А.В. АЛЕКСАНДРОВ В.Д. ПОТАПОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ упругости и пластичности

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

А. В. АЛЕКСАНДРОВ, В. Д. ПОТАПОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ упругости и пластичности

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника для студентов
строительных специальностей
высших учебных заведений

Москва «Высшая школа» 1990

ББК 30.121
А 46
УДК 539.3/.8

Рецензенты: кафедра сопротивления материалов Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева (зав. кафедрой — проф. *И. С. Цурков*); кафедра сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Калининского политехнического института (зав. кафедрой — проф. *В. Г. Зубчанинов*)

Александров А. В., Потапов В. Д.
А 46 Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1990. — 400 с.: ил.
ISBN 5-06-000053-2

В книге изложены основные соотношения линейной теории упругости, плоская задача, приведены примеры решения некоторых пространственных задач, задачи изгиба тонких упругих оболочек. Изложены вопросы расчета нелинейно-упругих, упругопластических тел, а также вязкоупругих тел.

А $\frac{1603040000(4309000000) — 105}{001(01)—90}$ 100—89 ББК 30.121
605

ISBN 5-06-000053-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник написан в соответствии с действующей программой по курсу «Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности» для строительных специальностей высших учебных заведений. При написании учебника особое внимание уделялось связи настоящего курса с разделами «Сопротивления материалов» и «Строительной механики».

Помимо разделов, традиционно входящих в аналогичные курсы, в книгу включены разделы, учитывающие современные требования к подготовке инженера. В частности, представлены главы по теории оболочек, а также гибких пластин и оболочек, существенно расширена глава по теории пластичности и добавлены главы по вязкоупругости и механике трещин. Эти вопросы в последнее время стали особенно актуальными.

Наряду с основными дифференциальными уравнениями механики деформируемого твердого тела в учебнике изложена вариационная формулировка задач, которая имеет особенно важное значение при построении приближенных методов, используемых как в теории упругости и пластичности, так и в строительной механике.

Большое внимание уделено численным методам решения линейных и нелинейных задач механики деформирования упругих, упругопластических и вязкоупругих тел, численным методам решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также прямым вариационным методам. В учебнике изложены основные положения метода конечных элементов, что обеспечит лучшую подготовленность студентов к изучению курса строительной механики. Даются понятия о методе граничных элементов.

Перечисленные вопросы в изданных ранее курсах не получили достаточно полного освещения, и авторы стремились настоящим изданием восполнить этот пробел.

В основу создания учебника положен опыт длительного преподавания авторами данного курса на кафедре строительной механики Московского института инженеров железнодорожного транспорта.

При написании учебника авторы исходили из того, что не все из изложенных разделов в равной мере рассматриваются в лекционных

Но среди элементов несущих конструкций встречаются и тела более сложной формы (рис.В.1). К ним относятся пластины, оболочки, массивы деформированного основания под сооружением и т. д.

При расчете таких тел простые формулы сопротивления материалов, как правило, неприменимы. Даже в стержне, имеющем, например, болтовое отверстие, распределение напряжений и деформаций вокруг отверстия уже не может быть найдено по элементарным формулам сопротивления материалов. Это тем более справедливо для тел, имеющих произвольную форму.

Для указанных тел чаще всего нет возможности получить элементарные формулы для определения напряжений, деформаций, перемещений. В то же время существуют некоторые общие пути решения задач, основанные на уравнениях, описывающих деформацию упругой среды под нагрузкой. Последовательное применение такого подхода, в принципе, дает возможность исследования сил упругости и перемещений в элементе конструкции любой формы. Эти уравнения и методы их решения изучаются в курсе теории упругости и пластичности.

Появление науки о прочности и механике упругих тел связано с именем Галилея, знаменитая книга которого под названием «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» была издана в 1638 г. Первая ее часть касалась теории падения твердых тел, а вторая — посвящена прочности стержней и балок. В XVII и XVIII вв. быстро развиваются механика, астрономия и другие естественные науки. Появляется интерес к экспериментальным работам. Роберт Гук (1635—1703), обладавший разносторонними знаниями и талантами, имел особую склонность к экспериментам и провел первые исследования механических свойств материалов. В 1678 г. им выпущена книга «О восстановительной способности, или упругости», в которой описывались его опыты с упругими телами.

Теорией изгиба балок занимались такие крупные ученые, как Мариотт, Яков и Иоганн Бернулли, Лейбниц, Эйлер, Лагранж и др. В разных странах создавались научные общества, которые впоследствии оформлялись в Академии наук. Организация их, издание научных трудов оказали большое влияние на развитие науки. В становлении науки о сопротивлении материалов и теории упругости заметную роль сыграло образование во Франции в 1795 г. Политехнической школы, созданной в духе прогрессивных веяний, связанных с Французской революцией. Инженерное образование в ней было поставлено на высоком уровне; особую роль играли вопросы математики и механики. Первый систематический курс по сопротивлению материалов был выпущен профессором этой школы Навье в 1826 г.

Выпускниками и профессорами этой школы Пуассоном (1781—1840), Коши (1789—1857), Ламе (1795—1870) и другими были заложены основы математической теории упругости. Понятие механического напряжения и математический аппарат, связанный с описанием сплошной деформируемой среды, в теорию упругости ввел Коши. Большой вклад в становление и развитие теории упругости внес Сен-Венан (1797—1896).

Приведенная краткая историческая справка показывает, что фундаментальные основы теории упругости были заложены выдающимися учеными, внесшими большой вклад в математику, механику и другие разделы науки; основные уравнения теории упругости связаны с именами этих ученых. Для более подробного ознакомления с историей науки о деформировании упругих тел рекомендуем прочесть увлекательную книгу С. П. Тимошенко [33].

Следует, однако, заметить, что запросам инженерной практики и, в частности, техники железнодорожного строительства и строительства мостов в XVIII—XIX вв. в большей мере отвечали простые решения задач, касающихся деформации стержней и стержневых систем. Вопросы расчета деформируемых систем составили направление, которое теперь известно как теория сооружений, или строительная механика. В строительной механике вопросы расчета стержневых систем в конце XIX и первой трети XX вв. были доведены до высокой степени совершенства и сыграли существенную роль в развитии техники в этот период. Теория упругости также развивалась в названный период, но ее уравнения и общие решения из-за сложности не могли служить непосредственно рабочим аппаратом инженера и представляли собой в большинстве случаев решение определенных научных вопросов.

В наш век с усложнением форм строительных конструкций, появлением авиастроения, разнообразными запросами машиностроения роль методов теории упругости резко изменилась. Теперь они составляют основу для построения практических методов расчета деформируемых тел и систем тел разнообразной формы. При этом в современных расчетах учитываются не только сложность формы тела и разнообразие воздействий (силовое, температурное и т. п.), но и специфика физических свойств материалов, из которых изготовлены тела. Дело в том, что в современных конструкциях наряду с традиционными материалами (сталь, дерево, бетон и т. д.) широкое применение получают новые материалы, в частности композиты, обладающие рядом специфических свойств. Так, армирование полимеров волокнами из высокопрочных материалов позволяет получить новый легкий конструкционный материал, имеющий высокие прочностные свойства, превосходящие даже прочность современных сталей. Но наличие полимерной основы наделяет такой композитный материал помимо упругих вязкими свойствами, что обязательно должно учитываться в расчетах. Даже в традиционных материалах в связи с высоким уровнем нагружения, повышенными температурами возникает необходимость в учете пластических свойств. Все эти вопросы теперь составляют предмет механики деформируемого твердого тела.

Заметим, что использование достижений механики деформируемого твердого тела в инженерных расчетах неразрывно связано с возможностями применения современных ЭВМ. Поэтому в последние годы в указанном разделе механики особенно большое развитие получили приближенные методы решения задач о деформировании твердых тел.

В заключение сформулируем постановку задачи теории упругости и пластичности, а также основные допущения, на которых она базируется.

Рассмотрим тело заданной формы, материал которого имеет известные механические свойства. На тело действуют заданные нагрузки и наложены некоторые связи. Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в теле.

При решении подобных задач будем считать справедливыми следующие допущения.

1. *Материал тела представляет собой сплошную среду.* Допущение о сплошности позволяет отвлечься от реальной структуры данного материала (кристаллическая, зернистая) и рассматривать его как аморфный, непрерывно заполняющий любой элемент объема тела.

2. *Материал тела считается однородным.* Это допущение означает, что механические свойства в любой точке тела одинаковы.

Допущения о сплошности и однородности приводят к тому, что внутренние силы представляются непрерывно распределенными по объему тела и для их описания можно использовать аппарат математического анализа. Например, говоря о напряжениях, переходим к пределу отношения внутренних сил, действующих на некоторой площадке, к ее площади, стремящейся к нулю, что имеет смысл только для сплошной среды.

3. *Материал тела считается изотропным*, т. е. его механические свойства в каждой точке одинаковы во всех направлениях. В противном случае материал называется анизотропным. В некоторых разделах курса делаются отступления от этого допущения, что будет оговариваться особо.

4. *Деформации в точках тела* (относительные удлинения ε и углы сдвига γ) *считаются малыми.* Это допущение говорит о том, что под действием нагрузок размеры тела существенно не меняются. Так, например, относительное удлинение малого отрезка стержня длиной S (рис. В.2), получившего удлинение ΔS, будет

$$\varepsilon = \Delta S/S.$$

Это удлинение надо считать условным, так как приращение ΔS отнесено к первоначальному размеру S. Вычислим дифференциал «истинной» относительной деформации, относя приращение $\mathrm{d}S$ к фактической длине отрезка $S + \Delta S$:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\text{и}} = \frac{\mathrm{d}S}{S + \Delta S} = \frac{\mathrm{d}S}{S}\,\frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Разложив правую часть в степенной ряд, можно записать $d\varepsilon_{и} = d\varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \ldots)$.

Отсюда видно, что при $\varepsilon \ll 1$ имеем приближенное равенство $d\varepsilon \approx d\varepsilon_{и}$, и изменением абсолютных размеров тела, вызванным его деформацией, можно пренебречь.

Изучение курса начнем с рассмотрения основ теории упругости, где предполагается материал идеально упругим и линейно деформируемым (справедлив закон Гука). Задачи теории упругости решаются более просто по сравнению с аналогичными задачами теории пластичности и вязкоупругости. Кроме того, решение задач в предположении линейной деформируемости материала представляет во многих случаях самостоятельный практический интерес. Далее излагаются основные положения теории пластичности и вязкоупругости. Решение задач с учетом пластических и вязких свойств материала в значительной степени опирается на решение аналогичных задач теории упругости.

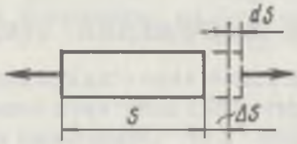


Рис. В.2

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

§ 1.1. НАГРУЗКИ И НАПРЯЖЕНИЯ. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим произвольное тело с наложенными на него опорными связями, которое находится под действием поверхностных и объемных (массовых) нагрузок (рис. 1.1). Объемными нагрузками могут быть, например, собственный вес, инерционные силы, силы электромагнитного происхождения и т. д.

Поверхностные и массовые нагрузки характеризуются интенсивностями, которые в общем случае зависят от координат x, y, z и выражаются соответственно в Н/м² (или Па) и Н/м³. Сосредоточенные внешние силы, приложенные в точках поверхности тела, можно рассматривать как предельный случай поверхностных нагрузок, распределенных на малой части поверхности тела.

Проекции интенсивности поверхностной нагрузки на координатные оси обозначим p_x, p_y, p_z, а проекции интенсивности массовой нагрузки — X, Y, Z. Проекция интенсивности внешней нагрузки считается положительной, если ее направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси.

Под действием заданных нагрузок в теле появляются напряжения.

Вырежем из рассматриваемого тела элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям, а их длина равна $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ (рис. 1.1). На гранях этого параллелепипеда действуют напряжения, которые можно разложить на нормальную составляющую к грани (нормальное напряжение) и касательную (касательное напряжение). В свою очередь, касательное напряжение можно разложить на две составляющие, параллельные координатным осям (рис. 1.2). В результате на каждой грани параллелепипеда действуют три напряжения (слово «составляющая» в дальнейшем для краткости будем опускать), которые обозначим σ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, . . . Первый индекс в обозначениях напряжений указывает ось, параллельно которой направлена внешняя нормаль к площадке, а второй индекс — ось, параллельно которой направлена составляющая напряжения, т. е. первый индекс указывает площадку, на которой действует напряжение, а второй — его направление. Поскольку в обозначениях нормальных напряжений фигурируют два одинаковых индекса, обычно оставляют только один из них и пишут σ_x, σ_y, σ_z.

Примем следующее правило знаков для напряжений: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) направление, то напряжение положительно, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. В соответствии с приведенным правилом знаков положительные нормальные напряжения являются растягивающими, а отрицательные — сжимающими.

Напряжения, так же как и поверхностная нагрузка, выражаются в Н/м² (Па).

Одноименные и параллельные напряжения, действующие на параллельных гранях бесконечно малого параллелепипеда, отлича-

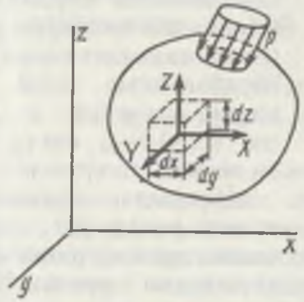


Рис. 1.1

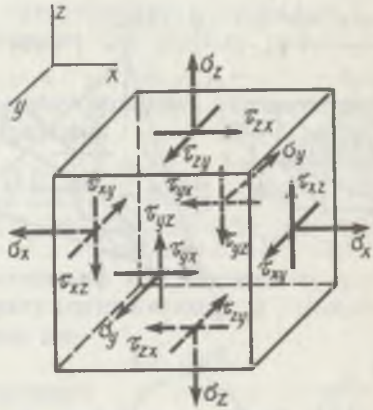


Рис. 1.2

ются друг от друга на бесконечно малую величину и потому их можно считать одинаковыми.

Следовательно, на гранях параллелепипеда действуют три нормальных и шесть касательных напряжений, совокупность которых образует тензор напряжений

$$T_н = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

В строках тензора содержатся напряжения, направление которых параллельно соответственно координатным осям x, y, z, а в столбцах — напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси x, или y, или z.

В курсе «Сопротивление материалов» доказывается закон парности касательных напряжений для плоского напряженного состояния. В следующей главе будет доказан аналогичный закон для общего случая напряженного состояния. В соответствии с ним

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Следовательно, тензор напряжений является симметричным относительно главной диагонали.

Наряду с напряжениями, действующими на площадках, нормальных к координатным осям x, y, z, часто возникает необходимость отыскания напряжений на площадках, произвольным образом наклоненных к указанным осям. Установим зависимость между проекциями полного напряжения на наклонной площадке $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$ с напряжениями σ_x, τ_{xy}, . . .

Выделим в окрестности точки элементарный тетраэдр, три грани которого совпадают с координатными плоскостями, а четвертая грань образована секущей произвольной наклонной плоскостью (рис. 1.3, *а*, *б*). Ее положение в пространстве определяется нормалью ν. Обозначим косинусы углов (направляющие косинусы), образованные этой нормалью с осями x, y, z, $\cos(x, \nu) = l$, $\cos(y, \nu) = m$, $\cos(z, \nu) = n$.

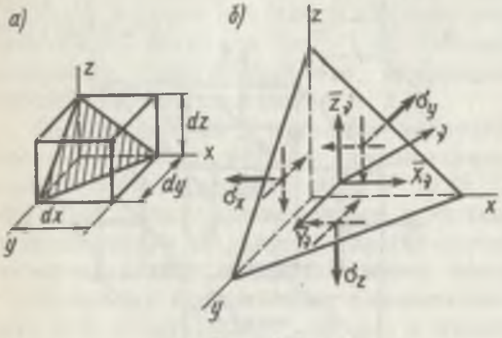


Рис. 1.3

Площадь наклонной грани равна dA, а площади других граней соответственно равны dA_x, dA_y, dA_z (индекс указывает направление нормали к площадке). Очевидно, что для этих площадей справедливы соотношения

$$dA_x = l dA, \; dA_y = m dA, \; dA_z = n\, dA. \tag{1.1}$$

Условие равновесия тетраэдра в проекции на ось x имеет вид

$$\overline{X}_\nu dA - \sigma_x dA_x - \tau_{yx}\, dA_y - \tau_{zx} d\, A_z = 0. \tag{1.2}$$

При записи уравнения равновесия удерживались только члены второго порядка малости ($dA_x = \frac{1}{2} dy d\, z$, . . .). Поэтому горизонтальная проекция массовой силы не учитывается, так как она является величиной третьего порядка малости ($\frac{1}{6}$ $X dx dy dz$). Из равенства (1.2) имеем

$$\overline{X}_\nu = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n. \tag{1.3}$$

Далее из уравнений равновесия в проекции на оси y z нетрудно получить аналогичные выражения для $\overline{Y}_\nu$ и $\overline{Z}_\nu$. Однако те же самые равенства можно записать, воспользовавшись так называемым правилом круговой подстановки индексов, в соответствии с которым производится замена букв в последовательности, показанной на рис. 1.4.

В итоге приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \overline{Y}_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \overline{Z}_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Таким образом, по известным компонентам тензора напряжений, записанным в осях x, y, z, могут быть найдены проекции полного напряжения $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$ на наклонной площадке, определяемой направляющими косинусами l, m, n.

Обозначим координатную ось, совпадающую с нормалью ν, через x' и выберем на наклонной площадке две другие ортогональные оси y', z'.

По составляющим $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$ можно получить значение нормального напряжения на той же площадке:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu = \sigma_{x'} &= \overline{X}_\nu l + \overline{Y}_\nu m + \overline{Z}_\nu n = \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Аналогично можно найти касательные напряжения $\tau_{x'y'}$, $\tau_{x'z'}$. Рассматривая площадки, перпендикулярные осям y', z', можно определить нормальные и касательные напряжения на этих площадках.

Итак, если заданы компоненты тензора напряжений в какой-либо системе координат x, y, z, то компоненты тензора в другой системе координат x', y', z' могут быть получены с помощью зависимостей типа (1.5). Другими словами, напряженное состояние в точке тела полностью определено шестью компонентами тензора напряжений, записанными в какой-то системе координат x, y, z. Заметим, что соотношения вида (1.5) являются определением симметричного тензора второго ранга.

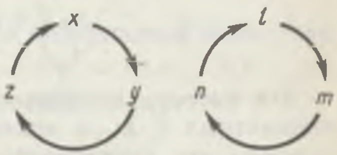


Рис. 1.4

Тензорный характер имеют многие величины, например моменты инерции, кривизны поверхности. Тензорные величины в математической физике являются основой для описания состояния сплошных сред, широко используются в электродинамике, теории относительности и т. д.

§ 1.2. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

В курсе «Сопротивление материалов» было показано, что при плоском напряженном состоянии в точке существуют площадки, на которых действуют нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки называются главными площ а д к а м и, а соответствующие нормальные напряжения — г л а в н ы м и н а п р я ж е н и я м и.

Аналогичные площадки и напряжения имеют место и при объемном напряженном состоянии.

Допустим, что нормаль к главной площадке образует с координатными осями x, y, z углы, косинусы которых равны l, m, n, причем очевидно должно выполняться геометрическое условие

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{1.6}$$

Главное напряжение на этой площадке обозначим σ, проекции которого на оси x, y, z определяются равенствами

$$\overline{X}_\nu = \sigma l, \quad \overline{Y}_\nu = \sigma m, \quad \overline{Z}_\nu = \sigma n.$$

С другой стороны, те же самые составляющие могут быть выражены через напряжения σ_x, τ_{xy}, . . . на основании уравнений (1.4). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Представим систему уравнений (1.7) в виде

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\, l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)\, m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)\, n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных l, m, n является однородной. Решение ее может быть нулевым, что противоречит условию (1.6), и потому в рассматриваемой задаче места не имеет, и отличным от нуля, что, в свою очередь, предполагает равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{1.9}$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение относительно σ

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0, \tag{1.10}$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$$I_2 = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Из высшей алгебры известно, что кубическое уравнение имеет три корня, причем в рассматриваемом случае эти корни являются действительными.

Пронумеруем главные напряжения в порядке убывания: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$.

Подставим любой из корней в уравнения (1.8) и используем два из них [третье уравнение на основании равенства (1.9) является следствием двух других], а также условие (1.6).

Решая совместно составленную таким образом систему трех уравнений, найдем значения направляющих косинусов l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) главных площадок. Детальное исследование косинусов, полученных для каждого главного напряжения, показывает, что главные площадки взаимно ортогональны друг другу.

Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, на которые действуют главные нормальные напряжения. Следовательно, значения главных напряжений должны быть одними и теми же независимо от выбора исходной системы координат, в которой были определены компоненты тензора напряжений. Это означает, что коэффициенты I_1, I_2 и I_3 кубического уравнения не меняют своего значения при изменении системы координат. Отсюда можно сделать вывод, что указанные коэффициенты являются соответственно первым (I_1), вторым (I_2) и третьим (I_3) инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей.

Особенно просто определяются значения инвариантов через главные напряжения. Очевидно, что

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Сам тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_н = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно констатировать, что напряженное состояние в точке вполне определяется главными напряжениями и ориентацией главных площадок.

§ 1.3. НАИБОЛЬШИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ОКТАЭДРИЧЕСКОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Принимая в качестве исходных осей x, y, z главные оси x_1, x_2, x_3, из соотношения (1.5) найдем нормальное напряжение на произвольной наклонной площадке с направляющими косинусами

l, m, n:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Полное напряжение и его касательная составляющая равны

$$p^2 = \overline{X}_\nu^2 + \overline{Y}_\nu^2 + \overline{Z}_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2,$$

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2. \qquad (1.11)$$

Для отыскания площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, необходимо исследовать функцию τ на экстремум.

Из условия

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

выразим один из косинусов, например

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2. \qquad (1.12)$$

Подставим выражение (1.12) в (1.11) и продифференцируем функцию τ^2 один раз по l и по m.

Приравнивая эти производные нулю, получим два уравнения, из которых могут быть найдены значения косинусов, а далее из равен-

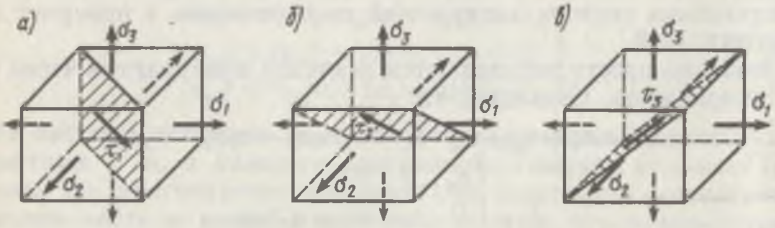


Рис. 1.5

ства (1.11) и сами значения экстремальных значений касательных напряжений.

Не останавливаясь подробно на выкладках, ограничимся формулировкой результатов. При объемном напряженном состоянии на трех площадках, расположенных под углом 45° к главным, действуют касательные напряжения (рис. 1.5, *а*, *б*, *в*), модули которых равны

$$\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \tau_3 = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|.$$

Если соблюдаются неравенства $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений, и это касательное напряжение действует на площадке, которая делит угол между площадками с наибольшими и наименьшими главными напряжениями пополам.

Особый интерес представляют **октаэдрические площадки,** равнонаклоненные к направлениям трех главных напряжений, и действующие на них октаэдрические напряжения. Найдем эти напряжения.

Совместим координатные оси с направлениями главных напряжений. Тогда направляющие косинусы для октаэдрической площадки относительно выбранных координат, очевидно, равны

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

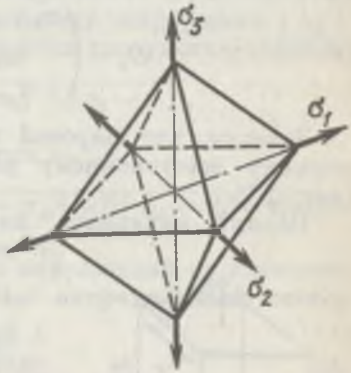


Рис. 1.6

Из уравнений (1.4) имеем:

$$X_1 = \sigma_1 l = \sigma_1/\sqrt{3}, \quad X_2 = \sigma_2 m = \sigma_2/\sqrt{3},$$
$$X_3 = \sigma_3 n = \sigma_3/\sqrt{3}.$$

Полное напряжение, действующее на октаэдрической площадке, определяется выражением

$$p^2_{\text{окт}} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)/3,$$

а его нормальная и касательная составляющие соответственно равны

$$\sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \sigma_{\text{ср}},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2},$$

где $\sigma_{\text{ср}}$ — среднее нормальное напряжение.

Полученные выражения одинаковы на всех восьми гранях октаэдра, показанного на рис. 1.6.

Октаэдрическое касательное напряжение мало отличается от максимального касательного напряжения и для их отношения справедливы неравенства

$$0{,}941 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \geqslant \frac{\tau_{\text{окт}}}{\tau_{\max}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}816.$$

§ 1.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА ШАРОВОЙ ТЕНЗОР И ДЕВИАТОР НАПРЯЖЕНИЙ. ИНТЕНСИВНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ

В дальнейшем при записи физических соотношений, т. е. зависимостей между напряжениями и деформациями для упругого, упругопластического или вязкоупругого материала в случае трехосного напряженного состояния потребуется представление тензора напряжений в виде двух составляющих:

$$T_{\text{н}} = Ш_{\text{н}} + D_{\text{н}},$$

где $Ш_н$ — шаровой тензор напряжений:

$$Ш_н = \begin{pmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ср} \end{pmatrix};$$

$D_н$—девиатор напряжений:

$$D_н = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{ср} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{ср} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что шаровой тензор напряжений соответствует равномерному всестороннему растяжению или сжатию в точке тела (рис. 1.7).

Первый инвариант шарового тензора напряжений совпадает с первым инвариантом тензора напряжений

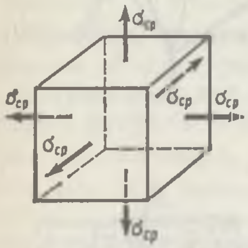


Рис. 1.7

$$I_1^Ш = 3\sigma_{ср} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

а первый инвариант девиатора напряжений равен нулю.

Действительно,

$$I_1^D = (\sigma_x - \sigma_{ср}) + (\sigma_y - \sigma_{ср}) + (\sigma_z - \sigma_{ср}) =$$
$$= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_{ср} = 0.$$

Для определения второго инварианта девиатора напряжений воспользуемся выражением для второго инварианта тензора напряжений, подставив в него вместо σ_x, σ_y, σ_z разности $\sigma_x - \sigma_{ср}$, $\sigma_y - \sigma_{ср}$, $\sigma_z - \sigma_{ср}$. После несложных преобразований получим

$$I_2^D = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right].$$

или в главных напряжениях

$$I_2^D = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

В теории пластичности широко используется понятие интенсивности касательных напряжений $\tau_и$, которое формально определяется как радикал из второго инварианта девиатора напряжений:

$$\tau_и = \sqrt{I_2^D} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}.$$

Очевидно, что $\tau_и = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\tau_{окт}$.

При чистом сдвиге в плоскости x, y напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ и интенсивность $\tau_и$ оказывается равной касательному напряжению $|\tau_{xy}|$.

Кроме интенсивности касательных напряжений $\tau_и$ часто пользуются понятием интенсивности нормальных напряжений $\sigma_и = \sqrt{3}\tau_и$. При одноосном растяжении, когда $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, интенсивность нормальных напряжений в соответствии с этой формулой становится равной нормальному напряжению $|\sigma_x|$.

Через главные напряжения $\sigma_и$ определяется следующим образом:

$$\sigma_и = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

а через напряжения в произвольных осях —

$$\sigma_и = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}.$$

Если разделить компоненты девиатора напряжений на интенсивность касательных напряжений, получим направляющий тензор напряжений

$$\overline{D}_н = \frac{1}{\tau_и} D_н = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_и} D_н.$$

Характерно, что главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями направляющего тензора напряжений. Можно показать, что направляющий тензор напряжений полностью определяется четырьмя компонентами, например его тремя главными направлениями и одним из главных напряжений или отношением любой пары главных напряжений между собой. Учитывая эти замечания, можно сказать, что тензор напряжений полностью определен, если известны его направляющий тензор напряжений $\overline{D}_н$, среднее напряжение $\sigma_{ср}$ и октаэдрическое касательное напряжение $\tau_{окт}$, или интенсивность касательных напряжений $\tau_и$, или интенсивность напряжений $\sigma_и$.

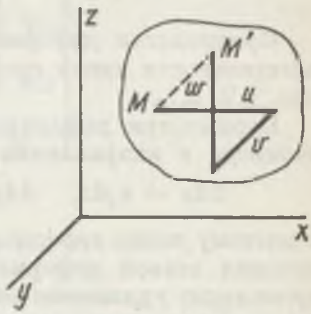


Рис. 1.8

§ 1.5. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ТОЧКЕ ТЕЛА. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве. Например, точка M (рис. 1.8) имела в исходном недеформированном состоянии координаты x, y, z. После деформации точка заняла положение M' и ее координаты стали равны

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w,$$

где u, v, w — проекции вектора перемещений точки M на оси x, y, z.

Перемещения u, v, w являются функциями пространственных координат $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = (x, y, z)$. В силу сплошности тела будем предполагать, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по x, y, z непрерывны, кроме, быть может, особых точек, линий или поверхностей.

Если рассмотреть поведение элементарного параллелепипеда, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки M, то в результате деформации в общем случае этот параллелепипед изменит и свой объем, и свою форму.

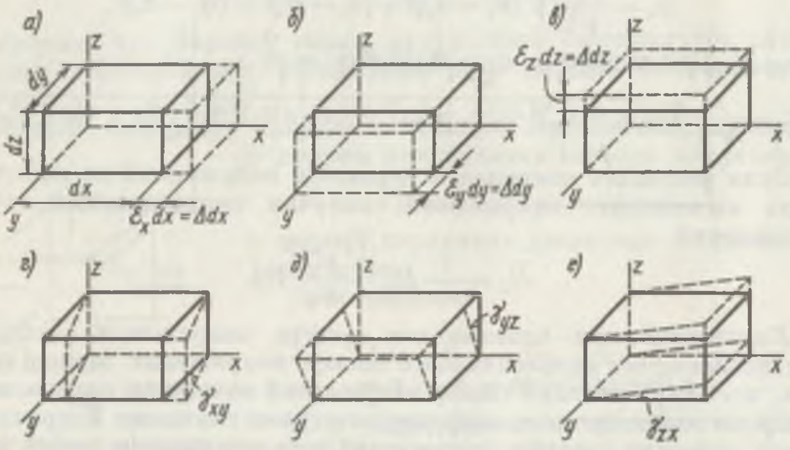


Рис. 1.9

Предполагая деформацию малой, представим ее в виде последовательности шести простейших деформаций, которые показаны на рис. 1.9, *а...е*.

Первые три деформации определяют удлинение ребер параллелепипеда в направлении одной из координатных осей

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx, \quad \Delta dy = \varepsilon_y dy, \quad \Delta dz = \varepsilon_z dz,$$

и поэтому такие деформации называют о с е в ы м и. Индекс в обозначении осевой деформации указывает ось, параллельно которой происходит удлинение ребра. Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными — укорочению.

Три другие деформации являются деформациями сдвига. Обозначаются они γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}. Индексы указывают, в какой координатной плоскости появляется угол сдвига между ребрами параллелепипеда. Деформации сдвига считаются положительными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями параллелепипеда. В противном случае деформации отрицательны.

Заметим, что деформацию сдвига можно представить по-разному (рис. 1.10), однако во всех случаях она может быть приведена к одному виду. Деформация сдвига во втором (рис. 1.10, *б*) и в третьем (рис. 1.10, *в*) состояниях равна деформации сдвига в первом состоянии (рис. 1.10, *а*). Второе деформированное состояние (рис. 1.10, *б*) отличается от первого (рис. 10.10, *а*) жестким поворотом параллелепипеда на угол γ_{yx} против часовой стрелки, а третье состояние (рис. 1.10, *в*) — на угол $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$. Для всех трех случаев характерно одно

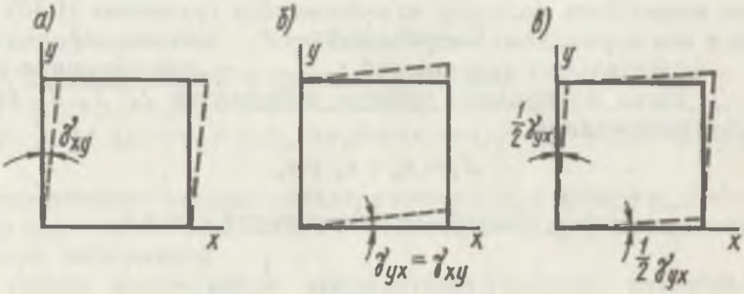


Рис. 1.10

и то же напряженное состояние, так как поворот элементарного объема как жесткого целого не приводит к появлению в нем дополнительных усилий.

Аналогично понятию тензора напряжений введем понятие тензора деформаций, который записывается следующим образом:

$$T_{д}=\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy},\quad \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\gamma_{xz},\ \ldots,$$

то тот же тензор принимает вид

$$T_{д}=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Если в отношении тензора напряжений было сказано, что он полностью определяет напряженное состояние в точке тела, то о тензоре деформаций можно сказать, что он полностью определяет деформированное состояние в точке тела.

§ 1.6. ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

По аналогии с теорией напряженного состояния можно показать, что в каждой точке существуют три взаимно перпендикулярных направления, по которым тело испытывает только деформации удлинения или укорочения, а деформации сдвига равны нулю. Эти осевые деформации называются **главными деформациями** ε_1, ε_2, ε_3 и находятся из кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 - J_2\varepsilon - J_3 = 0,$$

которое может быть получено из кубического уравнения (1.10) путем замены в нем нормальных напряжений σ_x, . . . осевыми деформациями ε_x, . . ., а касательных напряжений τ_{xy}, . . . — деформациями сдвига ε_{xy}, . . . Тогда инварианты тензора деформаций J_1, J_2, J_3 определяются выражениями

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2 = \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

§ 1.7. ШАРОВОЙ ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ И ДЕВИАТОР ДЕФОРМАЦИЙ

Тензор деформаций можно представить в виде суммы шарового тензора деформаций $Ш_д$ и девиатора деформаций $D_д$:

$$Ш_д = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ср} \end{pmatrix},$$

причем $\varepsilon_{ср} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$—средняя деформация;

$$D_д = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{ср} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_{ср} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_{ср} \end{vmatrix}.$$

Шаровой тензор деформаций характеризует объемную деформацию в точке тела

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\,\varepsilon_{ср} = J_1,$$

а девиатор деформаций — деформацию изменения формы.

Очевидно, что первый инвариант девиатора деформаций равен нулю, а его второй инвариант

$$J_2^{д} = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right].$$

§ 1.8. ИНТЕНСИВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ

Инвариант J_1 можно связать с осевой деформацией в направлении, перпендикулярном октаэдрическим площадкам,

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_{ср} = J_1/3,$$

а $J_2^{д}$ — с углом сдвига в тех же площадках

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Следовательно, квадрат октаэдрического угла сдвига $\gamma_{окт}^2$ с точностью до постоянного множителя 8/3 совпадает со вторым инвариантом девиатора деформаций.

В теории пластичности используется понятие интенсивности деформаций сдвига $\gamma_и$, которое формально определяется как удвоенный радикал из второго инварианта девиатора деформаций:

$$\gamma_и = 2\sqrt{J_2^{д}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]}.$$

При чистом сдвиге в плоскости xy деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, а интенсивность $\gamma_и$ оказывается равной деформации сдвига $|\gamma_{xy}|$. Кроме интенсивности деформаций сдвига пользуются понятием интенсивности продольных деформаций

$$\varepsilon_и = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_и.$$

Очевидно, справедливы равенства

$$\gamma_и = \sqrt{\frac{3}{2}}\gamma_{окт}, \quad \varepsilon_и = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{окт}.$$

Особенно просто интенсивность деформаций определяется через главные деформации:

$$\varepsilon_и = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Введем понятие направляющего тензора деформаций

$$\overline{D}_д = \frac{2}{\gamma_и} D_д$$

относительно которого, так же как ранее относительно направляющего тензора напряжений, можно заметить, что его главные оси совпадают с главными осями тензора деформаций и что он полностью определяется его тремя главными направлениями и одной из главных деформаций или отношением любой пары главных деформаций между собой. Таким образом, так же как и тензор напряжений, тензор деформаций целиком определяется его направляющим тензором $\overline{D}_{д}$, объемной Θ (или средней $\varepsilon_{ср}$) деформацией и интенсивностью деформаций сдвига $\gamma_{и}$, или интенсивностью деформаций $\varepsilon_{и}$, или октаэдрическим сдвигом $\gamma_{окт}$.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 2.1. ТРИ ГРУППЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе получим классические уравнения деформирования среды в предположении, что среда эта — сплошная, однородная и изотропная, т. е. упругие свойства среды во всех направлениях одинаковы. Будем считать, что она линейно деформируема (для материала среды справедлив закон Гука), а перемещения и деформации тела достаточно малы. Там, где это необходимо, сделаем некоторые отступления от указанных допущений. В частности, далее в соответствующих главах будут подробно рассмотрены вопросы расчета упругопластических и вязкоупругих тел.

При составлении уравнений механики деформируемого твердого тела выбирается соответствующая система координат. В зависимости от формы тела используются декартовы, полярные, цилиндрические координаты и др. Эти уравнения можно записать также и для общего случая произвольных криволинейных координат. В данной главе используем наиболее часто применяемую в задачах декартову систему. В последующих главах для характерных задач покажем также особенности использования полярной системы. Применение других систем координат можно найти в более полных курсах теории упругости.

Для получения упомянутых уравнений в декартовой системе координат мысленно выделим в окрестности некоторой точки тела элементарный параллелепипед с размерами dx, dy, dz. Первая группа уравнений выражает условия равновесия этого элемента среды, их называют *статическими уравнениями*.

Вторая группа уравнений связывает деформации элемента тела с функциями, выражающими перемещения его точек. Они называются *геометричеакими уравнениями*.

Наконец, последняя группа уравнений — это уравнение, которое выражает зависимость между напряжениями и деформациями элемента. Именно в этих уравнениях учитываются механические свойства материала, их называют *физическими*. В данном случае они будут выражать закон Гука.

Рассмотрим указанные уравнения подробно.

§ 2.2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА (СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ)

На рис. 2.1, *а* показан элементарный параллелепипед, на гранях которого указаны нормальные и касательные напряжения, с которыми он взаимодействует с соседними элементами в общем случае.

Ввиду бесконечной малости параллелепипеда на этом рисунке принято, что напряжения во всем его объеме остаются неизменными (однородное напряженное состояние). Поэтому здесь на параллельных гранях предполагаются равные, но противоположно направленные напряжения. По существу, это напряжения на трех взаимно ортогональных площадках, проведенных через рассматриваемую точку. Они составляют тензор напряжений в данной точке (см. § 1.1)

$$T_н = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

В предыдущей главе они использовались для анализа напряженного состояния в точке, т. е. для изучения законов изменения напря-

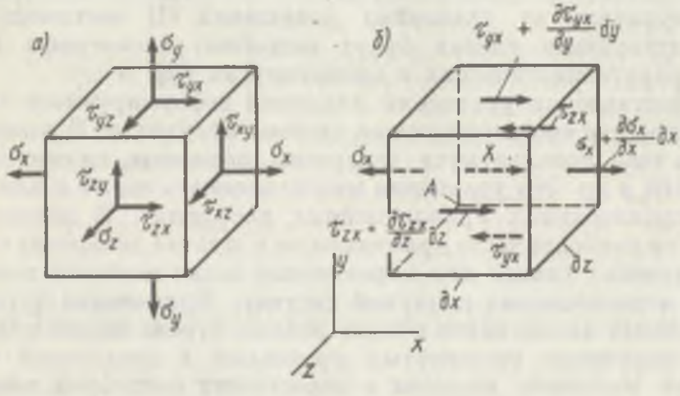


Рис. 2.1

жений в зависимости от ориентации площадки, проведенной через точку.

В данном случае задача иная. Все компоненты тензора напряжений (2.1) в сплошной среде непрерывно изменяются от точки к точке тела, т. е. они являются непрерывными функциями координат

$$\sigma_x = \sigma_x (x, y, z); \; \sigma_y = \sigma_y (x, y, z); \; \ldots; \; \tau_{xz} = \tau_{xz} (x, y, z),$$

или в сокращенной форме

$$T_н = T_н (x, y, z). \tag{2.2}$$

Функции (2.2) определяют непрерывное поле напряжений в объеме тела, и необходимо выяснить, каким условиям должны быть подчинены эти функции, чтобы каждый элемент тела в своем взаимодействии с соседними элементами был в равновесии.

Поэтому на рис. 2.1, *б* изображена уточненная картина действия напряжений на гранях параллелепипеда. Если на левой грани элемента, проходящей через рассматриваемую точку A, принять напряжение σ_x, то на правой грани, имеющей координату $x + \mathrm{d}x$, функция σ_x получит приращение, равное частному дифференциалу этой функции по аргументу x, т. е. будет $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x$. С учетом сказанного на рис. 2.1, *б* показаны все компоненты напряжений, параллельные оси x.

Как и в § 1.1, предположим, что на тело действует некоторая объемная внешняя нагрузка, например его вес или сила инерции, компоненты интенсивности которой обозначаются X, Y, Z. Соответствующая элементарная сила в рассматриваемой точке получается как произведение интенсивности X, Y или Z на объем параллелепипеда $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем как произведение напряжений или их дефференциалов на площади граней. Учитывая, что силы $\sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ и $\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ на параллельных гранях взаимно уравновешены, сумму проекций на ось x всех сил, действующих на элемент (рис. 2.1, *б*), составим в виде

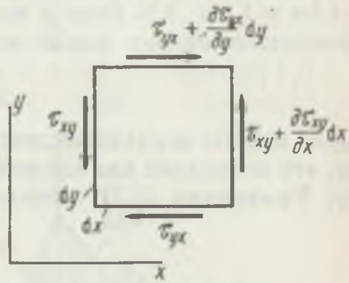


Рис. 2.2

$$X\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Сокращая на $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, получим первую строку из следующих трех дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Вторая и третья строки составлены аналогично первой и выражают равенство нулю сумм проекций на оси y и z.

Приравняем нулю сумму моментов сил, действующих на параллелепипед, относительно оси, проходящей через его центр параллельно оси z. На основе рис. 2.2, где изображена проекция параллелепипеда на плоскость $x - y$, получим

$$(\tau_{yx}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y - (\tau_{xy}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}y}{2} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\right)\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0.$$

Ввиду бесконечной малости параллелепипеда на этом рисунке принято, что напряжения во всем его объеме остаются неизменными (однородное напряженное состояние). Поэтому здесь на параллельных гранях предполагаются равные, но противоположно направленные напряжения. По существу, это напряжения на трех взаимно ортогональных площадках, проведенных через рассматриваемую точку. Они составляют тензор напряжений в данной точке (см. § 1.1)

$$T_{н} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

В предыдущей главе они использовались для анализа напряженного состояния в точке, т. е. для изучения законов изменения напря-

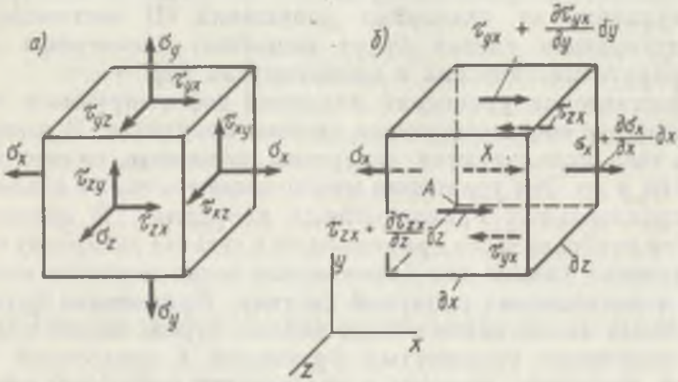


Рис. 2.1

жений в зависимости от ориентации площадки, проведенной через точку.

В данном случае задача иная. Все компоненты тензора напряжений (2.1) в сплошной среде непрерывно изменяются от точки к точке тела, т. е. они являются непрерывными функциями координат

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \ \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \ \ldots; \ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y, z),$$

или в сокращенной форме

$$T_{н} = T_{н}(x, y, z). \tag{2.2}$$

Функции (2.2) определяют непрерывное поле напряжений в объеме тела, и необходимо выяснить, каким условиям должны быть подчинены эти функции, чтобы каждый элемент тела в своем взаимодействии с соседними элементами был в равновесии.

Поэтому на рис. 2.1, *б* изображена уточненная картина действия напряжений на гранях параллелепипеда. Если на левой грани элемента, проходящей через рассматриваемую точку A, принять напряжение σ_x, то на правой грани, имеющей координату $x + dx$, функция σ_x получит приращение, равное частному дифференциалу этой функции по аргументу x, т. е. будет $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. С учетом сказанного на рис. 2.1, *б* показаны все компоненты напряжений, параллельные оси x.

