўқ симметрия ўқи параметри $p = 4$; 4) пастки ярим текисликка жойлашган бўлиб, Oy ўқ симметрия уқи параметри $p = \frac{1}{2}$ га тенг. Ҳар бир ҳол учун парабола тенгламасини тузинг.

50. Координаталар бошидан утган парабола: 1) Ox ўққа нисбатан симметрик бўлиб, $M(1, 2)$ нуқтадан ўтади; 2) Ox ўққа симметрик бўлиб, $N(-1,2)$ нуқтадан ўтади; 3) Oy ўққа симметрик бўлиб, $P(5,5)$ нуқтадан ўтади. Ҳар бир ҳол учун парабола тенгламасини тузинг.

51. Координаталар бошидан ўтадиган параболанинг фокуси $F(0,4)$ нуқтага жойлашган бўлиб, Oy ўқ унинг симметрия ўқи бўлади. Парабола тенгламасини тузинг.

52. Қуйидаги параболаларнинг параметрлари ва координата ўқларига нисбатан жойлашишини аниқланг:

1) $y^2 = 3x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -y$.

53. $y^2 = 12x$ парабола фокусининг координаталарини топинг ва директрисасининг тенгламасини тузинг.

54. $y^2 = 18x$ парабола берилган. Унинг абсциссаси 5 га тенг бўлган нуқтасининг фокал радиусини топинг.

55. $y^2 = 12x$ параболада фокал радиуси 10 га тенг булган нуқтани топинг.

56. Параболанинг фокуси $F(-3,0)$ нуқтада бўлиб, директрисаси $x = 2$ тенглама билан берилган. Ана шу парабола тенгламасини тузинг.

57. Қуйидаги тенгламалар билан аниқланадиган эгри чизиқлар парабола экани курсатилсин ва улар учларининг, фокусларининг координаталари, параметрларининг миқдори ҳамда директрисаларининг тенгламалари эски координаталар системасига нисбатан аниқлансин.

1) $y^2 = 2x - 8$; 2) $y^2 = 2 - 8x$; 3) $x^2 = 6y - 3$;
4) $x^2 = 5 - 10y$; 5) $y = 2x^2 - 4x + 3$; 6) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 7$;
7) $x = 2y^2 - 6y + 10$.

58. $y^2 = -9x$ парабола билан $3x + 4y - 12 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини топинг.

59. $y^2 = 24x$ параболанинг фокусидан симметрия ўқига перпендикуляр бўлиб ўтадиган ватари узунлигини топинг.

60. Oy ўқ симметрия уқи бўлган парабола $x + y = 0$ тўғри чизиқ билан $x^2 + y^2 - 4y = 0$ айлананинг кесишган нуқтасидан ўтади. Парабола ҳамда унинг директрисаси тенгламаларини ёзинг.

61. Прожекторнинг ёруғлик берадиган сирти параболанинг ўз симметрия ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган. Бу сиртнинг диаметри 60 *см* бўлиб, баландлиги 8 *см* га тенг. Ёруғлик нурларининг параллел аксланиши учун ёруғлик манбаи параболанинг фокусида булиши керак. Ёруғлик манбаининг координаталарини аниқланг.

62. Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола $x - y = 0$ тўғри чизиқ билан $x^2 + y^2 + 4x = 0$ айлананинг кесишган нуқтаси орқали утади. Параболанинг тенгламасини тузинг. Парабола, айлана ва тўғри чизиқларни ясанг.

63. Ушбу $y = x^2 - 2x + 1$, $x = y^2 - 6y + 7$ параболаларнинг кесишган нуқтасини топинг.

64. Қутб координаталар системасида

$$1)\ \rho = \frac{3}{1 - \cos\varphi}; \qquad 2)\ \rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$$

тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг Декарт координаталар системасидаги тенгламаларини ёзинг.

65. Қутб координаталар системасида

$$1)\ \rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}; \qquad 2)\ \rho = \frac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}; \qquad 3)\ \rho = \frac{1}{2 - 2\cos\varphi}$$

тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг каноник тенгламаларини ёзинг.

Олтинчи боб

ИККИНЧИ ВА УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР

37- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТ

Бизга ушбу

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \tag{1}$$

жадвал бўйича тўртта, a_1, b_1, a_2, b_2 сон берилган бўлсин. Бундай жадвал *матрица* деб аталади. Матрица диагоналларида турган сонлардан

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[dr] & b_1 \\ a_2 \arrow[ur] & b_2 \end{tikzcd}$$

схема бўйича $a_1 b_2 - a_2 b_1$ айирма тузамиз. Бу айирма (1) матрицанинг иккинчи тартибли *детерминанти* деб аталади ва у

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

шаклда ёзилади. Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{2}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар детерминантнинг *элементлари*, a_1, b_1 сонлар детерминантнинг биринчи йўл элементлари, a_2, b_2 эса унинг иккинчи йўл элементлари, a_1, a_2 биринчи устун элементлари, b_1, b_2 иккинчи устун элементлари, a_1 ва b_2 детерминантнинг *бош диагонал* элементлари, a_2, b_2 детерминантнинг *кўндаланг диагонал* элементлари деб аталади (бу терминлар юқори тартибли детерминантларда ҳам ишлатилади). (2) тенгликни қуйидагича таърифлаймиз: *иккинчи тартибли детерминант бош диагонал элементлари купайтмаси билан кундаланг диагонал элементлари купайтмасининг айирмасига тенг.*

Мисол.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -13.$$

38- §. ИККИ НОМАЪЛУМЛИ ИККИТА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМА СИСТЕМАСИ

Энди икки номаълумли биринчи даражали иккита

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = c_1. \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

тенглама системасини иккинчи тартибли детерминант ёрдамида ечиш ва текшириш масаласини куриб чиқамиз. (1) системанинг ҳар бир тенгламаси аналитик геометрия нуқтаи назаридан тўғри чизиқ тенгламаси эканлиги бизга маълум. Шунинг учун номаълумларга нисбатан биринчи даражали тенгламани *чизиқли тенглама* деб аталади. (1) система иккита чизиқли тенгламадан иборат бўлгани учун уни чизиқли тенгламалар системаси деб атаймиз. (1) *тенгламалар системаси берилганда, бу системанинг ҳар бир тенгламасини айниятга айлантирадиган иккита* $x=\alpha$, $y=\beta$ *сон мавжуд бўлса,* (1) *тенгламалар системаси биргаликдаги система дейилади.* Акс ҳолда (1) система биргаликда бўлмаган ёки бир-бирига зид тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системаси биргаликда бўлса, α, β сон унинг ечимлар системаси дейилади. Зид (биргаликда бўлмаган) системанинг ечимлар системаси мавжуд эмаслиги таърифдан кўринади.

Энди (1) системанинг ечимлар системасини топиш масаласини кўрамиз. Бунинг учун (1) система биринчи тенгламасининг иккала томонини b_2 га, иккинчи тенгламасининг иккала томонини b_1 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан ҳадлаб айирамиз; натижада

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \qquad (2)$$

ҳосила бўлади. Шунга ўхшаш усул билан

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 \qquad (3)$$

тенгламани топамиз. Иккинчи тартибли детерминант таърифига кўра (2) ва (3) тенгламаларни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (2')$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (3')$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_x \text{ ва } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_y$$

каби белгилашларни киритамиз ва

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлганда

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{4}$$

эканини топамиз, x ва y нинг бу қийматлари (2) ва (3) тенгламаларнинг ечимларидир. Булар (1) системанинг ҳам ечимлар системаси бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, (4) формуладан x, y нинг детерминантлар билан тасвирланган ифодаларини (1) системадаги x ва y урнига қўйиб, ундаги кўпайтириш ва қўшиш амалларини бажарсак, айният ҳосил бўлади. Бу айният (4) қийматлар (3) системанинг ечимлари системаси эканини билдиради.

Δ детерминант (1) *системанинг детерминанти* дейилади. Бу детерминант нолдан фарқли бўлган ҳолда (2) ва (3) тенгламалар биргина ечимга эга бўлиши бизга аён. Демак, (4) формула (2′) ва (3′) тенгламаларнинг ва, шу билан бирга, (1) системанинг биргина ечимлар системасини аниқлайди.

Шундай қилиб, (1) *чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса, бу система биргина ечимлар системасига эга бўлиб, у* (4) *формула билан аниқланади.*

Агар $\Delta = 0$ бўлса, (1) системанинг ечимлари ҳақида нима дейиш мумкин? Бу саволга бундай жавоб берамиз: агар (1) *системанинг* Δ *детерминанти нолга тенг бўлса,* (1) *тенгламалар системаси ё бир-бирига зид, ёки чексиз куп ечимлар системасига эга.*

Ҳақиқатан, $\Delta = 0$ бўлсин, бу ҳолда Δ_x, Δ_y нинг камида биттаси нолдан фарқли ёки иккаласи ҳам ноль бўлиши мумкин. Масалан, Δ_x нолдан фарқли бўлсин, бу ҳолда (2′) ва (3′) тенгламалар бир-бирига зидлик қилади ($0 \cdot x = \Delta_x \neq 0$ ва $0 \cdot y = \Delta_y$ тенгламаларга айланади. Бу тенгламалардан биринчисининг бўлиши мумкин эмас). Демак, (1) системанинг ечимлар системасини топиб бўлмайди.

Энди $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ бўлсин, бу ҳолда

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad b_2c_1 - b_1c_2 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

ёки

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

бўлади, яъни (1) система тенгламаларининг номаълумлари олдидаги коэффициентлари ва озод ҳади пропорционал. Бу ҳолда системанинг бир тенгламаси иккинчи тенгламасидан келиб чиқади, яъни биз икки номаълумли битта тенгламага эга буламиз. Номаълумларнинг бирига чексиз куп ихтиёрий қийматлар бериб, тенгламадан иккинчи номаълум учун мос қийматларни топа оламиз. Бунда (1) системанинг чексиз куп ечимлар системаси ҳосил булади.

$\Delta \neq 0$ булганда, геометрик нуқтаи назардан, (1) тенгламалар системаси билан тасвирланган икки туғри чизиқ битта нуқтада кесишади ва бу нуқтанинг координаталари (4) формула билан аниқланади.

Иккинчи ҳолда $\left(\Delta = 0, \Delta_x \neq 0 \text{ ёки } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}\right)$ бу туғри чизиқлар параллел булиб, устма-уст тушолмайди; учинчи ҳолда туғри чизиқлар устма-уст тушувчи туғри чизиқлар деб, бизнинг чиқарган натижамизга геометрик маъно бериш мумкин.

1- мисол.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлар системаси топилсин.

Ечиш. Дастлаб берилган системанинг детерминантини топамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 1\cdot(-3) = 13.$$

$\Delta = 13 \neq 0$ булгани учун берилган тенгламалар системаси биргина ечимлар системасига эга.

Бу ечимлар системасини топиш учун Δ_x, Δ_y ни топамиз. (4) формулалардан куринадики, Δ_x ни тузиш учун Δ детерминантдаги x нинг a_1 ва a_2 коэффициентлари урнига унг томондаги озод ҳадлар c_1 ва c_2 ни қуйиш; Δ_y ни тузиш учун эса Δ детерминантдаги y нинг b_1, b_2 коэффициентлари урнига озод ҳадлар c_1, c_2 ни қуйиш керак. Бинобарин:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 7\cdot 5 - (-3)\cdot(-3) = 26,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 7\cdot 1 = -13.$$

Демак

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1.$$

Буларни берилган тенгламалар системасига қуйсак, системанинг иккала тенгламаси ҳам айниятга айланади, бу $(2, -1)$

берилган тенгламалар системасининг ечимлари системаси эканлигини кўрсатади.

Бунинг геометрик маъноси: берилган икки тўғри чизиқ $(2, -1)$ нуқтада кесишади.

2- мисол.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари топилсин.

Ечиш. Системанинг детерминантини тузамиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Аммо

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 \neq 0.$$

Демак, берилган тенгламалар системаси бир-бирига зидлик қилади. Буни тенгламалар системасининг ўзидан кўриш ҳам мумкин. Ҳақиқатан, x билан y нинг йиғиндиси бирга тенг, бу йиғиндининг иккига кўпайтмаси ҳам бирга тенг. Бу эса нотўғри, яъни системанинг биринчи тенгламаси унинг иккинчи тенгламасига зидлик қилади. Бу системанинг ечимлари йўқ. Геометрик нуқтаи назардан бу икки тўғри чизиқ бир-бирига параллел.

3- мисол.

$$\begin{cases} 5x + 6y = 8, \\ 10x + 12y = 16 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари системаси топилсин.

Ечиш. Бу системанинг детерминанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & & 6 \\ & \times & \\ 10 & & 12 \end{vmatrix} = 60 - 60 = 0$$

ва

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 16 & 12 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

бўлгани учун у чексиз кўп ечимлар системасига эга. Ҳақиқатан, бу системадаги биринчи тенгламанинг иккала томонини 2 га кўпайтирсак, иккинчи тенглама ҳосил бўлади; биз ҳақиқатда икки номаълумли иккита тенгламалар системасига эмас, балки икки номаълумли битта

$$5x + 6y = 8$$

тенгламага эгамиз. Бу тенгламадан y ни топсак, x га ихтиёрий қийматлар бериш йўли билан берилган системанинг ҳамма ечимлар системасини

$$y=\frac{8-5x}{6}$$

тенгламадан топамиз. Бунинг геометрик маъноси: икки тўғри чизиқ устма-уст тушади.

Агар (1) *тенгламалар системасидаги озод* c_1, c_2 *ҳадлар нолга тенг бўлса, тенгламалар системаси бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси деб аталади.*

Таърифга кўра бу система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \qquad (5)$$

кўринишда бўлади. Агар $x=0$, $y=0$ фараз қилинса, (5) системанинг иккала тенгламаси ҳам айниятга айланади. Демак, бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси ҳамма вақт биргаликдаги системадир. $x=0$, $y=0$ ечимлар системаси унинг ноль ёки тривиал ечимлар системаси дейилади.

Чизиқли тенгламалар системасининг ечимлари системаси биргиналиги ҳақида юқорида айтилган фикрга мувофиқ (5) системанинг детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

бўлганда унинг (0,0) ечимлар системаси биргина ечими бўлиб, унинг бу тривиал ечимидан бошқа ечими йўқ.

Агар (5) системада $\Delta=0$ бўлса, бу ҳолда $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$ бўлгани учун унинг чексиз кўп ечимлар системаси мавжуд. Бунинг тескарисини ҳам кўрсатиш мумкин, яъни (5) система чексиз кўп ечимлар системасига эга бўлса, унинг детерминанти нолга тенг. Шундай қилиб, $\Delta=0$ бўлиши (5) системанинг нолдан фарқли чексиз кўп ечимлар системасига эга бўлишининг зарур ва етарли шартидир.

Бунинг геометрик маъноси бир жинсли чизиқли (5) тенгламаларнинг ҳар бири координаталар бошидан ўтадиган тўғри чизиқлар эканини, $\Delta\neq 0$ бўлганда уларнинг координаталар бошидан бошқа умумий нуқтаси бўлмаслигини, $\Delta=0$ бўлганда эса уларнинг устма-уст тушишини билдиради.

39-§. УЧ НОМАЪЛУМЛИ БИР ЖИНСЛИ ИККИТА ТЕНГЛАМА СИСТЕМАСИ

Уч номаълумли бир жинсли иккита

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \qquad (1)$$

тенглама системаси берилган бўлсин. Бу тенгламалар системасини ечиш учун уларнинг коэффициентларидан тузилган бирор иккинчи тартибли детерминант, масалан,

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин, деб фараз қилайлик, (1) системанинг x ли ҳадини ўнг томонга ўтказамиз, яъни

$$b_1 y + c_1 z = -a_1 x,$$
$$b_2 y + c_2 z = -a_2 x$$

кўринишга келтирамиз ва икки номаълумли чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун берилган (4) формуладан фойдаланамиз. Бу ҳолда:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -a_1 x & c_1 \\ -a_2 x & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} x,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_1 x \\ b_2 & a_2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} x.$$

Бу ерда x га тайин қиймат берилган деб ҳисоблаймиз ва уни озод номаълум деб қабул қиламиз.

Агар соддалик учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

деб қабул қилсак,

$$y = -\frac{\Delta_1}{\Delta} x, \quad z = -\frac{\Delta_2}{\Delta} x \qquad (3)$$

бўлади. (3) дан маълумки, x номаълумга ихтиёрий қийматлар берсак, бу формулалардан y, z нинг тегишли қийматларини топамиз. x, y, z нинг бу қийматлари берилган (1) системанинг ечимлари системасини беради. Шундай қилиб, (3) формулалар $\Delta \neq 0$ бўлганда уч номаълумли бир жинсли тенгламалар системасининг ҳамма ечимларини беради.

Агар $\Delta = 0$ бўлиб, лекин Δ_1, Δ_2 дан биттаси нолдан фарқли бўлса, озод номаълум сифатида y ёки z ни оламиз (масалан $\Delta_1 \neq 0$ бўлса, озод номаълум сифатида y ни олиб, z ни y орқали ифодалаймиз).

Агар Δ, Δ_1, Δ_2 детерминантларнинг учови ҳам нолга тенг бўлса, яъни

$$b_1c_2 - b_2c_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \quad a_2b_1 - a_1b_2 = 0$$

бўлса, бундан

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

пропорция келиб чиқади. Тенгламалар системаси коэффициентлари пропорционал, шунинг учун системадаги битта тенглама иккинчи тенгламанинг натижасидир; демак, бизнинг ихтиёримизда уч номаълумли фақат битта тенглама бор. Бу ҳолда x, y, z номаълумлардан иккитасини, масалан, y, z ни озод номаълум деб олиш ва x ни булар орқали ифодалаш мумкин; $a_1 \neq 0$ шарт билан (1) системанинг биринчи тенгламасини олайлик,

$$x = -\frac{b_1 y + c_1 z}{a_1}.$$

y, z озод номаълумларга қийматлар бериб, x нинг тегишли қийматларини топамиз ($a_1 = 0$ бўлса, x ли ҳаднинг ўзи тенгламада қатнашмайди).

1- мисол.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари системаси топилсин.

Ечиш. Δ, Δ_1, Δ_2 детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун (3) формулаларни татбиқ қилиш мумкин.

$$y = -\frac{\Delta_1}{\Delta} x = \frac{4}{7} x, \ z = -\frac{\Delta_2}{\Delta} x = \frac{1}{7} x.$$

2- мисол.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлар системаси топилсин.

Ечиш. Бу система учун Δ, Δ_1, Δ_2 ни ҳисобласак,

$$\Delta = 0, \ \Delta_1 = 0, \ \Delta_2 = 0$$

эканини кўрамиз. Иккинчи тенглама биринчи тенгламанинг натижаси бўлгани учун уни ташлаб юборамиз. Бу ҳолда

$$x + y + 2z = 0$$

тенглама қолади, бундан

$$y = -x - 2z.$$

Кейинги тенгламада x ва z озод номаълумлар ролини ўйнайди.

40- §. УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТЛАР

9 та a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 сондан тузилган

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

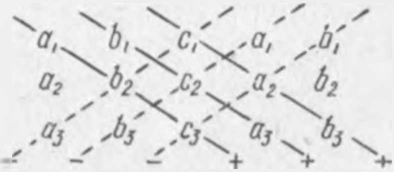
квадрат жадвал берилган бўлсин. Бу жадвал элементларидан тузилган учинчи тартибли детерминант деб,

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_3 \qquad (^*)$$

ифодага айтилади ва уни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

символ билан белгиланади. Учинчи тартибли детерминантнинг (*) ифодасида биринчи учта ҳад плюс ишора билан, қолган учта ҳад минус ишора билан олинган. Буни эътиборга олиб, (*) ифодани тузиш учун қуйидаги содда қоидани бериш мумкин. Юқорида берилган учинчи тартибли матрицанинг (биз жадвал дейиш ўрнига матрица терминини ишлатамиз) биринчи иккита устун элементларини учинчи устундан кейинга ёзиб беш устунли жадвал тузамиз:



Бу матрицанинг чизиб кўрсатилган диагоналларида (бу туташ чизиқ билан кўрсатилган) турган элементлар кўпайтмасини тузамиз. Бу кўпайтмаларнинг йиғиндиси (*) ифодасидаги плюс ишорали учта ҳадни беради. Минус ишорали ҳадларни ҳосил қилиш учун бу диагоналларга кўндаланг диагоналлардаги (булар матрицада пунктир чизиқ билан кўрсатилган) элементлар кўпайтмаларини тузамиз. Мисол учун

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ҳар бир ҳаддаги k ни қавс ташқарисига чиқарсак,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ҳосил бўлади.

Йўллар билан устунларнинг тенг ҳуқуқлигидан хоссанинг устунлар учун ҳам тўғри эканлиги келиб чиқади.

1- натижа. *Детерминантнинг бирор йўл (устун) элементлари умумий кўпайтувчига эга бўлса, бу умумий кўпайтувчини детерминант ишорасидан ташқарига кўпайтувчи шаклида чиқариш мумкин.*

Бу натижанинг тўғрилиги (4) тенгликдан кўринади.

2- натижа. *Детерминантнинг икки йўл (устун) элементлари бир-бири билан мос тартибда пропорционал бўлса, бундай детерминант нолга тенг.*

Исбот. (2) детерминантнинг бирор йўл, масалан, биринчи йўл элементлари унинг учинчи йўл элементлари билан пропорционал бўлсин, яъни

$$a_1 = ma_3, \ b = mb_3, \ c = mc_3$$

бўлсин. (2) детерминантда a_1, b_1 ва c_1 элементларнинг ўрнига уларнинг бу ифодаларини қўямиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_3 & mb_3 & mc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Кейинги детерминантдан m ни детерминант ишорасидан ташқарига (3- хосса, 1- натижа) чиқарамиз.

$$\Delta = m \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \cdot 0 = 0,$$

чунки кейинги детерминантнинг биринчи ва учинчи йўл элементлари мос тартибда бир-бирига тенг.

4- хосса. *Агар детерминантнинг бирор йўл (устун) элементлари икки қўшилувчидан иборат бўлса, бундай детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, биринчи қўшилувчи детерминантнинг мос йўл (устун) элементлари биринчи қўшилувчидан, иккинчи қўшилувчи детерминантнинг мос йўл (устун) элементлари иккинчи қўшилувчидан иборат бўлади.*

Масалан:

$$\begin{vmatrix} a+a_1 & b+b_1 & c+c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

шаклда ёзилади.

Исбот. Исбот қилиш учун чап томондаги детерминант ифодасини схема бўйича ёзамиз ва a_1, b_1, c_1 ҳамда a, b, c ларни ўз ичига олган ҳадлар бўйича икки группага ажратиб ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} a+a_1 & b+b_1 & c+c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+a_1)\,b_2c_3 + a_3(b+b_1)\,c_2 + a_2b_3(c+c_1) - a_2(b+b_1)\,c_3 -$$
$$-(a+a_1)\,b_3c_2 - a_3b_2(c+c_1) = (a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 -$$
$$- a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1) + (ab_2c_3 + a_3bc_2 + a_2b_3c - a_2bc_3 - ab_3c_2 -$$
$$- a_3b_2c).$$

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қавс ичидаги йиғинди (5) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи детерминантни, иккинчи қавс ичидаги ифода (5) тенглик ўнг томонидаги иккинчи детерминантни беради.

Натижа. *Агар детерминантнинг бирор йўл (устун) элементларини нолдан фарқли бирор сонга кўпайтириб, унинг бошқа (устун) йўл элементларига мос тартибда қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Исбот. (2) детерминантнинг биринчи йўл элементларини k га кўпайтириб, иккинчи йўл элементларига мос тартибда қўшамиз (бошқа йўллар учун ҳам исбот худди шунга ўхшаш бўлади). Бу ҳолда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

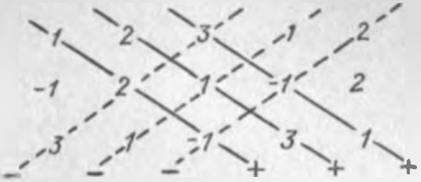
4- хоссага кўра бу детерминант қуйидаги икки детерминант йиғиндисига ажралади:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta + 0;$$

бу эса детерминант қийматининг ўзгармай қолганлигини кўрсатади.

Йўл билан устуннинг тенг ҳуқуқлигидан натижанинг устунлар учун ҳам ўринли экани келиб чиқади.

детерминантни ҳисоблаб кўрайлик. Бунинг беш устунли матрицасини тузамиз.



Энди қоида бўйича ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot2(-1)+2\cdot1\cdot3+3(-1)\cdot1-2\cdot(-1)\times \times(-1)-1\cdot1\cdot1-3\cdot2\cdot3=-20.$$

41-§. ДЕТЕРМИНАНТНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ[1]

Энди детерминантларнинг хоссаларини исботлашга ўтамиз.

1- хосса. *Детерминантнинг йўллари элементларини унинг устунлари элементлари билан мос тартибда алмаштирилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Исбот. Бунинг учун аввалги детерминант билан кўрсатилган тартибда алмашинган детерминантни ёнма-ён ёзайлик.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Бу детерминантлардан айтилган қоида бўйича элементар купайтмаларни тузсак, натижа бир хил чиқади. Исбот қилинган хоссадан детерминантнинг йўллари билан устунлари тенг ҳуқуқли эканлиги келиб чиқади.

2- хосса. *Детерминантнинг икки йўл (устун) элементларининг ўринлари бир-бири билан алмаштирилса, детерминант ишораси қарама-қарши ишорага узгаради, аммо абсолют қиймати ўзгармайди.*

Исбот.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

---

[1] Бу хоссалар *n*- тартибли детерминантлар учун ҳам уринли.

детерминантнинг биринчи ва иккинчи йўллари ўринларини ўзаро алмаштирайлик, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. (2) детерминантни схема бўйича ёйсак,

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 \qquad (2')$$

ҳосил бўлади. (3) детерминантни ҳам бу схема бўйича ёямиз:

$$a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2.$$

Кейинги икки ифодадан буларнинг ишоралари бир-бирига қарама-қарши эканини кўрамиз. Бошқа ҳар қандай икки йўлни ҳам ўринлари алмаштирилса, ишоранинг ўзгаришини кўриш қийин эмас.

Натижа. *Агар детерминантнинг икки йўл (устун) элементлари мос тартибда бир-бирига тенг бўлса, детерминант нолга тенг бўлади.*

Ҳақиқатан, (2) детерминантнинг икки йўл элементлари мос тартибда бир-бирига тенг бўлсин ва у детерминантнинг қиймати Δ бўлсин. (2) детерминантдаги бу йўлларнинг ўринларини алмаштирамиз. Бу ҳолда иккинчи хоссага мувофиқ

$$\Delta = -\Delta$$

ёки

$$2\Delta = 0,$$

бундан

$$\Delta = 0$$

экани келиб чиқади.

Йўллар билан устунларнинг тенг ҳуқуқлигидан натижанинг устунлар учун ҳам ўринли экани келиб чиқади.

3- хосса. *Детерминантнинг бирор йўл (устун) элементларининг ҳаммаси нолдан фарқли бирор k сонга кўпайтирилса, детерминант қиймати ҳам k марта ортади.*

Исбот. (2) детерминантнинг бирор ихтиёрий йўл, масалан, иккинчи йўл элементларини ихтиёрий $k \neq 0$ сонига купайтирамиз. Бу ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ҳосил бўлади. Буни схема бўйича ёямиз:

$$a_1(kb_2)c_3 + a_3b_1(kc_2) + (ka_2)b_3c_1 - (ka_2)b_1c_3 - a_1b_3(kc_2) - \\ - a_3(kb_2)c_1.$$

Детерминантнинг бу хоссасидан унинг бирор йўл (устун) элементларининг баъзиларини нолга айлантиришда фойдаланилади. Бу эса детерминантни ҳисоблашда анча қулайлик туғдиради. Бунинг ёрдамида юқори тартибли детерминантнинг тартибини пасайтириш мумкин.

Мисол.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант ҳисоблансин.

Энг олдин биринчи йўлда турган 2 ва -2 элементларни нолга айлантирайлик. Бунинг учун кейинги натижага мувофиқ, иккинчи устунни -2 га кўпайтириб, биринчи устунга қўшамиз, ундан кейин иккинчи устунни 2 га кўпайтириб, учинчи устунга қўшамиз, бу ҳолда

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 10 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Энди (*) схемани қўлласак, нолга айланмайдиган ҳадлар йиғиндиси

$$-1\cdot(-5)(-1)+1\cdot 5\cdot 10=45$$

га тенг.

42-§. МИНОР ВА АЛГЕБРАИК ТУЛДИРУВЧИЛАР

41- § даги (2) детерминантда b_2 турган йўлни ва устунни чизиб ташлаб, қолган элементлардан детерминант тузсак, бу детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

кўринишда бўлади ва b_2 *элементнинг минори* деб аталади ҳамда M_{22} деб белгиланади. Бошқа элементларнинг минорлари ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

Агар детерминантнинг a элементи k-йўл ва h-устунда турган бўлиб, бу элементнинг минори M_{kh} бўлса, $(-1)^{k+h}$ *билан* M_{kh} *нинг кўпайтмасига* a *элементнинг алгебраик тулдирувчиси* дейилади. Алгебраик тўлдирувчини детерминант элементига мос бўлган бош ҳарф билан белгиланади. (2) детерминантдаги b_2 элементнинг алгебраик тўлдирувчиси:

$$B_2=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=(+1)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

***1- теорема.** Детерминант бирор йўл (устун) элементлари билан бу йўл (устун) элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.*

Ҳақиқатан, (2) детерминантни (2′) га биноан биринчи йўл элементлари бўйича қуйидагича ёзайлик:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Энди a_1, b_1, c_1 элементлар олдидаги коэффициентларнинг A_1, B_1, C_1 эканлиги таърифдан келиб чиқади, яъни

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1. \qquad (6)$$

Устунлар учун теореманинг тўғрилиги устунлар билан йўлларнинг тенг ҳуқуқлигидан келиб чиқади.

Мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант минорларга ажратиш йўли билан ҳисоблансин.

Ечиш. Δни биринчи йўл элементлари бўйича минорларга ажратамиз:

$$\Delta = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3+4) - 1(1-12) - 2(-1-9) = 45.$$

Бу детерминантни биз юқорида нолга келтириш усули билан ҳисоблаган эдик ва бу детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 10 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

га келган эди. Буни минорларга ажратсак,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 45.$$

***2- теорема.** Детерминантнинг бирор йўл элементлари билан бошқа йўл элементлари алгебраик тўлдирувчилари* *кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.* Бу теоремани (2) детерминантнинг иккинчи ва биринчи йўллари учун ёзсак:

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \tag{7}$$

бўлади.

Бошқа йўллар ва устунлар учун ҳам теорема шунга ўхшаш ифодаланади.

Исбот. Детерминантни биринчи йўл элементлари бўйича ёзамиз:

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1.$$

Энди a_1, b_1, c_1 ўрнига a_2, b_2, c_2 ларни мос тартибда қўямиз, у ҳолда биринчи йўли a_2, b_2, c_2 дан иборат детерминант ҳосил бўлади.

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Кейинги детерминантнинг биринчи ва иккинчи йўл элементлари мос тартибда бир-бирига тенг бўлгани учун у нолга тенг, яъни

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0.$$

(7) тенглик исбот бўлди.

43-§. УЧ НОМАЪЛУМЛИ ЧИЗИҚЛИ УЧТА ТЕНГЛАМА СИСТЕМАСИ

Уч номаълумли чизиқли учта тенглама системасини ечиш масаласини кўрамиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{1}$$

Бу тенгламалар системасининг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

бўлиб, уни нолдан фарқли, яъни $\Delta \neq 0$ деб фараз қилайлик. (1) системанинг биринчи тенгламасининг иккала томонини A_1 га, иккинчи тенгламасининг иккала томонини A_2 га ва учинчи тенгламасининг иккала томонини A_3 га кўпайтириб, натижани ҳадлаб қўшамиз. (A_1, A_2, A_3 лар Δ детерминантдаги a_1, a_2, a_3 элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари).

Бу ҳолда

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)\,x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)\,y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)\,z = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 \qquad (2)$$

ҳосил бўлади.

Ўтган параграфдаги 1 ва 2- теоремага асосан

$$\begin{aligned} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= \Delta, \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 &= 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Аммо

$$d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$$

ифодани (3) тенгликларнинг биринчиси билан таққослаб кўрсак, ундаги a_1, a_2, a_3 ўрнида бу ифодада d_1, d_2, d_3 турганини кўрамиз, демак, бу ифодани Δ детерминантдаги a_1, a_2, a_3 элементларни мос тартибда d_1, d_2, d_3 билан алмаштиришдан ҳосил қилдик деб айтсак бўлади, яъни

$$d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

қисқалик учун бу детерминантни Δ_x билан белгилаймиз.

Бу ҳолда (3) тенгликларга асосан, (2) тенглама

$$\Delta_x = \Delta_x. \qquad (4)$$

кўринишни олади.

Шунга ўхшаш усул билан

$$\Delta_y = \Delta_y, \ \Delta_z = \Delta_z \qquad (5)$$

тенгламаларни ҳам ҳосил қиламиз, бунда

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

(4) ва (5) тенгламаларнинг ҳар бири бир номаълумли тенглама бўлиб, ундаги номаълумларнинг коэффициенти Δ детерминантдан иборат. $\Delta \neq 0$ бўлганда (4) тенгламадан ёлғиз биргина

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad (6)$$

ечим топилади, шунга ўхшаш (5) тенгламалардан

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

$$x = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (7)$$

ечимлар ҳосил бўлади. Булар ҳам $\Delta \neq 0$ бўлганда (5) тенгламаларнинг ёлғиз биргина ечимлари бўлади.

Энди (1) тенгламалар системаси билан (4) ва (5) тенгламалар системасининг тенг кучли эканлигини кўрсатамиз, яъни (1) системанинг ечимлар системаси (4) ва (5) тенгламалар системасининг ечимлар системаси эканлигини ва, аксинча, (4) ва (5) тенгламалар системасининг ечимлар системаси (1) тенгламалар системасининг ечимлар системаси бўлишини кўрсатамиз.

Бунинг учун дастлаб (6) ва (7) ечимлар системаси (1) тенгламалар системасининг ечимлар системаси эканини кўрсатамиз. (6) ва (7) дан x ва y нинг қийматларини (1) системанинг биринчи тенгламасига қўямиз ва касрдан қутқарамиз:

$$a_1\Delta_x + b_1\Delta_y + y_1\Delta_z = d_1\Delta.$$

Энди Δ_x, Δ_y ва Δ_z нинг ҳар бирини d_1, d_2, d_3 элементлари бўйича минорларга ёйиб, ҳосил бўлган ифодаларни бу тенгликка қўямиз:

$$a_1(d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3) + b_1(d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3) + c_1(d_1C_1 + \\ + d_2C_2 + d_3C_3) = d_1\Delta.$$

Бу тенгликнинг чап томонини d_1, d_2 d_3 бўйича тартиблаб ёзиб минорларга ажратамиз:

$$d_1(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + d_2(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2) + \\ + d_3(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3) = d_1\Delta. \qquad (8)$$

Ўтган параграфдаги 1 ва 2- теоремаларга кўра

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta,\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0.$$

Шунинг учун (8) тенглик ушбу

$$d_1\Delta = d_1\Delta$$

айниятга айланади.

Шунга ўхшаш усул билан (6) ва (7) формулалар билан аниқланган x, y, z нинг қийматлари (1) тенгламалар системасининг бошқа тенгламаларини ҳам қаноатлантириши кўрсатилади.

Демак, (4) ва (5) тенгламалар системасининг ёлғиз биргина ечимлар системаси (1) тенгламалар системасининг ечими экани кўрсатилади.

Энди, аксинча, (1) системанинг бирор ечимлар системаси α_1, α_2, α_3 бўлсин. (1) системадаги тенгламаларнинг ҳар бирида $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $z = \alpha_3$ деб фараз қилсак, у айниятга айланади. Ҳосил бўлган айниятлар системасига (1) тенгламалар системасидан (4) ва (5) системаларни ҳосил қилиш учун ишлатилган алмаштиришларни қўлласак,

$$\Delta\alpha_1 = \Delta_x,$$
$$\Delta\alpha_2 = \Delta_y,$$
$$\Delta\alpha_3 = \Delta_z,$$

айниятлар системасини ҳосил қиламиз. Бу айниятлар (1) системанинг ҳар қандай ечимлар системаси (4) ва (5) тенгламалар системасининг ҳам ечимлари системаси бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, $\Delta \neq 0$ *бўлганда (1) тенгламалар системасининг ёлғиз биргина ечимлари системаси*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{9}$$

формулалар ёрдамида топилади. Бу формулаларни *Крамер формулалари* дейилади.

$\Delta = 0$ бўлганда (1) системани текшириш масаласини кейинги параграфда кўрамиз.

Мисол.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 7, \\ x + y - z &= 2, \\ x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Тенгламалар системасининг детерминантини тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \times$$
$$\times (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Энди Δ_x, Δ_y, Δ_z ни тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1(-9-14) = -23,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 1(-21+18) = -3,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-21+9) = -12.$$

Энди Крамер формулаларига кура, берилган тенгламалар системасининг ечимлари системасини топамиз:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-23}{-7} = 3\frac{2}{7};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-7};\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-12}{-7} = 1\frac{5}{2}.$$

x, y, z нинг бу қийматларини берилган тенгламалар системасига қўйиб, тенгламалар системасининг қаноатланишини кўрамиз.

44-§. БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

Уч номаълумли бир жинсли учта чизиқли тенглама системасининг умумий кўриниши:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

бўлади.

Агар бу тенгламалар системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса, яъни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, бу система биргина $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ечимга эга.

Ҳақиқатан, Крамер формулаларига кўра (1) системанинг биргина ечимлар системаси

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

тенгликлар билан аниқланади. Аммо Δ_x, Δ_y, Δ_z нинг ҳар бирининг битта устуни ноллардан иборат (озод ҳадлар ноль) бўлгани учун:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0;$$

демак,

$$x = \frac{0}{\Delta} = 0,\ y = \frac{0}{\Delta} = 0,\ z = \frac{0}{\Delta} = 0.$$

Бу ечимлар системаси *ноль* ёки *тривиал* ечимлар системаси деб аталади.

Системанинг нолдан фарқли ечимлари ҳақидаги ушбу теоремани исбот қиламиз.

Теорема. *Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимлар системасига эга бўлиши учун унинг коэффициентларидан тузилган детерминант (системанинг детерминанти) нинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. (1) системанинг нолдан фарқли ечимлар системаси мавжуд бўлсин (зарурий шарт); бу ҳолда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

эканини исбот қиламиз. Крамер формулаларига кўра (1) системанинг ечимлари

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

бўлади. Бундан

$$\Delta_x = \Delta x;\ \Delta_y = \Delta y;\ \Delta z = \Delta_z.$$

x, y, z ечимлардан бирортаси, масалан, $y \neq 0$ бўлсин.

Δ_y нинг бир устуни ноллардан иборат (тузилишига кўра) бўлгани учун $\Delta_y = 0$, демак,

$$\Delta y = 0,$$

аммо $y \neq 0$ бўлгани учун бу тенгликдан

$$\Delta = 0$$

деган натижа келиб чиқади.

Энди $\Delta = 0$ бўлсин (етарли шарт) (1) тенгламалар системасининг нолдан фарқли ечимлар системаси мавжуд эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун (2) детерминантнинг биринчи устунини x га, иккинчи устунини y га ва учинчи устунини z га кўпайтириб, биринчи ва иккинчи устунларни учинчи устунга қўшамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3z \end{vmatrix} = 0.$$

Учинчи устундаги ифодаларни қисқалик учун мос тартибда f_1, f_2, f_3 билан белгилаймиз, яъни

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ f_2 &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ f_3 &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Бу ҳолда детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишни олади. Энди бу тенгламанинг чап томонидаги детерминантни кейинги устундаги элементлар бўйича минорларга ажратиб ёзамиз:

$$f_1\delta_1 + f_2\delta_2 + f_3\delta_3 = 0 \tag{4}$$

ҳосил булади, бундан

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Агар (4) тенгламадаги δ_1, δ_2, δ_3 коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли булса, у ҳолда f_1, f_2, f_3 нинг биттасини қолганлари орқали ифодалаб бўлади. Масалан, $\delta_3 \neq 0$ бўлсин, бу ҳолда (4) дан

$$f_3 = -\frac{\delta_1}{\delta_3} f_1 - \frac{\delta_2}{\delta_3} f_2,$$

бу ерда

$$-\frac{\delta_1}{\delta_3} = \lambda_1 \qquad -\frac{\delta_2}{\delta_3} = \lambda_2$$

деб олсак,

$$f_3 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \tag{5}$$

ҳосил булади.

f_1, f_2, f_3 ифодалар (3) системанинг ўнг томонидаги ифодалар эди. (1) системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларини қаноатлантирувчи x, y ва z нинг қийматлари системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантириши (5) тенгликдан очиқ кўринади.

Шунинг учун қаралаётган ҳолда учинчи тенгламани ташлаб юбориш мумкин ва бу ҳолда уч номаълумли иккита чизиқли эркли

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

тенгламалар системасига эга буламиз. 39- § дан бизга маълумки, $\delta_3 \neq 0$ булганда z озод номаълум бўлиб, (6) системанинг ҳамма ечимлари

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\delta_3} z, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\delta_3} z$$

формулалар билан ёки

$$-\frac{x}{\delta_3} = t$$

деб фараз қилинса,

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} t, \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad z = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \tag{7}$$

формулалар билан аниқланади. t га ихтиёрий қийматлар берсак, (7) формулалардан (1) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи x, y, z нинг қийматларини топамиз. $t \neq 0$ бўлганда бу ечимлар системаси нолдан фарқли бўлади. t га чексиз кўп қийматлар бериш мумкин бўлгани учун (7) дан x, y, z нинг ҳам чексиз кўп қийматларини топиш мумкин. Демак, $\Delta = 0$ *бўлиб, бу детерминант минорларининг камида биттаси нолдан фарқли бўлса, уч номаълумли бир жинсли учта тенгламалар системасининг иккита тенгламаси чизиқли эркли бўлиб, учинчиси уларнинг натижаси бўлади ва бу ҳолда тенгламалар системаси чексиз кўп ечимлар системасига эга бўлади.*

Энди Δ детерминант ва унинг ҳамма минорлари нолга тенг бўлсин. Бу ҳолда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{vmatrix} \text{ ва } \delta' = \begin{vmatrix} a_1 & f_1 \\ a_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

детерминантлар ҳам ноль бўлади. Ҳақиқатан, f_1, f_2 ва f_3 ларнинг (3) тенгликдаги ифодаларини δ ва δ' детерминантга қўйсак, уларни

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} z$$

кўринишда ёзиш мумкин. x нинг коэффициенти бўлган детерминантларнинг икки устуни тенг бўлгани учун нолга тенг, y, z нинг коэффициентлари Δ детерминантнинг минорлари бўлгани учун нолга тенг. Шундай қилиб,

$$\delta = 0 \text{ ва } \delta' = 0.$$

Бу тенгликлардан $a_1f_2 - a_2f_1 = 0$ ва $a_1f_3 - a_3f_1 = 0$ келиб чиқади. Агар $a_1 \neq 0$ деб фараз этилса у ҳолда

$$f_2 = \frac{a_2}{a_1} f_1 \text{ ва } f_3 = \frac{a_3}{a_1} f_1$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликлар f_1 ни маълум бир сонга кўпайтириб f_2, f_3 ларни ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатади, яъни f_2, f_3 лар f_1 дан келиб чиқадиган натижа эканлигини ёки (1) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламалари унинг биринчи тенгламасининг натижаси эканлигини билдиради. Шундай қилиб, бу ҳолда (1) системанинг кейинги иккита тенгламасини ташлаб юборсак, бизда

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

тенгламагина қолади. Бундан $a_1 \neq 0$ бўлганда

$$x = -\frac{b_1 y + c_1 z}{a_1}$$

ни топамиз. Энди y, z га нолдан фарқли қийматлар берсак, бу тенгламадан y, z нинг бу қийматларига мос бўлган x нинг қийматларини топамиз. Демак, $\Delta = 0$ ва *Δ нинг ҳамма минорлари нолга тенг бўлганда ҳам (1) тенгламалар системаси нолдан фарқли чексиз кўп ечимлар системасига эга.*

1- мисол. Бир жинсли

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 3z &= 0, \\ x + y - z &= 0, \\ x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари топилсин.

Ечиш. Тенгламалар системасининг детерминантини тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

Демак, тенгламалар системаси тривиал ечимдан бошқа ечимга эга эмас:

$$x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$$

2- мисол. Бир жинсли

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0, \\ x - y + 3z &= 0, \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари топилсин.

Ечиш. Тенгламалар системасининг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, бунинг

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

минори нолга тенг эмас ($\delta = -3$). Демак, z озод номаълум; системанинг учинчи тенгламаси унинг олдинги иккита тенгламаси йиғиндисидан келиб чиққан натижадир; шунинг учун унинг биринчи иккита тенгламасини ечсак кифоя қилади. (7) формулаларга мувофиқ, системанинг ҳамма ечимлари

$$x=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}t,\quad y=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}t,\quad z=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}t$$

ёки

$$x=-5t,\ y=4t,\ z=3t$$

бўлади (t — ихтиёрий сон).

3- мисол. Бир жинсли

$$\begin{gathered}2x-3y+5z=0,\\ 4x-6y+10z=0,\\ 6x-9y+15z=0\end{gathered}$$

тенгламалар системасининг ҳамма ечимлари топилсин.

Ечиш. Системанинг детерминантини тузамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 10\\ 6 & -9 & 15\end{vmatrix}=2\cdot 3\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 2 & -3 & 5\\ 2 & -3 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Бу детерминантнинг ҳамма минорлари нолга тенг. Демак, система битта тенгламага келади (иккинчи тенгламани 2 га, учинчи тенгламани 3 га қисқартирилса, биринчи тенглама ҳосил бўлади). Биринчи тенгламани z га нисбатан ечсак, системанинг ҳамма ечимлари

$$z=\frac{3y-2x}{5}$$

кўринишда бўлади. Бунда x, y — ихтиёрий сонлар.

45-§. УЧ НОМАЪЛУМЛИ УЧТА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ УМУМИЙ ТЕКШИРИШ

Энди уч номаълумли бир жинслимас учта чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиши ва унинг ечимлари сони қандай бўлиши масаласи билан танишамиз.

$$\begin{gathered}a_1x-b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{gathered}\qquad(1)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин.

1. Агар бу тенгламалар системасининг детерминанти

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

бўлса, (1) тенгламалар системасининг биргина ечимлар системасига эга бўлиши ва у Крамер формулалари бўйича топилиши бизга маълум.

2. Агар $\Delta = 0$ бўлиб, бу детерминантнинг минорларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (1) тенгламанинг чап томонидаги ифодалар чизиқли боғлиқ бўлишини ва бу боғланиш

$$f_1\delta_1 + f_2\delta_2 + f_3\delta_3 = 0 \tag{2}$$

эканини биз 44- § даги (4) тенгликдан биламиз [(1) системанинг чап томонини мос равишда f_1, f_2, f_3 билан белгиланган].

Агар (1) система x_0, y_0, z_0 ечимга эга бўлса x_0, y_0 ва z_0 қийматларда $f_1 \equiv d_1$, $f_2 \equiv d_2$ ва $f_3 \equiv d_3$ бўлиб, (2) тенглама

$$d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + d_3\delta_3 \equiv 0 \tag{3}$$

айниятга айланади, яъни (1) системанинг ўнг томонлари ҳам ўзаро чизиқли боғлиқ бўлади.

(2) тенгликдан (3) тенгликни ҳадлаб айирсак,

$$(f_1 - d_1)\delta_1 + (f_2 - d_2)\delta_2 + (f_3 - d_3)\delta_3 = 0 \tag{4}$$

ҳосил бўлади, бу тенгликдан биз $f_1 - d_1$, $f_2 - d_2$, $f_3 - d_3$ ифодаларнинг биттасини қолганлари орқали ифодалай оламиз, яъни (1) тенгламалар системасининг битта тенгламаси қолган иккитасининг натижаси бўлади. Амалда биз уч номаълумли иккита тенглама системасига эга бўламиз, битта номаълум озод номаълум бўлади. Демак, бу ҳолда (1) система чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

Агар (1) система ечимга эга бўлмаса, (3) айният бузилади, яъни

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Δ' детерминант

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

матрицанинг учинчи тартибли минорларидан бири эканига эътибор бериб, ушбу натижага келамиз:

агар (1) системанинг детерминанти $\Delta = 0$ бўлиб, бу детерминант минорларининг камида биттаси нолдан фарқли бўлганда:

1) А матрицанинг 3- тартибли детерминантларининг ҳаммаси нолга тенг бўлса, (1) система чексиз кўп ечимга эга бўлади;

2) А матрицанинг 3- тартибли детерминантларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (1) тенгламалар *системаси биргаликда эмас (ечимлар системаси мавжуд эмас);*

3) агар $\Delta = 0$ бўлиб, унинг ҳамма минорлари ҳам нолга тенг бўлса, (1) тенгламалар системасининг чап томонидаги ифодалар орасида иккита чизиқли

$$a_1 f_2 - a_2 f_1 = 0, \ a_1 f_3 - a_3 f_1 = 0 \qquad (5)$$

боғланиш мавжудлигини ўтган параграфда кўрган эдик.