Как и в § 1.1, предположим, что на тело действует некоторая объемная внешняя нагрузка, например его вес или сила инерции, компоненты интенсивности которой обозначаются X, Y, Z. Соответствующая элементарная сила в рассматриваемой точке получается как произведение интенсивности X, Y или Z на объем параллелепипеда $dxdydz$. Элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем как произведение напряжений или их дефференциалов на площади граней. Учитывая, что силы $\sigma_x dydz$, $\tau_{yx} dxdz$ и $\tau_{zx} dxdy$ на параллельных гранях взаимно уравновешены, сумму проекций на ось x всех сил, действующих на элемент (рис. 2.1, *б*), составим в виде

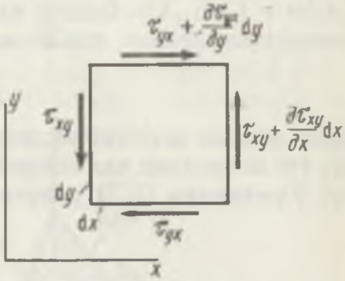


Рис. 2.2

$$X\, dx\, dy\, dz + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx\, dz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx\, dy = 0.$$

Сокращая на $dxdydz$, получим первую строку из следующих трех дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Вторая и третья строки составлены аналогично первой и выражают равенство нулю сумм проекций на оси y и z.

Приравняем нулю сумму моментов сил, действующих на параллелепипед, относительно оси, проходящей через его центр параллельно оси z. На основе рис. 2.2, где изображена проекция параллелепипеда на плоскость $x - y$, получим

$$(\tau_{yx}\, dz\, dx)\, dy - (\tau_{xy}\, dz\, dy)\, dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\, dz\, dx \right) \frac{dy}{2} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\, dz\, dy \right) \frac{dx}{2} = 0.$$

§ 2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В § 1.5 показано, что геометрически деформация тела характеризуется двумя группами функций. Первая группа — это компоненты перемещений точек u, v и w, параллельные соответственно осям x, y и z. Для точки A такие перемещения показаны на рис. 2.4. Условимся далее считать $u, v, w > 0$, если они совпадают с положительным направлением соответствующей оси координат, и наоборот. Три функции

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z)$$

определяют поле перемещений деформируемого тела.

Вторая группа — это относительные деформации элементарных параллелепипедов $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, на которые мысленно можно

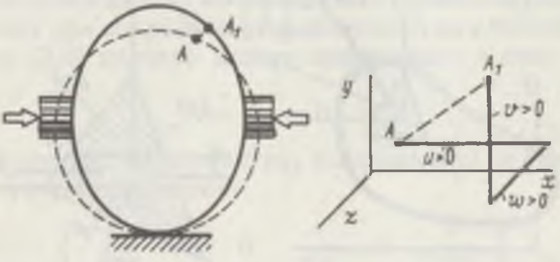


Рис. 2.4

расчленить тело. В каждой точке они составляют тензор деформаций (см. рис. 1.9)

$$T_{\text{д}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & & \text{Симм.} \\ (\gamma_{xy}/2) & \varepsilon_y & \\ (\gamma_{xz}/2) & (\gamma_{yz}/2) & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

шесть различных компонент которого как функции координат x, y, z определяют поле деформаций $T_{\text{д}} = T_{\text{д}}(x, y, z)$.

Геометрические уравнения устанавливают зависимости между перемещениями и деформациями. Для их вывода будем считать функции u, v, w заданными, а через них выразим деформации.

Для определения деформации ε_x рассмотрим отрезок AB длиной $\mathrm{d}x$ (рис. 2.5). Для малых перемещений и деформаций примем, что на изменение длины отрезка влияет лишь перемещение u, а его малый наклон, в общем случае вызываемый перемещениями v и w, не изменяет его длины. Поэтому на рис. 2.5 изображено лишь поступательное перемещение отрезка. Обозначим $\partial_x u = (\partial u/\partial x)\,\mathrm{d}x$—частный дифференциал (линейная часть приращения) функции u при изменении координаты x на $x + \mathrm{d}x$. Из рис. 2.5 видно, что $\mathrm{d}x + u + \partial_x u = u + \mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x$; следовательно, $\partial_x u = \Delta\mathrm{d}x$ и

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\partial u/\partial x)\,dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Для определения γ_{xy} рассмотрим проекцию параллелепипеда dx, dy, dz на плоскость $x - y$. На рис. 2.6 показано положение этого параллелепипеда до деформации CAB и $C_1A_1B_1$ после деформации. Угол сдвига γ_{xy} — это малое изменение прямого угла CAB. При его определении ввиду малости перемещений и деформаций не будем учитывать влияние перемещений w и изменение длины ребер параллелепипеда, т. е. будем считать, что параллелепипед сначала получил поступательное перемещение из точки A (x_A, y_A) в точку

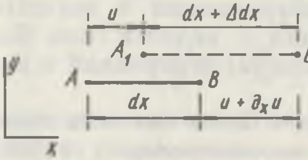


Рис. 2.5

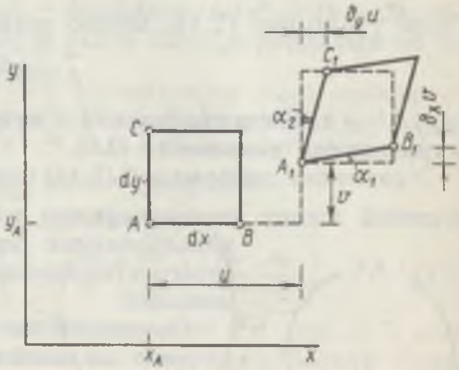


Рис. 2.6

A_1 $(x_A + u, y_A + v)$ как жесткое целое, а затем произошел сдвиг за счет поворота его граней на малые углы α_1 и α_2. Следовательно, $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$. Так как частные дифференциалы $\partial_y u = (\partial u/\partial y)\,dy$ и $\partial_x v = (\partial v/\partial x)\,dx$, то

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial_x v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.12}$$

Таким образом, имеем угол сдвига в плоскости $x - y$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Для получения формул, выражающих ε_y, ε_z и γ_{yz}, γ_{zx}, надо в выражениях (2.11), (2.13) для ε_x и γ_{xy} последовательно заменить обозначения координат $x \to y \to z \to x$ и компонент перемещений $u \to v \to w \to u$. Эта операция обычно называется **круговой подстановкой обозначений** (рис. 2.7). В результате получим линейные и угловые деформации в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\\
&\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};\\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned}\right| \tag{2.14}$$

Геометрические уравнения (2.14) носят название уравнений Коши.

Для записи уравнений Коши в сокращенном виде введем векторы деформаций и перемещений $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{u}$, аналогичные векторам (2.5):

$$\left.\begin{aligned} \vec{\varepsilon}^{\,\mathrm{T}} &= [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}]; \\ \vec{u}^{\,\mathrm{T}} &= [u\ \ v\ \ w]. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Тогда уравнения (2.14) можно записать в виде

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}$ (2.7), фигурирующая в уравнениях равновесия (2.6).

Уравнения деформаций (2.14) получились в виде линейных соотношений между перемещениями $\vec{u}$ и деформациями $\vec{\varepsilon}$ вследствие использования допущения о малости (или более строго о бесконечной малости) деформаций и перемещений.

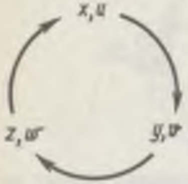


Рис. 2.7

Познакомимся теперь с более точными геометрически нелинейными соотношениями, справедливыми для конечных перемещений и деформаций. Для примера найдем относительное удлинение ε_x. На рис. 2.8 предполагается, что отрезок $AB = \mathrm{d}x$, не изменяя длины, получил поступательное перемещение вместе с точкой A в положение A_1B_1' и затем, при переходе в окончательное положение A_1B_1, возникло его удлинение на $\Delta\mathrm{d}x$ за счет дополнительного перемещения

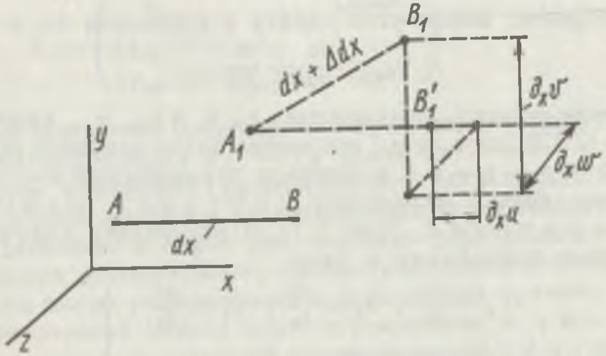


Рис. 2.8

точки B_1' на $\partial_x u = (\partial u/\partial x)\,\mathrm{d}x$; $\partial_x v = (\partial v/\partial x)\,\mathrm{d}x$; $\partial_x w = (\partial w/\partial x)\mathrm{d}x$. Как и ранее под деформацией ε_x, будем понимать отношение $\varepsilon_x = \Delta\mathrm{d}x/\mathrm{d}x$.

Выразим квадрат отрезка A_1B_1:

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 &= (\mathrm{d}x + \partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x w)^2 = \\ &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x^2 = \\ &= \left[1 + 2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x^2. \end{aligned}$$

Так как $(\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\Delta\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x^2 = (1 + 2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2)\,\mathrm{d}x^2$, то, приравнивая $A_1B_1^2$ и $(\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x)^2$ и сокращая на $\mathrm{d}x^2$, получим нелинейное соотношение

$$\varepsilon_x\,(1 + 0{,}5\varepsilon_x) = \frac{\partial u}{\partial x} + 0{,}5\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{2.17}$$

Аналогично для угла сдвига γ_{xy} можно получить

$$\begin{aligned} &(1 + \varepsilon_x)\,(1 + \varepsilon_y)\sin\gamma_{xy} = \\ &= \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial y} + \left[1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

С помощью круговой подстановки обозначений (см. рис. 2.7) легко записать соотношения для остальных компонент деформаций. Считая удлинения $\varepsilon \ll 1$, отбрасывая нелинейные члены и полагая $\sin\gamma \approx \gamma$, из (2.17) и (2.18) получим уравнения Коши (2.14).

Если тело получает такие перемещения u, v, w, что существенно меняется его форма, но при этом деформации малы ($\varepsilon \ll 1$, $\sin\gamma \approx \gamma$), то в этом случае используются упрощенные нелинейные соотношения, следующие из (2.17) и (2.18). Для их получения в левой части (2.17), (2.18) выражение, стоящее в круглых скобках, заменяется на единицу, а $\sin\gamma$ — на его аргумент.

Отметим один характерный частный случай упрощенных геометрически нелинейных уравнений деформаций. Представим себе мембрану в плоскости xy. При действии на нее поперечной нагрузки p_z она получает прогибы w, во много раз превосходящие перемещения u, v в плоскости xy. В подобных задачах, решаемых в геометрически нелинейной постановке, можно учитывать лишь нелинейные слагаемые относительно «больших» перемещений w и их производных по x и y. В этом случае с учетом допущения $\varepsilon \ll 1$ и $\sin\gamma \approx \gamma$ (из 2.17), (2.18) получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right| \tag{2.19}$$

Соотношения типа (2.19) широко используются при расчете гибких стержней, пластин, мембран, оболочек.

§ 2.4. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Если даны три компоненты непрерывного поля перемещений $\vec{u}$, то по ним легко определяются соответствующие шесть компонент поля деформаций по формулам Коши (2.14). Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть компонент деформаций $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}\,(x, y, z)$, то заранее нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются **совместными деформациями.** В противном случае деформации называют **несовместными.**

Для того чтобы деформации были совместными, они должны быть взаимосвязаны некоторыми соотношениями, которые называются

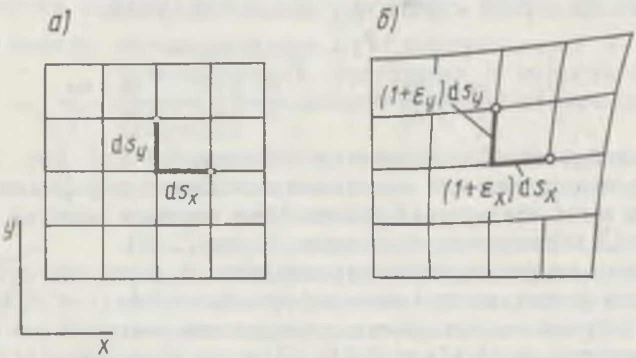


Рис. 2.9

уравнениями совместности деформаций. Необходимость их существования можно проиллюстрировать следующим простым рассуждением. На рис. 2.9, *а* показано тело до деформации, разбитое на части сеткой ортогональных прямых. Зададим в этом теле поле ε_x, ε_y и ε_z, в результате чего прямые получат некоторые удлинения. Так, вместо ds_x будем иметь $(1 + \varepsilon_x)\, ds_x$. Тело деформируется, как это показано на рис. 2.9, *б*. При этом возникают и углы сдвига как изменения прямых углов, зависящие от ε_x, ε_y, ε_z. Очевидно, наоборот, задавая γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, в непрерывно деформируемом теле будем иметь некоторые зависящие от них линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z. В случае произвольного и независимого задания удлинений и углов сдвига деформированные элементы тела не удастся сложить в сплошное тело. Поэтому упомянутые уравнения также называются **уравнениями сплошности** или **неразрывности.**

Рассмотрим случай малых деформаций и перемещений, когда справедливы линейные уравнения. Для вывода уравнений совместности исключим из уравнений Коши (2.14) перемещения u, v, w.

Дифференцируя первое и второе уравнения (2.14) и складывая их, найдем

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}. \tag{а}$$

Далее, составив из трех последних равенств (2.14) выражение $(\partial\gamma_{xy}/\partial z)-(\partial\gamma_{yz}/\partial x)+(\partial\gamma_{zx}/\partial y)$, найдем, что оно равно $2\,(\partial^2 u/\partial y\partial z)$. Еще раз дифференцируя обе части этого равенства по x, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right]=2\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\,\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}. \tag{б}$$

Используя круговую подстановку обозначений в равенствах (а) и (б), окончательно запишем шесть уравнений совместности деформаций в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0;\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}=0;\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x}=0;\\
&2\,\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=0;\\
&2\,\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=0;\\
&2\,\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

В частном случае, когда решается двумерная задача, например в плоскости $x-y$ (см. § 4.1, 4.2), совместность деформаций ε_x, ε_y и γ_{xy} в этой плоскости будет выражать лишь одно первое уравнение (2.20):

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0. \tag{2.21}$$

Уравнения (2.20) в сокращенной форме представим в виде

$$\mathbf{B}\vec{\varepsilon}=0, \tag{2.22}$$

где матрица **B** состоит из элементов

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
\partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0\\
0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0\\
\partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{xz}\\
2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{xz} & \partial_{xx} & -\partial_{xy}\\
0 & 2\partial_{zx} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{yx} & \partial_{yy}\\
0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{zx} & -\partial_{zy}
\end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Здесь индексами условно обозначены операции дифференцирования, например $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$; $\partial_{xy} = \partial^2/\partial x \partial y$ и т. д.

Если данное поле деформаций $\vec{\varepsilon}$ удовлетворяет уравнениям (2.20), то это означает, что ему отвечает некоторое непрерывное поле перемещений, которое можно найти, интегрируя уравнения Коши (2.14). Поэтому уравнения (2.20) называют также у с л о в и я м и и н т е г р и р у е м о с т и уравнений Коши. Однако уравнения (2.20)

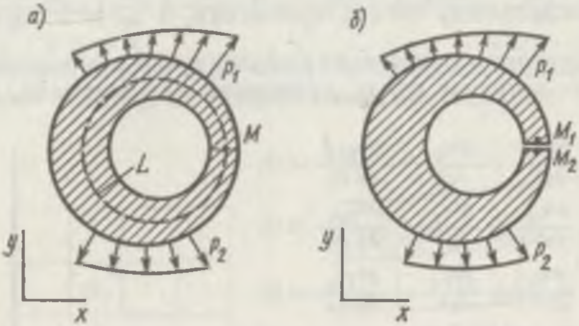


Рис. 2.10

в общем случае являются необходимыми, но не достаточными условиями получения функций перемещений как однозначных функций координат.

Дело в том, что в многосвязных телах (телах с пустотами или отверстиями) возможно существование таких полей совместных деформаций, которым отвечает локально-разрывное поле перемещений. Рассмотрим тонкую пластинку с отверстием (рис. 2.10, *а*) как простейшее двухсвязное тело. Превратим ее в односвязное тело, проведя разрез через точку M (рис. 2.10, *б*). Пусть поле деформаций, возникающих в пластине с разрезом, будет совместным и ему будут отвечачать непрерывные функции перемещений во всем объеме. Но в общем случае в точках M_1 и M_2, принадлежащих разным берегам разреза, возникнут разные перемещения $u_{M_1} \neq u_{M_2}$; $v_{M_1} \neq v_{M_2}$, т. е. вдоль линии разреза возникнут разрывы в перемещениях. При интегрировании уравнений Коши для пластин с отверстием надо такие поля перемещений исключить. Поэтому в дополнение к уравнениям совместности составляются условия однозначности перемещений для точек воображаемого разреза, а именно:

$$\left.\begin{aligned} u_{M_1} - u_{M_2} &= \oint\limits_L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = 0; \\ v_{M_1} - v_{M_2} &= \oint\limits_L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Криволинейные интегралы (2.24) вычисляются при обходе отверстия по произвольной кривой L, охватывающей отверстие (рис. 2.10, *а*). Для сплошных односвязных тел уравнения Сен-Венана являются необходимыми и достаточными условиями получения непрерывных и однозначных полей перемещений.

§ 2.5. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для линейно-упругих изотропных тел физическими уравнениями являются соотношения обобщенного закона Гука, известные из курса сопротивления материалов:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z);\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z);\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z);\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G};\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где E и G — модули упругости при растяжении и сдвиге, а μ — коэффициент Пуассона. Для изотропного материала они связаны зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2.26}$$

так, что независимых постоянных упругости для указанного материала имеется только две.

В сокращенной форме уравнения (2.25) запишем так:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{C}\vec{\sigma}, \tag{2.27}$$

где матрица упругой податливости элемента материала $\mathbf{C}$ с учетом (2.26) получит вид

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\mu & 1 & & & \text{Симм.} & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Уравнения (2.25) дают возможность вычислить деформации, если известны напряжения. Назовем их з а к о н о м Г у к а в прямой форме. В ходе решения задач теории упругости возникает необходимость в обратных соотношениях, когда напряжения выражены через деформации. Для этого надо разрешить уравнения (2.25) относительно напряжений. Запишем первую строку (2.25) в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) + \mu\sigma_x\right]. \tag{2.29}$$

Из курса сопротивления материалов известно следующее выражение для относительной объемной деформации элемента:

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \tag{2.30}$$

Заменяя в (2.29) сумму $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ на величину, найденную из (2.30), и разрешая (2.29) относительно σ_x с учетом (2.26), получим вместо равенств (2.25) закон Гука в обратной форме:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta;\quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta;\quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta; \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy};\quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz};\quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{array}\right\} \tag{2.31}$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, а через λ обозначена новая константа, называемая параметром Ляме:

$$\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}. \tag{2.32}$$

В сокращенной форме уравнения (2.31) представим в виде

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \tag{2.33}$$

где матрица жесткости элемента материала $\mathbf{D}$ получит вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & & & & & \\ \lambda & 2G+\lambda & & \text{Симм.} & & \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & & & \\ 0 & 0 & 0 & G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Заметим, что при $\mu \to 0{,}5$ параметр Ляме $\lambda \to \infty$, что, согласно (2.30), соответствует материалу, не изменяющему объем при деформации (несжимаемый материал). В этом случае соотношениями (2.31) пользоваться затруднительно. Поэтому целесообразно вместо (2.31) записать два отдельных соотношения, в которых объемная деформация была бы выделена в явном виде. Эти соотношения отвечают двум составляющим, на которые разбивается суммарное напряженное состояние (см. § 1.4). Первая составляющая соответствует изменению объема, пропорционального среднему (гидростатическому) напряжению $\sigma_{\text{ср}} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$. Если ввести обозначение среднего (гидростатического) расширения (сжатия) $\varepsilon_{\text{ср}} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$, то, согласно (2.30), получим соотношение между $\sigma_{\text{ср}}$ и $\varepsilon_{\text{ср}}$:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_{\text{ср}}. \tag{2.35}$$

Для второй составляющей напряженного состояния, отвечающей изменению формы элемента, путем вычитания из первых трех уравнений (2.31) равенства (2.35) с учетом $\Theta = 3\varepsilon_{\text{ср}}$ получим

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}});\\
&\sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}});\\
&\sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}});\\
&\tau_{xy} = 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right);\quad \tau_{yz} = 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right);\quad \tau_{zx} = 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{zx}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

Равенства (2.35) и (2.36) выражают связь между компонентами шарового тензора напряжений и деформаций и девиатора напряжений и деформаций (см. § 1.4, 1.7). Поэтому в сокращенной форме вместо 2.35) и (2.36) можно написать

$$\left.\begin{aligned}
&Ш_{\text{н}} = KШ_{\text{д}};\\
&D_{\text{н}} = 2GD_{\text{д}},
\end{aligned}\right\} \qquad (2.37)$$

где $K = E/(1 - 2\mu)$ — модуль объемной деформации материала. Соотношения (2.37) эквивалентны (2.31), и ими в некоторых случаях более удобно пользоваться.

В заключение запишем уравнения закона Гука для ортотропного материала. В последнее время широкое распространение получили так называемые композитные материалы, состоящие, например, из полимерной основы, армируемой волокнами из высокопрочного материала. Упругие свойства такого композитного материала зависят от плотности насыщения и ориентации в пространстве армирующих волокон. В общем случае такой материал рассматривается как анизотропный. В частном случае, когда армирующие волокна расположены в трех взаимно ортогональных направлениях, упругие свойства будут симметричны относительно трех ортогональных плоскостей.

Материал, у которого имеют место три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии, называют ортотропным.

Совместим координатные плоскости xy, yz, zx с указанными плоскостями симметрии (рис. 2.11).

Тогда закон Гука в прямой форме для такого элемента запишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz}\frac{\sigma_z}{E_z};\\
&\varepsilon_y = -\mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yz}\frac{\sigma_z}{E_y};\\
&\varepsilon_z = -\mu_{zx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy}\frac{\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z};\\
&\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}};\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}};\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

Здесь величины μ_{xy}, μ_{yx}, . . . являются коэффициентами Пуассона ортотропного материала. При этом, например, коэффициент μ_{xy} выражает относительную поперечную деформацию в направлении x, вызванную продольной деформацией (σ_y/E_y), а μ_{yx} — наоборот, т. е. поперечную деформацию в направлении y, вызванную деформацией (σ_x/E_x) (рис. 2.12).

Докажем важное свойство коэффициентов уравнений (2.38). Для этого подсчитаем работу напряжений σ_x и σ_y при их последовательном приложении: сначала σ_x, затем σ_y. Обозначив эту работу

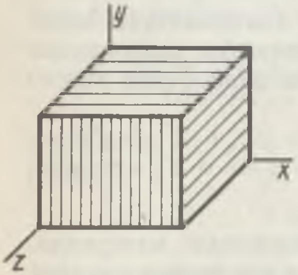


Рис. 2.11

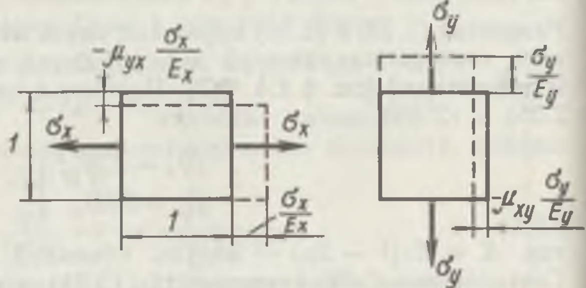


Рис. 2.12

A_{xy}, найдем $A_{xy} = 0{,}5\sigma_x^2/E_x - \mu_{xy}\sigma_x\sigma_y/E_y + 0{,}5\ \sigma_y^2/E_y$. Изменим теперь порядок приложения напряжений, тогда

$$A_{yx} = 0{,}5\sigma_y^2/E_y - \mu_{yx}\sigma_y\sigma_x/E_x + 0{,}5\sigma_x^2/E_x.$$

В обоих случаях работа A_{xy} и работа A_{yx} равны накопленной в элементе энергии деформации, которая не должна зависеть от пути деформирования. Из условия $A_{xy} = A_{yx}$, получим $\mu_{xy}\sigma_x\sigma_y/E_y = \mu_{yx}\sigma_x\sigma_y/E_x$. С помощью аналогичных рассуждений можно написать следующие три соотношения:

$$\frac{\mu_{xy}}{E_y} = \frac{\mu_{yx}}{E_x}; \quad \frac{\mu_{yz}}{E_z} = \frac{\mu_{zy}}{E_y}; \quad \frac{\mu_{zx}}{E_x} = \frac{\mu_{xz}}{E_z}. \tag{2.39}$$

С учетом (2.39) приходим к выводу, что у ортотропного материала в равенствах (2.38) из 12 коэффициентов имеется лишь девять независимых констант упругости. При этом G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} — три модуля сдвига, не зависимые от остальных констант.

§ 2.6. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ

В целях более глубокого освоения рассмотренных уравнений механики твердого деформируемого тела применим их к решению ряда элементарных задач, имеющих в основном методическое назначение.

Пример 1. На тонкую пластину ($b \ll h,\ l$) действует поверхностная касательная нагрузка $p_x = \text{const}$ (рис. 2.13). Пользуясь формулами сопротивления материалов, определить напряжения σ_x, σ_y и τ и проверить, удовлетворяют ли они уравнениям равновесия (2.3).

Согласно гипотезе о ненадавливании продольных волокон друг на друга в поперечном направлении, имеем $\sigma_y = 0$, а σ_x и τ найдем по известным формулам

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y; \qquad \tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b}. \tag{а}$$

Рассматривая пластину как брус при внецентренном растяжении распределенной нагрузкой, получим для произвольного сечения внутренние усилия

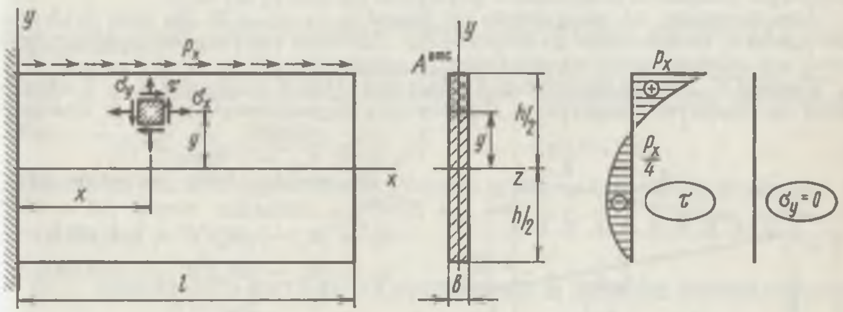


Рис. 2.13

$N = p_x b\,(l - x)$; $M_z = p_x b\,(l - x)\,h/2$; $Q_y = 0$. Подставляя в (а) $A = bh$ и $J_z = bh^3/12$, получим

$$\sigma_x = \frac{p_x (l-x)}{h} + \frac{6 p_x (l-x)\, y}{h^2}; \quad \tau = 0.$$

Так как площадки, нормальные к оси z, свободны от напряжений ($\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$), то уравнения (2.3) в данном случае получат вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0; \\ &\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Объемные нагрузки $X = Y = 0$. Вычислив производную $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = (-p_x/h) - (6p_x y/h^2)$ и подставив ее в уравнения (б) при $\tau = \sigma_y = 0$, приходим к выводу, что первое уравнение (б) не удовлетворяется, а второе дает тождество $0 = 0$. Таким образом, в целом формулы сопротивления материалов (а) дают в данном случае поле неравновесных напряжений.

Пример 2. Продолжим предыдущий пример, поставив задачу определения таких напряжений σ_y и τ, которые бы в сочетании с напряжением σ_x (а) дали равновесное поле напряжений. Для ее решения надо проинтегрировать систему уравнений (б), получающую вид

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{p_x}{h} - \frac{6 p_x y}{h^2} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \\ &\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{в}$$

Из первой строки, интегрируя по y и добавляя произвольную функцию $f_1(x)$, найдем

$$\tau = \frac{p_x}{h} y + \frac{3p_x}{h^2} y^2 + f_1(x). \quad \text{(г)}$$

Из второй строки (в) получим

$$\sigma_y = -\frac{\partial f_1}{\partial x} y + f_2(x). \quad \text{(д)}$$

Произвольные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ должны быть найдены из условий на контуре. Так, для верхней кромки при $y = h/2$ имеем $\tau(h/2) = p_x$; $\sigma_y(h/2) = 0$. Из первого условия с помощью выражения (г) получим $f_1(x) = -p_x/4$, после чего второе условие в сочетании с формулой (д) даст $f_2(x) = 0$.

Следовательно, по выражению (д) имеем $\sigma_y(x, y) = 0$. На рис. 2.13 показана эпюра τ, построенная по формуле (г). Площадь полученной эпюры τ равна нулю, что соответствует статическому условию $Q_y = 0$.

Пример 3. Для прямоугольной пластины $OMLN$ толщиной $\delta = 1$ опирающейся на гладкую поверхность, определить перемещения u и v в плоскости $x - y$, приняв $\sigma_y = p_y = -(x/h)q$; $\sigma_x = 0$; $\tau_{xy} = 0$ (рис. 2.14).

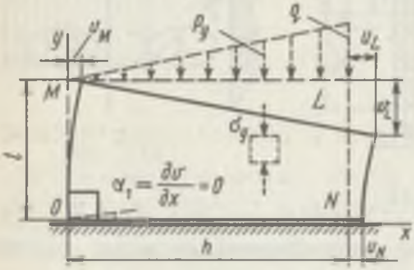


Рис. 2.14

По закону Гука находим деформации:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E = [\mu q/(Eh)]\, x;$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E = -[q/(Eh)]\, x;$$

$$\gamma_{xy} = 0.$$

Подставляя напряжения в уравнения равновесия (б) (при $X = Y = 0$), а деформации — в уравнение совместности деформаций (2.21), видим, что они выполняются. На гранях ML и ON ввиду равенства $\sigma_y = p_y$ равновесие также соблюдается во всех точках. Следовательно, напряжения равновесны, а деформации совместны и им отвечает непрерывное поле перемещений, которое найдем путем интегрирования уравнений Коши (2.14), которые в данном случае получат вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu q}{Eh} x; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{q}{Eh} x; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(е)}$$

Интегрируя первое и второе уравнения (е), найдем

$$u = [\mu q/(2Eh)]\, x^2 + f_1(y); \quad v = -[q/(Eh)]\, xy + f_2(x), \quad \text{(ж)}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции, зависящие соответственно только от y и только от x.

Подставив (ж) в третье уравнение (е), придем к равенству

$$\partial f_1/\partial y - [q/(Eh)]\, y + \partial f_2/\partial x = 0,$$

которое можно кратко записать как $F_1(y) + F_2(x) = 0$, где $F_1 = (\partial f_1/\partial y) - (q/Eh)\, y$ — величина, содержащая только аргумент y, а $F_2 = (\partial f_2/\partial x)$ — только аргумент x. При произвольных значениях x и y сумма $F_1 + F_2$ может быть равна нулю лишь в том случае, если ни F_1, ни F_2 не зависят от x и y, т. е. в общем случае являются константами. Пусть $F_1 = A$, тогда $F_2 = -A$ и для определения $f_1(y)$ и $f_2(x)$ имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{q}{Eh} y = A; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -A.$$

Интегрируя их, найдем

$$f_1 = Ay + [q/(2Eh)]\, y^2 + B; \quad f_2 = -Ax + C. \tag{з}$$

Постоянные A, B, C найдем из условий закрепления пластины как жесткого целого. Например, примем, что при $x = 0$, $y = 0$

$$u = 0; \quad v = 0; \quad \alpha_1 = \partial v/\partial x = 0$$

[см. (2.12)], так как нижняя грань элемента пластины при деформации остается горизонтальной.

Составив эти условия с использованием формул (ж) и (з), найдем $B = 0$; $C = 0$; $A = 0$. Таким образом, окончательно выражения для перемещений будут

$$u = [q/(2Eh)]\,(\mu x^2 + y^2); \quad v = -[q/(Eh)]\, xy. \tag{и}$$

Указанные на рис.2.14 перемещения угловых точек, найденные по формулам (и) при $h = 2l$, имеют значения $u_M = a$, $v_M = 0$; $u_L = (1 + 4\mu)\, a$, $v_L = -4a$; $u_N = 4\mu a$, $v_N = 0$, где $a = ql^2/(2Eh)$.

§ 2.7. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ НАПРЯЖЕНИЙ И МЕТОДЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Выпишем еще раз в сокращенной форме основные уравнения теории упругости, а именно: I — статические, II — геометрические и III — физические:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ \mathbf{A}\vec{\sigma} + \vec{g} = 0; \\ &\text{II)}\ \vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u}; \\ &\text{III)}\ \vec{\varepsilon} = \mathbf{C}\vec{\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Вместо уравнений Коши II (2.16) могут быть использованы полученные из них уравнения совместности деформаций Сен-Венана (2.22), а вместо закона Гука в прямой форме III (2.27) — равенство (2.33), представляющие тот же закон, но в обратной форме. Поэтому вместо (2.40) можно написать эквивалентную систему уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\quad \mathbf{A}\vec{\sigma} + \vec{g} = 0; \\ &\text{II*)}\ \mathbf{B}\vec{\varepsilon} = 0; \\ &\text{III*)}\ \vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \tag{2.40*}$$

где II* и III* — преобразованные уравнения II и III из (2.40).

Легко видеть, что равенства (2.40) представляют замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений ($3 + 6 + 6 = 15$) совпадает с числом неизвестных (6 напряжений + 6 деформаций + + 3 перемещения). Следовательно, при задании необходимых граничных условий на поверхности тела в виде заданных перемещений или заданных поверхностных нагрузок система линейных уравнений (2.40) может быть решена.

Условимся, что данное тело при отсутствии внешних нагрузок в естественном состоянии не имеет внутренних напряжений и закреплено от смещений как жесткое целое. Предположим, удалось найти некоторую систему 15 функций $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{u}$, которые удовлетворяют уравнениям (2.40) и заданным на поверхности граничным условиям. Тогда можно утверждать, что эти функции выражают точное и единственное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого тела. В этом состоит так называемая *теорема о единственности решения задачи теории упругости*. Ее доказывают, используя линейность уравнений (2.40) (на чем останавливаться не будем).

Отметим одну особенность уравнений (2.40). Если ставится так называемая обратная задача теории упругости, когда требуется найти напряжения и деформации по заданным перемещениям $\vec{u}$, а также установить нагрузки $\vec{g}$ и $\vec{p}$, вызывающие эти перемещения, то ее решение с помощью (2.40) выполняется без затруднений. Действительно, по заданным $\vec{u}$ и по формулам Коши II вычисляем деформации $\vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \vec{u}$, далее по закону Гука III* находим напряжения $\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}$. Из уравнений равновесия I получим требующиеся объемные нагрузки $\vec{g} = -\mathbf{A}\vec{\sigma}$, а с помощью условий на поверхности (2.9) находим поверхностные нагрузки $\vec{p} = \mathbf{L}\vec{\sigma}$. Но рассмотренная обратная задача редко имеет практическое применение. Основные трудности представляет решение прямой задачи теории упругости, а именно определение напряжений, деформаций и перемещений тела по заданным объемным нагрузкам, а также силовым или кинематическим воздействиям, приложенным на его поверхности. В этом случае необходимо интегрировать дифференциальные уравнения в частных производных (I и II или II*), входящие в состав общих уравнений (2.40).

Отметим, что в прямой задаче получить точные решения уравнений (2.40) в общем случае очень сложно. В курсе теории упругости исследуются возможные пути упрощения этой задачи или ее приближенного решения.

Один из путей упрощения состоит в том, что определяются не сразу все 15 функций, а лишь часть из них, принимаемые за основные. Рассмотрим в связи с этим два характерных подхода, составляющих так называемые метод напряжений (решение в напряжениях) и метод перемещений (решение в перемещениях).

В **методе напряжений** за основные неизвестные принимаются шесть функций, составляющих вектор напряжений: $\vec{\sigma}^{\mathrm{T}} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$. Задача их определения является, как указывалось, статически неопределимой. Из курса сопротивления материалов известно, что при решении статически неопределимых задач «лишние» внутренние усилия определяются из так называемых уравнений деформаций, выражающих условия совместности деформирования элементов конструкции и опорных связей.

По аналогии со сказанным, и в методе напряжений в качестве основных разрешающих уравнений принимаются геометрические уравнения в форме уравнений Сен-Венана II* — уравнений совместности деформаций. Шесть указанных уравнений надо выразить через шесть неизвестных функций $\vec{\sigma}$.

Пользуясь сокращенной записью уравнений (2.40) и (2.40*), наметим путь указанного преобразования. Подставляя в II* значение деформаций, выраженных через напряжения $\vec{\sigma}$ по закону Гука III, получим первую строку равенств:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{C}\vec{\sigma}) &= 0; \\ \mathbf{A}\vec{\sigma} + \vec{g} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

Напряжения $\vec{\sigma}$ должны также удовлетворять и уравнениям равновесия, поэтому эти уравнения добавлены в (2.41). Граничными условиями являются условия равновесия на поверхности (2.8). Заметим, что в (2.41) «произведение» матрицы **B** на вектор $(\mathbf{C}\vec{\sigma})$ надо понимать условно. Вместо произведения элементов **B** и $(\mathbf{C}\vec{\sigma})$ должны быть выполнены операции дифференцирования в соответствии с составом матрицы **B** уравнений совместности деформаций.

Если принять объемные силы $\vec{g}$ = const или равными нулю и соответствующим образом использовать при указанных преобразованиях уравнения равновесия, то шесть уравнений совместности деформаций, выраженные через напряжения, приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &(1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial x^2} = 0; \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial x\,\partial y} = 0; \\ &(1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial y^2} = 0; \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial y\,\partial z} = 0; \\ &(1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial z^2} = 0; \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma_\Sigma}{\partial z\,\partial x} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

где введены обозначения

$$\sigma_\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор ∇^2 называют *гармоническим оператором Лапласа*. Уравнения (2.42) получены Бельтрами и носят его имя. Аналогичные уравнения для произвольных объемных сил получены Мичеллом [23, 35].

После того как из уравнений (2.42) найдены напряжения $\vec{\sigma}$, по закону Гука III вычисляем деформации $\vec{\varepsilon} = \mathbf{C}\vec{\sigma}$ и далее путем интегрирования уравнений Коши II (что заведомо возможно, так как $\vec{\sigma}$ и $\vec{\varepsilon}$ удовлетворяют условиям совместимости деформаций) определяем перемещения $\vec{u}$. В такой последовательности определяются все 15 неизвестных функций по методу напряжений.

Более подробно на использовании метода напряжений и равенств типа (2.41) мы остановимся при решении плоской задачи теории упругости (см. гл. 4).

В методе перемещений за основные неизвестные принимаются три функции: u, v, w — компоненты перемещений точек тела, а в качестве разрешающих уравнений — три уравнения равновесия I. Их преобразуют так, чтобы вместо напряжений в них входили перемещения. По закону Гука III* с учетом II имеем $\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon} = \mathbf{DA}^{\mathrm{T}}\vec{u}$. Подставив это значение $\vec{\sigma}$ в уравнения I, окончательно получим

$$(\mathbf{ADA}^{\mathrm{T}})\vec{u} + \vec{g} = 0. \tag{2.43}$$

Преобразования по (2.43) приводят к трем уравнениям равновесия, выраженным через перемещения (уравнения Ляме):

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+G\nabla^2u+X=0;\\(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+G\nabla^2v+Y=0;\\(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+G\nabla^2w+Z=0,\end{aligned}\right| \tag{2.44}$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$; λ — параметр Ляме (2.32); G — модуль сдвига.

Если искомая деформация тела вызывается заданными принудительными смещениями какой-либо части его поверхности, то граничные условия для уравнений (2.44) формулируют, приравнивая функции u, v, w на границе заданным перемещениям. Сложнее, если на тело действует заданная поверхностная нагрузка $\vec{p}$ и условия на поверхности выражаются равенствами (2.8) или в сокращенной форме (2.9) $\mathbf{L}\vec{\sigma} = \vec{p}$. Последние надо преобразовать, заменив в них напряжения σ через перемещения $\vec{u}$, что делается по той же схеме, что и в уравнениях (2.43).

Помимо двух основных рассмотренных методов решения задач теории упругости в напряжениях и в перемещениях часто используется смешанная форма решения, когда разрешающие уравнения составляются частично относительно перемещений, а частично относительно напряжений. Такой прием рассмотрим ниже в задаче расчета оболочек (см. гл. 7).

§ 2.8. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

Основная трудность получения точного решения прямой задачи теории упругости состоит в отыскании таких функций $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{u}$, которые, являясь решением уравнений (2.40), одновременно строго удовлетворяли бы условиям на поверхности как на загруженных, так и на незагруженных ее участках. Различным схемам приложения поверхностных нагрузок соответствуют различные поля напряжений и деформаций в теле, точно найти которые очень трудно.

Но в некоторых случаях для различных, но близких нагрузок это различие в полях напряжений может касаться лишь относительно

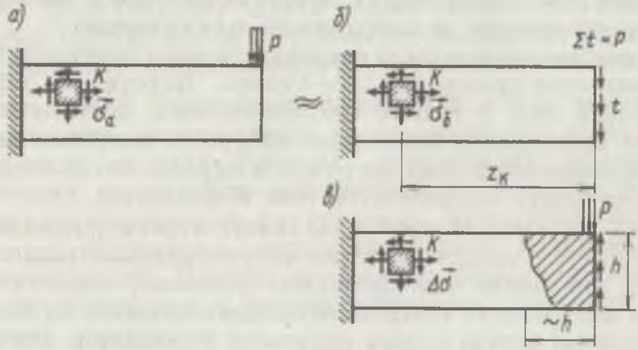


Рис. 2.15

небольшой части объема тела и иметь местный характер. Например, на рис. 2.15, *а* показан брус, загруженный «почти сосредоточенной» силой P, распределенной на малом участке поверхности. Сравним это загружение с показанным на рис. 2.15, *б*, где предполагается, что равнодействующая касательных сил на торце равна также P. В обоих случаях в сечениях бруса возникают одинаковые внутренние усилия; следовательно, общая деформация рассматриваемого тела будет одинакова. Если тело линейно деформируемо и поэтому справедлив принцип суперпозиции, то можно утверждать, что для любой точки K тела компоненты тензора напряжений для этих загружений связаны соотношением

$$\vec{\sigma}_а = \vec{\sigma}_б + \Delta\vec{\sigma}, \tag{2.45}$$

где $\Delta\vec{\sigma}$ относится к загружению (рис. 2.15, *в*). Действительно, при сложении внешних нагрузок (рис. 2.15, *б*, *в*) касательные силы на торце взаимно уничтожаются и образуется первоначальная схема загружения (рис. 2.15, *а*).

Загружения (рис. 2.15, *а*, *б*) статически эквивалентны, поскольку их разница дает взаимно уравновешенную систему сил (рис. 2.15, *в*). Эта местная взаимно уравновешенная система сил в сплошном теле вызовет, как правило, и местную деформацию тела (эта зона на рис. 2.15, *в* заштрихована).

Исследования показывают, что «глубина» местных деформаций имеет порядок характерного размера той части поверхности, на которой приложена уравновешенная система сил. В данном случае она будет иметь порядок h, что на рис. 2.15 обозначено $\sim h$.

Если некоторая точка K достаточно удалена от зоны местных деформаций, т. е. $z_K \gg h$, то $\Delta\vec{\sigma} = 0$ и замена заданного загружения (рис. 2.15, *а*) условным загружением (рис. 2.15, *б*) не сказывается на искомых напряжениях в точке K. Таким образом, при решении задач теории упругости, не внося большой погрешности (за исключением зоны местных деформаций), можно производить замену данного загружения статически эквивалентным загружением.

Указанное положение было введено в теорию упругости Сен-Венаном и называется *принципом Сен-Венана*. Коротко он может быть сформулирован так: в точках сплошного тела, достаточно удаленных от мест приложения локальных нагрузок, напряжения мало зависят от распределения этих нагрузок и определяются лишь величиной их статических эквивалентов (сил и моментов).

Принцип Сен-Венана хотя и не имеет строгого доказательства, но подтверждается опытом решения многочисленных задач. Им пользуются для получения приближенных решений, заменяя заданные условия на поверхности статически эквивалентными, но такими, для которых решение задачи теории упругости упрощается. Это называют иногда смягчением граничных условий по принципу Сен-Венана.

ГЛАВА 3

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 3.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотренные в предыдущей главе уравнения механики деформируемого тела вместе с условиями на поверхности образуют законченную формулировку задачи теории упругости в дифференциальной форме. Однако это не единственная возможная формулировка задачи об отыскании напряженно-деформированного состояния тела. Оказывается, задачу определения функций $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{u}$, характеризующих это состояние, можно свести к определенному интегралу того или иного вида от этих функций, называемому *функционалом*, а сами функции, отражающие действительное состояние тела, найти из условия экстремума этого функционала. Математический аппарат такого подхода изучается в разделе математики, называемом вариационным исчислением. Поэтому положения, формулирующие свойства таких функционалов в теории упругости, получили название вариационных принципов.

В данной главе прежде всего познакомимся с двумя основными принципами — Лагранжа и Кастильяно, а также с некоторыми другими принципами. Укажем на связь этих принципов и вариационной формулировки задачи теории упругости с дифференциальной формой этой задачи.

На основе вариационных принципов в механике твердых деформируемых тел строятся в настоящее время мощные приближенные методы анализа работы деформируемых тел и систем таких тел. Некоторые из них приводятся ниже и будут рассмотрены далее в гл. 8. Вариационные принципы широко используются в строительной механике.

§ 3.2. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА КАК ФУНКЦИОНАЛ

Под функционалом понимается скалярная величина, зависящая от некоторой функции или нескольких функций как от аргументов. Она определяется выбором функций-аргументов из некоторого заданного класса, совместимых с условиями задачи. Функционал можно трактовать как функцию, зависящую от бесконечного числа аргументов. Эти аргументы оказываются заданными, как только выбраны функции-аргументы.

В разделе математики, называемом вариационное исчисление, изучаются условия, при которых функционалы обладают свойством локальной экстремальности (стационарности), т. е. при произвольном бесконечно малом изменении функций-аргументов значение функционала не изменяется. Такие функции-аргументы, при которых функционал стационарен, называются *экстремалями данного функционала.*

Напомним сначала некоторые классические задачи об отыскании экстремалей функционалов (рис. 3.1, *а*, *б*).

На рис. 3.1, *а* заштрихована площадь A, которую охватывает кривая $y(x)$, имеющая фиксированную длину L между точками B и C. Функционал

$$A = \int_B^C y(x)\,dx \tag{3.1}$$

имеет максимум, если кривая $y(x)$ очерчена по окружности, т. е. из всех кривых длиной L, проходящих через точки B и C, экстремалью

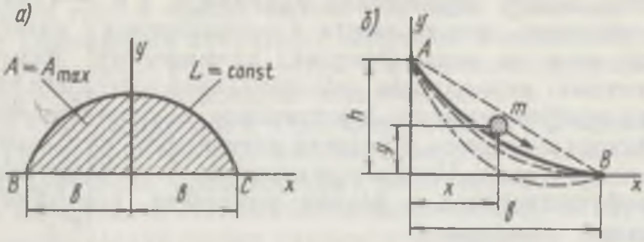


Рис. 3.1

является часть окружности длины L. Решение этой задачи было известно еще в древности.

На рис. 3.1, *б* изображена схема другой известной задачи о так называемой брахистохроне — кривой $y(x)$, обеспечивающей кратчайшее время соскальзывания под действием силы тяжести точечной массы m (без трения) из точки A в точку B. Вертикальная скорость массы $v = \sqrt{2g(h-y)}$, поэтому ее горизонтальная скорость будет $dx/dt = v\cos\alpha = \sqrt{2g(h-y)}/\sqrt{1+y'^2}$. Отсюда найдем dt и время движения $T = \int dt$ в виде функционала, зависящего от кривой $y(x)$:

$$T = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}}\,dx. \tag{3.2}$$

Эта задача, поставленная еще Г. Галилеем, была решена различными методами Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и др. Экстремалью в данном случае является циклоида, образованная качением круга по горизонтальной прямой $y = h$. Радиус этого круга зависит от отношения b/h. Интересно, что при $(b/h) > \pi$ кривая наискорейшего спуска проходит частично несколько ниже оси x (нижняя пунктирная линия на рис. 3.1, *б*).

Обратимся теперь к функционалу, имеющему важное значение в механике твердого деформируемого тела,— функционалу, выражающему полную потенциальную энергию деформированного тела и действующей на него нагрузки (рис. 3.2, *б*). Полная энергия $Э$ состоит из потенциальной энергии деформации тела (потенциал внутренних сил) U и энергии внешних сил (потенциал внешних сил) $П$:

$$Э = U + П. \tag{3.3}$$

Условно будем считать, что в начальном недеформированном состоянии $Э_0 = 0$ (рис. 3.2, *а*). Следовательно, полная энергия $Э$

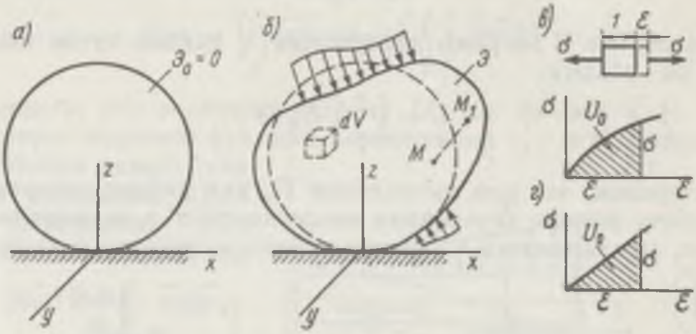


Рис. 3.2

представляет собой изменение энергии внутренних и внешних сил при переходе тела из начального в деформированное состояние.

Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при переводе системы из рассматриваемого состояния в начальное, нулевое, состояние, где принято $Э_0 = 0$. Поэтому при составлении выражения (3.3) будем вычислять энергию как работу внутренних сил упругости (для U) и внешних сил (для $П$) при мысленном переводе тела из деформированного в начальное недеформированное состояние.

Составим вначале выражение для потенциала внутренних сил U. Так как деформации по объему тела распределены неравномерно, то и энергия деформации в объеме тела распределена также неравномерно. Введем понятие плотности энергии деформации U_0 или удельной потенциальной энергии деформации согласно выражению

$$U_0 = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}. \tag{3.4}$$

Оно показывает, что U_0 — это предел отношения энергии ΔU, накопленной в объеме ΔV, к объему ΔV, стремящемуся к нулю. Для однородного деформированного состояния U_0 выражает энергию, накопленную в единице объема материала.

В случае линейного напряженного состояния плотность энергии деформации выражается площадью диаграммы деформирования материала (рис. 3.2, *в* — нелинейно-упругий материал, рис. 3.2, *г* — линейно-упругий). В последнем случае $U_0 = 0{,}5\ \sigma\varepsilon$. Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}), \tag{3.5}$$

или в сокращенной форме, используя обозначения векторов $\vec{\sigma}$ и $\vec{\varepsilon}$ [(2.5), (2.15)], запишем (3.5) в виде

$$U_0 = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T\vec{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Во всем объеме V энергию деформации U найдем путем интегрирования по объему:

$$U = \iiint\limits_V U_0\,\mathrm{d}V. \tag{3.7}$$

Подчеркнем, что при вычислении U_0 как работы следует вычислять работу именно внутренних напряжений σ' в отличие от напряжений σ, приложенных к граням кубика материала и являющихся

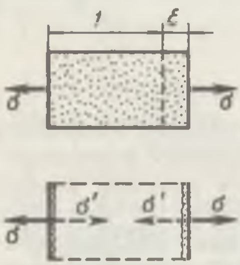


Рис. 3.3

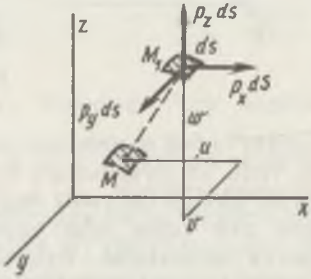


Рис. 3.4

для него внешним воздействием (рис. 3.3). На рисунке показано, что материал элемента условно удален и заменен внутренними («стягивающими») напряжениями σ'. При уменьшении деформации от ε до нуля напряжение σ' совершает положительную работу, равную U_0. Вообще, упругие силы, стремясь восстановить первоначальную форму деформированного тела, будут давать положительную энергию деформации (3.7) и создавать положительный вклад в общем балансе энергии $Э$.

Теперь составим выражение для потенциала внешних сил $П$. Будем считать, что значение этих сил не зависит от перемещения точки приложения силы (весовая нагрузка, давление жидкости или газа и т. п.). На рис. 3.4 показаны элементарные поверхностные силы $p_x \mathrm{d}S$, $p_y \mathrm{d}S$, и $p_z \mathrm{d}S$, действующие на площадку $\mathrm{d}S$ в деформированном состоянии. При переводе тела в недеформированное состояние точка M_1 перейдет в положение M и указанные силы совершат отрицательную работу на перемещениях, соответственно u, v и w. Следовательно, $\mathrm{d}\Pi = -(p_x u + p_y v + p_z w)\,\mathrm{d}S$. Аналогично, для объемной нагрузки получим $\mathrm{d}\Pi = -(Xu + Yv + Zw)\,\mathrm{d}V$. Интегрируя по поверхности тела S и объему V, найдем потенциал внешних сил в виде

$$\Pi = -\iint\limits_S (p_x u + p_y v + p_z w)\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_V (Xu + Yv + Zw)\,\mathrm{d}V \tag{3.8}$$

или в сокращенной векторной форме

$$\Pi = -\iint\limits_S \vec{p}^{\,\mathrm{T}}\vec{u}\,\mathrm{d}s - \iiint\limits_V \vec{g}^{\,\mathrm{T}}\vec{u}\,\mathrm{d}V. \tag{3.9}$$

Легко видеть, что величина энергии U, так же как и Π, вполне определяется заданием функций перемещений u, v и w. Действительно, используя закон Гука (2.33) и уравнения Коши (2.16), выражению (3.6) для U_0 можно придать вид

$$U_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\vec{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}^{\,\mathrm{T}}\mathbf{D}\vec{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}\,\mathbf{D}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u}). \tag{3.10}$$

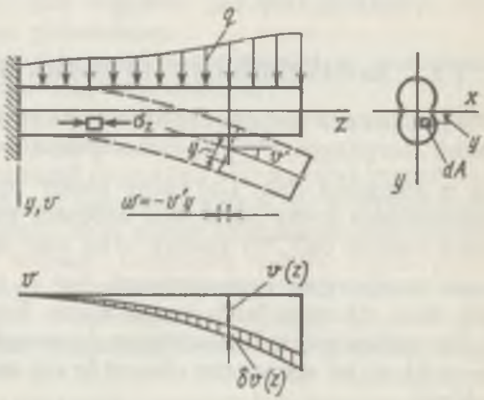


Рис. 3.5

Следовательно, полная энергия тела (3.3) является функционалом, зависящим от выбора трех функций-аргументов $\vec{u} = [u, v, w]^{\mathrm{T}}$, т. е.

$$Э = Э(u, v, w),$$

или в развернутой форме

$$Э = \frac{1}{2}\iiint\limits_V [(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{D}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u})]\,\mathrm{d}V - \iint\limits_S \vec{p}^{\,\mathrm{T}}\vec{u}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_V \vec{g}^{\,\mathrm{T}}\vec{u}\,\mathrm{d}V, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{D}$ — матрица закона Гука (2.33) и $\mathbf{A}$ — матрица оператора дифференцирования (2.6).

Приведем пример составления функционала (3.11). Составим выражение полной энергии $Э$ для балки (рис. 3.5), считая, как это делается обычно в сопротивлении материалов, справедливой гипотезу плоских сечений и пренебрегая влиянием на ее деформации напряжений σ_y, σ_x и касательных напряжений τ. Таким образом, при определении энергии упругой деформации U будем учитывать только напряжения σ_z. В этом случае $U_0 = 0{,}5\sigma_z\varepsilon_z = 0{,}5E\varepsilon_z^2$. Перемещение w точки сечения за счет его поворота на угол v' будет $w = -v'y$; следовательно, $\varepsilon_z = \partial w/\partial z = -v''y$, а $U_0 = 0{,}5\,E\,(v'')^2y^2$. Здесь и далее штрихом отмечаем дифференцирование по z. Интегрируя по объему балки, найдем

$$U = \iiint\limits_V 0{,}5E\,(v'')^2\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^l 0{,}5EJ_x\,(v'')^2\,\mathrm{d}z. \qquad (3.12)$$

В выражении для U интеграл $\iint y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, вычисляемый по площади сечения A, заменен на момент инерции этого сечения J_x.

Потенциал нагрузки q найдем в виде $\Pi = -\int\limits_0^l qv\mathrm{d}z$. Окончательно функционал полной энергии (3.12) получит вид

$$Э = U + \Pi = \frac{1}{2}\int\limits_0^l EJ_x\,(v'')^2\,\mathrm{d}z - \int\limits_0^l qv\,\mathrm{d}z. \qquad (3.13)$$

§ 3.3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

Применим к деформированному телу принцип возможных перемещений Лагранжа. Он выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Согласно этому принципу, если $\vec{u}$ — истинные перемещения точек тела, при которых имеет место равновесие упомянутых систем сил, то работа этих сил на произвольном бесконечном малом изменении перемещений $\delta\vec{u}^{\mathrm{T}} = [\delta u\ \delta v\ \delta w]$, допускаемом связями тела, должна быть равна нулю. Бесконечно малые функции δu, δv, δw называются вариациями функций u, v, w. Функция прогибов $v = v\,(z)$ и ее вариация $\delta v = \delta v\,(z)$ показаны на рис. 3.5 внизу.

Итак,

$$\Delta A = \Delta A^{\text{внутр}} + \Delta A^{\text{внеш}} = 0 \qquad (3.14)$$

Но приращения работы внутренних $A^{\text{внутр}}$ и внешних сил $A^{\text{внешн}}$ с точностью до знака представляют приращения соответствующих потенциалов ΔU и $\Delta\Pi$. Поэтому $\Delta A = -\Delta U - \Delta\Pi = -\Delta Э$, откуда следует, что для истинных перемещений $\vec{u}$ изменение полной энергии $\Delta Э$, вызванное вариациями $\delta\vec{u}$, должно быть равно нулю:

$$\Delta Э = Э\,(\vec{u} + \delta\vec{u}) - Э\,(\vec{u}) = 0. \qquad (3.15)$$

Левая часть (3.15) в общем случае сложно зависит от приращения перемещений $\delta\vec{u}$, поэтому представим ее в виде суммы, в которой каждое слагаемое зависит от соответствующей степени $\delta\vec{u}$:

$$\Delta Э = \Delta Э_1 (\delta\vec{u}) + \Delta Э_2 (\delta\vec{u}^2) + \ldots = 0. \tag{3.16}$$

Здесь первое слагаемое, линейно зависящее от $\delta\vec{u}$, называется первой вариацией функционала $\Delta Э_1 (\delta\vec{u}) = \delta Э$, второе слагаемое есть вторая вариация $\delta^2 Э$ и т. д. Устремляя в (3.16) $\delta\vec{u}$ к нулю и отбрасывая все слагаемые, кроме первого, как бесконечно малые более высокого порядка малости, приходим к равенству

$$\delta Э = 0. \tag{3.17}$$

Из курса математики известно, что равенство нулю первой вариации функционала (3.17) является необходимым условием локального экстремума этого функционала. Оно выражает тот факт, что в локальной зоне изменения функций-аргументов функционал с точностью до бесконечно малых первого порядка сохраняет неизменное (стационарное) значение.

Существует теорема Лежен — Дирихле, согласно которой:

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э > 0$ полная энергия деформированного тела минимальна и его равновесие устойчиво;

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э < 0$ эта энергия максимальна и равновесие системы внутренних и внешних сил неустойчиво;

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э = 0$ энергия стационарна, а тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа) может быть сформулирован так: для истинных перемещений u, v, w функционал полной энергии деформированного тела имеет экстремальное (стационарное) значение, т. е. его первая вариация равна нулю (3.17).

Таким образом, при заданной нагрузке на тело надо найти такие функции u, v, w, при которых выполняется условие $\delta Э = 0$. Тем самым будут найдены истинные перемещения тела и решена задача теории упругости (в перемещениях). В этом и состоит вариационная формулировка задачи теории упругости с помощью принципа Лагранжа. Механически оно в интегральной форме выражает условия равновесия деформированного тела.

§ 3.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВАРИАЦИОННОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКАМИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Эта связь в математике выражается в том, что каждой вариационной формулировке типа $\delta Э (\vec{u}) = 0$ может быть поставлена в соответствие формулировка в форме дифференциальных уравнений относительно разыскиваемых функций $\vec{u}$, называемых *уравнениями Эйлера* для функционала $Э$. Покажем эту связь и процесс получения уравнений Эйлера на простом примере.

при определении энергии упругой деформации U будем учитывать только напряжения σ_z. В этом случае $U_0 = 0{,}5\sigma_z\varepsilon_z = 0{,}5E\varepsilon_z^2$. Перемещение w точки сечения за счет его поворота на угол v' будет $w = -v'y$; следовательно, $\varepsilon_z = \partial w/\partial z = -v''y$, а $U_0 = 0{,}5\,E\,(v'')^2y^2$. Здесь и далее штрихом отмечаем дифференцирование по z. Интегрируя по объему балки, найдем

$$U = \iiint\limits_V 0{,}5E\,(v'')^2\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^l 0{,}5EJ_x\,(v'')^2\,\mathrm{d}z. \qquad (3.12)$$

В выражении для U интеграл $\iint y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, вычисляемый по площади сечения A, заменен на момент инерции этого сечения J_x.

Потенциал нагрузки q найдем в виде $\Pi = -\int\limits_0^l qv\mathrm{d}z$. Окончательно функционал полной энергии (3.12) получит вид

$$Э = U + \Pi = \frac{1}{2}\int\limits_0^l EJ_x\,(v'')^2\,\mathrm{d}z - \int\limits_0^l qv\,\mathrm{d}z. \qquad (3.13)$$

§ 3.3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

Применим к деформированному телу принцип возможных перемещений Лагранжа. Он выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Согласно этому принципу, если $\vec{u}$ — истинные перемещения точек тела, при которых имеет место равновесие упомянутых систем сил, то работа этих сил на произвольном бесконечном малом изменении перемещений $\delta\vec{u}^{\mathrm{T}} = [\delta u\ \delta v\ \delta w]$, допускаемом связями тела, должна быть равна нулю. Бесконечно малые функции δu, δv, δw называются вариациями функций u, v, w. Функция прогибов $v = v\,(z)$ и ее вариация $\delta v = \delta v\,(z)$ показаны на рис. 3.5 внизу.

Итак,

$$\Delta A = \Delta A^{\text{внутр}} + \Delta A^{\text{внеш}} = 0 \qquad (3.14)$$

Но приращения работы внутренних $A^{\text{внутр}}$ и внешних сил $A^{\text{внешн}}$ с точностью до знака представляют приращения соответствующих потенциалов ΔU и $\Delta\Pi$. Поэтому $\Delta A = -\Delta U - \Delta\Pi = -\Delta Э$, откуда следует, что для истинных перемещений $\vec{u}$ изменение полной энергии $\Delta Э$, вызванное вариациями $\delta\vec{u}$, должно быть равно нулю:

$$\Delta Э = Э\,(\vec{u} + \delta\vec{u}) - Э\,(\vec{u}) = 0. \qquad (3.15)$$

Левая часть (3.15) в общем случае сложно зависит от приращения перемещений $\delta\vec{u}$, поэтому представим ее в виде суммы, в которой каждое слагаемое зависит от соответствующей степени $\delta\vec{u}$:

$$\Delta Э = \Delta Э_1 (\delta\vec{u}) + \Delta Э_2 (\delta\vec{u}^2) + \ldots = 0. \tag{3.16}$$

Здесь первое слагаемое, линейно зависящее от $\delta\vec{u}$, называется первой вариацией функционала $\Delta Э_1 (\delta\vec{u}) = \delta Э$, второе слагаемое есть вторая вариация $\delta^2 Э$ и т. д. Устремляя в (3.16) $\delta\vec{u}$ к нулю и отбрасывая все слагаемые, кроме первого, как бесконечно малые более высокого порядка малости, приходим к равенству

$$\delta Э = 0. \tag{3.17}$$

Из курса математики известно, что равенство нулю первой вариации функционала (3.17) является необходимым условием локального экстремума этого функционала. Оно выражает тот факт, что в локальной зоне изменения функций-аргументов функционал с точностью до бесконечно малых первого порядка сохраняет неизменное (стационарное) значение.

Существует теорема Лежен — Дирихле, согласно которой:

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э > 0$ полная энергия деформированного тела минимальна и его равновесие устойчиво;

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э < 0$ эта энергия максимальна и равновесие системы внутренних и внешних сил неустойчиво;

при $\delta Э = 0$ и $\delta^2 Э = 0$ энергия стационарна, а тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа) может быть сформулирован так: для истинных перемещений u, v, w функционал полной энергии деформированного тела имеет экстремальное (стационарное) значение, т. е. его первая вариация равна нулю (3.17).

Таким образом, при заданной нагрузке на тело надо найти такие функции u, v, w, при которых выполняется условие $\delta Э = 0$. Тем самым будут найдены истинные перемещения тела и решена задача теории упругости (в перемещениях). В этом и состоит вариационная формулировка задачи теории упругости с помощью принципа Лагранжа. Механически оно в интегральной форме выражает условия равновесия деформированного тела.

§ 3.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВАРИАЦИОННОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКАМИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Эта связь в математике выражается в том, что каждой вариационной формулировке типа $\delta Э (\vec{u}) = 0$ может быть поставлена в соответствие формулировка в форме дифференциальных уравнений относительно разыскиваемых функций $\vec{u}$, называемых *уравнениями Эйлера* для функционала $Э$. Покажем эту связь и процесс получения уравнений Эйлера на простом примере.

Запишем функционал полной энергии для балки, лежащей на винклеровом основании с коэффициентом жесткости c (рис. 3.6):

$$Э = \int_0^l \left[\frac{1}{2} (EJ (v'')^2 + cv^2) - qv \right] \mathrm{d}z - [Qv]_0^l + [Mv']_0^l. \qquad (3.18)$$

Здесь в выражении для энергии обычной балки (3.13) введены члены, учитывающие энергию деформации упругого основания с плотностью $0{,}5rv = 0{,}5cv^2$ и энергию концевых нагрузок при $z = 0$ и $z = l$. Запись $[Qv]_0^l$, означает $Q_l v_l - Q_0 v_0$.

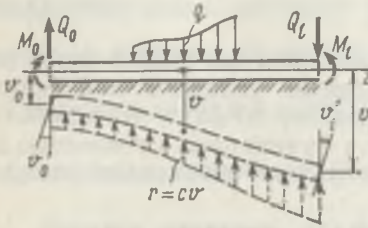


Рис. 3.6

Функционал (3.18) относится к виду

$$Э = \int_0^l F(v, v', v'') \,\mathrm{d}z + [Av]_0^l + [Bv']_0^l. \qquad (3.19)$$

Операция варьирования аналогична операции дифференцирования. При получении вариации $\delta Э$ будем рассматривать выражение F как сложную функцию от v. В результате получим

$$\delta Э = \int_0^l F'_v \,\delta v \,\mathrm{d}z + \int_0^l F'_{v'} \,\delta v' \,\mathrm{d}z + \int_0^l F'_{v''} \,\delta v'' \,\mathrm{d}z + [A\,\delta v]_0^l + [B\,\delta v']_0^l. \qquad (3.20)$$

Здесь штрихом при F отмечается частная производная выражения $F(v,\ v',\ v'')$ по аргументу, указанному в нижнем индексе. Условием $\delta Э = 0$ в форме (3.20) пользоваться для определения $v = v(z)$ неудобно, так как оно содержит не только произвольную функцию δv, но и ее производные. Поэтому переобразуем (3.20) так, чтобы из-под интегралов были исключены производные $\delta v'$ и $\delta v''$. Для этого интегрируем второе слагаемое по частям один раз, а третье — два раза. В результате получим

$$\delta Э = \int_0^l \left[F'_v - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (F'_{v'}) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} (F'_{v''}) \right] \delta v \,\mathrm{d}z +$$
$$+ \left[A - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (F'_{v''}) \right] \delta v \Big|_0^l + [B + F'_{v''}]\, \delta v' \Big|_0^l. \qquad (3.21)$$

Теперь из условия $\delta Э = 0$ ввиду произвольности функции δv следует равенство нулю выражения в прямых скобках под интегралом, а именно:

$$F'_v - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (F'_{v'}) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} (F'_{v''}) = 0. \qquad (3.22)$$

Кроме того, если при $z = 0,\ l$ перемещения δv и $\delta v'$ также произвольны, то должны быть равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} A-\frac{d}{dz}(F'_{v''})=0; \\ B+F'_{v''}=0; \end{aligned}\right\} z=0,\ l. \tag{3.23}$$

Равенство (3.22) и является дифференциальным уравнением Эйлера для функционала (3.19), а (3.23) — его граничными условиями.

Применительно к балке на упругом основании (3.18) имеем $F=0{,}5\,[EJ\,(v'')^2+cv^2]-qv$; $A=-Q$; $B=M$. Тогда $F'_v=-q+cv$; $F'_{v'}=0$; $F'_{v''}=EJv''$; $\frac{d^2}{dz^2}(F'_{v''})=(EJv'')''$ и уравнение (3.22) и условия (3.23) принимают вид:

$$(EJv'')''+cv=q; \tag{3.24}$$

$$\left.\begin{aligned} (EJv'')'=-Q; \\ EJv''=-M; \end{aligned}\right\} z=0,\ l. \tag{3.25}$$

Таким образом, вариационное уравнение $\delta Э = 0$, в интегральной форме выражающее условия равновесия деформированного тела, эквивалентно и включает в себя соответствующие дифференциальные уравнения равновесия теории упругости вместе с условиями равновесия на поверхности тела (граничными условиями). Указанные дифференциальные уравнения служат уравнениями Эйлера функционала $Э$. При этом если последний будет выражен только через три фукнции перемещений $Э = Э\,(u,\ v,\ w)$, то, следуя по пути, показанному в примере, мы придем к уравнениям Эйлера в форме уравнений Ляме (2.44), т. е. уравнений равновесия, записанных в перемещениях. Отметим, что в этом случае при исключении из уравнения $\delta Э = 0$ частных производных функций δu, δv, δw потребуется операция, аналогичная интегрированию по частям — переход от интеграла по объему к интегралу по поверхности по формуле Грина. На этих преобразованиях останавливаться не будем.

Вариационная формулировка задачи теории упругости используется главным образом в двух случаях. В первом на основе уравнения $\delta Э = 0$ строятся численные методы решения этой задачи (метод Ритца, метод конечных элементов и т. п.). Все эти методы относят к классу прямых методов решения задач теории упругости, не требующих в явной форме использования дифференциальных уравнений.

Второй характерный случай применения вариационного подхода — это получение дифференциальных уравнений и граничных условий рассматриваемой задачи как уравнений Эйлера соответствующего функционала. Такой путь оказывается оправданным для тел сложной формы и структуры (например, многослойные оболочки и др.), а также при переходе от одной системы координат к другой (от декартовой системы к полярной, криволинейной и другим системам).

§ 3.5. МЕТОД РИТЦА

Условие стационарности функционала $\delta Э = 0$ формулирует континуальную вариационную задачу с бесконечным числом компонент перемещений, определяющих разыскиваемые функции-экстремали. Идея метода, предложенного еще в начале века немецким ученым Ритцем, состоит в том, чтобы от континуальной формулировки перейти к дискретной, когда функционал $Э = Э(u, v, w)$, заменяется функцией $Э = Э(\alpha_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, зависящей от конечного числа аргументов α_i. После этого задача определения экстремалей функционала перейдет в стандартную задачу исследования указанной функции дискретного числа аргументов на экстремум. Другими словами, от континуальной задачи с бесконечным числом степеней свободы в отношении формы деформирования тела мы переходим к задаче для системы с конечным числом степеней свободы.

В общем случае трехмерного тела для перемещений u, v, w зададимся выражением в виде суммы:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \begin{bmatrix} f_{ui}(x, y, z) \\ f_{vi}(x, y, z) \\ f_{wi}(x, y, z) \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неизвестные числа (обобщенные перемещения), подлежащие определению: $f_1, \ldots, f_n$ — базисные функции, которыми мы задаемся так, чтобы они удовлетворяли условиям закрепления тела.

Подставляя (3.26) в функционал (3.11) для линейно деформируемых систем, после вычисления определенных интегралов от функций f_i и их производных получим его в виде квадратичной формы

$$Э = U + П = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\alpha_j\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} R_{iP}\alpha_i. \tag{3.27}$$

При этом можно убедиться, расписав упомянутые определенные интегралы, что всегда $r_{ij} = r_{ji}$. Из условия $\delta Э = \sum\limits_{i=1}^{n} (\partial Э/\partial \alpha_i)\, \delta\alpha_i = 0$ ввиду произвольности вариаций $\delta\alpha_i$, получаем n уравнений

$$\frac{\partial Э}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial П}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.28}$$

которые в случае линейно деформируемой системы с учетом (3.27) образуют систему n алгебраических линейных уравнений относительно обобщенных перемещений α_i:

$$\left.\begin{matrix} r_{11}\alpha_1 + \ldots + r_{1n}\alpha_n + R_{1P} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}\alpha_1 + \ldots + r_{nn}\alpha_n + R_{nP} = 0. \end{matrix}\right\} \tag{3.29}$$

Выделим из (3.29) матрицу и вектор:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_P = \begin{bmatrix} R_{1P} \\ \vdots \\ R_{nP} \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Матрица $\mathbf{R}$ называется матрицей жесткости, соответствующей вектору обобщенных перемещений $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \dots \alpha_n]^{\mathrm{T}}$. Она симметрична относительно главной диагонали, так как $r_{ij} = r_{ji}$. Произведение $\mathbf{R}\vec{\alpha} = \vec{S}$ дает вектор обобщенных упругих сил. Вектор $\vec{R}_p$ — это

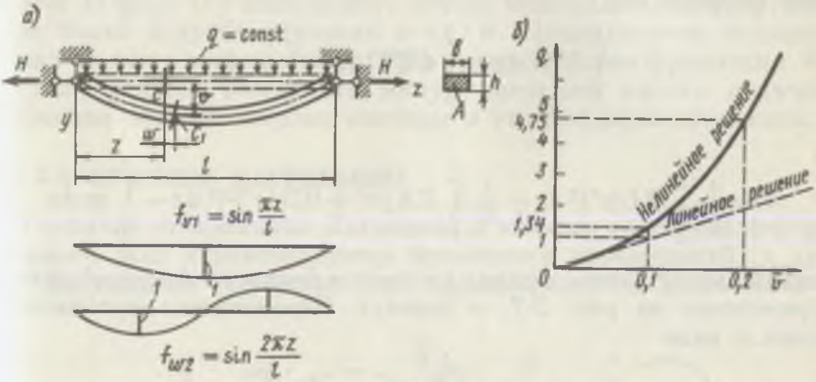


Рис. 3.7

вектор обобщенных внешних сил. Поэтому равенства (3.28) и (3.29), которые могут быть записаны кратко в виде

$$\vec{S} + \vec{R}_p = 0, \tag{3.31}$$

преобретают простой механический смысл, а именно: если деформированное тело (или система тел) находится в равновесии, то суммарная обобщенная сила, отвечающая каждому из возможных перемещений α_i, равна нулю. При этом суммарная обобщенная сила состоит из упругой силы $S_i = \partial U / \partial \alpha_i$ и внешней обобщенной силы $R_{ip} = \partial \Pi / \partial \alpha_i$.

Если тело является нелинейно деформируемым, то функционал $Э$ от α_i будет зависеть более сложно, чем квадратичная форма (3.27), и система уравнений (3.28) будет нелинейной относительно α_i. Проиллюстрируем сказанное характерным примером.

На рис. 3.7, *а* показана балка, имеющая на концах шарнирно неподвижные опоры. При ее искривлении длина оси увеличивается и балка работает как на изгиб, так и на растяжение, а в горизонтальных связях возникают растягивающие силы H. Получим зависимость между нагрузкой q и прогибами v такой системы.

На осевые продольные деформации ε_z будет влиять не только продольное перемещение w, но и поперечное перемещение v, причем эта зависимость нелинейная и приближенно имеет вид уравнений (2.19). По аналогии с этими уравнениями имеем зависимость для осевой деформации $\varepsilon_z = w' + 0{,}5\,(v')^2$, а также для продольной силы $N = \varepsilon_z EA = EA\,[w' + 0{,}5\,(v')^2]$. Как видим, данная система относится к разряду геометрически нелинейных систем. Плотность энергии деформации растяжения балки (на единицу длины) будет

$$U_0^{\text{раст}} = 0{,}5\,N\varepsilon_z = 0{,}5EA[w' + 0{,}5(v')^2]^2.$$

Функционал полной энергии с учетом деформаций изгиба и растяжения получит вид

$$Э = \int_0^l U_0^{\text{изг}}\,dz + \int_0^l U_0^{\text{раст}}\,dz - \int_0^l qv\,dz$$

или

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\,(v'')^2\,dz + \frac{1}{2}\int_0^l EA\,[w' + 0{,}5\,(v')^2]^2\,dz - \int_0^l qv\,dz.$$

Применим метод Ритца, приняв в качестве базисных функций кривые, изображенные на рис. 3.7, *а* (внизу). Перемещения приближенно зададим в виде

$$v = \alpha_1 \sin\frac{\pi z}{l}; \quad w = \alpha_2 \sin\frac{2\pi z}{l}.$$

Подставив эти перемещения в выражения для энергии $Э$ и произведя интегрирование, получим такую функцию аргументов α_1 и α_2:

$$Э\,(v,\ w) = \alpha_1^2\pi^4 EJ/(4l^3) + EA\,[\alpha_2^2\pi^2/l +$$
$$+ \alpha_2\alpha_1^2\pi^3/(8l^2) + \alpha_1^4 3\pi^4/(64l^3)] - \alpha_1 2ql/\pi.$$

Уравнения (2.28) $\partial Э/\partial\alpha_1 = 0$ и $\partial Э/\partial\alpha_2 = 0$ оказываются нелинейными и имеют следующий вид:

$$\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\,\alpha_1 + \frac{\pi^3 EA}{4l^2}\,\alpha_1\alpha_2 + \frac{3\pi^4 EA}{16l^3}\,\alpha_1^3 - \frac{2ql}{\pi} = 0;$$

$$\frac{2\pi^2 EA}{l}\,\alpha_2 + \frac{\pi^3 EA}{8l^2}\,\alpha_1^2 = 0.$$

Выразив α_2 через α_1 из второго уравнения $\alpha_2 = -\,\pi\alpha_1^2/(16\,l)$ и подставив его в первое уравнение, получим искомую зависимость

$$\bar{q} = \beta\bar{v} + (11/32)\,\bar{v}^3,$$

где $\bar{q} = 4ql/(10^3\pi^5 EA)$ — безразмерная нагрузка; $\bar{v} = \alpha_1/l = v_{\max}/l$ — безразмерный (относительный) прогиб в середине пролета: $\beta = EJ/(l^2 EA)$.

На рис. 3.7, *б* сплошной линией показана кривая для балки прямоугольного сечения при $h/l = 0{,}1$, для которой $\beta = h^2/l^2$. Там же пунктиром изображен результат линейного решения, когда учитывается только деформация изгиба. Как видим, при прогибе, имеющем порядок высоты сечения балки ($v_{\max} \sim h$, т. е. $\bar{v} \sim 0{,}1$) и более, неучет нелинейной работы системы приводит к существенным погрешностям. Этот вывод в еще большей мере характерен также для гибких пластин и оболочек (см. гл. 9).

В заключение этого параграфа отметим, что рассмотренные выше основы метода Ритца имеют в основном принципиальное значение. В то же время технически он реализуется в большинстве случаев в одной из форм так называемого метода конечных элементов (МКЭ), о чем более подробно сказано в гл. 8. Преимущества последнего состоят в том, что окончательные разрешающие уравнения Ритца (3.28) удается составлять минуя операцию явного получения выражения полной энергии системы и его дифференцирования.

§ 3.6. ПРИНЦИП КАСТИЛЬЯНО

В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние деформированного тела характеризуется функциями перемещений, в принципе Кастильяно состояние тела характеризуется функциями на-

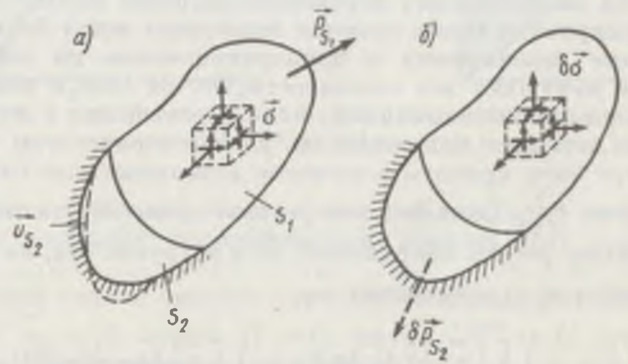


Рис. 3.8

пряжений $\vec{\sigma} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$, которые заведомо удовлетворяют условиям равновесия тела при данной внешней нагрузке $\vec{p}_{s_1} = [p_x p_y p_z]^{\mathrm{T}}$ на поверхности S_1 и заданным перемещениям $\vec{u} = \vec{u}_{S_2}$ на поверхности тела S_2 (рис. 3.8, *а*).

Указанные напряжения называют *статически возможными* или *равновесными системами напряжений*. Но в каждой задаче теории упругости таких систем напряжений существует бесконечно много, поскольку эта задача статически неопределима. Действительно, в три уравнения равновесия (2.3) входят шесть неизвестных функций $\vec{\sigma}$, поэтому число функций $\vec{\sigma}$, удовлетворяющих этим уравнениям и условиям на поверхности, бесконечно велико.

Принцип Кастильяно из всех систем статически возможных напряжений выделяет такие, которые обеспечивают не только равновесие, но и совместность деформаций тела и, таким образом, являются искомым единственным решением задачи теории упругости.

Для его формулировки рассмотрим два состояния тела: первое — с истинными напряжениями $\vec{\sigma}$ и второе — с напряжениями $\vec{\sigma} + \delta\vec{\sigma}$. Те и другие напряжения статически возможные и, следовательно, уравновешивают внешнюю нагрузку $\vec{p}_{S_1}$. Представив себе разность этих состояний, придем к выводу о том, что напряжениям $\delta\vec{\sigma}$ отвечает отсутствие нагрузки на поверхности S_1, т. е. система напряжений $\delta\vec{\sigma}$ должна быть самоуравновешенной.

На рис. 3.8, *б* показано рассматриваемое тело, испытывающее самоуравновешенные напряжения $\delta\vec{\sigma} = [\delta\sigma_x \ . \ . \ . \ \delta\tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$, являющиеся вариациями истинных напряжений σ. На поверхности S_2 как реактивные усилия в этом состоянии возникают поверхностные нагрузки $\delta\vec{p}_{S_2}$. Поскольку эта система напряжений и сил равновесна, ее работа δA на возможных перемещениях равна нулю.

В деформируемом теле в качестве возможных могут быть приняты любые малые перемещения и пропорциональные им деформации, которые не нарушают его сплошности внутри тела и непрерывной связи с опорными закреплениями. Если перемещения и деформации, отвечающие истинным напряжениям, удовлетворяют этим условиям, то они могут быть приняты в качестве возможных для напряжений $\delta\vec{\sigma}$ и нагрузок $\delta\vec{p}_{S_2}$. Запишем как условие совместности деформаций равенство нулю работы напряжений $\delta\vec{\sigma}$ и нагрузок $\delta\vec{p}_{S_2}$ на истинных деформациях $\vec{\varepsilon}$ и перемещениях $\vec{u}_{S_2}$:

$$\delta A = -\iiint\limits_V \vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\delta\vec{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_2} \vec{u}^{\mathrm{T}}_{S_2}\delta\vec{p}_{S_2}\,\mathrm{d}S_2 = 0. \tag{3.32}$$

Под знаком тройного интеграла здесь стоит вариация плотности *дополнительной энергии деформации* $U_0^{\text{доп}}$. На рис. 3.9, *а* это показано для случая одноосного напряженного состояния и нелинейно-упругого материала. Произведение $\varepsilon\delta\sigma = \delta U_0^{\text{доп}}$, где $U_0^{\text{доп}} = \sigma\varepsilon - U_0$, выражается площадью диаграммы деформирования материала, заштрихованной на рис. 3.9, *а*, *б*. В общем случае

$$U_0 + U_0^{\text{доп}} = \vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}.$$

Второе слагаемое (3.32) равно вариации потенциала сил $\vec{p}_{S_2}$ на поверхности S_2 (с обратным знаком). Этот потенциал обозначим $\widetilde{\Pi}$. Умножая (3.32) на — 1, левую часть этого равенства запишем в виде

$$\delta Э_К = \delta (U^{доп} + \widetilde{\Pi}) = 0, \qquad (3.33)$$

где $U^{доп} = \iiint\limits_V U_0^{доп}\, dx\, dy\, dz;\ \widetilde{\Pi} = -\iint\limits_{S_2} \vec{u}^{\,т}_{S_2} p_{S_2}\, dS_2;\ Э_К = U^{доп} + \widetilde{\Pi}.$

Величина $Э_К$, равная сумме дополнительной энергии деформации тела и потенциала реактивных сил на поверхности S_2, испытывающей принудительные перемещения, называется *функционалом Кастильяно* или *дополнительной энергией деформируемого тела*.

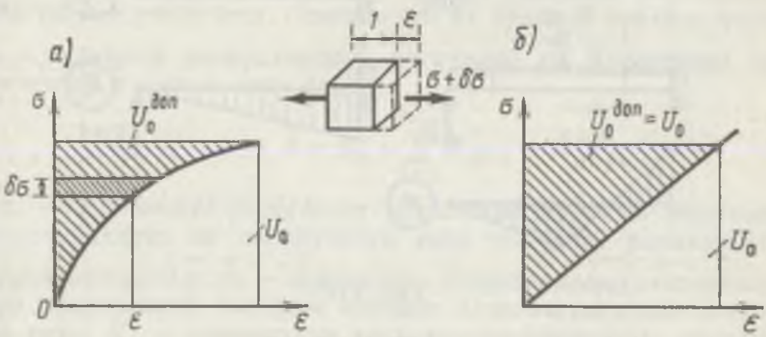


Рис. 3.9

Равенство (3.33) выражает принцип Кастильяно: истинные напряжения сообщают дополнительной энергии тела стационарное значение.

В частном случае линейно-упругого тела и отсутствия заданных смещений $\vec{u}_{S_2} = 0$, когда $\widetilde{\Pi} = 0$, имеем $U^{доп} = U$ (рис. 3.9, *б*) и принцип Кастильяно получает вид

$$\delta U = 0. \qquad (3.34)$$

Равенство (3.34) показывает, что для истинных напряжений (или внутренних усилий) линейно-упругая система имеет потенциальную энергию деформации стационарной (для устойчивого равновесия минимальной). Поскольку энергия U численно равна работе внутренних сил, которая, в свою очередь, равна работе внешних сил деформированного тела, это положение часто называют принципом наименьшей работы.

§ 3.7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Принцип Кастильяно в интегральной форме выражает условия совместности деформаций тела. Если функционал Кастильяно выразить только через напряжения $Э_K = Э_K(\vec{\sigma})$, то отвечающие ему уравнения Эйлера дадут для постоянных объемных сил уже знакомые нам уравнения Бельтрами (2.42) — условия совместности деформаций, выраженные через напряжения.

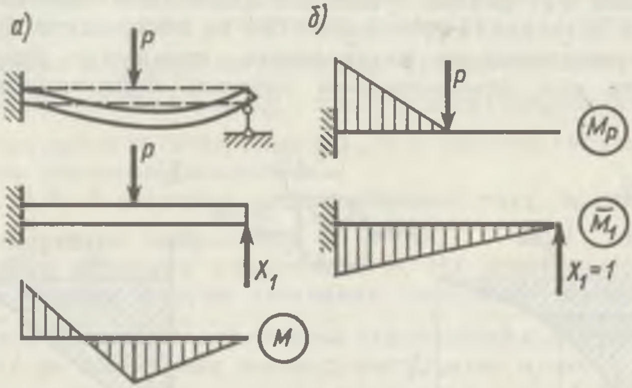


Рис. 3.10

Проиллюстрируем сказанное. Существует бесконечное множество равновесных эпюр изгибающих моментов для статически неопределимой балки (рис. 3.10, *а*), задаваемых равенством

$$M = M_p + X_1\overline{M}_1, \tag{3.35}$$

где M_p и $\overline{M}_1$ — эпюры, изображенные на рис. 3.10, *б*, а X_1 — произвольно варьируемая величина опорной реакции. Найдем X_1, используя принцип наименьшей работы. Энергия деформации (с учетом только изгибающих моментов) будет

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2\,ds}{EJ} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(M_P + X_1\overline{M}_1)^2}{EJ}\,ds.$$

Условие минимума энергии деформации U дает

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \left(\int_0^l \frac{\overline{M}_1^2\,ds}{EJ}\right)X_1 + \left(\int_0^l \frac{M_P\overline{M}_1}{EJ}\,ds\right) = 0 \tag{3.36}$$

или

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

где $\delta_{11} = \int\limits_0^l \frac{\overline{M}_1^2\, ds}{EJ}$; $\Delta_{1P} = \int\limits_0^l \frac{M_P \overline{M}_1}{EJ}\, ds$.

Полученное уравнение хорошо известно в методе сил и выражает условие равенства нулю прогиба у шарнирной опоры. Оно является условием совместности деформаций данной простейшей статически неопределимой системы.

Как видим, непосредственное использование принципа Кастильяно позволяет получать уравнения совместности деформаций для статически неопределимых систем без обращения к геометрической трактовке этих условий.

По аналогии с методом Ритца можно обобщить этот подход на задачи теории упругости. Опишем его на примере линейно-упругого тела с заданной поверхностной нагрузкой $\vec{p}$. Представим вектор напряжений в теле в виде суммы:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_P + \sum_{i=1}^{i=n} X_i \vec{\sigma}_i, \tag{3.37}$$

где $\vec{\sigma}_P$ — задаваемые статически возможные функции напряжений, удовлетворяющие на поверхности тела условиям равновесия при действии нагрузки $\vec{p}$; $\vec{\sigma}_i$ — задаваемые функции самоуравновешенных систем напряжений, которым отвечает нулевая нагрузка на поверхности тела; X_i — неизвестные числовые коэффициенты, подлежащие определению (обобщенные усилия).