Агар берилган (1) система ечимга эга бўлса, (3) муносабатдаги каби

$$a_1 d_2 - a_2 d_1 = 0, \ a_1 d_3 - a_3 d_1 = 0 \qquad (6)$$

чизиқли боғланиш ҳам ўринли бўлиши керак.

(5) дан (6) ни мос тартибда ҳадлаб айирсак,

$$\left.\begin{aligned} a_1(f_2 - d_2) - a_2(f_1 - d_1) = 0, \\ a_1(f_3 - d_3) - a_3(f_1 - d_1) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликлардан $a_1 \neq 0$ деб фараз қилиб, $f_2 - d_2$ ва $f_3 - d_3$ ни $f_1 - d_1$ орқали ифодалай оламиз, булар эса (1) тенгламалар системасидаги озод ҳадлар d_1, d_2, d_3 ни тенгламаларнинг чап томонига ўтказганимизда ҳосил бўладиган ифодалардир. Шунинг учун, бу ҳолда (1) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламалари унинг биринчи тенгламасининг натижаси бўлиб, уларни ташлаб юбориш мумкин. Биз амалда уч номаълумли битта тенгламага эга бўламиз, $a_1 \neq 0$ бўлгани учун (1) системанинг биринчи тенгламасидан

$$x = \frac{d_1 - b_1 y - c_1 z}{a_1}$$

ни топамиз, y, z га ихтиёрий қийматлар бериб, бу тенгликдан x нинг мос қийматларини топамиз. Тенглама чексиз кўп ечимлар системасига эга бўлади.

Агар (1) система ечимга эга бўлса, (6) тенгликлар ўринли бўлади. Шунинг учун (6) тенгликлардан камида биттаси нолга тенг бўлмаса, (1) тенгламалар системаси биргаликда бўлмаган система бўлади. (6) тенгликларни

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ва} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу детерминантлар

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

матрицанинг биринчи ва тўртинчи устунларидан тузилган иккинчи тартибли детерминантлардир. Шунинг учун, бу пунктда чиқарилган натижаларни A матрицанинг иккинчи ва тўртинчи устунларидан ёки учинчи ва тўртинчи устунларидан тузилган иккинчи тартибли детерминантлар учун ҳам чиқариш мумкин.

Шундай қилиб, *агар (1) системанинг детерминанти ва унинг ҳамма минорлари нолга тенг бўлганда:*

1) *А матрицанинг ҳамма иккинчи тартибли детерминантлари ҳам нолга тенг бўлса,* (1) *система уч номаълумли битта тенгламага келади ва чексиз кўп ечимлар системасига эга бўлади;*

2) *А матрицанинг иккинчи тартибли детерминантларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса,* (1) *система биргаликда эмас (ечимга эга эмас).*

1- мисол.

$$\begin{aligned} x + 2y - \ \ z &= 1, \\ 2x - \ \ y + 2z &= 3, \\ x - 3y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Тенгламалар системасининг детерминантини тузамиз:

1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Бу детерминантнинг битта минори нолдан фарқли:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицанинг ҳамма учинчи тартибли минорлари нолга тенг (чунки матрицанинг иккинчи йўл элементларидан биринчи йўл элементларини айирсак, унинг учинчи йўл элементлари ҳосил бўлади. Демак, *А* матрицанинг учинчи тартибли ҳамма детерминантларининг учинчи йўл элементларини нолга айлантириш мумкин).

Шундай қилиб, берилган тенгламалар системасининг учинчи тенгламаси, унинг биринчи иккита тенгламасининг натижасидир. Биз амалда уч номаълумли иккита тенгламалар системасига эгамиз:

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 1, \\ 2x - \ \ y + 2z = 3. \end{cases}$$

Бу система чексиз кўп ечимлар системасига эга. Бу ечимлар:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 3-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 3-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

(Крамер формулаларига кўра) z га ихтиёрий қийматлар бериб, x ва y топилади.

2- мисол.

$$\begin{aligned} x+2y-\ z&=1, \\ 2x-\ y+2z&=3, \\ x-3y+3z&=9 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Бу системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминантнинг иккинчи тартибли минорларидан бири нолга тенг эмас:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

A матрица тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг учинчи тартибли детерминантларидан биттаси нолга тенг эмас, чунончи:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Демак, система биргаликда эмас (системанинг ечими мавжуд эмас).

46- §. ДЕТЕРМИНАНТЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАРИГА ТАТБИҚИ

Аналитик геометрия масалаларини ечиш учун чиқарилган кўп формулалар детерминантлар билан ифодаланиши мумкин. Формулаларнинг детерминантлар билан ифодаланиши уларни ёдда тутишга имкон бериш билан баробар компакт (ихчам) шаклда ифодалайди.

Биз бу параграфда ўтган боблардаги учраган баъзи формулаларни детерминантлар билан ифодалаймиз.

1. Икки нуқта орасидаги масофа. *Икки* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ *нуқта орасидаги* d *масофа*

$$d = \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -(y_2 - y_1) \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix}}$$

формула билан ифодаланади. Бунинг тўғрилигига радикал остидаги детерминантнинг ифодасини ёзиш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин (I боб, 6- §, (4) формула).

2. Учбурчакнинг юзи. *Учлари* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *нуқталарда бўлган учбурчакнинг* S *юзи*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

формула билан ифодаланади.

Ҳақиқатан, детерминантнинг учинчи устун элементларини — 1 га кўпайтириб, биринчи ва иккинчи устун элементларига қўшиб, ундан кейин учинчи йўл элементлари бўйича минорга ажратсак,

$$S = \pm\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}\right|$$

ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг юзи учун I боб, 8- § да чиқарилган (2) формуладир.

3. Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси. *Текисликда иккита* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасини детерминантлар ёрдамида тузамиз.*

Изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси

$$Mx + Ny + L = 0 \tag{1}$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтиш шарти

$$Mx_1 + Ny_1 + L = 0. \tag{2}$$

$B(x_2, y_2)$ нуқтадан ўтиш шарти эса

$$Mx_2 + Ny_2 + L = 0. \tag{3}$$

(1), (2) ва (3) тенгламаларда M, N ва L лар номаълум. Шунинг учун бу тенгламалар уч номаълумли бир жинсли учта чизиқли тенгламалар системасидан иборат. M, N, L нинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги керак, акс ҳолда (1) тенглама мавжуд бўлмайди. Демак, (1), (2), (3) тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимлар системасига эга бўлиши керак. Бунинг учун система детерминантининг нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканини биламиз, яъни етарли ва зарурий шарт

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

дан иборат. Биз x, y га нисбатан биринчи даражали тенглама ҳосил қилдик. Бу тенглама $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан, (4) тенгламадаги ўзгарувчи x, y координаталар ўрнига олдин x_1 ва y_1, кейин x_2 ва y_2 ни қўйсак, иккала ҳолда ҳам детерминантнинг икки йўлидаги элементлари мос тартибда бир-бирига тенг бўлади. Бундай детерминант айнан нолга тенг, яъни (4) тенгламани A ва B нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради.

4. Уч нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиш шарти. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ нуқталар берилган бўлсин. A ва B нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси (4) тенглама эканини биз учинчи пунктда кўрдик. Агар (4) тўғри чизиқ $C(x_3, y_3)$ нуқтадан ўтса, уни C нуқтанинг координаталари қаноатлантириши керак, яъни

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

бўлиши керак. Устунларни йўллар билан ва устунларни устунлар билан алмаштириб, бу тенгликни

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

кўринишга келтира оламиз. Бу уч нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиш шартидир.

Машқлар

1. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг.

1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{5} \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x^2 & 3x \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} x-a & 1 \\ x-a & x+1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

1) $\begin{vmatrix} x+4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0;$

3) $\begin{vmatrix} x+24 & 5x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ 4) $\begin{vmatrix} x-6 & 3x \\ -x & x+6 \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos 2x & \cos x \end{vmatrix} = 0;$ 6) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 1 \\ \operatorname{tg} x - 1 & \operatorname{tg} x + 3 \end{vmatrix} = 0.$

3. Қуйидаги тенгламалар системасининг ечимлар системасини топинг.

1) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-4y=-7, \\ 6x+\ \ y=22. \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax+by=c, \\ bx+ay=c. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=9. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x\sqrt{7}-7y=\sqrt{7}, \\ x-y\sqrt{7}=7. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = 1, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = 1. \end{cases}$

4. Тенгламалар системасининг ечимлар системасини умумий кўринишини топинг.

1) $\begin{cases} 12x+4y+\ \ z=0, \\ 15x+2y+5z=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+\ \ z=0, \\ -2x+5y+4z=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ \ z=0, \\ 2x+4y+3z=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0, \\ 4x-2y-5z=0. \end{cases}$

5. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix};$ 6) $\begin{vmatrix} -a & a & a \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}.$

6. Қуйидаги тенгламаларнинг илдизларини топинг.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2x \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2x \end{vmatrix} = 0;$ 2) $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ x & x+1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

7. Қуйидаги тенгламалар системаларининг ечимлар системасини топинг.

1) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0, \\ 2x+3y+3z=1, \\ -5x+3y+6z=2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-\ \ y-\ 6z=4, \\ 5x+7y+11z=-7, \\ 4x+3y+\ 8z=4. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ -x+y+z=-2, \\ x-y+z=6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} ax+ay+z=a-3, \\ 2ax+2y+az=3a-4, \\ 4x+3ay-2az=12. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x+y\ +\ \ z=0, \\ 3x-2y-3z=6, \\ 5x+4y+5z=-6. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x+ay+2z=6, \\ 2ax-5y+2az=2a. \\ 3x+4ay+6z=0. \end{cases}$

Еттинчи боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИНИ ТЕКШИРИШ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

47-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Иккинчи тартибли чизиқ деб Декарт системасида ўзгарувчи x ва y координаталарга нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама билан тасвирланган чизиққа айтилади.

Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Тенгламадаги A, B, C, D, E, F коэффициентлар ўзгармас бўлиб, уларнинг баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин, аммо A, B, C ларнинг бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги шарт.

Агар (1) тенгламада $A=C$, $B=0$ бўлса, бу тенглама айлананинг тенгламаси бўлишини биз биламиз.

Агар $A=\frac{1}{a^2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$, $F=-1$ бўлса, (1) тенглама $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ кўринишни олиб, эллипс тенгламасига айланади.

Агар

$$A=\frac{1}{a^2},\ B=0,\ C=-\frac{1}{b^2},\ D=E=0,\ F=-1$$

бўлса, (1) тенглама $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ кўринишни олиб, гипербола тенгламасига айланади. Шунга ўхшаш (1) тенглама коэффициентларининг қийматларига қараб, бу тенглама параболани тасвирлаши ёки ҳеч қандай геометрик образни тасвирламаслиги ҳам мумкин.

Бу бобда биз (1) тенгламани соддалаштириш ва унинг қандай чизиқни ифодалаши масаласи ҳақида тушунча бериб ўтамиз.

48-§. ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ МАРКАЗИ

Агар M_0 нуқта MM' кесмани тенг иккига бўлса, яъни M_0 нуқтанинг координаталари M ҳамда M' нуқталар координаталарининг ярим йиғиндисидан иборат бўлса, M билан M' нуқталар M_0 нуқтага нисбатан симметрик нуқталар дейилади.

Агар текисликнинг бирор M нуқтасига нисбатан L чизиқнинг барча нуқталари жуфт-жуфт бўлиб симметрик жойлашган бўлса, бундай M нуқта L чизиқнинг симметрия маркази ёки чизиқнинг маркази дейилади.

Каноник тенгламалари билан берилган эллипс ва гиперболанинг ҳар қандай ватари координата бошидан ўтганда тенг иккига бўлинади. Шунинг учун координаталар боши уларнинг марказидир.

Ёлғиз биргина марказга эга бўлган чизиқ марказий эгри чизиқ дейилади. Акс ҳолда *марказсиз эгри чизиқ* дейилади.

Теорема *Координаталар боши иккинчи тартибли чизиқнинг маркази бўлиши учун бу чизиқ тенгламасида биринчи даражали x, y ўзгарувчилар қатнашмаслиги зарур ва етарли.*

Исбот. Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасида биринчи даражали x ва y ўзгарувчилар қатнашмасин, бу ҳолда унинг тенгламаси

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлади. Агар M (x, y) бу эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, бу нуқтанинг координаталари (2) тенгламани қаноатлантиради, бу ҳолда M_1 $(-x, -y)$ нуқтанинг координаталари ҳам (2) тенгламани қаноатлантиришини $-x$ ва $-y$ ни тенгламага қўйиб бевосита кўриш мумкин, яъни $M_1(-x, -y)$ нуқта ҳам (2) чизиқда ётади. Бундан кўрамизки, M нуқта координаталар бошига нисбатан M (x, y) нуқтанинг симметрик нуқтасидир. Демак, (2) чизиқнинг ихтиёрий MM_1 ватари координаталар бошида тенг иккига бўлинади, яъни координаталар боши чизиқнинг маркази.

Энди координаталар боши иккинчи тартибли (1) эгри чизиқнинг маркази деб фараз этайлик; у ҳолда (1) тенгламада $D = E = 0$ эканини, яъни биринчи даражали x ва y ўзгарувчиларнинг бу тенгламада қатнашмаслигини кўрсатамиз.

Бунинг учун (1) эгри чизиқнинг координаталар бошидан ўтган ихтиёрий ватарининг

$$y = kx \qquad (3)$$

тенгламасини оламиз ва бу ватар билан (1) чизиқнинг кесишган нуқтасини топамиз. Ватар марказдан ўтгани учун унинг (1) чизиқ билан кесишган нуқталари бир-бири билан координаталар бошига нисбатан симметрик бўлиши керак, яъни бу нуқталар координаталарининг ишораларигина қарама-қарши бўлади. (3) тенгламадаги y нинг қийматини (1) га қўйсак, квадрат тенглама ҳосил бўлади. Бунинг илдизлари (1) ва (3) чизиқларнинг кесишган нуқталари абсциссалари бўлгани учун фақат ишоралари билан фарқ қилади, демак, бу илдизлар йиғиндиси нолга тенг. Иккинчи томондан Виет теоремасига кўра, бу йиғинди

$$-\frac{2(D+Ek)}{A+2Bk+Ck^2}$$

га тенг бўлиб, бу каср ҳам нолга тенг. $A+2Bk+Ck^2\neq 0$ бўлганда[1] $D+Ek=0$ экани келиб чиқади. k нинг турли қийматларида бу тенгликнинг ўринли бўлиши учун $D=E=0$ бўлиши керак. Бу (1) тенгламада биринчи даражали x, y ўзгарувчилар қатнашмайди деган сўз.

49-§. КООРДИНАТАЛАР БОШИНИ МАРКАЗГА КУЧИРИЛГАНДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИНГ УЗГАРИШИ

Биз IV бобда координаталар системасини алмаштириш йўли билан иккинчи тартибли чизиқлар тенгламасини соддалаштириш мумкинлигини мисолларда кўрган эдик. Энди координаталар системасини алмаштириш усули билан иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини соддалаштиришнинг умумий ҳолини кўрамиз. Дастлаб, координата ўқларини параллел қолдириб, координаталар бошини марказга кўчирилганда (1) тенглама қандай ўзгаришини кўздан кечирайлик. Координата боши $O_1(x_0, y_0)$ нуқтага кўчган бўлсин. Бу ҳолда ўтиш формуласи

$$\begin{aligned} x &= X + x_0 \\ y &= Y + y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

бўлишини биламиз. x_0, y_0 — марказ координаталаридир. (4) формуладан x, y нинг қийматини (1) тенгламага қўямиз. Бу ҳолда янги координаталар системасининг боши марказ бўлгани учун юқоридаги теоремага мувофиқ ҳосил буладиган тенгламада X, Y ли ҳад бўлмайди, тенглама эса

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0$$

кўринишни олиб соддалашади, бунда

$$F_1 = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Бу ерда (1) тенглама учун F_1 нинг умумий кўринишини кўрсатиб ўтамиз. (1) тенгламанинг чап томонини қуйидагича

---

[1] A, B ва C ларнинг учаласи бирданига нолга тенг эмас.

ёзиш мумкинлигини текшириб кўриб, ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$
$$= (Ax + By + D) + (Bx + Cy + E)\,y + (Dx + Ey + F).$$

Бу айниятдаги x, y ларнинг ўрнига x_0, y_0 ларни қўйсак, F_1 ҳосил бўлади. Демак,

$$F_1 = (Ax_0 + By_0 + D)\,x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)\,y_0 + (Dx_0 + Ey_0 + F) \quad (5)$$

(x_0, y_0) нуқта (1) эгри чизиқнинг маркази бўлгани учун:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Демак, *координата ўқлари эски координата ўқларига параллел қолиб, координаталар боши марказга кўчирилса, янги системада* (1) *тенглама*

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0 \quad (7)$$

кўринишга келиб соддалашади ва бундаги озод F_1 ҳад (5) ва (6) тенгликларга мувофиқ

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F \quad (8)$$

формула билан ҳисобланади.

(6) тенгламалар системасида

$$AC - B^2 \neq 0 \quad (9)$$

бўлса, бу система *ёлғиз биргина* (x_0, y_0) ечимга эга бўлади (VI боб, 38- § га қаранг), яъни (1) *чизиқ марказий чизиқ бўлади.*

Агар

$$AC - B^2 = 0 \quad (10)$$

бўлса, (6) тенгламалар системаси ё чексиз кўп ечимга эга, ёки унинг ечими мавжуд эмас (VI боб, 38- §); демак, бу ҳолда (1) тенглама *марказий бўлмаган чизиқни* тасвирлайди.

(9) ва (10) муносабатлар ёрдамида (1) чизиқнинг марказли ёки марказсиз эканлигини билиш мумкин.

50- §. КООРДИНАТА УҚЛАРИНИ БУРИШ БИЛАН ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

Биз ўтган параграфда координата уқларини параллел кўчириб, координаталар боши сифатида марказни қабул қилганимизда, чизиқ тенгламасидаги x, y ни ўз ичига олган биринчи даражали ҳадлар йўқолиб, бу тенглама соддароқ (7) кўринишга келди. Энди биз (1) тенгламадан x, y кўпайтма қатнашган ҳадни йўқотиб, тенгламани соддалаштириш масаласига ўтамиз. Бунинг учун координаталар бошини ўзгартмай қолдириб, координата ўқларини бирор α бурчакка бурамиз, яъни

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

деб олиб, x, y нинг бу қийматларини (1) тенгликка қўямиз ва чизиқ тенгламасини янги системада ёзамиз.

$$A(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)^2 + 2B(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + \\ + C(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)^2 + 2D(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + 2E(x_1\sin\alpha + \\ + y_1\cos\alpha) + F = 0$$

ёки

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0, \tag{11}$$

бунда A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ва F лар ўзгармас коэффициентлар бўлиб, $B_1 = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Янги системада xy кўпайтмали ҳадни йўқотиш учун (11) тенгламадаги B_1 нинг нолга айланишини таъминлаш керак. Бунинг учун биз α бурчакни ихтиёрий эканидан фойдаланиб, уни шундай танлаб оламизки, (11) тенгламадаги B_1 коэффициент нолга тенг бўлсин, яъни

$$(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

ёки

$$\frac{C-A}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0;$$

бу тенгликни $\sin 2\alpha$ га бўлиб,

$$C - A + 2B \operatorname{ctg} 2\alpha = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} \tag{12}$$

ни топамиз. Бу ерда $B \neq 0$, чунки агар $B = 0$ бўлганда, дастлабки (1) тенгламадаёқ xy ли ҳад йўқ бўлиб, бу ҳадни йўқотишга зарурият қолмас эди.

Демак, (12) формуладан α бурчакни аниқласак, янги системада иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламаси содда

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0 \tag{13}$$

кўринишга келади. Шундай қилиб, иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини бу усулда соддалаштиришда $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ нинг қийматини билиш керак; биз α бурчакни топиш учун (12) формулани келтириб чиқардик. Бу формула ёрдамида $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ни

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$$

ва

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}$$

формулалардан топамиз.

Мисол.

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$$

тенглама билан тасвирланган чизиқнинг энг содда тенгламаси тузилсин ва бу чизиқнинг графиги ясалсин.

Ечиш. Берилган тенгламада

$$AC - B^2 = 5\cdot5 - 3^2 = 16 \neq 0$$

бўлгани учун, бу чизиқ марказий эгри чизиқ. Марказнинг координаталарини топиш учун (6) тенгламалар системасига мувофиқ ушбу тенгламалар системасини тузамиз (марказ координаталари номаълум булгани учун x_0, y_0 ўрнига x, y ёзамиз);

$$5x + 3y - 8 = 0, \; 3x + 5y - 8 = 0.$$

Бу системани ечиб, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ни топамиз.

Марказнинг бу координаталарини (8) тенгламага қўйиб, энг содда тенгламанинг озод ҳадини аниқлаймиз:

$$F_1 = -8\cdot1 - 8\cdot1 - 16 = -32.$$

Энди янги ўқларни эски ўқларга параллел қолдириб, координаталар бошини марказга кўчирсак,

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$$

кўринишни олади (49- § даги (7) тенглама).

Кейинги тенгламадан xy кўпайтмали ҳадни йўқотамиз. Бунинг учун координата ўқларини α бурчакка буришимиз керак. (12) формулага мувофиқ

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} = \frac{5-5}{6} = 0,$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}} = 0,$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бу ерда плюс ишора оламиз.

Бу ҳолда $\alpha = 45^\circ$, яъни

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1); \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1).$$

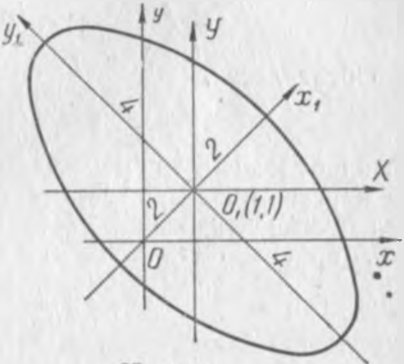
Буларни кейинги тенгламага қўйсак,

$$5\cdot\frac{1}{2}(x_1-y_1)^2+6\cdot\frac{1}{2}(x_1-y_1)\ (x_1+y_1)+5\cdot\frac{1}{2}(x_1+y_1)^2-32=0$$

ёки қавсларни очиб соддалаштирсак,

$$8x_1^2+2y_1^2-32=0$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламани $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{16}=1$ кўринишда ёзсак бўлади.



87- чизма.

Энг содда тенгламага асосан берилган чизиқни ясаймиз. Бунинг учун координата бошини O_1 (1, 1) марказга кўчирамиз) янги уқлар эски уқларга параллел (ва XO_1Y системани $\alpha=45^\circ$ га буриб, $x_1O_1y_1$ системани ясаймиз, бу системада берилган чизиқ тенгламаси энг содда куринишда ёзилган; шунинг учун ҳосил бўлган эллипсни унинг тенгламасига кўра $x_1O_1y_1$ системада чизамиз (87- чизма). Эгри чизиқ чизилгандан кейин янги ўқларни ўчирсак, берилган чизиқнинг дастлабки системага нисбатан жойланиши кўринади.

51- §. МАРКАЗСИЗ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

тенглама марказсиз эгри чизиқни тасвирлайди деб фараз қилайлик. Бу ҳолда

$$\delta=AC-B^2=0.$$

Координата ўқларини (12) формула билан аниқланадиган бурчакка буриб, (1) тенгламани янги $x_1O_1y_1$ системада

$$A_1x_1^2+C_1y_1^2+2D_1x_1+2Ey_1+F=0 \tag{14}$$

куринишга келтирамиз. Бу тенглама билан тасвирланган чизиқ (1) тенглама билан тасвирланган чизиқнинг узи булгани учун бу ҳам марказсиз эгри чизиқдир.

49- § даги баёнотга мувофиқ (14) тенглама учун 49- § даги (10) тенглик

$$A_1C_1=0$$

кўринишни олади.

Бу тенгликдан ё $A_1 = 0$ ёки $C_1 = 0$. Дастлаб $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (14) тенглама

$$A_1x_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0 \qquad (15)$$

кўринишни олади. Бу тенгламани y_1 га нисбатан ечамиз:

$$y_1 = -\frac{A_1}{2E_1}x_1^2 - \frac{D_1}{E_1}x_1 - \frac{F}{2E_1}$$

ёки

$$-\frac{A_1}{2E_1} = a; -\frac{D_1}{E_1} = b; -\frac{F}{2E_1} = c$$

деб белгиласак,

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

ҳосил булади. Бу кўринишдаги тенгламани биз IV боб, 29- § да кўрган эдик. Бу тенглама симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган параболани тасвирлайди.

Агар (15) тенгламада $E_1 = 0$ бўлса, у

$$A_1x_1^2 + 2D_1x_1 + F = 0$$

кўринишда бўлиб, буни x_1 га нисбатан ечсак,

$$x_1 = \frac{-D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - A_1F}}{A_1}$$

ҳосил булади. Агар $D_1^2 - AF > 0$ бўлса, (16) нинг ўнг томони ҳақиқий сон бўлиб, у Oy_1 ўққа параллел бўлган иккита тўғри чизиқни тасвирлайди. Демак, (14) тенгламада $A_1 \neq 0, C_1 = 0$ ва $E_1 = 0$ бўлса, у тенглама Oy_1 ўққа параллел бўлган иккита тўғри чизиқни тасвирлайди.

Агар (16) тенгликда $D_1^2 - A_1F = 0$ булса, бу тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

Агар $D_1^2 - A_1F < 0$ бўлса, (16) нинг ўнг томони комплекс сон бўлади ва ҳақиқий сонлар текислигида ҳеч қандай геометрик образни тасвирламайди.

Демак, $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$ *бўлганда (14) тенглама симметрия ўқи ординаталар ўқига параллел бўлган параболани ёки* Oy_1 *ўққа параллел бўлган иккита (хусусий ҳолда устма-уст тушадиган) тўғри чизиқни тасвирлайди, ёки ҳеч қандай геометрик образни тасвирламайди.*

Шунга ўхшаш, (14) *тенгламада* $A_1 = 0$ *ва* $C_1 \neq 0$ *деб фараз этилса, у тенглама ё симметрия ўқи* Ox_1 *ўққа параллел бўлган параболани, ёки* Ox_1 *ўққа параллел бўлган иккита (хусусий ҳолда устма-уст тушадиган) тўғри чизиқни тасвирлайди ёки ҳеч қандай геометрик образни тасвирламайди.*

Мисол.

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 5x + 6y - 7 = 0$$

тенглама билан тасвирланган чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтирилсин ва чизиқ ясалсин.

Ечиш. Берилган тенгламада

$$AC - B^2 = 2\cdot 2 - (-2)^2 = 0$$

бўлгани учун бу тенглама марказсиз чизиқ тенгламасидир. Шунинг учун дастлаб тенгламадаги xy ли ҳадни йўқотамиз. (12) формулага мувофиқ

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{2 - 2}{-4} = 0,$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}} = 0.$$

Демак,

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Агар $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ учун плюс ишорани танлаб олсак,

$$\alpha = 45^\circ$$

бўлади.

Ўтиш формуласига кўра

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y),$$

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y),$$

x, y нинг қийматларини берилган тенгламага қўямиз:

$$2\cdot\frac{1}{2}(X - Y)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}(X^2 - Y^2) + 2\cdot\frac{1}{2}(X + Y)^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times(X - Y) + \frac{6}{\sqrt{2}}(X + Y) - 7 = 0,$$

буни соддалаштирсак,

$$4Y^2 + \frac{11}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - 7 = 0$$

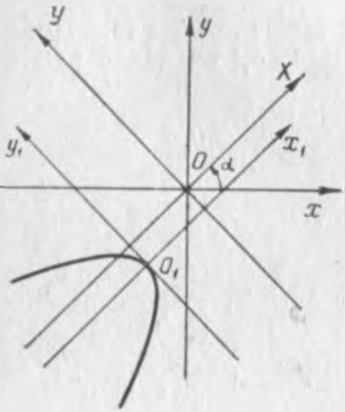
кўринишга келади. Бу тенгламадан X ни топамиз:

$$X = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{11} - \frac{4\sqrt{2}}{11}\left(Y^2 + \frac{2}{4\cdot\sqrt{2}}Y\right).$$

Бу тенгламада тўла квадрат ажратиб ёзсак:

$$X = \frac{225\sqrt{2}}{352} - \frac{4\sqrt{2}}{11}\left(Y + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)^2.$$

Энди янги ўқларни XOY система ўқларига параллел ҳолда олиб, координаталар бошини



88- чизма.

$$O_1\left(\frac{225\cdot\sqrt{2}}{352}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$$

нуқтага кўчирамиз; бу ҳолда утиш формулалари:

$$x_1 = X - \frac{225\cdot\sqrt{2}}{352}, \quad y_1 = Y + \frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

Бу системада кейинги тенглама

$$x_1 = \frac{4\sqrt{2}}{11}y_1^2$$

кўринишни олади.

Бу тенгламага асосланиб, берилган тенглама билан тасвирланган чизиқни ясаймиз (88- чизма).

Машқлар

1. Қуйидаги эгри чизиқларнинг марказлари координаталарини топинг.

1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$;

2) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;

3) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$;

4) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;

5) $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$;

6) $9x^2 - 30xy + 25y^2 + 8x - 12y = 0$.

2. Координата ўқларини параллел кўчириш билан қуйидаги тенгламаларни соддалаштиринг.

1) $x^2 - y^2 + 2x - y = 0$;

2) $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$;

3) $2x^2 - 3y^2 - 6x + 6y + 2,5 = 0$;

4) $5x^2 + 6y^2 + 20x + 24y + 40 = 0$.

3. Координата ўқларини параллел кўчириш билан қуйидаги тенгламаларни соддалаштиринг.

1) $y^2 - 5x + 2y + 1 = 0$;

2) $x^2 - 4x - 3y + 4 = 0$;

3) $x^2 + 6x - 3y + 3 = 0$;

4) $y^2 - 3x - 8y + 1 = 0$.

4. Координаталар бошини марказга кўчириш усули билан қуйидаги тенгламаларни соддалаштиринг.

1) $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$;

2) $4x^2 \pm 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$;

3) $4x^2 + 2xy + 6y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$;

4) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

5. Қуйидаги тенгламалар билан тасвирланган эгри чизиқларнинг энг содда тенгламаларини тузинг ва чизиқларни ясанг.

1) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$;

2) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

3) $5x^2-12xy-22x-12y-19=0$;

4) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$;

5) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;

6) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$;

7) $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$;

8) $7x^2+6xy+32y^2-14x-60y+7=0$;

9) $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;

10) $x^2-6xy-7y^2+10x-30y+23=0$;

11) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

12) $9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$.

ИККИНЧИ ҚИСМ

ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Саккизинчи боб

ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ ВА ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

52-§. ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Векторлар ҳақида сузлашдан олдин фазодаги Декарт системасини баён этамиз.

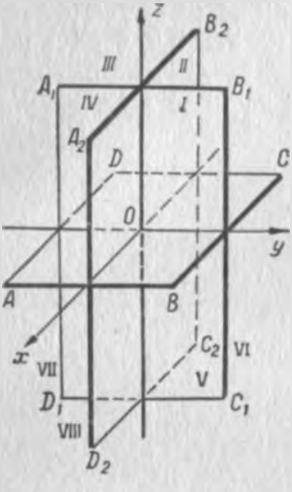
Фазодаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун бир-бири билан тўғри бурчак ҳосил қилиб кесишадиган учта $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ ва $A_2B_2C_2D_2$ текисликлар оламиз (89- чизма). Бу текисликларни *координата текисликлари* деб атаймиз. Координата текисликлари учта Ox, Oy, Oz тўғри чизиқлар бўйича кесишади, бу чизиқлар *координата ўқлари* дейилади ва Ox ўқ *абсциссалар ўқи*, Oy ўқ *ординаталар ўқи* ва Oz ўқ *аппликаталар ўқи* деб аталади. Бу учта ўқнинг кесишган нуқтаси 0 *координаталар боши* дейилади.

Координата текисликлари ўзаро кесишиб, фазони саккиз бўлакка бўлади. Фазонинг бу бўлаклари *октантлар* дейилади. Улар 89- чизмада рим рақамлари билан (I — VIII) кўрсатилган.

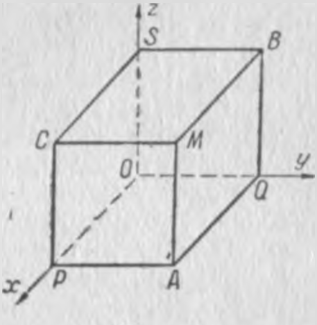
Координата ўқларида стрелка билан кўрсатилган йўналишлар мусбат йўналишлар сифатида қабул қилинган.

Биз тасвирлаган координаталар системаси *фазодаги тўғри бурчакли Декарт системаси* деб аталади. Фазодаги ҳар қандай нуқтанинг ўрни бу системага нисбатан учта сон билан аниқланади. Фазода бирор M нуқта ва маълум масштаб берилган бўлсин (90- чизма).

Бу нуқтани координата ўқларига проекциялаймиз, яъни ундан координата текисликларига перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Уларнинг координата ўқлари билан кесишиши натижасида M нинг P, Q, S проекцияси ҳосил бўлади. M нуқта берилса, P, Q, S нуқталар дарҳол аниқланади ва, аксинча, P, Q, S нуқталар маълум бўлса (90- чизма), проекциялари шу уч нуқтадан иборат нуқтани топиш осон. Демак, M нуқтанинг вазиятини аниқлаш масаласи унинг координата ўқларидаги P, Q, S проекцияларини аниқлаш масаласига келтирилади. Биз координата ўқларида жойлашган P, Q, S нуқталарнинг вазиятини сонлар билан аниқлашни биламиз. Ўқлар бўйлаб йўналган учта $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overline{OS}$ кесманинг миқдорларини $x = OP$, $y = OQ$, $z = OS$ деб оламиз, x сон, яъни M нинг Ox ўқдаги P проекциясининг координатасини M нуқтанинг биринчи координатаси сифатида қабул қилиниб, M нинг *абсциссаси* дейилади. Q проекциянинг координатаси y сонни M нинг иккинчи координатаси ёки *ординатаси* дейилади. Шунингдек, z сон M нинг учинчи координатаси ёки *аппликатаси* дейилади.

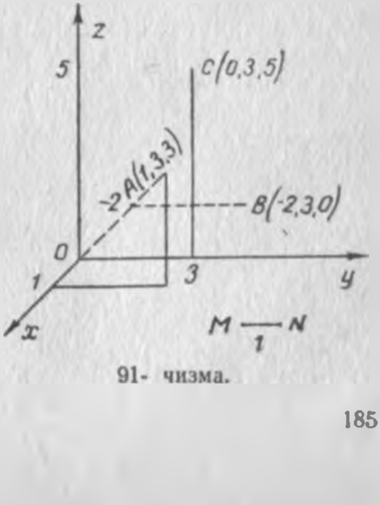


89- чизма.



90- чизма.

Шундай қилиб, фазодаги ҳар қандай M нуқтанинг ўрни учта x, y, z сон билан (нуқтанинг координаталари билан) аниқланади ва, аксинча, ҳар қандай учта сон билан фазода бирор нуқтанинг ўрни аниқланади. Ҳақиқатан ҳам бу сонларнинг бирини абсцисса, иккинчисини ордината ва учинчисини аппликата деб қабул қилсак, Декарт системасида бу нуқтани ясай оламиз. $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ ва $\overline{AM}$ йўналган кесмаларни йўналишлари координата ўқларининг йўналишлари билан бир хил бўлган $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ва $\overline{OS}$ кесмалар билан алмаштириш мумкин. Шунинг учун йўналган $\overline{OPAM}$ синиқ чизиқ бўғинларининг миқдорлари M нуқтанинг координаталарини ташкил этади. Демак, M (x, y, z) нуқтани Декарт системасида ясаш учун маълум масштаб танлаб олиб, бу масштабда Ox ўқда $OP = x$ бирлик оламиз ($x < 0$ бўлса, P нуқта yOz текисликнинг орқасидаги Ox нинг давомида



91- чизма.

бўлади); P нуқтанинг учидан xOy текисликда Oy ўққа параллел чизиқ утказиб, унда $PA = y$ бирлик оламиз ($y < 0$ бўлса, PA кесма xOz текисликнинг чап томонида булади). Энди A нуқтадан Oz ўққа параллел чизиқ ўтказиб, унда $AM = z$ бирлик оламиз ($z < 0$ бўлса, AM кесма xOy текисликдан пастда булади, 90- чизма). AM кесманинг M учи изланаётган нуқтадир.

Мисол. $A(1, 3, 3)$, $B(-2, 3, 0)$, $C(0, 3, 5)$ нуқталар ясалсин, MN кесмани бирлик қилиб оламиз. Бу нуқталарнинг ясалиши 91- чизмадаги тасвирдан равшан кўринмоқда.

53- § ВЕКТОРЛАР

Математика, физика, механика, электротехника, радиотехника ва шунга ухшаш соҳаларда икки хил миқдорлар учраб туради. Бу миқдорларнинг бир тури ўзининг сон қиймати билан тўла аниқланади. Масалан, шаклнинг юзи, жисмнинг ҳажми, температура, электр катталик, зичлик каби миқдорлар. Бундай миқдорлар *скаляр* миқдорлар дейилади. Иккинчи тур миқдорлар ўзининг сон қиймати билан тўла аниқланмайди, уларнинг тўла аниқланиши учун сон қийматлари билан бир қаторда йўналишлари ҳам берилган бўлиши керак. Масалан, куч, тезлик, тезланиш каби миқдорлар.

Ўзининг сон қиймати ва йўналиши билан аниқланадиган миқдорлар векторлар деб аталади.

Бу таърифдан геометриядаги йўналган кесманинг ҳар бири вектор эканлиги куринади. Векторлар $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ёки $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ каби ҳарфлар билан (босмада шу ҳарфлар қуюқ қилиб ($\mathbf{a}$), ёзмада эса устига чизиқча қўйиб ($\bar{a}$) ёзилади) белгиланади. Агар вектор йўналган кесма билан тасвирланган бўлиб, A унинг боши, B унинг кейинги учи бўлса, уни (92- чизма) $\overline{AB}$ символ билан белгиланади; геометрияда вектор 92- чизмадаги каби йўналиши стрелка билан кўрсатилган кесма шаклида тасвирланади. Бунда AB кесманинг узунлиги векторнинг сон қийматига тенг бўлиб, кесманинг йўналиши эса векторнинг йўналиши билан бир хил бўлади. Векторнинг сон қиймати унинг *модули* ёки *узунлиги* дейилади ва a, AB каби чизиқсиз ёзилади ёки $|\overrightarrow{AB}|$ символ билан кўрсатилади.

Векторлар бир-бирига параллел бўлса ёки бир тўғри чизиқда ётса бундай векторлар *коллинеар* векторлар дейилади.

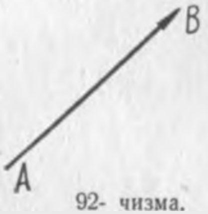
Агар иккита векторнинг: 1) модуллари тенг, 2) коллинеар, 3) йўналишлари бир хил бўлса, бундай векторлар бир-бирига тенг дейилади. Масалан, (93- чизмадаги) $\overline{AB}$ вектор $\overline{A'B'}$ векторга тенг, чунки бу икки вектор учун векторлар тенглиги таърифидаги учала шарт ҳам бажарилади. Бу векторларнинг тенглиги

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

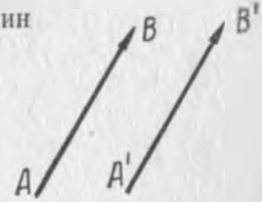
шаклда ёзилади.

Векторларнинг тенглиги ҳақидаги таърифдан параллел векторларнинг бошини бир нуқтадан бошқа нуқтага кўчириш мумкинлиги келиб чиқади. Векторларни ўз-ўзига параллел кўчириб, уларнинг ҳаммасини битта O бошланғич нуқтага келтириш мумкин (94- чизма).

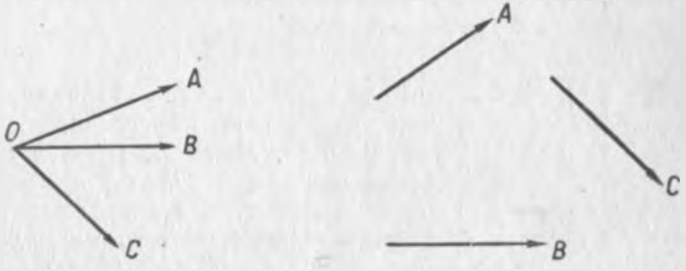
Бошланғич нуқтаси текислик ёки фазонинг ҳар қандай нуқтасида ётиши мумкин бўлган ва узунлиги ҳамда йўналиши билан аниқланадиган векторлар *озод векторлар* дейилади. Биз векторлар алгебрасида асосан озод векторларни қараймиз.



92- чизма.



93- чизма.



94- чизма.

Математика, физика ва техникада учрайдиган векторлар ва уларнинг турли комбинациялари билан ишлай олиш учун векторлар устидаги турли амалларни билиш керак. Биз келгуси параграфларда бу амаллар билан танишамиз.

51- §. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ

A, B вектор берилган бўлсин. Бирор O бошланғич нуқта олиб бу векторларни O нуқтага кўчирамиз (95- чизма).

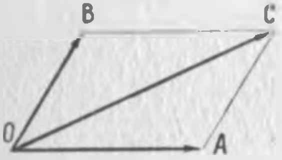
Таъриф. *Икки* A, B *вектор йиғиндиси деб,* A *ва* B *қўшилувчи векторларга ясалган параллелограммнинг умумий*

О учидан чиққан OC диагоналдан иборат **C** *векторга айтилади* ва

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \tag{1}$$

кўринишда ёзилади (параллелограмм қоидаси).

Агар **A** ва **B** векторлар коллинеар бўлса, уларни умумий бошланғич нуқтага келтирилганда битта тўғри чизиқда ётади. Бу ҳолда (1) йиғинди алгебраик йиғиндига айланади ва **C** нинг йўналиши **A** ва **B** векторлардан қайси бири катта бўлса, ўшанинг йўналиши билан бир хил бўлади (**A** ва **B** векторлар коллинеар бўлиб, узунликлари тенг, йўналишлари эса қарама-қарши бўлса, йиғинди ***ноль*** вектор деб аталадиган алоҳида векторга тенг бўлади. Ноль векторнинг йўналиши аниқ эмас).



95- чизма.

Параллелограммнинг қарама-қарши томони бўлгани учун (95- чизма).

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

эканини кўриш қийин эмас. Бунга қараганда **A** векторга **B** векторни қўшиш учун **A** векторнинг **A** учига **B** векторнинг бошланғич *O* нуқтасини келтирамиз, **B** векторнинг кейинги **B** учи *C* нуқтага тушади. *O* билан *C* ни туташтириб, $\overrightarrow{OC}$ векторни ҳосил қиламиз.

Бу ҳолда

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

Бу мулоҳаза векторларни қўшишда учбурчаклар қоидасидан фойдаланиш мумкин эканлигини кўрсатади.

Учбурчаклар қоидаси. *Икки* ***A***, ***B*** *векторларни қўшиш учун* ***A*** *векторнинг кейинги A учига* ***B*** *векторнинг бошланғич учини келтириб қўямиз.* ***A*** *векторнинг бошланғич O учи билан* ***B*** *векторнинг кейинги B учини туташтирамиз. Ҳосил бўлган OB вектор* ***A + B*** *векторга тенг (96-чизма), яъни*

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

Векторларни қўшиш қуйидаги қонунларга бўйсунади.

1. Ўрин алмаштириш қонуни. *Икки* ***A*** *ва* ***B*** *векторларни қўшишда уларнинг ўринларини алмаштириш мумкин*:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

Бу қонуннинг ўринли экани параллелограмм қоидасидан равшан кўринади (96- чизма):

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

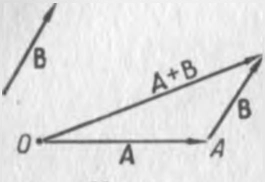
ёки

$$A + B = B + A.$$

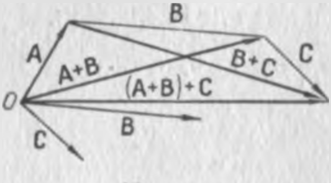
II. Группалаш қонуни. *Бир неча векторларни қўшишда уларни группалаб қўшиш мумкин:*

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C,$$

яъни йиғиндини қўшиш учун қўшилувчиларни кетма-кет қўшиш керак. Ҳақиқатан, A, B ва C векторлар берилган бўлсин. Уларни битта O бошланғич нуқтага кўчирамиз (97- чизма).



96- чизма.



97- чизма.

Энди A векторнинг A учидан бошлаб B векторни қўямиз ва $\overrightarrow{OB} = A + B$ векторни топамиз; сўнгра $\overrightarrow{OB}$ векторнинг учига C векторни қўйиб,

$$\overrightarrow{OC} = (A + B) + C \qquad (2)$$

векторни топамиз.

Шаклдаги A векторнинг A учи билан C векторнинг C учини туташтирсак,

$$\overrightarrow{AC} = B + C.$$

Шунинг учун

$$\overrightarrow{OC} = A + \overrightarrow{AC} = A + (B + C).$$

(2) билан (3) тенгликларнинг чап томонлари битта $\overline{OC}$ векторни билдиради.

Демак,

$$(A + B) + C = A + (B + C). \qquad (4)$$

Бундан векторларни қўшишда қавсларнинг аҳамияти йўқ экани келиб чиқади. Бу қонун векторларни қўшишда қуйидаги кўпбурчаклар қоидаси ўринли эканини кўрсатади:

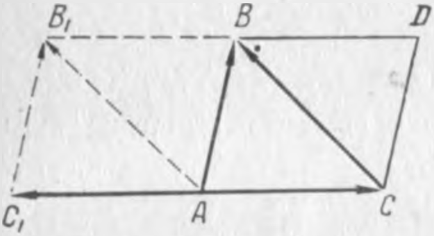
Бир неча векторни қўшиш учун қўшилувчи биринчи векторнинг охирги учига қўшилувчи иккинчи векторнинг бошланғич учини келтирамиз, ясалган қўшилувчи иккинчи векторнинг охирги учига учинчи векторни қўямиз ва ҳ. к.

ҳосил бўлган синиқ чизиқнинг бошланғич нуқтаси билан охирги нуқтасини туташтирувчи вектор (ёпувчи вектор) берилган ҳамма векторларнинг йиғиндиси бўлади.

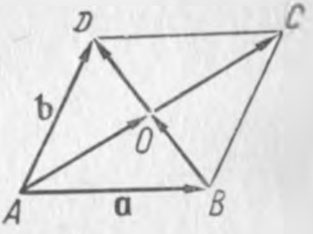
Масалан, 97- чизмада

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\overrightarrow{OC}.$$

55- §. ВЕКТОРЛАРНИ АЙИРИШ



98- чизма.



99- чизма.

Векторлар алгебрасида айириш амалини қўшиш амалига тескари амал деб қаралади. *A* учдан чиққан икки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ вектор берилган бўлсин. *Икки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторнинг айирмаси деб, $\overrightarrow{AC}$ вектор билан йиғиндиси $\overrightarrow{AB}$ векторга тенг бўлган $\overrightarrow{CB}$ векторга айтилади* (98- чизма) ва уни

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

шаклда ёзилади, бошқача айтганда, агар

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$$

бўлса, у ҳолда

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

бўлади.

98- чизмадаги *ACB* учбурчакдан $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ векторларнинг йиғиндиси (ёпувчи вектор) $\overrightarrow{AB}$ вектор экани кўринади. Демак, *ABCD* параллелограммнинг $\overrightarrow{CB}$ диагонали $\overrightarrow{AB}$ вектор билан $\overrightarrow{AC}$ векторнинг айирмасини тасвирлайди ва айирма вектор айрилувчи $\overrightarrow{AC}$ векторнинг C учидан камаювчи $\overrightarrow{AB}$ векторнинг B учига қараб йўналган бўлади.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC})$$

бўлгани учун $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ айирмани топиш учун $\overrightarrow{AB}$ векторга $(-\overrightarrow{AC})$ векторни қўшиш керак, деган хулоса чиқади. $(-\overrightarrow{AC})$ вектор $\overrightarrow{AC}$ векторга қарама-қарши вектор деб айтилади.

Демак, $\overrightarrow{CB}$ векторни топиш учун A нуқтадан $\overrightarrow{AC}$ векторга қарама-қарши йўналишда $\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC}$ вектор олиб, ABB_1C_1 параллелограмм ясаймиз. Параллелограммнинг AB_1 диагонали $\overrightarrow{CB}$ айирма вектор бўлиши равшан. Демак, $\overrightarrow{AC}$ *векторни айириш учун бу векторга тенг ва қарама-қарши йўналган* $\overline{AC_1}$ *векторни қўшиш керак* (98- чизма).

1- мисол. Параллелограммнинг AC ва BD диагоналлари билан тасвирланган $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BD}$ векторларни унинг $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AD}$ томонлари билан тасвирланган $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орқали ифодаланг (99- чизма).

Ечиш. 1- усул. Векторларни қўшиш ва айириш қоидасига мувофиқ:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC},$$
$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \overrightarrow{BD}.$$

Аввал тенгликларни ҳадлаб қўшамиз, сўнгра биринчи тенгликдан иккинчи тенгликни ҳадлаб айирамиз:

$$2\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} + \overline{BD},$$
$$2\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

Демак,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}}{2},$$
$$\boldsymbol{b} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}.$$

2- усул. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ векторлар параллелограмм диагоналлари кесишган нуқтада тенг иккига бўлинади, шунинг учун

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overline{AC}}{2};\ \overrightarrow{BO} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}.$$

△ AOB дан:

$$\vec{AO}-\vec{AB}=\vec{BO}$$

ёки

$$\frac{\vec{AC}}{2}-\boldsymbol{a}=\frac{\vec{BD}}{2}$$

бу тенгликдан

$$\boldsymbol{a}=\frac{\vec{AC}-\vec{BD}}{2}.$$

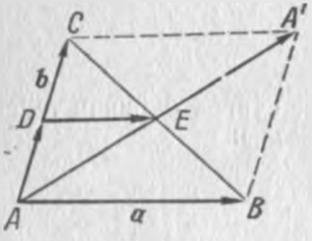
△ AOD дан

$$\vec{AO}+\vec{OD}=\vec{AD}$$

ёки

$$\boldsymbol{b}=\frac{\vec{AC}+\vec{BD}}{2}.$$

2- мисол. ABC учбурчак берилган. Ундаги DE ўрта чизиқ учбурчак асосига параллел бўлиб, асоснинг ярмига тенг экани исботлансин (100- чизма).



100- чизма.

Ечиш. Берилган △ ABC да AB, AC томонларни $\vec{AB}=\boldsymbol{a}$, $\vec{AC}=\boldsymbol{b}$ деб қабул қиламиз. Ўрта чизиқ DE ни ўтказиб, $\vec{AD}$ ва $\vec{DE}$ векторлар ҳосил қиламиз ҳамда томонлари $\vec{AC}$ ва $\vec{AB}$ векторлардан иборат параллелограмм ясаймиз. Бу ҳолда

$$\vec{AE}=\frac{\vec{AA_1}}{2}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}.$$

△ ADE дан

$$\vec{DE}=\vec{AE}-\vec{AD}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}.$$

Бундан:

$$|\vec{DE}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|.$$

Айтилганлар исбот бўлди.

56-§. ВЕКТОРНИ СОНГА КУПАЙТИРИШ ВА БУЛИШ

АВ вектор билан бутун мусбат т сонниг купайтмаси деб узунлиги $|\overrightarrow{AB}|\cdot m$ *га тенг, йуналиши* $\overrightarrow{AB}$ *векторнинг йуналиши билан бир хил* **С** *векторга айтилади ва*

$$C = \overrightarrow{AB}\cdot m \qquad (5)$$

шаклда ёзилади. Агар $m < 0$ булса, C векторнинг йуналиши $\overrightarrow{AB}$ векторнинг йуналишига қарама-қарши булади; чунки агар $m = -n$ десак, (5) тенглик

$$\overrightarrow{AB}\cdot n + C = 0 \qquad (6)$$

куринишни олади. Бу тенглик C векторнинг йуналиши $\overrightarrow{AB}\cdot n$ векторнинг йуналишига қарама-қарши эканини курсатади.

$m = 0$ булганда

$$C = \overrightarrow{AB}\cdot m = 0$$

булади, чунки таърифга кура

$$|C| = |\overrightarrow{AB}|\cdot m = |\overrightarrow{AB}|\cdot 0 = 0.$$

Векторнинг бирор $m \neq 0$ бутун сонга булиш амалини купайтиришга тескари амал деб қараймиз, яъни *$\overrightarrow{AB}$ векторнинг т сонга нисбати деб $\overrightarrow{AB}$ вектор билан $\frac{1}{m}$ сонниг купайтмасига айтамиз*:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{m} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{m}.$$

Бу таърифдан $\frac{\overrightarrow{AB}}{m}$ нисбат вектор булиб, унинг узунлиги $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлигидан m марта қисқа, йуналиши эса $m > 0$ булганда $\overrightarrow{AB}$ векторнинг йуналиши билан бир хил, $m < 0$ булгандя эса $\overrightarrow{AB}$ векторнинг йуналишига қарама-қарши экани келиб чиқади.

Векторни бутун мусбат сонга купайтириш ва булиш таърифидан унинг ҳар қандай рационал сонга купайтириш мумкин эканлигини куриш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, $\frac{m}{n}$ бирор рационал сон бўлсин. $\vec{AB}$ векторни $\frac{m}{n}$ сонга ($n \neq 0$) кўпайтириш, яъни $\vec{AB}$ векторнинг m га кўпайтмасини n га бўлиш демакдир:

$$\vec{AB} \cdot \frac{m}{n} = \frac{\vec{AB} \cdot m}{n}.$$

$\vec{AB}$ векторни ҳар қандай ҳақиқий сонга кўпайтириш ҳам маънога эга; биз буни исбот этмаймиз.

Энди (6) тенгликда $n = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$) деб фараз қилсак, у ҳолда (6) тенглик

$$\vec{AB} \frac{\alpha}{\beta} + C = 0$$

ёки

$$\vec{AB} \alpha + C \cdot \beta = 0 \tag{7}$$

кўринишни олади (α, β ҳақиқий сон).

Агар икки ёки бир неча вектор (7) кўринишдаги тенглик билан боғланган бўлса, бундай векторларни *чизиқли боғлиқ векторлар* деб атаймиз. Чизиқли боғлиқ векторларнинг бирини қолганлари орқали ифодалаш мумкин. Масалан, (7) тенгликдан

$$C = \frac{\vec{AB}\alpha}{\beta}, \ (\beta \neq 0),$$

яъни C вектор AB вектор орқали ифодаланади. Иккита чизиқли боғлиқ векторлар бир-бири билан коллинеар векторлар бўлади ва аксинча.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги қонунларга бўйсунади:

1. Ўрин алмаштириш қонуни:

$$\vec{AB} \cdot n = n \cdot \vec{AB}.$$

2. Группалаш қонуни:

$$m(n\vec{AB}) = (mn)\vec{AB}.$$

3. Тақсимот қонуни:

$$(A + B)n = An + Bn,$$
$$(m + n)A = mA + nA.$$

Бу қонунларнинг ўринли эканини исбот қилиш китобхонга топширилади.

Векторлар йўналган кесмалар сифатида таърифлангани учун ҳар қандай вектор маълум масштаб бирлигида ўлчаниши мумкин. A векторнинг йўналиши билан бир хил йўналишда бўлган ва узунлиги бир бирликка тенг векторни A° билан белгилаймиз. *Узунлиги бир бирликка тенг бўлган вектор бирлик вектор дейилади.* Демак, A° векторни A векторнинг бирлик вектори десак бўлади.

$|A| - A$ бўлгани учун

$$A = AA^\circ$$

экани равшан.

Бу тенгликдан:

$$A^\circ = \frac{A}{A}.$$

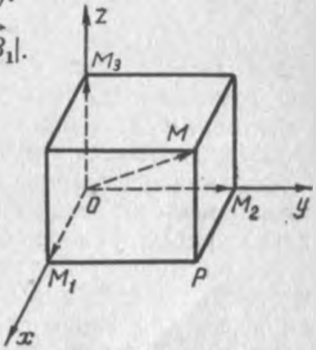
Битта текисликда ётган ёки битта текисликка параллел бўлган векторлар компланар векторлар дейилади.

57-§. ВЕКТОРНИНГ КОМПОНЕНТИ ВА ПРОЕКЦИЯСИ

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг ўқдаги проекцияси деб, унинг боши A, учи бўлган B нуқталарнинг шу ўққа туширилган A_1, B_1 проекцияларини туташтирувчи $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторнинг A_1B_1 миқдорига, яъни йўналган $\overrightarrow{A_1B_1}$ кесманинг плюс ёки минус ишора билан олинган узунлигига айтилади (101- чизма):

$$\text{пр}\,\overrightarrow{AB} = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}|.$$

101- чизма.



102- чизма.

$\overrightarrow{A_1B_1}$ вектор билан ўқнинг йўналиши бир хил бўлса, (+) ишора олиниб, акс ҳолда (—) ишора олинади. Векторнинг (яъни йўналган кесманинг) проекцияси ҳақида исбот этилган (I боб, 9-§) теоремалар бу ерда ҳам ўринли:

$$1)\ \text{пр}\,\overrightarrow{AB} = AB\cos\varphi;$$

2) *Векторлар йиғиндисининг бирор ўққа туширилган проекцияси — бу векторларнинг шу ўққа туширилган проекциялари йиғиндисига тенг:*

$$\text{пр}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \text{пр}\,\mathbf{A} + \text{пр}\,\mathbf{B} + \text{пр}\,\mathbf{C}.$$

Тўғри бурчакли бирор координаталар системасининг O бошидан чиққан $\overrightarrow{OM}$ вектор берилган бўлсин. Бу векторнинг Ox, Oy, Oz ўқлардаги проекцияларини топамиз (102- чизма).

Бунинг учун $\overrightarrow{OM}$ векторнинг M учидан xOy текисликка MP перпендикуляр туширамиз ва P нуқтадан Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ билан Ox ўқнинг кесишган нуқтаси M_1 бўлсин. Натижада Ox ўқда $\overrightarrow{OM_1}$ вектор ҳосил бўлади. Бу вектор OM векторнинг Ox ўқдаги *компоненти* дейилади. Шунингдек, Oy ўқда йўналган $OM_2 = M_1P$ кесма олиб, $\overrightarrow{OM_2}$ векторни ясаймиз, Oz ўқда $OM_3 = PM$ кесма олиб, OM_3 вектор ясаймиз. $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ векторлар $\overrightarrow{OM}$ векторнинг мос равишда Oy ва Oz ўқлардаги компонентлари бўлади. Йўналган $\overrightarrow{OM_1PM}$ синиқ чизиқнинг ёпувчи чизиғи $\overrightarrow{OM}$ бўлгани учун

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

ёки

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3, \tag{8}$$

яъни *фазодаги ҳар қандай* $\mathbf{M}$ *вектор координата ўқларидаги ўзининг компонентлари йиғиндисига тенг.*

Векторни (8) кўринишда тасвирлаш векторни компонентларга ёки ташкил этувчиларга ажратиш дейилади.

Координата ўқларининг ҳар бири учун бирлик вектор олиш векторлар алгебрасида ва унинг татбиқларида катта қулайлик туғдиради. Ox ўқдаги бирлик векторни $\mathbf{i}$ билан, Oy ўқдаги бирлик векторни $\mathbf{j}$ билан ва Oz ўқдаги бирлик векторни $\mathbf{k}$ билан белгилаш қабул қилинган. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ векторлар асосий бирлик векторлар ёки ортлар дейилади. $\mathbf{M}_1$ вектор Ox ўқдаги вектор бўлиб, $\mathbf{i}$ вектор ҳам Ox ўқда бўлгани учун

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}X$$

деб ёзиш мумкин, бунда X нинг абсолют қиймати $\mathbf{M}_1$ векторнинг узунлиги (M вектор билан $\mathbf{i}$ векторнинг йўналиши бир хил ёки турлича бўлишига қараб, X (+) ёки (—) ишорали бўлади). Шунга ўхшаш

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{j}Y,\quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{k}Z$$

деб ёзиш мумкин.

$\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ компонентларнинг бу қийматларини (8) тенгликка қўйиб,

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z \qquad (9)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. X, Y, Z сонлар ***M*** *векторнинг учи бўлган M нуқтанинг координаталари булиб,* ***M*** *векторнинг координата ўқларидаги проекцияларидир.* Координата боши (O) билан M нуқтани туташтириб ҳосил қилинган $\overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* дейилади ва M ($\mathbf{r}$) шаклида ёзилади (бунда $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$).

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ берилган бўлса, унинг охирги учи M нуқтанинг фазодаги ўрни X, Y, Z координаталар аниқланишини ва булар M нуқтанинг координаталари экани (X, Y, Z) кўринишда ёзилишини биламиз. X, Y, Z сонлар $\mathbf{M}$ векторнинг проекциялари экани $\mathbf{M}\{X, Y, Z\}$ кўринишда ёзилади. Бу ҳолда (9) тенглик

$$\mathbf{M}\{X, Y, Z\} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z \qquad (9)$$

кўринишда ёзилади. (9) тенглик $\mathbf{M}$ векторни *асосий* ***i, j, k*** *бирлик векторларга ёки ортларга ажратиш дейилади.*

Радиус-векторнинг узунлиги параллелепипед диагоналининг узунлигига тенг бўлгани учун (102- чизма):

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (10)$$ ✓

Мисол. M (2, 3, 1) нуқтанинг радиус-вектори ва унинг узунлиги топилсин.

Ечиш. M нуқтанинг радиус-векторини $\mathbf{r}$ билан белгилаймиз. Бу мисолда

$$X = 2,\ Y = 3,\ Z = 1.$$

(9) тенгликка мувофиқ

$$\mathbf{r} = M\{2, 3, 1\} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(10) тенгликка кўра

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

58- §. ПРОЕКЦИЯЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ ВА АЙИРИШ

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ векторлар проекциялари билан берилган бўлсин ва проекциялари мос равишда X_1, Y_1, Z_1 ва X_2, Y_2, Z_2 бўлсин. Бу ҳолда (9) тенгликка мувофиқ:

$$\mathbf{A}\{X_1, Y_1, Z_1\} = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1,$$
$$\mathbf{B}\{X_2, Y_2, Z_2\} = \mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2.$$

Векторлар йиғиндисининг бирор ўққа нисбатан олинган проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўқдаги проекциялари йиғиндисига тенг экани бизга 58- § дан маълум. Бу теоремани берилган векторларга татбиқ қилсак,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{i}(X_1+X_2)+\mathbf{j}(Y_1+Y_2)+\mathbf{k}(Z_1+Z_2)$$

бўлади. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ деб фараз қилсак, кейинги тенгликни

$$\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}+\mathbf{B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}=\mathbf{C}\{X_1+X_2,\ \ Y_1+Y_2,\ Z_1+Z_2\}$$

шаклда ёзиш мумкин. Демак, *проекциялари билан берилган векторларни қўшиш учун бир номли проекцияларни қўшиш керак.*

Мисол. $A\{1,\ 3,\ -1\}$ ва $B\{2,\ 1,\ 4\}$ векторлар йиғиндиси топилсин.

Ечиш.

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\{1,\ 3,\ -1\}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k},\\ \mathbf{B}\{2,\ 1,\ 4\}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k},\\ \mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}.\end{gathered}$$

Эслатма. Проекциялари билан берилган векторларни қўшишда, айиришда кўпҳадларни қўшиш қоидаси ўринли.

Векторни сонга кўпайтириш қоидасига ва кўпайтиришнинг 56- § даги 1 — 4- қонунларига кўра $\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ векторни n сонга кўпайтириш учун

$$A\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}=\mathbf{i}X_1+\mathbf{j}Y_1+\mathbf{k}Z_1$$

тенгликнинг иккала томонини n га кўпайтириш керак:

$$n\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}=\mathbf{i}(nX_1)+\mathbf{j}(nY_1)+\mathbf{k}(nZ_1)$$

ёки

$$n\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}=\mathbf{A}\{nX_1,\ nY_1,\ nZ_1\}.$$

Демак, *проекциялари билан берилган векторни n га кўпайтириш учун ҳар бир проекцияни n га кўпайтириш керак.*

Векторларни айириш масаласига ўтамиз:

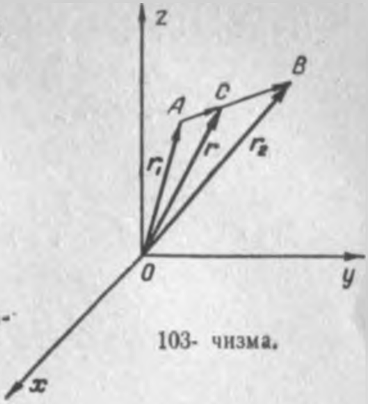
$$\begin{gathered}\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}-\mathbf{B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}=\\ =\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}+\mathbf{B}\{-X_2,\ -Y_2,\ -Z_2\}=\\ =\mathbf{C}\{X_1-X_2;\ Y_1-Y_2;\ Z_1-Z_2\}\end{gathered}$$

ёки

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{i}(X_1-X_2)+\mathbf{j}(Y_1-Y_2)+\mathbf{k}(Z_1-Z_2),$$

яъни *проекциялари билан берилган векторларни айириш учун мос равишда бир номли проекцияларни айириш керак.*

Мисол. $A(\mathbf{r}_1)$ ва $B(\mathbf{r}_2)$ нуқталар берилган. Бу икки нуқта орасидаги кесмани λ нисбатда бўлувчи $C(\mathbf{r})$ нуқта топилсин (103- чизма).



103- чизма.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda \quad \text{ёки} \quad \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}.$$

103- чизмадан:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1;$$
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}$$

эканини кўрамиз. Бу ифодаларни юқоридаги тенгликка қўйсак,

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликдан $\mathbf{r}$ ни топамиз:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}. \tag{11}$$

Изланаётган C нуқтанинг радиус-вектори топилди.

Энди (11) формулани $A(x_1, y_1, z_1)_1$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x, y, z)$ нуқталарнинг координаталарига нисбатан ёзамиз.

Бунинг учун $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}$ векторларни проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{i}x_1+\mathbf{j}y_1+\mathbf{k}z_1,\ \mathbf{r}_2=\mathbf{i}x_2+\mathbf{j}y_1+\mathbf{k}z_1,\ \mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z.$$

Буларни (11) тенгликка қўямиз:

$$\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z=\frac{1}{1+\lambda}\{\mathbf{i}x_1+\mathbf{j}y_1+\mathbf{k}z_1+\lambda(\mathbf{i}x_2+\mathbf{j}y_2+\mathbf{k}z_2\}$$

ёки

$$\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z=\frac{1}{1+\lambda}\{\mathbf{i}(x_1+\lambda x_2)+\mathbf{j}(y_1+\lambda y_2)+\mathbf{k}(z_1+\lambda z_2)\}.$$

Тенг векторларнинг проекциялари ҳам тенг бўлади. Шунинг учун кейинги тенгликдан

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{12}$$

келиб чиқади.

Вектор шаклидаги битта (11) тенглик проекциялари (координаталари) билан ифодаланган учта тенгликка тенг кучли экани равшан.

1- мисол. $A(2, -3, 4)$ ва $B(1, 3, -5)$ нуқталар орасидаги кесмани $\frac{2}{3}$ нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталари топилсин.

Ечиш. (12) формуладан фойдаланамиз: бу ерда

$$x_1 = 2,\ y_1 = -3,\ z_1 = 4, \qquad \lambda = \frac{2}{3}.$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = 3,\quad z_2 = -5.$$

Демак,

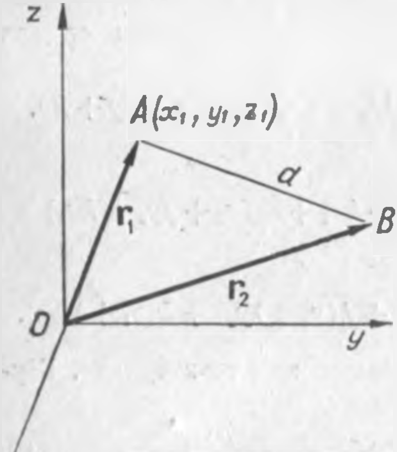
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{2 + 1\cdot\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1\frac{3}{5};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + 3\cdot\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{3}{5};$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{2}{3}\cdot(-5)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

2- мисол. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган. Бу нуқталар орасидаги масофа топилсин (104- чизма).

O нуқта билан A, B нуқталарни бирлаштириб, бу нуқталарнинг радиус-векторларини ясаймиз. Изланаётган AB масофани d билан белгилаймиз:



101- чизма.

$$|\overrightarrow{AB}| = d.$$

Бу ҳолда

$$\mathbf{r}_1 + \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2$$

ёки

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Аммо

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1,$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2.$$

Демак,

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1).$$

(10) формулага мувофиқ изланаётган d масофа (векторнинг узунлиги)

$$|\overrightarrow{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (13)$$

Масалан, $A(5, 4, 2)$ ва $B(1, -1, -1)$ нуқталар орасидаги масофа

$$d=\sqrt{(1-5)^2+(-1-4)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

га тенг.

59-§. ИККИ ВЕКТОРНИНГ СКАЛЯР КУПАЙТМАСИ

Икки ***A*, *B*** *векторнинг скаляр кўпайтмаси деб бу векторлар узунликлари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига айтилади ва* ***AB*** *шаклда ёзилади.*

Агар **A** ва **B** вектор орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, скаляр купайтма таърифига кура

$$\mathbf{AB}=AB\cos\varphi. \qquad (14)$$

Векторнинг ўққа туширилган проекцияси таърифига асосан

$$A\cos\varphi=\text{пр}_B\,\mathbf{A};\quad B\cos\varphi=\text{пр}_A\,\mathbf{B}.$$

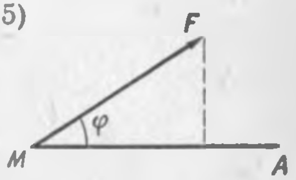
Демак, (14) тенглик

$$\mathbf{AB}=A\,\text{пр}_A\,\mathbf{B}=B\,\text{пр}_B\,\mathbf{A} \qquad (15)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликка асосан *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси биринчи векторнинг модули билан иккинчи векторнинг биринчи вектор йўналиши бўйича олинган проекцияси купайтмасига тенг.* Агар $\mathbf{A}=\mathbf{A}^\circ$ бўлса, (15) тенгликдан

$$\mathbf{A}^\circ\mathbf{B}=1\cdot\text{пр}_{A^\circ}\mathbf{B}=\text{пр}_{A^\circ}\,\mathbf{B} \qquad (15)$$

келиб чиқади. Яъни *бирлик вектор билан ҳар қандай векторнинг скаляр кўпайтмаси векторнинг бирлик вектор йўналиши буйича олинган проекциясига тенг.*



105- чизма.

(15) тенгликка асосан икки векторнинг скаляр купайтмаси физика ва механика нуқтаи назаридан қандай маъно беришини кўрайлик.

M материал нуқтага **F** куч таъсир этиб, бу нуқтани $\overline{MA}=\mathbf{A}$ қадар силжитса (105- чизма), **F** кучнинг бундай силжиш натижасида бажарган иши

$$U=A\,\text{пр}_A\,\mathbf{F}=\mathbf{AF}.$$

Шундай қилиб, ***AF*** *скаляр купатма физика ва механика нуқтаи назаридан* ***F*** *куч таъсири остида бирор M нуқтани* $\overline{MA}$ *векторга қадар силжитишда* ***F*** *кучнинг бажарган ишини билдиради.*

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги қонунларга бўйсунади:

1. Скаляр кўпайтма *ўрин алмаштириш қонунига бўйсунади*, яъни

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

Ҳақиқатан, скаляр кўпайтма таърифига кўра:

$$\boldsymbol{AB} = AB\cos(\widehat{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}}),$$

$$\boldsymbol{BA} = BA\cos(\widehat{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}}).$$

Демак,

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

2. *Скаляр кўпайтувчига нисбатан скаляр кўпайтма группалаш қонунига бўйсунади*:

$$(\boldsymbol{AB})\lambda = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\lambda) = (\boldsymbol{A}\lambda)\boldsymbol{B},$$

яъни скаляр кўпайтмани бирор λ сонга кўпайтириш (ёки бўлиш) учун векторларнинг бирини λ га кўпайтириш (ёки бўлиш) етарли.

Ҳақиқатан,

$$(\boldsymbol{A}\cdot\lambda)\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\lambda).$$

Аммо,

$$\text{пр}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}\cdot\lambda) = \text{пр}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\cdot\lambda.$$

Демак,

$$(\boldsymbol{A}\lambda)\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|\text{пр}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\cdot\lambda = (\boldsymbol{AB})\cdot\lambda.$$

$(\boldsymbol{AB})\lambda = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\lambda)$ тенглик ҳам шунга ўхшаш исбот этилади.

3. *Скаляр кўпайтма тақсимот қонунига бўйсунади, яъни ҳар қандай учта A, B, C вектор учун*

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$$

айният ўринли. Бу қонуннинг тўғри эканлигини исбот қилиш учун (15) тенгликдан фойдаланамиз:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = C\text{пр}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$$

ёки

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = C\text{пр}_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{A} + C\text{пр}_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}.$$

4. *A, B векторлар бир-бирига перпендикуляр бўлса ёки уларнинг камида биттаси ноль вектор бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг ва, аксинча.*

Ҳақиқатан, скаляр кўпайтманинг таърифига мувофиқ:

$$\boldsymbol{AB} = AB\cos\varphi.$$

Бу тенгликда $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ векторлар орасидаги φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса,

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Шунинг учун $\boldsymbol{AB} = 0$. Агар $A = 0$ ёки $B = 0$ бўлса, айтилган хосса ўз-ўзидан равшан.

Аксинча, агар

$$\boldsymbol{AB} = AB\cos\varphi = 0$$

бўлса, бундан ё $A = 0$, ё $B = 0$ ёки

$$\cos\varphi = 0, \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

келиб чиқади.

Хусусий ҳол: агар $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ бўлса, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$.

Биз $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}^2$ деб ишоралаймиз ва $\boldsymbol{A}^2$ ни $\boldsymbol{A}$ векторнинг *скаляр квадрати* деб атаймиз. Демак $\boldsymbol{A}^2 = A^2$.

1- мисол. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлар

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$$

тенгликни қаноатлантирувчи учта бирлик вектор.

$$\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ac}$$

скаляр кўпайтмалар йиғиндиси ҳисоблансин.

Ечиш. Скаляр кўпайтманинг тақсимот қонунига асосан $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$ тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{ab} + 2\boldsymbol{ac} + 2\boldsymbol{bc} = 0.$$

Лекин,

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\ \cos 0^\circ = a^2 = 1,\ \boldsymbol{b}^2 = b^2 = 1,\ \boldsymbol{c}^2 = c^2 = 1,$$

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 = 3.$$

Шунинг учун

$$\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} = -\frac{3}{2}.$$

2- мисол. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ вектор битта бошланғич нуқтага келтирилгандан кейин $\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{b}$ векторнинг учлари орасидаги масофа $\boldsymbol{a}$ билан $\boldsymbol{c}$ вектор учлари орасидаги масофага тенг бўлса, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}$ вектор билан $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ векторлар ўзаро перпендикуляр экани исботлансин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $BA = CA$ (106- чизма) йўналган BA ва CA кесмаларни векторлар деб қараймиз. Бу ҳолда

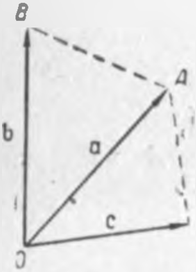
$$BA = a - b$$

$$\overrightarrow{CA} = a - c.$$

Бу тенгликларнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз.

$$\overrightarrow{BA}^2 = (a - b)^2, \quad \overrightarrow{CA}^2 = (a - c)^2$$

чап томондаги $\overrightarrow{BA}^2$, $\overrightarrow{CA}^2$ векторларнинг скаляр квадратларини билдиргани учун уларни узунликларининг квадратлари билан алмаштириш мумкин ($A^2 = A^2$ ни эсланг).



106- чизма.

$$BA^2 = (a - b)^2; \quad CA^2 = (a - e)^2.$$

Масаланинг шартига қараганда

$$(a - b)^2 = (a - c)^2,$$

ёки

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = 0,$$

чап томондаги квадратлар айирмасини кўпайтувчиларга ажратамиз

$$(2a - b - c)\ (c - b) = 0$$

ёки

$$(b + c - 2a)\ (b - c) = 0.$$

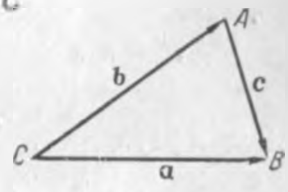
Демак $b + c - 2a$ вектор билан $b - c$ вектор ўзаро перпендикуляр.

3- мисол. ABC учбурчак берилган: $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{CA} = b$, $\overrightarrow{CB} = a$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

экани кўрсатилсин (107- чизма).

Ечиш. Учбурчак томонларини (шаклда кўрсатилгандек) векторлар деб қабул қиламиз. Бу ҳолда



107- чизма.

$$c = a - b$$

Иккала томонни квадратга кутарамиз:

$$c^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

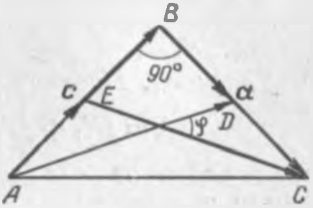
ёки

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

4- мисол. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг ўткир бурчаклари учларидан ўтказилган медианалари орасидаги ўткир бурчак топилсин.

Ечиш. $\triangle ABC$ да: $\angle B = 90^\circ$, $AB = BC$ бўлсин. Учбурчак томонларида 108- чизмада кўрсатилгандек векторлар оламиз. Бу ҳолда шаклдан

$$\overrightarrow{AD} = c + \frac{a}{2}, \quad \overrightarrow{EC} = \frac{c}{2} + a.$$



108- чизма.

Скаляр кўпайтма таърифига кўра

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = AD \cdot EC \cos \varphi.$$

бунда φ медианалар орасидаги ўткир бурчак

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC}}{AD \cdot EC}.$$

Аммо

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(c + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{2} + a\right) = \frac{c^2}{2} + ac + \frac{ac}{4} + \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2c^2 + 5ac + 2a^2\right].$$

a, c вектор ўзаро перпендикуляр бўлгани учун $ac = 0$.

Бундан ташқари учбурчак тенг ёнли, демак,

$$c = a; \; 2c^2 + 2a^2 = 4a^2.$$

Буларни юқоридаги тенгликка қўйиб,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EC} = a^2$$

эканини топамиз. Демак, тенг ёнли учбурчакда ўткир бурчаклар учларидан ўтказилган медианалар бир-бирига тенг:

$$AD = EC.$$

Бундан,

$$AD \cdot EC = AD^2.$$

Лекин

$$AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 = c^2 + ac + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2.$$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$ ва $AD \cdot EC$ ларнинг қийматларини эътиборга олиб, $\cos \varphi$ ни ҳисоблаймиз:

$$\cos\varphi = \frac{a^2}{\frac{5}{4}a^2} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Демак,

$$\varphi = 36^\circ\,52'.$$

60-§. ПРОЕКЦИЯЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

Теорема. *Проекциялари билан берилган*

$$\mathrm{A} = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1, \ \mathrm{B} = \mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2$$

векторларнинг скаляр кўпайтмаси бу векторларнинг бир номли проекциялари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$\boldsymbol{AB} = X_1X_2 + У_1У_2 + Z_1Z_2$$

Исбот. $\boldsymbol{A}$ ва $\boldsymbol{B}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини тузамиз:

$$\boldsymbol{AB} = (\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1)(\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавсларни скаляр кўпайтманинг тақсимот қонунига мувофиқ очамиз:

$$\boldsymbol{AB} = \mathbf{ii}X_1X_2 + \mathbf{ij}X_1Y_2 + \mathbf{ik}X_1Z_2 + \mathbf{ji}Y_1X_2 + \mathbf{jj}Y_1Y_2 + \mathbf{jk}Y_1Z_2 + \\ + \mathbf{ki}Z_1X_2 + \mathbf{kj}Z_1U_2 + \mathbf{kk}Z_1Z_2.$$

Аммо

$$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1\cdot 1\cos 0^\circ = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{ik} = \mathbf{ki} = \mathbf{jk} = 0,$$

чунки

$$\mathbf{ij} = \mathbf{ij}\cos\varphi = \mathbf{ij}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Демак,

$$\boldsymbol{AB} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \qquad (16)$$

Теорема исбот бўлди.

Агар $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ бўлса, у ҳолда мос проекциялар ҳам тенг бўлади, яъни

$$X_1 = X_2, \ Y_1 = Y_2, \ Z_1 = Z_2.$$

Бу ҳолда (16) тенглик A векторнинг узунлиги учун

$$A^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 \qquad (16')$$

ёки

$$A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}. \qquad (16'')$$

ҳолга келади. Бу формулани биз юқорида 58- § да бошқа йўл билан ҳосил қилган эдик.

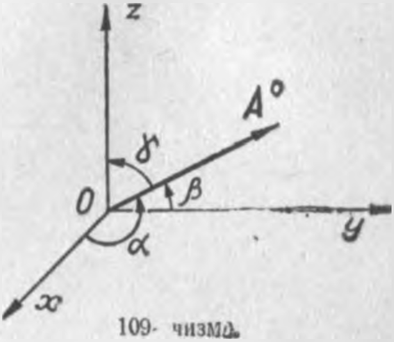
Агар бирлик вектор $\mathbf{A}^\circ\{X, Y, Z\}$ нинг Ox, Oy ва Oz ўқлар билан ҳосил қилган бурчакларини мос равишда α, β, γ билан белгиласак (109- чизма), у ҳолда

$$X = 1\cos\alpha,\ Y = 1\cos\beta,\ Z = 1\cdot\cos\gamma \text{ бўлади.}$$

(16) формулага асосан

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (17)$$

келиб чиқади. $\mathbf{A} = A\mathbf{A}^\circ$ бўлгани учун $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\mathbf{A}$ векторнинг фазодаги йўналишини белгилайди ва унинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади. $\mathbf{A}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари (17) муносабат билан боғланган.



109- чизма.

$\mathbf{A}^\circ$ бирлик векторни ортлар бўйича ёйсак, бу вектор

$$\mathbf{A}^\circ = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$$

шаклда ёзилади.

Агар $\mathbf{A}$ вектор билан $\mathbf{B}$ вектор орасидаги бурчакни φ билан белгиласак, скаляр кўпайтманинг таърифига кўра,

$$\mathbf{AB} = AB\cos\varphi$$

бу тенгликдан

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{AB}}{AB}$$

(16′) ва (16″) тенгликларга кўра

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \qquad (18)$$

Бу тенглик проекциялари билан берилган икки вектор орасидаги бурчакни аниқлаш формуласи дейилади.

Агар $\mathbf{B}$ векторнинг йўналиши абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан бир хил бўлса, $\mathbf{B} = \mathbf{i}$ деб фараз қилиш мумкин. Бу ҳолда $\varphi = \alpha$ ($\mathbf{A}$ вектор билан Ox ўқ орасидаги бурчак) ва $\mathbf{B}^\circ$ векторнинг проекциялари $X_2 = 1$, $Y_2 = Z_2 = 0$ бўлади. Бунга кўра (18) формуладан $\cos\alpha$ ни топсак:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{Ai}}{A} = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} \qquad (19)$$

бўлади.

Шунга ўхшаш $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}$ деб фараз қилсак, $\cos\beta$ ва $\cos\gamma$ ни топамиз:

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}}{A} = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} \qquad (19')$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{k}}{A} = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}$$

Агар $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\circ$ ва $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\circ$ деб фараз қилсак, бу векторларнинг проекциялари уларнинг йўналтирувчи косинусларига тенг бўлади:

$$X_1 = \cos\alpha_1, \ Y_1 = \cos\beta_1, \ Z_1 = \cos\gamma_1,$$
$$X_2 = \cos\alpha_2, \ Y_2 = \cos\beta_2, \ Z_2 = \cos\gamma_2.$$

(18) формуладан фойдаланиб $\boldsymbol{A}^\circ$ ва $\boldsymbol{B}^\circ$ векторлар орасидаги бурчакни йўналтирувчи косинуслар орқали ифодалай оламиз:

$$\cos\varphi = \boldsymbol{A}^\circ\boldsymbol{B}^\circ = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (20)$$

Агар $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ булса, $\cos\gamma = 0$. (18) ва (20) формулалар икки векторнинг бир-бирига перпендикулярлик шартини беради. Ҳақиқатан ҳам бу ҳолда (18) формуладан:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0;$$

(20) формуладан:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0 \text{ бўлади.}$$

1-мисол. $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ ва $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Бу мисолда $X_1 = 3$, $Y_1 = -1$, $Z_1 = 5$, $X_2 = 1$, $Y_2 = 2$, $Z_2 = 2$. Векторлар орасидаги бурчакни φ деб белгилаймиз.

(18) формуладан фойдаланиб $\cos\varphi$ ни топамиз:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot3 + (-1)\cdot2 + 5\cdot2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{11}{\sqrt{35\cdot3}}.$$

Демак,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{11}{3\sqrt{35}}\right).$$

2-мисол. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ векторнинг бирлик вектори топилсин.

Ечиш. Бирлик вектор

$$\boldsymbol{B}^\circ = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$$

шаклда ёзилишини биз юқорида кўрдик. Масалани ечиш учун йўналтирувчи косинусларни топишимиз керак; (19) ва (19′) формулалардан фойдаланиб уларни аниқлаймиз:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3};$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3};$$

демак, берилган B векторнинг бирлик вектори $B^\circ = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$. Йуналтирувчи косинуслар (17) муносабатни қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

3- мисол. 1- мисолда берилган A векторнинг B вектор йўналишида олинган проекцияси топилсин.

Ечиш. Скаляр кўпайтманинг проекциялар билан берилган таърифига кўра:

$$AB = B\,\text{пр}_B A$$

бу тенгликдан

$$\text{пр}_B A = \frac{AB}{B},$$

(16) ва (16″) формулаларга мувофиқ

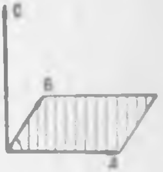
$$\text{пр}_B A = \frac{3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 5\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{11}{3} = 3\,\frac{2}{3}.$$

61- §. ИККИ ВЕКТОРНИНГ ВЕКТОР КУПАЙТМАСИ

Икки A, B векторни бир-бирига скаляр кўпайтириш натижасида сон (скаляр) ҳосил бўлишини биз кўрдик.

A, B векторни бир-бирига кўпайтириш натижасида вектор ҳосил бўлиши ҳам мумкин.

Икки A, B векторнинг вектор кўпайтмаси деб шундай C векторга айтиладики, бу вектор A, B векторларга перпендикуляр бўлиб, унинг модули A ва B векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг, йўналиши эса C векторнинг C учидан қараганда C вектор атрофида A вектордан B векторга энг кичик бурчак билан айланиши соат стрелкасига тескари бўлиши керак (110- чизма).



110- чизма.

A вектор билан B векторнинг вектор кўпайтмаси $A\times B$ ёки $[AB]$ шаклда ёзилада ва A билан B векторнинг вектор кўпайтмаси деб ўқилади. Таърифга кўра бу кўпайтма

$$C = [AB].$$

Бу векторнинг узунлиги A ва B векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг, яъни

$$C = |[AB]| = AB\sin(\widehat{A, B}),$$

бундан

$$\widehat{AB}<\pi.$$

Бу тенгликдан A вектор билан B вектор коллинеар бўлганида ёки бу векторларнинг камида биттаси ноль вектор бўлган ҳолдагина A, B нинг вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлиши равшан кўринмоқда. Ҳақиқатан, агар $A \parallel B$ бўлса $\widehat{A, B} = 0$ ва $\sin(\widehat{AB}) = 0$, бу ҳолда

$$C = AB\sin 0° = A\cdot B\cdot 0 = 0.$$

Агар $A = 0$ ёки $B = 0$ бўлса, айтилган хосса равшан. Аксинча, агар

$$C = AB\sin(\widehat{A, B}) = 0$$

бўлса, бундан, ё

$$\sin(\widehat{A, B}) = 0;\ A \parallel B,$$

ё

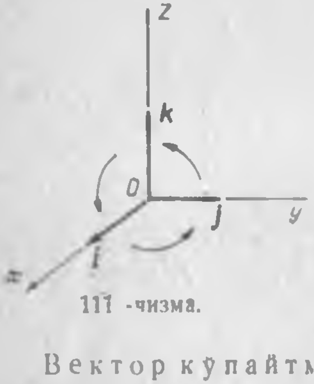
$$A = 0 \text{ ёки } B = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

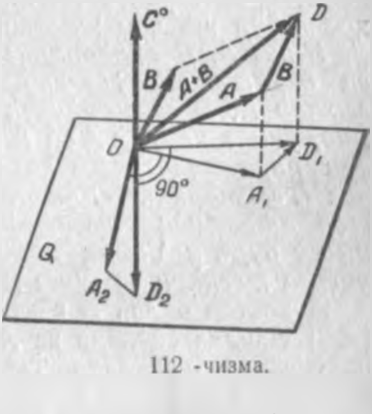
Агар A вектор билан B вектор ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда улар вектор кўпайтмасининг сон қийматлари кўпайтмасига тенг, чунки бу ҳолда $\sin(A, B) = 1$ булади.

Хусусий ҳолда (111- чизма)

$$[i\cdot j] = k;\ [j\cdot k] = i;\ [k\cdot i] = j.$$



111 -чизма.



112 -чизма.

Вектор кўпайтма қуйидаги қонунларга бўйсунади:

1. *Вектор кўпайтмадаги купайтувчилар урнини алмаштирса, вектор кўпайтма (— 1) га кўпаяди*

$$[AB] = -[BA].$$

Ҳақиқатан, агар A, B вектор бир-бирига коллинеар бўлса, $[AB] = 0$. $[BA] = 0$, бу ҳолда $[AB] = -[BA]$.

Энди A, B вектор бир бирига коллинеар эмас деб фараз қилайлик. Бу ҳолда икки векторнинг вектор кўпайтмаси таърифига кўра $[AB]$ ҳамда $[BA]$ векторларнинг сон қиймати A ва B векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг бўлгани учун бир хил; икки векторнинг вектор кўпайтмасини тасвирловчи вектор йўналишини аниқлаш шартига кўра (209- бетдаги таърифга қаранг) $[AB]$ ва $[BA]$ векторлар бир-бирига қарама-қарши йўналган. Демак,

$$[AB] = -[BA]$$

2. *Скаляр кўпайтувчига нисбатан вектор кўпайтма группалаш қонунига бўйсунади,* яъни

$$[A\lambda,\ B] = [A,\ \lambda B] = \lambda[AB].$$

Ҳақиқатан, A ёки B векторни λ га кўпайтириш, A ва B векторлардан ясалган параллелограммнинг A ёки B томонини λ марта „чўзиш“ демакдир. Бу эса параллелограмм юзининг λ марта „катталашганини“ билдиради.

3. *A, B векторлар йиғиндиси билан C векторнинг вектор кўпайтмаси тақсимот қонунига бўйсунади, яъни*

$$[(A + B)C] = [AC] + [BC].$$

Ҳақиқатан ҳам C ноль вектор бўлса, бу тенгликнинг бажарилиши равшан. Шунинг учун $C \neq 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда $C = C \cdot C^\circ$ деб ёзиш мумкин.

A, B ва C° векторларни умумий O нуқтага келтирамиз (112- чизма) ҳамда C° векторга перпендикуляр Q текислик ўтказамиз. A, B векторлардан параллелограмм чизиб, $A + B$ йиғинди векторни топамиз.

Энди A ҳамда $A + B = \overrightarrow{OD}$ векторларнинг Q текисликка проекцияларини оламиз:

$$\text{пр}_Q A = OA_1,\ \text{пр}_Q(A + B) = OD_1$$

$\overrightarrow{OA_1}$ ва $\overrightarrow{OD_1}$ векторларни O нуқта атрофида соат стрелкаси йўналиши бўйича 90° бурамиз. Натижада $\overrightarrow{OA_1}$ вектор Q текисликдаги $\overrightarrow{OA_2}$ векторнинг, $\overrightarrow{OD_1}$ вектор эса $\overrightarrow{OD_2}$ векторнинг вазиятини олиб (112- чизма) уларнинг узунликлари ўзаро тенг бўлади.

$$OA_2 = OA_1,\ OD_2 = OD_1.$$

Агар $\overline{OA}$ билан C° орасидаги бурчакни φ билан белгиласак,

$$OA_2 = OA_1 = OA\cos(90^\circ - \varphi) = OA\sin\varphi = [AC^\circ],$$

чунки $\overrightarrow{OA_2}$ вектор $[AC^\circ]$ вектор кўпайтма таърифининг шартларини қаноатлантиради; уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан:

$$\angle A_2CC^\circ = \angle A_2OA = \frac{\pi}{2}.$$

Шунинг учун, $\overrightarrow{OA_2}$ вектор, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC^\circ}$ векторлар текислигига перпендикуляр ва A_2 дан қараганда A дан C° га энг кичик бурчак билан бурилиш соат стрелкасига тескари йўналишда бўлади. Шундай қилиб,

$$\overrightarrow{OA_2} = [AC^\circ].$$

Шунга ўхшаш

$$\overrightarrow{OD_2} = [DC^\circ] = [(A + B)\, C^\circ].$$

$$\overrightarrow{A_2D_2} = [\overrightarrow{AD}C^\circ] = [BC^\circ].$$

Аммо шаклдан

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2D_2}$$

эканини кўрамиз, яъни

$$[(A + B)\, C^\circ] = [AC^\circ] + [BC^\circ].$$

Бу тengликнинг иккала томонини C скалярга кўпайтирамиз:

$$[(A + B)\, CC^\circ = [AC^\circ C] + [BC^\circ C]$$

ёки

$$[(A + B)\, C] = [AC] + [BC].$$

Тақсимот қонунининг тўғри экани исбот бўлди. Шунга ўхшаш

$$[C\,(A + B)] = [CA] + [CB]$$

эканини исбот қилиш қийин эмас.

113 -чизма.

1- мисол. $A\,(r)$ нуқтага F куч таъсир этади. Агар $r = 4a - b$, $F = a + 3b$ бўлса, F кучнинг O нуқтага нисбатан моменти ҳисоблансин.

Ечиш. O нуқта билан F кучни ўз ичига оладиган текисликка перпендикуляр йўналган вектор F кучнинг O нуқтага нисбатан моменти дейилади, бу вектор учидан текисликка қараганда F куч таъсирида айланиш соат стрелкасига тескари йўналишда бўлади (113- чизма). Куч моментини M билан белгиласак, унинг сон қиймати $M = Fp$ тенглик билан аниқланади, бу ерда O нуқтадан F гача бўлган масофа p дир.

Энди $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{F}$ векторлардан параллелограмм ясасак, унинг баландлиги p булади; шунинг учун $\mathbf{F}\cdot p$ купайтма параллелограмм юзини ифодалайди. Демак,

$$\mathbf{M}=|\mathbf{rF}|.$$

Шундай қилиб, ***F куч таъсир этган нуқтанинг радиус-вектори билан F кучнинг вектор кўпайтмаси кучнинг нуқтага нисбатан моментига тенг.***

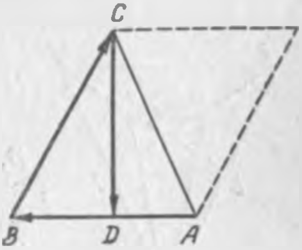
Масалада талаб қилинган моментни ҳисоблаш учун $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{F}$ векторлар ўрнига, уларнинг $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ орқали ифодаларини қўйиб, тақсимот қонунидан фойдаланамиз:

$$\mathbf{M}=|\mathbf{rF}|=[(4\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}+3\mathbf{b})]=4[\mathbf{aa}]-[\mathbf{ba}]+12[\mathbf{ab}]-$$
$$-3[\mathbf{bb}]=13[\mathbf{ab}],$$

чунки

$$[\mathbf{aa}]=[\mathbf{bb}]=0,\ [\mathbf{ba}]=-[\mathbf{ab}].$$

2- мисол. Учбурчакнинг икки томони берилган: $\overrightarrow{BC}=2p+5q$, $\overrightarrow{AB}=5p-4q$, бу ерда $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ўзаро перпендикуляр ортлар. Бу учбурчакнинг CD баландлиги топилсин (114- чизма).



114- чизма.