По выражению (3.37) можно варьировать напряжения в теле с помощью n параметров X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е., как и в методе Ритца, от континуальной задачи мы перешли к дискретной для системы с n степенями свободы. Вычислив U, получим функцию $U = U(X_i, p)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Из вариационного уравнения (3.34)

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial X_i} \delta X_i \tag{3.38}$$

ввиду произвольности вариаций δX_i следует n уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.39}$$

или в развернутой форме

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}X_1 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{array}\right\} \tag{3.40}$$

Решение уравнений (3.40) дает значения X_i, что и определяет с помощью (3.37) искомые напряжения в теле.

Приведем пример использования изложенного метода. На рис. 3.11, *а* показано поперечное сечение тонкостенного стержня, испытывающего деформацию свободного кручения моментом M. Сечение замкнутое двухконтурное. В этом случае задача определения касательных напряжений τ статически неопределима. Решим ее с помощью принципа Кастильяно.

На рис. 3.11, *б* показано одноконтурное сечение, полученное из заданного путем отбрасывания перегородки. Из курса сопротивления материалов известно, что в этом случае

$$\tau_p = \frac{M}{\Omega h}, \tag{а}$$

где $\Omega = 2\omega$ — удвоенная площадь, ограниченная контуром срединной линии. Напряжения (а) уравновешивают внешнюю нагрузку

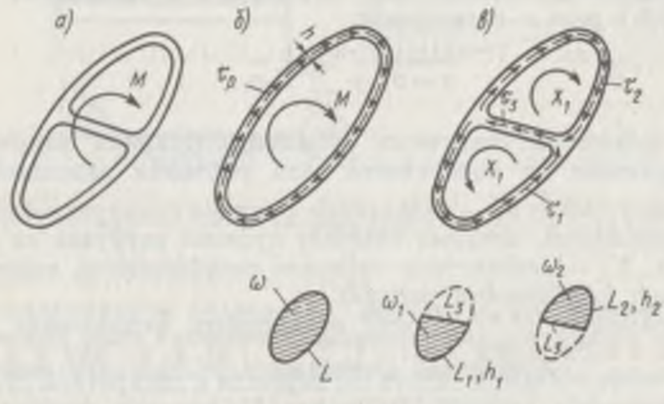


Рис. 3.11

в виде момента M, но не обеспечивают совместность деформации контура и перегородки (по депланации). Поэтому введем самоуравновешенную систему напряжений τ_1, τ_2 и τ_3, отвечающую действию двух моментов X_1 (рис. 3.11, *в*). Эти напряжения определяются аналогично (а):

$$\tau_1 = \frac{X_1}{\Omega_1 h_1}; \quad \tau_2 = \frac{X_1}{\Omega_2 h_2}; \quad \tau_3 = \frac{X_1}{\Omega_1 h_3} + \frac{X_1}{\Omega_2 h_3}, \tag{б}$$

где $\Omega_1 = 2\omega_1$; $\Omega_2 = 2\omega_2$; h_1, h_2, h_3 — толщина стенки левого участка контура, правого его участка и перегородки, соответственно. Они могут быть переменными по длине контура.

Суммарные напряжения будут: на левом участке контура — $(\tau_p - \tau_1)$; на правом — $(\tau_p + \tau_2)$ и в перегородке — τ_3. Потенциальная энергия деформации единицы длины стержня будет

$$U = \frac{1}{2} \oint\limits_{L_1} \frac{h_1 (\tau_P - \tau_1)^2}{G} \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \oint\limits_{L_2} \frac{h_2 (\tau_P + \tau_2)^2}{G} \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \oint\limits_{L_3} \frac{h_3 \tau_3^2}{G} \, \mathrm{d}s. \qquad \text{(в)}$$

Подставив сюда выражения напряжений (а) и (б) и дифференцируя по X_1, получим уравнение для определения X_1:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0, \qquad \text{(г)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{G\Omega_1^2} \oint\limits_{L_1} \frac{\mathrm{d}s}{h_1} + \frac{1}{G\Omega_2^2} \oint\limits_{L_2} \frac{\mathrm{d}s}{h_2} + \frac{1}{G(\Omega_2 + \Omega_2)^2} \oint\limits_{L_3} \frac{\mathrm{d}s}{h_3}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{M}{G\Omega} \left[-\frac{1}{\Omega_1} \oint\limits_{L_1} \frac{\mathrm{d}s}{h_1} + \frac{1}{\Omega_2} \oint\limits_{L_2} \frac{\mathrm{d}s}{h_2} \right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(д)}$$

Здесь интегралы вдоль линий L_1, L_2, L_3 вычисляются соответственно для левой части контура сечения, правой его части и перегородки.

§ 3.8. ПОНЯТИЕ О ДРУГИХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ

Формулировка вариационного принципа зависит от того, какими величинами (функциями) характеризуется состояние деформированного тела. В принципе Лагранжа такими функциями служат перемещения $\vec{u}$, а в принципе Кастильяно — напряжения $\vec{\sigma}$. Именно эти принимаемые за основные функции подлежат варьированию (бесконечно малым изменениям) для того, чтобы получить вариационное уравнение. Все прочие функции считаются связанными с основными соответствующими зависимостями, приведенными в гл. 2.

Помимо рассмотренных принципов Лагранжа и Кастильяно в теории упругости известно еще несколько вариационных принципов, отличающихся выбором варьируемых функций. Все они могут быть получены, если идти по некоторому формальному пути [30]. В основе его лежит следующее тождество, выражающее переход от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности, доказываемое с применением формулы Гаусса — Остроградского

$$\iiint\limits_V (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \vec{a})^{\mathrm{T}} \vec{b} \, \mathrm{d}V = \iint\limits_s (\vec{a})^{\mathrm{T}} \mathbf{L} \vec{b} \, \mathrm{d}s - \iiint\limits_V \vec{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \vec{b} \, \mathrm{d}V. \qquad (3.41)$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица-оператор дифференцирования (2.7), фигурирующая в основных уравнениях теории упругости; $\mathbf{L}$ — матрица (2.10) направляющих косинусов нормали в точках поверхности тела.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это векторы, в качестве которых могут использоваться $\vec{u}$, ε, $\vec{\sigma}$ или их вариации соответствующей мерности ($\vec{a}$ — третьего порядка, $\vec{b}$ — шестого).

Соотношение (3.41) преобразует интеграл от производных компонент вектора $\vec{a}$ к интегралу от производных вектора $\vec{b}$ и, по сути, яляется обобщением формулы интегрирования по частям применительно к телу произвольной формы и основному оператору дифференцирования **A**.

Для примера примем в качестве варьируемых функций $\vec{u}$ и $\vec{\sigma}$. Соответствующий функционал, называемый *функционалом Рейсснера*, относится к разряду смешанных функционалов. Чтобы получить его, подставим в (3.41) $\vec{a} = \vec{u} + \delta\vec{u}$ и $\vec{b} = \vec{\sigma} + \delta\vec{\sigma}$. После отбрасывания членов второго порядка малости и некоторых дополнительных преобразований придем к равенству

$$\delta Э_{P_1} = 0, \tag{3.42}$$

где функционал Рейсснера имеет вид

$$Э_{P_1} = Э_{P_1}(\vec{\sigma}, \vec{u}) = \iiint\limits_V [\vec{\sigma}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u}) - 0{,}5\vec{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\vec{\sigma}]\, dV - \iiint\limits_V \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{g}\, dV -$$

$$- \iint\limits_{S_1} \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{p}_{S_1}\, dS - \iint\limits_{S_2} (\vec{u} - \vec{u}_{S_2})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{L}\vec{\sigma}\, dS. \tag{3.43}$$

Функционалу (3.43) можно придать и несколько иной вид, а именно

$$Э_{P_2}(\vec{\sigma}, \vec{u}) = -\frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\vec{\sigma}\, dV - \iiint\limits_V \vec{u}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}\vec{\sigma} + \vec{g})\, dV +$$

$$+ \iint\limits_{S_1} \vec{u}^{\mathrm{T}} (\mathbf{L}\vec{\sigma} - \vec{p}_{S_1})\, dS + \iint\limits_{S_2} \vec{u}^{\mathrm{T}}_{S_2}\mathbf{L}\vec{\sigma}\, dS. \tag{3.44}$$

Ему также отвечает условие $\delta Э_{P_2} = 0$ для истинных функций $\vec{u}$ и $\vec{\sigma}$. Здесь **C** — матрица закона Гука (2.27).

Функционалы Рейсснера часто используются для построения численных приближенных методов, в которых неизвестные перемещения $\vec{u}$ и напряжения $\vec{\sigma}$ независимо представляются суммами типа (3.26) и (3.37) с неизвестными обобщенными перемещениями и усилиями.

Если в качестве независимо варьируемых функций принять перемещения $\vec{u}$, напряжения $\vec{\sigma}$ и деформации $\vec{\varepsilon}$ (15 функций), то с помощью (3.41) придем к наиболее общему функционалу, предложенному учеными Ху и Вашицу. Одна из форм записи функционала Ху — Вашицу следующая:

$$Э_{\text{Х-В}}(\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{\varepsilon}) = 0{,}5 \iiint\limits_V \vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\vec{\varepsilon}\, dV + \iiint\limits_V \vec{\sigma}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{u} - \vec{\varepsilon})\, dV -$$

$$- \iiint\limits_V \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{g}\, dV - \iint\limits_{S_1} \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{p}\, dS - \iint\limits_{S_2} (\vec{u} - \vec{u}_{S_2})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{L}\vec{\sigma}\, dS, \tag{3.45}$$

а соответствующего вариационного уравнения —

$$\delta Э_{Х-В} = 0. \tag{3.46}$$

Пятнадцать уравнений теории упругости (2.40) и условия на поверхности тела (2.10) являются уравнениями Эйлера этого функционала и их граничными условиями.

Вводя какие-либо зависимости между 15 указанными функциями, можно перейти к другим функционалам. Например, считая, что деформации связаны с напряжениями законом Гука $\vec{\varepsilon} = C\vec{\sigma}$, от функционала Ху — Вашицу перейдем к функционалу Рейсснера (3.43). В этом смысле функционал Ху — Вашицу рассматривается как общий, а все остальные — как частные функционалы. На подробностях здесь не останавливаемся, отсылая читателя к специальной литературе.

ГЛАВА 4

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 4.1. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Представим себе плоскую пластину, нагруженную некоторой нагрузкой в ее плоскости (рис. 4.1, *а*). Толщина ее δ очень мала по сравнению с размерами a и c. В идеале толщина должна стремиться к нулю. В подобных условиях находится очень тонкая растянутая пленка. Если выделить элемент с размерами dx, dy и δ в любой точке такой пластины, то на его гранях в общем случае возникают напряжения σ_x, σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ (рис. 4.1, *б*). На боковых гранях этого

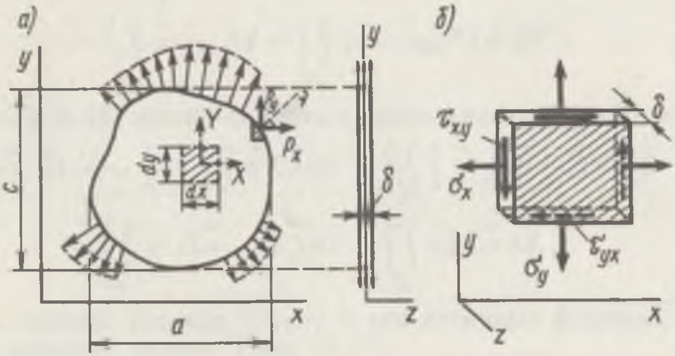


Рис. 4.1

элемента (на рис. 4.1, *б* они заштрихованы) напряжения отсутствуют: $\sigma_z = 0$; $\tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = 0$. Предположим, что эти напряжения равны нулю и во внутренних точках элемента. Описанное состояние называется *плоским напряженным состоянием тела*. Оно характеризуется тем, что две параллельные грани бесконечно малого элемента, выделенного в любой точке тела, свободны от напряжений. Напряжения σ_x, σ_y, τ при этом равномерно распределены по толщине пластины δ.

Для конечной толщины пластины эти напряжения могут быть распределены при указанном нагружении не совсем равномерно (рис. 4.1, *а*) и во внутренних точках пластины могут возникать небольшие напряжения σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}. В этом случае модель плоского напряженного состояния, распространенная на всю толщину δ, является приближенной, а получаемые напряжения будут некоторыми усредненными по отношению к действительным. Иногда указанный случай упрощения задачи называют *обобщенным плоским напряженным состоянием пластины*.

При плоском напряженном состоянии в каждой точке изменяется толщина пластины δ. Действительно, по закону Гука получим

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y);$$
$$\Delta\delta = \varepsilon_z\delta = -\frac{\mu\delta}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \qquad (4.1)$$

Задача об определении плоского напряженного состояния пластины яляется двумерной, поскольку три неизвестных напряжения σ_x, σ_y, τ, вполне определяющих это состояние, зависят от двух координат: x и y. То же можно сказать и про перемещения u и v.

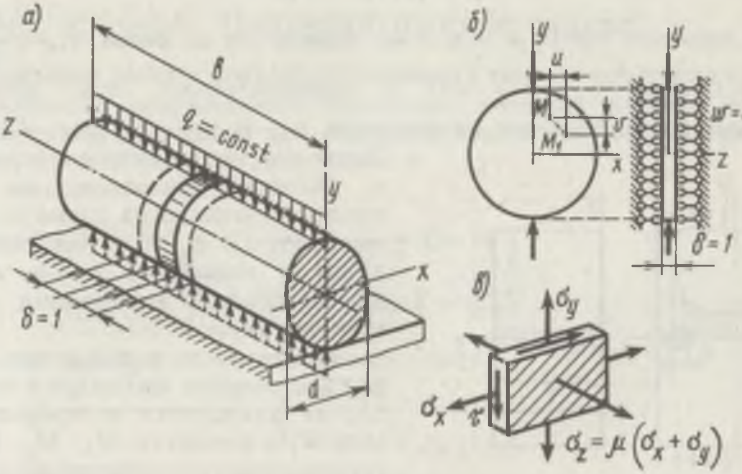


Рис. 4.2

Третья компонента w легко определяется при известных напряжениях σ_x и σ_y из соотношения $\varepsilon_z = \partial w/\partial z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)/E$. Отсюда, совместив плоскость xy со срединной плоскостью пластины и положив $w = 0$ при $z = 0$, получим $w = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)z/E$. Как видим, перемещения w по толщине пластины изменяются по линейному закону.

Рассмотрим другой случай двумерной задачи теории упругости называемый плоской деформацией.

На рис. 4.2 показано очень длинное цилиндрическое тело, равномерно загруженное на всей длине b. Теоретически полагаем $b \to \infty$, а практически $b \gg d$. Мысленно рассечем это тело на отдельные слои толщиной $\delta = 1$. Каждый слой находится в одинаковых условиях. Если бы эти слои испытывали плоское напряженное состояние, то в каждой точке слоя толщина изменилась бы на величину $\Delta\delta$ (4.1).

Но благодаря взаимодействию соседних слоев это невозможно, поэтому каждый слой деформируется в условиях (рис. 4.2, *б*), где слой как бы зажат между двумя абсолютно жесткими поверхностями, принудительно обеспечивающими условие неизменности толщины слоя $\Delta\delta = 0$.

Будем считать, что у торцов цилиндра обеспечиваются такие же условия. Следовательно, $w = 0$ и $\varepsilon_z = 0$. При этом перемещения во всех точках тела происходят только в параллельных плоскостях [на рис. 4.2, *а*, *б*, *в* это перемещения $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ в плоскостях, параллельных xy]. Это и есть случай плоской деформации тела.

По закону Гука имеем $\varepsilon_z = (\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y)/E = 0$, откуда найдем

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{4.2}$$

Ввиду того что $w = 0$, а u и v не зависят от z, имеем $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и $\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ и, следовательно, при плоской деформации касательные напряжения $\tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ (рис. 4.2, *в*). Хотя это напряженное состояние и является объемным, но оно вполне определяется тремя напряжениями σ_x, σ_y, и τ, зависящими лишь от координат $x - y$, и задача о плоской деформации остается двумерной.

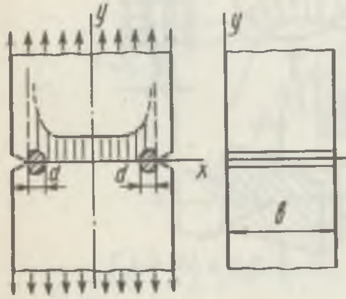


Рис. 4.3

Заметим, что напряжения σ_z в каждом сечении цилиндра в общем случае приводятся к продольной силе N_z и моментам M_x, M_y. Если торцы цилиндра в действительности свободны и эти усилия возникнуть там не могут, то приближенно к решению в виде описанной плоской деформации надо добавить элементарное решение о центральном растяжении-сжатии стержня силой $-N_z$ и чистом изгибе моментами $-M_x$ и $-M_y$. Указанные усилия прикладываются к торцам со знаками, противоположными по отношению к N_z, M_x, M_y, так, чтобы главный вектор и главный момент усилий на торцах были равны нулю. В таком приближенном решении на торцах остается некоторая система напряжений $\Delta\sigma_z \neq 0$, но она будет самоуравновешена и влияние ее будет сказываться по принципу Сен-Венана лишь на малой длине ($\sim d$). На этой длине в действительности будет сложное напряженное состояние, найти которое можно только решая трехмерную задачу.

Приведем еще один пример. На рис. 4.3 показан растягиваемый образец, имеющий два острых надреза. В этом сечении эпюра напряжений σ_y имеет зону резкого увеличения этих напряжений у острия надреза (концентрация напряжений). Концентрация напряжений возникает в небольшой цилиндрической зоне с характерным размером сечения d. По ширине образца (вдоль оси z) будет иметь место плоская деформация на длине $\sim (b - 2d)$, а у поверхности образца на длине $\sim d$ возникает сложное напряженное состояние. Обычно толщина образца $b \gg d$, поэтому можно считать, что концентрация напряжений у острия надреза развивается в основном в условиях плоской деформации. Это важно учитывать при оценке результатов испытаний таких образцов, поскольку пластические свойства материала по-разному проявляются при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации, когда в точках этой зоны возникает объемное напряженное состояние (см. гл. 12).

§ 4.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Приведем сводку основных уравнений теории упругости сначала для плоского напряженного состояния, которую получим из соответствующих уравнений для объемной задачи (см. гл. 2), исключив из них производные по координате z.

Уравнения равновесия

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Условия равновесия на поверхности тела

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau = p_x; \\ l\tau + m\sigma_y = p_y, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

где $l = \cos(\widehat{x, \nu}) = \cos\alpha$; $m = \cos(\widehat{y, \nu}) = \sin\alpha$ (см. рис. 4.1,*а*).

Геометрические уравнения (Коши)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right| \tag{4.5}$$

Из шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана в плоской задаче остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{4.6}$$

Наконец, закон Гука для изотропного материала имеет следующий вид:

в прямой форме

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y);\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y);\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau;\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

в обратной форме

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y);\\ \tau &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Для плоской деформации все приведенные уравнения, кроме закона Гука, остаются в силе. Закон Гука записывается в несколько отличной форме ввиду наличия напряжения σ_z (4.2). Так, например, первая строка (4.7) получает вид $\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z)/E$. Подставив сюда значение σ_z по (4.2), получим $\varepsilon_x = [(1 - \mu^2)\sigma_x - \mu(1 + \mu)\sigma_y]/E$. Вынесем за скобки $(1 - \mu^2)$:

$$\varepsilon_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right).$$

Это выражение совершенно аналогично первой строке (4.7), но содержит новые условные константы упругости $\mu_1 = \mu/(1 - \mu)$ и $E_1 = E/(1 - \mu^2)$, причем легко проверить, что справедливо равенство $G = E_1/[2(1 + \mu_1)]$.

С учетом введенных условных констант упругости физические соотношения для плоской деформации примут тот же вид, что и (4.7) и (4.8). но в них надо заменить μ на μ_1 и E на E_1.

Таким образом, любое решение приведенных выше уравнений для плоского напряженного состояния может быть применено и для соответствующего случая плоской деформации после замены действительных констант упругости E и μ данного материала на условные E_1 и μ_1. Учитывая сказанное, в дальнейшем в данной главе будем подразумевать под плоской задачей случай плоского напряженного состояния.

Поскольку приводимые ниже решения для изотропного материала будут в ряде случаев обобщаться на случай ортотропного материала (см. § 2.5), приведем для последнего закона Гука в прямой форме [(см. (2.38)]

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x - c_{12}\sigma_y;\\ \varepsilon_y &= -c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y;\\ \gamma_{xy} &= c_{33}\tau,\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

где $c_{11} = \dfrac{1}{E_x}$; $c_{22} = \dfrac{1}{E_y}$; $c_{33} = G_{xy}$; $c_{12} = c_{21} = \dfrac{\mu_{xy}}{E_y} = \dfrac{\mu_{yx}}{E_x}$, и в обратной форме

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=d_{11}\varepsilon_x+d_{12}\varepsilon_y;\\ \sigma_y&=d_{21}\varepsilon_x+d_{22}\varepsilon_y;\\ \tau&=d_{33}\gamma_{xy};\end{aligned}\right\}\qquad(4.10)$$

где $d_{11}=\dfrac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$; $d_{22}=\dfrac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$; $d_3 = G_{xy}$; $d_{12} = d_{21} = \dfrac{\mu_{xy}E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}=\dfrac{\mu_{yx}E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$.

В случае плоской деформации вместо (4.2) для напряжений будем иметь

$$\sigma_z=\frac{\mu_{zx}E_z}{E_x}\sigma_x+\frac{\mu_{zy}E_z}{E_y}\sigma_y$$

и значения коэффициентов упругости в равенствах (4.9) будут

$$c_{11}=\frac{1-\mu_{xz}\mu_{zx}}{E_x};\ c_{22}=\frac{1-\mu_{yz}\mu_{zy}}{E_y};$$

$$c_{12}=c_{21}=\frac{\mu_{xy}+\mu_{xz}\mu_{zy}}{E_y}=\frac{\mu_{xy}}{E_y}+\frac{\mu_{xz}\mu_{yz}}{E_z}.$$

§ 4.3. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

Рассмотрим пластину с заданной поверхностной $\vec{p}^{\mathrm{T}} = [p_x,\ p_y]$ и объемной нагрузкой $\vec{g}^{\mathrm{T}} = [X,\ Y]$ (см. рис. 4.1). Выберем, согласно методу перемещений, в качестве основных неизвестных функций перемещений $u = u\ (x,\ y)$ и $v = v\ (x,\ y)$. Для их определения имеем два уравнения равновесия (4.3) в которых напряжения надо выразить через перемещения. Используя закон Гука в обратной форме, выразим в равенствах (4.8) деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} через перемещения с помощью геометрических уравнений Коши (4.5). В результате получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right);\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ \tau&=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).\end{aligned}\right|\qquad(4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.3), окончательно получим разрешающие уравнения плоской задачи в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned}E_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(G+\mu E_1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+X=0;\\ E_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(G+\mu E_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+Y=0,\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)$$

где $E_1 = E/(1 - \mu^2)$; $G = E/(2\ (1 + \mu)]$.

Граничными условиями на контуре пластины являются условия (4.4), в которых вместо σ_x, σ_y и τ следует подставлять выражения (4.11).

Аналогичные преобразования для ортотропного материала, подчиняющегося закону Гука (4.10), приводят вместо (4.12) к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} d_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(d_{12}+d_{33})\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+X=0;\\ d_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d_{33}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(d_{12}+d_{33})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+Y=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь решение в напряжениях для изотропного материала. В этом случае за основные неизвестные функции принимаются три напряжения: $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$; $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ и $\tau = \tau(x, y)$, а в качестве разрешающих уравнений имеем два уравнения равновесия (4.3) и уравнение совместности деформаций (4.6):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}+X=0;\\ &\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0;\\ &\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

где деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} надо выразить через напряжения. Примем в дальнейшем, что объемные силы $X = \mathrm{const}$ и $Y = \mathrm{const}$. Тогда, дифференцируя первую строку (4.14) по x, вторую — по y и складывая их, найдем, что

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right). \tag{4.15}$$

Подставляя теперь в последнее уравнение (4.14) выражения деформаций через напряжения (4.7) с использованием (4.15), приведем его к виду

$$\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}\right]=0. \tag{4.16}$$

Дифференциальный оператор $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = \nabla^2$ называется *гармоническим оператором Лапласа*. Используя это сокращенное обозначение, уравнения (4.14) окончательно запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}+X=0;\\ &\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0;\\ &\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Последняя строка здесь представляет уравнение совместности деформаций плоской задачи, выраженное в напряжениях, и называется *уравнением Леви*.

Обратим внимание на важную особенность системы (4.17): в нее не входят константы упругости E и μ. Следовательно, при заданных на поверхности пластинки нагрузках p_x, p_y (4.4) эти уравнения могут быть решены и дадут напряжения, не зависящие от упругих свойств изотропного линейно-упругого материала. Это положение обычно называют *теоремой Леви.* Она служит теоретическим основанием, позволяющим напряжения, найденные на моделях, изготовленных из какого-либо материала, переносить на геометрически подобные и аналогично загруженные детали конструкций, выполненные из другого материала. Например, в методе фотоупругости используются прозрачные модели, а результаты экспериментальных исследований переносят на стальные, бетонные и т. п. элементы конструкций. Подчеркнем, что строго это положение справедливо только для элементов с заданной поверхностной нагрузкой (а не перемещениями) и, как показывает более подробный анализ, только для односвязных тел, т. е. тел без отверстий. В телах с отверстиями для применимости теоремы Леви надо, чтобы выполнялось дополнительное условие, а именно: на каждом из замкнутых контуров тела и отверстий главные векторы и момент поверхностной нагрузки должны быть равны нулю.

§ 4.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Решение плоской задачи в напряжениях с помощью уравнений (4.17) можно существенно упростить, если перейти от трех неизвестных функций σ_x, σ_y, τ к одной функции $\varphi = \varphi(x, y)$, называемой *функцией напряжений*. Пусть интенсивность объемных нагрузок будет постоянна: $X = \text{const}$; $Y = \text{const}$. Предположим, что существует такая функция φ, что через нее напряжения выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \\ \tau &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - Xy - Yx. \end{aligned}\right| \qquad (4.18)$$

Легко проверить, что подстановка (4.18) в первые два уравнения (4.17) (т. е. в уравнения равновесия) дает тождество при любой функции φ. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right) - X + X = 0.$$

Таким образом, задавая всевозможные функции φ, можно с помощью (4.18) получать соответствующие «равновесные» поля напряжений в теле, т. е. поля, удовлетворяющие уравнениям равновесия. Это было подмечено английским математиком и астрономом Джорджем Биддэлл Эйри в 1862 г. (для случая $X = Y = 0$). Поэтому функцию φ называют также *функцией Эйри.*

Из всех равновесных полей истинное поле напряжений должно удовлетворять также и третьему уравнению системы (4.17)— уравнению совместности деформаций. Подставив (4.18) в это уравнение, получим

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=\nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=0,$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0.$$

Поскольку выражение, стоящее в скобках представляет собой гармонический оператор ∇^2, полученное равенство сокращенно можно записать как дважды примененный оператор ∇^2 а именно

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0. \tag{4.19}$$

Раскрыв (4.19) более подробно, получим

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0. \tag{4.20}$$

Уравнение (4.19) или, что то же, (4.20) называется *бигармоническим уравнением плоской задачи*. Оно представляет собой условие совместности деформаций, выраженное через функцию напряжений φ.

В результате решение плоской задачи в напряжениях свелось к необходимости решать единственное уравнение (4.19). После определения функции φ переход к самим напряжениям выполняется по формулам (4.18).

Заметим, что если объемные нагрузки отсутствуют, то формулы (4.18) упрощаются:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\;;\;\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\;;\;\tau=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\;. \tag{4.21}$$

Если X и Y являются функциями координат, то вместо (4.18) можно принять

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\int\limits_0^x X\,\mathrm{d}x;\;\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\int\limits_0^y Y\,\mathrm{d}y;\;\tau=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\;. \tag{4.22}$$

При этом вместо (4.19) для определения φ получится уравнение

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=-A\,(\partial X/\partial x+\partial Y/\partial y)+\nabla^2\left(\int\limits_0^x X\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^y Y\,\mathrm{d}y\right),$$

где для плоского напряженного состояния $A = 1+\mu$, а для плоской деформации $A = 1/(1-\mu)$.

Сформулируем теперь условия на границе пластины, выразив их через функцию напряжений $\varphi(x, y)$. Считаем заданными в каждой точке границы интенсивность поверхностной нагрузки по нормали p_n и по касательной p_s (рис. 4.4, *а*), а $X = Y = 0$.

В произвольной точке пластины вычислим производную по направлению s:

$$\partial\varphi/\partial s = (\partial\varphi/\partial x)(\partial x/\partial s) + (\partial\varphi/\partial y)(\partial y/\partial s) =$$
$$= (\partial\varphi/\partial x)\sin\alpha - (\partial\varphi/\partial y)\cos\alpha.$$

Повторив эти операции, найдем вторую производную:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\sin^2\alpha + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cos^2\alpha - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\sin 2\alpha.$$

Подставив сюда выражения производных (4.21) и используя известную из курса сопротивления материалов формулу для напряжений σ_α на наклонной площадке, получим равенство

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \sigma_y\sin^2\alpha + \sigma_x\cos^2\alpha + \tau\sin 2\alpha = \sigma_\alpha = \sigma_n.$$

Рассуждая аналогично, установим, что в любой точке пластины для любых взаимно перпендикулярных направлений n, s справедливы

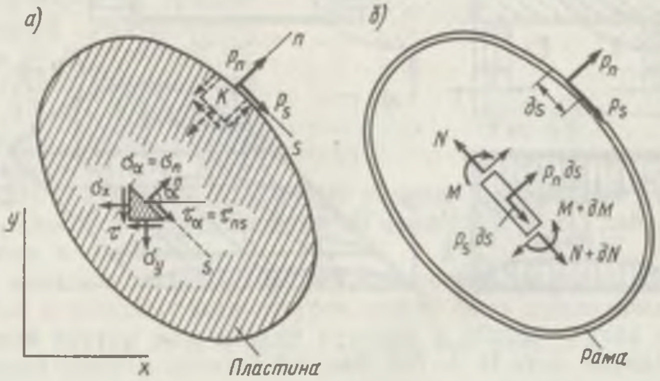


Рис. 4.4

выражения для напряжений по этим направлениям через функцию φ, аналогичные (4.21):

$$\sigma_n = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\,;\ \ \sigma_s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\,;\ \ \tau_{ns} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\,\partial n}\,.$$

Учитывая это, для точки K контура граничные условия можно записать в виде $\sigma_n = p_n$ и $\tau_{ns} = p_s$, или

$$\frac{\partial^2\varphi_K}{\partial s^2} = p_n;\quad -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_K = p_s, \tag{4.23}$$

где индекс K подчеркивает, что φ и производная по нормали $(\partial\varphi/\partial n)$ берутся в соответствующей точке контура.

Равенствам (4.23) можно придать наглядный механический смысл, если использовать так называемую «рамную» аналогию. Рассмотрим раму, по очертанию совпадающую с контуром пластины и загруженную той же нагрузкой p_n, p_s, что и пластина (рис. 4.4, *б*). Условия равновесия элемента ∂s такой рамы дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = p_n; \quad -\frac{\partial N}{\partial s} = p_s. \tag{4.24}$$

Сравнив (4.23) и (4.24), приходим к выводу, что контурные условия пластины (4.23) будут удовлетворены, если в качестве функций φ и производных по нормали $(\partial\varphi/\partial n)$ на ее контуре принять соответственно выражения изгибающих моментов M и продольных сил N в раме, т. е.

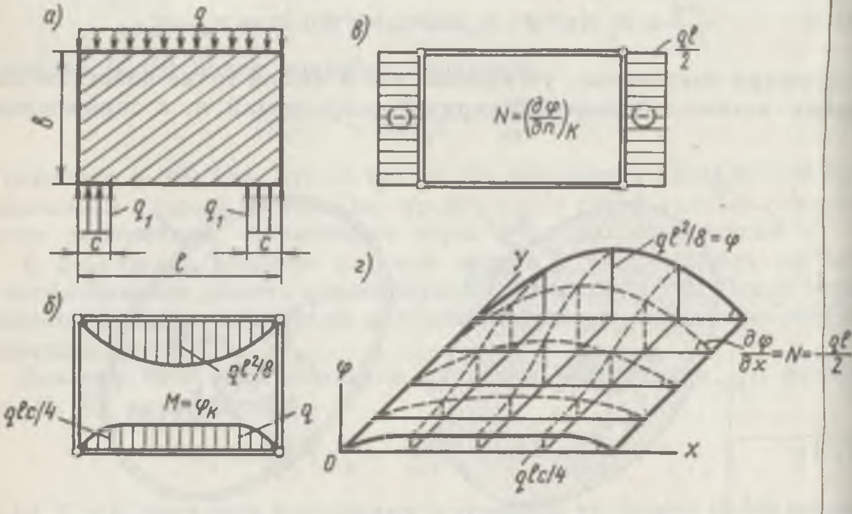


Рис. 4.5

$$\varphi_K = M_K; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_K = N_K. \tag{4.25}$$

Равенства (4.25) и выражают упомянутую рамную аналогию.

Пусть прямоугольная пластина толщиной $\delta = 1$ загружена равномерно распределенной нагрузкой q и q_1 (рис. 4.5, *а*). На рис. 4.5, *б* показана соответствующая рама, у которой для простоты вычислений врезаны шарниры в угловых точках. Наличие шарниров или разрезов изменяет окончательные эпюры M и N в раме, но не нарушает дифференциальных зависимостей (4.24) и, следовательно, не влияет на искомое напряженное состояние пластины. В раму можно вводить любые разрезы и шарниры, лишь бы полученная схема рамы была способна уравновесить заданную контурную нагрузку.

На рис. 4.5, *б*, *в* показаны эпюры изгибающих моментов M и продольных сил N в раме. Функцию напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$ будем рассматривать как уравнение поверхности с аппликатами φ, построенной над областью данной пластины. Согласно равенствам (4.25), эпюры M и N дают ординаты поверхности $\varphi(x, y)$ на контуре и ее крутизну, т. е. тангенсы углов наклона касательных по нормали к контуру. На рис. 4.5, *г* ординаты φ_K на контуре показаны сплошными линиями. Направления касательных отмечены штриховыми линиями: вдоль линий $y = 0$ и $y = b$ они горизонтальны, так как $N = 0$, а вдоль линий $x = 0$ и $x = a$ крутизна касательных постоянна: $\partial\varphi/\partial n = N = -ql/2$.

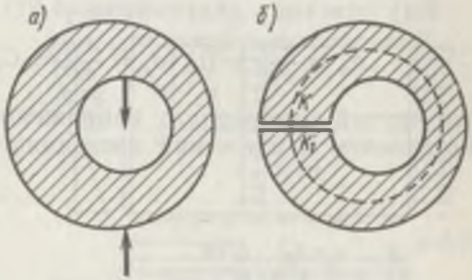


Рис. 4.6

Таким образом, рамная аналогия при заданной нагрузке на контуре пластины дает информацию об ординатах искомой поверхности. Ординаты во внутренней области пластины (показанные на рис. 4.5, *г* пунктиром) определяются путем решения бигармонического уравнения (4.20). Указанные граничные условия определяют единственную поверхность $\varphi(x, y)$, которая по формулам (4.21) дает искомые напряжения в пластине.

Пусть пластина имеет отверстие (неодносвязное тело), тогда в общем случае к каждому из контуров может быть приложена нагрузка, главный вектор или момент которой в общем случае не равны нулю. Такой пример показан на рис. 4.6, *а*. В этом случае использование функции φ усложняется, так как описанных уравнений и граничных условий оказывается недостаточно для решения задачи и необходимо использовать дополнительные условия однозначности перемещений (отсутствие разрывов в точках K и K_1 на рис. 4.6, *б*), о чем уже говорилось в § 2.4. Если же на каждом из контуров неодносвязной пластины приложенная нагрузка самоуравновешена, то использование функции φ и рамной аналогии осуществляется без каких-либо особенностей. Именно в этом случае справедлива теорема М. Леви (см. § 4.3).

Заметим, что если на контуре пластины или его части задана не нагрузка, а фиксированы перемещения u и v, то формулировка граничных условий с помощью функции напряжений φ также значительно усложняется.

§ 4.5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Отдельные задачи теории упругости можно решить, задаваясь некоторым аналитическим выражением для функции φ, содержащим неизвестные коэффициенты (или даже функции). Затем составляются выражения для напряжений и подбираются неизвестные коэффициенты (или функции) так, чтобы удовлетворялись условия на поверхности тела.

Зададим, например, φ в виде многочлена второй степени:

$$\varphi = \frac{1}{2} C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{1}{2} C_3 x^2. \qquad (4.26)$$

Ему отвечают напряжения (4.21)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C_1; \; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C_3; \; \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = -C_2. \qquad (4.27)$$

Это случай однородного напряженного состояния тела, когда все компоненты напряжений постоянны (рис. 4.7). На гранях поверх-

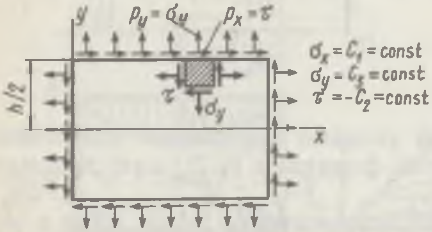


Рис. 4.7

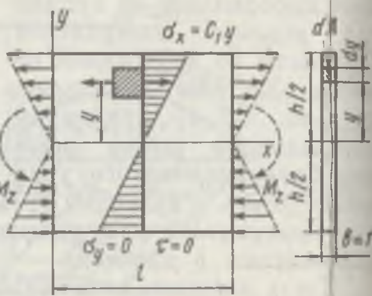


Рис. 4.8

ности тела, параллельных координатным осям, поверхностная нагрузка совпадает с соответствующими компонентами напряжений в этой точке. Так, на грани $y = h/2$ (рис. 4.7) видно, что $p_y = \sigma_y$, $p_x = \tau$. Следовательно, функция φ (4.26) соответствует случаю сочетания равномерного растяжения (сжатия) в перпендикулярных направлениях и чистого сдвига пластины.

Функция φ (4.26) удовлетворяет бигармоническому уравнению (4.20) при любых коэффициентах C_1, C_2, C_3, и, значит, при напряжениях (4.27) в изотропном теле автоматически выполняется совместность деформаций. Таким же свойством обладает и многочлен третьей степени

$$\varphi = \frac{1}{6} C_1 y^3 + \frac{1}{2} C_2 x y^2 + \frac{1}{2} C_3 y x^2 + \frac{1}{6} C_4 x^3 \qquad (4.28)$$

и соответствующие ему напряжения (4.21)

$$\sigma_x = C_1 y + C_2 x; \; \sigma_y = C_3 y + C_4 x; \; \tau = -C_2 y - C_3 x. \qquad (4.29)$$

Например, случаю $C_1 \neq 0$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ отвечает напряженное состояние пластины (рис. 4.8). Оно отвечает чистому изгибу моментом M_z. Связь между M_z и C_1 легко установить из равенства

$$M_z = \int\limits_A \sigma_x \, dA y = C_1 \int\limits_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = C_1 \frac{h^3}{12} = C_1 J_z.$$

Следовательно, $C_1 = M_z/J_z$ и $\sigma_x = M_z y/J_z$. Как видим, формула, полученная в сопротивлении материалов для чистого изгиба, является точным решением задачи теории упругости. Надо только подчеркнуть, что это справедливо, если на торцах пластины $x = 0$ и $x = l$ нагрузка p_x, реализующая моменты M_z, распределена строго по закону $p_x = \sigma_x = C_1 y$. В противном случае формула сопротивления материалов будет достаточно точна лишь на некотором удалении от указанных торцов. Это следует из принципа Сен-Венана.

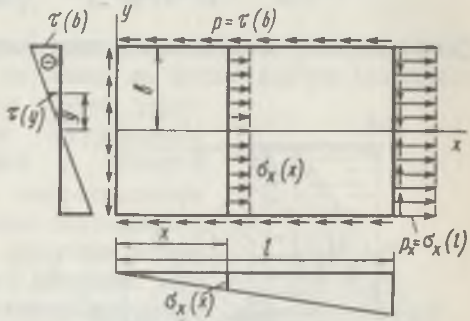


Рис. 4.9

Формулы (4.29) показывают, что в изотропной пластине линейное распределение нормальных и касательных напряжений обеспечивает совместность деформаций и при надлежащем загружении на поверхности тела может служить точным решением теории упругости. При этом напряжения σ_x, σ_y и τ взаимосвязаны. Если коэффициенты C_1, C_2 и C_3, C_4 для нормальных напряжений задавать произвольно, то касательные напряжения будут зависеть от закона изменения σ_x и σ_y (они зависят от коэффициентов C_2 и C_3). Так, на рис. 4.9 показано распределение напряжений при $C_2 \neq 0$; $C_1 = C_3 = C_4 = 0$: $\sigma_x = C_2 x$; $\sigma_y = 0$; $\tau = -C_2 y$.

Рассмотрим более сложную задачу о действии гидростатического давления на плотину треугольного поперечного сечения (рис. 4.10). Размер рассматриваемого участка плотины, перпендикулярный чертежу, считаем равным единице, а ее высоту в направлении оси y — неограниченной. Сначала учтем лишь давление воды $q = \gamma_0 y$, собственный вес плотины учитывать не будем. Примем функцию φ по (4.28) и напряжения по (4.29). Определению подлежат четыре коэффициента $C_1, \ldots, C_4$; для этого имеем по два условия в точках поверхности K_1 и K_2. Для точки K_1 при $x_{K_1} = 0$ имеем

$$\tau_{K_1} = 0 \to -C_2 y = 0 \to C_2 = 0; \qquad \text{(а)}$$

$$(\sigma_x)_{K_1} = -q \to C_1 y = -\gamma_0 y \to C_1 = -\gamma_0. \qquad \text{(б)}$$

Нормаль ν к поверхности в точке K_2 не параллельна осям координат, поэтому для нее надо воспользоваться общими условиями (4.4). При $l = \cos\alpha$, $m = -\sin\alpha$ и $p_x = p_y = 0$ они запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x)_{K_2}\cos\alpha - \tau_{K_2}\sin\alpha = 0; \\ \tau_{K_2}\cos\alpha - (\sigma_y)_{K_2}\sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Подставив сюда σ_x, σ_y и τ по формулам (4.29), в которых для точки K_2 надо положить $x_{K2} = y \operatorname{tg}\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} (C_1 y + C_2 y \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha + (C_2 y + C_3 y \operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha = 0; \\ -(C_2 y + C_3 y \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha - (C_3 y + C_4 y \operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Сократив на y и подставив сюда уже известные величины $C_2 = 0$ и

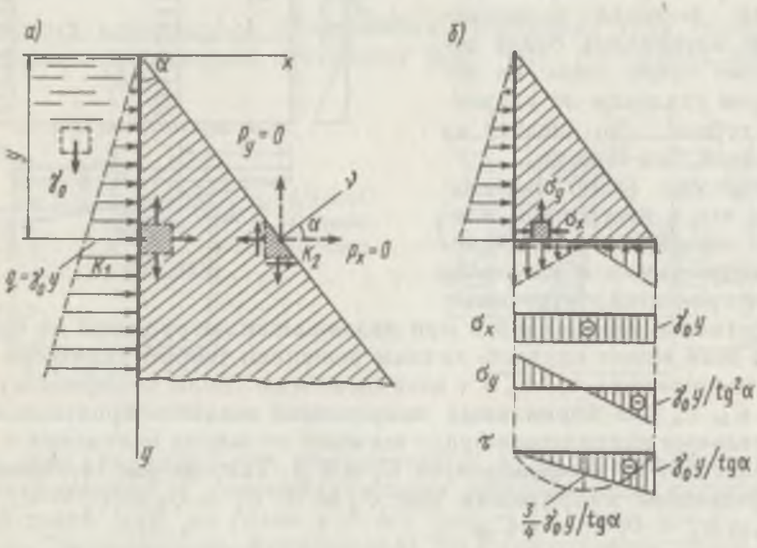


Рис. 4.10

$C_1 = -\gamma_0$, из первой строки найдем $C_3 = \gamma_0/\operatorname{tg}^2\alpha$ и затем из второй строки $C_4 = -2\gamma_0/\operatorname{tg}^3\alpha$.

Окончательно для напряжений имеем выражения

$$\sigma_x = -\gamma_0 y; \;\; \sigma_y = \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg}^2\alpha}\, y - \frac{2\gamma_0}{\operatorname{tg}^3\alpha}\, x; \;\; \tau = -\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg}^3\alpha}\, x. \qquad (д)$$

На рис. 4.10, *б* показаны эпюры этих напряжений в сечении $y = \text{const}$. Интересно сопоставить их с результатами, которые могли бы быть получены по обычным формулам сопротивления материалов.