Ечиш. Вектор кўпайтманинг тақсимот қонунига мувофиқ:

$$[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]=[(5p-4q)\ (2p+5q)]=$$
$$=10[pp]+25[pq]-$$
$$-8[qp]-20[qq];$$

аммо

$$[pp]=[qq]=0;\ [qp]=-[pq]$$

бўлгани учун

$$[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]=33[pq].$$

$[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]$ вектор кўпайтманинг сон қиймати $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг. Бундан берилган учбурчакнинг S юзи вектор кўпайтма сон қийматининг ярмига тенг:

$$S=\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]|=\frac{33}{2}\,|[pq]|=\frac{33}{2}\,pq\sin(\widehat{pq})$$

ёки $p=1$, $q=1$, $\sin(\widehat{p,q})=\sin 90^\circ=1$, чунки $p\perp q$ бўлгани учун

$$S=\frac{33}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=16\frac{1}{2}\ \text{кв. бирлик.}$$

Энди AB томон узунлигини аниқлаймиз:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5p)^2 + (-4q)^2} = \sqrt{25p^2 + 16q^2} = \sqrt{41}.$$

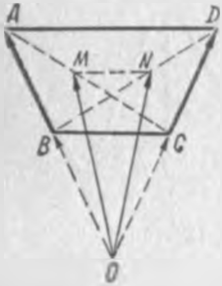
Учбурчак юзини бошқача оламиз:

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}| = \frac{33}{2};$$

бу тенгликдан

$$|\overrightarrow{CD}| = \frac{33}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{33}{\sqrt{41}}.$$

3- мисол. $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва DC томонлари O нуқтада кесишгунча давом эттирилган. Агар AC ва BD диагоналларнинг ўрталарини мос тартибда M ва N нуқталар билан белгиласак, OMN учбурчакнинг юзи $ABCD$ тўртбурчак юзининг тўртдан бирини ташкил қилиши исботлансин (115- чизма).



115- чизма.

Исбот. O нуқтани қутб деб олиб A, B, C, D, M, N нуқталарнинг бу қутбга нисбатан радиус-векторларини мос тартибда $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{r}_D$, $\mathbf{r}_M$ ва $\mathbf{r}_N$ билан белгилаймиз. $ABCD$ тўртбурчак юзи OAD ва OBC учбурчак юзларининг айирмасига тенг:

$$S_{ABCD} = S_{OAD} - S_{OBC}.$$

Бу ҳолда 2- мисолдаги каби

$$S_{AOD} = \frac{1}{2}|[\mathbf{r}_A\mathbf{r}_D]|;\ S_{BOC} = \frac{1}{2}|[\mathbf{r}_B\mathbf{r}_C]|;$$

$$S_{NOM} = \frac{1}{2}|[\mathbf{r}_M\mathbf{r}_N]|;$$

демак,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\{|[\mathbf{r}_A\mathbf{r}_D]| - |[\mathbf{r}_B\mathbf{r}_C]|\}. \qquad (*)$$

Энди $\mathbf{r}_N$ ва $\mathbf{r}_M$ векторларни $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ ва $\mathbf{r}_D$ вектор орқали ифодалаймиз. M нуқта AC нинг ўртаси, N нуқта BD нинг ўртаси бўлгани учун

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C}{2},\quad \mathbf{r}_N = \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D}{2}.$$

Демак,

$$S_{NOM} = \frac{1}{2}\left|\left[\frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C}{2}\ \cdot\ \frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D}{2}\right]\right| = \frac{1}{8}[\mathbf{r}_A\mathbf{r}_B] + [\mathbf{r}_A\mathbf{r}_D] +$$

$+ [\mathbf{r}_C\mathbf{r}_B] + [\mathbf{r}_C\mathbf{r}_D]$. Бунда $[\mathbf{r}_A\mathbf{r}_B] = [\mathbf{r}_C\mathbf{r}_D] = 0$ ни назарга олсак

$$S_{NOM} = \frac{1}{8} \left| [r_A r_D] + [r_C r_B] \right| = \frac{1}{8} \left| [r_A r_D] - [r_B r_C] \right|.$$

Бу тенглик билан (*) тенгликни таққосласак

$$S_{ABCD} = 4S_{NOM}$$

экани кўринади.

62-§. ПРОЕКЦИЯЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР КУПАЙТМАСИ

$\mathbf{A}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ ва $\mathbf{B}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг вектор кўпайтмасини топамиз:

$$[\mathbf{AB}] = [\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1][\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2].$$

Вектор кўпайтманинг тақсимот қонунига кўра ўнг томондаги қавсларни очамиз: $[\mathbf{AB}] = [\mathbf{ii}]X_1X_2 + [\mathbf{ij}]X_1Y_2 + [\mathbf{ik}]X_1Z_2 + [\mathbf{ji}]Y_1X_2 + [\mathbf{jj}]Y_1Y_2 + [\mathbf{jk}]Y_1Z_2 + [\mathbf{ki}]Z_1X_2 + [\mathbf{kj}]Z_1Y_2 + [\mathbf{kk}]Z_1Z_2.$ (21)

Аммо

$$[\mathbf{ii}] = [\mathbf{jj}] = [\mathbf{kk}] = 0; \quad [\mathbf{ij}] = \mathbf{k}, \ [\mathbf{ji}] = -\mathbf{k}.$$

Шунга ўхшаш

$$[\mathbf{jk}] = -[\mathbf{kj}] = \mathbf{i}; \quad [\mathbf{ki}] = -[\mathbf{ik}] = \mathbf{j}.$$

Буни эътиборга олиб, (21) ифодани $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ лар бўйича ёйиб чиқамиз:

$$[\mathbf{AB}] = \mathbf{i}(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + \mathbf{j}(Z_1X_2 - X_1Z_2) + \mathbf{k}(X_1Y_2 - Y_1X_2). \quad (22)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавслар ичидаги ифодаларни иккинчи тартибли детерминантлар деб қарасак, у ҳолда ўнг томон учинчи тартибли детерминантни беради, яъни

$$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (22')$$

(22) тенгликдан $(\mathbf{AB})$ вектор кўпайтмани тасвирловчи векторнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$Y_1Z_2 - Z_1Y_2; \ Z_1X_2 - X_1Z_2 \ \text{ва} \ X_1Y_2 - Y_1X_2$$

бўлишини кўрамиз.

Агар $[\mathbf{AB}] = 0$ бўлса, ноль векторнинг проекциялари ҳам ноль бўлгани учун

$$Y_1Z_2 - Z_1Y_2 = 0, \ Z_1X_2 - X_1Z_2 = 0 \ \text{ва}$$
$$X_1Y_2 - Y_1X_2 = 0,$$
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \ \text{булади.}$$

Аксинча агар (23) муносабат ўринли бўлса, у ҳолда

$$A\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\ B\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$$

векторларнинг вектор кўпайтмаси ҳам нолга тенг бўлади.

Шундай қилиб, *агар A, B векторлар коллинеар (бир-бирига параллел) бўлса, уларнинг мос проекциялари пропорционал ва, аксинча.*

1- мисол. Томонлари $A = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ва $B = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ векторлар бўлган параллелограммнинг юзи топилсин.

Ечиш. Икки векторнинг вектор кўпайтмасининг таърифига кўра $[AB]$ нинг сон қиймати томонлари A ва B векторлар бўлган параллелограммнинг юзига тенг. Демак, изланаётган параллелограмм юзини S билан белгиласак,

$$S = |[AB]|.$$

Аммо (22′) га кўра

$$[AB] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 19\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 13\mathbf{k}.$$

Демак,

$$S = |[AB]| = \sqrt{19^2 + (-9)^2 + (-13)^2} =$$
$$= \sqrt{611} \approx 24{,}7 \text{ кв. бирлик.}$$

2- мисол. Учлари мос равишда $A(3,\ 2,\ 4)$, $B(1,\ -4,\ 2)$ ва $C(4,\ 1,\ -3)$ нуқталар бўлган фазовий учбурчакнинг юзи топилсин.

Ечиш. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг вектор кўпайтмасининг сон қиймати бу векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг, шунинг учун учбурчак юзи бу вектор кўпайтма модулининг ярмига тенг бўлади, яъни

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]|.$$

Бизнинг мисолимизда.

$$\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Демак,

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 40\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 8\mathbf{k};$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{40^2 + 16^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1920}$$

ёки

$$S_\Delta = 4\sqrt{30} \text{ кв. бирлик.}$$

3- мисол. $\boldsymbol{A}\{3,\ 4,\ -3\}$ ва $\boldsymbol{B}\{1,\ 2,\ 3\}$ векторлар берилган. $[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{C}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари топилсин.

Ечиш. Вектор купайтма тузамиз:

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{AB}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ёки

$$\boldsymbol{C} = 18\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Демак,

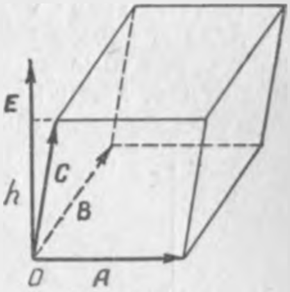
$$\boldsymbol{C}\{18,\ -12,\ 2\}.$$

63- §. УЧ ВЕКТОРНИНГ АРАЛАШ КУПАЙТМАСИ

Учта $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ вектор берилган бўлсин. $[\boldsymbol{AB}]$ вектор кўпайтма билан $\boldsymbol{C}$ векторни *скаляр кўпайтириш* ёки *вектор кўпайтириш* мумкин. Биринчи ҳолда купайтма *аралаш кўпайтма* дейилади ва

$$[\boldsymbol{AB}]\boldsymbol{C} \text{ ёки } (\boldsymbol{ABC}) \text{ ёки } \boldsymbol{ABC}$$

курининшда ёзилади.



116- чизма.

$[\boldsymbol{AB}]$ векторни $\boldsymbol{C}$ вектор билан вектор купайтмаси *қуш вектор кўпайтма* дейилади ва

$$[\boldsymbol{AB}] \times \boldsymbol{C}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$$

кўринишда ёзилади.

Бу параграфда аралаш кўпайтма билан танишамиз. $(\boldsymbol{AB})$ вектор кўпайтма вектор бўлади, бу вектор билан $\boldsymbol{C}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси скаляр булади. Шундай қилиб, $[\boldsymbol{AB}]\,\boldsymbol{C}$ скаляр миқдордир. Бу скаляр миқдорнинг қийматини билиш учун $[\boldsymbol{AB}]\,\boldsymbol{C}$ аралаш кўпайтманинг геометрик томондан текширамиз. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ векторлар компланармас векторлар бўлсин.

$[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{E}$ деб фараз қилсак, $\boldsymbol{E}$ вектор $\boldsymbol{A}$ ва $\boldsymbol{B}$ векторлардан ясалган параллелограмм текислигига перпендикуляр вектор бўлиб, унинг сон қиймати бу параллелограмм юзига тенг (116- чизма). $[\boldsymbol{AB}]\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{EC}$ бўлгани учун скаляр кўпайтма таърифига кўра

$$\boldsymbol{EC} = E\,\text{пр}_{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{C}$$

Аммо

$$\text{пр}_E C = h$$

A, B, C векторлардан ясалган параллелепипеднинг баландлигини тасвирлайди; уни h билан белгилаймиз (C билан E орасидаги бурчак ўткир бурчак бўлса h баландлик плюс ишора билан, ўтмас бурчак бўлса минус ишора билан олинади).

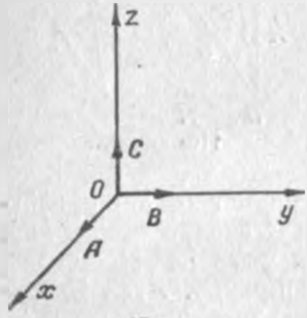
Шунинг учун

$$EC = E\text{пр}_E C = \pm Eh$$

кўпайтма абсолют қийматига кўра параллелепипед асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасини, яъни параллелепипеднинг ҳажмини билдиради.

Бу ҳажм векторларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаганда плюс ёки минус ишорали бўлади. Агар E вектор билан C вектор A ва B векторлар текислигининг бир томонига жойлашган бўлса, E билан C орасидаги бурчак ўткир бурчак булиб, параллелепипед ҳажми плюс ишорали бўлади. Бу ҳолда E ёки C векторнинг учидан A, B векторлар текислигига қараганда A дан B га энг кичик бурчак билан бурилиш соат стрелкасининг ҳаракатига тескари йўналишда булади: бошқача айтганда, A, B, C векторлар $Oxyz$ "ўнг" Декарт системаси билан бир номли сестема ҳисил қилади.

Агар E вектор билан C вектор A, B векторлар текислигининг турли томонларида ётса, E билан C орасидаги бурчак ўтмас бўлиб, ҳажм минус ишорали булади. Бу ҳолда A, B, C тартибда олинган векторлар асосий $Oxyz$ система билан турли номли система ҳосил қилади.



117 -чизма.

Энди аралаш кўпайтманинг асосий хоссалари билан танишамиз:

1. *Купайтмада икки қушни вектор урни алмаштирилса, аралаш купайтма ишорасини тескарисига алмаштиради.*

$$[AB]C = -[BA]C;$$
$$[AB]C = -[AC]B;$$
$$[AB]C = -[CB]A \qquad \text{ва ҳ. к.}$$

Ҳақиқатан ҳам A, B, C векторлар Ox, Oy, Oz ўқларининг жойланиш тартибида олинган бўлсин (117- чизма).

Бу ҳолда A вектордан B вектор йўналишига ўтиш, B дан C га, C дан A вектор йўналишига утиш Ox дан Oy ўққа, Oy дан Oz га, Oz уқдан Ox уққа ўтиш каби бажарилади, яъни A, B, C векторлар асосий система билан бир номли системани ташкил қилади. B, A, C; A, C, B; C, B, A тартибда олинган векторлардан бундай бурилишлар асосий системадаги соат стрелкаси йўналишда бўлади ва асосий система билан турли номли система ҳосил қилади, демак, бу тартибда тузилган аралаш кўпайтма $|AB|\,C$ аралаш кўпайтма ишорасига тескари булади.

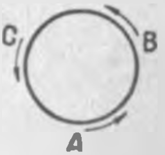
2. A, B, C *векторларнинг ўринлари доиравий циклда алмаштирилса, аралаш кўпайтма ишорасини ўзгартмайди* (118- чизма), яъни

$$[AB]\,C = [BC]\,A = [CA]\,B.$$

Ҳақиқатан ҳам бу ҳолда ҳосил бўладиган векторлар асосий система векторлари билан ҳамма вақт бир номли бўлиши 117 ва 118- чизмалардан яққол кўринади.

3. Агар A, B, C *векторлардан исталган иккитаси бир-бирига тенг ёки параллел (коллинеар) бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, хусусий ҳолда*

$$[AA]\,B = [AB]\,A = [BA]\,A = 0.$$



118 -чизма.

Ҳақиқатан, A вектор билан B вектор параллел бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг, яъни

$$[AB]\,C = [AA]\,C = 0.$$

Бу тенгликдаги $[AB]C$ аралаш кўпайтмада A, B, C векторнинг ўринларини ҳар қандай алмаштирганимизда ҳам кўпайтма ишорасини ё ўзгартиради ёки ўзгартирмайди, аммо унинг сон қиймати бир хиллигича (ноллигича) қолади.

4. *Агар A, B ва C векторлар компланар векторлар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.*

Ҳақиқатан, бу ҳолда A, B, C векторлар бир текисликда ётади дейиш мумкин, шунинг учун $[AB]$ вектор кўпайтма A ва B векторлар ётган текисликка перпендикуляр, бу демак C векторга перпендикуляр. Векторлар перпендикуляр бўлганда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг булишини биламиз. Бундан

$$[AB]C = 0$$

экани келиб чиқади.

Аксинча, агар

$$[AB]C = 0$$

булса, $[AB]$ вектор билан C вектор бир-бирига перпендикуляр бўлади, аммо $[AB]$ вектор кўпайтма A векторга ҳам B векторга ҳам перпендикуляр бўлгани учун A, B, C векторлар компланар векторлардир.

Шундай қилиб, *A*, *B*, *C* *векторларнинг компланар бўлиши учун*

$$[AB]C = 0 \qquad (24)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

1- мисол. Агар *a*, *b*, *c* векторлар компланармас векторлар бўлса,

$$\left[\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\right]\frac{c+b}{2} = \frac{1}{4}abc$$

экани исботлансин ва бу тенгликнинг геометрик маъноси тушунтирилсин.

Ечиш. Дастлаб тенгликнинг чап томонидаги вектор кўпайтмага тақсимот қонунини қўллаймиз:

$$\left[\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\right]\frac{c+a}{2} = \frac{1}{4}\{[ab]+[ac]+[bb]+[bc]\}\frac{c+a}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\{[ab]+[ac]+[bc]\}(c+a).$$

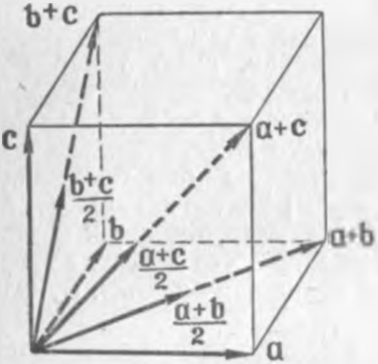
Энди чап томонга яна тақсимот қонунини қўллаймиз:

$$\left[\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\right]\frac{c+a}{2} = \frac{1}{8}\{[ab]c+[ab]a+[ac]c+[ac]a+$$

$$+[bc]c+[bc]a\} = \frac{1}{8}\cdot 2[ab]c = \frac{1}{4}abc;$$

чунки аралаш кўпайтманинг 3- хоссасига мувофиқ $[ab]a = [ac]c = [ac]a = [bc]c = 0$.

Масаланинг маъносини геометрик нуқтаи назардан билиш учун *a*, *b*, *c* векторларни қирралар деб қараб, параллелепипед ясаймиз (119- чизма), бу ҳолда $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ ва $\frac{c+a}{2}$ векторлар параллелепипед ёқларининг диагоналлари бўйича йўналган векторлар бўлиб, уларнинг узунликлари мос диагоналларнинг ярмига тенг.



119 -чизма.

Бу тенглик геометрик нуқтаи назардан қирралари *a*, *b*, *c* векторлар бўлган параллелепипеднинг *O* нуқтасидан чиққан, ёқлари диагоналларнинг ярмидан иборат векторлардан тузилган параллелепипеднинг ҳажми *a*, *b*, *c* векторлардан ясалган параллелепипед ҳажмининг тўртдан бирига тенглигини билдиради.

2- мисол. $ABCD$ тўртбурчак томонларидан учтаси

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - 2\mathbf{c}, \ \overrightarrow{BC} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c},$$

$\overrightarrow{CD} = 5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$ векторлар бўлиб, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторлар коллинеармас векторлардир; $ABCD$ тўртбурчакнинг ясси тўртбурчак экани исботлансин.

Ечиш. Тўртбурчак ясси бўлиб, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ векторлар унинг томонларини ташкил этса, бу векторлар компланар вектор бўлади. Аралаш кўпайтманинг 4- хоссасига кўра

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}]\ \overrightarrow{CD} = 0.$$

Демак, мисолда берилган векторлар учун бу тенгликнинг ўринли эканини кўрсатсак, масала ечилган бўлади. Бу кўпайтмани тузамиз ва амалларни бажарамиз:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]\,\overrightarrow{CD} &= [(\mathbf{a} - 2\mathbf{c})(3\mathbf{b} + \mathbf{c})](5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}) = \{3[\mathbf{ab}] + \\ &+ [\mathbf{ac}] - 6[\mathbf{cb}] - 2[\mathbf{cc}]\}(5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}) = \\ &= \{3[\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}] - 6[\mathbf{cb}]\}(5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}) = \\ &= 15[\mathbf{ab}]\mathbf{a} + 5[\mathbf{ac}]\mathbf{a} - 30[\mathbf{cb}]\mathbf{a} + 18[\mathbf{ab}]\mathbf{b} + \\ &+ 6[\mathbf{ac}]\mathbf{b} - 36[\mathbf{cb}]\mathbf{b} - 24[\mathbf{ab}]\mathbf{c} - 8[\mathbf{ac}]\mathbf{c} + 48[\mathbf{cb}]\mathbf{c} = \\ &= -30[\mathbf{cb}]\mathbf{a} + 6[\mathbf{ac}]\mathbf{b} - 24[\mathbf{ab}]\mathbf{c}.\end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига аралаш кўпайтманинг 1- хоссасини қўллаймиз:

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}]\ \overrightarrow{CD} = 30[\mathbf{ab}]\mathbf{c} - 6[\mathbf{ab}]\mathbf{c} - 24[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = 0.$$

Бу тенгликдан $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$ векторларнинг компланар векторлар эканлиги келиб чиқади. Аммо ҳар бир олдинги векторнинг охирги учи кейинги векторнинг бошланғич учи билан устма-уст тушгани учун бу тўртбурчак ясси (битта текисликда ётган тўртбурчак) бўлади.

64-§. ПРОЕКЦИЯЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ВЕКТОРЛАРНИНГ АРАЛАШ КУПАЙТМАСИ

$$\mathbf{A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\ \mathbf{B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},\ \mathbf{C}\{X_3,\ Y_3,\ Z_3\}$$

векторлар ўзларининг координаталари билан берилган бўлсин. Бу векторларнинг аралаш кўпайтмасини топайлик 62- § даги (22) формулага мувофиқ, $[\mathbf{AB}]$ вектор кўпайтманинг проекциялари

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$$

детерминантлардан иборат. $[AB]$ вектор билан C векторнинг скаляр купайтмаси бу векторлар мос проекциялари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг эканини биламиз. Шунинг учун

$$[AB]\,C = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$$

ёки

$$[AB]\,C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Демак, *проекциялари билан берилган учта векторнинг аралаш кўпайтмаси бу векторлар проекцияларидан тузилган учинчи тартибли детерминантга тенг.* Бу детерминантнинг устун (йул) элементлари берилган векторлар проекцияларидан векторларнинг олинган тартибида тузилади.

(24) билан (25) тенгликларни таққослаб, *A, B, C векторларнинг компланар булишининг зарурий ва етарлик шарти*

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

тенгликнинг бажарилиши билан ифодаланишини кўрамиз.

1- мисол. $A\{-1,\ 3,\ 2\}$, $B\{4,\ -6,\ 2\}$, $C\{-3,\ 12,\ 11\}$ векторлар компланар вектордир. Ҳақиқатан:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & 12 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot 0 = 0.$$

2- мисол. $A\{2,\ 3,\ 4\}$, $B\{1,\ -2,\ 2\}$, $C\{3,\ -2,\ -5\}$ векторларнинг аралаш купайтмаси топилсин.

$$[AB]\,C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = 77.$$

3- мисол. Учлари $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ ва $D(x_4,\ y_4,\ z_4)$ нуқталар булган учбурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин.

Ечиш. $[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]\,\overrightarrow{AD}$ аралаш кўпайтма битта A нуқтадан чиққан учта қирраси мос тартибда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторлар бўлган параллелепипеднинг ҳажмига тенглигини биламиз. Уч бурчакли $ABCD$ пирамиданинг ҳажми шу параллелепипед ҳажмини $\frac{1}{6}$ булагига тенгдир. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг проекциялари $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ ва $z_2 - z_1$; шунга ўхшаш $\overrightarrow{AC}$ $\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ ва $\overrightarrow{AD}$ $\{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\}$. Демак,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_п = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Ҳажмнинг мусбат сон билан ифодаланиши учун ± ишорадан бирини детерминант ишораси билан бир хил қилиб танланади.

65-§. ҚУШ ВЕКТОР КУПАЙТМА

Икки **A**, **B** векторнинг [**AB**] вектор кўпайтмасини учинчи **C** векторга вектор кўпайтириш масаласини кўрайлик. Бу кўпайтма $[\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}$ кўринишда ёзилади.

Вектор кўпайтманинг таърифига кўра [**AB**] вектор кўпайтма **A**, **B** векторлар ётган текисликка перпендикуляр вектордир. Шунга ўхшаш $[\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}$ вектор кўпайтма [**AB**] вектор билан **C** вектор текислигига перпендикуляр векторни билдиради ва, демак, $[\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}$ вектор **A** ва **B** векторлар текислигида ётади.

$[\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}$ вектор кўпайтма *қўш вектор купайтма* деб аталади.

Қўш вектор кўпайтмани ҳисоблашда қулай форма топиш мақсадида $[\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}$ ни **D** билан белгилаймиз:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{AB}] \times \mathbf{C}.$$

D нинг координата ўқларидаги проекцияларини D_x, D_y, ва D_z билан, **A**, **B**, **C** векторлар проекцияларини ҳам шунга ўхшаш белгилар билан белгилаймиз; масалан, **A** векторнинг координата ўқларидаги проекциялари A_x, A_y, A_z бўлсин, 62-§ даги (22) формулага мувофиқ [**AB**] вектор купайтманинг проекциялари қуйидагича бўлади:

$$[AB]_x = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}; \ [AB]_y = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}; \ [AB]_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}.$$

(22) формулани D_x учун яна бир марта қўллаймиз:

$$D_x = \begin{vmatrix} [AB]_y & [AB]_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} = [AB]_y C_z - [AB]_z C_y.$$

Ўнг томондаги $[\boldsymbol{AB}]_y$ ва $[\boldsymbol{AB}]_z$ проекцияларининг ўрнига уларнинг қийматларини қўямиз:

$$D_x = (A_zB_x - A_xB_z)C_z - (A_xB_y - A_yB_x)C_y = \\ = B_x(A_zC_z + A_yC_y) - A_x(B_yC_y + B_zC_z).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига $A_xB_xC_x$ ни қўшамиз ва айирамиз:

$$D_x = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_xC_x + B_yC_y + B_zC_z).$$

Проекциялари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмасини эътиборга олсак, D_x ни бундай ёзиш мумкин:

$$D_x = B_x(\boldsymbol{AC}) - A_x(\boldsymbol{BC}).$$

Шунга ўхшаш

$$D_y = B_y(\boldsymbol{AC}) - A_y(\boldsymbol{BC}), \quad D_z = B_z(\boldsymbol{AC}) - A_z(\boldsymbol{BC}).$$

Энди қўш вектор кўпайтмани тасвирловчи $\boldsymbol{D}$ векторни унинг проекциялари билан ифодалаймиз:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{i}D_x + \boldsymbol{j}D_y + \boldsymbol{k}D_z.$$

D_x, D_y ва D_z ўрнига уларнинг ифодаларини қўйиб, уни

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z)(\boldsymbol{AC}) - (\boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z)(\boldsymbol{BC})$$

шаклида ёзиш мумкин. Бу тенгликдан $\boldsymbol{D}$ вектор ўрнига қўш вектор кўпайтмани олиб

$$[\boldsymbol{AB}]_x \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \qquad (26)$$

эканини топамиз. Бу формуладан қўш вектор кўпайтма иккита вектор айирмасига тенг эканини кўрамиз: *камаювчи вектор ўртадаги* ***B*** *векторни қолган икки* ***A***, ***C*** *векторнинг скаляр кўпайтмасига кўпайтиришдан ҳосил булади; айрилувчи вектор эса* ***A*** *векторни қолган икки* ***B***, ***C*** *векторнинг скаляр кўпайтмасига кўпайтиришдан ҳосил бўлади.*

Бу қоидани $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ векторларнинг бошқа тартибда олинган қўш вектор кўпайтмасига татбиқ қиламиз:

$$[\boldsymbol{BC}] \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{BA}] - \boldsymbol{B}[\boldsymbol{CA}], \qquad (27)$$
$$[\boldsymbol{CA}] \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{CB}] - \boldsymbol{C}[\boldsymbol{AB}].$$

(26) ва (27) формулалар қўш вектор кўпайтмани ҳисоблашда катта қулайлик беради (26) ва 27) формулалардан $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ векторларнинг қўш вектор кўпайтмасида бу векторларни доиравий алмаштириш усули билан тузилган қўш векторлар кўпайтмалари бир-бирига тенг эмаслиги кўринади. Бундан ташқари (26) ва (27) тенгликларни ҳадлаб қўшсак,

$$[\boldsymbol{AB}] \times \boldsymbol{C} + [\boldsymbol{BC}] \times \boldsymbol{A} + [\boldsymbol{CA}] \times \boldsymbol{B} = 0$$

эканини курамиз, яъни A, B, C *векторларнинг доиравий алмаштириш усулда тузилган қўш вектор кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.*

Кейинги тенгликдан

$$[AB] \times C = A \times [BC] + B \times [CA]$$

ни ҳосил қиламиз.

A, B, C векторларнинг қўш вектор кўпайтмасида $A = C$ бўлган ҳол алоҳида аҳамиятга эга. Бу ҳолда (26) формула

$$[AB] \times A = B[AA] - A[BA]$$

кўринишни олади. Бундан B векторни топсак,

$$B = \frac{A\,(BA)}{A^2} + \frac{[AB] \times A}{A^2} \tag{28}$$

Бу тенгликда $A(BA)$ купайтма A вектор йўналишидаги вектор бўлиб, $(AB) \times A$ вектор кўпайтма эса A векторга перпендикуляр йўналишдаги вектордир.

Мисол. $A\{3, 0, -1\}$, $B\{2, 4, 3\}$, $C\{-1, 3, 2\}$ ва $D\{2, 0, 1\}$ векторлар берилган.

$[AB] \times C$ ва $(A \times C)(B \times D)$ лар ҳисоблансин.

Ечиш. (26) формулага мувофиқ:

$$[AB] \times C = B(AC) - A(BC).$$

Проекциялари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси учун чиқарилган формулага кўра (AC) ва (BC) ларни ҳисоблаймиз:

$$(AC) = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -5;$$

$$(BC) = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 16;$$

демак,

$$[AB] \times C = -5B - 16A = -5(2i + 4j + 3k) - 16(3i - k)$$

ёки

$$[AB]C = -58i - 20j + k.$$

Энди $[A \times C]\ [B \times D]$ кўпайтмани ҳисоблаймиз. $B \times D$ ни E билан белгилаймиз.

Бу ҳолда доиравий алмаштиришни қўллаб,

$$(A \times C)\,E = C\,(E \times A)$$

эканини топамиз. E векторни эътиборга олсак,

$$(A \times C)(B \times D) = C([BD] \times A) = C\{D(BA) - B(DA)\}.$$

Қавсларни очиб, скаляр кўпайтмага ўрин алмаштириш қонунини қўллаймиз, бу ҳолда

$$(A \times C)(B \times D) = (AB)(CD) - (AD)(CB),$$

ёки

$$(A \times C)(B \times D) = \begin{vmatrix} (AB) & (AD) \\ (CB) & (CD) \end{vmatrix}.$$

Бу мисолда

$$(AB) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 3; \quad (AD) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 5;$$
$$(CB) = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 16; \quad (CD) = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Буларни эътиборга олиб, детерминантни ҳисоблаймиз:

$$(A \times C)(B \times D) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} = -80.$$

Машқлар

1. Қуйидаги нуқталарни ясанг.

$1)\ (3, 4, 5);\ 2)\ (2, -3, 1);\ 3)\ (3, 3, 3);\ 4)\ (-3, -4, -5).$

2. Қуйидаги нуқталарни ясанг ва координата ўқларида жойлашувини сўзлаб беринг.

$A_1\ (5, 0, 0);\ B_1\ (a, 0, 0)\ (a > 0);\ A_2\ (0, 8, 0);\ B_2\ (0, b, 0)\ (b > 0);$

$A_3\ (0, 0, 4);\ B_3\ (0, 0, c)\ (c > 0);\ A_4\ (-3, 0, 0);\ B_4\ (-a, 0, 0)\ (a > 0);$

$A_5\ (0, -5, 0);\ B_5\ (0, -b, 0)\ (b > 0);\ A_6\ (0, 0, -6);\ B_6\ (0, 0, -c)\ (c > 0).$

3. Қуйидаги нуқталарни ясанг ва координаталар системасида жойланишини сўзлаб беринг.

$M\ (3, 4, 0),\ N\ (3, 0, 5),\ P\ (0, 5, -1),\ O\ (0, 0, 0)$

4. $ABCD$ тўртбурчак — квадрат. $\overrightarrow{AB}$ ҳамда $\overrightarrow{DC}$ векторлар; $\overrightarrow{AD}$ ҳамда $\overrightarrow{DC}$ векторлар; $\overrightarrow{AD}$ ҳамда $\overrightarrow{BC}$ векторлар тенг бўла оладими?

5. $ABCD$ тўртбурчак — ромб. $\overrightarrow{AB}$ ҳамда $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$ ҳамда $\overrightarrow{DC}$ векторлар; $\overrightarrow{AD}$ ҳамда $\overrightarrow{BC}$ векторлар тенг бўла оладими?

6. $ABCD$ тўртбурчак — параллелограмм; O — унинг диагоналлари кесишган нуқта. $\overrightarrow{AB} = p$, $AD = q$.

$$\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{DO}$$

векторлар ҳамда $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}$ векторларни p ва q векторлар орқали ифодаланг.

7. A, B, C нуқталар қандай жойлашмасин

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$$

эканини кўрсатинг.

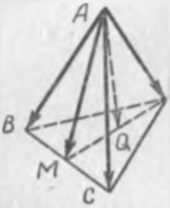
8. Ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчак берилган. Унинг диагоналлари ўрталарини туташтирувчи вектор, тўрт бурчак қарама-қарши томонларини ташкил қилувчи иккита векторнинг ярим йиғиндисига тенг эканини исбот қилинг.

9. Учбурчакнинг томонлари $\overrightarrow{AB} = c$, $\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$, векторлардан иборат. Учбурчак бурчакларининг биссектрисаларига коллинеар векторларни топинг.

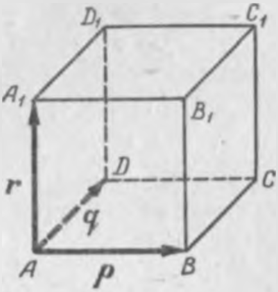
10. Ихтиёрий тўртбурчак қарама-қарши томонларининг ўрталари ҳамда иккита диагоналларининг ўрталари кесмалар билан туташтирилган. Бу учта кесма бир нуқтада кесишишини ва бу нуқта уларнинг умумий ўрта нуқтаси эканини исботланг.

11. $ABCD$ тетраэдрда A учдан чиққан қирралар $\overrightarrow{AB} = b$, $\overrightarrow{AC} = c$ ва $\overrightarrow{AD} = d$ векторлардан иборат. Тетраэдрнинг қолган қирраларини, BCD ёқнинг DM медианасини ва A учдан BCD ёқнинг оғирлик маркази Q нуқтага ўтказилган $\overrightarrow{AQ}$ векторларни бу векторлар орқали ифодаланг (120-чизма).

12. $a = 4b - c$, $b = 1$, $c = 2$, $\widehat{b, c} = 120^\circ$ берилган.



120 -чизма.



121 -чизма.

$$2a^2 - 5ab + ac - 12$$

ифодани ҳисобланг.

13. Агар тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлса, унинг иккита қарама-қарши томонлари квадратларининг йиғиндиси бошқа икки қарама-қарши томонлари квадратлари йиғиндисига тенг эканини исбот қилинг.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг A учидан чиққан учта вектор берилган (121- чизма): $\overrightarrow{AB} = p$, $\overrightarrow{AD} = q$, $\overrightarrow{AA_1} = r$.
Қуйидаги векторларни ясанг:

$$1)\ p + b + r;\ 2)\ p + q + \frac{1}{2}r;\ 3)\ p + q - r;\ 4)\ \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q + r;$$

$$5) - p - q + \frac{1}{2}r.$$

15. O нуқтага ўзаро перпендикуляр йўналишда учта P, Q, R куч таъсир этади. $|P| = 4$ *кг*; $|Q| = 3$ *кг*; $|R| = 12$ *кг*. Уларнинг тенг таъсир этувчи кучининг қийматини топинг.

16. Иккита вектор берилган $a\{3, -2, 6\}$, $b\{-2, 1, 0\}$. 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $2a$; 4) $-\frac{1}{2}b$; 5) $2a + 3b$; 6) $\frac{1}{3}a - b$ векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини топинг.

17. $a\{2, -6, 3\}$ векторнинг модули ҳисоблансин.

18. Иккита $A(4, 3, -1)$ ва $B(-2, 1, 3)$ нуқта берилган. $\overrightarrow{AB}$ ҳамда $\overrightarrow{BA}$ векторларнинг координаталарини топинг.

19. a векторнинг модули 4 га тенг бўлиб, вектор билан Ox, Oy, Oz ўқлар мос тартибда 45°, 60° ва 120° бурчак ҳосил қилади. a векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқланг.

Биз (1) тенгламани умуман *сирт тенгламаси* деб атаймиз. (1) тенглама x, y, z ўзгарувчи координаталарининг бирига нисбатан ечилади деб фараз қиламиз. Масалан, (1) тенглама z га нисбатан ечилиши мумкин булсин, бу ҳолда

$$z = \varphi(x, y)$$

деб ёзиш мумкин, бунда $\varphi(x, y)$ функция x, y ўзгарувчининг бир қийматли ёки кўп қийматли функциясидир.

Сиртга берилган юқоридаги таърифга қараб, қуйидаги хулосани чиқариш мумкин. *Сирт ихтиёрий нуқтасининг координаталари* $f(x, y, z) = 0$ *ёки* $z = \varphi(x, y)$ *тенгламани қаноатлантирса ва сиртдан ташқаридаги нуқтанинг координаталари қаноатлантирмаса, у ҳолда уч номаълумли бу тенглама сирт тенгламаси дейилади* (хусусий ҳолда ўзгарувчиларнинг баъзи бири тенгламага кирмаслиги ҳам мумкин).

Шундай қилиб, фазодаги нуқталарнинг геометрик ўрни деб қаралган ҳар қандай сирт бу нуқталар координаталарини ўзаро боғловчи тенглама билан тасвирланади.

Аксинча, x, y, z ўзгарувчиларни боғловчи ҳар қандай

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

тенглама координаталари бу тенгламани қаноатлантирадиган фазодаги нуқталарнинг геометрик ўрнини, яъни сиртни аниқлайди.

Фазодаги сирт тенгламаси тузилган булса ёки сирт тенгламаси берилган бўлса, сирт берилган деб ҳисобланади.

Юқорида айтилган мулоҳазалардан фазодаги сиртни текшириш иккита асосий масалани текширишга олиб келади:

I. Фазодаги бирор сирт ўзининг умумий хоссаси билан нуқталарнинг геометрик ўрни деб берилган. Унинг тенгламасини тузиш керак.

II. Фазодаги бирор сиртнинг тенгламаси берилган. Бу тенглама ёрдамида унинг хоссаларини ва шаклини текшириш керак. Биз шу масалалар билан шуғулланамиз:

1- мисол. Координатлари берилган бир нуқтадан тенг узоқликда ётган фазовий нуқталарнинг геометрик урни тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масалани ечиш учун фазода $Oxyz$ дан иборат тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси олиб, бу системага нисбатан берилган нуқтани $C(a, b, c)$ билан белгилаймиз. Изланаётган геометрик уриннинг ихтиёрий нуқтаси $M(x, y, z)$ булсин.

Мисолда таърифланган сиртнинг умумий хоссаси

$$CM = R$$

тенглик билан ифодаланган, бунда R — ўзгармас сон. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб, CM масофани аниқлаймиз.

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

CM нинг бу ифодасини юқоридаги тенгликка қўямиз, сўнгра иккала томонини квадратга кўтарамиз. Бу ҳолда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама берилган геометрик ўрин — сферанинг тенгламаси. $C(a, b, c)$ нуқта эса сферанинг *маркази*, R — унинг *радиуси* дейилади. Кейинги икки тенгламанинг бир-бирига эквивалент эканини кўриш қийин эмас.

Сферанинг маркази координаталар бошида бўлса, $a = b = c = 0$ бўлади ва сферанинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

кўринишни олади.

2- мисол. $A(4, 0, -3)$ ва $B(1, -5, 2)$ нуқталардан баравар узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган икки A, B нуқтадан баравар узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни уларни туташтирувчи кесмага тик бўлган текисликдир. Бу факт бизга элементар геометриядан маълум.

$M(x, y, z)$ изланаётган геометрик ўрнининг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда таърифга кўра

$$AM = BM$$

ёки

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z+3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2}.$$

Бу тенгликдан (иррационалликни йўқотиб соддалаштирсак)

$$6x + 10y - 10z + 5 = 0$$

тенглама хосил бўлади.

3- мисол. Сферанинг умумий тенгламаси қандай кўринишда бўлишини текширамиз.

1- мисолда радиуси R, маркази $C(a, b, c)$ нуқтада бўлган сферанинг тенгламаси

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (2)$$

эканини кўрдик. Қўйилган саволга жавоб бериш учун бу тенгламанинг чап томонидаги қавсларни очиб, ҳадларни тартиб билан ёзамиз:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = 0. \qquad (3)$$

20. $\mathbf{a}\ \{3, 12, 4\}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини ҳисобланг.

21. $\mathbf{a}$ векторнинг модули 2 га тенг бўлиб, Ox ва Oy ўқлар билан ҳосил қилган бурчаги мос тартибда 60° ва 120°. $\mathbf{a}$ векторнинг Oz ўқ билан ташкил қилган бурчаги ҳамда унинг координаталарини топинг.

22. $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар узунлиги $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ бўлиб, улар орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Қуйидаги скаляр кўпайтмаларни топинг:

$$1)\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b};\ 2)\ \mathbf{a}^2;\ 3)\ \mathbf{b}^2;\ 4)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2;\ 5)\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2;\ 6)\ (4\mathbf{a}+3\mathbf{b})^2;$$
$$7)\ (3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b});\ 8)\ (2\mathbf{a}-\mathbf{b})(3\mathbf{a}-2\mathbf{b}).$$

23. Ушбу айниятни исбот қилинг.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$$

ҳамда унинг геометрик маъносини текширинг.

24. $\mathbf{p} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$ векторнинг $\mathbf{a}$ векторга перпендикуляр эканини кўрсатинг.

25. $\mathbf{a}$ ҳамда $\mathbf{b}$ вектор орасидаги бурчак $\frac{\pi}{3}$ бўлиб, $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ билан $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ векторлар орасидаги бурчакни ҳисобланг.

26. Учлари $A(-1, -2, 4)$; $B(-4, -2, 0)$; $C(3, -2, 1)$ нуқталар бўлган учбурчак берилган. Унинг B учидаги ички бурчагини ҳисобланг.

27. $\mathbf{F}\ \{2, -3, 5\}$ куч таъсирида материал нуқта $\mathbf{S}\ \{5, -3, 8\}$ векторнинг бошлангич учидан кейинги учига кўчган. $\mathbf{F}$ кучнинг бажарган ишини ҳисобланг.

28. $\mathbf{F}(3, -2, -5)$ куч таъсири остида материал нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилиб $M(2, -3, 5)$ нуқтадан $N(3, -2, -1)$ нуқтага кўчган. $\mathbf{F}$ кучнинг бажарган ишини ҳисобланг.

29. $M(5, 3, -7)$ нуқтага таъсир этувчи учта куч берилган: $\mathbf{R}_1\ \{3, -4, 2\}$, $\mathbf{R}_2\ \{2, 3, -5\}$ ва $\mathbf{R}_3\ \{-3, -2, -4\}$ Бу кучлар таъсирида M нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилиб $N\ \{4, -1, -4\}$ нуқтага кўчган. M нуқта N нуқтага кўчган пайтдаги тенг таъсир этувчи кучнинг бажарган ишини ҳисобланг.

30. Тўртбурчакнинг учлари берилган: $A(1, -2, 2)$; $B(1, 4, 0)$; $C(-4, 1, 1)$ ва $D(-5, -5, 3)$. Бу тўртбурчакнинг AC ҳамда BD диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканини исбот қилинг.

31. Учбурчакнинг учлари берилган:

$$A(1, 2, 1);\ B(3, -1, 7);\ C(7, 4, -2).$$

Унинг ички бурчакларини ҳисобланг.

32. Учларининг координаталари $A(-9, 5; -2; 0)$, $B(-1; 2{,}5; 1)$ ва $C(-2; 9; -1)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг 1) томонлари узунлиги, 2) бурчаклари, 3) AD медианаси билан BC томони орасидаги ўткир бурчаги, 4) AD, BE медианалар орасидаги ўтмас бурчаги ва 5) AB томонининг AC томонига проекциясини топинг.

33. Учбурчакнинг икки томонини $\mathbf{a}\ \{6, 3, -2\}$ ва $\mathbf{b}\ \{3, 5, -8\}$ векторлар ташкил қилади. Бу учбурчакнинг юзини топинг.

34. ABC учбурчакнинг A учидан AD медиана ҳамда BC томонини B дан ҳисоблаганда E нуқтада $2:1$ нисбатда бўлувчи AE тўғри чизиқ ўтказилган $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle A = 120°$. DAE учбурчакнинг юзини ҳамда DAE бурчакнинг синусини ҳисобланг.

35. $ABCD$ пирамиданинг учта қирраси $\overrightarrow{AB}\ \{-2, 3, 0\}$, $\overrightarrow{AC}\ \{-2, 0, 6\}$ ва $\overrightarrow{AD}\ \{0, 3, 8\}$ векторлардан ташкил топган. Пирамиданинг ҳажми ва D учидан туширилган баландлиги топилсин.

Тўққизинчи боб

ФАЗОДАГИ СИРТЛАР ВА ЧИЗИҚЛАР

66- §. СИРТ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Берилган Декарт системасида координаталари

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни *сирт* деб аталади.

Сиртга берилган бу таъриф жуда умумий бўлиб, (1) тенглама билан тасвирланган геометрик ўрин бир ёки бир неча нуқтадан ёки бир-бирига жуда яқин чексиз кўп нуқталар тўпламидан иборат бўлиши ёки ҳеч қандай геометрик образни тасвирламаслиги мумкин. Масалан,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

тенглама фазода фақат биргина нуқтани, координаталар бошини тасвирлайди.

$$\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|z|}{z} = 3$$

тенглама фазода ҳеч қандай чизиқни ташкил этмайдиган чексиз кўп алоҳида нуқталарнинг геометрик ўрнини тасвирлайди (улар 1 квадрантни тўлдиради).

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1$$

тенглама ҳеч қандай геометрик образни тасвир этмайди, тенгламанинг ўзи маънога эга эмас.

Шунинг учун (1) тенгламанинг чап томонидаги $f(x, y, z)$ функция маълум шартлар (узлуксизлик, дифференциалланувчи ва ҳ. к. шартлар) ни қаноатлантиргандагина сиртни тасвирлайди[1].

---

[1] Бундай шартлар дифференциал геометрия ва математик анализ курсларида қаралади. Бу масалалар билан қизиққанларга ўзбек тилида М. А. Собиров ва А. Я. Юсуповнинг „Дифференциал геометрия курси" ни тавсия қиламиз.

Бу тенглама ҳам сферанинг тенгламасидир. (3) тенглама x, y, z ўзгарувчи координаталарга нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама бўлиб, бунда x^2, y^2, z^2 нинг коэффициентлари бир хил (1 га тенг) xy, xz, yz кўпайтмаларни ўз ичига олган ҳадлар тенгламада қатнашмайди.

Аксинча, агар x, y, z ўзгарувчи координаталарга нисбатан иккинчи даражали бирор алгебраик тенгламада x^2, y^2, z^2 нинг коэффициент ари бир хил бўлиб, тенгламада xy, xz, yz кўпайтмали ҳадлар қатнашмаса, бундай тенглама сферани тасвирлайди. Ҳақиқатан ҳам, бундай тенгламанинг иккала томонини x^2 нинг коэффициентига бўлсак, у (3) кўринишга келади.

Шундай қилиб, берилган иккинчи даражали тенглама сферани тасвирлаши ёки тасвирламаслигини унинг кўринишидан билиш мумкин. Масалан,

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - x + 4y - 5z + 6 = 0$$

тенглама сферанинг тенгламаси бўла олмайди, чунки x^2, y^2 ва z^2 ларнинг коэффициентлари турлича.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z + 6 = 0.$$

Бу сферадир; унинг катталигини ва фазодаги ўрнини билиш учун радиусини ва марказининг координаталарини аниқлашимиз керак. Бунинг учун берилган тенгламани (2) кўринишга келтирамиз. x ли ҳадларни олиб, уларни тўла квадратга келтирамиз:

$$x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1;$$

y ва z ли ҳадларни ҳам шундай қиламиз:

$$y^2 + 4y = (y + 4y + 4) - 4 = (y + 2)^2 - 4;$$

$$z^2 + 8z = (z^2 + 8z + 16) - 16 = (z + 4)^2 - 16.$$

Буларни берилган тенгламага қўямиз, у ҳолда

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 15$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламадан кўрамизки, сферанинг маркази $C(1, -2, -4)$ нуқтада бўлиб, унинг радиуси $R = \sqrt{15}$ га тенг.

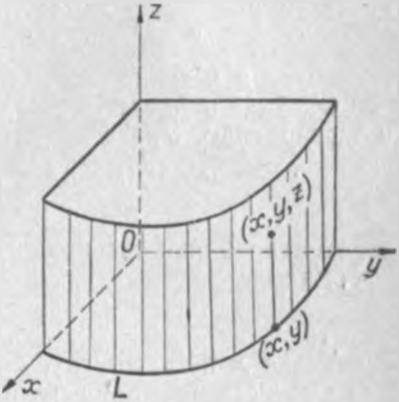
67- §. ЯСОВЧИЛАРИ КООРДИНАТА ЎҚЛАРИГА ПАРАЛЛЕЛ ЦИЛИНДРИК СИРТЛАР

Сиртнинг тенгламасида z ўзгарувчи қатнашмаса, унинг тенгламаси

$$f(x, y) = 0 \tag{4}$$

кўринишда бўлади. Бу тенглама қандай сиртни тасвирлашини текширамиз. xOy текисликда (4) тенглама бирор L чизиқни тасвирлайди (122- чизма) ва бу текисликда ҳамма вақт $z = 0$ булади.

Фазода эса, бу тенглама xOy текисликдаги проекциялари L чизиқ нуқталари булган фазовий нуқталарнинг геометрик ўрнини тасвирлайди (бунда $z \neq 0$). Бундай геометрик ўрин Oz ўққа параллел булиб, L чизиқни кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг ҳаракатланишидан ҳосил бўлган сиртни тасвирлайди. *Бирор ўққа параллел ҳолда қолиб бирор L чизиқни кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг ҳаракатланишидан ҳосил бўлган сирт цилиндрик сирт деб аталади.* Тўғри чизиқ цилиндрик сиртнинг *ясовчиси* L чизиқ эса унинг *йўналтирувчиси* дейилади.



122 -чизма.

Демак, (4) *тенглама ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган, йўналтирувчиси xOy текисликда* (4) *ва $z = 0$ тенгламалар билан ифодаланган чизиқдан иборат цилиндрик сиртни тасвирлайди.*

Аксинча, ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган ҳар қандай цилиндрик сиртни $F(x, y) = 0$ тенглама билан ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан, $F(x, y = 0$ ва $z = 0$ тенгламалар xOy текисликда бирор чизиқни тасвирлайди. Бу чизиқни йўналтирувчи деб олсак $F(x, y) = 0$ тенглама фазода ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди.

Шундай қилиб, фазодаги сиртнинг тенгламасида z қатнашмаса, у тенглама ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди.

Шунга ухшаш, агар тенгламада x (ёки y) қатнашмаса, бундай тенглама геометрик нуқтаи назардан ясовчиси Ox (ёки Oy) ўққа параллел булган цилиндрик сиртни тасвирлайди.

1- мисол. $x^2 + y^2 = r^2$ тенгламада z қатнашмаган. Демак, бу тенглама фазода ясовчиси Oz ўққа параллел цилиндрик сиртни тасвирлайди. Унинг йўналтирувчиси xOy текисликда

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ ва } z = 0$$

тенгламалар билан тасвирланган айланадан иборат.

Бу цилиндр *доиравий цилиндр* дейилади.

2- мисол.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

тенгламада y қатнашмаган, демак бу тенглама фазода ясовчиси Oy ўққа параллел цилиндрик сиртни тасвирлайди. Бу цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси xOz текисликдаги

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \text{ ва } y=0$$

тенгламалар билан тасвирланган эллипсдир. Бу цилиндрик сирт *эллиптик цилиндр* дейилади.

3- мисол.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

тенгламада z қатнашмаган, демак, бу тенглама фазода ясовчиси Oz ўққа параллел цилиндрик сирт (*гиперболик цилиндр*) ни тасвирлайди. Унинг йўналтирувчиси xOy текисликдаги

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ва } z=0$$

тенгламалар билан тасвирланган гиперболадан иборат.

4- мисол.

$$z^2=2py$$

тенгламада x қатнашмаган, демак, бу тенглама фазода ясовчиси Ox ўққа параллел бўлган цилиндрик сирт (*параболик цилиндр*) ни тасвирлайди. Унинг йўналтирувчиси yOz текисликдаги

$$z^2=2py \text{ ва } x=0$$

тенгламалар билан тасвирланган параболадан иборат.

68- §. ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Аналитик геометрияда ҳар бир чизиқни иккита сиртнинг кесишишидан ҳосил булади деб қаралади. Шунинг учун фазодаги ҳар қандай чизиқ x, y, z ўзгарувчиларни боғловчи иккита тенглама билан берилади. Ҳақиқатан,

$$F(x, y, z)=0, \ \Phi(x, y, z)=0 \qquad (5)$$

тенгламалар билан берилган икки сиртнинг кесишишидан бирор L чизиқ ҳосил бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу ҳолда L чизиқнинг ҳар бир нуқтаси (5) сиртларнинг умумий нуқтасидир, яъни L чизиқдаги ҳар қандай $M(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари бир вақтда (5) системанинг иккала тенгламасини ҳам қаноатлантиради.

Аксинча, (5) системанинг ҳар бир (x, y, z) ечимлари системаси L чизиқнинг бирор нуқтасининг координаталари булади.

Шундай қилиб, (5) *тенгламалар системаси биргаликда L чизиқни аниқлайди.*

Агар (5) тенгламалар системасидан z ни чиқарсак,

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{6}$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама ясовчиси Oz ўққа параллел цилиндрик сиртни ифодалайди. Шунга ўхшаш (5) системадан y ни чиқарсак,

$$\psi(x, z) = 0, \tag{7}$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама ясовчиси Oy ўққа параллел цилиндрик сиртни ифодалайди.

(6) ва (7) тенгламалар системаси (5) тенгламалар системасидан ҳосил бўлади.

Шунинг учун (6) ва (7) тенгламалар системаси ҳам L чизиқни аниқлайди. Демак, L чизиқ цилиндрик сиртларнинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқ, яъни уларнинг умумий йўналтирувчисидир. (6) ва (7) тенгламаларнинг ҳар бири L чизиқнинг xOy ва xOz координаталар текислигидаги проекцияларини ифодалайди. (6) тенглама билан $z = 0$ тенглама биргаликда L чизиқнинг xOy текисликдаги проекцияси эканлигини кўриш қийин эмас.

Шунга ўхшаш (7) тенглама билан $y = 0$ тенглама биргаликда L чизиқнинг xOz текисликдаги проекциясини тасвирлайди. (6) ва (7) *цилиндрларнинг ҳар бири L чизиқни мос тартибда xOy, xOz текисликларга проекцияловчи цилиндрик сиртлар деб аталади.*

Шу каби (5) тенгламалар системасидан x ни чиқарсак, L чизиқни yOz текисликка проекцияловчи цилиндрик сиртни топамиз.

1- мисол.

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 15, \ z = \frac{1}{2}$$

тенгламалар биргаликда чизиқни тасвирлайди. Бу чизиқ $z = \frac{1}{2}$ текислик билан

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 15$$

сферанинг кесишган чизиғи — айланани тасвирлайди. Иккинчи тенгламага $z = \frac{1}{2}$ ни қуйсак, бу айлана

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{11}{4}, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан тасвирланади.

2- мисол.

$$x^2 + y^2 - z = 0,$$
$$z - x - 1 = 0$$

сиртларнинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқнинг xOy текисликдаги проекцияси топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасидан z ни чиқарамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламадан z ни аниқлаб, биринчи тенгламага қўямиз.

$$x^2 + y^2 - (x + 1) = 0$$

ёки

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$$

Бу тенглама xOy текисликда айланани тасвирлайди. Демак, берилган сиртлар кесишган чизиғининг xOy текисликдаги проекцияси

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан тасвирланади.

69-§. УЧТА СИРТНИНГ КЕСИШГАН НУҚТАЛАРИ

Агар

$$\Phi(x, y, z) = 0, \ \Phi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\Phi_2(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

тенгламалар билан учта сирт берилган бўлса, бу тенгламаларни система деб қараб, уларни биргаликда ечиш мумкин. (8) тенгламалар системасининг ечимлари системаси (агар у мавжуд бўлса) (8) нинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради. Шунинг учун координаталари бу ечимлар системаси бўлган нуқта учала сиртнинг умумий нуқтаси бўлади (бундай нуқталар кўп бўлиши ҳам мумкин).

Аксинча, бирор $M(x, y, z)$ нуқтанинг x, y, z координаталари (8) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантирса, бу нуқта берилган сиртларнинг умумий нуқтаси бўлади.

Демак, (8) тенгламалар билан берилган учта сиртнинг умумий нуқтасининг координаталарини топиш учун уларни биргаликда ечиш керак.

Агар (8) тенгламалар системасининг ечимлари системаси ҳақиқий сонлар бўлмаса ёки бу система биргаликдаги система бўлмаса, у ҳолда қаралаётган сиртларнинг умумий нуқтаси бўлмайди.

Мисол.

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1,$$
$$x^2+y^2+z^2=2,$$
$$z=1$$

тенгламалар билан берилган сиртларнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламаларни система деб қараб, уларни биргаликда ечамиз. $z=1$ бўлгани учун системанинг биринчи иккита тенгламаси

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

кўринишни олади.

Бу системани ечиб, берилган сиртларнинг кесишган нуқталари (0, 1, 1) ва (1, 0, 1) эканини топамиз.

Машқлар

1. $x^2+y^2+z^2=25$ тенглама билан фазода сирт берилган.

1) $M_1(4, 0, 3)$, $M_2(3, 4, 0)$, $M_3(1, 2, 4)$, $M_4(2, 3, 6)$, $M_5(1, 2, 2\sqrt{5})$, $M_6(2, 3; 2\sqrt{3})$, $M_7(2, -3, -2\sqrt{3})$, $M_8(-2, -3, -\sqrt{3})$, $M_9(-3, 0, -4)$

нуқталар бу сиртда ётадими? 2) берилган тенглама билан қандай сирт аниқланади?

2. $x^2+y^2+z^2=64$ тенглама билан берилган сиртда

1) абсциссаси 4, ординатаси 4; 2) абсциссаси $\sqrt{3}$, ординатаси 5; 3) ординатаси $\sqrt{6}$, аппликатаси 3 бўлган нуқтани топинг.

3. Қуйидаги тенгламалар билан қандай геометрик образлар берилган:

1) $x=0$; 2) $y=0$; 3) $z=0$; 4) $x-2=0$;
5) $y+4=0$; 6) $z-5=0$; 7) $x^2+y^2+z^2=1$;
8) $x^2+y^2=1$; 9) $x^2+z^2=9$; 10) $y^2+z^2=16$;
11) $x^2-y^2=0$; 12) $x^2+y^2+z^2=0$;
13) $x^2+y^2=0$; 14) $x^2+2y^2+5z^2+8=0$;
15) $xy=0$; 16) $xz=0$; 17) $yz=0$; 18) $xyz=0$;
19) $y^2-9y=0$; 20) $xy-y^2=0$.

4. Қуйидаги тенгламалар системаси қандай геометрик образни тасвир этади:

1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ z-3=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1,\\ x=0.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\\ z=3.\end{cases}$

4) $\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{3},\\ z-x=0?\end{cases}$

5. Маркази $(2, -3, 5)$ нуқтада булиб, радиуси 6 га тенг бўлган сфера тенгламасини ёзинг.

6. Ҳар бир нуқтасидан $M(1, -4, -3)$ нуқтагача 5 бирлик узоқда бўлиб, xOy текисликдан эса 3 бирлик узоқда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

7. Ҳар бир нуқтасидан берилган иккита $F_1(-C, 0, 0)$ ва $F_2(C, 0, 0) (C > 0)$ нуқтагача бўлган масофаларнинг йиғиндиси узгармас сон $2a$ га $(a > 0, a > C)$ тенг бўлган фазо нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.

8. Ҳар бир нуқтасидан берилган икки $P(3, -2, 0)$ ва $Q(-1, 3, -4)$ нуқтагача бўлган масофалари ўзаро тенг бўлган фазо нуқталари геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

9. yOz координаталар текислигида ҳаракат қилувчи M нуқтанинг радиус-вектори ҳамма вақт бу нуқтадан $N(2, 5, 3)$ нуқтагача бўлган масофа билан бир хил бўлиб қолади. M нуқта ҳаракат траекториясининг тенгламасини тузинг.

10. xOz координаталар текислигида ҳаракат қилувчи M нуқтанинг радиус-вектори ҳамма вақт бу нуқтадан $P(-1, -4, 2)$ нуқтагача бўлган масофа билан бир хил бўлиб қолади. M нуқта ҳаракат траекториясининг тенгламасини тузинг.

11. xOy координаталар текислигида ҳаракат қилувчи M нуқтанинг радиус-вектори ҳамма вақт бу нуқтадан $Q(1, -2, -3)$ нуқтагача бўлган масофа билан бир хил бўлиб қолади. M нуқта ҳаракат траекториясининг тенгламасини тузинг.

12. Қуйидаги тенгламалар билан қандай геометрик образлар берилган?

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 3) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; 6) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

7) $y^2 = 2px$; 8) $y^2 = 2pz$; 9) $z^2 = 2px$;

10) $x^2 + y^2 = z^2$; 11) $y + z = 1$; 12) $x^2 - xy = 0$.

13. Қуйидаги тенгламалар билан қандай образлар аниқланишини айтиб беринг.

1) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2 = 0. \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29. \end{cases}$

14. Қуйидаги учта сиртнинг кесишган нуқтасини топинг.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \; y - 2 = 0, \; z - 1 = 0.$$

15. Маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси 4 га тенг бўлган сфера билан xOy текислик кесишган чизиғининг тенгламасини тузинг.

16. Маркази $C(1, 2, 3)$ нуқтада бўлиб, радиуси 5 га тенг бўлган сфера билан маркази $P(3, -2, 2)$ нуқтада бўлиб, радиуси 6 га тенг бўлган сферанинг кесишган чизиғининг тенгламасини тузинг.

Ўнинчи боб

ТЕКИСЛИК

70-§. ТЕКИСЛИКНИНГ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликнинг фазодаги ўрнини унинг координаталар бошигача бўлган масофаси p, яъни O нуқтадан унга ўтказилган OP перпендикулярнинг узунлиги билан, ҳамда O дан текислик томон йўналган бирлик $\boldsymbol{n}^\circ$ вектор билан аниқлаш мумкин (123-чизма.)

Текислик тенгламасини тузамиз.

$M(\boldsymbol{r})$ нуқта Q текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$ векторнинг $\boldsymbol{n}^\circ$ вектор йўналишига проекциясини олсак,

$$\text{пр}_{n^\circ} \overrightarrow{OM} = p \qquad (1)$$

ҳосил бўлади, чунки шартга кўра $(OP) = p$. Векторлар алгебрасидан маълумки,

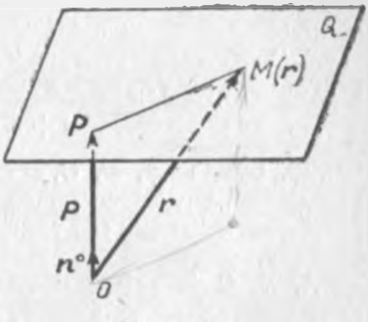
$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\,\text{пр}_{A} \boldsymbol{B}.$$

Шунинг учун,

$$\text{пр}_{n^\circ} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\,\boldsymbol{n}^\circ$$

ёки

$$\text{пр}_{n^\circ} \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ. \qquad (2)$$



123- чизма.

Буни (1) тенгликка қўямиз:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ - p = 0. \qquad (3)$$

Бу тенглама текисликнинг *вектор шаклидаги нормал тенгламаси* дейилади. $\boldsymbol{r}$ вектор текисликдаги ихтиёрий M нуқтанинг радиус-вектори — *узгарувчи радиус-вектор,* $\boldsymbol{n}^\circ$ вектор эса бирлик *нормал вектор* дейилади.

(3) тенгламани проекциялар билан ёзамиз. n° вектор билан Ox, Oy, Oz координата ўқлари орасидаги бурчакларни мос тартибда α, β, γ билан, M нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгилаймиз, яъни

$$n^\circ \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},\ r\{x,\ y,\ z\},$$

бу ҳолда

$$rn^\circ = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \qquad (4)$$

Буларни (3) тенгламага қуямиз:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (5)$$

Бу тенглама текисликнинг *координата шаклдаги нормал тенгламаси* деб аталади.

(5) тенглама x, y, z га нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламадир. Демак, *ҳар қандай текислик x, y, z ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенглама билан тасвирланади.*

Агар (3) ёки (5) тенгламада $p = 0$ бўлса, текислик координаталар бошидан ўтади. Бу ҳолда n° вектор сифатида текисликка перпендикуляр ўтказилган қарама-қарши йўналишли иккита бирлик вектордан исталганини олишимиз мумкин.

71- §. ТЕКИСЛИКНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Ҳар қандай текисликнинг x, y, z ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенглама билан тасвирланишини олдинги параграфда кўрсатдик. Энди тескари теореманинг тўғри эканлигини кўрсатамиз, яъни *x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали ҳар қандай алгебраик тенглама фазода текисликни тасвирлайди.*

x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (6)$$

бўлиб, бунда A, B, C, D — ўзгармас сонлар. Бу тенгламанинг текислик тенгламаси эканлигини кўрсатиш учун уни ўтган параграфдаги (3) ёки (5) тенгламага келтириш мумкинлигини кўрсатамиз.

A, B, C ўзгармас сонларни бирор ўзгармас n векторнинг координаталари деб олиб, x, y, z ни эса ихтиёрий $M(r)$ нуқтанинг координаталари деб қабул қиламиз, яъни:

$$n = Ai + Bj + Ck,$$
$$r = xi + yj + zk.$$

Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини тузамиз:

$$rn = Ax + By + Cz.$$

Бу тенгликни эътиборга олсак (6) тенглама

$$\mathbf{r}\mathbf{n} + D = 0 \qquad (6')$$

кўринишга келади. Энди бу тенгликнинг иккала томонини $\pm \mathbf{n}$ га бўламиз, бу ҳолда $\mathbf{n} = \mathbf{n}^\circ n$ бўлгани учун

$$\mathbf{r}(\pm \mathbf{n}^\circ) + \frac{D}{\pm n} = 0 \qquad (7)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бунда n билан $\mathbf{n}$ векторнинг узунлиги, $\mathbf{n}^\circ$ билан $\mathbf{n}$ нинг бирлик вектори белгиланган. (7) тенгликда $\mathbf{n}$ ёнидаги $\pm$ ишоралардан биттасини D нинг ишорасига қарама-қарши қилиб танлаб оламиз ва $D > 0$ бўлганда

$$\frac{D}{-n} = -p \ (p > 0),$$

$D < 0$ бўлганда эса

$$\frac{D}{+n} = -p \quad (p > 0)$$

деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (7) тенглама

$$\mathbf{r}(\pm \mathbf{n})^\circ - p = 0 \qquad (7')$$

кўринишни олади ва (3) кўринишдаги тенглама ҳолига келади, яъни текисликнинг нормал тенгламасига айланади. Агар $D = 0$ бўлса, (7) тенглама

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^\circ = 0 \qquad (7'')$$

кўринишга келиб, координаталар бошидан ўтган текислик тенгламасини тасвирлайди. Шундай қилиб, (6) тенглама фазода текисликни тасвирлашини исбот қилдик. (6) тенглама *текисликнинг умумий тенгламаси* дейилади. (7), (7′) ва (7″) тенгликлардан $\mathbf{n}$ нинг нормал вектор вазифасини бажараётганини кўрамиз ва бу векторнинг координата ўқларидаги проекциялари умумий тенгламанинг A, B, C коэффициентларидан иборат бўлгани учун:

$$n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

бўлади. (6) тенгламани текисликнинг нормал тенгламасига келтириш учун биз уни $\pm n$ га бўлдик $\left(\frac{1}{\pm n} \text{ га кўпайтирдик}\right)$, бундан текисликнинг умумий тенгламасини нормал шаклга келтириш учун уни

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (8)$$

га *кўпайтириш керак*, деган хулоса келиб чиқади. Шу билан баробар махраждаги $\pm$ ишоралардан бирини D озод ҳад ишорасига тескари қилиб олинади. (6) тенгламанинг иккала томонини M га кўпайтирсак, унинг нормал шакли

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0 \tag{9}$$

кўринишни олади. Бу тенгламани координата шаклидаги (5) нормал тенглама билан таққосласак, (5) билан (9) тенгламалар битта текисликнинг нормал тенгламаси бўлиши учун

$$MA = \cos\alpha, \quad MB = \cos\beta, \quad MC = \cos\gamma \quad MD = -p$$

бўлиши кераклигини кўрамиз. (8) га мувофиқ, бу тенгламалардан нормал тенглама коэффициентларини аниқлаймиз:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + b^2 + C^2}}, \quad p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{9'}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ дан иборат сонлар текисликка ўтказилган нормал векторнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.

Мисол.

$$12x + 16y - 21z - 336 = 0$$

текислик тенгламаси берилган. Бу текисликнинг нормал тенгламаси тузилсин, нормал векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари ва координаталар бошидан текисликкача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Берилган мисолда $A = 12$, $B = 16$, $C = -21$, $D = -336$.

Демак,

$$M = \frac{1}{+\sqrt{12^2 + 16^2 + (-21)^2}} = \frac{1}{29}.$$

Умумий тенгламанинг иккала томонини $\frac{1}{29}$ га кўпайтирамиз.

$$\frac{12}{29}x + \frac{16}{29}y - \frac{21}{29}z - \frac{336}{29} = 0.$$

Бу берилган текислик тенгламасининг нормал шакли. Нормалнинг йўналтирувчи косинусларини ва координаталар бошидан текисликкача бўлган масофани тенглама коэффициентларидан топамиз:

$$\cos\alpha = \frac{12}{29}, \ \cos\beta = \frac{16}{29}, \ \cos\gamma = -\frac{21}{29}, \ p = 11\frac{17}{29}.$$

Одатда α, β, γ бурчаклар $(0, \pi)$ ораликда олинади. Бу шартни эътиборга олсак,

$$\alpha = 65°33', \ \beta = 56°31', \ \gamma = 136°24'.$$

72- §. ТЕКИСЛИКНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИНИ ТЕКШИРИШ

Бу параграфда текисликнинг умумий тенгламасидаги баъзи коэффициентлар нолга тенг бўлган ҳолда текисликнинг фазода қандай жойланишини текширамиз.

Бунинг учун текисликнинг

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6}$$

умумий тенгламасини олиб, бундаги бир ёки бир неча коэффициентни нолга тенг деб фараз қиламиз.

1. $D = 0$ бўлсин, бу ҳолда (6) тенглама

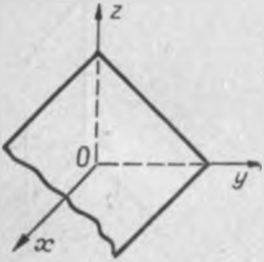
$$Ax + By + Cz = 0 \tag{10}$$

кўринишни олади. (9′) формулаларнинг тўртинчисидан $D=0$ бўлганда $p = 0$ экани келиб чиқади, демак, (10) тенглама координаталар бошидан ўтган текисликни тасвирлайди (бу (6) тенгламадан ҳам бевосита кўринади).

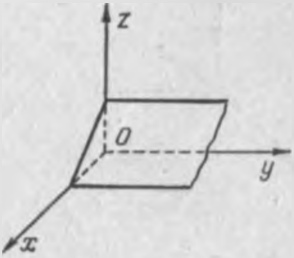
2. $A = 0$ бўлсин, бу ҳолда (6) тенглама

$$By + Cz + D = 0$$

кўринишни олади. (9′) формулалардан $A = 0$ бўлганда $\cos\alpha = 0$ ёки $\alpha = \frac{\pi}{2}$, яъни координаталар бошидан текисликка ўтказилган перпендикуляр билан абсциссалар ўқи орасидаги бурчак 90° га тенглиги келиб чиқади (124- чизма). Демак, бу текислик Ox ўққа параллел.



124- чизма.



125- чизма.

Шундай қилиб, *текисликнинг умумий тенгламасида x ли ҳад қатнашмаса, бундай текислик Ox ўққа параллел бўлади.*

3. $B = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

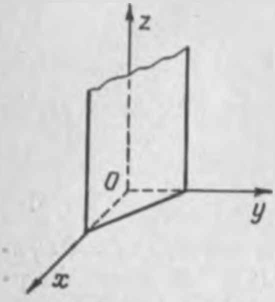
$$Ax + Cz + D = 0$$

кўринишни олади. Бу тенглама билан тасвирланган текислик Oy ўққа параллел бўлади (125- чизма).

4. $C = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Ax + By + D = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламада z қатнашмаётир. Демак, тенглама $C = 0$ бўлган ҳолда Oz ўққа параллел текисликни тасвирлайди (126- чизма).



126 -чизма.

5. $A = 0$ ва $D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$By + Cz = 0$$

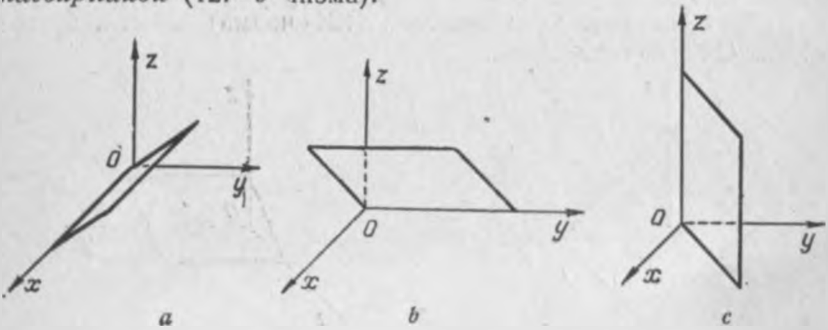
кўринишни олади. $D = 0$ бўлганда текислик координаталар бошидан ўтади. $A = 0$ шартда Ox ўққа параллел бўлади; демак, кейинги тенглама Ox ўқдан ўтган текисликни тасвирлайди (127- a чизма).

Шундай қилиб, *текисликнинг умумий тенгламасида x ли ҳад билан озод ҳад қатнашмаса, ундай тенглама Ox ўқдан ўтган текисликни тасвирлайди.*

6. $B = 0$ ва $D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Ax + Cz = 0$$

кўринишни олади. *Бу тенглама Oy ўқдан ўтган текисликни тасвирлайди* (127- b чизма).



127 -чизма.

7. $C = 0$ ва $D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Ax + By = 0$$

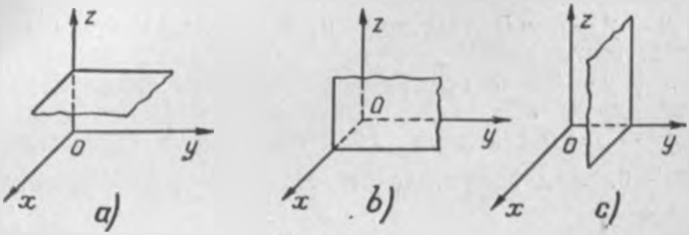
кўринишни олади. Бу тенглама Oz ўқдан ўтган текисликни тасвирлайди (127- c чизма).

8. $A = 0$, $B = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Cz + D = 0 \text{ ёки } z = -\frac{D}{C}\ (C \neq 0)$$

кўринишни олади. Бу тенгламада x, y ли ҳадлар қатнашмаган, шунинг учун бу тенглама Ox ўқ билан Oy ўққа параллел текисликни ёки, бошқача айтганда, xOy текисликка параллел текисликни тасвирлайди. Бу текислик xOy текисликдан $h = -\frac{D}{C}$ масофа узоқликдан ўтишини англаш қийин эмас (128- *a* чизма).

Шундай қилиб, (6) *тенгламада x, y ли ҳад қатнашмаса, бундай тенглама xOy текисликка параллел текисликни тасвирлайди.*



128- чизма.

9. $B = 0$, $C = 0$ булсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Ax + D = 0 \text{ ёки } x = -\frac{D}{A}\ (A \neq 0)$$

кўринишни олади. Бу тенглама yOz текисликка параллел бўлиб, ундан $k = -\frac{D}{A}$ масофа узоқликда ётган текисликни тасвирлайди (128- *b* чизма).

10. $A = 0$ ва $C = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$By + D = 0 \text{ ёки } y = -\frac{D}{B}\ (B \neq 0)$$

кўринишни олади ва бу тенглама *xOz текисликка параллел булиб, ундан $l = -\frac{D}{B}$ масофа узоқликда ётган текисликни тасвирлайди* (128- *c* чизма).

11. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) тенглама

$$Cz = 0 \text{ ёки } z = 0\ (C \neq 0)$$

кўринишни олади. 1 ва 8- ҳоллардаги натижаларга асосан бу тенглама xOy текисликни тасвирлайди.

12. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$ булиб, $B \neq 0$ бўлса, (6) тенглама

$$By = 0 \quad \text{ёки} \quad y = 0$$

тенгламага айланади ва xOz текисликни тасвирлайди.

13. $B=0$, $C=0$, $D=0$ бўлиб, $A\neq 0$ бўлса, (6) тенглама

$$Ax=0 \text{ ёки } x=0$$

кўринишни олади ва yOz текисликни тасвирлайди.

14. $A=0$, $B=0$, $C=0$ бўлса, (6) тенгламадан

$$D=0$$

келиб чиқади ва бу ҳолда x, y, z ўзгарувчилар орасида ҳеч қандай муносабат (боғланиш) бўлмайди.

Мисоллар. 1. $3x+4y=0$ тенглама Oz ўқдан ўтган текислик тенгламаси.

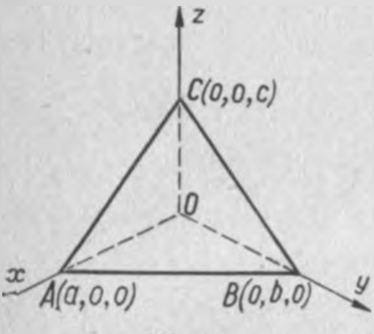
2. $x+y-z=0$ тенглама координаталар бошидан ўтган текислик тенгламаси.

3. $x+y-5=0$ тенглама Oz ўққа параллел текисликни тасвирлайди.

4. $5z-3=0$ тенглама xOy текисликка параллел бўлиб, ундан $\frac{3}{5}$ бирлик узоқликда ётган текислик тенгламасидир.

73- §. ТЕКИСЛИКНИНГ КЕСМАЛАРГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фазода текисликнинг ўрнини бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта билан аниқлаш мумкинлиги элементар геометриядан маълум. Бундай нуқталар деб координата ўқларидаги учта нуқтани олишимиз мумкин. (Текислик координата бошидан ўтмайдиган бўлсин.)



129 -чизма.

Текисликнинг

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (11)$$

умумий тенгламаси берилган бўлсин. Бу текислик координата ўқларини $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ нуқталарда кесиб утади деб фараз қиламиз. Бу ҳолда A, B, C нуқталар (11) текисликнинг нуқталари булгани учун уларнинг координаталари (11) тенгламани қаноатлантириши керак (129- чизма).

$A(a, 0, 0)$ нуқтанинг координаталарини (11) тенгламага қуямиз,

$$Aa+D=0$$

ёки

$$A=-\frac{D}{a}.$$

Шунга ўхшаш $B(0, b, 0)$ ва $C(0, 0, c)$ нинг координаталарини ҳам (11) тенгламага қўйиб

$$B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}$$

ни топамиз. Топилган A, B, C коэффициентларнинг қийматларини (11) тенгламага қўйиб, ҳаммасини D га қисқартсак,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (12)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама текисликнинг *кесмаларга нисбатан тенгламаси* дейилади. (12) тенгламадаги a, b, c сонлар текисликнинг координата ўқларини *кесган кесмалардир*.

Мисол. $2x + y - 3z - 6 = 0$ текисликнинг умумий тенгламасини кесмаларга нисбатан ёзамиз. Берилган тенгламадаги озод ҳадни ўнг томонга ўтказамиз ва тенгламанинг иккала томонини унга бўламиз, натижада

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2} = 1$$

ҳосил бўлади. Бундан координата ўқларидан ажратган кесмаларни топамиз:

$$a = 3, \quad b = 6, \quad c = -2.$$

74- §. ИККИ ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАК

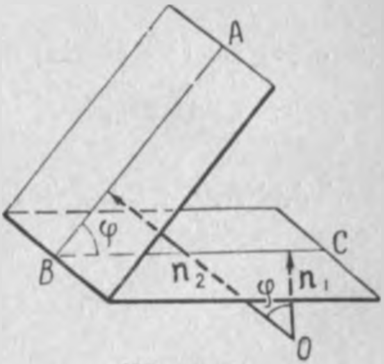
Икки текислик ўзининг вектор шаклидаги тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$\mathbf{r}\mathbf{n}_1 + D_1 = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{n}_2 + D_2 = 0,$$

бунда $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — биринчи ва иккинчи текисликларнинг нормал векторлари. Икки текислик орасидаги бурчак деб бу текисликлар орасидаги *икки ёқли бурчакка* айтамиз. Бу икки ёқли бурчак ўзининг чизиқли бурчаги $\angle ABC = \varphi$ билан ўлчанади (130- чизма). φ бурчакни 0 дан π гача ўзгаради деб фараз қиламиз ва уни топамиз.

$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ нормал векторлар орасидаги бурчак берилган текисликлар орасидаги бурчакка тенг ёки уни π гача тўлдиради.

Шунга мувофиқ текисликлар орасидаги бурчак деб, улар орасидаги қўшни бурчакларнинг ҳар бирини тушуна-



130- чизма.

миз, деган шартни қабул қилиб, икки вектор орасидаги бурчакни аниқлаш формуласидан $\cos\varphi$ ни топамиз:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)}{n_1 n_2}. \tag{12}$$

Бу формуладан берилган текисликлар орасидаги бурчак топилади. Агар текисликлар бир-бирига параллел бўлса, $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ векторлар коллинеар бўлади ва, аксинча.

Шунинг учун берилган текисликларнинг бир-бирига параллел бўлишининг зарур ва етарли шарти

$$\boldsymbol{n}_1 = \lambda\,\boldsymbol{n}_2 \tag{13}$$

тенглик билан ифодаланади.

Шунга ўхшаш берилган текисликлар бир-бирига перпендикуляр бўлса, уларнинг нормал векторлари ҳам бир-бирига перпендикуяр бўлади ва, аксинча. Демак, берилган текисликларнинг бир-бирига перпендикуляр бўлишининг зарур ва етарли

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0 \tag{14}$$

шарти тенглик билан ифодаланади.

Вектор шаклидаги формулалардан координаталар шаклидаги формулаларга ўтиш осон.

Текисликлар координаталар шаклда

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу ҳолда

$$\boldsymbol{n}_1 = A_1\boldsymbol{i} + B_1\boldsymbol{j} + C_1\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{n}_2 = A_2\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + C_2\boldsymbol{k}$$

лар текисликларнинг нормал векторлари бўлишини биламиз (72-§).

Векторларнинг скаляр кўпайтмасини ва узунликларини топиш формулаларига асосан:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{12'}$$

Шунга ўхшаш (13) ва (14) шартлар координата шаклида

$$\frac{A_1}{A^2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ (параллеллик шарти)} \tag{13'}$$

ва

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \text{ (перпендикулярлик шарти)} \tag{14'}$$

куринишни олади.

1- мисол.

$$x + y - 4z + 5 = 0,$$
$$x - 2y + 2z - 7 = 0$$

текисликлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламалардан

$$A_1 = B_1 = 1, \qquad C_1 = -4,$$
$$A_2 = 1, \qquad B_2 = -2, \qquad C_2 = 2$$

эканини кўрамиз. Буларни (12) формулага қўямиз.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-4)\cdot 2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\ \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{-9}{9\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Демак,

$$\varphi = 135^\circ.$$

2- мисол.

$$2x + 3y - 5z + 7 = 0,$$
$$6x + 9y - 15z - 3 = 0$$

тенгламалар билан берилган текисликларнинг бир-бирига параллел экани кўрсатилсин.

Ечиш. (13′) параллеллик шарти бажарилади:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-5}{-15}.$$

3- мисол.

$$x + y + z = 0, \qquad x + y - 2z + 5 = 0$$

текисликларнинг бир-бирига перпендикуляр экани кўрсатилсин.

Ечиш. (14′) перпендикулярлик шарти бажарилади:

$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1(-2) = 0.$$

75- §. ТЕКИСЛИКЛАР ДАСТАСИНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Фазода бирор $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқта берилган бўлсин. Бу нуқтадан чексиз кўп P, Q, R,... текисликлар ўтади (131- чизма).

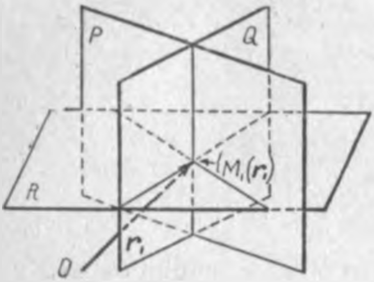
Бу текисликлар тўплами $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқтадан ўтган текисликлар *дастаси* дейилади. $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқта *дастанинг маркази* дейилади. Биз маркази $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқтада бўлган текисликлар дастасининг тенгламасини тузамиз. Бунинг учун дастадан бирор P текислик олиб, унинг нормал векторини $\boldsymbol{n}$ билан ва ундаги ихтиёрий нуқтани $M(\boldsymbol{r})$ билан белгилаймиз (132- чизма). Бу ҳолда

$$\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1.$$

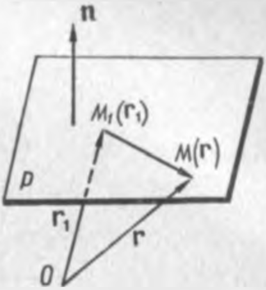
$\overrightarrow{M_1M}$ вектор P текисликда ётгани учун у нормал вектор билан перпендикуляр бўлади. Шунинг учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0. \tag{15}$$

Бу тенглама $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламаси. $\boldsymbol{n}$ нормал вектор P, Q, R,... текисликлар учун ўз йўналишини ўзгартиради. Шунинг учун $\boldsymbol{n}$ нормал вектор ўзгарганда, (15) тенглама P, Q, R текисликларни тасвирлайди. (15) тенглама *текисликлар дастасининг вектор шаклдаги тенгламаси* дейилади.



131- чизма.



132- чизма.

Текисликлар дастасининг координата шаклидаги тенгламасини тузиш учун (15) тенгламадаги векторларнинг проекцияларини оламиз

$$\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}y_1 + \boldsymbol{k}z_1, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$$

бўлсин. Бу ҳолда (15) тенглама координата шаклида қуйидагича ёзилади:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (16)$$

Бу тенгламада A, B, C коэффициентлар турли текисликлар учун турли қийматлар олади.

1- масала. $M(1, -2, -3)$ нуқтадан ўтган текисликлар дастасининг тенгламаси тузилсин.

Бу мисолда: $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $z_1 = -3$.
Буларни (16) тенгламага қўямиз:

$$A(x - 1) + B(y + 2) + C(z + 3) = 0.$$

2- масала. $M(x, y, z)$ нуқтадан ўтиб, $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ текисликка параллел текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламаси

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (*)$$

кўринишда бўлишини биламиз. Берилган текислик билан бу текислик бир-бирига параллел бўлса,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \lambda$$

(λ билан пропорциянинг умумий коэффициентини белгиладик). Бу муносабатлардан

$$A = \lambda A_1, \qquad B = \lambda B_1, \qquad C = \lambda C_1.$$

A, B, C ларнинг бу қийматларини (*) тенгламага қўйсак,

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама изланаётган текислик тенгламасидир.

3- масала. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталардан ўтиб, $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган текислик тенгламаси:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (\alpha)$$

Агар бу текислик $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтадан ўтса, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтанинг координаталари (α) текислик тенгламасини қаноатлантиради, яъни

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \qquad (\beta)$$

Берилган текислик билан (α) текисликнинг бир-бирига перпендикулярлик шарти:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (\gamma)$$

(β), (γ) тенгликлардан иккита коэффициентни учинчи коэффициент орқали ифодалаб, натижани (α) тенгликка қўйсак, изланаётган тенглама ҳосил бўлади.

Изланаётган текисликни (α), (β), (γ) тенгламалардан фойдаланиб бошқа усул билан топиш ҳам мумкин. Ҳақиқатан (α), (β), (γ) тенгламалар A, B, C номаълум коэффициентларга нисбатан чизиқли бир жинсли тенгламалар системасини ташкил қилади. A, B, C коэффициентлар бу системанинг нолдан фарқли ечимлари системаси бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли, яъни

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Бу тенглама x, y, z га нисбатан биринчи даражали тенглама бўлиб масала шартларини қаноатлантиради. Демак, бу изланаётган текислик тенгламасидир.

4- масала. $M_1(-1, 2, -3)$ ва $N_2(2, -3, 5)$ нуқталардан ўтиб, $x - y + z + 5 = 0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузайлик. Биз бу масалани юқорида кўрсатилган иккала усулда ечамиз.

1-усул. $M_1(-1, 2, -3)$ нуқтадан ўтган текисликлар дастаси

$$A(x + 1) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0. \qquad (a)$$

Бу дастадаги текисликлар орасидан $M_2(2, -3, 5)$ нуқтадан ўтадиган текисликни ажратиб оламиз. Бизнинг мисолимизда текисликнинг M_2 нуқтадан ўтиш шарти

$$A(2+1)+B(-3-2)+C(5+3)=0$$

ёки

$$3A-5B+8C=0 \text{ ёки } 3\frac{A}{C}-5\frac{B}{C}+8=0. \tag{b}$$

Дастадаги текисликлардан масала шартида берилган текисликка перпендикуляр текисликни ажратиб оламиз. Бу текисликларнинг перпендикулярлик шарти

$$A\cdot 1+B(-1)+C\cdot 1=0$$

ёки

$$-\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=1. \tag{c}$$

(b) ва (c) тенгламалардан $\frac{A}{C}$ ва $\frac{B}{C}$ ларни аниқлаймиз:

$$\frac{A}{C}=\frac{3}{2};\quad \frac{B}{C}=\frac{5}{2}.$$

(a) тенгламанинг иккала томонини C га бўлиб $\frac{A}{C}$ ва $\frac{B}{C}$ ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб соддалаштирсак, изланаётган текислик

$$3x+5y+2z-1=0$$

тенглама билан тасвирланади.

2- усул. Изланаётган текислик тенгламасини топиш учун (17) тенгламани олиб, ундаги $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ ва A_1, B_1, C_1 ўрнига мисолда берилган қийматларни қўямиз:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 2+1 & -3-2 & 5+3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ёки

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 3 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Детерминант қийматини ҳисобласак,

$$3x+5y+2z-1=0$$

ҳосил бўлади. Бу биринчи усулда ҳосил қилинган тенглама билан бир хил, яъни изланаётган текислик тенгламаси.

5- масала. $M(-1, 0, 0)$ ва $M_1(0, -1, 0)$ нуқталардан ўтиб,

$$x+2y-z+4=0$$

текислик билан 60° бурчак ташкил қиладиган текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. $M(-1, 0, 0)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузамиз:

$$A(x+1)+By+Cz=0. \qquad (\alpha)$$

Бу текислик $M_1(0, -1, 0)$ нуқтадан ўтса, унинг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантириши керак, яъни

$$A(0+1)+B(-1)+C\cdot 0=0$$

ёки

$$A-B=0$$

ёки

$$A=B. \qquad (\beta)$$

Берилган текислик билан изланаётган текислик орасидаги бурчак 60° бўлгани учун

$$\cos\varphi=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Икки текислик орасидаги бурчакни топиш формуласига кўра:

$$\cos\varphi=\frac{A\cdot 1+B\cdot 2+C\cdot(-1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}.$$

Бу тенгликда B нинг ўрнига A ни қўйиб, сўнгра соддалаштирсак,

$$C^2+12AC-12A^2=0$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламани C га нисбатан ечамиз; бу ҳолда

$$C=-2A(3\pm 2\sqrt{3}) \qquad (\gamma)$$

экани келиб чиқади.

(α) тенгламада B ва C ларнинг ўрнига уларнинг (β) ва (γ) тенгликлардаги қийматларини қўйиб, A га қисқартирсак,

$$(x+1)+y-2(3\pm 2\sqrt{3})z=0$$

ёки

$$x+y-2(3\pm 2\sqrt{3})z+1=0$$

ҳосил бўлади. Демак, масала шартини қаноатлантирувчи текислик иккита экан.

76-§. УЧ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

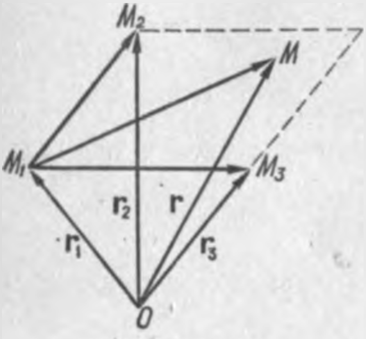
Бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқтадан битта текислик ўтишини биламиз. Бу уч нуқта $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$, $M_3(r_3)$ бўлсин. Бу нуқталардан ўтган текислик тенгламасини тузамиз

(133- чизма). $M(r)$ текисликдаги ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу ҳолда

$$\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1,\quad \overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$$

векторлар компланар векторлар (бир текисликда ётувчи векторлар) бўлади, шунинг учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, яъни



133- чизма.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0. \qquad (18)$$

Бу тенглама берилган уч нуқтадан ўтган текисликнинг вектор шаклидаги тенгламасидир.

(18) тенгламани координата шаклда ёзиш учун M, M_1, M_2, M_3 нуқталарнинг координаталари берилиши керак.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1,$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2,$$
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{i}x_3 + \mathbf{j}y_3 + \mathbf{k}z_3$$

булсин. Векторлар аралаш кўпайтмасини проекциялар билан ёзиш формуласига мувофиқ, (18) тенгламани

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18')$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама берилган уч нуқтадан утган текисликнинг координата шаклидаги тенгламасидир.

Мисол. $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, 1)$ ва $C(3, 1, 0)$ нуқталардан ўтган текислик тенгламасини ёзайлик. Берилган нуқталарнинг координаталарини (18) тенгламага қўямиз:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 2 \\ 1 - 2 & 2 + 1 & 1 - 2 \\ 3 - 2 & 1 + 1 & 0 - 2 \end{vmatrix} = 0$$

ёки детерминантни ёйиб соддалаштирсак,

$$4x + 3y + 5z - 15 = 0$$

ҳосил бўлади. Бу изланаётган текислик тенгламасидир.

77-§. УЧ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР НУҚТАДА КЕСИШИШИ

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned} \qquad (19)$$

тенгламалар билан учта текислик берилган бўлсин. Бу текисликлар бир нуқтада ёки бир неча нуқтада кесишиши ёки кесишмаслиги мумкин.

Агар (19) текисликлар бир нуқтада кесишса, у нуқта бу текисликларнинг умумий нуқтаси бўлади ва унинг координаталари (19) нинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради. Демак, учта текисликнинг кесишган нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

(19) тенгламаларнинг ечимларини текшириш натижасида берилган учта текисликнинг кесишиши ҳақидаги масалани тўла ойдинлаштира оламиз. Бу ҳақдаги маълумот детерминантлар назариясида умумий ҳолда берилган (VI бобга қаранг).

Мисол.

$$x + 2y - z = 2, \quad 2x - 3y + z = 1,$$
$$3x + 5y - 6z = 9$$

текисликларнинг кесишган нуқтасини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламаларни система деб қараб, уларни биргаликда ечамиз.

Натижада ушбу

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = -1$$

ни топамиз. Демак, берилган текисликлар (1, 0, — 1) нуқтада кесишади.

78- §. НУҚТАДАН ТЕКИСЛИККАЧА БЎЛГАН МАСОФА

$M_1(\mathbf{r}_1)$ нуқта ва

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^\circ - p = 0 \qquad (20)$$

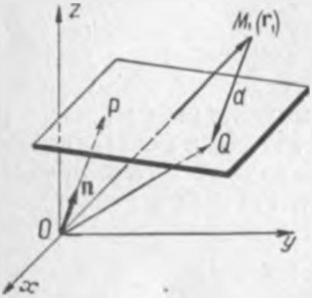
текислик берилган бўлсин. $M_1(\mathbf{r}_1)$ нуқтадан текисликкача бўлган масофа деб M_1 нуқтадан текисликка туширилган $M_1Q = d$ перпендикулярнинг узунлигига айтилади (134- чизма). $\sigma = \pm d$ ни M нуқтанинг қаралаётган текисликдан четланиши деб атаймиз. Агар координаталар боши O билан M_1 нуқта текисликнинг турли томонига жойлашган бўлса, δ четланишни плюс ишора билан, тескари ҳолда эса минус ишора билан олишни қабул қиламиз. Бизнинг вазифамиз берилган (20) тенгламага ва берилган M_1 нуқтанинг радиус вектори $\mathbf{r}_1$ га асосланиб M_1 нуқтадан (20) текисликкача бўлган масофани топишдир. Бунинг учун OM_1Q учбурчакдан

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1Q}$$

ёки

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{n}^\circ \delta$$

эканини топамиз ($\overrightarrow{M_1Q}$ билан $\boldsymbol{n}^\circ$ коллинеар векторлар бўлиб, улар қарама-қарши йўналган, шунинг учун $\overrightarrow{M_1Q} = -\boldsymbol{n}^\circ \delta$). Q текислик нуқтаси бўлгани учун унинг r_Q радиус-вектори (20) текислик тенгламасини қаноатлантириши керак. $\boldsymbol{r}_Q$ нинг қийматини (20) тенгламага қўямиз:



134 -чизма.