Прежде всего найдем σ_y в точках K_1 и K_2, как в прямоугольном сечении размером $b \times h = 1 \times x_{K2}$:

$$\sigma_y = \pm \frac{M}{W} = \pm \left(\frac{qy^2}{2} \frac{y}{3} \right) \Big/ \left(\frac{1 \cdot x^2_{K_2}}{6} \right) = \pm \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha} y.$$

Они точно совпадают с результатом решения теории упругости (д).

Касательные напряжения по решению сопротивления материалов в указанном сечении изменяются по закону квадратной параболы (на рис. 4.10, *б* она показана пунктиром) с максимальной ординатой в середине

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{1x_{K_2}} = \frac{3}{4} \frac{\gamma_0}{\operatorname{tg} \alpha} y.$$

Касательные напряжения существенно различаются по максимуму этих напряжений (на 25 %) и особенно по форме эпюры (парабола вместо треугольника в решении теории упругости). Заметим, что формула Журавского $\tau = QS^{\text{отс}}/(bJ)$, в соответствии с которой написано выражение $\tau_{\max}$ в сопротивлении материалов, выводилась для балок постоянного сечения, а клин воспринимает давление воды, работая как балка переменного сечения. Это и является основной причиной отмеченного расхождения. Наконец, напряжения σ_x в сопротивлении материалов вообще не учитываются в силу известной гипотезы о ненадавливании волокон балки в поперечном направлении, т. е. принимается $\sigma_x \approx 0$.

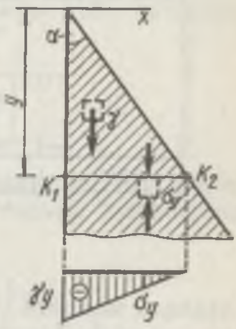


Рис. 4.11

В заключение рассмотрим ту же плотину при действии собственного веса, принимая вес единицы объема материала γ (рис. 4.11). Отличие от рассматриваемого решения состоит в том, что касательные напряжения должны определяться по формулам (4.18) с учетом объемных сил. В данном случае $X = 0$; $Y = \gamma$ и вместо выражения для τ(4.29) будем иметь

$$\tau = -C_2 y - C_3 x - \gamma x.$$

Далее, используя тот же путь решения, что и выше, получим, что от собственного веса плотины в сечении $y = \text{const}$ возникают лишь напряжения $\sigma_y = -\gamma y + \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \alpha} x$, а $\sigma_x = \tau = 0$ (рис. 4.11). При одновременном действии давления воды и собственного веса напряжения, показанные на рис. 4.10 и 4.11, должны быть алгебраически сложены. Суммарные напряжения будут

$$\sigma_y = \left(\frac{\gamma_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \gamma \right) y - \left(\frac{2\gamma_0}{\operatorname{tg}^3 \alpha} - \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \alpha} \right) x.$$

§ 4.6. СМЯГЧЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для получения точного решения задачи теории упругости надо найти такие функции, которые помимо удовлетворения дифференциальным уравнениям задачи, например бигармоническому уравнению (4.20), так же строго удовлетворяли бы условиям равновесия в каждой точке поверхности тела. Часто это сделать не удается. Тогда вместо строгого выполнения граничного условия в каждой точке поверхности составляют приближенное условие в отношении главного вектора и главного момента сил, возникающих на определенной части поверхности тела. Например, если известно, что на данной грани пластины напряжения отсутствуют, то вместо требования о равенстве нулю этих напряжений в каждой точке составляют более просто достижимое условие равенства нулю их главного вектора и

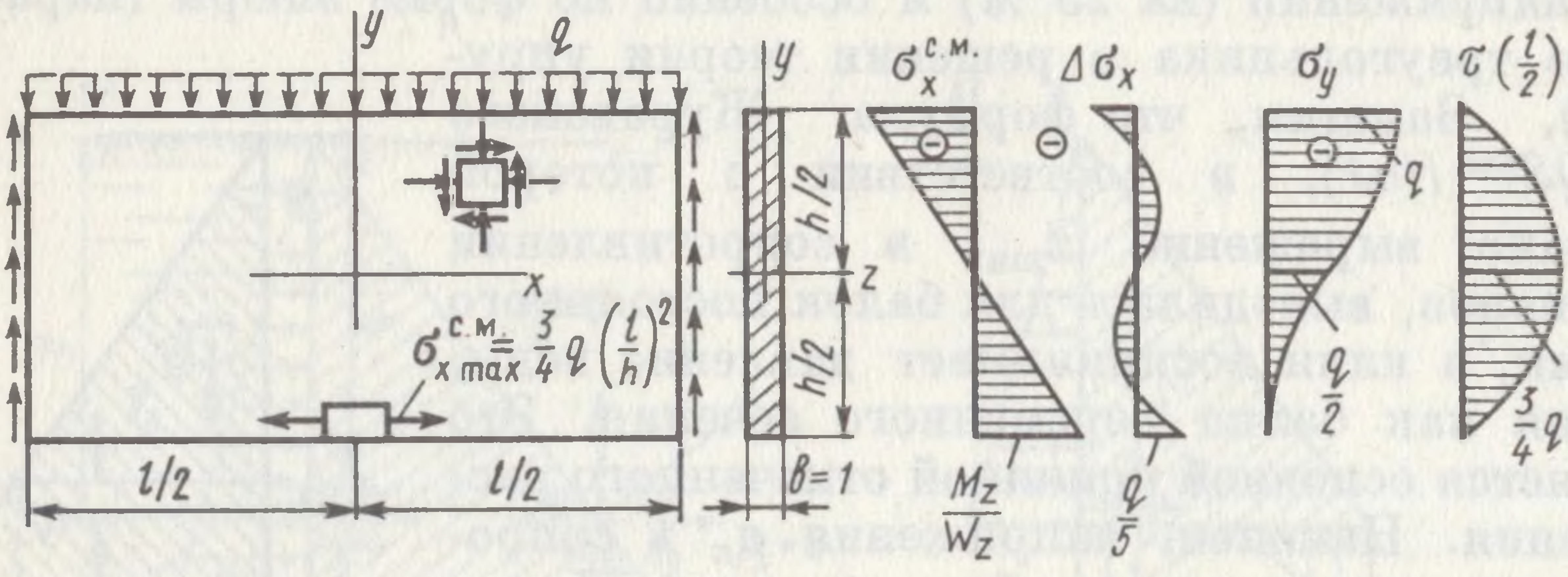


Рис. 4.12

главного момента. Такое упрощение и называют *смягчением граничных условий*. Вследствие указанного упрощения действительная система напряжений на рассматриваемой грани тела заменяется другой системой, статически эквивалентной первой. В соответствии с принципом Сен-Венана эта замена существенно скажется на напряжениях лишь в окрестности рассматриваемого участка поверхности тела, а в достаточном удалении от него решение практически не будет зависеть от упомянутой замены поверхностных нагрузок.

Рассмотрим простой пример. Найдем напряжения в балке-полосе от действия равномерно распределенной нагрузки q (рис. 4.12). Будем считать, что на концах балка уравновешивается только касательными усилиями. Зададим функцию напряжений φ в виде многочлена 5-й степени такого вида:

$$\varphi = C_1 x^2 + C_2 y x^2 + C_3 y^3 + C_4 y^5 + C_5 x^2 y^3. \qquad \text{(a)}$$

Она уже не удовлетворяет бигармоническому уравнению (4.20) при произвольных коэффициентах C_4 и C_5. Совместность деформаций будет обеспечена лишь при определенном их соотношении, которое найдем, подставив (а) в (4.20), что дает $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 C_4 y + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 y = 0$, откуда получаем $C_5 = -5C_4$. С учетом найденного соотношения получим напряжения по формулам (4.21)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 6C_3 y + C_4(20y^3 - 30x^2 y);\\ \sigma_y &= 2C_1 + 2C_2 y - 10C_4 y^3;\\ \tau &= -2C_2 x + 30C_4 xy^2.\end{aligned}\right\}\qquad (б)$$

Из условий на горизонтальных гранях пластины найдем:

$$\left.\begin{aligned}&\text{при } y=\pm h/2 \quad \tau = 0 \to C_2 - {}^5/_4 h^2 C_4 = 0;\\ &\text{при } y = h/2 \qquad \sigma_y = -q \to 2C_1 + C_2 h - {}^5/_4 C_4 h^3 = -q;\\ &\text{при } y = -h/2 \quad \sigma_y = 0 \to 2C_1 - C_2 h + {}^5/_4 C_4 h^3 = 0.\end{aligned}\right\}\qquad (в)$$

Из уравнений (в) получим $C_1 = -q/4$, $C_2 = -3q/(4h)$, $C_4 = -q/(5h^3)$.

Осталось найти C_3, для чего используем условие на вертикальных торцевых гранях. Так как при $x = \pm l/2$ в каждой точке торцевого сечения (при произвольном y) выражение (б) для σ_x не может обеспечить равенства $\sigma_x = 0$, то воспользуемся приемом смягчения граничных условий и потребуем, чтобы момент сил в этих сечениях относительно оси z был равен нулю:

$$M_z = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y \, \mathrm{d}y = 2C_3 y^3 + 4C_4 y^5 - 2{,}5 l^2 C_4 y^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0.$$

Подставив в этом равенстве пределы интегрирования и учтя значение C_4, найдем $C_3 = q/(10h) - ql^2/(4h^3)$. Окончательно выражения для напряжений в балке примут вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\left(\frac{ql^2}{8} - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{12y}{h^3} + \left(\frac{3}{5}\,\frac{y}{h} - 4\,\frac{y^3}{h^3}\right) q =\\ &= \frac{M_z y}{J_z} + \Delta\sigma_x = \sigma_x^{\text{с.м}} + \Delta\sigma_x;\\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} - \frac{3q}{2h}\, y + \frac{2qy^3}{h^3};\\ \tau &= \left(\frac{3q}{2h} - \frac{6qy^2}{h^3}\right) x.\end{aligned}\right\}\qquad (г)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 4.12.

Напряжения σ_x состоят из двух частей: $\sigma_x^{\text{с. м}}$ и $\Delta\sigma_x$. Первая часть — это напряжения, даваемые формулой сопротивления материалов. Вторая часть — $\Delta\sigma_x$ — самоуравновешенная система нормальных напряжений, возникающая в сечениях балки в силу совместности деформаций при наличии напряжений $\sigma_y \neq 0$. Напомним, что в сопротивлении материалов напряжениями σ_y пренебрегали. Напряжения $\Delta\sigma_x$ невелики по сравнению с $\sigma_x^{\text{с. м}}$ для $l \gg h$. Так, для $l = 10h$ $\sigma_{x\,\max}^{\text{с. м}} = 75\, q$, а $\Delta\sigma_{x\,\max} = 0{,}2\, q$. Касательные напряжения по формулам (г) совпадают с получаемыми по формуле сопротивления материалов.

Выражения (г) являются точным решением теории упругости для случая, когда на торцах балки $x = \pm l/2$ приложены напряжения τ, распределенные по закону квадратной параболы (г), и напряжения $\Delta\sigma_x$ (рис. 4.13, *а*). В действительности у мест опирания балки реактивные усилия r обычно приложены по опорной площадке AB (рис. 4.13, *б*). Поэтому в объеме балки, примыкающем к торцу (он ориентировочно заштрихован на рис. 413, *б*), формулы (г) будут не справедливы.

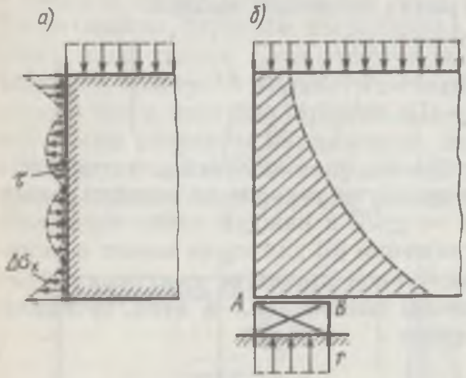


Рис. 4.13

§ 4.7. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ОДИНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ (РЕШЕНИЕ ФАЙЛОНА)

Граничные условия. Определение функции напряжений. Рассмотрим напряженное состояние пластины $ABCD$, входящей в состав балочной конструкции типа ростверка (рис. 4.14). На торцах она присоединена к опорным диафрагмам, а на продольных кромках AC и BD может быть загружена некоторой нагрузкой p_x и p_y. Решение

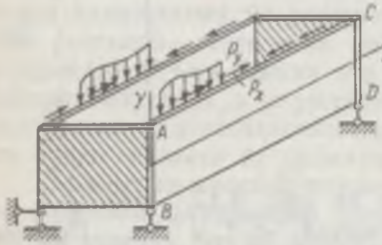


Рис. 4.14

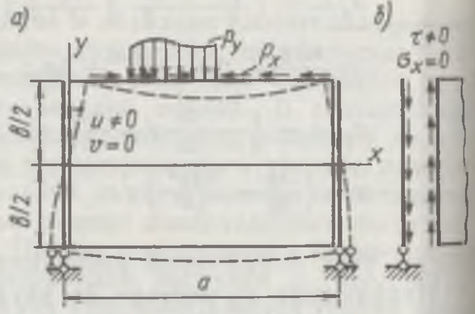


Рис. 4.15

этой задачи можно получить сравнительно просто в тригонометрических рядах, если сделать определенные допущения о свойствах опорных диафрагм. Обычно эти элементы конструкции обладают большой жесткостью (малой деформативностью) в плоскости самой диафрагмы и несравненно меньшей жесткостью в отношении перемещений из плоскости диафрагмы. Допущение будет состоять в том, что опорные диафрагмы будем считать абсолютно жесткими в плоскости и абсолютно гибкими из плоскости диафрагмы. Такие диафрагмы называют идеальными.

На рис. 4.15, *а* показана прямоугольная пластина, прикрепленная на торцах к идеальным диафрагмам. В силу отмеченных свойств идеальной диафрагмы она может воспринимать лишь касательные усилия в виде потока напряжений τ, а усилия, перпендикулярные диафрагме, реализуемые напряжениями σ_x, должны быть равны нулю (рис. 4.15, *б*). Кроме того, так как диафрагма жесткая в своей плоскости, то перемещения $v = 0$ и на торцах могут иметь место только перемещения u.

Итак, имеем следующие граничные условия на торцах рассматриваемой пластины:

при $x = 0,\ a$

$$\sigma_x = 0;\ \tau \neq 0;\ v = 0;\ u \neq 0. \tag{4.30}$$

Заметим, что так как при $x = 0,\ a$ деформация $\varepsilon_y = \partial v/\partial y = 0$, то из закона Гука $\varepsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E$ и условия $\sigma_x = 0$ следует равенство $\sigma_y = 0$. Поэтому в точках примыкания к идеальным диафрагмам будет иметь место напряженное состояние чистого сдвига.

Для рассматриваемой пластины зададим функцию напряжений в форме бесконечного ряда синусов, предложенной Файлоном:

$$\varphi = \sum_{m=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{4.31}$$

где $Y_m = Y_m\,(y)$ — неизвестные функции, зависящие только от координаты y. Они могут быть найдены из условия совместности деформаций, выражаемого бигармоническим уравнением (4.20). Рассмотрим один член ряда (4.31) произвольного номера m

$$\varphi_m = Y_m \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{4.32}$$

и подставим (4.32) в уравнение (4.20). Вычисления дают

$$\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\varphi_m}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi_m}{\partial y^4} = \Big[\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^4 Y_m - $$
$$-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y''_m + Y^{\mathrm{IV}}\Big]\sin\,\frac{m\pi x}{a} = 0, \tag{4.33}$$

где штрихами обозначены производные функции Y_m по координате y, например $Y''_m = \mathrm{d}^2Y_m/\mathrm{d}y^2$. Так как для произвольного x значении $\sin\,(m\pi x/a) \neq 0$, то из (4.33) получаем равенство

$$Y_m^{\mathrm{IV}} - 2\lambda^2 Y''_m + \lambda^4 Y_m = 0, \tag{4.34}$$

представляющее собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, общий интеграл которого даст неизвестную функцию Y_m. Здесь $\lambda = m\pi/a$.

Зададим Y_m в виде $Y_m = Ce^{ry}$ и подставим это выражение в (4.34). В результате получаем характеристическое уравнение относительно r:

$$r^4 - 2\lambda^2 r^2 + \lambda^4 = 0.$$

Его решение дает четыре корня: $r_{1,2} = \lambda$ и $r_{3,4} = -\lambda$. Поскольку корни кратные, общий интеграл уравнения (4.34) будет состоять из четырех слагаемых вида

$$Y_m = C_1^* e^{\lambda y} + C_2^* \lambda y e^{\lambda y} + C_3^* e^{-\lambda y} + C_4^* \lambda y e^{-\lambda y}. \tag{4.35}$$

Более удобно ввести новые постоянные, подставив в (4.35) $C_{1,3}^* = (C_1 \pm C_3)/2$ и $C_{2,4}^* = (C_2 \pm C_4)/2$. Выражение для Y_m окончательно запишется так:

$$Y_m = C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + C_3 \operatorname{sh} \lambda y + C_4 \lambda y \operatorname{ch} \lambda y, \tag{4.36}$$

где через $\operatorname{sh} \lambda y$ и $\operatorname{ch} \lambda y$ обозначены функции гиперболического синуса и косинуса

$$\operatorname{sh} \lambda y = \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2};$$

$$\operatorname{ch} \lambda y = \frac{e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}}{2}.$$

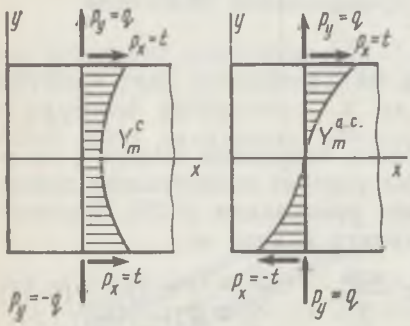


Рис. 4.16

Обратим внимание на то, что первые и последние два слагаемых (4.36)

$$Y_m^c = C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y; \tag{4.37}$$

$$Y_m^{ac} = C_3 \operatorname{sh} \lambda y + C_4 \lambda y \operatorname{ch} \lambda y \tag{4.38}$$

составляют симметричную и антисимметричную части решения. По отношению к оси x графики функций Y_m^c и Y_m^{ac} имеют характерный вид, изображенный на рис. 4.16. Как это следует из дальнейшего, эти функции отвечают загружениям продольных кромок пластины, показанным на том же рисунке, вызывающим симметричную и антисимметричную деформации пластины.

Для окончательного определения функции напряжений φ_m по (4.32) надо найти произвольные постоянные $C_1 \ldots C_4$, которые определяются из условий на продольных кромках пластины. Предварительно составим формулы для напряжений и перемещений в пластине, выраженные через функции Y_m.

Напряжения и перемещения в пластине. Примем объемные нагрузки X и Y равными нулю. Подставив (4.32) в формулы (4.21), получим напряжения в пластине, отвечающие m-му члену ряда (4.31):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial y^2} = Y''_m \sin\frac{m\pi x}{a} = \sigma_x^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2} = -\lambda^2 Y_m \sin\frac{m\pi x}{a} = \sigma_y^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \tau &= -\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x\,\partial y} = -\lambda Y'_m \cos\frac{m\pi x}{a} = \tau^{(m)} \cos\frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Здесь через $\sigma_x^{(m)}$, $\sigma_y^{(m)}$, $\tau^{(m)}$ обозначены функции координаты y, играющие роль амплитуд у гармоник синуса или косинуса. Через Y_m эти амплитудные значения напряжений выражаются, судя по (4.39), так:

$$\sigma_x^{(m)} = Y''_m;\ \sigma_y^{(m)} = -\lambda^2 Y_m;\ \tau^{(m)} = -\lambda Y'_m. \tag{4.40}$$

Как видим, одному члену ряда для φ номера m отвечает в пластине поле напряжений, изменяющееся вдоль пластины в виде m-й гармоники синуса для нормальных напряжений и косинуса для касательных. При удержании в выражении для φ всего ряда (4.31) напряжения в пластине получим путем суммирования выражений (4.39) по m:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_x^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \sigma_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_y^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \tau &= \sum_{m=1}^{\infty} \tau^{(m)} \cos\frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}\right| \tag{4.41}$$

Приведем развернутые выражения для амплитуд напряжений, полученные путем подстановки Y_m по (4.37) и (4.38) в формулы (4.40):

для симметричной деформации

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(m)} &= \lambda^2 [C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 (2\operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y)]; \\ \sigma_y^{(m)} &= -\lambda^2 [C_1 \operatorname{ch} \lambda y + C_2 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y]; \\ \tau^{(m)} &= \lambda^2 [C_1 \operatorname{sh} \lambda y + C_2 (\operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda y)]; \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

для антисимметричной деформации

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(m)} &= \lambda^2 [C_3 \operatorname{sh} \lambda y + C_4 (2 \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda y)]; \\ \sigma_y^{(m)} &= -\lambda^2 [C_3 \operatorname{sh} \lambda y + C_4 \lambda y \operatorname{ch} \lambda y]; \\ \tau^{(m)} &= \lambda^2 [C_3 \operatorname{ch} \lambda y + C_4 (\operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y)], \end{aligned} \tag{4.43}$$

где $\lambda = m\pi/a$.

Найдем теперь перемещения u и v точек пластины, соответствующие m-му члену ряда для φ. Для этого подставляем в уравнения

Коши (4.5) значения деформаций ε_x, ε_y и γ_{xy}, выраженные по закону Гука (4.7) через напряжения (4.39) m-й гармоники. В результате для определения функций u и v получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x^{(m)} - \mu\sigma_y^{(m)}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y^{(m)} - \mu\sigma_x^{(m)}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G}\tau^{(m)}\cos\frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.44)$$

Можно заметить, что уравнения (4.44) будут удовлетворены, если принять

$$u = u^{(m)}\cos\frac{m\pi x}{a}; \quad v = v^{(m)}\sin\frac{m\pi x}{a}, \qquad (4.45)$$

где $u^{(m)} = u^{(m)}(y)$ и $v^{(m)} = v^{(m)}(y)$ — амплитуды перемещений, являющиеся функциями только координаты y. Подставив (4.45) в

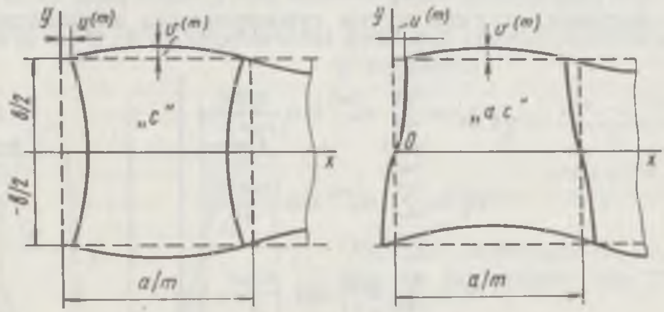


Рис. 4.17

(4.44) и учтя выражения (4.40) для амплитуд напряжений, найдем амплитуды перемещений в виде

$$u^{(m)} = -\frac{1}{E}\left(\frac{1}{\lambda}Y_m'' + \mu\lambda Y_m\right); \quad v^{(m)} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{\lambda^2}Y_m''' - (2+\mu)Y_m'\right]. \qquad (4.46)$$

При удержании в выражении для φ всего ряда (4.31) перемещения в пластине получим путем суммирования выражений (4.45) по номеру гармоник m:

$$u = \sum_{m=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} u^{(m)}\cos\frac{m\pi x}{a}; \quad v = \sum_{m=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} v^{(m)}\sin\frac{m\pi x}{a}. \qquad (4.47)$$

Если в выражения (4.46) подставить выражения (4.37) и (4.38), то при $y = b/2$ для продольной кромки пластины получим амплитудные перемещения в виде (рис. 4.17):

для симметричной деформации

$$u^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)=-\frac{2\alpha}{bE}\left[C_1(1+\mu)\operatorname{ch}\alpha+C_2(2\operatorname{ch}\alpha+(1+\mu)\alpha\operatorname{sh}\alpha)\right];\quad(4.48)$$

$$v^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)=-\frac{2\alpha}{bE}\left[C_1(1+\mu)\operatorname{sh}\alpha+C_2(1+\mu)\alpha\operatorname{ch}\alpha-(1-\mu)\operatorname{sh}\alpha\right];$$

для антисимметричной деформации

$$u^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)=-\frac{2\alpha}{bE}\left[C_3(1+\mu)\operatorname{sh}\alpha+C_4(2\operatorname{sh}\alpha+(1+\mu)\alpha\operatorname{ch}\alpha)\right];$$

$$v^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)=-\frac{2\alpha}{bE}\left[C_3(1+\mu)\operatorname{ch}\alpha+C_4((1+\mu)\alpha\operatorname{sh}\alpha-(1-\mu)\operatorname{ch}\alpha)\right],\quad(4.49)$$

где $\alpha=\frac{m\pi b}{2a}$.

Легко убедиться в том, что найденные для m-го члена ряда φ напряжения (4.39) и перемещения (4.45) точно удовлетворяют описанным ранее условиям прикрепления торцов пластины (4.30) к идеальным диафрагмам при $x=0$, a. Отсюда следует, что этим условиям удовлетворяют и полные напряжения и перемещения в пластине.

Определение произвольных постоянных. Для того чтобы рассматриваемая задача определения напряжений или перемещений в пластине была окончательно решена, надо для каждого номера m ряда (4.31) определить постоянные $C_1 \ldots C_4$, которые определяются из условий на продольных кромках $y=\pm b/2$. Если на этих кромках заданы нагрузки, то для формулировки условий используются выражения для напряжений (4.42), (4.43), если же для кромок заданы принудительные перемещения, то применяются выражения для перемещений (4.48), (4.49). При этом как в том, так и в другом случае заданные нагрузки или перемещения должны быть представлены в виде соответствующего тригонометрического ряда. Тогда формулировка условия выполняется в отношении произвольного m-го члена этого ряда.

Рассмотрим более подробно случай заданной нагрузки $p_y = q(x)$ и $p_x = t(x)$. Если на двух кромках заданы различные нагрузки q_1, t_1 и q_2, t_2, то их всегда можно заменить суммой двух нагружений — симметричного и антисимметричного с нагрузками q^c, t^c и q^{ac}, t^{ac} (рис. 4.18):

$$q^c=\frac{1}{2}(q_1+q_2);\ t^c=\frac{1}{2}(t_1+t_2);\ q^{ac}=\frac{1}{2}(q_1-q_2);\ t^{ac}=\frac{1}{2}(t_1-t_2).\quad(4.50)$$

Поэтому в дальнейшем для примера считать нагрузки q и t симметричными, а для антисимметричного загружения результаты будем писать по аналогии с симметричным загружением. Эти нагрузки будем считать заданными на единицу толщины пластины. Фактически они являются заданными нормальными и касательными напряжениями на поверхности продольной кромки пластины. Функции $q(x)$

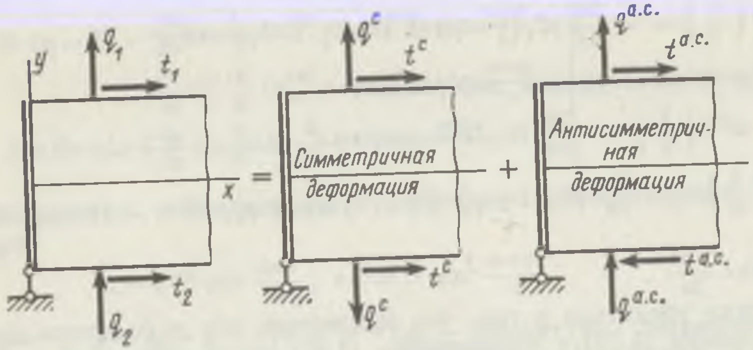


Рис. 4.18

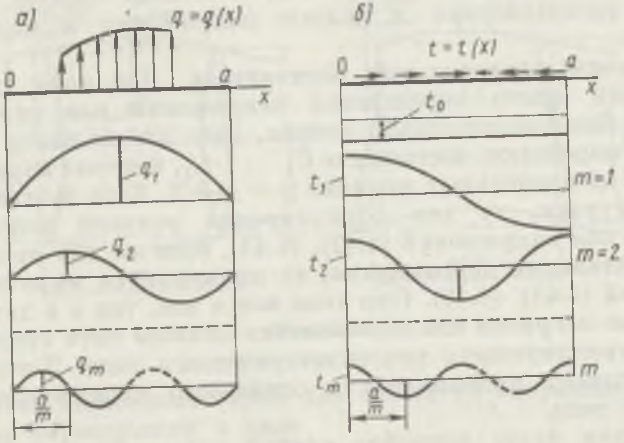


Рис. 4.19

и $t(x)$ представим с помощью соответствующего ряда Фурье: нормальные напряжения — в виде ряда синусов (рис. 4.19, *а*), касательные — косинусов (рис. 4.19, *б*):

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad t = t_0 + \sum_{m=1}^{\infty} t_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \tag{4.51}$$

где коэффициенты Фурье q_m и t_m будут

$$q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx; \quad t_m = \frac{2}{a} \int_0^a t(x) \cos \frac{m\pi x}{a} \, dx, \tag{4.52}$$

а t_0 представляет среднюю интенсивность касательной нагрузки $t(x)$, т. е.

$$t_0 = \frac{1}{a} \int_0^a t(x) \, dx. \tag{4.53}$$

Из условия равновесия пластины в целом легко установить, что для симметричной составляющей нагрузки (см. рис. 4.18) $t_0 = 0$. Нагрузка t_0 может присутствовать только в антисимметричной составляющей. При этом она соответствует элементарной деформации чистого сдвига с напряжениями $\tau = t_0$ (рис. 4.20).

Разложение нагрузки в ряды (4.51) соответствует приложению к кромкам пластины вместо действительной нагрузки $q(x)$, $t(x)$ их

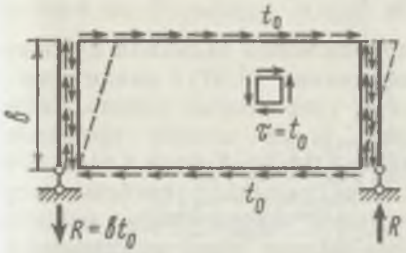


Рис. 4.20

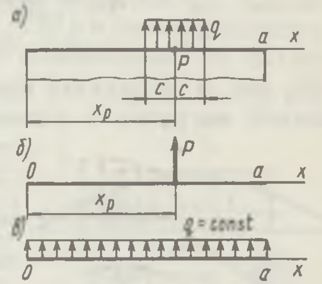


Рис. 4.21

отдельных составляющих, распределенных по длине в виде гармоник синуса или косинуса с амплитудами q_m, t_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) (см. рис. 4.19). Каждой m-й гармонике нагрузок будет отвечать m-я гармоника ряда (4.31) для функции напряжений φ. Чем больше число членов этих рядов будет удержано в суммарном решении, тем точнее ряды (4.51) будут аппроксимировать действительные нагрузки $q(x)$, $t(x)$ и тем точнее будет полученное решение.

Приведем пример определения коэффициентов разложения нагрузки в ряд. Для нагрузки, показанной на рис. 4.21, *а*, получим

$$q_m = \frac{2q}{a} \int_{x_p - c}^{x_p + c} \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx = -\frac{2q}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{a} \Bigg|_{x_p - c}^{x_p + c}.$$

Подставив пределы и заменив разность косинусов по формуле тригонометрии произведением синусов, окончательно найдем

$$q_m = \frac{4q}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{m\pi x_p}{a}. \tag{4.54}$$

В частном случае, когда $c \to 0$, а произведение $2qc = P$ (сосредоточенная сила) с учетом того, что $\sin \alpha \to \alpha$, при $\alpha \to 0$ по формуле (4.54) получим (рис. 4.21, *б*)

$$q_m = \frac{2P}{a} \sin \frac{m\pi x_P}{a} . \tag{4.55}$$

При $x_P = a/2$

$$\left. \begin{aligned} q_m &= \pm \frac{2P}{a}, \ m = 1, \ 3, \ 5, \ \ldots; \\ q_m &= 0, \ m = 2, \ 4, \ 6, \ \ldots, \end{aligned} \right\} \tag{4.56}$$

т. е. для загружения, симметричного относительно середины пролета, в расчете участвуют лишь нечетные гармоники, а все четные — выпадают. То же имеет место и для случая, когда q = const на всем пролете. В этом случае (рис. 4.21, *в*) $c = a/2$, $x_P = a/2$ и

$$\left. \begin{aligned} q_m &= \frac{4q}{m\pi}, \ m = 1, \ 3, \ 5, \ \ldots; \\ q_m &= 0, \ m = 2, \ 4, \ 6, \ \ldots. \end{aligned} \right\} \tag{4.57}$$

На рис. 4.22 показан пример приближения заданной кусочно-постоянной нагрузки с помощью выражения (4.51) с различным числом удержанных членов. Заметим, что более точное приближение нагрузки требуется в тех случаях, когда точки, в которых определяются напряжения, расположены вблизи зоны приложения нагрузки. Для удаленных точек иногда удается ограничиться несколькими членами ряда.

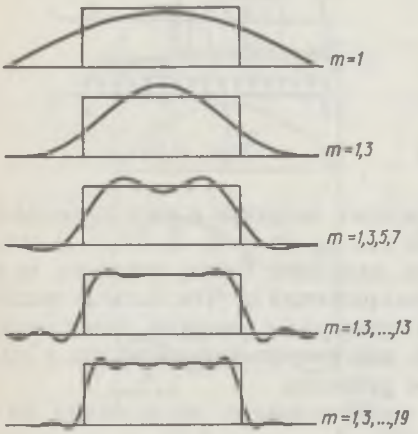


Рис. 4.22

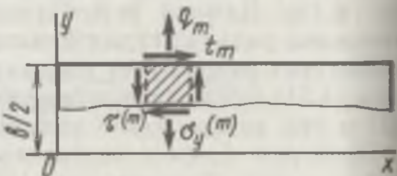


Рис. 4.23

Определим постоянные C_1, C_2 из условий на кромке $y = b/2$ (рис. 4.23)

$$\sigma_y^{(m)} \left(\frac{b}{2} \right) = q_m; \ \tau^{(m)} \left(\frac{b}{2} \right) = t_m. \tag{4.58}$$

Подставив в формулы (4.42) $y = b/2$, приведем равенства (4.58) к двум уравнениям относительно C_1 и C_2:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda^2 (C_1 \operatorname{ch} \alpha + C_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha) &= q_m; \\ \lambda^2 [C_1 \operatorname{sh} \alpha + C_2 (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha)] &= t_m, \end{aligned} \right\} \tag{4.59}$$

где $\lambda = m\pi/a$; $\alpha = m\pi b/(2a) = \lambda b/2$. Решение системы (4.59) дает

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{-q_m(\operatorname{sh}\alpha+\alpha\operatorname{ch}\alpha)+t_m\alpha\operatorname{sh}\alpha}{\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha};\\ C_2 &= \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{q_m\operatorname{sh}\alpha-t_m\operatorname{ch}\alpha}{\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.60)$$

Для антисимметричной деформации аналогично получим

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{-q_m(\operatorname{ch}\alpha+\alpha\operatorname{sh}\alpha)+t_m\alpha\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha-\alpha};\\ C_4 &= \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{q_m\operatorname{ch}\alpha-t_m\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha-\alpha}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.61)$$

Общий путь решения задачи состоит в последовательном вычислении коэффициентов Фурье для заданной нагрузки q_m, t_m, вычислении постоянных по формулам (4.60), (4.61) и затем амплитуд напряжений по формулам (4.42), (4.43) и перемещений по формулам

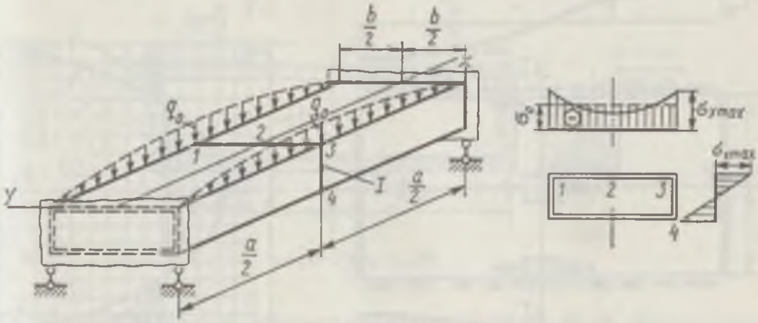


Рис. 4.24

(4.48), (4.49). После этого сами напряжения и перемещения определяются по формулам (4.41) и (4.47). С использованием ЭВМ подобные вычисления легко могут быть проделаны для очень большого числа членов ряда (при необходимости несколько сотен) так, что для указанных граничных условий можно получить практически точное решение задачи теории упругости.

Примеры решения Файлона. На рис. 4.24 показана балка тонкостенного коробчатого сечения. Требуется выяснить характер распределения напряжений σ_x по ширине горизонтального листа (точки *1*, *2*, *3*) в среднем сечении в зависимости от отношения $k = a/b$.

Выделим рассматриваемую пластину из коробки и приложим к ее продольным кромкам соответствующий поток касательных усилий $t(x)$ (рис. 4.25, *а*). При внешней нагрузке, изменяющейся по одной полуволне синуса $q = q_0 \sin \pi x/a$, усилия $t(x)$ будут изменяться по одной полуволне косинуса $t = t_0 \cos \pi x/a$. Назначим τ_0 так, чтобы среднее напряжение в сечении I было равно σ_0 при произвольном $k = a/b$. Продольная сила в сечении $N = 2\int_0^{a/2} t(x)\,dx = 2\tau_0 a/\pi$. Из условия $N = \sigma_0 b$ найдем $\tau_0 = \pi b\sigma_0/(2a) = \alpha\sigma_0$, $\alpha = \pi b/(2a)$.

По формуле (4.52) получим

$$t_m = \frac{2}{a}\int_0^a \tau_0 \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} \tau_0, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \tag{а}$$

Равенство (а) следует из известного свойства ортогональности

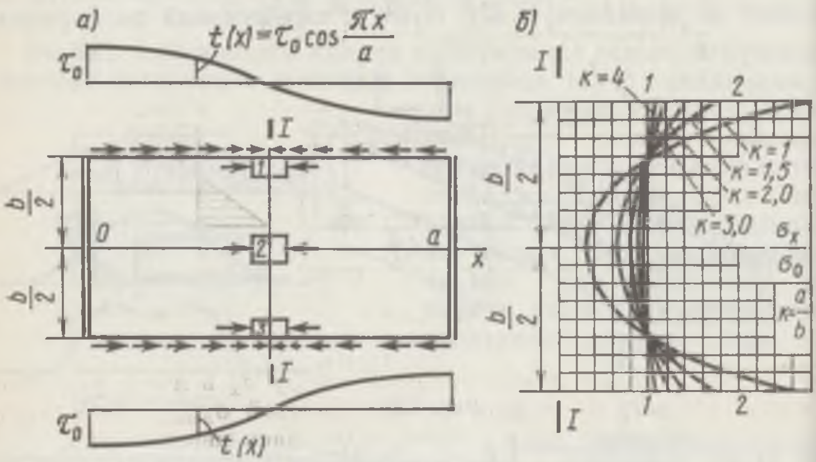


Рис. 4.25

гармоник синуса и косинуса различных номеров, а именно:

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m_1\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m_1\pi x}{a}\,dx = 0,\; m_1 \neq m. \tag{4.62}$$

При $m_1 = m$ имеем

$$\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}. \tag{4.63}$$

Итак, в рассматриваемом примере сохраняется в решении лишь первый член ряда $m = 1$.

По выражениям (4.60), (4.42) и (4.41) получаем формулу для σ_x в пластине

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{\alpha\,[\alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \lambda y - \operatorname{ch} \alpha\,(2 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y)]}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha} \sin \frac{\pi x}{a}, \qquad (б)$$

где $\lambda = \pi/a$; $\alpha = \lambda b/2 = \pi/(2k)$.

На рис. 4.25, *б* показаны графики кривых (σ_x/σ_0) при различных соотношениях $k = a/b$, построенные по формуле (б). При $k < 4$ в сечении наблюдается заметная неравномерность распределения нормальных напряжений.

В практических расчетах сечений с большой шириной горизонтального листа используется понятие редукционного коэффициента

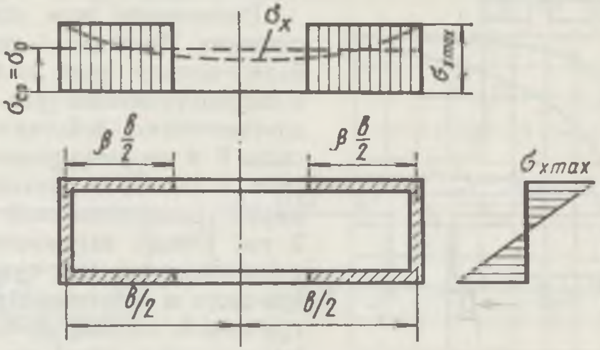


Рис. 4.26

β (рис. 4.26). Заменим криволинейную эпюру σ_x в листе условной постоянной эпюрой на ширине βb с ординатой $\sigma_{x\,\max}$ так, чтобы суммарная продольная сила в листе оставалась неизменной:

$$N = \int\limits_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \, dy = \sigma_0 b = \sigma_{x\max} \beta b.$$

Отсюда получаем формулу для редукционного коэффициента

$$\beta = \frac{\sigma_0}{\sigma_{x\,\max}} = \frac{\alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha}{2\,\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha}. \qquad (4.64)$$

Здесь использована для определения $\sigma_{x\max}$ формула (б) при $y = b/2$, $x = a/2$.

В состав расчетного сечения вводят уменьшенную (редуцированную) ширину листа $b_р = \beta b$ (это сечение на рис. 4.26 заштриховано) и напряжения в крайних точках сечения вычисляют по формуле сопротивления материалов $\sigma = M_{изг}/W_{игз}$, предполагающей равномерное распределение напряжений на ширине листа βb. При этом получаемое напряжение будет равно или близко к действительному максимальному напряжению $\sigma_{x\max}$, отвечающему криволинейной эпюре σ_x в горизонтальном листе.

На рис. 4.27 показан график зависимости редукционного коэффициента β от отношения $k = a/b$. Там же показана кривая $\beta = \beta(k)$, отвечающая заделке концевых сечений балки, полученная с помощью решения Рибьера (см. § 4.8). Это решение приводит к той же формуле (4.64), но в этой формуле надо принять $m = 2$ и соответственно $\alpha = \pi/k$.

Заметим, что для $b \to \infty$ значения β стремятся к значению $1/2\alpha$, что дает для шарнирного опирания $\beta_1 = k/\pi = a/(\pi b)$, а для заделки $\beta_2 = k/(2\pi) = a/(2\pi b)$. В этих случаях редуцированная ширина листа $b_р = \beta b$ соответственно будет a/π и $a/(2\pi)$.

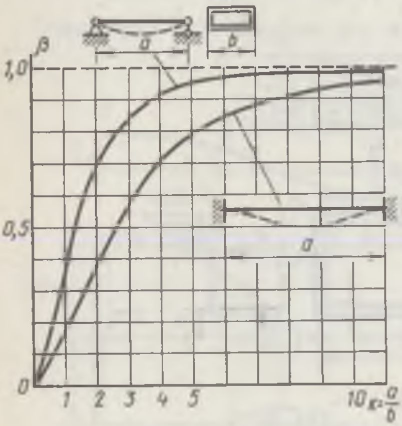


Рис. 4.27

Рассмотрим еще один пример решения Файлона — действие на балку-полосу трех сил, близких к сосредоточенным (рис. 4.28). Они соответствуют действию на балку силы P и опорных реакций по $P/2$ (рис. 4.29). Сила считается равномерно распределенной на длине 2 см. Общее загружение полосы представляется как сумма симметричного и антисимметричного загружений, каждое из которых рассматривается отдельно, а результаты суммируются. В рядах удерживаются нечетные гармоники $m = 1 \ldots 3001$.

На рис. 4.30 и 4.31 показаны эпюры напряжений σ_x, σ_y, τ в сечениях *А* и *Б*. Первое расположено в непосредственной близости к месту расположения средней силы, второе — вдали от этого места. На этих же рисунках пунктиром изображены эпюры напряжений, найденных по элементарным формулам сопротивления материалов. Можно видеть, что вдали от сосредоточенных воздействий (сечение *Б*) решения сопротивления материалов и теории упругости хорошо согласуются. В окрестности приложения внешних воздействий (сечение *А*) возникают существенные различия. Особенно это касается напряжений σ_y, которые в решении сопротивления материалов принимаются равными нулю, и напряжений τ.