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{n}^\circ \cdot \delta)\, \boldsymbol{n}^\circ - p = 0$$

ёки

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ - \delta - p = 0, \qquad \delta = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ - p.$$

Бу тенгликка асосланиб d ни топамиз. Четланиш учун берилган таърифга кўра

$$d = |\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ - p|. \tag{21}$$

Демак, берилган $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ нуқтадан берилган (20) текисликкача бўлган масофани топиш учун текисликнинг нормал тенгламасидаги ўзгарувчи радиус-векторни M_1 нуқтанинг $\boldsymbol{r}_1$ радиус-вектори билан алмаштириш ва ҳосил бўлган соннинг абсолют қийматини олиш керак. (21) формулани координата шаклида ёзамиз:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}y_1 + \boldsymbol{k}z_1;$$
$$\boldsymbol{n}^\circ = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$$

бўлсин. $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ$ скаляр кўпайтмани проекциялар билан ифодалаб, (21) формулага қўямиз. Бу ҳолда

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p| \tag{22}$$

ҳосил бўлади. Бундан кўринадики, M_1 нуқтадан текисликкача бўлган масофани топиш учун текисликнинг нормал тенгламасидаги ўзгарувчи x, y, z координаталар ўрнига M_1 нуқтанинг x_1, y_1, z_1 координаталарини қўйиш ва чиққан натижанинг абсолют қийматини олиш керак.

Мисол. $M(1\ \ -2,\ 3)$ нуқтадан $3x + 5y - 6z - 2 = 0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Берилган текисликни нормал кўринишга келтирамиз. Бунинг учун текислик тенгламасини

$$M = +\frac{1}{\sqrt{9 + 25 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{70}}$$

га кўпайтирамиз. Текисликнинг нормал тенгламаси

$$\frac{3x+5y-6z-2}{\sqrt{70}}=0.$$

x, y, z ўрнига M_1 нуқтанинг мос координаталарини қўямиз:

$$\delta=\frac{3\cdot 1+5\,(-2)-6\cdot 3-2}{\sqrt{70}}=-\frac{27}{\sqrt{70}}.$$

Демак, изланаётган масофа

$$d=\frac{27}{\sqrt{70}}.$$

δ нинг минус ишорали бўлиши $M(1,-2,3)$ нуқта билан координаталар боши текисликнинг бир томонига жойлашганлигини билдиради.

Машқлар

1. Қуйидаги текислик тенгламаларидан қайси бири унинг нормал тенгламаси эканлигини аниқланг:

1) $\frac{2}{11}x+\frac{9}{11}y-\frac{6}{11}z-2=0$; 2) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{15}y-\frac{11}{15}z-4=0$;

3) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z+3=0$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-7=0$;

5) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-8=0$; 6) $\frac{5}{13}y-\frac{12}{13}z+1=0$;

7) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}z-5=0$; 8) $x-3=0$;

9) $y+5=0$; 10) $z-9=0$.

2. Қуйидаги текисликларнинг умумий тенгламаларини нормал шаклдаги тенгламалар куринишига келтиринг.

1) $x-2y-2z+27=0$; 2) $2x+10y-11z-30=0$;

3) $6x-6y-7z+33=0$; 4) $5x-6y-22=0$;

5) $3y-4z-50=0$; 6) $x-5=0$;

7) $3\ z-2=0$; 8) $-z+3=0$.

3. Текисликнинг умумий тенгламаси берилган:

$$2x-3y+5z-7=0.$$

Бу текисликнинг

$A_1\ (0,\ 1,\ 2)$, $A_2(3,\ 1,\ 3)$, $A_3(2,\ 4,\ 3)$, $A_4(-3,\ 4,\ 5)$, $A_5(1,\ 5,\ 4)$, $A_6(2,-6,-1)$

нуқталардан ўтишини текширинг.

4. $M(3,\ -2,\ 6)$ нуқта Oz ўқига параллел тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Бу нуқтанинг $2x-3y+5z-32=0$ текислиқ билан учрашган нуқтасини топинг.

5. Қуйидаги текисликлар фазода қандай жойлашган?

1) $x + 5y - z = 0$; 2) $3y - 8z + 7 = 0$; 3) $2x + 3z - 3 = 0$;
4) $6x - 7y - 1 = 0$; 5) $5x - 3y = 0$; 6) $x + 2z = 0$;
7) $2y - 9z = 0$; 8) $x - 3 = 0$; 9) $6y - 1 = 0$;
10) $3z - 2 = 0$; 11) $x = 0$;
12) $z = 0$; 13) $y = 0$.

6. M $(1, -2, 3)$ нуқтадан ўтиб xOz текислигига параллел бўлган текислик тенгламаси ёзилсин.

7. $N(-2, 3, 4)$ нуқтадан ўтиб yOz текислигига параллел бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

8. $P(2, 5, 3)$ нуқтадан ўтиб xOy текислигига параллел бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

9. Ox ўқидан ҳамда $(3, -2, +3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

10. $(3, 0, -4)$ ҳамда $(5, -2, 3)$ нуқталардан ўтиб, Oy ўққа параллел бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

11. $P(2, 4, 8)$, $Q(-3, 1, 5)$, $K(6, -2, 7)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

12. Қуйидаги текисликларнинг координата ўқларидан кесган кесмаларини топинг.

1) $20x + 15y + 12z - 60 = 0$; 2) $6x - 2y + 3z = 6$; 3) $x + y - z = 1$;
4) $x - 2z + 3 = 0$; 5) $3x - y + 2z = 0$; 6) $y - 5 = 0$;

13. Координата ўқларидан $x = 2$, $y = -4$, $z = 6$ бирлик кесмалар кесиб ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

14. Координата ўқларидан бир хил мусбат кесмалар кесиб фазонинг $(3, -8, 11)$ нуқтасидан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

15. Қуйидаги текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

1) $x - 2y + 2z + 5 = 0$ ҳамда $x + z - 3 = 0$;
2) $2x - 3y + 6z - 3 = 0$ ҳамда $x + 2y + 2z - 9 = 0$;
3) $3y - z = 0$ ҳамда $2y + z = 0$,
4) $3x - y + 2z + 12 = 0$ ҳамда $5x + 9y - 2z - 1 = 0$.

16. $(2, -3, 4)$ нуқтадан ўтиб $5x - 6y + z - 3 = 0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

17. $(1, 2, -5)$ нуқтадан ўтиб $3x + y - 8z - 15 = 0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

18. $(5, -4, 3)$ ва $(-2, 1, 8)$ нуқталардан ўтиб 1) xOy текисликка, 2) yOz текисликка, 3) xOz текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

19. $(3, 8, 5)$ ҳамда $(-2, -4, 1)$ нуқталардан ўтиб $2x - 3y + z - 2 = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

20. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ҳамда $3x + 2y - z + 3 = 0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ҳамда $(1, -2, 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

21. $x - y + 6z - 4 = 0$ ҳамда $2x + y - z - 3 = 0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ҳамда $(-2, 3, -1)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

22. $(1, -1, 2)$, $(2, 3, -1)$ ва $(3, 4, 1)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

23. Қуйидаги текисликларнинг кесишган нуқтасини топинг.

1) $\begin{cases} 6x-2y+z-5=0, \\ x+y+4z-6=0, \\ 3x+y-2z-2=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y-z=0, \\ x+5y-3z-6=0, \\ 4x-y+z-8=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x-3y+4z-3=0, \\ 4x-11y+10z-5=0. \end{cases}$

24. $(1, -2, 3)$ нуқтадан $2x+3y-6z-6=0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

25. Oz ўқидан чиқмай $x-2y+2z-5=0$ ҳамда $8x+12y-9z-8=0$ текисликлардан тенг узоқликда ётувчи нуқтани топинг.

26. Oy ўқидан ўтиб $(5, -2, 3)$ нуқтадан 3 бирлик узоқда бўлган текислик тенгламасини тузинг.

27. $2x-3y+6z-8=0$ ҳамда $2x-3y+6z+6=0$ параллел текисликлар орасидаги масофани топинг.

28. $7x-24y-15=0$ ҳамда $x+2y-2z+7=0$ текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликлар тенгламасини тузинг.

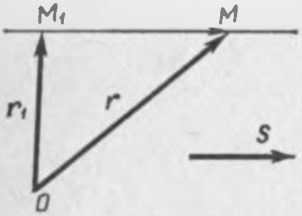
Ўн биринчи боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

79- §. ТУҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ВЕКТОР ШАКЛДАГИ ТЕНГЛАМАСИ

Туғри чизиқнинг фазодаги ўрнини турлича аниқлаш мумкин.

Фазода бирор s вектор ва $M_1(r_1)$ нуқта берилган булсин (135 чизма). $M_1(r_1)$ нуқтадан s векторга параллел фақат битта туғри чизиқ ўтказиш мумкин. Шу туғри чизиқ M_1M туғри чизиғи булсин $M(r)$ ундаги ихтиёрий нуқта. Қаралаётган туғри чизиқ тенгламасини тузиш учун $M(r)$ нуқта M_1M туғри чизиқ буйича ҳаракатланади деб фараз қилайлик. Бу ҳолда



135 -чизма.

$$\overrightarrow{M_1M} = r - r_1$$

вектор билан s вектор ҳамма вақт бир-бирига параллел (коллинеар) булади. Демак:

$$r - r_1 = ts, \qquad (1)$$

бунда t бирор скаляр. Кейинги тенгликдан r ни топамиз.

$$r = r_1 + ts. \qquad (2)$$

Бу тенглама берилган туғри чизиқнинг *вектор шаклидаги тенгламаси* дейилади. (1) тенглама t нинг абсолют қиймати $\overrightarrow{M_1M}$ вектор узунлигининг s вектор узунлигига нисбатини билдиришини, ишораси эса у векторларнинг бир томонга ёки турли томонга йўналган булишини курсатади. r_1, s векторлар берилган ўзгармас векторлар булиб, r вектор ўзгарувчи вектордир. Шунинг учун $|r - r_1|$ модул қанча катта булса, t нинг абсолют қиймати ҳам шунча катта, яъни $M(r)$ нуқта $M_1(r_1)$ нуқтадан қанча узоқ булса, t нинг абсолют қиймати шунча катта ва аксинча, булади. $t = 0$ булганда (1) тенгламадан $r = r_1$ булишини топамиз, яъни $M_1(r_1)$ нуқтага $t = 0$ қиймат тўғри келади. Шундай қилиб, $M(r)$ нуқтанинг берилган тўғри чизиқдаги турли ҳолатига t нинг ҳам турли қиймати тўғри келади.

(2) тенгламадаги s вектор тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори*, t эса унинг *параметри* дейилади. t параметр M_1M масофани ёки M нуқтанинг M_1 нуқтадан бошлаб ўтган йўлига сарф бўлган вақтни билдиради. s йўналтирувчи вектор ўрнига унинг s° бирлик векторини олиш ҳам мумкин, бу ҳолда (2) тенглама

$$r = r_1 + ts^\circ \tag{3}$$

кўринишни олади.

80-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ КООРДИНАТА ШАКЛИДАГИ ПАРАМЕТРИК ВА КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

135- чизмада O нуқтани координаталар боши сифатида қабул қилиб, бу нуқтадан координаталар ўқларини ўтказамиз. r_1, r, s векторларнинг проекцияларини мос тартибда $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x, y, z\}$ ва $\{m, n, p\}$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда (1) тенглама координата шаклида қуйидаги учта тенгламага эквивалент бўлади:

$$x - x_1 = tm, \quad y - y_1 = tn\,, \quad z - z_1 = tp$$

ёки

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt\,, \quad z = z_1 + pt. \tag{4}$$

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг координата шаклидаги параметрик тенгламалари дейилади (t — параметр).

(4) тенгламаларга қараганда биз фазодаги тўғри чизиқ параметрик шаклда учта тенглама билан берилади деган хулосага келамиз.

Параметрик тенгламалардан t ни топамиз:

$$t = \frac{x - x_1}{m}, \quad t = \frac{y - y_1}{n}, \quad t = \frac{z - z_1}{p}$$

Демак,

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{5}$$

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг *каноник тенгламалари* дейилади. (5) тенгламалар фазодаги тўғри чизиқ ўзгарувчи x, y, z координаталарга нисбатан биринчи даражали 2 та тенглама билан берилишини кўрсатади.

(4) ва (5) тенгламалар $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган ва йўналтирувчи вектори $s\{m, n, p\}$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси экани равшан, m, n, p сонлар тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи коэффициентлари* дейилади. Тўғри чизиқнинг

йўналтирувчи вектори учун бирлик вектор олинганда, яъни $s = s^\circ$ бўлганда m, n, p коэффициентлар тўғри чизиқ билан Ox, Oy, Oz ўқлар орасидаги α, β, γ бурчакларнинг косинусларига тенг бўлади, бу ҳолда (4) параметрик тенгламалар ва (5) каноник тенгламалар мос тартибда

$$x = x_1 + t\cos\alpha, \quad y = y_1 + t\cos\beta, \quad z = z_1 + t\cos\gamma \tag{4'}$$

ва

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \tag{5'}$$

кўринишни олади. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.

Йўналтирувчи косинусларни йўналтирувчи коэффициентлар билан ифодалаш мумкин. Бунинг учун

$$\mathbf{s} = s\mathbf{s}^\circ$$

тенгликдан фойдаланамиз, бунда s скаляр $\mathbf{s}$ векторнинг узунлигидир. Кейинги тенгликни проекциялар билан ёзсак,

$$m = s\cos\alpha, \ n = s\cos\beta, \ p = s\cos\gamma \tag{6}$$

ҳосил бўлади; бу тенгликлар тўғри чизиқнинг йўналтирувчи коэффициентлари билан унинг йўналтирувчи косинусларининг бир-бирига пропорционаллигини кўрсатади. $\mathbf{s}$ векторнинг узунлиги $s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ эканини эътиборга олиб, (6) тенгликдан йўналтирувчи косинусларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m}{s} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \\ \cos\beta &= \frac{n}{s} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \\ \cos\gamma &= \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

(7) формулалар йўналтирувчи векторнинг узунлиги қандай бўлмасин, фазодаги тўғри чизиқнинг йўналиши йўналтирувчи коэффициентлар билан аниқланишини кўрсатади. Шунинг учун кўп масалаларда фазодаги тўғри чизиқнинг йўналиши $m:n:p$ нисбат шаклда берилади. m, n, p йўналтирувчи коэффициентларнинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлолмайди, чунки $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ бўлганда йўналтирувчи векторнинг ўзи ҳам ноль вектор бўлиб қолади ва бу ҳолда тўғри чизиқнинг фазодаги ўрни аниқ бўлмайди.

Аммо йўналтирувчи коэффициентларнинг баъзи бирлари нолга тенг бўлиши мумкин. Масалан $m = 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$ бўлсин. $m = 0$ бўлиши йўналтирувчи вектор Ox ўққа перпендикуляр эканини ёки қаралаётган тўғри чизиқнинг Ox ўққа перпендикуляр эканини билдиради. Бу ҳолда (4) параметрик тенгламалар

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + 0\,t, \quad (\text{ёки } x = x_1) \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt \end{aligned}\right| \qquad (4')$$

кўринишга келади; (5) каноник тенглама эса

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (5'')$$

шаклни олади. Нолга бўлиш мумкин эмаслиги бизга маълум, шунинг учун (5″) тенгламаларни қандай тушуниш керак, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб бериш учун (5″) тенгламаларни бундай ёзамиз:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n}; \quad \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Биринчи тенгламадан

$$n(x - x_1) = 0 \cdot (y - y_1) \text{ ёки } x - x_1 = 0.$$

Демак, (5″) тенгламалар

$$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

тенгламаларга айланди. Бу тенгламалар йўналтирувчи вектори $s(0,\ n,\ p)$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тасвирлайди. Демак, (5″) тенгламани шартли тенглама деб қараш керак, у тенглама $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, $s\{0,\ n,\ p\}$ йўналтирувчи векторга параллел тўғри чизиқни тасвирлайди. Йўналтирувчи коэффициентларнинг бошқалари нолга тенг бўлганда (5) тенгламалар шунга ўхшаш маънони билдириш шарти билан ёзилади.

1- мисол. (1, 3, 4) нуқтадан ўтган ва йўналтирувчи вектори $s = 2i + 3j$ бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

Ечиш. Бу мисолда $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $z_1 = 4$, $m = 2$, $n = 3$, $p = 0$. Буларни (5) тенгламаларга қўямиз:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{3} = \frac{z - 4}{0}.$$

Масалада талаб қилинган тўғри чизиқ тенгламалари

$$z = 4, \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{3}$$

кўринишда бўлади.

2- мисол. (2, 3, 0) нуқтадан ўтиб, Oz ўққа параллел тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламалари ёзилсин.

Ечиш. Тўғри чизиқ Oz ўққа параллел бўлгани учун у Ox ва Oy ўқларга перпендикуляр; демак $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$.

Демак, тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{1}$$

кўринишда бўлади. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини (4) га мувофиқ ёзамиз:

$$x=2,\ y=3,\ z=1+t.$$

81- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тўғри чизиқнинг (5) каноник тенгламалари ўзгарувчи x, y, z координаталарга нисбатан биринчи даражали иккита алгебраик тенгламалардан иборат. Бу тенгламаларнинг ҳар бири фазода бирор текисликни тасвирлайди. (5) тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқ шу текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган деса бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу тўғри чизиқдаги ҳар қандай нуқтанинг координаталари (5) тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантиради, яъни иккала текисликнинг умумий нуқтаси ва аксинча, координаталари (5) текисликлар тенгламаларини қаноатлантирувчи фазонинг нуқтаси (5) тўғри чизиқнинг (ёки текисликнинг умумий) нуқтасидир. Демак фазодаги тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишган чизиғи деб қараш мумкин. Бу текисликларнинг умумий тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари дейилади.

(8) текисликларнинг ўзаро кесишиши учун улар бир-бирига параллел булмасликлари керак. Демак,

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$$

пропорциялар бажарилмаса, қаралаётган (8) тенгламалар тўғри чизиқни тасвирлайди. Тўғри чизиқнинг (8) умумий тенгламаларидан унинг каноник тенгламалари (5) га ўтиш мумкин. Бунинг учун (8) тенгламаларда z ли ҳад билан D озод ҳадни тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказиб, ҳосил бўлган тенгламалар системасини, x, y га нисбатан ечамиз. Натижада

$$\left.\begin{aligned} x=az+b,\\ y=a_1z+b_1\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

тенгламалар ҳосил бўлади, бундаги a, b, a_1, b_1 коэффициентлар (8) тенгламалар системасининг коэффициентлари билан ифодаланган миқдорлардир. (8) ва (9) тенгламалар системалари бир-бирига эквивалент тенгламалар эканини кўриш қийин эмас. Шунинг учун (9) тенгламалар ҳам (8) тенгламалар билан ифодаланган тўғри чизиқни тасвирлайди.

Энди (9) тенгламаларнинг ҳар бирини z га нисбатан ечамиз:

$$\frac{x-b}{a}=z, \qquad \frac{y-b_1}{a_1}=z.$$

Бу тенгламаларни

$$\frac{x-b}{a}=\frac{y-b_1}{a_1}=\frac{z}{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шудай қилиб, тўғри чизиқнинг (8) кўринишдаги умумий тенгламалари унинг каноник кўринишдаги тенгламаларига келтирилди.

Энди (9) тенгламаларга эътибор берайлик. Бу тенгламаларнинг ҳар бири фазода текисликни тасвирлаши бизга маълум. (9) тенгламаларнинг биринчиси xOz текисликдаги тўғри чизиқни билдиради ва бу тўғри чизиқ фазодаги $x=az+b$ текислик билан xOz текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлади, шу билан бирга бу текислик Oy ўққа параллел. Демак, xOz текисликдаги $x=az+b$ тўғри чизиқ фазодаги (9) тўғри чизиқнинг шу текисликдаги проекциясидир. Шунга ўхшаш yOz текисликдаги $y=a_1z+b_1$ тўғри чизиқ фазодаги (9) тўғри чизиқнинг шу текисликдаги проекциясидир. (9) тенгламаларнинг ҳар бири билан тасвирланган текислик фазода бу тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқни xOz ва yOz текисликларга проекцияловчи текисликлар дейилади.

(9) тенгламалар фазодаги тўғри чизиқнинг проекциялари билан берилган тенгламалари дейилади.

1- мисол. $x+3y-5z+6=0$, $2x-y+3z-3=0$ тўғри чизиқ тенгламаларини xOz ва yOz текисликлардаги проекциялари билан берилган тенгламалар шаклида ёзилсин.

Ечиш. Берилган тенгламалардан x ни чиқариб, ҳосил бўлган тенгламани y га нисбатан ечамиз, натижада

$$y=\frac{13}{7}z-\frac{15}{7}$$

ҳосил бўлади. Энди берилган тенгламалардан y ни чиқарамиз ва ҳосил бўлган тенгламани x га нисбатан ечамиз, натижада

$$x=-\frac{4}{7}z+\frac{3}{7}$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, берилган тўғри чизиқнинг xOz ва yOz текисликлардаги проекциялари ушбу тенгламалар билан ифода этилади:

$$x=-\frac{4}{7}z+\frac{3}{7}, \quad y=\frac{13}{7}z-\frac{15}{7}.$$

2- мисол. $2x-5y+z-3=0$; $3x-2y+3z-6=0$ тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқнинг каноник кўринишдаги тенгламалари ёзилсин.

Ечиш. Берилган тенгламалардан дастлаб x ни, ундан кейин y ни чиқарамиз, натижада

$$11y + 3z - 3 = 0, \quad 11x + 13z - 24 = 0$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Энди тенгламаларни z га нисбатан ечамиз.

$$z = \frac{-11y + 3}{3}, \quad z = \frac{-11x + 24}{3}.$$

Бу тенгламаларнинг иккала томонини — 11 га бўлиб, уни

$$\frac{x - \frac{24}{11}}{3} = -\frac{y - \frac{3}{11}}{3} = -\frac{z}{11}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

82- §. БЕРИЛГАН ИККИ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз.

Бунинг учун $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтиб, M_1M_2 вектор бўйича йўналган тўғри чизиқ тенгламасини тузиш керак бўлади; демак, M_1M_2 векторни йўналтирувчи вектор деб қабул қилиш керак. M_1M_2 векторнинг проекциялари:

$$m = x_2 - x_1, \quad n = y_2 - y_1, \quad p = z_2 - z_1.$$

Шунинг учун берилган M_1 ва M_2 нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10}$$

Мисол. $M_1(1, 2, 3)$ ва $M_2(-1, -2, -3)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик. Бу мисолда $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$, $z_2 = -3$. Буларни (10) тенгламага қўямиз:

$$\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 2}{-2 - 2} = \frac{z - 3}{-3 - 3}$$

ёки

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

83- §. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Фазодаги икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак сифатида фазонинг исталган нуқтасидан шу тўғри чизиқларга параллел ўтказилган икки тўғри чизиқнинг ташкил қилган бурчаклари-дан исталганини оламиз. Бу бурчак 0 билан π ўртасида ўзгаради.

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка тенглигини биламиз. Икки тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари берилган бўлсин:

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари $s\{m_1, n_1, p_1\}$ ва $s_1\{m_2, n_2, p_2\}$ бўлсин.

Берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни γ билан белгиласак, s ва s_1 векторлар орасидаги бурчак ҳам γ бўлади. Икки вектор орасидаги бурчакни топиш формуласига кўра

$$\cos\gamma=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (11)$$

Агар қаралаётган тўғри чизиқлар бир-бирига параллел бўлса, уларнинг йўналтирувчи s, s_1 векторлари ҳам бир-бирига параллел, яъни

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (12)$$

Берилган икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти (12) дан иборат.

Агар берилган тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда, уларнинг йўналтирувчи s, s_1 векторлари ҳам бир-бирига перпендикуляр:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad (13)$$

бўлади. Берилган тўғри чизиқларнинг бир-бирига перпендикулярлик шарти (13) дан иборат.

1- мисол.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{3}$$

ва

$$\frac{x+6}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топайлик. (11) формулага мувофиқ

$$\cos\gamma=\pm\frac{1\cdot3+(-2)\cdot2+3(-1)}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{9+4+1}}=\pm\frac{2}{7},$$

демак,

$$\gamma \approx 74^\circ \quad \text{ёки} \quad \gamma \approx 106^\circ.$$

2- мисол.

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{2}$$

ва

$$\frac{x+2}{8} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-3}{4}$$

тўғри чизиқлар бир-бирига параллел, чунки (12) шарт бу тўғри чизиқлар учун бажарилади:

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

3- мисол.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{ва} \quad \frac{x-15}{4} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-11}{3}$$

тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр, чунки (13) шарт бажарилади:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 0.$$

4- мисол. $M(1, -1, 2)$ нуқтадан ўтиб,

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 3 = 0, \\ x + y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқ тенгламаларини каноник шаклга келтирамиз. У ҳолда

$$\frac{x + \frac{3}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{y}{-1} = \frac{-z + \frac{15}{7}}{\frac{1}{7}}$$

ҳосил бўлади. Демак, $m = \frac{10}{7}$, $n = -1$, $p = \frac{1}{7}$, изланаётган тўғри чизиқ $M(1, -1, 2)$ нуқтадан ўтиб, унинг йўналтирувчи коэффициентлари $\frac{10}{7}$, -1, $\frac{1}{7}$ га пропорционал бўлгани учун бу тўғри чизиқ тенгламалари

$$\frac{x-1}{\frac{10}{7}} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{\frac{1}{7}}.$$

84- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ КЕСИШИШИ

Фазодаги икки тўғри чизиқ, умуман айтганда, бир текисликда ётмайди, масалан, улар учрашмас бўлиши мумкин.

Берилган икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш шартини излаймиз.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_1 t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_2 t$$

кесишувчи икки тўғри чизиқнинг вектор шаклидаги тенгламалари бўлсин. Биринчи тўғри чизиқда $M_1(\mathbf{r}_1)$ ва иккинчи тўғри чизиқда $M_2(\mathbf{r}_2)$ нуқталар оламиз (136- чизма). Бу тўғри чизиқлар бир текисликда ётса, $M_1M_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ вектор ҳам шу текисликда ётади ва аксинча, яъни бу вектор тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ векторлари билан компланар (бир текисликда ётувчи) бўлади.

Учта вектор компланар бўлиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{s}_1\,\mathbf{s}_2 = 0. \tag{14}$$

Бу тенглик вектор шаклидаги тенгламалари билан берилган икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш (компланарлик) шартидир. (14) шартни координата шаклида ёзамиз. Агар $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{s}_1(m_1, n_1, p_1), \mathbf{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ фараз қилинса, изланган шарт қуйидагидан иборат:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Мисол.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-4} \quad \text{ва} \quad \frac{x-9}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$$

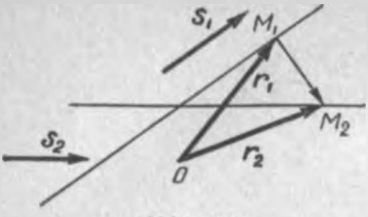
тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси топилсин.

Ечиш. (15) шартнинг бажарилишини текшириб кўрамиз:

$$\begin{vmatrix} 9-1 & 2+2 & -1-2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(биринчи ва иккинчи устун элементлари мос тартибда пропорционал). Демак, тўғри чизиқлар бир текисликда ётади, шунинг учун улар кесишади. Кесишиш нуқтасини топайлик; тўғри чизиқлар тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, & z = \frac{x}{6} - \frac{5}{2}; \\ y = -\frac{1}{4}z - \frac{3}{2}, & z = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}. \end{cases}$$



136 -чизма.

Булардан биринчи учта тенгламани биргаликда ечамиз, натижада

$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = -2$$

ҳосил бўлади. Буларни тўртинчи тенгламага қўямиз:

$$-2 = \frac{-1}{3} - \frac{5}{3}; \quad -2 = -2.$$

Демак (3, − 1, − 2) нуқтанинг координаталари иккала тўғри чизиқнинг тўртала тенгламасини қаноатлантиради, бу нуқта тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидир.

85- §. ТЕКИСЛИКЛАР ДАСТАСИНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Берилган тўғри чизиқдан ўтадиган текисликлар тўплами текисликлар дастаси дейилади.

Текисликлар дастасининг тенгламасини тузамиз. Тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

бўлсин. Бу тенгламалардан иккинчисини бирор ихтиёрий λ параметрга кўпайтириб биринчисига қўшамиз. Натижада

$$Ax + By + Cz + D + \lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \tag{17}$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама ўзгарувчи x, y, z координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама бўлиб, текисликни ифодалайди. (16) тўғри чизиқдаги ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари (17) тенгламани ҳам қаноатлантиради; бошқача қилиб айтганда (16) тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси (17) текисликка ҳам қарашлидир. Демак, (17) текислик (16) тўғри чизиқдан ўтадиган текисликдир. Аммо λ параметр ихтиёрий бўлгани учун у турли қийматлар олиши мумкин. λ нинг турли қийматларида (17) тенглама (16) тўғри чизиқдан ўтувчи турли текисликларни тасвирлайди. Демак, (17) тенглама (16) тўғри чизиқдан ўтадиган *текисликлар дастасининг* тенгламасидир. Фазонинг ҳар қандай $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтасидан ва (16) тўғри чизиқдан ёлғиз битта текислик ўтади. Бу текислик тенгламасини тузиш учун M_1 нуқтанинг x_1, y_1, z_1 координаталарини (17) тенгламадаги ўзгарувчи x, y, z координаталар ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламадан λ ни аниқлаймиз.

λ нинг топилган қийматини (17) га қўйиб изланаётган текислик тенгламасини тузамиз. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта (16) тўғри чизиқда ҳам

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 6 \tag{18}$$

текисликда ҳам ётмаслиги керак, чунки бу ҳолда (17) тенгламадан λ ни аниқлаб бўлмайди.

Мисол.

$$x+y-3z+5=0; \qquad 2x-3y+z-7=0$$

тўғри чизиқдан ва M (1, 2, 3) нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Дастлаб берилган тўғри чизиқдан утган текисликлар дастасининг тенгламасини тузамиз:

$$x+y-3z+5+\lambda(2x-3y+z-7)=0,$$

Бу текисликлар дастасидан $M(1, 2, 3)$ нуқтадан ўтувчи текисликни ажратиб олишимиз керак. Бундай текисликнинг тенгламасини $M(1, 2, 3)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантириши лозим. Шунинг учун текисликлар дастасининг тенгламасидаги x, y, z ўзгарувчи кординаталар ўрнига $M(1, 2, 3)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз

$$1+2-3\cdot 3+5+\lambda(2-1-3\cdot 2+3-7)=0,$$

бу тенгламадан

$$\lambda=-\frac{1}{8}.$$

λ нинг бу қийматини даста тенгламасига қўямиз:

$$x+y-3z+5-\frac{1}{8}(2x-3y+z-7)=0$$

ёки

$$\frac{3}{4}x+\frac{11}{8}y-\frac{25}{8}z+\frac{47}{8}=0$$

ёки

$$6x+11y-25z+47=0$$

Бу изланаётган текислик тенгламасидир.

86- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕКИСЛИК БИЛАН ТАШКИЛ ҚИЛГАН БУРЧАГИ

Тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси ташкил қилган бурчакка тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб айтилади. Тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

текисликнинг тенгламаси эса

$$Ax+By+Cz+D=0$$

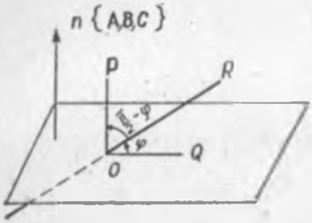
бўлсин. Буларнинг орасидаги бурчак φ бўлсин (137- чизма). Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган O нуқтасидан тўғри чизиқнинг текисликдаги OQ проекциясига ва берилган текисликка перпендикуляр қилиб OP тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу ҳолда

$$\angle ROP = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

ва

$$\cos\left(\frac{\pi}{7} - \varphi\right) = \sin\varphi.$$

Тўғри чизиқ ва текисликнинг берилган тенгламаларига қараганда тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори проекциялари m, n, p бўлиб, текисликнинг нормал вектори проекциялари A, B, C дир. Иккинчи томондан бу векторлар мос тартибда OR тўғри чизиққа ва OP перпендикулярга параллел, шунинг учун улар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ бурчакни 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради деб қабул қиламиз).



137 -чизма.

Икки вектор орасидаги бурчак косинусини топиш формуласига кўра ($\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ бўлгани учун)

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad (19)$$

($0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун формула суратидаги ифоданинг абсолют қиймати олинди). Бу формула тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни аниқлайди. Агар тўғри чизиқ билан текислик бир-бирига параллел бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори билан текисликнинг нормал вектори бир-бирига перпендикуляр бўлади, яъни

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (20)$$

Бу шарт тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик шартидир.

Агар тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, уларнинг йўналтирувчи вектори билан нормал вектори бир-бирига параллел бўлади. Шунинг учун

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (21)$$

Бу тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик шартидир.

1- мисол. $y = 2x + 1$, $2z = 5x + 6$ тўғри чизиқ ва $x + 2y - z + 3 = 0$ текислик орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Тўғри чизиқ тенгламаларини каноник кўринишга келтирамиз:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\frac{5}{2}}.$$

Демак, $m = 1$, $n = 2$, $p = \frac{5}{2}$.

Текислик тенгламасига қараганда

$$A = 1,\ B = 2,\ C = -1.$$

Буларни (19) формулага қўямиз.

$$\sin\varphi = \frac{\left|1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

ёки

$$\sin\varphi = \frac{5}{3\sqrt{30}}.$$

2- мисол. $(a,\ b,\ c)$ нуқтадан ўтиб,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

текисликка параллел бўлган ҳамма тўғри чизиқлар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. 1-усул (векторлар усули). $(a,\ b,\ c)$ нуқтанинг радиус векторини $\boldsymbol{r}_1$ билан, берилган текисликнинг нормал векторини $\boldsymbol{n}$ билан, изланаётган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини $\boldsymbol{s}$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда $(a,\ b,\ c)$ нуқтадан ўтиб, $\boldsymbol{s}$ га параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{s}t.$$

Бу тўғри чизиқ берилган текисликка параллел бўлгани учун $\boldsymbol{s}$ вектор билан $\boldsymbol{n}$ вектор бир-бирига перпендикуляр, яъни

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s} = 0.$$

Буни эътиборга олиб, тўғри чизиқ тенгламасининг иккала томонини $\boldsymbol{n}$ векторга скаляр кўпайтирамиз. Натижада

$$\boldsymbol{rn} = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n} + \boldsymbol{ns}t$$

ёки

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{n} = 0$$

ҳосил бўлади.

Бу тенглама радиус-вектори $\mathbf{r}_1$ бўлган нуқтадан ўтувчи, нормал вектори $\mathbf{n}$ бўлган текислик тенгламасидир. Демак, изланаётган геометрик ўрин текислик экан. Бу тенгламани координаталар шаклида ёзиш мумкин:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

2- усул. $(a,\ b,\ c)$ нуқтадан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Изланаётган тўғри чизиқлар билан берилган текисликнинг параллеллик шарти

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Бу тенгликдаги $m,\ n,\ p$ ўрнига тўғри чизиқ тенгламасидаги уларга пропорционал бўлган $x-a,\ y-b,\ z-c$ ни қўйсак

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

ҳосил бўлади.

3- мисол.

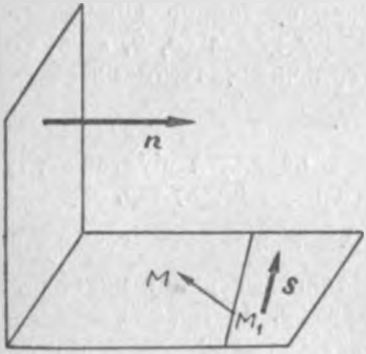
$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

тўғри чизиқдан ўтиб,

$$x-3y+5z=4$$

текисликка перпендикуляр текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Изланаётган текислик берилган тўғри чизиқдан ўтгани учун бу тўғри чизиққа қарашли $M_1(4,\ -2,\ 3)$ нуқтадан ҳам ўтади ва тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлган $\mathbf{s}\{2,\ 1,\ 4\}$ векторга параллел бўлиб, берилган текисликнинг $\mathbf{n}\{1,\ -3,\ 5\}$ нормал векторига ҳам параллел. $M(x,\ y,\ z)$ изланаётган текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда $\overrightarrow{M_1M}\ \{x-4,\ y+2,\ z-3\}$ вектор изланаётган текисликдаги вектор бўлгани учун $\overrightarrow{M_1M},\ \mathbf{s},\ \mathbf{n}$ векторлар компланар векторлардир (138- чизма). Шунинг учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг:



138- чизма.

$$\overrightarrow{M_1M}\,\mathbf{s}\,\mathbf{n}=0$$

ёки координаталар шаклида

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

бундан

$$17(x-4) - 6(y+2) - 7(z-3) = 0$$

ёки

$$17x - 6y - 7z - 59 = 0$$

ҳосил бўлади.

4- мисол.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

ва

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$$

параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Изланаётган текислик берилган параллел тўғри чизиқлардаги (2, 1, 3), (— 1, 1, 0) нуқталардан ўтади. M_1 нуқтадан ўтувчи текисликлар дастаси

$$A(x-2) + B(y-1) + C(z-3) = 0. \qquad (\alpha)$$

Бу дастага қарашли бўлиб $M_2(-1, 1, 0)$ нуқтадан ўтувчи текислик

$$A(-1-2) + B(1-1) + C(0-3) = 0$$

ёки

$$3A + 0B + 3C = 0 \qquad (\beta)$$

шартни қаноатлантиради. Бундан ташқари, изланаётган текислик берилган параллел тўғри чизиқлардан ўтади, яъни уларнинг ҳар бирига параллеллик шартини қаноатлантиради:

$$2A + 1 \cdot B + 2C = 0. \qquad (\gamma)$$

A, B, C номаълум коэффициентларни аниқлаш учун бир жинсли учта (α), (β), (γ) тенглама системаси ҳосил бўлади. Бу системанинг нолдан фарқли ечимининг мавжудлиги шартидан фойдаланамиз:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$x - z + 1 = 0.$$

87-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИКНИНГ КЕСИШИШИ

Берилган

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (22)$$

тўғри чизиқнинг берилган

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (23)$$

текислик билан кесишган нуқтасини топайлик, яъни (22), (23) тенгламалар системасининг ечимларини топайлик. (22), (23) тенгламалар системасини параметр киритиш йўли билан ечиш қулай. (22) пропорциянинг умумий қийматини t билан белгилаймиз:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}=t.$$

Бу тенгламалардан:

$$x=a+mt; \quad y=b+nt; \quad z=c+pt. \qquad (24)$$

x, y, z нинг бу қийматларини (23) тенгламага қўямиз:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0$$

ёки

$$Aa+Bb+Cc+D+t(Am+Bn+Cp)=0.$$

Бу тенгламадан

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc}{Am+Bn+Cp}. \qquad (25)$$

t нинг бу қийматини (24) тенгламаларга қўйиб, берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топамиз.

Агар (25) формулада

$$Am+Bn+Cp\neq 0$$

бўлса, аниқ битта қиймат ҳосил бўлади ва шунинг учун тўғри чизиқ билан текислик битта нуқтада кесишади.

Агар

$$Am+Bn+Cp=0$$

бўлиб

$$Aa+Bb+Cp+D\neq 0$$

бўлса, биринчи тенгликка кўра тўғри чизиқ текисликка параллел ва иккинчи тенгсизлик эса тўғри чизиқдаги (a, b, c) нуқтанинг текисликда ётмаслигини билдиради. Демак, тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди.

Агар

$$Am + Bn + Cp = 0,$$
$$Aa + Bb + Cc + D = 0$$

шартлар бажарилса, бу тўғри чизиқ билан текислик ўзаро параллел ва текислик тўғри чизиқдаги (a, b, c) нуқтадан ўтади. Демак, тўғри чизиқ текисликда ётади.

1- мисол.

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқ билан $3x + 5y - z + 8 = 0$ текисликнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Ечиш. t параметр киритамиз:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2} = t.$$

Бу тенгламалардан x, y, z ни топамиз:

$$x = 2t + 1,\ y = 3t - 2,\ z = 2t - 1.$$

Буларни берилган текислик тенгламасига қуямиз:

$$3(2t + 1) + 5(3t - 2) - (2t - 1) + 8 = 0$$

ёки

$$19t = -2,\ t = -\frac{2}{19}.$$

Демак,

$$x = -2\cdot\frac{2}{19} + 1 = \frac{15}{19};$$
$$y = -3\cdot\frac{2}{19} - 2 = -\frac{44}{19};$$
$$z = -2\cdot\frac{2}{19} - 1 = -\frac{23}{19}.$$

Шундай қилиб, берилган тўғри чизиқ билан текислик $\left(\frac{15}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{23}{19}\right)$ нуқтада кесишади.

2- мисол.

$$y = 2x + 5, \qquad z = 3x - 6$$

тўғри чизиқ билан

$$5x - 3y + z + 7 = 0$$

текисликнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Ечиш. Бу мисолни параметр киритмасдан ечиш қулайроқ. Тўғри чизиқ тенгламаларидан y, z нинг ифодаларини текислик тенгламасига қуямиз:

$$5x - 3(2x + 5) + (3x - 6) + 7 = 0$$

ёки

$$2x - 14 = 0,$$

бундан

$$x = 7.$$

Демак,

$$y = 2\cdot 7 + 5 = 19, \qquad z = 3\cdot 7 - 6 = 15.$$

Шундай қилиб берилган тўғри чизиқ билан текислик (7, 19, 15) нуқтада кесишади.

Машқлар

1. $M(1, -2, 3)$ нуқтадан ўтиб, $s\ (4, 3, 5)$ векторга параллел тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини ёзинг.

2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{2}$ тўғри чизиқнинг қайси нуқтадан ўтганини ва йўналтирувчи векторини аниқланг.

3. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг каноник тенгламалари параметрик шаклда ёзилсин:

1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{1}$; 2) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{2}$;

3) $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+1}{2}$; 4) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

4. Тўғри чизиқлар берилган:

1) $\begin{cases} x = z - 2, \\ y = 3 - 2z. \end{cases}$ 2) $\frac{z-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{1}$.

Бу тўғри чизиқларнинг xOy, xOz ва yOz текисликлардаги изларини топинг.

5. Тўғри чизиқ $x - 3y + 2z - 4 = 0$, $3x - y + 4z - 5 = 0$ тенгламалар билан берилган. Бу тўғри чизиқнинг каноник, параметрик ҳамда проекциялар шаклидаги тенгламаларини ёзинг.

6. $A(1, 2, 3)$ нуқтадан чиқиб $v\ (3, 2, 1)$ тезлик билан тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилувчи нуқта траекториясининг тенгламасини тузинг.

7. $x = 5$, $y = 2$ тўғри чизиқни ясанг ва унинг йўналтирувчи вектори ҳамда йўналтирувчи косинусларини топинг.

8. Тўғри чизиқларнинг вазиятини ва йўналтирувчи векторларини аниқланг.

1) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4 = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$

9. $A(3, -1, -2)$ ва $(-1, 2, 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин ва тўғри чизиқ ясалсин.

10. $M(2, -2, 3)$ ва $N(1, -3, 4)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва унинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

11. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг:

1) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0, \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ ҳамда $\begin{cases} 3x - 5y + z - 2 = 0, \\ 2x - 3y - z - 3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ ҳамда $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0, \\ 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$

12. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг:

$$1)\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-4}{2} \text{ ва } \frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z+4}{-3};$$

$$2)\ \begin{cases} y=\frac{3}{2}x+5, \\ y=\frac{1}{2}z+1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} y=-2x+2, \\ y=3z-17. \end{cases}$$

13. (1, 2, — 3) нуқтадан ўтиб, $x-2y-1=0$, $2z-y-1=0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

14. $x=2t$, $y=3t$, $z=t$ тўғри чизиқ билан $x=t$, $y=1-t$, $z=1+t$ тўғри чизиқ бир-бирига перпендикуляр эканлигини кўрсатинг.

15. (1, — 4, 5) нуқтадан Oz ўққа ўтказилган перпендикулярнинг тенгламасини ёзинг.

16. $M(2, 3, 4)$ нуқтадан $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

17. Қуйидаги тўғри чизиқлар битта текисликда ётадими?

$$1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+6}{4} \text{ ҳамда } \frac{x-4}{5}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+1}{13};$$

$$2)\ \begin{cases} 5x-3z=0, \\ 5y+z-35=0 \end{cases} \text{ ҳамда } \begin{cases} 3x-z-8=0, \\ 3y-2z+5=0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 4x+z-1=0, \\ x-2y+3=0 \end{cases} \text{ ҳамда } \begin{cases} 3x+y-z+4=0, \\ y+2z-8=0. \end{cases}$$

18. (2, — 3, 1) нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{4} \text{ ҳамда } \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{2}$$

тўғри чизиқлар билан кесишувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

19. $A(1, 2, -3)$ нуқтадан $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламасини тузинг.

20. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{3}$ тўғри чизиқ билан $\frac{x+4}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z}{2}$ тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ҳамма тўғри чизиқлар орасидан $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-7}{1}$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқни топинг.

21. $x-2y+3z-5=0$, $3x+5y-4z-7=0$ тўғри чизиқдан ва (0, 1, 2) нуқтадан ўтган текислик тенгламасини тузинг.

22. (3, 2, — 1) нуқтадан ҳамда $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{4}$ тўғри чизиқдан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

23. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{2}$ тўғри чизиқ билан $2x-4y+4z-1=0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

24. (4, 5 — 6) нуқтадан

$$1)\ x-y+z-5=0;\quad 2)\ x-2y-3=0;\quad 3)\ y-5=0$$

текисликка туширилган перпендикулярнинг тенгламасини тузинг.

25. (2, — 3, 1) нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-1}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламасини тузинг.

26. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{n}=\frac{z-1}{6}$ тўғри чизиқ $4x+2y-5z+6=0$ текисликка параллел жойлашиши учун n нинг қиймати қандай бўлиши керак?

27. (3, 4, — 2) нуқтадан ўтиб, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ ҳамда $\frac{x+1}{1}=$ $=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ тўғри чизиқларга параллел текисликнинг тенгламасини тузинг.

28. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-2}$ тўғри чизиқ билан

$$x-2y+z-2=0$$

текисликнинг кесишган нуқтасини топинг.

29. (3, 1, 2) нуқтадан ҳамда

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$$

тўғри чизиқдан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

30. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ ҳамда $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{2}$

параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ўн иккинчи боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

88- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Биз IX бобда фазодаги сиртнинг қандай тенглама билан ифодаланишини, ясовчиси координата ўқларидан бирига параллел цилиндрик сиртларнинг тенгламаларини, сиртларнинг кесишган чизиқлари, сиртларнинг кесишган нуқтасини аниқлаш масалалари билан танишган эдик.

Бу бобда иккинчи тартибли сиртларнинг тенгламалари ва бу тенгламаларнинг кўринишига қараб, сиртларнинг фазодаги шаклини аниқлаш масалаларини кўрамиз.

Тўғри бурчакли Декарт системасида ўзгарувчи x, y, z координаталарга нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама билан тасвирланган сиртлар иккинчи тартибли сиртлар деб аталади,

x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0. \quad (1)$$

Бу тенгламада A, B, C, D, E, F коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли булиши керак,

Агар бирор сирт битта Декарт системасида n- даражали алгебраик тенглама билан тасвирланса, у сирт бошқа бир Декарт системасида ҳам n- даражали алгебраик тенглама билан тасвирланади[1].

n- даражали алгебраик тенглама билан тасвирланган сирт *n- тартибли сирт* дейилади.

Биз содда кўринишдаги иккинчи даражали тенгламаларнинг баъзиларини текширамиз.

89- §. АЙЛАНМА СИРТ

Кейинги параграфда қараладиган иккинчи тартибли сиртлар баъзи ҳолларда айланма сиртни тасвирлайди. Бу параграфда айланма сирт ҳақида тушунча киритамиз.

---

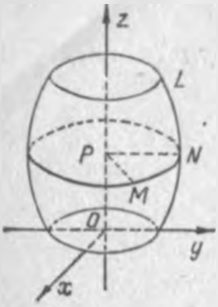
[1] Бу 30- § даги каби 2- тартибли чизиқлар учун кўрсатилгандек исбот қилинади, шунинг учун бу ерда уни исбот қилмаймиз.

yOz текисликда бирор L чизиқ (139- чизма).

$$F(Y, Z) = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин. L чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини тузамиз. Соддалик учун чизиқнинг ҳамма нуқталари учун $Y \geqslant 0$ деб фараз қилайлик.

$M(x, y, z)$ нуқта изланаётган айланма сиртнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтани L чизиқнинг бирор $N(O, Y, Z)$ нуқтасининг айланиши пайтидаги бирор ҳолати деб қараш мумкин. N нуқта Oz ўқ атрофида айланиши натижасида маркази $P(O, Oz)$ нуқтада бўлиб, радиуси Y га тенг бўлган айлана чизади; бу айлана ҳамма вақт xOy текисликка параллел текисликда ётади. Шунинг учун M ва N нуқталарнинг аппликаталари бир хил, яъни $Z = z$.



139- чизма.

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

PM ва PN лар айлананинг радиуси бўлгани учун

$$PM = PN = Y.$$

Демак,

$$Y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z ва Y ларнинг ифодаларини L чизиқ тенгламасига қўямиз, натижада айланма сирт тенгламаси:

$$F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$

кўринишга келади.

Агар L чизиқнинг ҳамма нуқталари учун $Y \geqslant 0$ бўлмаса, у ҳолда $Y < 0$ бўлиши мумкин эди, бу ҳолда $PN = -Y$ ёки

$$Y = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Бу ҳолда айланма сирт тенгламаси

$$F\left(-\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0$$

кўринишда бўлади.

Иккала ҳолни бирлаштириб, yOz текисликдаги L чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини умуман

$$F\left(\pm\sqrt{x + y^2},\ z\right) = 0$$

кўринишда ёзамиз.

Шундай қилиб, *yOz текисликдаги L чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузиш учун чизиқ тенгламасидаги y ни* $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ *билан алмаштирилади.*

Бошқа координаталар текислигидаги текис чизиқларнинг бирор координата ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламаси шу қоидага ўхшаш қоида билан тузилади.

1- мисол. $y = z$ тўғри чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Юқоридаги қоидага асосан тўғри чизиқ тенгламасидаги y ни $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ билан алмаштирамиз:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z$$

ёки

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

Бу изланаётган айланма сирт тенгламасидир. Айланма сирт *доиравий конус* сирт экани равшан.

2- мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипснинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Эллипс тенгламасидаги z ни $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ билан алмаштирамиз: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$

Агар берилган эллипсни Oz ўқ атрофида айлантирсак,

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ҳосил бўлади. Бу айланма сирт *айланма эллипсоид* дейилади. $a > c$ бўлса, *чўзиқ айланма эллипсоид,* $a < c$ бўлса, *сиқиқ айланма эллипсоид* ҳосил бўлади. $a = c$ бўлганда бу сиртлар *сферага* айланади.

3-мисол. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бу мисолда y ни $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ билан алмаштирамиз. Натижада

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу сирт *икки ковакли гиперболоид* дейилади.

90- §. ЭЛЛИПСОИД

Тўғри бурчакли Декарт системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

тенглама билан тасвирланган сирт эллипсоид дейилади. a, b, c эллипсоиднинг ярим ўқларидир. Эллипсоид қандай шаклдаги сирт эканлигини параллел кесимлар ёрдамида текширамиз (140- чизма).

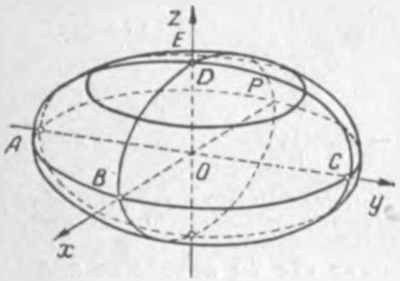
Дастлаб эллипсоидни xOy текислик билан кесамиз. Бу текисликнинг тенгламаси $z=0$. Шунинг учун (2) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

шаклга келади. Аммо

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases} \tag{3}$$

тенгламалар бирликда xOy текисликдаги эллипсни тасвирлайди. Демак (1) эллипсоидни xOy текислик билан кессак, ярим уқлари a, b булган эллипс ҳосил булади (140- чизмада $ABCDA$ эллипс).



140- чизма.

Шунга ухшаш (1) эллипсоидни xOz ва yOz текисликлар билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases} \tag{4}$$

ва

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases} \tag{5}$$

эллипслар ҳосил булади.

Энди (2) эллипсоидни xOy текисликка параллел $z=h$ текислик билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases} \tag{6}$$

чизиқ ҳосил булади. Бу чизиқ ярим уқлари

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

бўлган эллипсни билдиради. Бунда h нинг қиймати 0 дан $\pm c$ гача ўзгара олади, чунки $|h| > c$ бўлса, a_1, b_1 нинг қийматлари мавҳум булиб қолади, $h = 0$ бўлганда (6) тенглама (3) тенгламага айланади ва xOy текисликдаги эллипсни тасвирлайди. $|h| = c$ бўлганда эса (6) эллипс Oz ўқдаги $(0, 0 \pm c)$ нуқтага айланади ва $z = \pm c$ текислик эллипсоиднинг бу нуқтасига уринма текислик бўлади.

Бундан кўринадики, $z = h$ кесувчи текислик xOy текисликдан узоқлашиб борган сари кесимда ҳосил бўлган эллипслар кичиклашиб боради ва $|h| = c$ бўлганда нуқтага айланади.

Эллипсоидни yOz, xOz текисликлар билан кесганимизда ҳам шунга ўхшаш ҳоллар юз беради.

Бу текширишлар эллипсоид 140- чизмадаги кўринишда бўлишини билдиради.

(2) эллипсоид тенгламасида x, y, z нинг квадратлари қатнашади, шунинг учун координаталар боши O эллипсоиднинг *симметрия маркази*, xOy, yOz ва xOz текисликлар унинг симметрия текисликлари ва Ox, Oy, Oz ўқлар *симметрия ўқлари* бўлади.

Агар a, b ва c лар бир-бирига тенг бўлмаса, (2) эллипсоид *уч ўқли эллипсоид* дейилади (140- чизмада $OB = a$, $OC = b$, $OE = c$).

Агар $a = b$ бўлса, $ABCD$ эллипс айлана бўлиб (2) тенглама

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (7)$$

кўринишга келади. Бу эллипсоид ушбу

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипснинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлади деб қараш мумкин.

(7) эллипсоидни xOy текисликка параллел бўлган $z = h$ текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right), \\ z = h \end{cases}$$

айлана ҳосил бўлади.

Агар $a < c$ бўлса, (7) эллипсоид *сиқиқ айланма эллипсоид*, $a > c$ бўлганда эса *чўзиқ айланма эллипсоид* дейилади, $a = b = c$ булган эллипсоид сферага айланади.

1- мисол. $5x^2 + 15y^2 + 25z^2 - 75 = 0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини 75 га бўлиб, уни

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{3} = 1$$

шаклга келтирамиз. Демак, берилган тенглама ўқлари $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{3}$ бўлган уч ўқли эллипсоид.

2- мисол. $16x^2-64x+3y^2-6y+16z^2+19=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Ечиш. Тенгламанинг чап томонида бир хил ўзгарувчиларнинг тўла квадратларини ажратамиз. Натижада

$$16(x-2)^2+3(y-1)^2+16z^2-48=0$$

ҳосил бўлади. Энди координата бошини (2, 1, 0) нуқтага, координата ўқларини эса эски координата ўқларига параллел кўчириб, тенгламани янги $x'Oy'$ системага нисбатан ёзамиз. Тенглама

$$16x'^2+3y'^2+16z'^2-48=0$$

кўринишни олади. Бу тенгламани

$$\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{16}+\frac{z'^2}{3}=1$$

ёки

$$\frac{x'^2+z'^2}{3}+\frac{y'^2}{16}=1$$

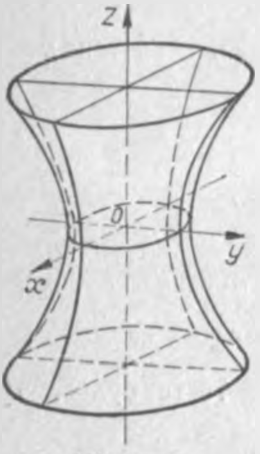
шаклда ёзиш мумкин. Бу айланма эллипсоиддир.

91- §. БИР ПАЛЛАЛИ ГИПЕРБОЛОИД

Тўғри бурчакли Декарт системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8}$$

тенглама билан тасвирланган сирт бир паллали гиперболоид деб аталади.



141- чизма.

Бир паллали гиперболоидни xOy текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases} \tag{9}$$

чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ эллипсдир (141- чизма).

Агар уни xOy текисликка параллел

$$z=h$$

текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases} \tag{10}$$

эллипс ҳосил бўлади. Бу эллипснинг ярим ўқлари

$$a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\ b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

лардан иборат. Бундан h нинг қиймати 0 дан ∞ гача ўзгариб борганда a_1, b_1 ярим ўқлар ҳақиқий қийматга эга бўла олади. (8) гиперболоидни $z = h$ текислик билан кесганда ҳосил бўладиган бу эллипсларнинг xOy текисликдан узоқлашган сари катталашиб боришини ва бу эллипслардан энг кичиги xOy текисликдаги (9) эллипс эканини билдиради. Энди (8) гиперболоидни xOz ва yOz текисликлар билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ва

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \tag{12}$$

гиперболалар ҳосил бўлади. Булардан (11) гиперболанинг ҳақиқий ўқи Ox ўқ бўлиб, (12) гиперболанинг ҳақиқий уқи эса Oy уқидир.

(10) тенглама билан тасвирланган эллипснинг ярим уқлари (11), (12) гиперболанинг хақиқий ўқлари a, b ларга пропорционал бўлиб ўзгаради. Шунинг учун бир паллали гиперболоид (10) эллипснинг xOy текисликка параллел ҳаракатидан ва бу ҳаракат пайтида у (11) ва (12) гиперболалар шохлари бўйича сирпаниб боришидан ҳосил бўлади, деб айта оламиз.

Бу текшириш бир паллали гиперболоид 141- чизмада кўрсатилган чексиз узун ва xOy текисликдан узоқлашган сари кенгайиб борувчи трубкасимон сирт эканини билдиради.

a, b, c лар бир ковакли гиперболоиднинг *ярим ўқлари* дейилади. $a = b$ бўлганда (9) тенглама маркази Oz ўқда бўлган айланага айланади. Шунинг учун $a = b$ бўлганда бир паллали гиперболоидни (11) ёки (12) гиперболаларнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил булган сирт деб қараса бўлади. Бу сиртнинг тенгламаси

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c} = 1.$$

Мисол. $x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 25 = 0$ тенглама билан берилган сиртнинг шакли аниқлансин.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини — 25 га бўламиз, у ҳолда

$$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2+z^2}{5}=1.$$

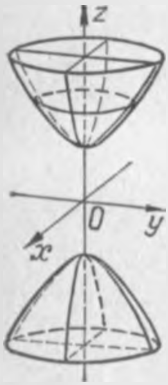
Демак, берилган тенглама айланиш ўқи Ox ўқ бўлган бир ковакли гиперболоиднинг тенгламасидир.

92- §. ИККИ ПАЛЛАЛИ ГИПЕРБОЛОИД

Туғри бурчакли Декарт системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (13)$$

тенглама билан тасвирланган сирт икки паллали гиперболоид деб аталади.



142- чизма.

Бу сиртни xOz, yOz текисликлар билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0\end{cases} \qquad (14)$$

ва

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0\end{cases} \qquad (15)$$

гиперболалар ҳосил бўлади. Бу гиперболаларнинг иккаласининг ҳам ҳақиқий ўқи Oz ўқ бўлиб, улар Oz ўқни $(0, 0, c)$ ва $(0, 0, -c)$ нуқталарда кесиб ўтади. Энди (13) сиртни xOy текисликка параллел бўлган

$$z=h$$

текислик билан кесамиз (142- чизма). Кесимда

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h\end{cases} \qquad (16)$$

эллипс ҳосил бўлади. Бу эллипснинг ярим ўқлари

$$a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \text{ ва } b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

бўлиб, $|h|\geqslant c$ бўлганда улар ҳақиқий, $|h|<c$ бўлганда мавҳум сон бўлади. $|h|$ нинг қиймати c дан ∞ гача ўзгарганда a_1 ва b_1 ярим ўқлар 0 дан ∞ гача ўсиб боради, яъни (16) эллипс $(0, 0, c)$ нуқтада нуқтага айланиб c ўсиб борган сари эллипснинг ўқлари ҳам, ўзи ҳам катталашиб боради. Шундай

қилиб, икки паллали гиперболоид иккита чуқур эллиптик ваза ёки коса шаклидаги сиртдан иборат экани келиб чиқади (142- чизма).

a, b, c сонлар икки паллали гиперболоиднинг *ярим ўқлари* дейилади.

Агар $a = b$ бўлса, (13) тенглама

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

кўринишни олади ва бу тенглама билан тасвирланган сирт (14) ва (15) гиперболаларнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган икки паллали гиперболоидни тасвирлайди (чунки бу ҳолда (16) тенглама айлана тенгламаси бўлади).

Мисол. $2x^2 + 4y^2 - 6z^2 + 24 = 0$ тенглама билан қандай сирт тасвирланади?

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини 24 га бўлиб, уни

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = -1$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенглама ярим ўқлари $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$ ва $c = 2$ бўлган уч ўқли икки паллали гиперболоидни тасвирлайди.

93- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ КОНУС

Қўзғалмас бирор нуқтадан ўтиб, бирор L чизиқ билан кесишган ҳолда ҳаракат қилувчи тўғри чизиқнинг чизган сирти коник сирт ёки конус деб аталади. Тўғри чизиқ конуснинг *ясовчиси*, L чизиқ конуснинг *йўналтирувчиси*, қўзғалмас нуқта эса конуснинг *учи* дейилади. Иккинчи тартибли конусни бундай таърифлаш ҳам мумкин.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (17)$$

тенглама тўғри бурчакли Декарт системасида учи координата бошида бўлган иккинчи тартибли конусни ифода этади.

Агар бирор $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқта (17) сиртда ётса, координаталар боши ва $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси ҳам (17) сиртда ётади (M нуқта координаталар бошида ётмаслиги керак).

Ҳақиқатан, $N(x, y, x)$ нуқта OM тўғри чизиқда ётган ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу ҳолда N нуқтанинг координаталари (тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларига асосан) $x = x_1t$, $y = y_1t$, $z = z_1t$ тенгламаларни қаноатлантиради.

$M(x_1, y_1, z_1)$ нуқта (17) сиртда ётгани учун бу нуқтанинг координаталари (17) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=0,$$

аммо бу ҳолда

$$\frac{(x_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_1t)^2}{b^2}-\frac{(z_1t)^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

яъни $N(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари ҳам (17) тенгламани қаноатлантиради, бошқача айтганда, N нуқта ҳам (17) сиртда ётади. Шу билан юқоридаги фикр исботланди.

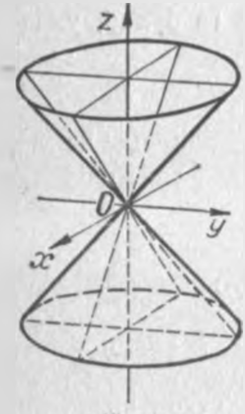
Энди (17) сирт шаклини кесимлар ёрдамида текширамиз. (17) сиртни xOy текисликка параллел бўлган $z=h$ текислик билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases} \tag{18}$$

эллипс ҳосил бўлади.

h 0 дан $\pm\infty$ гача ўсганда эллипс нуқтадан чексиз катта эллипсгача ўсади (143-чизма).

(17) сиртни $x=0$ ёки $y=0$ текисликлар билан кессак, кесимда иккитадан туғри чизиқ ҳосил булади. Чунки бу ҳолда ҳосил бўлган иккинчи даражали тенглама биринчи даражали иккита тенгламага ажралади. $a=b$ бўлганда (18) тенглама айланани беради. Бу ҳолда конус *доиравий конус* дейилади.



143- чизма.

1- мисол. $x^2+y^2=z^2$ тенглама доиравий конусни тасвирлайди. Бу конусни yOz текислик билан кессак ($x=0$), кесимда $y^2=z^2$ ёки $y=\pm z$, $x=0$ тўғри чизиқлар ҳосил булади. Унинг ясовчиси y ўқ билан 45° ли бурчак ҳосил қилади.

2- мисол. $x^2-9y^2-z^2=0$ тенглама иккинчи тартибли конусни ифодалайди. Буни $z=h$ текислик билан кессак, кесимда $x^2-9y^2=h^2$, $z=h$ гипербола ҳосил бўлади. $h=0$ булганда, конуснинг $x=\pm 3y$ бўлган ясовчиларини ҳосил қиламиз. $y=k$ текислик билан кесганда $x^2-z^2=9k^2$ гипербола ҳосил булади. $x=l$ $(l\neq 0)$ текислик билан кессак, $9y^2+z^2=l^2$ эллипс ҳосил бўлади.

94- §. ЭЛЛИПТИК ПАРАБОЛОИД

Тўғри бурчакли Декарт системасида

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}, \quad (p>0,\ q>0)$$

тенглама билан тасвирланган сирт эллиптик параболоид деб аталади.

Эллиптик параболоиднинг шаклини текшириш учун уни xOz ва yOz текисликлар билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \quad (19)$$

ва

$$\begin{cases} y^2 = 2qx, \\ x = 0 \end{cases} \quad (20)$$

чизиқлар ҳосил бўлади. Буларнинг иккаласи ҳам симметрия ўқи Oz ўқ бўлган, xOy текисликдан юқорида жойлашиб, ботиқлиги „юқорига" қараган параболаларни тасвирлайди (144- чизма).

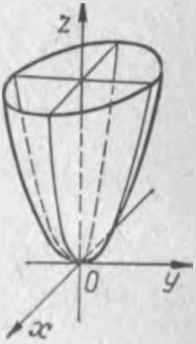
Энди эллиптик параболоидни xOy текисликка параллел $z = h$ текислик билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h, \\ z = h \end{cases} \quad (21)$$

эллипс ҳосил булади. Бу эллипснинг ярим ўқлари:

$$a_1 = \sqrt{2ph}, \quad b_1 = \sqrt{2qh}.$$

Бундан h нинг манфий бўлмаслигини кўрамиз. Шунинг учун $h > 0$, $h = 0$ да (21) эллипс нуқтага айланади, демак, xOy текислик эллиптик параболоидга уриниб ётади. h нинг қиймати 0 дан $+\infty$ гача ўзгариб борганда a_1 ва b_1 ярим ўқлар ҳам 0 дан $+\infty$ гача катталашиб боради, яъни $z = h$ кесим xOy текисликдан унга параллел ҳолда юқорига кўтарилган сари (21) эллипс катталашиб боради.



144- чизма.

Бу мулоҳазалар эллиптик параболоид 144- чизмада кўрсатилгандек куринишда бўлишини билдиради.

Эллиптик параболоид xOz ва yOz текисликларга ҳамда Oz ўққа нисбатан симметрик жойлашган, O нуқта унинг *учи* p ва q лар унинг *параметрлари* дейилади.

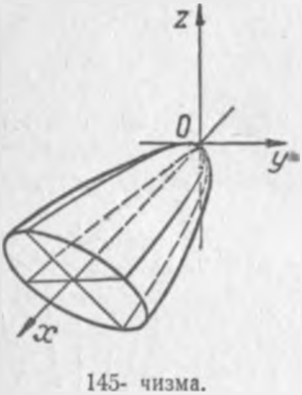
$p = q$ бўлганда (19) ва (20) параболалар тенглашади, (21) эллипс эса айланадан иборат бўлади. Бу ҳолда эллиптик параболоиднинг тенгламаси

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2p} \quad (22)$$

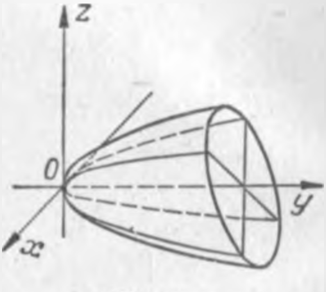
кўринишда булади ва бу сирт *айланма параболоид* дейилади. (22) параболоид (19) ёки (20) параболаларнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлади.

1- мисол. $x^2 + y^2 = z$ симметрия ўқи Oz ўқ бўлган айланма параболоид бўлиб $z = x^2$ параболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил булади (145- чизма).

2- мисол. $x = y^2 + z^2$ симметрия ўқ Ox ўқ бўлган айланма параболоид бўлиб $y = x^2$ параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлади (146- чизма).



145- чизма.



146- чизма.

3- мисол. $y = x^2 + z^2$ ҳам 1 ва 2- мисоллардаги каби параболоид бўлиб, унинг симметрия ўқи Oy ўқдир (146- чизма). Бу учта мисолдаги параболоидлар фақат координата системасига нисбатан турлича жойлашишлари билан бир-биридан фарқ қилади.

95- § ГИПЕРБОЛИК ПАРАБОЛОИД

Туғри бурчакли Декарт системасида

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \quad (p > 0,\ q > 0) \tag{23}$$

тенглама билан тасвирланган сирт гиперболик параболоид деб аталади.

Гиперболик параболоид шаклини параллел кесимлар методи билан текширамиз. (23) сиртни xOz текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \tag{24}$$

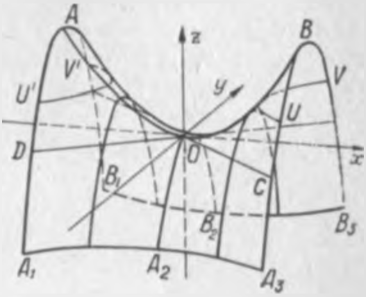
парабола ҳосил бўлади. Бу кесим симметрия ўқи Oz бўлиб, ботиқлиги „юқорига" қараган AOB параболадир (147- чизма).

Энди (23) сиртни yOz текисликка параллел $x = h$ текислик билан кесамиз. Кесимда

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right), \\ x = h \end{cases} \tag{25}$$

чизиқ ҳосил бўлади.

$h = 0$ бўлганда бу чизиқ симметрия ўқи Oz ўқ бўлган yOz текислигидан „пастга“ кетувчи A_2OB_2 парабола бўлиб, $h \neq 0$ бўлганда эса учи (24) параболада ётган ва A_2OB_2 параболага параллел жойлашган A_1AB_1, A_3BB_3 параболаларни тасвирлайди. Шунинг учун (23) сирт A_2OB_2 параболанинг учи AOB парабола бўйича силжиб борганида ўзига параллел ҳолатдаги ҳаракатидан ҳосил булади, деб айтиш мумкин, шу билан баробар $h > 0$ бўлганда A_2OB_2 парабола OB ёй буйича ҳаракат қилиб, гиперболик параболоиднинг $A_3A_2OB_2BB_3$ қисмини тасвирлайди, $h < 0$ бўлганда эса A_2OB_2 парабола OA ёй буйича силжиб гиперболик параболоиднинг $A_1A_2OB_2B_1A$ қисмини тасвирлайди. Энди (23) сиртни xOy текисликка параллел $z = h$ текислик билан кесамиз. Кесимда



147- чизма.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h, \\ z = h \end{cases} \tag{26}$$

чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқнинг ҳақиқий ўқи $z = h$ текисликда бўлиб, $h > 0$ бўлганда Ox ўққа параллел гиперболани $h < 0$ бўлганда эса ҳақиқий ўқи Oy ўққа параллел гиперболани тасвирлайди, $h = 0$ бўлганда (26) тенглама

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

кўринишни олади, бу тенгламалар эса

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

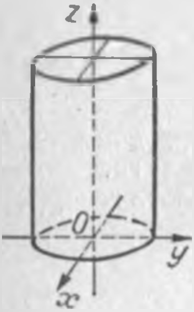
тенгламаларга ажралади. Булар координата бошидан ўтган тўғри чизиқлар тенгламаларидир. Демак, (23) сиртнинг $z = 0$ текислик билан кесими xOy текисликдаги иккита тўғри чизиқдан иборат бўлиб, бу тўғри чизиқлардан юқорида жойлашган $z = h$ текислик билан кесилган кесим ҳақиқий ўқи Ox ўққа параллел бўлган гиперболалар оиласи ($h > 0$ бўлиб ўзгарганда), ундан пастдаги кесим, ҳақиқий ўқи Oy ўққа параллел бўлган гиперболалар оиласини ($h < 0$ бўлиб ўзгарганда) тасвирлайди.

Юқорида айтилганлардан гиперболик параболоид 147- чизмада кўрсатилгандек эгар шаклида бўлиши келиб чиқади. (23) тенгламада x, y нинг квадратлари қатнашгани учун xOz ва yOz текисликлар гиперболик параболоиднинг симметрия текисликлари бўлади. Координаталар боши гиперболик параболоиднинг *учи* ва p, q сонлар — унинг *параметрлари* дейилади.

96- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЦИЛИНДРЛАР

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + L = 0 \qquad (27)$$

кўринишдаги тенглама 68- § даги баён этилганга мувофиқ ясовчиси Oz ўққа параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текисликдаги (27) чизиқ бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди.



148- чизма.

(27) тенглама иккинчи даражали тенглама бўлгани учун бу тенглама билан тасвирланган сирт 2- *тартибли цилиндрик сирт* деб аталади. (27) тенглама билан $z = 0$ тенглама биргаликда xOy текисликдаги иккинчи тартибли чизиқни тасвирлайди, яъни (27) цилиндрни xOy текислик билан кесганда, кесим иккинчи тартибли чизиқ бўлади. Бу чизиқ тенгламасининг турли кўринишига мувофиқ қуйидаги цилиндрлар ҳосил бўлади:

1) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга келса, бу сирт *эллиптик цилиндр* дейилади (148- чизма). $a = b$ бўлган сирт *доиравий цилиндр* дейилади.

2) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

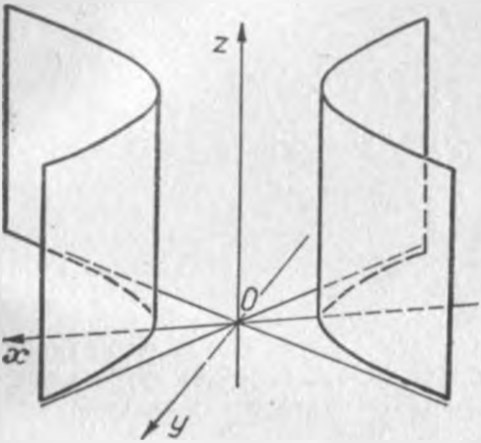
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга келса, бу тенглама билан тасвирланган сирт *гиперболик цилиндр* дейилади (149- чизма).

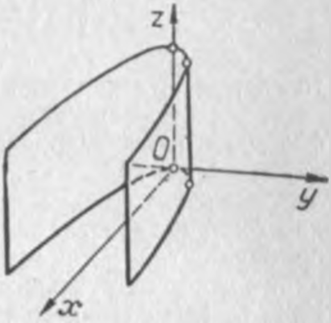
3) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

$$y^2 = 2px$$

кўринишга келса, бу тенглама билан тасвирланган сирт *параболик цилиндр* дейилади (150- чизма).



149- чизма.



150- чизма.

97- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАРНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ЯСОВЧИЛАРИ. В. Г. ШУХОВ КОНСТРУКЦИЯСИ

Агар тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида сирт ҳосил қилиш мумкин бўлса, сиртни тўғри чизиқли сирт деб аталади.

Иккинчи тартибли сиртлардан конус билан цилиндр тўғри чизиқли сиртлардир, чунки улар тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида ҳосил бўлади.

Биз бир паллали гиперболоид билан гиперболик параболоиднинг тўғри чизиқли сирт эканини кўрсатамиз.

Бир паллали гиперболоиднинг ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тенгламасини

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

шаклда ёки

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (28)$$

шаклда ёза оламиз. Бу тенглама $\alpha \neq 0$ ва $\beta \neq 0$ сонлар қандай бўлмасин

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (29)$$

тенгламаларни ҳадлаб кўпайтиришдан келиб чиқади.

α, β сонлар маълум қийматларни олганда (29) тенгламалар фазодаги битта тўғри чизиқни тасвирлайди. α, β сонлар турли қийматларни қабул қила борса, (29) тенгламалар тўғри чизиқлар оиласини ташкил қилади. Бу тўғри чизиқлар оиласининг ҳар бири (28) тенглама билан тасвирланган бир паллали гиперболоидда ётади. Ҳақиқатан $M(x, y, z)$ нуқта (29) тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтанинг координаталари (29) тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантиради. Шунинг учун улар (28) тенгламани ҳам қаноатлантиради, яъни (29) тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси, (28) бир паллали гиперболоидда ётади, демак, тўғри чизиқнинг ўзи ҳам унда ётади.

Энди бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан (29) тўғри чизиқлар оиласининг ёлғиз битта тўғри чизиғи ўтишини кўрсатамиз.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ бир паллали гиперболоиднинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда M_1 нуқтанинг координаталари (28) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_1}{b}\right)\left(1 - \frac{y_1}{b}\right). \quad (30)$$

Бу тенглама α, β нинг ҳар бири нолдан фарқли бўлганда

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_1}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_1}{b}\right) \end{cases} \quad (31)$$

тенгламаларни ҳадлаб кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг биринчисидан $\beta = k\alpha$, бунда:

$$k = \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}}{1 + \frac{y_1}{b}}; \tag{32}$$

$1 + \frac{y_1}{b} \neq 0$ бўлганда k аниқ қийматга эга.

β нинг бу қийматини (29) тенгламаларга қўйиб, натижани α га қисқартирсак,

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases}$$

ҳосил бўлади. Бу системага эса фазода $M_1(x_1, y_1\ z_1)$ нуқтадан ўтувчи битта тўғри чизиқ мос келади, чунки бундаги k (30) ва (31) шартлардан аниқланади.

Агар $1 + \frac{y_1}{b} = 0$ бўлса (32) формула маъносини йўқотади. Лекин, бу ҳолда

$$1 - \frac{y_1}{b} \neq 0.$$

Шунинг учун k нинг қийматини (31) системанинг иккинчи тенгламасидан аниқлаш ва натижани (29) тенгламага қўйиш билан биз бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан ёлғиз битта тўғри чизиқ ўтади деган натижага келамиз.

Шундай қилиб, (29) тенгламалар α, β нинг турли қийматларида бир паллали гиперболоидда ётувчи турли тўғри чизиқларни тасвирлайди, α, β га чексиз кўп қийматлар бериш мумкин бўлгани учун бу тўғри чизиқлар тўплами бир паллали гиперболоид сиртини бутунлай қоплаб олади. Бу ҳолда (29) *тўғри чизиқлар бир паллали гиперболоиднинг ясовчилари бўлади; шунинг учун бу гиперболоид тўғри чизиқли сиртдир.*

Биз (29) даги система сингари (28) тенгламани ушбу шаклдаги тенгламаларга келтиришимиз мумкин:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{33}$$

Бу тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқ (28) гиперболоидда ётади, яъни унинг ясовчиси. Шунинг учун бир паллали гиперболоид икки марта чизиқли сиртдир, яъни иккита тўғри чизиқли ясовчилар системасига эга (151- чизма). Энди гиперболик параболоидни олайлик. Унинг

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

тенгламасини

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

шаклда ёзиш мумкин.

Бу сиртда ҳам тўғри чизиқли ясовчиларнинг икки серияси жойлашганини кўрсатиш мумкин.
Улар:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k}; \end{cases}$$

ва

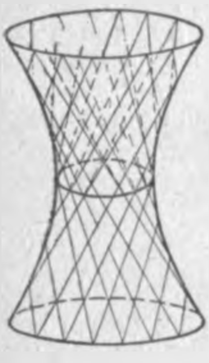
$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k}, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz \end{cases}$$

тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқлар оиласидан иборат. Гиперболик параболоиднинг ихтиёрий нуқтасидан бу оилаларнинг ҳар бирига қарашли биттадан тўғри чизиқ ўтади.

Айтилган бу фикрлар юқоридаги каби исбот қилинади. Бир паллали гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчиларининг мавжудлигидан қурилиш ишларида фойдаланилади.

Қурилишда бир паллали гиперболоиддан фойдаланиш ғоясини ва уни амалда ишлатишни биринчи марта кўрсатган киши — рус инженери СССР Фанлар Академиясининг фахрий аъзоси Владимир Григорьевич Шухов (1853—1939) эди.

Металл тусинлардан ишланган миноралар (башня), мачталар, таянчлар (опора) бир паллали гиперболоид шаклида ясалса, улар мустаҳкам бўлиб, иккинчи томондан, ишлаш учун енгил бўлади. Шунинг учун Шухов ғоясидан бизнинг мамлакатимизда ҳамда чет элда кенг фойдаланилмоқда.



151- чизма.

Машқлар

1. xOz текислигидаги $x = z^2$ параболанинг: 1) Ox ўқ атрофида; 2) Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини ёзинг.

2. xOy текисликдаги $y = e^{-x^2}$ эгри чизиқнинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини ёзинг.

3. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{36} = 1$ эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилишидан ҳосил бўлган эллипсларнинг тенгламаларини ёзинг.

4. Ярим ўқлари 4, 3, 2 бўлган уч ўқли эллипсоид тенгламасини ёзинг.

5. Ярим ўқлари 6, 5, 4 бўлган: 1) бир ковакли; 2) икки ковакли гиперболоиднинг тенгламасини ёзинг.

6. yOz текислигидаги $y^2 = 2pz$ параболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини ёзинг ва у қандай сирт эканлигини сўзлаб беринг.

7. Қуйидаги тенгламалар билан қандай сиртлар берилган?

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) = 22$;
3) $36x^2 + 64y^2 + 144z^2 = 576$;
4) $144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = 3600$;
5) $36x^2 + 64y^2 - 144z^2 = -576$;
6) $3x^2 + 2y^2 = 12z$;
7) $3x^2 - 2y^2 = 12z$;
8) $144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = 0$;
9) $16x^2 + 9y^2 = 144$;
10) $25x^2 - 9y^2 = 225$.

МАШҚЛАРГА ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

Биринчи боб

2. 1) $x = \pm 1$; 2) $x = 6$, $x = -2$; 3) $x = -2$, $x = -4$.

3. 1) Ox ўқнинг боши ва унинг мусбат йўналишидаги ҳамма нуқталар тўпламини — мусбат ярим ўқни тасвирлайди.

2) Ox ўқнинг манфий йўналишидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди. (Координаталар боши бунга кирмайди.)

3) Ox ўқда $x = 2$ нуқта ва унинг чап қисмидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди.

4) Ox ўқнинг мусбат йўналишида $x = 3$ нуқтадан кейин ўнгда жойлашган нуқталар тўпламини тасвирлайди, $x = 3$ нуқта бунга кирмайди.

5) Ox ўқнинг мусбат йўналишида $x = \frac{3}{2}$ нуқтадан ўнгдаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди, $x = \frac{3}{2}$ нуқта бу тўпламга кирмайди.

6) Ox ўқдаги $x = 1$ ва $x = 2$ нуқталар оралиғидаги ҳамма нуқталар тўплами, бу нуқталарнинг ўзи тўпламга кирмайди. $1 < x < 2$, одатда, интервал (оралиқ) деб аталади.

7) $x = -1$ ва $x = 3$ нуқталар ва бу нуқталар орасидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди.$-1 < x < 3$, одатда, учлари -1 ва 3 нуқталарда булган кесма дейилади.

8) $x > \frac{5}{2}$.

9) Ox ўқда $3 < x < 5$ кесма ташқарисидаги нуқталар тўпламини тасвирлайди.

10) $3 < x < 5$ кесмани тасвирлайди.

4. 1) -2. 2) 7. 3) 1. 4) 7 ва 13. 5) -5. 6) -2 ва -6.

5. 1) $AB = 8$, $|AB| = 8$. 2) $AB = 2$, $|AB| = 2$, 3) $AB = 6$, $|AB| = 6$.
4) $AB = 1$, $|AB| = 1$. 5) $AB = -4$, $|AB| = 4$.

7. 1) $M_1(-3, -4)$. 2) M_2 $(3,4)$. 3) $M_3(3, -4)$.

8. M $(-4,3)$, $N(4, -3)$.

9. M $(a, -b)$, $N(-a, b)$, $R(-a, -b)$.

12. Икки ҳол бўлиши мумкин: 1) A, B, C, D лар соат стрелкаси йўналиши бўйича жойлашган ва 2) бунга қарама-қарши йўналишда жойлашган.

$$1)\ A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ B\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ D\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ва

$$2)\ A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

13. 12. **14.** 10. **16.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$. **17.** 5; 7,9; 7,9.

18. $K\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Кўрсатма. $|BA| = 5$, $|BC| = 10$. Ички бурчакнинг бессектрисаси AC кесмани

$$AK : KC = |BA| : |BC| = 5 : 10 = 1 : 2$$

нисбатда бўлади.

19. $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Кўрсатма. Ташқи чизилган айлана марказидан учбурчакнинг A, B, C учларигача бўлган масофалар ўзаро тенг.

20. $\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$. Кўрсатма. Оғирлик маркази AB кесмани m_1, m_2 массаларга тескари пропорционал бўлакларга бўлади.

21. $\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Кўрсатма. Дастлаб m_1 ва m_2 массаларнинг оғирлик марказини, ундан кейин бу марказга $m_1 + m_2$ массани тўплаб $m_1 + m_2$, m_3 массаларнинг оғирлик марказини топамиз.

22. $\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$, $\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}$.

Кўрсатма. 21- масалага қаранг. **23.** $\frac{5}{2}$. **24.** 4.

25. 1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 0; 5) 8; 6) —9.

26. Ox ўқдаги проекциялар мос тартибда: 3; 3; 3; 0; 6; 6.
Oy ўқдаги проекциялар мос тартибда: 3; 1; 3; 6; 2; 0.
Кўрсатма; $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нуқталарнинг Ox, Oy ўқлардаги проекциялари мос равишда $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ га тенг.
27. *а*) 3; *в*) — 3.

Иккинчи боб

3. $14x - 12y - 49 = 0$.
4. $x^2 + y^2 = 16$.
5. $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$.

Ечиш. M ва N нуқталардан ўтган тўғри чизиқни абсциссалар ўқи Ox учун ва бу нуқталарнинг ўртаси O дан Ox ўққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни ординаталар ўқи Oy учун қабул қиламиз. $H(x, y)$ изланаётган геометрик ўрининг ихтиёрий нуқтаси ва $MN = 2c$ бўлсин. Бу ҳолда $M(c, 0)$, $N(-c, 0)$.

Масаланинг шартига кўра $MN \cdot NH = a^2$ ёки $\sqrt{[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2]} = a^2$; $(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) = a^4$ ёки $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$. Бу тенгликни яна $(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(x^2 + y^2) - 4c^2x^2 = a^4 - c^4$ кўринишда ёзиб ихчамлаймиз:

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = a^4 - c^4$. Бу тенгламага кўра чизиқни ясаш учун тенгламада x ва y нинг фақат квадратлари қатнашаётганига эътибор бериш керак. Бу ҳол чизиқ координата ўқларига ҳамда координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашганини билдиради. Шунинг учун чизиқни биринчи координаталар бурчагида ясаш, қолган чораклар учун симметриядан фойдаланиш керак.

6. $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$. Кўрсатма. Координата ўқлари 5- масаладагидек танлаб олинсин.

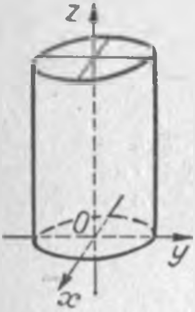
тенгламаларга ажралади. Булар координата бошидан ўтган тўғри чизиқлар тенгламаларидир. Демак, (23) сиртнинг $z = 0$ текислик билан кесими xOy текисликдаги иккита тўғри чизиқдан иборат бўлиб, бу тўғри чизиқлардан юқорида жойлашган $z = h$ текислик билан кесилган кесим ҳақиқий ўқи Ox ўққа параллел бўлган гиперболалар оиласи ($h > 0$ бўлиб ўзгарганда), ундан пастдаги кесим, ҳақиқий ўқи Oy ўққа параллел бўлган гиперболалар оиласини ($h < 0$ бўлиб ўзгарганда) тасвирлайди.

Юқорида айтилганлардан гиперболик параболоид 147- чизмада кўрсатилгандек эгар шаклида бўлиши келиб чиқади. (23) тенгламада x, y нинг квадратлари қатнашгани учун xOz ва yOz текисликлар гиперболик параболоиднинг симметрия текисликлари бўлади. Координаталар боши гиперболик параболоиднинг *учи* ва p, q сонлар — унинг *параметрлари* дейилади.

96- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЦИЛИНДРЛАР

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + L = 0 \qquad (27)$$

кўринишдаги тенглама 68- § даги баён этилганга мувофиқ ясовчиси Oz ўққа параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текисликдаги (27) чизиқ бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди.



148- чизма.

(27) тенглама иккинчи даражали тенглама бўлгани учун бу тенглама билан тасвирланган сирт *2- тартибли цилиндрик сирт* деб аталади. (27) тенглама билан $z = 0$ тенглама биргаликда xOy текисликдаги иккинчи тартибли чизиқни тасвирлайди, яъни (27) цилиндрни xOy текислик билан кесганда, кесим иккинчи тартибли чизиқ бўлади. Бу чизиқ тенгламасининг турли кўринишига мувофиқ қуйидаги цилиндрлар ҳосил бўлади:

1) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга келса, бу сирт *эллиптик цилиндр* дейилади (148- чизма). $a = b$ бўлган сирт *доиравий цилиндр* дейилади.

2) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

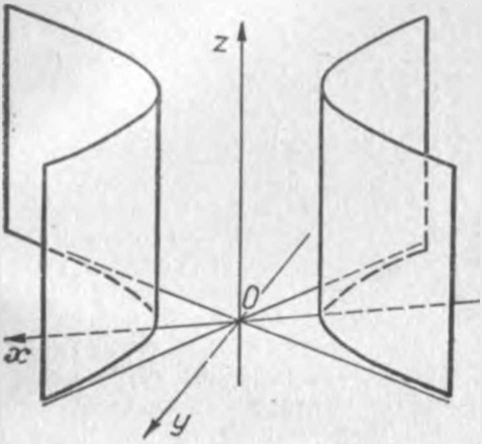
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга келса, бу тенглама билан тасвирланган сирт *гиперболик цилиндр* дейилади (149- чизма).

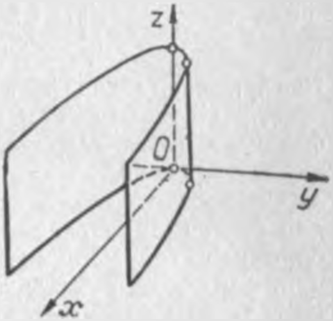
3) Тўғри бурчакли Декарт системасида (27) тенглама

$$y^2 = 2px$$

кўринишга келса, бу тенглама билан тасвирланган сирт *параболик цилиндр* дейилади (150- чизма).



149- чизма.



150- чизма.

97- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАРНИНГ ТУҒРИ ЧИЗИҚЛИ ЯСОВЧИЛАРИ. В. Г. ШУХОВ КОНСТРУКЦИЯСИ

Агар тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида сирт ҳосил қилиш мумкин бўлса, сиртни тўғри чизиқли сирт деб аталади.

Иккинчи тартибли сиртлардан конус билан цилиндр тўғри чизиқли сиртлардир, чунки улар туғри чизиқнинг ҳаракати натижасида ҳосил бўлади.

Биз бир паллали гиперболоид билан гиперболик параболоиднинг тўғри чизиқли сирт эканини курсатамиз.

Бир паллали гиперболоиднинг ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тенгламасини

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

шаклда ёки

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad (28)$$

шаклда ёза оламиз. Бу тенглама $\alpha \neq 0$ ва $\beta \neq 0$ сонлар қандай бўлмасин

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array}\right. \qquad (29)$$

тенгламаларни ҳадлаб кўпайтиришдан келиб чиқади.

α, β сонлар маълум қийматларни олганда (29) тенгламалар фазодаги битта тўғри чизиқни тасвирлайди. α, β сонлар турли қийматларни қабул қила борса, (29) тенгламалар тўғри чизиқлар оиласини ташкил қилади. Бу тўғри чизиқлар оиласининг ҳар бири (28) тенглама билан тасвирланган бир паллали гиперболоидда ётади. Ҳақиқатан $M(x, y, z)$ нуқта (29) тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтанинг координаталари (29) тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантиради. Шунинг учун улар (28) тенгламани ҳам қаноатлантиради, яъни (29) тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси, (28) бир паллали гиперболоидда ётади, демак, тўғри чизиқнинг ўзи ҳам унда ётади.

Энди бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан (29) тўғри чизиқлар оиласининг ёлғиз битта тўғри чизиғи ўтишини кўрсатамиз.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ бир паллали гиперболоиднинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда M_1 нуқтанинг координаталари (28) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_1}{b}\right)\left(1 - \frac{y_1}{b}\right). \qquad (30)$$

Бу тенглама α, β нинг ҳар бири нолдан фарқли бўлганда

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_1}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_1}{b}\right) \end{array}\right. \qquad (31)$$

тенгламаларни ҳадлаб кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг биринчисидан $\beta = k\alpha$, бунда:

$$k = \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}}{1 + \frac{y_1}{b}}; \qquad (32)$$

$1 + \frac{y_1}{b} \neq 0$ бўлганда k аниқ қийматга эга.

β нинг бу қийматини (29) тенгламаларга қўйиб, натижани α га қисқартирсак,

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ k\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases}$$

ҳосил бўлади. Бу системага эса фазода $M_1(x_1,\ y_1\ z_1)$ нуқтадан ўтувчи битта тўғри чизиқ мос келади, чунки бундаги k (30) ва (31) шартлардан аниқланади.

Агар $1 + \frac{y_1}{b} = 0$ бўлса (32) формула маъносини йўқотади. Лекин, бу ҳолда

$$1 - \frac{y_1}{b} \neq 0.$$

Шунинг учун k нинг қийматини (31) системанинг иккинчи тенгламасидан аниқлаш ва натижани (29) тенгламага қўйиш билан биз бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан ёлғиз битта тўғри чизиқ ўтади деган натижага келамиз.

Шундай қилиб, (29) тенгламалар α, β нинг турли қийматларида бир паллали гиперболоидда ётувчи турли тўғри чизиқларни тасвирлайди, α, β га чексиз кўп қийматлар бериш мумкин бўлгани учун бу тўғри чизиқлар тўплами бир паллали гиперболоид сиртини бутунлай қоплаб олади. Бу ҳолда (29) *тўғри чизиқлар бир паллали гиперболоиднинг ясовчилари бўлади; шунинг учун бу гиперболоид тўғри чизиқли сиртдир.*

Биз (29) даги система сингари (28) тенгламани ушбу шаклдаги тенгламаларга келтиришимиз мумкин:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases} \qquad (33)$$

Бу тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқ (28) гиперболоидда ётади, яъни унинг ясовчиси. Шунинг учун бир паллали гиперболоид икки марта чизиқли сиртдир, яъни иккита тўғри чизиқли ясовчилар системасига эга (151- чизма). Энди гиперболик параболоидни олайлик. Унинг

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

тенгламасини

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

шаклда ёзиш мумкин.

Бу сиртда ҳам тўғри чизиқли ясовчиларнинг икки серияси жойлашганини кўрсатиш мумкин.
Улар:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k}; \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k}, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz \end{cases}$$

тенгламалар билан тасвирланган тўғри чизиқлар оиласидан иборат. Гиперболик параболоиднинг ихтиёрий нуқтасидан бу оилаларнинг ҳар бирига қарашли биттадан тўғри чизиқ ўтади.

Айтилган бу фикрлар юқоридаги каби исбот қилинади. Бир паллали гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчиларининг мавжудлигидан қурилиш ишларида фойдаланилади.

151- чизма.

Қурилишда бир паллали гиперболоиддан фойдаланиш ғоясини ва уни амалда ишлатишни биринчи марта кўрсатган киши — рус инженери СССР Фанлар Академиясининг фахрий аъзоси Владимир Григорьевич Шухов (1853—1939) эди.

Металл тусинлардан ишланган миноралар (башня), мачталар, таянчлар (опора) бир паллали гиперболоид шаклида ясалса, улар мустаҳкам булиб, иккинчи томондан, ишлаш учун енгил булади. Шунинг учун Шухов ғоясидан бизнинг мамлакатимизда ҳамда чет элда кенг фойдаланилмоқда.

Машқлар

1. xOz текислигидаги $x = z^2$ параболанинг: 1) Ox ўқ атрофида; 2) Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини ёзинг.

2. xOy текисликдаги $y = e^{-x^2}$ эгри чизиқнинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини ёзинг.

3. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{36} = 1$ эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилишидан ҳосил бўлган эллипсларнинг тенгламаларини ёзинг.

4. Ярим ўқлари 4, 3, 2 бўлган уч ўқли эллипсоид тенгламасини ёзинг.

5. Ярим ўқлари 6, 5, 4 бўлган: 1) бир ковакли; 2) икки ковакли гиперболоиднинг тенгламасини ёзинг.

6. yOz текислигидаги $y^2 = 2pz$ параболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини ёзинг ва у қандай сирт эканлигини сўзлаб беринг.

7. Қуйидаги тенгламалар билан қандай сиртлар берилган?

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) = 22$;
3) $36x^2 + 64y^2 + 144z^2 = 576$; 4) $144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = 3600$;
5) $36x^2 + 64y^2 - 144z^2 = -576$; 6) $3x^2 + 2y^2 = 12z$;
7) $3x^2 - 2y^2 = 12z$; 8) $144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = 0$;
9) $16x^2 + 9y^2 = 144$; 10) $25x^2 - 9y^2 = 225$.