Заметим, что при больших значениях аргументов гиперболо-тригонометрических функций, содержащих $\operatorname{sh}\alpha$, $\operatorname{ch}\alpha$, формулы для напряжений могут давать погрешность из-за ограниченности разрядной сетки ЭВМ. Практически при $\alpha > 10 \ldots 15$ требуется прибегать к соответствующим мерам для устранения этих погрешностей. Иногда этому может помочь должное преобразование формул, например деление числителей и знаменателей этих формул на величину

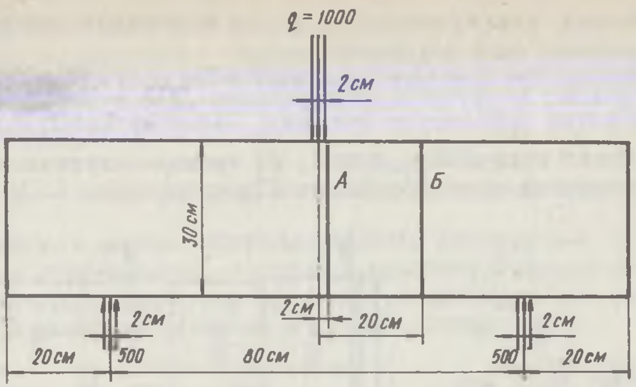


Рис. 4.28

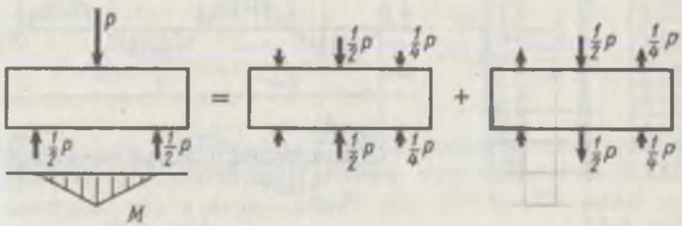


Рис. 4.29

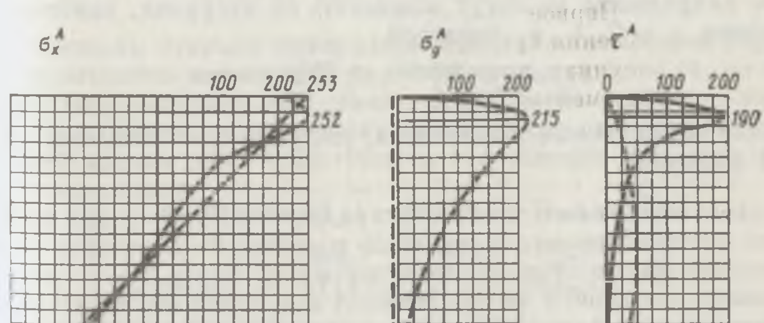


Рис. 4.30

e^{α} с переходом к показательной форме для $\operatorname{sh}\lambda y$ и $\operatorname{ch}\lambda y$. Другой путь устранения этой трудности состоит в следующем. При $\alpha \to \infty$ можно считать, что ширина пластины $b \to \infty$, а точнее, отношение $\frac{b}{a/m}$ становится бесконечно большим. Поэтому каждую полуволну m-й гармоники нагрузок q_m или t_m на кромке пластины можно считать приложенной к полубесконечной пластине (рис. 4.32). Для этого

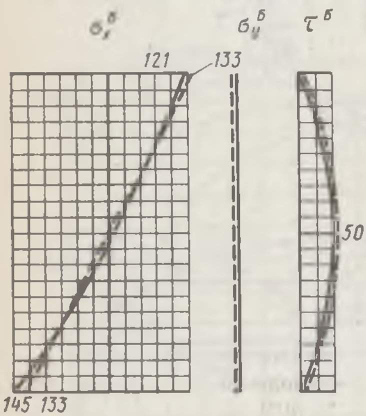


Рис. 4.31

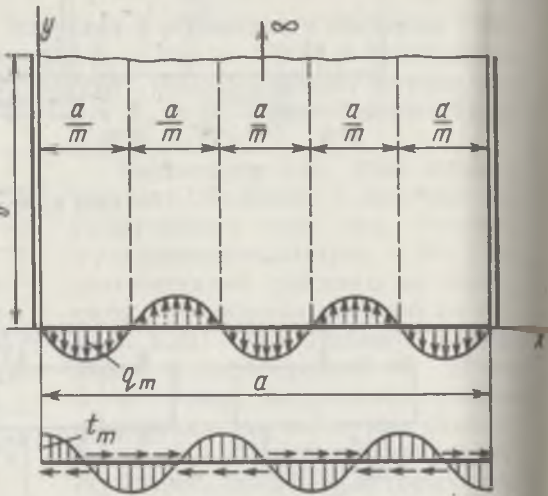


Рис. 4.32

случая Y_m принимаем по выражению (4.35), в котором удерживаются лишь убывающие экспоненциальные члены, так как при $y \to \infty$ напряжения не могут возрастать от нагрузки, приложенной на кромке $y = 0$, т. е. полагаем

$$Y_m = C_1 e^{-m\pi y/a} + C_2 \frac{m\pi y}{a} e^{-m\pi y/a}.$$

Проделав необходимые вычисления, получим для амплитуд напряжений формулы

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(m)} &= q_m (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} - t_m (2 - \lambda y) e^{-\lambda y}; \\ \sigma_y^{(m)} &= q_m (1 + \lambda y) e^{-\lambda y} - t_m \lambda y e^{-\lambda y}; \\ \tau^{(m)} &= q_m \lambda y e^{-\lambda y} + t_m (1 - \lambda y) e^{-\lambda y};\ \lambda = m\pi/a. \end{aligned}\right\} \quad (4.65)$$

В программе расчета на ЭВМ должен быть предусмотрен автоматический переход вычислений на формулы (4.65), как только α с возрастанием номера гармоники m превысит определенное значение, например $\alpha > 10$. Обратим внимание, что в формулах (4.65) координата y отсчитывается от кромки пластины, а не от середины ее ширины, как это было ранее.

§ 4.8. РЕШЕНИЕ РИБЬЕРА

Зададим функцию напряжений φ в отличие от ряда синусов (4.31) в форме ряда косинусов, впервые использованной Рибьером:

$$\varphi = \sum_{m=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} Y_m \cos\frac{m\pi x}{a}. \qquad (4.66)$$

Легко убедиться путем непосредственных вычислений, что все напряжения и перемещения, которые в решении Файлона изменялись по гармоникам синуса, теперь будут изменяться по гармоникам косинуса, и наоборот. Поэтому в данном случае имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_x^{(m)} \cos\frac{m\pi x}{a}; \quad \sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_y^{(m)} \cos\frac{m\pi x}{a};\\
&\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \tau^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a};\\
&u = \sum_{m=1}^{\infty} u^{(m)} \sin\frac{m\pi x}{a}; \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} v^{(m)} \cos\frac{m\pi x}{a}.
\end{aligned}\right| \qquad (4.67)$$

При этом функции координаты y, выражающие амплитуды напряжений и перемещений, совпадают с теми, что приведены в § 4.7, с той лишь разницей, что в выражениях для $\tau^{(m)}$ и $u^{(m)}$ знак надо заменить на противоположный.

Вместо граничных условий (4.30) на концах пластины $x = 0$ и $x = a$ теперь будем иметь:

$$\sigma_x \neq 0; \; \tau = 0; \; v \neq 0; \; u = 0. \qquad (4.68)$$

Этим условиям отвечает деформация пластины, у которой торцевые сечения остаются плоскими и не поворачиваются ($u = 0$), но вертикальные перемещения этих точек развиваются свободно, так что $v \neq 0$. В подобных условиях находится пролет, выделенный из бесконечной полосы (рис. 4.33). Иногда эти условия называют «заделкой по симметрии».

Если сопоставить деформации пластины, отвечающие m-му члену ряда в решениях Файлона и Рибьера, то можно видеть, что они получаются из одной и той же картины деформации бесконечной полосы, представленной m-й гармоникой, но начала координат (т. е. левые торцы пластин длиной a) сдвинуты в этих решениях на четверть длины полуволны (рис. 4.34). Отсюда понятно, почему все выражения для амплитуд напряжений и перемещений в указанных двух решениях одинаковы.

Приведем пример использования решения Рибьера (рис. 4.35). Поскольку равнодействующая нагрузки q, приложенной на кромках $y = \pm b/2$, в данном случае не равна нулю, выражение для σ_y надо взять в отличие от (4.67) в форме

$$\sigma_y = -\frac{P}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_y^{(m)} \cos \frac{m\pi x}{a}, \tag{а}$$

где P/a — среднее значение напряжений σ_y в сечении $y = \mathrm{const}$. Легко видеть, что любой член ряда под знаком суммы в (а) дает гра-

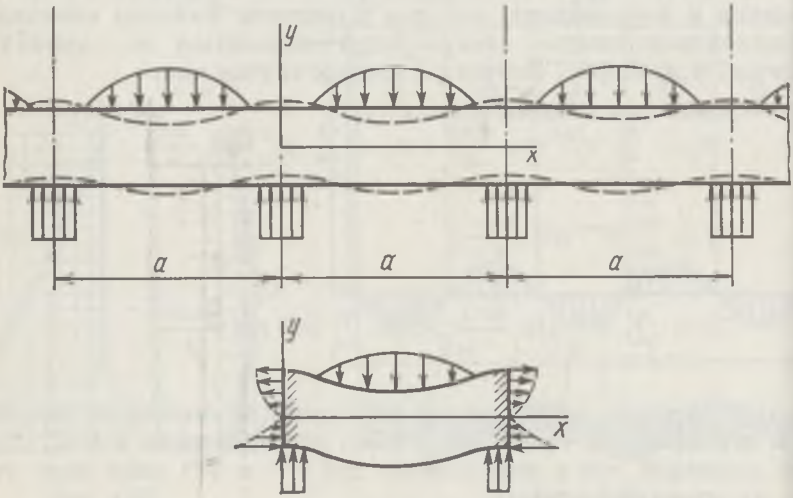


Рис. 4.33

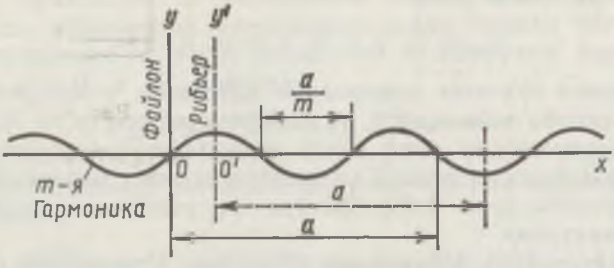


Рис. 4.34

фик с площадью на длине Oa, равной нулю, и, следовательно, не изменяет величину указанной равнодействующей. Формулы (4.67) для напряжений σ_x и τ остаются без изменений. Для амплитуд нагрузки q_m имеем формулы, аналогичные (4.52):

$$q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \cos \frac{m\pi x}{a}\, dx. \tag{б}$$

Для сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = a/2$, произведение $q\,dx$ стремится к $-P$ и поэтому выражение (б) дает $q_m = -(2P/a)\cos m\pi/2$, или

$$\left.\begin{aligned} q_m &= \pm\frac{2P}{a},\ m = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots;\\ q_m &= 0,\ m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{в}$$

Подставив (в) в формулы (4.60) при $t_m = 0$, найдем постоянные C_1 и C_2 и далее по формулам (4.42) амплитуды напряжений $\sigma_x^{(m)}$ и $\sigma_y^{(m)}$.

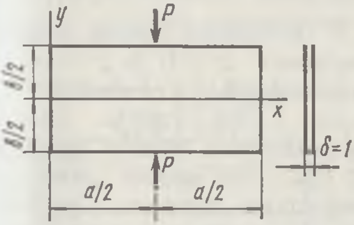


Рис. 4.35

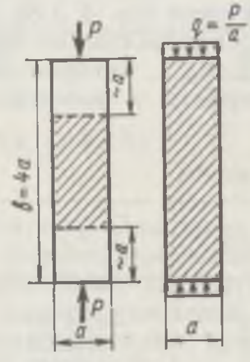


Рис. 4.36

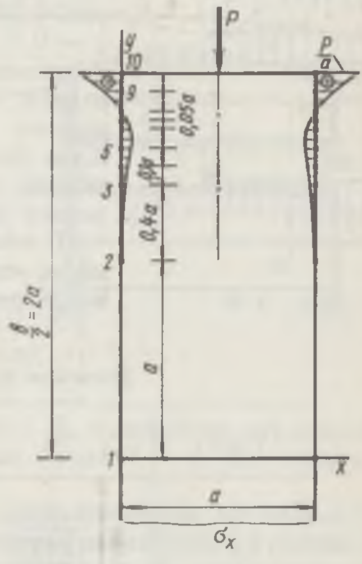


Рис. 4.37

Напряжения σ_x и σ_y в произвольной точке по (4.67) и (а) получат вид

$$\sigma_x = \sum_{m=2,\ 4,\ 6\ \ldots}^{\infty} \pm\left(\frac{2P}{a}\right)\times$$

$$\times\ \frac{-(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\lambda y + \operatorname{sh}\alpha\,(2\operatorname{ch}\lambda y + \lambda y\operatorname{sh}\lambda y)}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha}\cos\frac{m\pi x}{a}; \tag{г}$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{a} + \sum_{m=2,\ 4,\ 6,\ \ldots}^{\infty} \mp\left(\frac{2P}{a}\right)\times$$

$$\times\ \frac{-(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\lambda y + \operatorname{sh}\alpha\lambda y\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha + \alpha}\cos\frac{m\pi x}{a}, \tag{д}$$

где $\lambda = m\pi/a$; $\alpha = m\pi b/(2a)$.

Воспользуемся этими формулами для численной проверки справедливости принципа Сен-Венана. Примем $b = 4a$. Согласно этому принципу, для двух (рис. 4.36) статически эквивалентных загружений напряжения в заштрихованных зонах должны быть одинаковы, т. е. $\sigma_x = 0$, $\tau = 0$, $\sigma_y = -P/a$. Различие будет наблюдаться лишь на участках длиной $\sim a$ у мест приложения сосредоточенных сил P, где нарушается гипотеза плоских сечений.

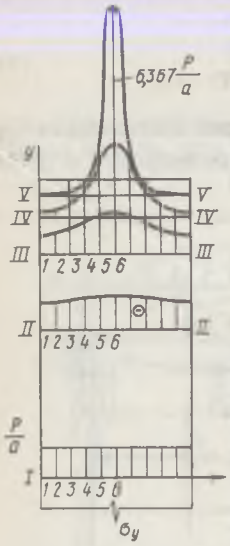


Рис. 4.38

На рис. 4.37 показаны эпюры напряжений σ_x на кромках $x = 0$ и $x = a$, а на рис. 4.38 — напряжений σ_y в сечениях $I\ldots V$ $y = 0$, a, $1{,}5a$, $1{,}75a$, $1{,}875a$. Значения напряжений в различных точках приведены в табл. 4.1 и 4.2. Как видим, эти эпюры хорошо подтверждают принцип Сен-Венана и тот факт, что отклонения от равномерного сжатия наблюдаются на длине, примерно равной ширине сечения (см. § 2.8).

В табл. 4.2 в последнем столбце приведены числа членов ряда $N_{\min}$, которые оказалось необходимым удержать в расчетах, чтобы

Таблица 4.1

Значения σ_x в долях от P/a

Точка	σ_x	Точка	σ_x
1	−0,00016	6	−0,16780
2	−0,01972	7	−0,10342
3	−0,06050	8	0,00965
4	−0,16664	9	0,41070
5	−0,19856	10	1,00000

Таблица 4.2

Значения σ_y в долях от P/a

Сечение	Точки						
	1	2	3	4	5	6	$N_{\min}$
I	0,99981	0,99985	0,99994	1,00006	1,00015	1,00019	1
II	0,97289	0,97802	0,99152	1,00833	1,02204	1,02729	2
III	0,66766	0,71927	0,86876	1,08728	1,29739	1,38693	4
IV	0,20817	0,26127	0,46546	0,97308	1,91328	2,56569	11
V	0,01914	0,02699	0,06666	0,25657	1,59303	6,36753	24

получить пять первых цифр после запятой. Как видим, сходимость рядов ухудшается с приближением к точке, в которой приложена сила P. Так, если в среднем сечении достаточно было взять один член, то в пятом сечении потребовалось 24 члена ряда ($m = 2\ldots 48$).

§ 4.9. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ

Рассмотренный выше анализ напряжений в одиночной пластине в тригонометрических рядах может быть распространен и на случай пластинчатых систем, имеющих на торцах $x = 0$ и $x = a$ соответствующие условия закрепления (идеальные диафрагмы, или «заделка

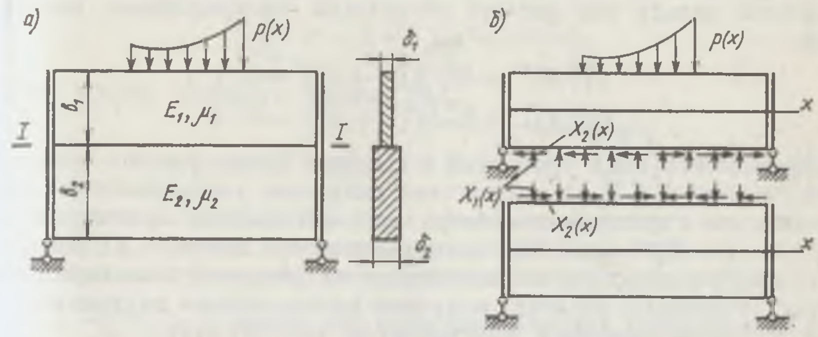


Рис. 4.39

по симметрии»). Для примера на рис. 4.39, *а* показаны две пластины, жестко соединенные («склеенные») по линии $I - I$. На торцах они имеют идеальные диафрагмы.

Для расчета указанной системы расчленим ее на отдельные самостоятельные пластины, приняв в качестве неизвестных функций нормальные усилия $X_1(x)$ и касательные усилия $X_2(x)$, возникающие между пластинами в сечениях их контакта (рис. 4.39, *б*). Нагрузку $p(x)$ и усилия $X_1(x)$ и $X_2(x)$ представим в виде соответствующих рядов

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m S_m;\quad X_1 = \sum_{m=1}^{\infty} X_1^{(m)} S_m;\quad X_2 = \sum_{m=1}^{\infty} X_2^{(m)} C_m, \qquad (4.69)$$

где $S_m = \sin\frac{m\pi x}{a}$; $C_m = \cos\frac{m\pi x}{a}$. В равенствах (4.69) числа p_m известны, а амплитуды усилий $X_1^{(m)}$ и $X_2^{(m)}$ подлежат определению.

Каждая из нагрузок, отвечающая m-му члену ряда (4.69), вызывает деформации пластины, соответствующие только m-й гармонике рядов, отвечающих перемещениям пластины u и v. Поэтому для определения амплитуд $X_1^{(m)}$, $X_2^{(m)}$ при данных условиях закрепления конструкции на торцах можно рассмотреть отдельно m-ю гармонику, являющуюся независимой от всех остальных членов ряда.

Усилия $X_1^{(m)}$ и $X_2^{(m)}$ найдем из условия совместности деформаций отдельных пластин, выражаемого равенством амплитуд перемещений $v^{(m)}$ и $u^{(m)}$ по линии $I - I$ контакта пластин:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1^{(m)} = v_1^{(m)} - v_2^{(m)} = 0; \\ \Delta_2^{(m)} = u_1^{(m)} - u_2^{(m)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.70}$$

где индексы 1 и 2 при перемещениях $v^{(m)}$ и $u^{(m)}$ указывают на номер пластины, в которой определяется эта амплитуда перемещений. Раскрыв уравнения (4.70), представим их в канонической форме, свойственной методу сил расчета статически неопределимых конструкций:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}^{(m)} X_1^{(m)} + \delta_{12}^{(m)} X_2^{(m)} + \Delta_{1p}^{(m)} = 0; \\ \delta_{21}^{(m)} X_1^{(m)} + \delta_{22}^{(m)} X_2^{(m)} + \Delta_{2p}^{(m)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.71}$$

Коэффициенты этих уравнений находятся путем расчета отдельных пластин (см. § 4.7) на воздействия нагрузок, распределенных вдоль кромок по гармоникам номера m, отвечающим амплитудам p_m, $X_1^{(m)} = 1$ и $X_2^{(m)} = 1$. Проделав вычисления для $m = 1, 2, \ldots, M$ и суммируя результаты вычисления напряжений в интересующих точках отдельных пластин, получаем распределение внутренних усилий в рассматриваемой пластинчатой конструкции.

Заметим, что описанный путь решения довольно громоздок, но он достаточно легко может быть выполнен с использованием ЭВМ. Более удобным для расчетов сложных пластинчатых конструкций является метод перемещений в сочетании с решением в тригонометрических рядах для отдельных пластин. В этом методе вместо усилий взаимодействия отдельных пластин $X_1(x)$, $X_2(x)$ за неизвестные принимаются перемещения $Z_1 = v(x)$ и $Z_2 = u(x)$ точек линии $I - I$ конктакта этих пластин. Подробно этот метод описан в [2].

§ 4.10. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Решения плоской задачи в тригонометрических рядах, подробно рассмотренные выше для изотропного материала, могут быть распространены и на случай ортотропного материала, например, подчиняющегося закону Гука в форме равенств (4.9). В этом случае, проводя решение в напряжениях и используя функцию напряжений $\varphi(x, y)$ (4.18), придем не к бигармоническому уравнению (4.20), а к уравнению совместности деформаций такого вида:

$$c_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (c_{33} - 2c_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \tag{4.72}$$

где c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12} — константы упругости, содержащиеся в законе Гука (4.9).

Запишем (4.72) в стандартной форме:

$$A_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2A_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \tag{4.73}$$

Задавая, как и ранее, φ в виде тригонометрического ряда (4.31) или (4.66), получим в отличие от (4.34) следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $Y_m = Y_m(y)$:

$$A_2 \lambda^4 Y_m - 2A_3 \lambda^2 Y_m'' + A_1 Y_m^{\mathrm{IV}} = 0, \tag{4.74}$$

где $\lambda = m\pi/a$.

Представив Y_m в виде $Y_m = Ce^{ry}$, для определения корней r придем к характеристическому уравнению

$$\frac{A_2}{A_1} \lambda^4 - 2 \frac{A_3}{A_1} \lambda^2 r^2 + r^4 = 0, \tag{4.75}$$

четыре корня которого имеют вид

$$r = \pm \lambda \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \tag{4.76}$$

(Особенность расчета ортотропных плит состоит лишь в том, что вид функций Y_m зависит от соотношения коэффициентов A_1, A_2, A_3 4.73). Здесь могут иметь место следующие три случая.

1. $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2}\right) > 1$; имеем две пары комплексных сопряженных корней $\pm (r_1 \pm r_2 i)$, где

$$r_{1,2} = \lambda \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_3^2}} \pm 1\right)}. \tag{4.77}$$

Функция Y_m имеет вид

$$Y_m = (C_1 \operatorname{ch} r_1 y + C_2 \operatorname{sh} r_1 y) \cos r_2 y + (C_3 \operatorname{ch} r_1 y + C_4 \operatorname{sh} r_1 y) \times \times \sin r_2 y. \tag{4.78}$$

2. $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2}\right) = 1$; имеем вещественные кратные корни $\pm \lambda$ и функция Y_m в этом случае полностью совпадает со случаем изотропного материала.

3. $\left(\frac{A_1 A_2}{A_3^2}\right) < 1$; имеем четыре вещественных корня $\pm r_1$ и $\pm r_2$, где

$$r_{1,2} = \lambda \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_1 A_2}{A_3^2}}}. \tag{4.79}$$

Выражение для функции Y_m будет

$$Y_m = C_1 \operatorname{ch} r_1 y + C_2 \operatorname{sh} r_1 y + C_3 \operatorname{ch} r_2 y + C_4 \operatorname{sh} r_2 y. \tag{4.80}$$

Заметим, что для реальных ортотропных материалов наиболее характерным является первый случай. Содержание всех последующих вычислений будет таким же, как в рассмотренном выше случае изотропного материала.

§ 4.11. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении многих задач теории упругости удобно использовать вместо декартовой полярную систему координат, в которой положение каждой точки M (x, y) определяется координатами r и Θ

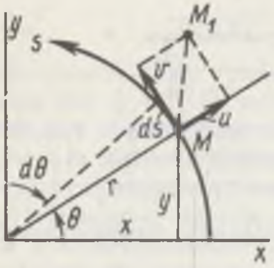


Рис. 4.40

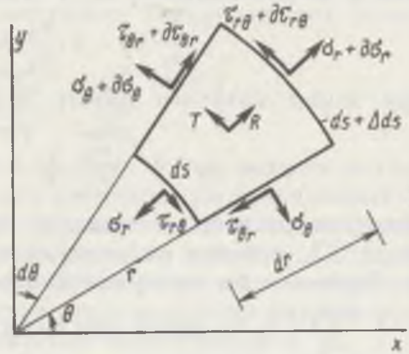


Рис. 4.41

(рис. 4.40). Линейная дуговая координата s и угол Θ связаны зависимостью $s = r\Theta$, откуда следует соотношение между их дифференциалами $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\Theta$, которым будем часто пользоваться далее.

Полное перемещение точки MM_1 зададим двумя компонентами: u — в радиальном направлении, v — в тангенциальном.

Статические уравнения. Эти уравнения выражают равенство нулю сумм проекций всех сил, действующих на элемент dr, ds, 1, на радиальное направление, проходящее через центр элемента, и на перпендикулярное ему тангенциальное направление (рис. 4.41). Приняв напряжения, указанные на этом рисунке за положительные, получим уравнения равновесия в виде

$$(\sigma_r + \partial\sigma_r)(\mathrm{d}s + \Delta\mathrm{d}s) - \sigma_r\,\mathrm{d}s + \partial\tau_{\Theta r}\,\mathrm{d}r -$$
$$-\sigma_\Theta\,\mathrm{d}r\sin\mathrm{d}\Theta/2 - (\sigma_\Theta + \partial\sigma_\Theta)\,\mathrm{d}r\sin\mathrm{d}\Theta/2 + R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = 0;$$
$$(\sigma_\Theta + \partial\sigma_\Theta)\,\mathrm{d}r - \sigma_\Theta\,\mathrm{d}r - \tau_{r\Theta}\,\mathrm{d}s + (\tau_{r\Theta} +$$
$$+\partial\tau_{r\Theta})(\mathrm{d}s + \Delta\,\mathrm{d}s) + (\tau_{\Theta r} + \partial\tau_{\Theta r})\,\mathrm{d}r\sin d\Theta/2 + \tau_{\Theta r}\,\mathrm{d}r\sin d\Theta/2 +$$
$$+ T\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = 0,$$

где R и T — компоненты объемных нагрузок.

В этих равенствах учтены проекции сил, действующих на гранях dr, которые они дают вследствие наклона к направлениям R и T на малые углы $d\Theta/2$. Косинусы этих малых углов приняты равными единице. Заменив в приведенных равенствах $\sin d\Theta/2 = d\Theta/2$, $\Delta\, ds = (r + dr)\, d\Theta - r\, d\Theta = dr\, d\Theta$, учтя выражения для частных дифференциалов напряжений [1] $\partial\sigma_r = \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} dr$, $\partial\tau_{\Theta r} = \frac{\partial\tau_{\Theta r}}{\partial\Theta} d\Theta$, $\partial\tau_{r\Theta} = \frac{\partial\tau_{r\Theta}}{\partial r} dr$, $\partial\sigma_\Theta = \frac{\partial\sigma_\Theta}{\partial\Theta} d\Theta$, а также сократив и отбросив слагаемые высшего порядка малости, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial\Theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\Theta) + R = 0;\\ &\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\Theta}{\partial\Theta} + \frac{2}{r}\tau + T = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.81}$$

где $\tau_{r\Theta} = \tau_{\Theta r} = \tau$.

Равенства (4.81) составляют аналог уравнений равновесия (4.3) в полярных координатах.

Геометрические уравнения. Как и в декартовой системе, здесь они выражают относительные удлинения отрезков MB, MA и изме-

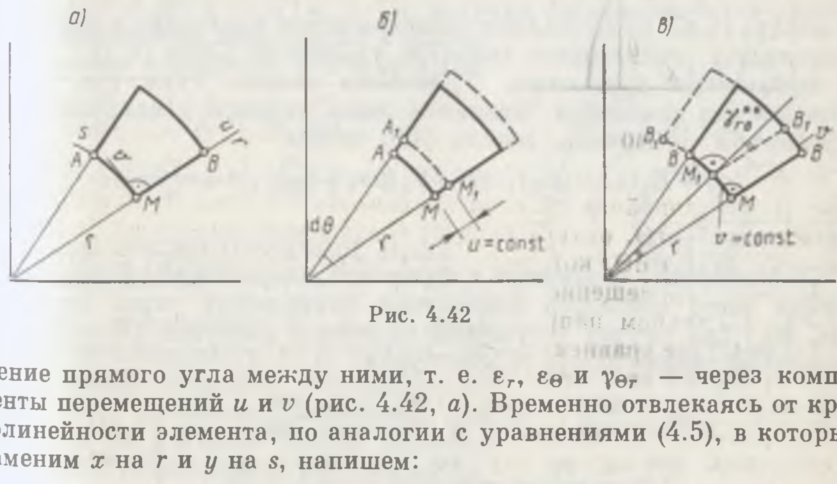


Рис. 4.42

нение прямого угла между ними, т. е. ε_r, ε_Θ и $\gamma_{\Theta r}$ — через компоненты перемещений u и v (рис. 4.42, *а*). Временно отвлекаясь от криволинейности элемента, по аналогии с уравнениями (4.5), в которых заменим x на r и y на s, напишем:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \qquad \varepsilon_\Theta^* = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\Theta};$$

$$\gamma_{r\Theta}^* = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta} + \frac{\partial v}{\partial r},$$

где производная по s заменена на производную по Θ по соотношению $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}$, так как $\partial S = r\,\partial\Theta$. Деформации ε_Θ^* и $\gamma_{r\Theta}^*$ состав-

[1] Нижние индексы у обозначения частных дифференциалов ∂ (. . .) здесь опущены в целях простоты записи.

ляют только часть полных деформаций и поэтому отмечены звездочкой. Другую часть этих деформаций получим, давая точкам элемента перемещения $u = \text{const}$ (рис. 4.42, *б*) и перемещения $v = \text{const}$ (рис. 4.42, *в*). Соответственно получим деформации, обусловливаемые кривизной элемента:

$$\varepsilon_{\Theta}^{**} = \frac{M_1A_1 - MA}{ds} = \frac{u\, d\Theta}{ds} = \frac{u}{r};$$

$$\gamma_{r\Theta}^{**} = -\frac{MM_1}{r} = -\frac{v}{r},$$

где знак минус соответствует возрастанию первоначально прямого угла элемента.

Окончательные суммарные деформации ε_r, $\varepsilon_\Theta = \varepsilon_\Theta^* + \varepsilon_\Theta^{**}$, $\gamma_{r\Theta} = \gamma_{r\Theta}^* + \gamma_{r\Theta}^{**}$ будут

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\Theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\Theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.82}$$

Равенства (4.82) представляют геометрические уравнения в полярных координатах, являющиеся аналогом уравнений Коши (4.5).

Физические уравнения. Уравнения закона Гука (см. § 4.2) остаются без изменения, меняются лишь индексы у напряжений и деформаций. Например, вместо (4.8) имеем

$$\sigma_r = E_1(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta); \quad \sigma_\Theta = E_1(\mu\varepsilon_r + \varepsilon_\Theta); \quad \tau_{r\Theta} = G\gamma_{r\Theta}, \tag{4.83}$$

где $E_1 = \dfrac{E}{1-\mu^2}$.

Соотношения, связанные с функцией напряжений. К их числу прежде всего относятся выражения напряжений через функцию $\varphi(r, \Theta)$. Для случая отсутствия объемных нагрузок ($R = T = 0$) выражения, аналогичные (4.21), будут

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\Theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}; \quad \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2}; \\ \tau &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\Theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.84}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что при произвольной функции $\varphi(r, \Theta)$ выражения (4.84) удовлетворяют уравнениям равновесия (4.81).

Как видели, функция напряжения φ определяется из условия совместности деформаций, выраженного через напряжения $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$. Из теории напряженного состояния известно, что в точке при любом угле наклона площадки $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90°} = \text{const}$, поэтому $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\Theta + \sigma_r$ и упомянутое уравнение в полярной системе запишется в виде

$$\nabla^2 (\sigma_\Theta + \sigma_r) = 0, \tag{4.85}$$

где гармонический оператор $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ должен быть выражен в координатах r и Θ. Эта операция обычно выполняется чисто формально с помощью формул дифференцирования по сложному аргументу, например $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$. Здесь не будем этого делать, а сошлемся на аналогию с декартовой системой, где сумма $\sigma_x + \sigma_y$ как раз давала гармонический оператор над φ. Это оказывается справедливым и в полярной системе. Складывая $\sigma_\Theta + \sigma_r$, по (4.84) получим

$$\sigma_\Theta + \sigma_r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} = \nabla^2 \varphi. \tag{4.86}$$

Следовательно, гармонический оператор в полярных координатах будет

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}. \tag{4.87}$$

Подставив (4.86) и (4.87) в (4.85), получим бигармоническое уравнение совместности деформаций в полярной системе координат $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} \right) = 0. \tag{4.88}$$

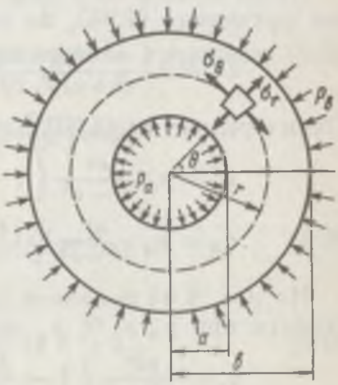


Рис. 4.43

§ 4.12. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Если напряжения в теле зависят только от координаты r, то такое поле напряжений называют *осесимметричным*. Оно возникает, например, при действии на длинный полый цилиндр (рис. 4.43) равномерного внутреннего p_a и наружного p_b давлений (задача Ляме).

Покажем решение этой задачи вначале в перемещениях, приняв в качестве основной неизвестной функции радиальное перемещение $u = u(r)$. Тангенциальная компонента перемещений v ввиду осевой симметрии равна нулю. Штрихом обозначив дифференцирование по r, из (4.82) найдем, что $\varepsilon_r = u'$, $\varepsilon_\Theta = u/r$ и $\gamma_{r\Theta} = 0$; следовательно, по закону Гука (4.83) получим

$$\sigma_r = E_1 \left(u' + \frac{\mu}{r} u \right); \quad \sigma_\Theta = E_1 \left(\mu u' + \frac{u}{r} \right); \quad \tau_{r\Theta} = 0. \tag{4.89}$$

Из уравнений равновесия (4.81) при $R = T = 0$ остается только одно, первое:

$$\sigma_r' + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \qquad (4.90)$$

Подставив (4.89) в (4.90), придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно u:

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = 0. \qquad (4.91)$$

Его общий интеграл будет

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \qquad (4.92)$$

По формулам (4.89) с использованием (4.92) получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= E_1\left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right]; \\ \sigma_\theta &= E_1\left[C_1(1+\mu) + C_2(1-\mu)\frac{1}{r^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (4.93)$$

Постоянные C_1, C_2 находятся из условий на поверхности

$$r = a,\ \sigma_r = -p_a;\quad r = b,\ \sigma_r = -p_b. \qquad (4.94)$$

Полагая для σ_r в выражении (4.93) $r = a$ и $r = b$, составляем два уравнения (4.94), из совместного решения которых найдем

$$C_1 = -\frac{b^2 p_b - a^2 p_a}{(1+\mu)E_1(b^2-a^2)};\quad C_2 = -\frac{a^2 b^2(p_b - p_a)}{(1-\mu)E_1(b^2-a^2)}.$$

Окончательно по (4.93) получим такие выражения для напряжений

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= p_a\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= p_a\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - p_b\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4.95)$$

На рис. 4.44 показано распределение напряжений σ_θ и σ_r вдоль радиуса при $p_b = 0$; $p_a = p$, что по (4.95) дает

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right);\quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \qquad (4.96)$$

Наибольшее растягивающее напряжение σ_θ возникает в точках внутренней поверхности цилиндра и превышает давление p. При $(b/a) \to \infty$ напряжение $\sigma_{\theta\,max} \to p$. При $b \to a$ и равенстве $(b - a) = \delta$ напряжение $\sigma_\theta = pa/\delta$, т. е. как в тонкостенной трубе.

На рис. 4.45 показано распределение напряжений в случае, когда внутреннее давление отсутствует, а к внешней границе приложено растягивающее напряжение σ. Когда отверстие мало (при $b/a \to \infty$), формулы (4.95) дают

$$\sigma_r = \sigma\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right);\quad \sigma_\theta = \sigma\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \qquad (4.97)$$

У отверстия наблюдается концентрация напряжений σ_θ, причем $\sigma_{\theta\,max} = 2\sigma$. В этих точках возникает линейное напряженное состояние, так как $\sigma_r = 0$. Вдали от отверстия имеем плоское гидростатическое растяжение с напряжениями $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$.

Теперь рассмотрим решение в напряжениях с использованием функции напряжений φ. Ввиду осевой симметрии она зависит толь-

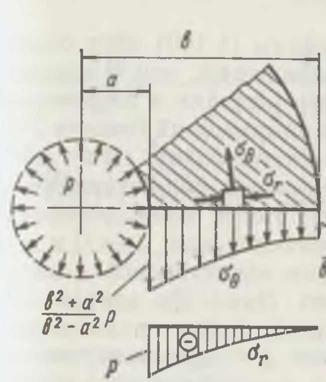


Рис. 4.44

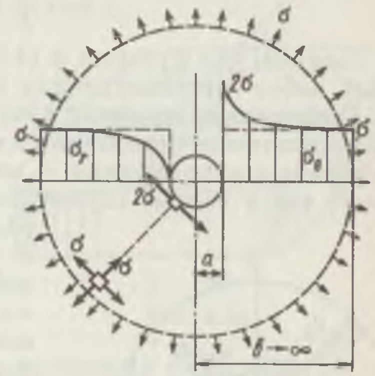


Рис. 4.45

ко от r, т. е. $\varphi = \varphi(r)$, поэтому бигармоническое уравнение (4.88) принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0,$$

или в развернутой форме

$$\varphi^{IV} + \frac{2}{r}\varphi''' - \frac{1}{r^2}\varphi'' + \frac{1}{r^3}\varphi' = 0. \qquad (4.98)$$

Его общее решение будет

$$\varphi = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 r^2 \ln r + C_4. \qquad (4.99)$$

По формулам (4.84) получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 2C_1 + C_2\frac{1}{r^2} + C_3(1 + 2\ln r); \\ \sigma_\theta &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} = 2C_1 - C_2\frac{1}{r^2} + C_3(3 + 2\ln r). \end{aligned}\right\} \qquad (4.100)$$

Формулы (4.100) описывают всевозможные осесимметричные поля напряжений, удовлетворяющие условиям совместности деформаций. В частности, полагая в них $C_3 = 0$, получим решение задачи Ляме

$$\sigma_r = 2C_1 + C_2\frac{1}{r^2};\quad \sigma_\theta = 2C_1 - C_2\frac{1}{r^2}. \qquad (4.101)$$

Эти выражения с точностью до значений постоянных C_1 и C_2 совпадают с (4.93). Используя (4.101) и граничные условия (4.94), найдем из них C_1 и C_2 и придем к формулам (4.95), выражающим решение этой задачи. Заметим попутно, что при известных напряжениях легко определяются и перемещения u с помощью формулы $\varepsilon_\theta = u/r = (\sigma_\theta - \mu\sigma_r)/E$, откуда

$$u = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r)\, r. \tag{4.102}$$

Заметим, что функция φ (4.99) и формулы (4.100) дают более богатый набор осесимметричных полей напряжений, чем в задаче Ляме. Любопытным является вопрос, почему решение в перемещениях дало единственное осесимметричное поле напряжений (задача Ляме), а решение в напряжениях — множество таких полей. Ответ состоит в том, что в первом случае осесимметричными являются как поле напряжений, так и поле перемещений и такое решение (при $u \neq 0$ и $v = 0$) действительно единственное и выражается задачей Ляме. Во втором случае осесимметрично только поле напряжений (4.100) и соответствующие им деформации, а перемещения u и v в общем случае не симметричны.

Рис. 4.46

Примером указанного состояния может служить изгиб кривого бруса с сечением в виде прямоугольника $(b - a) \times 1$ под действием моментов M (рис. 4.46).

Решение этой задачи, найденное Х. С. Головиным в 1881 г., может быть получено по формулам (4.100), в которых три постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из трех условий: равенства нулю σ_r на границах $r = a$ и $r = b$ и того, что эпюра напряжений σ_θ в радиальном сечении приводится к моменту M. Во всех радиальных сечениях, включая сечения, где приложены моменты M, напряжения одинаково распределены, т. е. поле напряжений полярно-симметрично. В то же время перемещения u и v будут несимметричны.

§ 4.13. НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Действие силы на край упругой полуплоскости (задача Фламана). Под упругой полуплоскостью понимается бесконечная пластина толщиной, равной единице, ограниченная плоскостью $x = 0$ (рис. 4.47). Пусть перпендикулярно ее краю приложена сила P, равномерно распределенная по толщине. Такая пластина будет испытывать плоское напряженное состояние.

На рис. 4.48 показано загружение упругого полупространства (т. е. бесконечного объема упругого материала, ограниченного плоскостью $x = 0$) линейно распределенной нагрузкой интенсивности $P = \text{const}$. Слой единичной толщины, выделенный из полупространства, также соответствует условиям рассматриваемой задачи, но будет испытывать плоское деформированное состояние. В подобных условиях находится основание под очень длинным равномерно загруженным ленточным фундаментом. Распределение напряжений

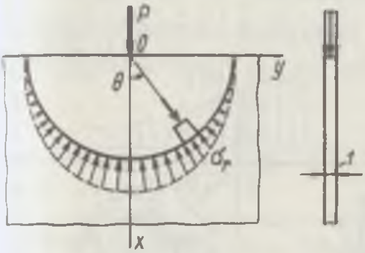


Рис. 4.47

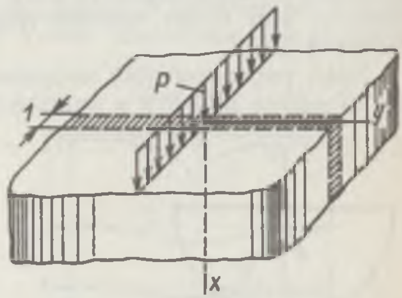


Рис. 4.48

в плоскости $x - y$, как известно, в указанных случаях будет одинаковым (см. § 4.2).

Функцию φ, удовлетворяющую уравнению совместности деформаций (4.88), задаем в виде

$$\varphi = Kr\,\Theta \sin\Theta, : \tag{4.103}$$

где $K = \text{const}$. По формулам (4.84) вычисляем напряжения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2} = 2K\frac{1}{r}\cos\Theta; \\ \sigma_\Theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0; \quad \tau_{r\Theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

Как видим, функции φ (4.103) соответствует в каждой точке пластины линейное напряженное состояние с напряжением σ_r в направлении радиуса r. Такое поле напряжений называют радиальным (см. рис. 4.47).

Для определения константы K вырежем из пластины полукруг радиуса r (рис. 4.49). Элементарные силы $\sigma_r\,\mathrm{d}S$ пересекаются в точке O; следовательно, они приводятся к силе, как их равнодействующей, приложенной в этой точке. Сумма проекций всех сил на ось x дает

$$P + 2\int_0^{\pi/2} \sigma_r\,\mathrm{d}s\cos\Theta = P + 4K\int_0^{\pi/2}\cos^2\Theta\,\mathrm{d}\Theta = P + K\pi = 0.$$

Отсюда получаем $K = -P/\pi$ и окончательное выражение для напряжений

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r}\cos\Theta. \tag{4.105}$$

При $r \to 0$ $\sigma_r \to \infty$. Эта особенность в точке O связана с идеализацией сосредоточенной силы конечной величины P, передаваемой через бесконечно малую площадь. При реальном приложении воздействия типа сосредоточенной силы образуется контактная зона малых, но конечных размеров. Поэтому в некотором объеме малого радиуса $r = \delta$ распределение напряжений будет отличным от описываемого выражением (4.105). При $r > \delta$, согласно принципу Сен-Венана, оно будет соответствовать этому выражению (4.105) (см. также § 5.5).

Зная распределение напряжений в полярной системе координат, легко можно перейти к напряжениям σ_x, σ_y, τ_{xy} в декартовой систе-

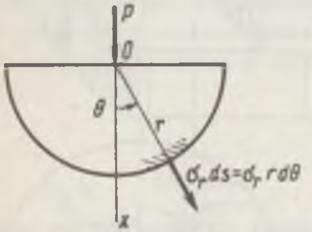


Рис. 4.49

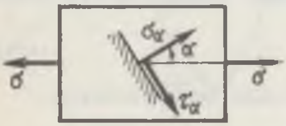


Рис. 4.50

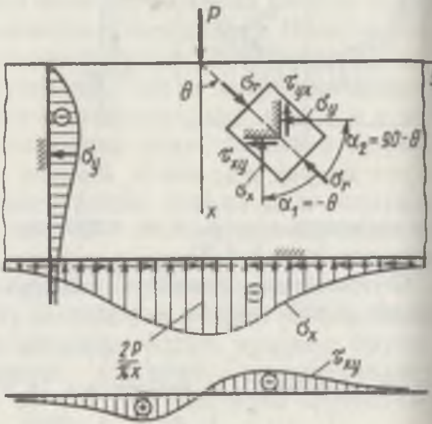


Рис. 4.51

ме, что бывает нужным при решении различных прикладных задач. Напомним формулы для напряжений σ_α и τ_α при одноосном напряженном состоянии (рис. 4.50):

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\,\sigma; \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha. \qquad (4.106)$$

Подставляя в эти формулы для горизонтальной площадки $\alpha_1 = -\Theta$, а для вертикальной $\alpha_2 = 90 - \Theta$ (рис. 4.51) и выражение для σ_r (4.105), получим

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = -\frac{2P}{\pi r}\cos^3\Theta; \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r}\sin\Theta\cos\Theta; \\ &\sigma_y = -\frac{2P}{\pi r}\cos\Theta\sin^2\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.107)$$

Заменяя по формулам $\sin\Theta = y/r$; $\cos\Theta = x/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, выражения (4.107) легко записать полностью в декартовой системе координат. На рис. 4.51 показано распределение напряжений в горизонтальном и вертикальном сечениях.