МАШҚЛАРГА ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

Биринчи боб

2. 1) $x = \pm 1$; 2) $x = 6$, $x = -2$; 3) $x = -2$, $x = -4$.

3. 1) *Ox* ўқнинг боши ва унинг мусбат йўналишидаги ҳамма нуқталар тўпламини — мусбат ярим ўқни тасвирлайди.

2) *Ox* ўқнинг манфий йўналишидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди. (Координаталар боши бунга кирмайди.)

3) *Ox* ўқда $x = 2$ нуқта ва унинг чап қисмидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди.

4) *Ox* ўқнинг мусбат йўналишида $x = 3$ нуқтадан кейин ўнгда жойлашган нуқталар тўпламини тасвирлайди, $x = 3$ нуқта бунга кирмайди.

5) *Ox* ўқнинг мусбат йўналишида $x = \frac{3}{2}$ нуқтадан ўнгдаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди, $x = \frac{3}{2}$ нуқта бу тўпламга кирмайди.

6) *Ox* ўқдаги $x = 1$ ва $x = 2$ нуқталар оралиғидаги ҳамма нуқталар тўплами, бу нуқталарнинг ўзи тўпламга кирмайди. $1 < x < 2$, одатда, интервал (оралиқ) деб аталади.

7) $x = -1$ ва $x = 3$ нуқталар ва бу нуқталар орасидаги ҳамма нуқталар тўпламини тасвирлайди.$-1 < x < 3$, одатда, учлари -1 ва 3 нуқталарда булган кесма дейилади.

8) $x > \frac{5}{2}$.

9) *Ox* ўқда $3 < x < 5$ кесма ташқарисидаги нуқталар тўпламини тасвирлайди.

10) $3 < x < 5$ кесмани тасвирлайди.

4. 1) -2. 2) 7. 3) 1. 4) 7 ва 13. 5) -5. 6) -2 ва -6.

5. 1) $AB = 8$, $|AB| = 8$. 2) $AB = 2$, $|AB| = 2$, 3) $AB = 6$, $|AB| = 6$.
4) $AB = 1$, $|AB| = 1$. 5) $AB = -4$, $|AB| = 4$.

7. 1) $M_1(-3, -4)$. 2) M_2 (3,4). 3) $M_3(3, -4)$.

8. $M(-4,3)$, $N(4,-3)$.

9. $M(a, -b)$, $N(-a, b)$, $R(-a, -b)$.

12. Икки ҳол бўлиши мумкин: 1) *A*, *B*, *C*, *D* лар соат стрелкаси йўналиши бўйича жойлашган ва 2) бунга қарама-қарши йўналишда жойлашган.

$$1)\ A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ B\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ D\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ва

$$2)\ A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

13. 12. **14.** 10. **16.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$. **17.** 5; 7,9; 7,9.

18. $K\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Кўрсатма. $|BA| = 5$, $|BC| = 10$. Ички бурчакнинг бессектрисаси AC кесмани

$$AK : KC = |BA| : |BC| = 5 : 10 = 1 : 2$$

нисбатда бўлади.

19. $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Кўрсатма. Ташқи чизилган айлана марказидан учбурчакнинг A, B, C учларигача бўлган масофалар ўзаро тенг.

20. $\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$, Кўрсатма. Оғирлик маркази AB кесмани m_1, m_2 массаларга тескари пропорционал бўлакларга бўлади.

21. $\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Кўрсатма. Дастлаб m_1 ва m_2 массаларнинг оғирлик марказини, ундан кейин бу марказга $m_1 + m_2$ массани тўплаб $m_1 + m_2$, m_3 массаларнинг оғирлик марказини топамиз.

22. $\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$, $\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}$.

Кўрсатма. 21- масалага қаранг. **23.** $\frac{5}{2}$. **24.** 4.

25. 1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 0; 5) 8; 6) —9.

26. Ox ўқдаги проекциялар мос тартибда: 3; 3; 3; 0; 6; 6.
Oy ўқдаги проекциялар мос тартибда: 3; 1; 3; 6; 2; 0.

Кўрсатма: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нуқталарнинг Ox, Oy ўқлардаги проекциялари мос равишда $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ га тенг.

27. *а*) 3; *в*) — 3.

Иккинчи боб

3. $14x - 12y - 49 = 0$.
4. $x^2 + y^2 = 16$.
5. $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$.

Ечиш. M ва N нуқталардан утган тўғри чизиқни абсциссалар уқи Ox учун ва бу нуқталарнинг ўртаси O дан Ox ўққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни ординаталар ўқи Oy учун қабул қиламиз. $H(x, y)$ изланаётган геометрик ўрининг ихтиёрий нуқтаси ва $MN = 2c$ бўлсин. Бу ҳолда $M(c, 0)$, $N(-c, 0)$.

Масаланинг шартига кўра $MN \cdot NH = a^2$ ёки $\sqrt{[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2]} = a^2$; $(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) = a^4$ ёки $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$. Бу тенгликни яна $(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(x^2 + y^2) - 4c^2x^2 = a^4 - c^4$ куринишда ёзиб ихчамлаймиз:

$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = a^4 - c^4$. Бу тенгламага кўра чизиқни ясаш учун тенгламада x ва y нинг фақат квадратлари қатнашаётганига эътибор бериш керак. Бу ҳол чизиқ координата ўқларига ҳамда координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашганини билдиради. Шунинг учун чизиқни биринчи координаталар бурчагида ясаш, қолган чораклар учун симметриядан фойдаланиш керак.

6. $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$. **Кўрсатма.** Координата ўқлари 5- масаладагидек танлаб олинсин.

7. *а*) $x^2 - 8y^2 = 0$; *б*) $3y = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$.

8. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **Кўрсатма.** A нуқта Ox ўқда, B нуқта эса Oy ўқда, $\angle OAB = t$ бўлсин. Бу ҳолда:

$$x = BM \cos t = BC \cos^2 t = a \cos^3 t \quad y = AM \sin t = AC \sin^2 t = a \sin^3 t.$$

Шундай қилиб,

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t.$$

Бу тенгламалардан t ни йўқотсак, астроиданинг Декарт тенгламаси ҳосил бўлади.

9. $x = vt \cos \alpha$, $y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$. **Кўрсатма.** Параметр учун t олинсин.

Учинчи боб

1. $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 7$; 2) $y = x + 7$; 3) $y = \sqrt{3} x + 7$; 4) $y = -\sqrt{3} x + 7$; 5) $y = -x + 7$;

2. 1) $y = -x \frac{\sqrt{3}}{3} - 2$. 3. 1) $y = x$; 2) $y = -x$.

4. 1) Координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқ; 2) Oy ўқига параллел; 3) Ox ўқига параллел; 4) Oy ўқнинг тенгламаси; 5) Ox ўқнинг тенгламаси.

5. 1) $y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -\frac{3}{5} x + \frac{1}{5}$; 3) $y = -\frac{8}{3} x$;

4) $y = a x + \frac{3}{5}$.

6. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. 7. $\frac{x}{-5} + \frac{y}{5} = 1$; 8. 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; 2) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$; 3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; 4) $\frac{x}{\frac{2}{5}} - \frac{y}{2} = 1$; 5) $x + y = 1$; 6) $\frac{x}{\frac{c}{b}} + \frac{y}{\frac{c}{a}} = 1$.

9. Томонларининг тенгламалари: $y = 0$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$; $y = 6$; $\frac{-x}{5} + \frac{y}{6} = 1$.

Диагоналларининг тенгламалари: $x = 0$; $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$.

10. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$. 11. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = -1$; $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$. 13. $x - y - 3 = 0$. 14. $\frac{154}{845}$. 15. 1) $\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - 4 = 0$; 2) $\frac{2}{\sqrt{13}} x - \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$; 3) $x - y = 2$.

16. 1) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2$; 2) $\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} = 2$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 2$; 4) $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 2$.

17. $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{5}$. 18. $\pm\sqrt{2}$. 19. $4x - 3y + 25 = 0$ ёки $4x - 3y - 25 = 0$.

20. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{16}{11}$.

21. $5x - y + 3 = 0$ ёки $5x + y - 7 = 0$.

22. Квадрат томонлари тенгламаси: $4x + 3y + 1 = 0$.

$$3x - 4y + 32 = 0, \quad 4x + 3y - 24 = 0, \quad 3x - 4y + 7 = 0.$$

Иккинчи диагонал тенгламаси: $x + 7y - 31 = 0$.

23. $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

24. $3x - y + 9 = 0$; $3x + y + 9 = 0$.

25. $29x - 2y + 33 = 0$.

26. $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.

27. 1) $x - 3y - 13 = 0$; 2) $3x - 4y - 19 = 0$; 3) $x - 12y - 49 = 0$; 4) $x - 1 = 0$, 5) $y + 4 = 0$.

28. 1) параллел; 2) перпендикуляр; 3) перпендикуляр; 4) параллел.

29. 1) $5x - 2y + 9 = 0$; 2) $x + 4y - 7 = 0$; 3) $3x + 7y - 11 = 0$;
4) $2x + 3y - 4 = 0$.

30. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$.

31. 1; $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$; 135°; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

32. 1) $y = 2x$; 2) $y + 3x = 0$; 3) $x - 2y = 0$ ва $2x + y = 0$.

33. $\left(\frac{37}{7}, \frac{13}{7}\right)$. Кўрсатма. AB томон тенгламасини тузамиз: $3x + 2y - 11 = 0$. CD томон тенгламаси $2x - 3y - 5 = 0$. AM баландлик тенгламаси: $3x + y - 10 = 0$, энди BC томон тенгламасини тузамиз: $3x - y - 14 = 0$. C нуқта BC томон билан CD томоннинг кесишган нуқтаси.

34. $9x - 6x - 14 = 0$.

35. $2x - y - 9 = 0$

36. Томонларининг тенгламалари: $4x - 3y - 20 = 0$, $y = 4$. Диагоналларининг тенгламалари $x - 2y = 0$ ва $2x + y - 10 = 0$.

37. (1,4); $x = 1$; $x - 3y + 11 = 0$.

38. $3x + 4y - 4 = 0$; $x + 5y - 6 = 0$. $x + 5y + 8 = 0$; $3x + y + 10 = 0$.

39. (6,0).

40. $x + 2y - 7 = 0$.

41. $10x + 7y - 11 = 0$.

42. $3x - 2y - 2 = 0$, $x - 6y - 10 = 0$.

43. (1,2), $\sqrt{10}$ узунлик бирлиги.

44. $7x - 4y = 0$.

45. $5x - y + 3 = 0$; $x + 5y + 11 = 0$.

46. Томонлари: $x - 3y + 12 = 0$; $3x - y - 12 = 0$.
Диагоналлари: $x - y = 0$ ва $x + y - 8 = 0$.

Тўртинчи боб

2. 1) $\left(5, -\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. 1) $\left(2, -\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$; 4) $\left(1, -\frac{\pi}{6}\right)$.

4. M_1 (5,0); M_2 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $M_3(2, 2\sqrt{3})$; $M_4(4,4)$;
M_5 $(\sqrt{3}, -1)$; $M_6(-4, 4\sqrt{3})$;

5. $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$; $C(3,0)$; $D\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$; $M\left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$.

6. M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 нуқталар ётади, M_6, M_7 ва M_8 нуқталар ётмайди. Графиги—айлана.

7. 1) $(2,0)$; 2) $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$;

Графиги қутб ўқини қутбдан 2 бирлик узоқда кесиб, қутб ўқига перпендикуляр бўлиб ўтган тўғри чизиқ.

8. 1) Юқори ярим текисликда қутб ўқидан 1 бирлик узоқда унга параллел жойлашган тўғри чизиқ;

2) Маркази $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ нуқтада бўлиб, радиуси 5 бирлик булган айлана,

9. 1), 2), 3) — Архимед спираллари. **10.** $\rho = 14 \cos \varphi$.

11. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **12.** $\rho = \frac{5}{\cos \varphi}$

13. Масаланинг шартини қаноатлантирувчи айланалар иккита бўлиб, уларнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси
$\rho - 2R \sin \varphi = 0$ ва $\rho + 2R \sin \varphi = 0$.

14. Масаланинг шартини қаноатлантирувчи чизиқ иккита, булар:

$$\rho \sin \varphi - a = 0 \text{ ва } \rho \sin \varphi + a = 0.$$

15. 1) $(x^2 + y^2 - y)^2 = 9(x^2 + y^2)$; 2) $(x^2 + y^2)^{3/2} = ax^2$;
3) $(x^2 + y^2 - x)^2 = 4(x^2 + y^2)$; 4) $x - a = 0$;
5) $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

16. 1) xOy эски система, xO_1y янги система бўлсин.
1) $x = X + 1$, $y = Y + 2$; 2) $x = X - 2$, $y = Y + 2$; 3) $x = X - 1$. $y = Y - 1$; 4) $x = X + 3$, $y = Y - 2$.

17. $M_1(-1,3)$; $M_2(-5,1)$; $M_3(-3,4)$; $M_1(-3,0)$.

18. 1) $A(0,0)$; $B(-3,-8)$; $C(-7,-2)$. 2) $A(3,8)$; $B(0,0)$; $C(-4,6)$. 3) $A(7,2)$;. $B(4,-6)$, $C(0,0)$.

19. $A\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $C(-\sqrt{3}, 3)$.

20. 1) $XY = -8{,}5$; 2) $XY = 2$; 3) $XY = -1$.

21. 1) $Y = X^2$; 2) $Y = -X^2$; 3) $Y = 3X^2$.

22. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Бешинчи боб

1. $(x - 5)^2 - (y - 4)^2 = 9$; **2.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

3. 1) $C(1,-3)$, $r = 5$; 2) $(-2,4)$, $r = 6$; 3) $(5,0)$, $r = 5$; 4) $(0,-2)$, $r = 2$; 5) $(3,0)$, $r = 5$.

4. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **5.** $x^2 + (y + 4)^2 = 16$. **6.** $(x + 5)^2 + y^2 = 25$.

7. $x^2 + y^2 - 2y + 8 = 0$. **8.** $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1) = 0$. **9.** $x^2 + y^2 - 9{,}6x - 2y\sqrt{8{,}6} + 8{,}6 = 0$.

10. $x^2 + y^2 - ax = 0$.

11. $(x + 3)^2 + y^2 = 36$. **12.** $x^2 + y^2 - ax = 0$.

13. $3x^2 + 3y^2 - 2ay = 0$. **15.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

14. $\rho = 2a \cos \varphi$. **16.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{3}{5}$. **17.** $e = 0{,}5$.

18. $\approx 0{,}077$. **19.** 2 500000 *км*; 5 000 000 *км*; 40 000 *км*.

20. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **21.** $\sqrt{0{,}4}$.

22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $3\frac{1}{5}$; $6\frac{4}{5}$.

23. $\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{9}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\right)$. **24.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

25. $y = \pm\frac{4}{3}x$; 10. **26.** $2x^2 + 3y^2 + 6x - 69 = 0$

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ **28.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Кўрсатма. Изланаётган эллипснинг ярим ўқлари a, b, фокуси $F(c,0)$ ва $F(-c,0)$ бўлсин.

У ҳолда $b^2 + c^2 = 25$ ромбнинг томонидир. Шунинг учун $b^2 + c^2 = 25$. Ромбнинг юзи $S = 5 \cdot 4{,}8 = 24$ *кв.* бирлик. Эллипснинг кичик ўқи учи B билан ўнг фокуси F ни туташтирганда ҳосил бўладиган OBF учбурчакнинг юзи ромб юзининг тўртдан бирига тенг, яъни $b \cdot c = 12$.

$b^2 + c^2 = 25$ ва $bc = 12$ тенгламалардан $b_1 = 4$, $b_2 = 3$.

29. $\frac{5}{6}$; $\frac{x^2}{25} + \frac{6y^2}{25} = 1$; 2,5, 7,5. **30.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$

31. $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{11(y-5)^2}{64} = 1.$ Кўрсатма. Координаталар бошини эллипснинг маркази бўлган (x_0, y_0) нуқтага кўчирамиз, ўтиш формуласига кўра эллипснинг тенгламаси:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad x_0 = a, \ y_0 = 5$$

бўлгани учун $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1.$

Аммо $a = \frac{x_1 + x^2}{2} = \frac{5+11}{2} = 8.$ Демак, $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1.$

32. 1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$; **33.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$

34. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$, $\frac{6}{5}$.

35. $\frac{25x^2}{784} - \frac{25y^2}{441} = 1$, $15\frac{3}{4}$, $4\frac{2}{5}$. **36.** $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$; $2\sqrt{21}$; $\frac{\sqrt{35}}{5}$

37. 1) 6,8, (5,0); (− 5,0); $\frac{5}{3}$.

2) 10,8; $(\sqrt{41},0)$; $(-\sqrt{41},0)$; $\frac{41}{5}$. 3) 24, 10; (13, 0), (− 13, 0), $\frac{13}{12}$.

38. $\pm 3 + 2\sqrt{13}$, $x\sqrt{13} - 9 = 0.$

39. $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ **40.** $x = -9\frac{3}{5}$.

41. $y = \pm\frac{b}{a}x$; $\pm\frac{bc}{a}$; $2 \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. **42.** 2; $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

43. $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1.$ **44.** $y = \frac{2}{3}x$; $\frac{\sqrt{13}}{3}$; $1 + \operatorname{tg}\varphi = e^2$

45. $x^2 + y^2 = 32$ **46.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$

47. $\frac{(x+4)^2}{30} - \frac{y^2}{30} = 1.$ **48.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1.$

Кўрсатма. $A(-a, 0)$ ва $B(2a, 0)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламалари мос равишда $y = k_1(x + a)$ ва $y = k_2(x - 2a)$. Бурчак коэффициентларини аниқлашга кура:

$$k_1 = \operatorname{tg} \angle MAB, \ k_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle MBA) = -\operatorname{tg} \angle MBA.$$

Шартга кўра $\operatorname{tg} 2\angle MAB = \operatorname{tg} \angle MBA$. tg функция ифодаларини

$$k_1 = \frac{y}{x + a} = \operatorname{tg} \angle MAB, \ k_2 = \frac{y}{x - 2a} = -\operatorname{tg} \angle MBA$$

тенгликлар ёрдами билан x ва y лар орқали ифода этиб юқоридаги шартдан фойдалансак, қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$-\operatorname{tg} 2\angle MAB = -\frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2} = \frac{y}{x - 2a} = -\operatorname{tg} \angle MBA.$$

Бу тенгликни соддалаштириб изланаётган геометрик ўрин тенгламасини ҳосил қиламиз.

Парабола

49. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -\frac{2}{3}x$; 3) $x^2 = 8y$; 4) $x^2 = -y$.

50. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 5y$; 4) $x^2 = -y$.

51. $x^2 = 16y$.

52. Ҳамма параболалар координаталар бошидан ўтади ва қуйидагича жойлашади:

1) $p = \frac{3}{2}$; Ox ўққа симметрик ва ўнг ярим текисликка жойлашган.

2) $p = \frac{9}{2}$; Ox ўққа симметрик ва чап ярим текисликка жойлашган.

3) $p = 2$; Ox ўққа симметрик ва юқори ярим текисликка жойлашган.

4) $p = \frac{1}{2}$; Oy ўққа симметрик ва пастки ярим текисликка жойлашган.

53. $F(3, 0)$; $x + 3 = 0$.

54. $r = 9{,}5$.

55. $(7, \ 2\sqrt{21})$.

56. $y^2 = -10\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Кўрсатма. Парабола учининг координатлари $(-0, 5; 0)$ дир.

57. 1) $\begin{cases} X = x - 4, \\ Y = y \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(4, 5; 0)$, $p = 1$, $F(4, 5; 0)$, $2x - 7 = 0$.

2) $\begin{cases} X = x - \frac{1}{4} \\ Y = y \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(0, 25; 0)$, $p = 4$, $F(-1, 75; 0)$, $4x - 9 = 0$.

3) $\begin{cases} X = x \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(0; 0, 5)$, $p = 3$, $y + 1 = 0$, $F(0; 2)$.

4) $\begin{cases} X = x \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(0; 0, 5)$, $p = 5$, $y - 3 = 0$, $F(0; -2)$.

5) $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(1,\ 1),\ p = 0{,}25,\ F\left(1;\ 1\frac{1}{8}\right),\ 8y - 7 = 0.$

6) $\begin{cases} X = x - \frac{9}{4} \\ Y = y + \frac{1}{4} \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак.

$(4{,}5;\ -0,\ 25),\ p = 1{,}5,\ F(4,\ 5;\ -1),\ 2y - 1 = 0.$

7) $\begin{cases} X = x - \frac{11}{2} \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$ алмаштириш ўтказиш керак. $(5,\ 5;\ 1,\ 5),\ p = 0{,}25,\ 8x - 43 = 0,\ F\left(5\frac{5}{8},\ 1\frac{1}{2}\right).$

58. $(-4,\ 6).$

59. $d = 24$ узунлик ўлчов бирлиги.

60. $x^2 = -2y;\ 2y - 1 = 0.$

61. $F\left(112\frac{1}{2};\ 0\right)$, агарда симметрия ўқи учун абсцисса ўқини қабул қилсак ва гипербола учи координата бошида жойлашган бўлса.

62. $y^2 = -x.$

63. $(2,\ 1);\ (-1,\ 4);\ (\approx 3,\ 3;\ \approx 5,\ 29);\ (\approx -0{,}3;\ \approx 1{,}69).$

64. 1) $y^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$; 2) $y^2 = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{6}\right).$

65. $\frac{(x - \sqrt{3})^2}{4} + y^2 = 1$ эллипс.

2) $\frac{(x + \sqrt{5})^2}{4} - y^2 = 1$ гипербола.

3) $y^2 = x + \frac{1}{4}$ парабола.

Олтинчи боб

1. 1) 2. 2) 14. 3) $\frac{1}{10}$. 4) x^2. 5) $x(x - a)$. 6) -1.

2. 1) $x = 4$. 2) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$. 3) $x = 1$. 4) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$.
5) $x = k\pi$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots)$. 6) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots)$.

3. 1) $x = 2,\ y = -1$. 2) $x = 3,\ y = 4$. 3) $x = \frac{c}{a+b},\ y = \frac{c}{a+b}$.
4) Система ечимга эга эмас. 5) Система ечимга эга эмас.
6) $x = \cos\alpha + \sin\alpha,\ y = \cos\alpha - \sin\alpha$.

4. 1) $y = -\frac{5}{2}x,\ z = -2x$. 2) $y = -2x,\ z = 3x$.
3) $y = 4x,\ z = -6x$, 4) $y = -3x,\ z = 2x$.

5. 1) 13. 2) -8. 3) 11. 4) -11. 5) 0. 6) $2a^3$.

6. 1) $x = -1$. 2) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$.

7. 1) $x = -1,\ y = 3,\ z = -2$.
2) $x = 2,\ y = -4,\ z = 1$.

3) $x = 1, \ y = -3, \ z = 2.$
4) $x = 3, \quad y = -2, \quad z = -3.$
5) $x = 0, \ y = 6, \quad z = -6.$
6) $x = 2, \ y = 0, \ z = -1.$

Еттинчи боб

1. 1) $(1, 2)$; 2) $(0, -5)$; 3) $(-1, 3)$; 4) $(1, -1)$; 5) $\left(1, \ -\frac{3}{2}\right)$.
6) Марказсиз эгри чизиқ.

2. 1) $4x^2 - 4y^2 - 15 = 0$; 4) $5x^2 + 6y^2 - 4 = 0$.
2) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$; 3) $2x^2 - 3y^2 + 10 = 0$.

3. 1) $y^2 = 5x$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $x^2 = 3y$; 4) $y^2 = 3x$.

4. 1) $6x^2 + 4xy + y^2 - 7 = 0$. 2) $4x^2 + 6xy + y^2 - 5 = 0$.
3) $4x^2 + 2xy + 6y^2 = 1$. 4) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 54 = 0$.

5. 1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $y^2 = 2\sqrt{2}\,x$;

5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; 6) $x^2 + y^2 = -1$ (мавҳум эллипс);

7) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; 8) Ўзаро кесишувчи иккита тўғри чизиқ:

$x - 2y = 0; \qquad x + 2y = 0.$

9) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 10) $x^2 - 4y^2 = 1$; 11) $y^2 = 2x$, 12) $y^2 6x$.

Саккизинчи боб

2. A, B нуқталар абсциссалар ўқининг мусбат йўналишида координаталар бошидан мос тартибда 5 бирлик ва a бирлик узоқда жойлашган; A_2, B_2 нуқталар ординаталар ўқининг мусбат йўналишида координаталар бошидан 8 ва b бирлик узоқда; A_3, B_3 нуқталар аппликаталар ўқининг мусбат йўналишида координаталар бошидан 4 ва c бирлик узоқда жойлашган нуқталардир. Шунга ўхшаш A_4, B_4; A_5, B_5; A_6, B_6 нуқталар Ox, Oy, Oz ўқларининг манфий йўналишдаги нуқталардир.

3. M, N, P нуқталар мос тартибда xOy, xOz ва yOz координаталар текисликларидаги нуқталар, O нуқта координаталар боши.

4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{DC}$, чунки колленеарлик шарти бажарилмайди;

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

5. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

6. $\overrightarrow{BC} = q$; $\overrightarrow{DC} = p$; $\overrightarrow{AC} = p + q$;
$\overrightarrow{BD} = -p + q$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(p + q)$;
$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(-p + q)$; $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(-p + q)$;
$\overrightarrow{CB} = -q$; $\overrightarrow{DC} = p$; $\overrightarrow{CA} = -p - q$;
$\overrightarrow{DA} = -q$; $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(p - q)$; $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(p - q)$.

8. Ечиш. Тўртбурчак томонларини 152- чизмада кўрсатилгандек векторлар билан тасвирлаймиз. E ва F нуқталар диагоналларнинг ўрталари. Бу ҳолда $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$;

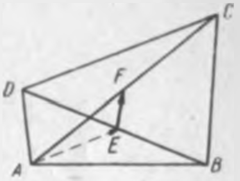
$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2}; \ \triangle AEB \text{ дан } \ \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}.$$

Аммо $\overrightarrow{EB} = \frac{\overrightarrow{DB}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}}{2}$; демак, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}}{2}$.

Энди $\overrightarrow{AF}$ ва $\overrightarrow{AE}$ ларнинг қийматларини дастлабки тенгликка қўямиз:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2} - \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}}{2}.$$

9. $\frac{c}{c} \pm \frac{b}{b}$, $\frac{a}{a} \pm \frac{c}{c}$; $\frac{b}{b} \pm \frac{a}{a}$.



152- чизма.

Кўрсатма. Берилган векторларнинг бирлик векторларини топиб, уларни учбурчак учларида ясаймиз. Учбурчак томонлари бўйича икки қўшни бирлик векторлар йиғиндиси ва айирмаси бурчакка ясалган ромбнинг диагонали бўлгани учун бу диагоналлар биссектрисалардир.

10. Ихтиёрий O нуқтани қутб учун оламиз (153- чизма). r_A, r_B, r_C, . . лар A, B, C, . . нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин. EF, KL ва PQ кесмаларнинг ўрталари битта M нуқта эканини кўрсатамиз. K нуқта AD нинг ўртаси бўлгани учун $r_K = \frac{r_A + r_D}{2}$; шунга ўхшаш $r_L = \frac{r_B + r_C}{2}$; KL кесманинг ўртаси

$$\frac{r_K + r_L}{2} = \frac{r_A + r_B + r_C + r_D}{4}. \qquad (1)$$

Шу йўл билан EF кесманинг ўртаси

$$\frac{r_E + r_F}{2} = \frac{r_A + r_B + r_C + r_D}{4}. \qquad (2)$$

Энди P ва Q нуқталарнинг радиус-векторларини топамиз ва уларнинг ўртасининг радиус-вектори

$$\frac{r_A + r_P}{2} = \frac{r_A + r_B + r_C + r_D}{4}. \qquad (3)$$

(1), (2), (3) тенгликлар EF, KL, PQ кесмаларнинг ўртаси битта нуқта эканини билдиради.

11. $\overrightarrow{BC} = c - b$; $\overrightarrow{CD} = d - c$; $\overrightarrow{DB} = b - d$;
$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(b + c - 2d)$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}(b + c + d)$.

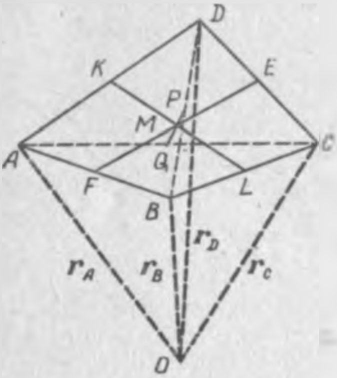
12. -1. 13. *Исбот.* $\overrightarrow{AB} = a$; $\overrightarrow{BC} = b$; $\overrightarrow{CD} = c$, $\overrightarrow{DA} = d$ (154- чизма) бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{AC} = a + b, \ \overrightarrow{BD} = b + c.$$

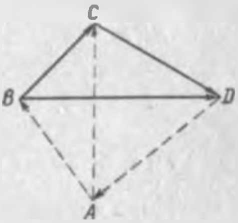
Масаланинг шартига кўра: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ $(a+b)(b+c) = 0$ ёки $ab + ac + b^2 + bc = 0$; Шаклдан $a + b + c + d = 0$; бундан $-d = a + b + c$; кейинги тенгликни иккала томонини квадратга кўтариш натижасида $a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c = \frac{1}{2}(d^2 - a^2 - b^2 - c^2)$ эканини топамиз. Демак, $b^2 + \frac{1}{2}(d^2 - a^2 - b^2 - c^2) = 0$ ёки $b^2 + d^2 = a^2 + c^2$.

15. 13 *кг.*

16. 1) $\{1, -1{,}6\}$; 2) $\{5, -3{,}6\}$; 3) $\{6, -4{,}12\}$; 4) $\left\{1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$; 5) $\{0, -1{,}12\}$; 6) $\left\{3, -\frac{5}{2}, 2\right\}$.



153- чизма.



154- чизма.

17. 7. 18. $\{-6, -2{,}4\}$; $\{6{,}2, -4\}$.

19. $2\sqrt{2}$; 2; -2.

20. $\frac{3}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{4}{13}$. 21. 45°; $\{1, -1, \sqrt{2}\}$.

22. 1) 10; 2) 16; 3) 25; 4) 61; 5) 21; 6) 529; 7) 8; 8) 76;

23. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

25. $\arccos\frac{7}{\sqrt{481}}$. 26. 45°. 27. 59. Кўрсатма. Агар F куч таъсири натижасида материал нуқта s векторнинг бошланғич учидан кейинги учига кўчган бўлса, кучнинг бажарган иши $F\cdot S$ скаляр кўпайтмага тенг.

28. 31. 29. 13. 31. $\arccos\frac{12}{49}$; $\arccos\frac{61}{7\cdot\sqrt{122}}$; $\arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$.

32. 1) $|\overrightarrow{AB}| = 9{,}7$, $|\overrightarrow{AC}| = 13{,}3$, $|\overrightarrow{BC}| = 6{,}9$; 2) $\angle A \approx 29°$, $\angle B \approx 107°$, $\angle C \approx 44°$; 3) 56°, 4) 122°, 5) 8, 5.

33. 24, 5. Кўрсатма. Изланаётган юз $\frac{1}{2}[a\ b]$ га тенг.

34. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$.

Ечиш. Учбурчак томонларини 155- чизмада кўрсатилгандек векторлар билан тасвир этамиз. У ҳолда

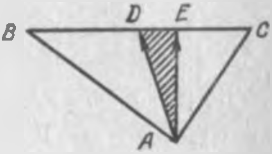
$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}; \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}.$$

$$S_{DAE} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}\right]\right|; \overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{AE}$$

лар ифодаларини бу формуланинг ўнг томонига қўйиб, коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенглигини ҳисобга олсак, $S_{DAE} = \frac{1}{12}\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right]\right|$ ни ҳосил қиламиз. $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| = 6\sqrt{3}$; демак, $S_{DAE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *кв. бирлик.* $\sin \widehat{DAE} = \frac{|[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}]|}{AD\cdot AE}$; $[\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}] = \frac{1}{6}\,|[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\ (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})]| = \frac{1}{6}\,|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{3}$.

Энди $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AE}$ векторларнинг узунлигини топамиз: $AD = \sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + 2AB\cdot AC\cos \widehat{BAC} + AC^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$; шунга ўхшаш $AE = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. Демак, $\sin \widehat{DAE} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$.

35. 14 *(куб бирлик)*, $\sqrt{14}$. Кўрсатма. $V = \frac{1}{6}abc$. $H = \frac{3v}{s}$, S — ABC учбурчакнинг юзи.



155- чизма.

Тўққизинчи боб

1. 1) M_1, M_2, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9 нуқталар сиртда ётади. M_3, M_4 нуқталар ётмайди.

2. 1) $(4, 4, 4\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{3}, 5, 6)$; 3) $(7, \sqrt{6}, 3)$.

3. 1) yOz текислик; 2) xOz текислик; 3) xOy текислик; 4) yOz текисликка параллел бўлиб, ундан 2 бирлик узоқда ётувчи текислик; 5) xOz текисликка параллел бўлиб, ундан — 4 бирлик узоқда ётувчи текислик; 6) xOy текисликка параллел бўлиб, ундан 5 бирлик узоқда ётувчи текислик; 7) маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси 1 га тенг бўлган сфера; 8) ясовчиси Oz ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текисликда $x^2 + y^2 = 1$ айланадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 9) ясовчиси Oy ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOz текисликда $x^2 + z^2 = 9$ айланадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 10) ясовчиси Ox ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси yOz текисликда $y^2 + z^2 = 16$ айланадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 11) xOz ва yOz текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи иккита $x - y = 0$ ва $x + y = 0$ текислик; 12) битта нуқтани, координаталар бошини тасвир этади; 13) Oz ўқни тасвирлайди; 14) ҳеч қандай геометрик образни тасвир этмайди; 15) yOz ҳамда xOz текисликлар биргаликда тасвирлайди; 16) xOz ва xOy текисликларни биргаликда тасвирлайди; 17) xOz ва xOy текисликларни биргаликда тасвирлайди; 18) xOy, yOz ва xOz текисликларни биргаликда тасвирлайди; 19) xOz текисликни ҳамда xOz текисликка параллел булиб, ундан 9 бирлик узоқда ётувчи текисликни биргаликда тасвирлайди; 20) xOz текисликни ҳамда xOz билан yOz текислик орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликни биргаликда тасвирлайди.

4. 1) xOy текисликка параллел бўлиб, ундан 3 бирлик узоқда ётувчи текисликдаги маркази (0, 0, 3) ва радиуси 4 бирлик бўлган айлана; 2) yOz текисликда симметрия ўқлари Oy ва Oz бўлиб, ярим ўқлари $b = 3$, $c = 2$ бўлган эллипс, 3) xOy текисликка параллел бўлган текисликда ётувчи гипербола, бу гиперболанинг маркази (0, 0, 3) нуқтада бўлиб, ҳақиқий уқи Ox ўқига параллел ва 8 га тенг, мавҳум ўқи эса OY ўқига параллел ва 6 га тенг. 4) xOy ва yOz текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликдаги парабола. Бу параболанинг учи координаталар бошида бўлиб, Oy ўқининг симметрия ўқидир. **5.** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 36$.

6. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 25, \\ z = 3. \end{cases}$

Кўрсатма. Изланаётган геометрик ўрин иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган хоссага эга булгани учун иккита тенглама билан тасвир этилади. Бу тенгламалар xOy координаталар текислигига параллел бўлган текисликдаги айланани тасвир этади.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$, $(b^2 = a^2 - c^2)$.

Кўрсатма. Бу тенглама билан тасвир этилган геометрик ўрин $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлади ва айланма эллипсоид дейилади. **8.** $4x - 10y + 8z + 13 = 0$.

Кўрсатма. Бу тенглама билан тасвир этилган сирт текисликдир.

9. $\begin{cases} 5y + 3z - 19 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Кўрсатма. Бу тенгламалар биргаликда yOz текислигидаги тўғри чизиқни тасвир этади. У тўғри чизиқ Oz уқидан $\frac{19}{3}$ бирлик, Oy ўқидан $\frac{19}{5}$ бирлик кесиб утади.

10. $\begin{cases} 2x + 4z + 21 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Кўрсатма. 9- масалага қаранг.

11. $\begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

Кўрсатма. 9- масалага қаранг.

12. 1) Ясовчиси Oz уқига параллел булиб, йўналтирувчиси xOy текислигидаги $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсдан иборат бўлган цилиндрик сирт; 2) Ясовчиси Oy ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOz текислигидаги эллипсдан иборат булган цилиндрик сирт; 3) Ясовчиси Ox ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси yOz текислигидаги $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсдан иборат бўлган цилиндрик сирт; 4) Ясовчиси Oz ўқига параллел булиб, йўналтирувчиси xOy текислигидаги $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 5) Ясовчиси Oy ўқига параллел булиб, йўналтирувчиси xOz текислигидаги $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 6) Ясовчиси Ox ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси yOz текислигидаги $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 7) Ясовчиси Oz ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текислигидаги $y^2 = 2px$ параболадан иборат булган цилиндрик сирт; 8) Ясовчиси Ox уқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси yOz текислигидаги $y^2 = 2pz$ параболадан иборат булган цилиндрик сирт; 9) Ясовчиси Oy ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOz текислигидаги $z^2 = 2px$ параболадан иборат бўлган цилиндрик сирт; 10) Ясовчиси Oz ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текслигидаги $x^2+y^2=r^2$ айланадан иборат бўлган доиравий цилиндр; 11) Ясовчиси Ox ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси yOz текислигидаги $y+z=1$ тўғри чизиқдан иборат бўлган цилиндрик сирт, бу сирт — текисликдир. 12) Ясовчиси Oz ўқига параллел бўлиб, йўналтирувчиси xOy текислигида $x=0$ ва $x-y=0$ тўғри чизиқлардан иборат бўлган цилиндрик сирт, бу сирт иккита текисликдан иборатдир.

13. 1) Аппликаталар ўқининг тенгламаси; 2) (5, 0, 0) нуқтадан ўтиб Oz ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ; 3) (2, —3, 0) нуқтадан ўтиб, Oz ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ, 4) yOz текислигига параллел бўлган $x-2=0$ текисликдаги айлана бу айлананинг маркази (2, 0, 0) нуқтада ,бўлиб радиуси 5 га тенг.

14. $\left(\frac{2\sqrt{11}}{3}, 2,1\right)$ ва $\left(-\frac{2\sqrt{11}}{3}, 2,1\right)$.

15. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ z=0. \end{cases}$ **16.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25,$ $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36.$

Ўнинчи боб

1. 1), 2), 4), 5), 7), 8), 10 тенгламалар нормал шаклдаги тенгламалардир.

2. 1) $-\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}y+\frac{2}{3}z-3=0;$ 2) $\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}y-\frac{11}{15}z-2=0;$

3) $-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0;$ 4) $\frac{5}{\sqrt{61}}x-\frac{6}{\sqrt{61}}y-\frac{22}{\sqrt{61}}=0;$

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}z-10=0;$ 6) $x-5=0;$ 7) $z-\frac{2}{3}=0;$

8) $z-3=0$

3. A_1, A_3, A_4, A_5 нуқталардан ўтади. A_2, A_6 нуқталардан ўтмайди. **4.** (3, —2, 4). Кўрсатма. Нуқта Oz ўқига параллел ҳаракат қилганда унинг абсциссаси ва ординатаси ўзгармай қолади, фақат аппликата ўзгаради.

5. Текислик координаталар бошидан ўтади; 2) Текислик абсциссалар ўқига параллел; 3) Текислик ординаталар ўқига параллел; 4) Текислик аппликаталар ўқига параллел; 5) Текислик аппликаталар ўқидан ўтади; 6) Текислик ординаталар ўқидан ўтади; 7) Текислик абсциссалар ўқидан ўтади; 8) Текислик yOz текислигига параллел; 9) Текислик xOz текислигига параллел; 10) Текислик xOy текислигига параллел; 11) yOz текислиги; 12) xOy текислиги; 13) xOz текислиги.

6. $y+2=0$. **7.** $x+2=0$. **8.** $z-3=0$. **9.** $3y+2z=0$.

10. $3x-2y-9=0$. **11.** $15x+17y-42z+238=0$. **12.** 1) 3, 4, 5; 2) 1, —3, 2; 3) 1, 1, —1; 4) —4, ∞, 2 текислик Oy ўқига параллел. 5) 0, 0, 0. 6) ∞, 5, ∞ текислик xOz текислигига параллел.

13. $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1.$

14. $x+y+z-6=0$. **15.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\arccos\frac{8}{21}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.

16. $5x-6y+z-32=0$. **17.** $3x+y-8z-45=0$. **18.** 1) $5x+7y+3=0$; 2) $y-z+7=0$; 3) $5x+7z-46=0$. **19.** $8x-y-13z+49=0$. **20.** $29x+13y+28z+21=0$.

21. $9x+6y-11z-11=0$.

22. $11x-5y-3z-10=0$. **23.** 1) (1, 1, 1); 2) (2, 2, 2); 3) $x=\frac{7z-9}{5}$, $y=\frac{1+2z}{5}$.

24. 4. **25.** (0, 0, 1) ва $\left(0, 0, 15\frac{4}{7}\right)$.

26. $z = 0$ ва $15x + 8z = 0$. **27.** 2. Кўрсатма. Параллел текисликлардан бирида битта нуқта олиб, бу нуқтадан иккинчи текисликкача бўлган масофани топиш керак.

28. $19x - 133y + 25x - 155 = 0$ ва $34x - 83y - 25z + 20 = 0$. Кўрсатма. Изланаётган текисликлар берилган текисликлардан тенг узоқликларда ётади, аммо булардан бирининг нуқталаридан берилган текисликларгача оғиш абсолют қийматига кура ҳам, ишорага кўра ҳам бир хил бўлиб, изланаётган текисликлардан иккинчисининг нуқталаридан берилган текисликларгача оғиш абсолют қийматига кўра бир хил, ишорасига кўра қарама-қарши. Шунинг учун изланаётган текисликларнинг тенгламаси $\frac{7x - 24y - 15}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}} =$ $= \pm \frac{x + 2y - 2z - 7}{\sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2}}$. Бу тенгламаларни соддалаштириш билан жавоб ҳосил қилинади.

Ўн биринчи боб

1. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{5}$. **2.** $(-1, 3, 0)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқ; $s\{3, 5, 2\}$.

3. 1) $x = 3t + 2$, $y = 5t - 2$, $z = t + 1$; 2) $x = t - 3$, $y = 3t + 5$, $z = 2 \cdot (t + 2)$; 3) $x = 6t$, $y = 7t + 1$, $z = 2t - 1$; 4) $x = 2t + 1$, $y = 3(t + 1)$, $z = 2 \cdot (2t + 1)$.

4. 1) $(2, 3, 0)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$; $(0, -1, 2)$; 2) $(-13, -9{,}0)$; $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}\right)$; $\left(0, \frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

5. $\frac{x}{5} = -\frac{y + \frac{3}{5}}{1} = -\frac{z - \frac{11}{20}}{4}$; $x = t$, $y = -\frac{t+3}{5}$, $z = -\frac{4}{5}t + \frac{11}{10}$; $y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$; $z = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{10}$. **6.** $x = 3t + 1$; $y = 2t + 2$, $z = t + 3$.
7. $s\{0, 0, 1\}$; $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = +1$.

8. Координаталар бошидан ўтади; $S\{2, 3, 13\}$. 2) *Oz* ўққа параллел; $S\{0, 0, 3\}$.

9. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 1) $\cos\varphi = \pm\frac{16}{3\sqrt{110}}$; $\cos\varphi = \pm\frac{4}{\sqrt{174}}$.

11. 1) $\cos\varphi = \pm\frac{8}{63}$;

13. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{2z+3}{1}$. **15.** $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-5}{0}$.

Кўрсатма. Изланаётган тўғри чизиқ яна $(0, 0, 5)$ нуқтадан ҳам ўтади.

16. $\sqrt{11{,}4}$. Кўрсатма. $A(3, -2, 1)$ тўғри чизиқдаги нуқта $S\{1, 3, 5\}$ берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. Шунинг учун $d = AM \sin\alpha =$ $= AM \frac{|S \times \overrightarrow{AM}|}{S \cdot AM} = \frac{|S \times \overrightarrow{AM}|}{S}$.

17. Ётади.

18. $\frac{x-2}{9} = \frac{y+2}{11} = \frac{z-1}{16}$. **19.** $\frac{x-1}{16} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-11}$.

Кўрсатма. Изланаётган тўғри чизиқ $A(1, 2, -3)$ нуқтадан ўтгани учун унинг тенгламаси $\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{p}$ кўринишда бўлади. Бу тўғри чизиқ берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлгани учун $2m + n + 3p = 0$; изланаётган тўғри чизиқ билан берилган тўғри чизиқнинг кесишиш шарти

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } m - 5n + p = 0.$$

20. $43x - 215z - 115 = 0$; $43y - 258z + 43 = 0$.

Кўрсатма. Изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ бўлсин. m, n, p ларни бурчак коэффициентларининг параллеллик шартидан топилади. a, b, c лардан биттасини масалан, a ни ихтиёрий танлаб олиб, қолган иккитасини изланаётган тўғри чизиқ билан берилган тўғри чизиқларнинг ҳар бирини кесишиш шартидан аниқлаймиз.

21. $7x - 25y + 34z + 57 = 0$.

22. $4x + 4y - 5z - 25 = 0$. 23. $\sin\varphi = \frac{7}{9}$.

24. 1) $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+6}{1}$; 2) $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+b}{0}$; 3) $\frac{x-4}{0} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{0}$.

23. $5x + 4y - z + 3 = 0$. 25. 11. 27. $17x - 10y - z - 13 = 0$.
28. $(1, -1, -1)$ 29. $x + y - z = 0$.
30. $4x + 4y - 13z - 35 = 0$.

Ўн иккинчи боб

1. 1) $x = y^2 + z^2$; 2) $x^2 + y^2 = z^4$. 2. $y = e^{-x^2-y^2}$.

3. xOy текислиги билан кесилганда $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$, $z = 0$; xOz текислиги билан кесилганда $\frac{x^2}{144} + \frac{z^2}{36} = 1$, $y = 0$; yOz текислиги билан кесилганда: $\frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{36} = 1$, $x = 0$.

4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. 5. 1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = -1$.

6. $x^2 + y^2 = 2pz$ айланма параболоид.

7. 1) сфера; 2) сфера; 3) эллипсоид; 4) бир ковакли гиперболоид; 5) икки ковакли гиперболоид; 6) эллиптик параболоид; 7) гиперболик параболоид; 8) 2- тартибли конус; 9) эллиптик цилиндр; 10) гиперболик цилиндр.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

1. И. И. Привалов — Аналитическая геометрия, 1962, Физматгиз.
2. Н. В. Ефимов — Краткий курс аналитической геометрии, 1962, Физматгиз.
3. М. Я. Выгодский — Основы высшей математики, I қ, 1963, Физматгиз.
4. И. П. Натансон — Краткий курс высшей математики, 1963, Физматгиз.
5. Н. М. Бескин — Курс аналитической геометрии для вузов, 1946, Гостехиздат.
6. М. И. Мусхелишвили — Курс аналитической геометрии, 1938, ГОНТИ.
7. С. П. Фиников — Аналитическая геометрия, 1940, Учпедгиз.
8. С. С. Бюшгенс — Аналитическая геометрия, I ва II қисм, 1939, ГОНТИ.
9. Проф. Т. Н. Қори-Ниёзий — Аналитик геометрия, 1956. Ўқувпеддавнашр.
10. Б. Н. Делоне ва Д. А. Райков — Аналитическая геометрия, I т. 1948, Гостехиздат.
11. О. Н. Цубербиллер — Аналитик геометриядан масалалар ва машқлар, 1960, „Ўрта ва олий мактаб".
12. Д. В. Клетеник — Сборник задач по аналитической геометрии, 1956, ГИТТЛ.
13. В. П. Минорский — Олий математика масалалари тўплами, „Ўрта ва олий мактаб", 1963.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

МАХКАМ КАМАЛОВИЧ КАМАЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для студентов
высших технических учебных заведений

Второе издание

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент — 1972

Махсус редактор *М. А. Собиров*
Редактор *Х. Алимов*
Бадиий редактор *Е. И. Соин*
Техредактор *М. Алимов*
Корректор *М. Тошимова*

Теришга берилди 28/XII-1971 й. Босишга рухсат этилди 13/X—1972 й. Қоғози 60×90$^1/_{16}$. Физик л. 20,0. Нашр. л. 19,76. Тиражи 17000. Р05185.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 143 — 71. Баҳоси 65 т. Муқоваси 20 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари бўйича Давлат комитетининг 1- босмахонаси. Тошкент ш., Хамза кўчаси, 21. 1972 й. Қоғоз № 3. Заказ № 31.

Типография № 1 Государственного комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Ташкент, ул. Хамзы, 21.