Важная роль решения Фламана состоит в том, что формулы этого решения могут играть роль функций влияния для произвольной нагрузки q, приложенной к краю основания. Пусть, например, от некоторой заданной нагрузки $q\ (y_1)$ требуется вычислить напряжение в точке $\sigma_x\ (x,\ y)$ (рис. 4.52). Обозначим выражение для σ_x (4.107) при $P = 1$ через $\Phi\ (x,\ y)$, которое называют функцией влияния единичной силы на напряжения σ_x. Тогда от элементарной силы $\mathrm{d}P = q\ (y_1)\ \mathrm{d}y_1$, в рассматриваемой точке возникает напряжение

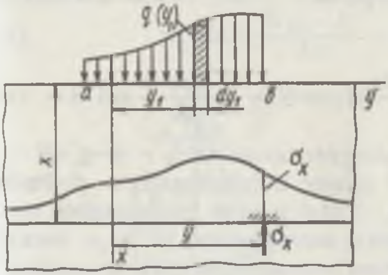


Рис. 4.52

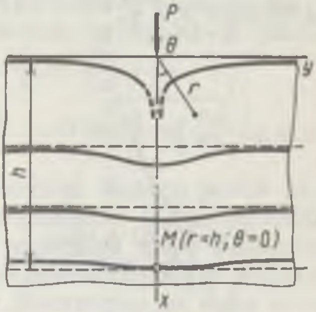


Рис. 4.53

$\mathrm{d}\sigma_x = \Phi\ (x,\ y - y_1)\ q\ (y_1)\ \mathrm{d}y_1$, а полное напряжение σ_x в этой точке от нагрузки q получим, суммируя влияние всех элементарных сил на участке ab:

$$\sigma_x = \int_a^b \mathrm{d}\sigma_x = \int_a^b \Phi\ (x,\ y - y_1)\ q\ (y_1)\ \mathrm{d}y_1. \tag{4.108}$$

С помощью выражений типа (4.108) и соответствующих функций влияния можно вычислить любые факторы в основании от воздействий приложенных на его крае.

В заключение остановимся на определении перемещений u, v в точках упругой полуплоскости от силы P. При известных напряжениях σ_r (4.105) и $\sigma_\Theta = \tau_{r\Theta} = 0$ по закону Гука определяем деформации ε_r, ε_Θ и $\gamma_{r\Theta}$ и подставляем их в геометрические уравнения (4.82). В результате получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E r}\cos\Theta; \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{r} = \mu\frac{2P}{\pi E r}\cos\Theta; \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.109}$$

Интегрируя эти уравнения совершенно аналогично тому, как это было показано на примерах в § 2.6, получим выражения u и v, в которые войдут три произвольные постоянные, которые надо определить исходя из условий закрепления деформируемого элемента как жесткого целого. В данном случае примем условия закрепления упругой полуплоскости такими: некоторая точка M, лежащая на оси симметрии на глубине $r = h$, неподвижна, что дает условия $u_M = 0$; $v_M = 0$ (рис. 4.53). Третье уравнение составим как условие симметрии, в качестве которого примем отсутствие поворота горизонтальных элементов на оси симметрии: $\partial u/\partial \Theta = 0$ при $\Theta = 0$. В результате придем к выражениям для радиального и тангенциального перемещений u и v:

$$u = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{h}{r} \cos \Theta - \frac{(1-\mu) P}{\pi E} \Theta \sin \Theta; \tag{4.110}$$

$$v = -\frac{2P}{\pi E} \ln \frac{h}{r} \sin \Theta - \frac{(1-\mu) P}{\pi E} \Theta \cos \Theta + \frac{(1+\mu) P}{\pi E} \sin \Theta. \tag{4.111}$$

Для точек правой полуоси y следует положить $r = y$, $\Theta = \pi/2$, и тангенциальные перемещения v дадут вертикальную компоненту перемещений края полуплоскости. Знак минус указывает, что они происходят в направлении убывания координаты Θ, т. е. вниз. Меняя этот знак на обратный, получим выражение для прогибов правого края полуплоскости в виде

$$v = \frac{P}{\pi E} \left[2 \ln \frac{h}{y} - (1 + \mu) \right]. \tag{4.112}$$

Для левого края они симметричны [для этого y надо в (4.112) принимать по абсолютному значению]. На рис. 4.53 показаны эпюры вертикальных прогибов для края полуплоскости по (4.112), а на других уровнях — по выражениям (4.110), (4.111).

Как видим, в точке приложения силы имеется особенность в перемещениях: они, как и напряжения, стремятся к бесконечности. Это, как уже указывалось, является следствием схематизации сосредоточенной силы, приложенной в точке. Если воспользоваться выражениями (4.112) или (4.110), (4.111) как функциями влияния, то по выражению типа (4.108) от распределенной нагрузки, приложенной к краю, получим конечные перемещения.

Действие силы на острие бесконечного клина. Эти задачи (рис. 4.54, 4.55) являются обобщением задачи Фламана. Приняв функцию напряжений в том же виде, что и (4.103), придем к радиальному полю напряжений (4.104). Константу K найдем из условия равновесия части клина, выделенной окружным сечением, аналогично рис. 4.49. Угол Θ отсчитываем от направления силы P (от оси x). По сравнению с рис. 4.49 при определении K изменятся лишь пределы интегрирования: вместо пределов от $\Theta = 0$ до $\Theta = \pi/2$ интегрировать надо от $\Theta = 0$ до $\Theta = \alpha$ (рис. 4.54) и от $\Theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ до $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.55). В результате напряжения σ_r будут (соответственно для рис. 4.54 и 4.55)

$$\sigma_r = -\frac{P}{\alpha + 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\Theta}{r}; \tag{4.113}$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\Theta}{r}. \tag{4.114}$$

При $\alpha = \pi/2$ формулы (4.113) и (4.114) приводят к (4.105). При этом случай, изображенный на рис. 4.55, соответствует загружению упругой полуплоскости силой P, параллельной ее краю (рис. 4.56).

Имеются и другие точные решения для бесконечного клина. Они, в частности, могут быть использованы для проверки и уточнения

Рис. 4.54

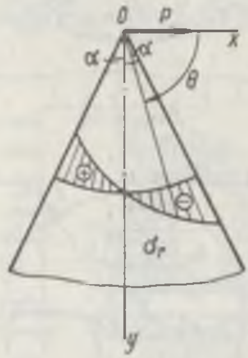


Рис. 4.55

элементарных формул сопротивления материалов. Так, например, в случае изгиба клина (см. рис. 4.55) для напряжений σ_y и τ_{yx} в сечении, параллельном оси x, с использованием (4.114) и (4.106) получим формулы

$$\sigma_y = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}; \tag{4.115}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}. \tag{4.116}$$

На рис. 4.57 для $\alpha = 30°$ по этим выражениям построены эпюры σ_y и τ_{yx}, пунктиром нанесены эпюры тех же напряжений, найденных по элементарным формулам сопротивления материалов, в которых переменность сечения не учитывается. Как видим, учет переменности сечения особенно необходим для касательных напряжений.

Растяжение пластины с круглым отверстием (задача Кирша). Пусть радиус отверстия a в несколько раз меньше ширины пластины. Тогда можно считать, что имеем бесконечную пластину, растянутую напряжением $\sigma_x = \sigma$ и имеющую отверстие радиуса a (рис. 4.58). Выделим из пластины кольцо достаточно большого радиуса $r = b$. Вдали от отверстия имеется простое растяжение $\sigma_x = \sigma$, поэтому по формулам (4.106) для наклонных площадок найдем напряжения

σ_r и $\tau_{r\Theta}$) на границе этого кольца:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma\cos 2\Theta; \quad \tau_{r\Theta} = -\frac{1}{2}\sigma\sin 2\Theta. \tag{4.117}$$

Эти напряжения будем рассматривать как внешнюю нагрузку для кольца. Нагрузка σ_r содержит две части: $\sigma_r = \sigma_r' + \sigma_r''$. Первая $\sigma_r' = \frac{1}{2}\sigma$ — осесимметричная нагрузка и для нее были получены

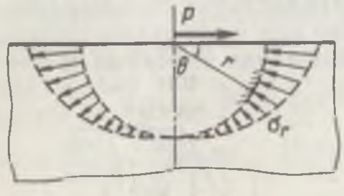


Рис. 4.56

Рис. 4.58

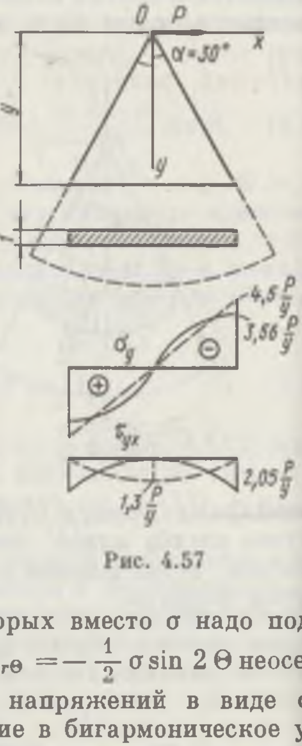


Рис. 4.57

формулы для напряжений (4.97), в которых вместо σ надо подставить $\frac{1}{2}\sigma$. Нагрузки $\sigma_r'' = \frac{1}{2}\sigma\cos 2\Theta$ и $\tau_{r\Theta} = -\frac{1}{2}\sigma\sin 2\Theta$ неосесимметричны. Для них примем функцию напряжений в виде $\varphi = f(r)\cos 2\Theta$. Подставляя это выражение в бигармоническое уравнение (4.88), придем к уравнению для $f(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0. \tag{4.118}$$

Общий интеграл этого уравнения дает такое выражение для f:

$$f = C_1 r^2 + C_2 r^4 + C_3 r^{-2} + C_4. \tag{4.119}$$

Далее остается по формулам (4.84) составить выражения для напряжений. В них войдут постоянные $C_1 \ldots C_4$, которые определятся из условий на поверхностях кольца: $r = a$, $\sigma_r = 0$, $\tau_{r\Theta} = 0$; $r = b$, $\sigma_r = \sigma_r'' = \frac{1}{2}\sigma\cos 2\Theta$, $\tau_{r\Theta} = -\frac{1}{2}\sigma\sin 2\Theta$. В итоге от симметричной и несимметричной нагрузок на кольцо придем к следующим суммарным напряжениям в пластине (при $b \to \infty$):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right];\\
\sigma_\Theta &= \frac{\sigma}{2}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1-3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right];\\
\tau_{r\Theta} &= -\frac{\sigma}{2}\left[1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right]\sin 2\Theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.120)$$

Слагаемые, содержащие степени $(a/r)^2$ и $(a/r)^4$, быстро убывают с удалением точки от отверстия. Поэтому возмущение одноосного поля напряжений, вызванное отверстием, носит местный характер. Это

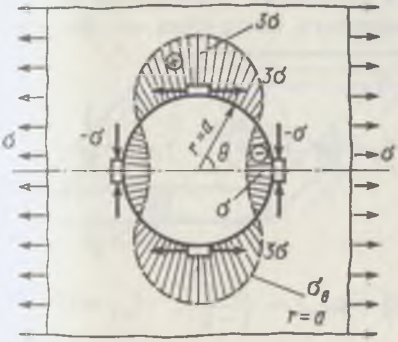


Рис. 4.59

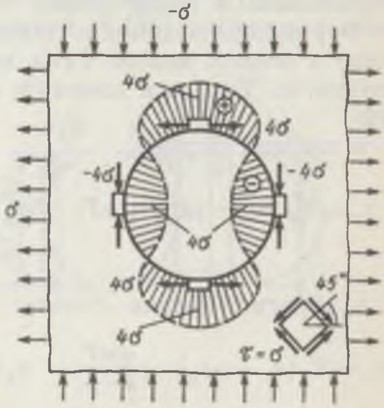


Рис. 4.60

видно из эпюр σ_Θ, показанных для линий $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi/2$. В декартовой системе это будут эпюры напряжений σ_y и σ_x соответственно. Распределение растягивающих и сжимающих напряжений σ_Θ по контуру отверстия показано на рис. 4.59.

Если на расстяжение σ наложим сжатие $(-\sigma)$ в перпендикулярном направлении, то, как известно, пластина в целом будет испытывать чистый сдвиг с касательным напряжением $\tau = \sigma$. Распределение напряжений σ_Θ у отверстия в этом случае показано на рис. 4.60. Коэффициент концентрации при одноосном растяжении у отверстия равен 3, а при чистом сдвиге — 4.

§ 4.14. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть во всем объеме тела, свободного от закреплений, температура изменяется на одинаковую величину T. Это приводит к всестороннему увеличению (уменьшению) линейных размеров тела. При этом относительная величина линейной температурной деформации равна αT, где α — коэффициент температурного расширения, численно равный величине относительного удлинения, вызванного изменением температуры на один градус. Такая свободная, ничем не стесненная температурная деформация не вызывает появления дополнительных напряжений в теле.

Если изменение температуры неравномерно по объему или тело имеет соответствующие закрепления, то свободное температурное расширение одних частей тела будет стеснено взаимодействием с другими частями. В результате в теле появляются дополнительные температурные напряжения.

Из курса сопротивления материалов известны приемы определения температурных напряжений в простейших статически неопределимых стержневых системах. Здесь покажем определение таких напряжений в более общих случаях.

Формально изменение температуры тела T вносит лишь изменение в запись закона Гука из числа основных уравнений теории упругости. Так, для плоского напряженного состояния он получит вид:

в прямой форме

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \tag{4.121}$$

в обратной форме

$$\sigma_x = E_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}; \quad \sigma_y = E_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tag{4.122}$$

где $E_1 = E/(1-\mu^2)$ и $T > 0$.

Все остальные уравнения теории упругости остаются без изменения. Поэтому температурная задача может решаться как обычная задача упругости, но с измененной записью закона Гука.

Практически для того, чтобы можно было воспользоваться соответствующими готовыми разрешающими уравнениями (в напряжениях или в перемещениях), удобно бывает свести указанную температурную задачу к задаче о действии на тело некоторой дополнительной нагрузки. Рассуждаем при этом следующим образом. Пусть тело получило изменение температуры $T = T(x, y)$. Исключим на время его деформации (в плоскости $x - y$), т. е. положим $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$. Тогда из (4.122) найдем напряжения, возникшие в теле в первом состоянии:

$$\sigma'_x = \sigma'_y = -\frac{E\alpha T}{1-\mu}; \quad \tau'_{xy} = 0. \tag{4.123}$$

Для того чтобы эти напряжения могли существовать в теле в общем случае, к нему должна быть приложена некоторая нагрузка. Из

уравнений равновесия (4.3) найдем необходимую объемную нагрузку:

$$\left.\begin{aligned} X' &= -\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x} - \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y} = \frac{E\alpha}{1-\mu}\frac{\partial T}{\partial x}; \\ Y' &= -\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y} - \frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x} = \frac{E\alpha}{1-\mu}\frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{4.124}$$

а из уравнений равновесия на поверхности тела (4.4) — соответствующую поверхностную нагрузку:

$$\begin{aligned} p'_x &= \sigma'_x l + \tau'_{yx} m = -\frac{E\alpha l}{1-\mu}T; \\ p'_y &= \tau'_{xy} l + \sigma'_y m = -\frac{E\alpha m}{1-\mu}T. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Итак, при одновременном изменении температуры $T(x, y)$ и приложении объемной (4.124) и поверхностной (4.125) нагрузок в теле

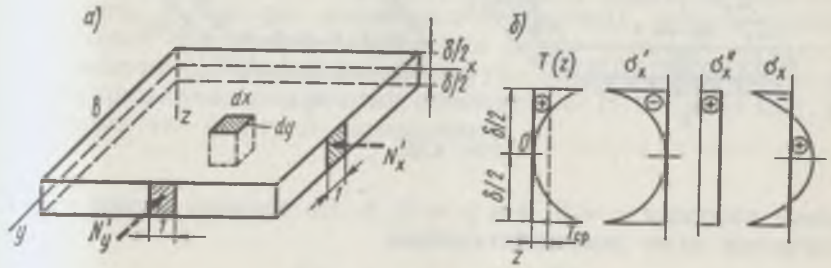


Рис. 4.61

возникает первая часть температурных напряжений (4.123) (первое состояние). Теперь снимем упомянутые нагрузки, т. е. приложим к нему те же нагрузки, но с обратным знаком. Решая на эти силовые воздействия обычную задачу теории упругости, получим вторую часть температурных напряжений: σ''_x, σ''_y, τ''_{xy} (второе состояние). Действительные полные температурные напряжения в теле будут представлены суммой первого и второго состояний:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x, \quad \sigma_y = \sigma'_y + \sigma''_y; \quad \tau_{xy} = \tau''_{xy}. \tag{4.126}$$

Полные перемещения u, v точек тела определяются второй частью решения (вторым состоянием).

В качестве примера рассмотрим свободную от закреплений пластину (рис. 4.61, a). Пусть изменение температуры задано законом, симметричным относительно плоскости xy:

$$T = T(z). \tag{a}$$

Оно может быть вызвано, например, постепенным остыванием пластины за счет равномерного оттока теплоты через ее боковые поверхности $a \times b$. Так как T зависит только от координаты z, то каждый элементарный столбик dx, dy, δ, выделенный из пластины, находится в одинаковых условиях и его деформации ε_z могут происходить свободно.

Напряжения первого состояния (4.123) при полном исключении деформаций будут

$$\sigma'_x = \sigma'_y = -\frac{E\alpha T(z)}{1-\mu}; \quad \tau'_{xy} = 0. \tag{б}$$

Отвечающая им объемная нагрузка (4.124) в данном случае равна нулю, так как функция T не зависит от x и y. Поверхностная нагрузка p'_x и p'_y (4.125) предстанет в виде напряжений (б), приложенных

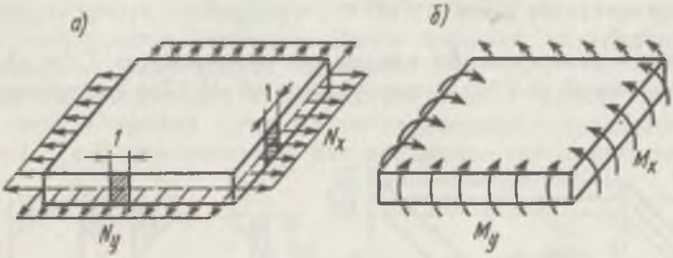


Рис. 4.62

к граням пластины $x = 0$, a и $y = 0$, b. На единицу длины грани эти нагрузки дают равнодействующие

$$N'_x = N'_y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma'_x \, dz = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} T(z) \, dz. \tag{в}$$

Пусть $T(z) > 0$. Тогда напряжения σ'_x, σ'_y и усилия N'_x и N'_y (в) будут сжимающими (рис. 4.61, *б*). Во втором состоянии прикладываем эти нагрузки с обратным знаком, т. е. растягивающие $N_x = -N'_x$ и $N_y = -N'_y$ (рис. 4.62, *а*). От такого равномерного центрального растяжения возникают напряжения

$$\sigma''_x = \sigma''_y = \frac{N_x}{\delta \cdot 1} = \frac{E\alpha}{(1-\mu)\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} T(z) \, dz. \tag{г}$$

По формуле (4.126) получим суммарные напряжения

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[\frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} T(z) \, dz - T(z) \right]. \tag{4.127}$$

Первое слагаемое в скобках имеет смысл средней температуры $T_{ср}$ по толщине пластины: формулу (4.127) можно переписать в виде

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\alpha}{1-\mu} [T_{ср} - T(z)]. \tag{4.128}$$

На рис. 4.61, *б* показаны эпюры σ_x', σ_x'' и σ_x при $T(z) > 0$. Легко видеть, что в каждом сечении напряжения σ_x и σ_y самоуравновешены, площадь этих эпюр на высоте δ равна нулю. Подобные рассуждения можно применить и в случае, если температура $T(z)$ не симметрична относительно середины толщины пластины. Тогда в качестве краевых воздействий появятся кроме усилий N_x, N_y и изгибающие моменты M_x, M_y (рис. 4.62, *б*)

$$N_x = N_y = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} T(z)\, \mathrm{d}z; \quad M_x = M_y = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} zT(z)\, \mathrm{d}z$$

и вместо формулы (4.127) получим

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{N_x}{\delta} + \frac{M_x z}{\delta^3/12} - \frac{E\alpha}{1-\mu} T(z). \tag{4.129}$$

Заметим, что полученные формулы для σ_x, σ_y справедливы только для точек, достаточно удаленных от боковых кромок пластины, на которых фактически напряжения равны нулю. В соответствии с принципом Сен-Венана вдоль контура пластины существует зона, где распределение напряжений отличается от (4.127) и (4.129), а вне этой зоны эти формулы справедливы.

ГЛАВА 5

ОБЪЕМНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 5.1. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА

При изучении курса «Сопротивление материалов» основное внимание сосредоточивалось на анализе напряженно-деформированного состояния прямолинейных стержней при осевом растяжении-сжатии, изгибе и кручении. Решение соответствующих задач было получено с использованием гипотезы плоских сечений. Вопрос о том, в какой степени такие решения согласуются со строгими решениями, удовлетворяющими уравнениям теории упругости, остался открытым. В настоящем и следующем параграфах дается ответ на этот вопрос применительно к задачам чистого изгиба призматического стержня и кручения стержней круглого поперечного сечения.

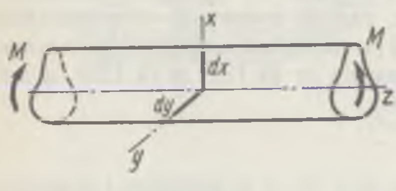


Рис. 5.1

Рассмотрим прямолинейный стержень, поперечное сечение которого имеет одну ось симметрии. В качестве системы координат выберем следующую: ось z совпадает с продольной осью стержня, а оси x и y — с главными осями инерции среднего сечения, причем ось x является осью симметрии поперечного сечения. Стержень находится под действием двух моментов, приложенных по торцам и лежащих в плоскости xOz (рис. 5.1).

В курсе «Сопротивление материалов» напряжения в стержне определяются выражениями

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad \sigma_z = -\frac{E}{\rho} x,$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси стержня, $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_y}$; J_y — момент инерции поперечного сечения относительно оси y. Проверим, удовлетворяет ли это решение уравнениям теории упругости.

Уравнения равновесия во внутренних точках стержня удовлетворяются, если массовые силы равны нулю, т. е.

$$X = Y = Z = 0.$$

Уравнения равновесия на боковой поверхности, где направляющий косинус $[\cos(\nu, z) = n]$ равен нулю, очевидно, также выполняются, поскольку

$$p_x = p_y = p_z = 0.$$

Условия равновесия на торцах стержня, где $l = m = 0$, $n = \pm 1$ (верхний знак соответствует правому, а нижний — левому сечению), соблюдаются, если принять, что внешние моменты представлены силами, распределенными по торцам по линейному закону

$$p_z = \mp \frac{E}{\rho} x,$$

а

$$p_x = p_y = 0.$$

При этом справедливо равенство

$$M = \iint_A p_z x \,\mathrm{d}A = \mp \frac{EJ_y}{\rho},$$

где A — площадь поперечного сечения стержня.

Уравнения совместности деформаций также тождественно удовлетворяются, так как напряжения являются линейными функциями пространственных координат.

Таким образом, для рассматриваемого напряженного состояния и способа приложения внешних моментов уравнения теории упругости удовлетворяются.

Найдем деформации и перемещения, возникающие в стержне. На основании закона Гука имеем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \mu \frac{x}{\rho}; \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x}{\rho}; \tag{5.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Интегрируя уравнение (5.2), получим

$$w = -\frac{xz}{\rho} + \psi(x, y), \tag{5.4}$$

где $\psi(x, y)$ — произвольная функция координат x, y.

Подставим решение (5.4) в два последних уравнения (5.3):

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\rho} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Отсюда найдем

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x} z + \frac{z^2}{2\rho} + f(x, y); \tag{5.5}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} z + \varphi(x, y). \tag{5.6}$$

Здесь $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — произвольные функции координат x, y.

Продифференцируем выражение (5.5) по x, а (5.6) — по y и приравняем их на основании равенств (5.1) к $\frac{\mu x}{\rho}$:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} z + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mu x}{\rho}; \\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mu x}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

Так как уравнения (5.7) должны удовлетворяться при любых значениях z, получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mu x}{\rho}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mu x}{\rho}. \quad (5.9)$$

Из уравнений (5.9) имеем

$$f = \frac{\mu x^2}{2\rho} + f_0(y); \quad \varphi = \frac{\mu xy}{\rho} + \varphi_0(x),$$

причем $f_0(y)$, $\varphi_0(x)$ — произвольные функции координат y или x.

Тогда

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial x} z + \frac{z^2}{2\rho} + \frac{\mu x^2}{2\rho} + f_0(y); \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial y} z + \frac{\mu xy}{\rho} + \varphi_0(x).$$

Подставим выражения для u и v в первое из уравнений (5.3)

$$-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} z + \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = -\frac{\mu y}{\rho}. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) должно удовлетворяться при любых значениях z; следовательно,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = -\frac{\mu y}{\rho}. \quad (5.12)$$

Функция $\psi(x, y)$ определяется из уравнений (5.8) и (5.11), из которых найдем

$$\psi(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Из уравнения (5.12) следует

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\mu y}{\rho} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = c_4 = \text{const}.$$

Отсюда получим

$$\varphi_0(x) = -c_4 x + c_5; \quad f_0(y) = -\frac{\mu y^2}{2\rho} + c_4 y + c_6.$$

Здесь c_4, c_5, c_6 — произвольные постоянные.

Окончательно имеем

$$u=\frac{z^2}{2\rho}+\mu\,\frac{x^2-y^2}{2\rho}+c_4y-c_1z+c_6;$$

$$v=\mu\,\frac{xy}{\rho}-c_4x-c_2z+c_5;\quad w=-\frac{xz}{\rho}+c_1x+c_2y+c_3.$$

Сформулируем условия, из которых будут определяться константы $c_1\ldots c_6$.

1. В силу симметрии стержня относительно координатной плоскости xOy должно соблюдаться равенство

$$w=0 \text{ при } z=0,$$

из которого находятся три произвольные постоянные:

$$c_1=c_2=c_3=0.$$

2. Для удобства будем считать, что начало координат неподвижно, т. е.

$$u=v=0 \quad \text{при} \quad x=y=z=0.$$

Отсюда следует

$$c_5=c_6=0.$$

3. При рассматриваемом воздействии элемент оси симметрии поперечного сечения dx (рис. 5.1) в процессе деформирования стержня не поворачивается в плоскости xOy, что означает

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0 \text{ при } x=y=z=0.$$

Очевидно, что вместо этого условия можно было бы записать

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad x=y=z=0.$$

Из последних условий имеем $c_4=0$.
В результате можно записать:

$$u=\frac{M}{2EJ_y}\,[z^2+\mu\,(x^2-y^2)];$$

$$v=\frac{\mu M}{EJ_y}\,xy;\quad w=-\frac{M}{EJ_y}\,xz.$$

При $x=y=0$ получим зависимости

$$v=w=0;\quad u=\frac{M}{2EJ_y}\,z^2,$$

которые описывают упругую линию изогнутого стержня.

Рассмотрим плоское сечение стержня, для которого координата z равна z_0 (сечение перпендикулярно продольной оси в недеформированном состоянии). При изгибе продольные координаты точек того же сечения определяются выражением

$$z = z_0 + w = z_0 - \frac{M}{EJ_y} x z_0,$$

описывающим плоскость, параллельную оси y. Следовательно, поперечное сечение стержня, плоское до деформации, остается плоским и после деформации. Можно показать, что такое сечение будет оставаться перпендикулярным изогнутой оси стержня. Таким образом, гипотеза плоских сечений при чистом изгибе оказывается оправданной.

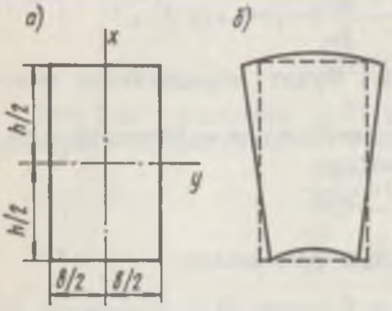


Рис. 5.2

Рассмотрим далее частный случай стержня, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник (рис. 5.2, *а*). Запишем координаты точек контура поперечного сечения с координатой z_0 в деформированном состоянии:

боковые кромки

$$y = \pm \frac{b}{2} + \frac{\mu M}{2EJ_y} bx; \quad z = z_0 - \frac{M}{EJ_y} x z_0;$$

горизонтальные кромки

$$x = \pm \frac{h}{2} \pm \frac{M}{2EJ_y}\left[z_0^2 + \mu\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right]; \quad z = z_0 \mp \frac{Mh}{2EJ_y} z_0.$$

Отсюда видно, что в процессе деформирования стержня прямолинейные в исходном (недеформированном) состоянии верхняя и нижняя кромки поперечного сечения принимают параболическое очертание (рис. 5.2, *б*), а боковые кромки остаются прямолинейными.

§ 5.2. КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня произвольного поперечного сечения под действием двух внешних моментов, лежащих в плоскости его крайних поперечных сечений (рис. 5.3). Обьемные силы считаем равными нулю, а боковую поверхность — свободной от внешних нагрузок.

Систему координат выберем следующим образом: ось z совпадает с осью кручения, т. е. осью, которая при закручивании стержня остается неподвижной, оси x, y взаимно ортогональны и произвольным образом располагаются в плоскости крайнего поперечного сечения.

Для решения поставленной задачи в перемещениях воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана, который, как известно, заключается в задании одних неизвестных функций и отыскании других из уравнений теории упругости. В соответствии с этим методом из трех функций перемещений u, v и w зададимся первыми двумя. Допустим, что все сечения стержня деформируются одинаково и что компоненты перемещений точек в направлении осей x и y определяются выражениями

$$u = -\Theta \frac{z}{l} y; \quad v = \Theta \frac{z}{l} x,$$

где Θ — угол закручивания одного конца стержня относительно другого; l — длина стержня.

В отличие от стержней круглого поперечного сечения, где в процессе деформации сечения плоские в исходном состоянии оставались плоскими и после деформации, в стержнях некруглого сечения эта гипотеза места не имеет и поэтому следует принять

$$w = \frac{\Theta}{l} \varphi(x, y).$$

Рис. 5.3

Здесь $\varphi(x, y)$ — функция, изображающая искривленную поверхность поперечного сечения (депланацию сечения) и называемая *функцией кручения*.

Деформации и напряжения в точках стержня

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\Theta}{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right); \quad \gamma_{zx} = \frac{\Theta}{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right);$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0;$$

$$\tau_{yz} = \frac{G\Theta}{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right); \quad \tau_{zx} = \frac{G\Theta}{l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right). \tag{5.13}$$

Первые два уравнения равновесия при таких соотношениях удовлетворяются тождественно.

Подставляя выражения для τ_{yz}, τ_{zx} в третье уравнение равновесия

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0,$$

убеждаемся, что оно удовлетворяется, если функция кручения $\varphi(x, y)$ является решением двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{5.14}$$

или

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Из условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности (из уравнения равновесия на поверхности тела) следует равенство

$$\tau_{xz} \cos(x, \nu) + \tau_{yz} \cos(y, \nu) = 0.$$

С использованием функции $\varphi(x, y)$ оно записывается так:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) \cos(x, \nu) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \cos(y, \nu) = 0. \qquad (5.15)$$

Заметим, что сумма

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, \nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, \nu)$$

представляет собой производную функции φ вдоль внешней нормали к контуру $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$, в связи с чем уравнению (5.15) можно придать вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu). \qquad (5.16)$$

Граничные условия на торцах стержня удовлетворяются только в том случае, если внешние моменты прикладываются в виде сил, распределенных в пределах крайних поперечных сечений стержня по закону (5.13).

Выразим крутящий момент, действующий в поперечном сечении, через функцию φ:

$$M_{\text{кр}} = \int (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dx\, dy =$$

$$= G \frac{\Theta}{l} \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dy. \qquad (5.17)$$

Здесь интегрирование производится по области, ограниченной контуром поперечного сечения.

Иногда момент $M_{\text{кр}}$ записывают в виде

$$M_{\text{кр}} = D_{\text{кр}} \frac{\Theta}{l},$$

где $D_{\text{кр}}$ — жесткость стержня при кручении, которая равна

$$D_{\text{кр}} = G \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dy. \qquad (5.18)$$

Итак, решение задачи о кручении стержня сведено к определению функции $\varphi(x, y)$, которая должна удовлетворять уравнению (5.14) и граничному условию (5.16).

В некоторых случаях рассматриваемую задачу целесообразно решать в напряжениях. Для этого вместо функции φ введем новую функцию $F(x, y)$, называемую *функцией напряжений Прандтля*, которая аналогична функции напряжений Эри в плоской задаче теории упругости.

Очевидно, что уравнения равновесия будут удовлетворены, если положить

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}. \qquad (5.19)$$

Определяя с помощью закона Гука деформации γ_{yz}, γ_{xz} через функцию F и подставляя их в уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\, \partial z}$$

(остальные уравнения удовлетворяются тождественно), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\nabla^2 F = c = \text{const}. \qquad (5.20)$$

Сравнивая выражения для напряжений τ_{yz}, τ_{zx} в (5.13) и (5.19) между собой, найдем связь между функциями $F(x, y)$ и $\varphi(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \frac{G\Theta}{l}; \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= +\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) \frac{G\Theta}{l}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

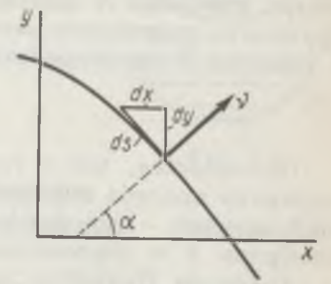


Рис. 5.4

Продифференцируем первое из этих равенств по x, а второе — по y и сложим их друг с другом. С учетом уравнения (5.14) получим

$$\nabla^2 F = -2 \frac{G\Theta}{l}. \qquad (5.22)$$

Таким образом, константа в уравнении (5.20) равна $-2 \frac{G\Theta}{l}$. Запишем граничные условия (5.15) через функцию F. Как видно из рис. 5.4 ($\cos(x, \nu) = \cos\alpha$, $\cos(y, \nu) = \sin\alpha$),

$$dy = \cos\alpha\, ds; \quad dx = -\sin\alpha\, ds.$$

Тогда соотношение (5.15) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dx = 0.$$

Выразив из (5.21) производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ через производные от функции F, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Это равенство эквивалентно равенству

$$F = \mathrm{const}, \tag{5.23}$$

которое должно выполняться на контуре поперечного сечения стержня.

Если область, ограниченная контуром, является односвязной, то указанную константу можно принять произвольной, так как в силу уравнений (5.19) она не влияет на значения напряжений. Проще всего ее принять равной нулю. Таким образом, функция напряжений $F(x, y)$ должна удовлетворять уравнению (5.22) и обращаться в нуль на контуре односвязного поперечного сечения стержня.

Подставляя выражение (5.19) в интеграл (5.17) и дважды интегрируя по частям, получим

$$M_{\text{кр}} = 2\iint F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5.24}$$

На соотношениях (5.19), (5.24) основана так называемая мембранная аналогия Прандтля. Представим себе нерастяжимую мембрану, натянутую на упругий контур такого же очертания, как и контур поперечного сечения скручиваемого стержня. Усилия натяжения мембраны N одинаковы во всех направлениях. Мембрана загружается равномерно распределенной нагрузкой q, которая связана с усилием N соотношением

$$\frac{q}{N} = 2G\frac{\Theta}{l}.$$

Оказывается, что с точностью до постоянного множителя $G\Theta/l$ ординаты прогиба мембраны равны значениям функции F, а крутящий момент — удвоенному объему, ограниченному поверхностью мембраны и ее первоначальной плоскостью.

Аналогия Прандтля дает возможность наглядно представить и распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня. Рассмотрим линии уровня поверхности, описываемой функцией напряжений $z = F(x, y)$. На этих линиях должно выполняться условие

$$\mathrm{d}F = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = 0.$$

Отсюда имеем равенство

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}},$$

которое свидетельствует о том, что вектор полного касательного напряжения τ_z, равного геометрической сумме векторов напряжений τ_{zx}, τ_{zy}, всегда направлен по касательной к линии уровня функции F (или поверхности прогиба мембраны).

На контуре поперечного сечения линия уровня $F = \text{const}$ совпадает с самим контуром, и при любом внешнем моменте направление касательного напряжения τ_z остается неизменным.

В частном случае стержня круглого поперечного сечения линии уровня поверхности $z = F(x, y)$ являются окружностями (рис. 5.5, *а*), а сама функция F при условии равенства ее нулю на контуре, в чем нетрудно убедиться простой подстановкой в уравнение (5.22), имеет вид

$$F(x, y) = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{G\Theta}{l},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Таким образом, мембрана после загружения ее равномерно распределенной нагрузкой принимает форму параболоида вращения (рис. 5.5, *б*).

Рис. 5.5

Касательные напряжения τ_{zy}, τ_{zx} определяются выражениями

$$\tau_{zy} = G\frac{\Theta}{l}x; \quad \tau_{zx} = -G\frac{\Theta}{l}y,$$

а полное касательное напряжение равно

$$\tau_z = G\frac{\Theta}{l}r.$$

Из соотношения (5.24) получим

$$M_{\text{кр}} = GJ_\rho\frac{\Theta}{l},$$

причем $J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}$ — полярный момент инерции круга.

Найдем функцию $\varphi(x, y)$, воспользовавшись уравнениями (5.21), из которых следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Этим уравнениям удовлетворяет функция

$$\varphi(x, y) = \text{const}.$$

Константа c определяется из геометрических условий, не влияющих на деформацию кручения стержня. Если принять, что центр кручения поперечного сечения ($x = y = 0$) не смещается в направлении оси z, то $c = 0$. В результате видно, что депланация поперечных сечений стержня отсутствует.

Итак, решение, полученное в сопротивлении материалов для закручиваемого стержня круглого поперечного сечения, основанное на гипотезе плоских сечений, удовлетворяет всем уравнениям теории упругости при условии, что внешние моменты создаются силами, распределенными по поперечному сечению по тому же закону, что и касательные напряжения τ_{zx}, τ_{zy} (или, что то же самое, полные касательные напряжения τ_z).

§ 5.3. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ УЗКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для стержня прямоугольного поперечного сечения линии уровня и поверхность $z = F(x, y)$ имеют вид, показанный на рис. 5.6, однако получить выражение функции F значительно труднее, чем в случае стержня круглого сечения. В том случае, когда сечение имеет форму прямоугольника, вытянутого в одном направлении так, что одна его сторона во много раз меньше другой стороны (рис. 5.7, *а*), с помощью мембранной аналогии легко можно найти приближенное решение.

В местах, удаленных от коротких сторон, поверхность мембраны приближенно может быть принята в виде цилиндрической поверх-

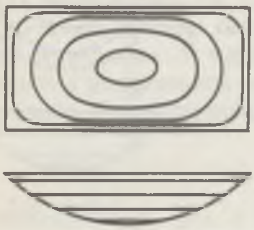


Рис. 5.6

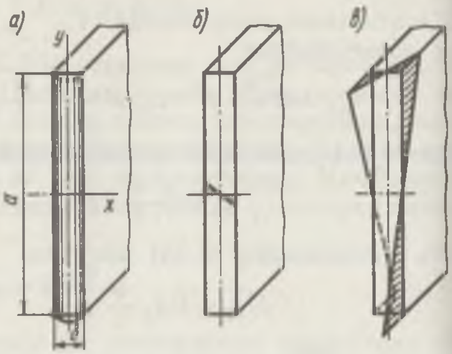


Рис. 5.7

ности с образующей, параллельной длинным сторонам. В соответствии с этим замечанием примем функцию напряжений в виде (рис. 5.7, *а*)

$$F(x, y) = c\left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right). \tag{5.25}$$

На длинных сторонах она удовлетворяет условию $F = 0$. Подставив выражение (5.25) в уравнение (5.22), найдем $c = -\frac{G\Theta}{l}$. Тогда

$$\tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 2G\frac{\Theta}{l}x, \tag{5.26}$$

т. е. напряжения τ_{zy} распределены вдоль оси x по линейному закону и наибольшее значение принимают на длинных сторонах прямоугольника (рис. 5.7, *б*):

$$\tau_{zy}^{\max} = G\frac{\Theta}{l}b. \tag{5.27}$$

Из соотношения (5.24) имеем

$$M_{кр} = G \frac{\Theta}{l} \frac{ab^3}{3}.$$

Напряжения τ_{yz} связаны с моментом равенством

$$\tau_{zy} = \frac{6M}{ab^3} x; \quad \tau_{zy}^{\max} = \frac{3M}{ab^2}.$$

Зная функцию напряжений $F(x)$, получим из соотношений (5.21)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x.$$

Отсюда найдем функцию кручения:

$$\varphi(x, y) = xy + c_1.$$

Константа c_1, как и в стержне круглого сечения, определяется из граничных геометрических условий. Принимая, что центр кручения поперечного сечения ($x = y = 0$) не смещается в направлении оси z, имеем $c_1 = 0$.

Таким образом, окончательно для депланации сечения стержня получим выражение

$$w = \frac{\Theta}{l} xy.$$

Картина депланации при кручении стержня показана на рис. 5.7, *в*.

§ 5.4. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО (ЗАДАЧА БУССИНЕСКА)

В § 4.13 была рассмотрена задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость. Близкой к этой задаче, хотя и более сложной является задача о действии на полупространство сосредоточенной силы, приложенной нормально к плоскости B, ограничивающей полупространство (рис. 5.8).

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой приложения силы, а вдоль линии ее действия направим ось z. Две другие оси располагаются произвольно (в силу симметрии задачи относительно оси z) в плоскости B.

Напряжения, возникающие в теле, должны удовлетворять следующим граничным условиям: на бесконечности все компоненты тензора напряжений обращаются в нуль; в точках плоскости B касательные напряжения τ_{zx}, τ_{zy} равны нулю, а нормальные напряжения σ_z равны нулю во всех точках, за исключением точки приложения силы F.

Опуская математические рассуждения, приведем окончательные выражения для напряжений в точке M с координатами x, y, z

(рис. 5.9):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= -\frac{3F}{2\pi}\frac{z^3}{R^5};\\
\sigma_x &= -\frac{3F}{2\pi}\left\{\frac{x^2 z}{R^5}+\frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)}-\frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2R^3}+\frac{z}{R^3}\right]\right\};\\
\sigma_y &= -\frac{3F}{2\pi}\left\{\frac{y^2 z}{R^5}+\frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)}-\frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2R^3}+\frac{z}{R^3}\right]\right\};\\
\tau_{zx} &= -\frac{3F}{2\pi}\frac{xz^2}{R^5};\\
\tau_{zy} &= -\frac{3F}{2\pi}\frac{yz^2}{R^5};\\
\tau_{xy} &= -\frac{3F}{2\pi}\left[\frac{xyz}{R^5}-\frac{1-2\mu}{3}\frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2R^3}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (5.28)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Анализ напряженного состояния в точке M показывает, что полное напряжение p (геометрическая сумма напряжений σ_z и τ_{zr}), действующее на горизонтальной площадке в меридиональной плоскости, проходящей через ось z, всегда направлено к началу координат [к точке приложения сосредоточенной силы (рис. 5.9)] и равно

Рис. 5.8

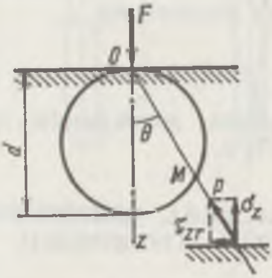


Рис. 5.9

$$p = -\frac{3F}{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{R^2}.$$

Учитывая зависимость

$$\frac{R}{\cos\Theta} = d,$$

можно записать

$$p = -\frac{3F}{2\pi d^2}. \qquad (5.29)$$

Таким образом, во всех точках сферы диаметром d, касающейся точки O, полное напряжение p на горизонтальной площадке одинаково и определяется соотношением (5.29). С уменьшением диаметра сферы напряжения p возрастают так, что в окрестности точки O они достигают больших значений, вследствие чего материал там находится в пластическом состоянии. Поэтому выражения (5.28) справедливы только в точках, достаточно удаленных от точки O. Заметим, что в рассматриваемой задаче ситуация оказывается сходной с той, которая наблюдалась в задаче Фламана (задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость).

По известным напряжениям могут быть найдены перемещения u, v, w. Ограничимся выражением для перемещения w

$$w = \frac{(1+\mu) F}{2\pi E}\left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\mu)}{R}\right].$$

В частности, вертикальные перемещения точек плоскости B (см. рис. 5.8) определяются равенством

$$w = \frac{(1-\mu^2) F}{\pi E R}.$$

Решение задачи о действии на полупространство нагрузки, отличной от одной сосредоточенной силы, легко может быть получено на основании принципа суперпозиции из рассмотренной задачи.

Пусть, например, в некоторой области плоской грани полупространства (рис. 5.10) приложена нормальная распределенная нагрузка $q(x, y)$. Выделяя из этой области элементарную площадку $\mathrm{d}A$ и заменяя нагрузку, приходящуюся на нее, сосредоточенной силой, равной равнодействующей $q\,\mathrm{d}A$, найдем значения напряжений и перемещений, возникающих в точках полупространства. Производя интегрирование по площади области A, получим полные значения указанных факторов.

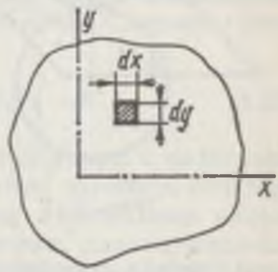


Рис. 5.10

В дальнейшем потребуется функция w, определяющая вертикальные перемещения точек плоскости $z = 0$. С учетом изложенного найдем

$$w = \frac{1-\mu^2}{\pi E}\iint \frac{q}{R}\,\mathrm{d}A. \tag{5.30}$$

Детальный анализ распределения напряжений и деформаций в полупространстве при действии на него сосредоточенной силы или нагрузки, приложенной по некоторой области A, показывает, что и напряженное и деформированное состояния имеют локальный характер. Действительно, при удалении точек M (см. рис. 5.9) от точек приложения нагрузки, например, напряжения уменьшаются пропорционально отношению $1/R^2$. Это означает, что если область приложения нагрузки A имеет характерный размер l, то в точках, удаленных от области A на расстояние, значительно бóльшее l, напряжения и деформации будут значительно меньше тех, которые имеют место в окрестности области A. Отсюда следует, что в случае нагрузки, приложенной в области A к упругому телу с криволинейной поверхностью, наименьший радиус кривизны которой значительно превышает размер l, распределение напряжений и деформаций в теле будет почти таким же, как и в полупространстве при действии на него той же нагрузки.

§ 5.5. ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ ДВУХ ТЕЛ ДРУГ НА ДРУГА

Рассмотрим два упругих тела, имеющих гладкую криволинейную поверхность, которые в исходном состоянии соприкасаются друг с другом в точке O (рис. 5.11). Выберем эту точку за начало координат и совместим оси x и y с касательной плоскостью, общей для обоих тел. Ось z перпендикулярна касательной плоскости, и для каждого тела ее положительное направление совпадает с направлением внутренней нормали.

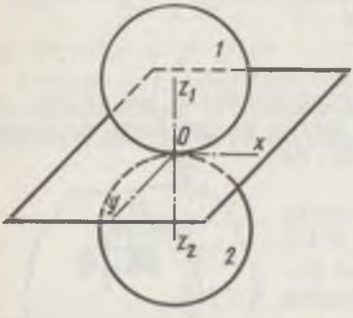


Рис. 5.11

Для вычисления расстояния между противолежащими точками тел воспользуемся разложением функций

$$z_1 = f_1(x, y); \; z_2 = f_2(x, y),$$

которыми описываются поверхности тел в окрестности контакта, в ряд Тейлора, удерживая в нем первые три члена. При этом очевидно, что константа и члены, содержащие первые степени координат, в разложении равны нулю, так как начало координат принадлежит поверхностям тел и оси x, y расположены в касательной плоскости.

Таким образом, расстояние между указанными точками тел определяется однородной функцией, содержащей координаты x и y во второй степени. Поворотом осей x, y можно добиться того, что член ряда, содержащий произведение xy, обратится в нуль. Тогда

$$z_1 + z_2 = Bx^2 + Cy^2, \tag{5.31}$$

где константы B, C определяются геометрией соприкасающихся тел. Можно показать, что они имеют одинаковый знак. В таком случае все равноотстоящие точки проецируются на касательную плоскость в эллипсы с центром в начале координат.

Если к телам приложить нагрузку, удаленную от места их касания с равнодействующей, направленной вдоль оси z, тогда тела начнут деформироваться и в зоне контакта произойдет соединение точек двух тел.

С точностью до членов высшего порядка малости можно принять, что при сжатии тел в соприкосновение приходят те точки, которые в исходном состоянии лежали на одном перпендикуляре к общей касательной плоскости. Те точки, которые в недеформированном состоянии находились на одинаковом расстоянии друг от друга, определяемом выражением (5.31), приходят в соприкосновение одновременно, образуя в результате поверхность, называемую *поверхностью давления*. Контур этой поверхности называется *контуром давления*.

Учитывая замечания, сделанные в конце предыдущего параграфа, для подсчета напряжений и деформаций в телах *1* и *2* можно воспользоваться соотношениями, полученными при решении задачи о действии нагрузки на полупространство. Интенсивное деформирование наблюдается в областях, прилегающих к поверхности давления, а в точках, достаточно удаленных от нее, деформации оказываются практически равными нулю.

Обозначим перемещения точек тел вдоль осей x, y, z для первого тела через u_1, v_1, w_1, для второго тела — через u_2, v_2, w_2, а сближение недеформированных частей тела — через α.

Если в исходном положении расстояние между противолежащими точками определялось выражением (5.31), то после сдавливания для точек, оказавшихся на поверхности давления, должно быть справедливо следующее равенство:

$$\alpha - (w_1 + w_2) = Bx^2 + Cy^2. \qquad (5.32)$$

Ввиду малости поверхности давления по сравнению с размерами сдавливаемых тел при вычислении w_1, w_2 можно заменить эти тела упругими полупространствами. Тогда, считая касательные напряжения на поверхности давления отсутствующими, для нахождения перемещений w_1, w_2 можно воспользоваться формулой (5.30), полученной для полубесконечного тела:

$$w_1 = \frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1} \iint\limits_A \frac{q}{R}\,\mathrm{d}A; \quad w_2 = \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2} \iint\limits_A \frac{q}{R}\,\mathrm{d}A,$$

где μ_1, μ_2, E_1, E_2 — коэффициенты Пуассона и модули упругости первого и второго тела.

Из уравнения (5.32) имеем

$$\left(\frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2}\right) \iint\limits_A \frac{q}{R}\,\mathrm{d}A = \alpha - Bx^2 - Cy^2. \qquad (5.33)$$

Интегрирование ведется по площади поверхности давления тел. Заметим, что эта площадь зависит от q, из чего следует, что уравнение (5.33) является нелинейным. Такая ситуация типична для задач рассматриваемого типа, получивших название *контактных задач теории упругости*. В общем случае, как показал Генрих Герц, контур давления является эллипсом, полуоси которого по направлению совпадают с полуосями эллипса, определяемого выражением (5.31), если в нем положить $z_1 + z_2 = \text{const}$. Давление q распределяется в пределах поверхности соприкасания по полуэллипсоиду, причем на границе поверхности касания давление равно нулю, а в центре оно принимает наибольшее значение

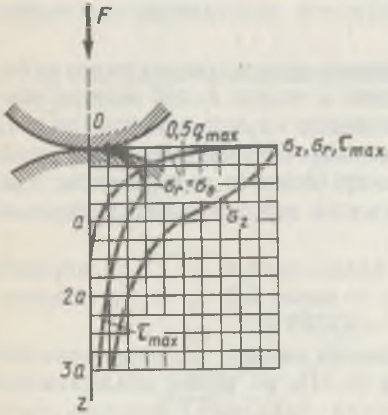


Рис. 5.12

$$q_{\max} = \frac{3}{2}\,\frac{F}{\pi ab},$$

где F — сила, с которой тела давят друг на друга; a, b — длины полуосей контура давления, определяемые равенствами $a = mk$, $b = nk$, причем

$$k = \sqrt[3]{\frac{3F}{4(B+C)}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}.$$

Коэффициенты m, n зависят только от величины Θ, связанной с параметрами B и C соотношением

$$\cos\Theta = \frac{C-B}{C+B}.$$

Г. Герц составил таблицу значений m и n, отвечающих различным значениям Θ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

θ	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
m	∞	6,6120	3,7779	2,7307	2,1357	1,7542	1,4858	1,2835	1,1278	1,0
n	0	6,3186	0,4079	0,4930	0,5673	0,6407	0,7171	0,8017	0,8927	1,0

Параметры B и C выражаются через главные радиусы кривизны в точке касания тел следующим образом:

$$B + C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right);$$

$$C - B = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\psi}.$$

Здесь R_1, R_1', R_2, R_2' — главные радиусы кривизны соответственно первого и второго тел; ψ — угол между главными плоскостями соприкасающихся тел, содержащими R_1 и R_2.

Пример 1. Рассмотрим задачу о сжатии двух шаров радиусами R_1 и R_2. Будем считать, что $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$.

Тогда

$$a = b = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{F}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}};$$

$$q_{\max} = 0{,}388 \sqrt[3]{F E^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}.$$

Изменение нормальных и касательных напряжений вдоль оси z показано на рис. 5.12.

Пример 2. Рассмотрим задачу о сжатии двух цилиндров радиусами R_1 и R_2 (рис. 5.13), загруженных нагрузкой, равномерно распределенной по длине цилиндра, интенсивностью p.

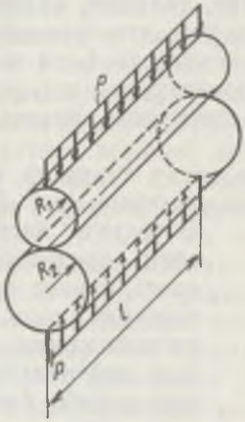


Рис. 5.13

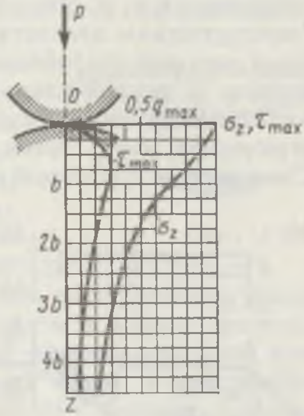


Рис. 5.14

В результате сжатия образуется поверхность давления в виде прямоугольной полоски с размерами $l \times 2b$. Вновь предполагая справедливыми равенства $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, получим

$$b = 1{,}522 \sqrt[3]{\frac{p}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \quad q_{\max} = 0{,}418 \sqrt{pE \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \tag{5.34}$$

Эпюры распределения напряжений в точках, лежащих на оси z, показаны на рис. 5.14.

При неограниченном увеличении радиуса R_2 $(R_2 \to \infty)$ получим решение задачи о сжатии цилиндра с полупространством. В результате из выражения (5.34) следует

$$b = 1{,}522 \sqrt[3]{\frac{pR_1}{E}}; \quad q_{\max} = 0{,}418 \sqrt[3]{\frac{pE}{R_1}}.$$

ГЛАВА 6

ИЗГИБ ПЛАСТИН

§ 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Пластины в настоящее время нашли широкое применение в различных областях техники — строительстве, авиации, судостроении, в машиностроении и т. д. Это объясняется тем, что присущие тонкостенным конструкциям легкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью. В данной главе будут рассмотрены вопросы расчета прямоугольных и круглых пластин.

Геометрическое место точек, которые делят толщину пластины пополам, называется *срединной плоскостью пластины* (рис. 6.1, *а*, *б*). В теории изгиба пластин срединная плоскость играет такую же важную роль, как в сопротивлении материалов нейтральный слой при изгибе балок. Линию, ограничивающую срединную плоскость пластины, называют *контуром пластины*.

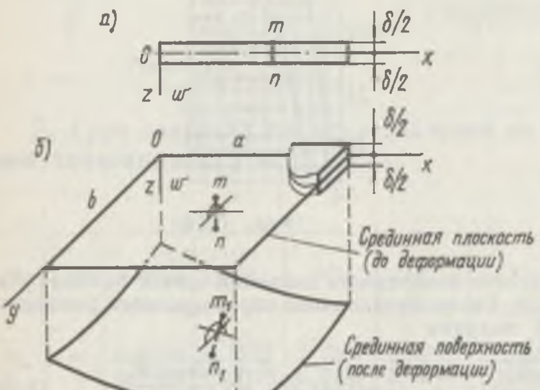


Рис. 6.1

Условимся оси x и y располагать в срединной плоскости пластины, а ось z — направлять вниз. Соответственно основные компоненты перемещения точек срединной поверхности — вертикальные прогибы — будут обозначаться w. При изгибе срединная плоскость превращается в слегка искривленную поверхность прогибов $w = w(x,y)$, ее называют *срединной поверхностью изогнутой пластины* (рис. 6.1, *б*).

Толщина пластины оказывает существенное влияние на ее свойства при изгибе. Различают три вида пластин в зависимости от отношения a/δ — характерного размера в плане a к толщине δ.

Один вид представляют толстые пластины, имеющие отношение $a/\delta \leqslant 8 \ldots 10$. Расчет этих тел ведется с учетом всех компонент напряженного состояния как массивных тел с помощью общих уравнений пространственной задачи (см. гл. 5).

Другой вид имеем, когда отношение $a/\delta \geqslant 80 \ldots 100$ и пластина превращается в мембрану, которая может работать только при достаточно закрепленных краях на контуре. Ее сопротивление на изгиб оказывается ничтожно малым и основную роль в восприятии поперечной нагрузки играют усилия растяжения (а также сдвига) в срединной поверхности (рис. 6.2). Эти усилия, называемые *мембранными*, создают проекцию на вертикальную ось z и тем самым уравновешивают поперечную нагрузку, приложенную к каждому элементу мембраны.

Самый обширный промежуточный вид пластин — это так называемые **тонкие пластины** $8 \ldots 10 \leqslant a/\delta \leqslant 80 \ldots 100$. В зависимости от величины отношения w/δ максимального прогиба пластины к ее толщине роль изгибных и мембранных усилий здесь может быть различной. Поэтому этот вид пластин делится еще на два класса: жесткие и гибкие пластины. Если у данной тонкой пластины $w/\delta \leqslant 0{,}2 \ldots 0{,}5$, то при таких малых прогибах основную роль играют изгибные силовые факторы (деформациями в срединной поверхности и мембранными усилиями возможно пренебречь). Пластина относится к классу *жестких*.

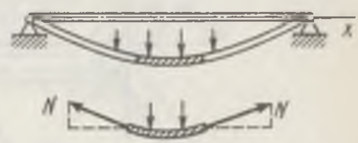


Рис. 6.2

Если w/δ превышает указанные ориентировочные пределы, то пластина одновременно работает и на изгиб, и как мембрана. Значимость этих факторов становится одного порядка, причем с ростом прогибов роль растяжения срединной поверхности возрастает. Такая пластина называется *гибкой*. Например, железобетонные плиты обычно бывают жесткими пластинами, а тонкие стальные листы в зависимости от нагрузки могут работать и как жесткие, и как гибкие. Здесь есть аналогия со стержнем, который, будучи достаточно тонким при закрепленных концах, работает как балка, а при больших прогибах начинает работать как нить на растяжение (см. § 3.5, рис. 3.7).

Ниже рассмотрим расчет тонких жестких пластин на изгиб. Благодаря введению некоторых гипотез теория этих пластин довольно проста и сводится к линейным дифференциальным уравнениям. Деформации гибких пластин (а также мембран и оболочек) описываются системой нелинейных уравнений, что существенно усложняет задачу. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. 9.

Сформулируем теперь допущения и ограничения, используемые в теории тонких жестких пластин.

1. Отрезок mn нормали к срединной плоскости (см. рис. 6.1) при изгибе остается прямым и нормальным к срединной поверхности m_1n_1. Это положение называют «гипотезой прямых нормалей». Оно в определенном смысле аналогично и играет ту же роль, что и гипотеза плоских сечений в теории изгиба стержней.

2. Напряжениями надавливания горизонтальных слоев пластины

друг на друга σ_z пренебрегаем в сравнении с напряжениями σ_x и σ_y, действующими в плоскости слоев. На рис. 6.3, *б* показан элемент *A* пластины, изображенной на рис. 6.3, *а*.

Два сформулированных допущения в литературе обычно называют гипотезами Кирхгофа, а применительно к оболочкам — гипотезами Кирхгофа — Лява.

3. Третье допущение носит характер ограничения. Прогибы будем считать настолько малыми ($w/\delta \leqslant 0{,}2 \ . \ . \ . \ 0{,}5$), что мембранными усилиями в срединной поверхности можно пренебречь.

Как увидим, определение напряжений и усилий в сечениях пластины — задача статически неопределимая. Решать ее удобно в перемещениях, для чего за основную неизвестную функцию примем

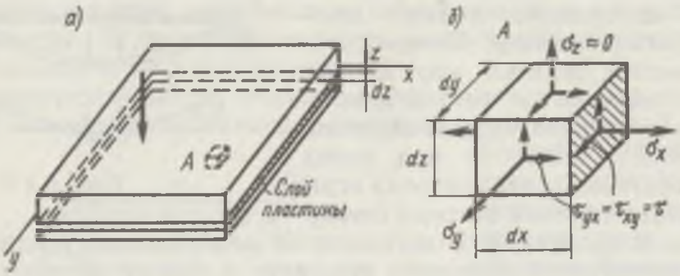


Рис. 6.3

функцию прогибов $w = w\,(x,\ y)$. Выразив через w все остальные неизвестные величины, составим разрешающее уравнение относительно w. После его решения и определения прогибов все остальные величины определяются по соответствующим выражениям через прогибы w. Таков общий путь решения задачи изгиба пластин.

§ 6.2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ПЛАСТИНЕ И ИХ ВЫРАЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПРОГИБЫ

Под действием поперечной нагрузки $q = q\,(x,\ y)$ пластина прогибается и ее срединный слой, искривляясь, образует поверхность прогибов $w = w\,(x,\ y)$. Выделим из пластины малый элемент с размерами в плане Δx и Δy и высотой δ (рис. 6.4, *а*). Некоторая точка *O* срединного слоя и проходящая через нее нормаль *mn* получают при изгибе перемещения. Так как, согласно допущениям, срединный слой не растягивается, то точка *O* переместится только по вертикали на величину прогиба w, а нормаль *mn* повернется в пространстве.

Элемент $\Delta x \times \Delta y \times \delta$ является частью пересекающихся «брусьев», мысленно выделенных из пластины и показанных пунктиром на рис.6.4, *а*. Грани элемента являются поперечными сечениями этих брусьев, деформирующихся в составе пластины. На рис.6.4, *б* показана проекция изгибаемого бруса, параллельного оси x, на плоскость xz. Из рисунка видно, что в этой плоскости нормаль mn повернулась на угол $\Theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$. Для бруса, параллельного оси x, Θ_x — угол наклона сечения вследствие изгиба бруса; одновременно для перпендикулярного бруса Θ_x — угол закручивания, так как

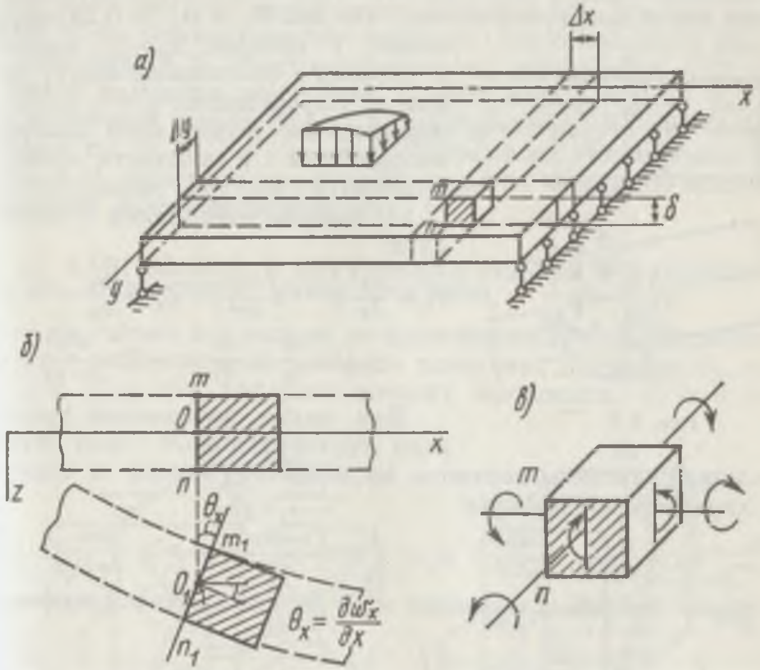


Рис. 6.4

на этот угол поворачивается в своей плоскости сечение бруса, параллельного оси y. Аналогичная картина будет наблюдаться в плоскости yz, где угол поворота нормали равен $\Theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$.

Итак, характерными перемещениями, связанными с произвольной точкой срединной плоскости, являются прогиб $w = w(x, y)$ и углы поворота нормали $\Theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ и $\Theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$. Это приводит к искривлению каждого элемента $\Delta x \times \Delta y \times \delta$ в перпендикулярных направлениях и его закручиванию. Пластину в соответствии с принятыми допущениями можно представить как бесконечную систему пересекающихся брусьев, испытывающих деформации изгиба и кручения и связанных условиями непрерывности перемещений. При этом на гранях каждого элемента $\Delta x \times \Delta y \times \delta$ надо ожидать появления изгибающих и крутящих моментов (рис. 6.4, *в*).

Повороты нормали mn на углы Θ_x и Θ_y приводят к перемещениям u и v точек этой нормали, отстоящих на расстояние z от срединного слоя. Из рис. 6.5 найдем перемещение u:

$$u = -z\Theta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6.1}$$

Зависимость для v здесь написана по аналогии с выражением для u. Знак минус поставлен потому, что при Θ_y и $\Theta_x > 0$ перемещение точки, у которой $z > 0$, происходит в сторону, противоположную осям x или y. Перемещения u и v (6.1) — это перемещения точек слоя пластины с координатой z в плоскости этого слоя. Используя их, по формулам Коши (2.14) найдем деформации в плоскости слоя:

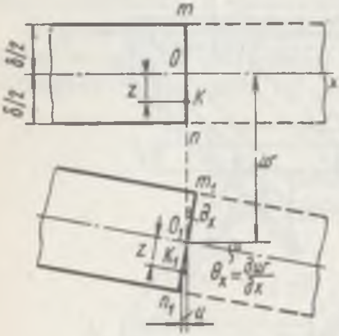


Рис. 6.5

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{d^2 w}{dx\,dy}. \tag{6.2}$$

Как видно, деформации произвольного горизонтального слоя пластины по толщине пластины меняются по линейному закону и зависят от трех характерных величин:

$$\varkappa_x = \frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \ \varkappa_y = \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \ \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{6.3}$$

При малых прогибах величины $\varkappa_x$ и $\varkappa_y$ составляют кривизны эле-

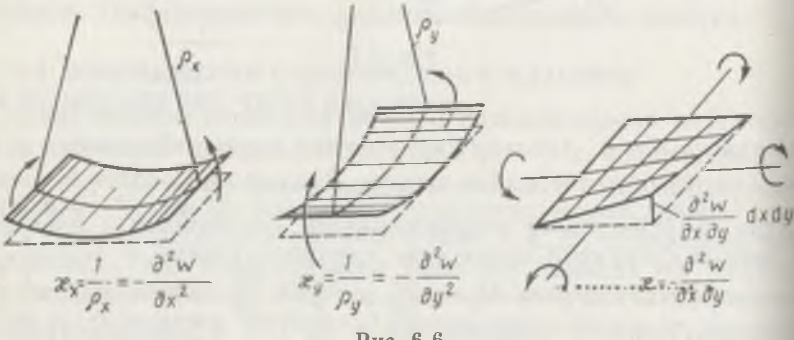


Рис. 6.6

мента $dx \times dy$ срединной поверхности пластины, а $\varkappa$ — его кручение (иногда говорят: «кривизна кручения») (рис. 6.6).

Формулы (6.3) выражают три характерные кривизны элемента срединной поверхности через функцию прогибов, а (6.2) — деформации слоя на уровне z, выраженные через указанные кривизны.

Заметим, что по формулам Коши (2.14) углы сдвига элемента в вертикальных плоскостях составляют $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, что следует из (6.1). Следовательно, гипотеза прямых нормалей, на основе которой получены формулы (6.1), приводит к тому, что при определении прогибов для каждого элемента $dx \times dy \times dz$, принадлежащего данному горизонтальному слою пластины (см. рис. 6.3), учитываются только деформации (6.2), происходящие в плоскости этого слоя. Сдвиги между слоями γ_{xz} и γ_{yz}, как и в обычной теории балок, не учитываются. На рис. 6.3, *б* напряжения σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, отвечающие учитываемым деформациям (6.2), выделены сплошными линиями, остальные компоненты напряжений показаны пунктиром.

§ 6.3. НАПРЯЖЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПЛАСТИНЕ И ИХ ВЫРАЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПРОГИБЫ

Как мы только что видели, напряжениями, непосредственно связанными с деформациями элемента пластины, являются σ_x, σ_y и τ (рис. 6.7). Так как, согласно второму допущению, $\sigma_z = 0$, то эти

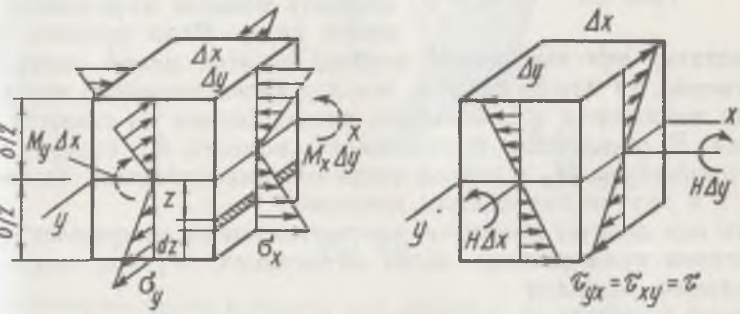


Рис. 6.7

напряжения можно определить по закону Гука для плоского напряженного состояния (4.8). Подставляя в него деформации (6.2), с учетом обозначений (6.3) получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = E_1(\varkappa_x + \mu\varkappa_y)\,z; \\ \sigma_y &= E_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = E_1(\varkappa_y + \mu\varkappa_x)\,z; \\ \tau &= G\gamma_{xy} = E_1(1 - \mu)\,\varkappa z, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

где $E_1 = \frac{E}{(1-\mu^2)}$. Распределение этих напряжений по высоте элемента пластины показано на рис. 6.7. Размеры этого элемента в плане примем малыми, чтобы можно было считать эти напряжения постоянными по ширине сечений Δx и Δy.

Напряжения σ_x на грани элемента $\delta \times \Delta y$ приводятся к моменту, равному

$$\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} (\sigma_x \,\mathrm{d}z\Delta y)\, z = \Delta y E_1 (\varkappa_x + \mu\varkappa_y) \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 \,\mathrm{d}z = M_x \Delta y,$$

где через M_x обозначено $M_x = \frac{E_1\delta^3}{12}(\varkappa_x + \mu\varkappa_y)$. Это так называемая интенсивность изгибающего момента, соответствующего напряжению σ_x.

В любом вертикальном сечении пластины внутренние усилия в общем случае распределены неравномерно. Так, например, на рис. 6.8 показано распределение моментов M_x. Под интенсивностью момента в данной точке (x, y) понимается предел отношения момента, найденного на длине Δy, к Δy при $\Delta y \to 0$. По размерности это момент, деленный на единицу длины сечения: $[M_x] = \left[\frac{H \cdot м}{м}\right] = [H]$, т. е. интенсивность момента выражается в единицах силы. Если принять $\Delta y = 1$

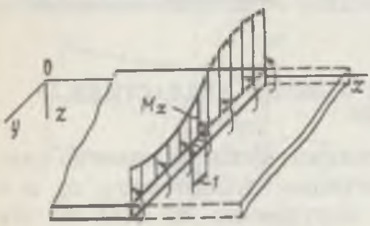


Рис. 6.8

и считать, что внутреннее усилие на этой длине распределено равномерно, то можно сказать, что под интенсивностью внутреннего усилия понимается его значение, приходящееся на единицу длины сечения. В дальнейшем интенсивность момента M_x будем называть просто моментом M_x в данной точке сечения пластины. То же относится и к другим внутренним усилиям.

Так как подсчет моментов, соответствующих напряжениям (6.4), аналогичен приведенному выше вычислению M_x, то, опуская эти вычисления, запишем

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D(\varkappa_x + \mu\varkappa_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ M_y &= D(\varkappa_y + \mu\varkappa_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ H &= D(1-\mu)\,\varkappa = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

где $D = \frac{E_1\delta^3}{12} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — так называемая цилиндрическая жесткость при изгибе пластины. Она играет роль, аналогичную жесткости сечения балки при изгибе EJ. Отметим, что ввиду парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ крутящий момент H на перпендикулярных гранях элемента пластины одинаков.

Изгибающие моменты M_x и M_y создают искривление элемента с кривизнами $\frac{1}{\rho_x}$ и $\frac{1}{\rho_y}$ (рис. 6.9, *а*). Крутящие моменты H создают более сложную деформацию элемента пластины, в результате которой в горизонтальных слоях элемента возникает деформация сдвига, изменяющаяся по высоте по линейному закону. На рис. 6.9, *в* показан вид сверху на элемент в деформированном состоянии при действии моментов H.

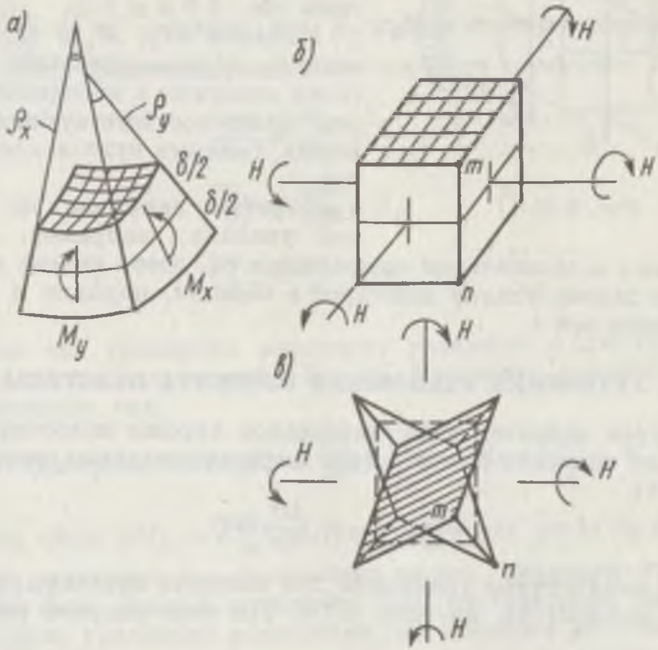


Рис. 6.9

Напряжения через моменты выражаются по обычным формулам сопротивления материалов, как для балки прямоугольного сечения высотой δ и шириной $\Delta x = \Delta y = 1$:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{\delta^3}\, z;\quad \sigma_y = \frac{12M_y}{\delta^3}\, z;\qquad \tau = \frac{12H}{\delta^3}\, z. \tag{6.6}$$

Они получаются из (6.4) и (6.5), если приравнять отношения левых и правых частей этих равенств.

Кроме моментов в сечениях пластины действуют поперечные силы, интенсивности которых обозначим Q_x и Q_y (рис. 6.10). Им отвечают напряжения τ_{xz} и τ_{yz}, распределенные в сечении по закону квадратной параболы в соответствии с формулой сопротивления материалов $\tau = \frac{QS^{\text{отс}} \cdot 12}{\delta^3}$. Однако выразить их величину через прогибы w пока не представляется возможным, поскольку, как на это указывалось в конце предыдущего параграфа, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} непосредственно не связаны с деформацией элемента пластины, ибо в силу гипотезы прямых нормалей $\gamma_{xz} = \gamma_{yx} = 0$. Определить Q_x, Q_y, а значит, и τ_{xz}, τ_{yz} можно из условий равновесия элемента пластины (см. § 6.4 и 6.5).

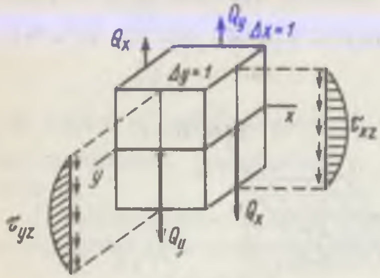


Рис. 6.10

Моменты M_x, M_y и H, а также силы Q_x, Q_y положительны, если для точки пластины с координатой $z > 0$ они дают соответствующее напряжение, большее нуля в координатах xyz.

Обратим внимание на индексы при усилиях, например, M_x, Q_x. Так же как в обозначении напряжения σ_x, здесь индекс x показывает, что данное усилие действует в сечении, нормаль к которому параллельна оси x.

§ 6.4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ

Из курса сопротивления материалов хорошо известны условия равновесия элемента балки в виде дифференциальных зависимостей (рис. 6.11)

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q. \tag{6.7}$$

Получим аналогичные уравнения для элемента пластины, имеющего в плане размеры dx, dy (рис. 6.12). На этом рисунке учтено, что

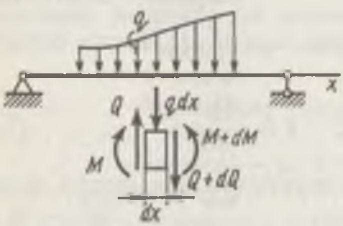


Рис. 6.11

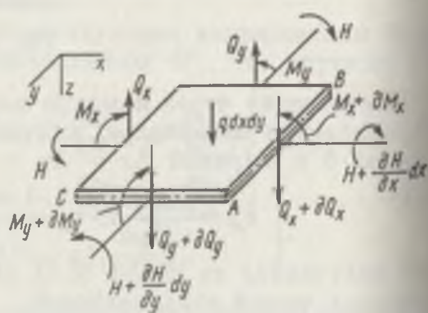


Рис. 6.12

при переходе от сечения $x = \text{const}$ к сечению $x + dx = \text{const}$ интенсивность внутреннего усилия изменяется на величину частного дифференциала, например $\partial M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$. То же для сечения $y = \text{const}$ и $y + dy = \text{const}$.

Сумма проекций всех сил элемента пластины на ось z дает

$$q\,dx\,dy + \partial Q_x\,dy + \partial Q_y\,dx = 0.$$

Здесь интенсивности ∂Q_x и ∂Q_y собираются с длин граней dy и dx. Подставив сюда значения частных дифференциалов $\partial Q_x = \frac{\partial Q_x}{\partial x}\,dx$ и $\partial Q_y = \frac{\partial Q_y}{\partial y}\,dy$ и сократив все на $dx\,dy$, получим первое из следующих трех уравнений равновесия элемента пластины:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q;\\ &\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x;\\ &\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Последние два уравнения выражают равенство нулю суммарного момента всех сил вокруг осей AB и AC. Например, условие $\Sigma m_{AB} = 0$ запишется так:

$$(Qx\,dy)\,dx - \partial M_x\,dy - \frac{\partial H}{\partial y}\,dy\,dx - q\,dx\,dy\,\frac{dx}{2} = 0.$$

Подставив сюда $\partial M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}\,dx$, сократив все на $dx\,dy$ и отбросив последнее слагаемое как бесконечно малое, приходим ко второму равенству (6.8). Третье уравнение (6.8) составляется аналогично.

Сравнение уравнений равновесия для элемента пластины (6.8) и для балки (6.7) показывает их аналогию, но в то же время позволяет обнаружить и существенное различие. В два уравнения (6.7) входят две неизвестные функции Q и M, что при заданной внешней нагрузке (включая опорные реакции) позволяет проинтегрировать эти уравнения и найти внутренние усилия в сечениях стержня Q и M только из уравнений статики (задача статически определима).

В пластине в три статических уравнения (6.8) входят пять неизвестных функций: M_x, M_y, H, Q_x и Q_y. Поэтому в общем случае задача определения внутренних усилий в сечениях пластины статически неопределима. Ее можно решить только одновременно определяя и прогибы пластины $w = w(x, y)$. Для этого надо составить разрешающее уравнение относительно функции w.

§ 6.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

В § 2.7 указывалось, что если задача решается в перемещениях, то разрешающими уравнениями являются уравнения равновесия. В данном случае имеем одну неизвестную функцию прогибов w и указывалось в конце предыдущего параграфа, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} непосредственно не связаны с деформацией элемента пластины, ибо в силу гипотезы прямых нормалей $\gamma_{xz} = \gamma_{yx} = 0$. Определить Q_x, Q_y, а значит, и τ_{xz}, τ_{yz} можно из условий равновесия элемента пластины (см. § 6.4 и 6.5).

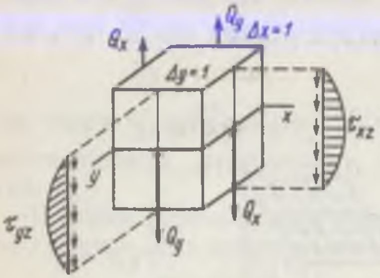


Рис. 6.10

Моменты M_x, M_y и H, а также силы Q_x, Q_y положительны, если для точки пластины с координатой $z > 0$ они дают соответствующее напряжение, большее нуля в координатах xyz.

Обратим внимание на индексы при усилиях, например, M_x, Q_x. Так же как в обозначении напряжения σ_x, здесь индекс x показывает, что данное усилие действует в сечении, нормаль к которому параллельна оси x.

§ 6.4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ

Из курса сопротивления материалов хорошо известны условия равновесия элемента балки в виде дифференциальных зависимостей (рис. 6.11)

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q. \tag{6.7}$$

Получим аналогичные уравнения для элемента пластины, имеющего в плане размеры dx, dy (рис. 6.12). На этом рисунке учтено, что

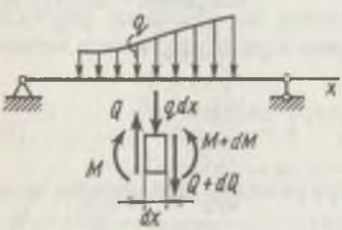


Рис. 6.11

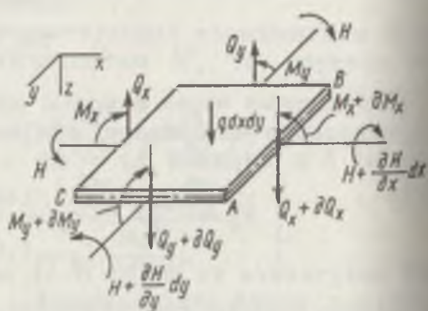


Рис. 6.12

при переходе от сечения $x = \text{const}$ к сечению $x + dx = \text{const}$ интенсивность внутреннего усилия изменяется на величину частного дифференциала, например $\partial M_x = \dfrac{\partial M_x}{\partial x}\,dx$. То же для сечения $y = \text{const}$ и $y + dy = \text{const}$.

Сумма проекций всех сил элемента пластины на ось z дает

$$q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \partial Q_x\,\mathrm{d}y + \partial Q_y\,\mathrm{d}x = 0.$$

Здесь интенсивности ∂Q_x и ∂Q_y собираются с длин граней $\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}x$. Подставив сюда значения частных дифференциалов $\partial Q_x = \frac{\partial Q_x}{\partial x}\mathrm{d}x$ и $\partial Q_y = \frac{\partial Q_y}{\partial y}\mathrm{d}y$ и сократив все на $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, получим первое из следующих трех уравнений равновесия элемента пластины:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q;\\ &\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x;\\ &\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \end{aligned}\right| \qquad (6.8)$$

Последние два уравнения выражают равенство нулю суммарного момента всех сил вокруг осей AB и AC. Например, условие $\Sigma m_{AB} = 0$ запишется так:

$$(Qx\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x - \partial M_x\,\mathrm{d}y - \frac{\partial H}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0.$$

Подставив сюда $\partial M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x$, сократив все на $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ и отбросив последнее слагаемое как бесконечно малое, приходим ко второму равенству (6.8). Третье уравнение (6.8) составляется аналогично.

Сравнение уравнений равновесия для элемента пластины (6.8) и для балки (6.7) показывает их аналогию, но в то же время позволяет обнаружить и существенное различие. В два уравнения (6.7) входят две неизвестные функции Q и M, что при заданной внешней нагрузке (включая опорные реакции) позволяет проинтегрировать эти уравнения и найти внутренние усилия в сечениях стержня Q и M только из уравнений статики (задача статически определима).

В пластине в три статических уравнения (6.8) входят пять неизвестных функций: M_x, M_y, H, Q_x и Q_y. Поэтому в общем случае задача определения внутренних усилий в сечениях пластины статически неопределима. Ее можно решить только одновременно определяя и прогибы пластины $w = w\,(x,\,y)$. Для этого надо составить разрешающее уравнение относительно функции w.

§ 6.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

В § 2.7 указывалось, что если задача решается в перемещениях, то разрешающими уравнениями являются уравнения равновесия. В данном случае имеем одну неизвестную функцию прогибов w и в качестве разрешающего примем первое из уравнений (6.8):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-q, \tag{6.9}$$

которое необходимо преобразовать так, чтобы в него входила как неизвестная только w. Для этого используем второе и третье уравнения (6.8) и выражения моментов через прогибы (6.5). Так, например,

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}=-D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}.$$

Здесь цилиндрическая жесткость пластины D была вынесена как постоянная; следовательно, уравнение, к которому мы придем, будет справедливо только для пластин постоянной толщины δ. Выполнив операции дифференцирования и сократив подобные члены, придем к выражению Q_x через функцию w

$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w);\quad Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w), \tag{6.10}$$

где выражение для Q_y написано по аналогии с Q_x, а через $\nabla^2 w$ обозначен оператор Лапласа

$$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Ранее в § 6.3 было указано, что в излагаемой приближенной теории изгиба пластин не учитываются деформации сдвига, отвечающие поперечным силам Q_x и Q_y. Поэтому последние не могли быть непосредственно выражены через прогибы с помощью закона Гука, а должны находиться из уравнений равновесия элемента пластины. Полученные зависимости (6.10) и представляют как раз такие выражения.

Подставим (6.10) в разрешающее уравнение равновесия. Учитывая, что $D=\text{const}$, получим

$$-D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w)\right]=-q.$$

В квадратных скобках стоит выражение гармонического оператора Лапласа ∇^2, примененное к $(\nabla^2 w)$, т. е. в целом уже знакомый из гл. 4 бигармонический оператор $\nabla^2\nabla^2$, примененный к w. В результате приходим к уравнению изгиба пластины

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D}, \tag{6.11}$$

или в развернутой форме

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D}. \tag{6.12}$$

Впервые уравнение изгиба пластин, но содержащее ошибку, было получено Софи Жермен на основе вариационного принципа Лагранжа в работе, представленной на конкурс, объявленный французской

Академией наук в 1811 г. На ошибку указал член жюри Лагранж, и эта ошибка была позднее исправлена. В литературе уравнение (6.11) или, что то же, (6.12) носит название уравнения Софи Жермен — Лагранжа. Оно играет фундаментальную роль в теории изгиба пластин.

После того как функция прогибов $w(x, y)$ будет найдена как решение этого уравнения, через прогибы легко вычислить по полученным ранее формулам усилия и напряжения в пластине.

§ 6.6. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим вопросы составления граничных условий относительно функции w при различных случаях закрепления соответствующего участка контура. На рис. 6.13 изображена пластина, у которой край $y = 0$ жестко заделан, края $x = 0$ и $x = a$ шарнирно оперты, а край $y = b$ свободен от закреплений.

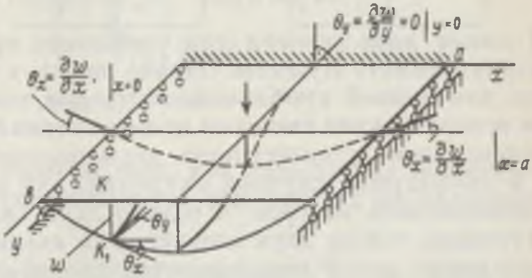


Рис. 6.13

Наиболее просто граничные условия записать для з а д е л а н н о г о к р а я. В этом случае во всех точках кромки прогибы равны нулю, а также заделанное сечение пластины $y = 0$ не поворачивается (нормали и касательные к поверхности прогибов остаются соответственно вертикальными и горизонтальными), т. е. имеем

$$w = 0|_{y=0}; \quad \Theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0}. \tag{6.13}$$

Эти условия вполне аналогичны условиям заделки сечения изгибаемого бруса, мысленно выделенного из пластины в направлении оси y (см. рис. 6.1).

Для ш а р н и р н о о п е р т о г о к р а я, как и в балке, имеем два условия, например для $x = a$

$$w = 0\Big|_{x=a}; \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0\Big|_{x=a}, \tag{6.14}$$

поскольку свободный поворот сечения $x = a$ означает отсутствие в нем изгибающего момента M_x. Если бы на этой кромке был приложен внешний распределенный момент интенсивности m_x, то вместо нуля в правой части второго условия (6.14) надо было бы написать $M_x = m_x$.

В данном случае шарнирные опоры предполагаются жесткими $w=0$ и линия $x=a$ остается неизогнутой. Поэтому производные $\frac{\partial w}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ также равны нулю и вместо (6.14) можно написать

$$w=0\Big|_{x=a}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\Big|_{x=a}. \tag{6.15}$$

Условия (6.15) используются для опирания края пластины на жесткие шарнирные опоры. Шарнирное опирание на упруго проседающие опоры рассмотрим несколько позже.

Рассмотрим теперь кромку $y=b$, *свободную от закреплений*. Так как в этом сечении нет никаких напряжений, то представляется естественным приравнять нулю все три усилия, способные возникать в сечениях $y=\text{const}$, а именно:

$$M_y=0|_{y=b}; \quad Q_y=0|_{y=b}; \quad H=0|_{y=b}. \tag{6.16}$$

В таком виде условия для свободного края в свое время пытался формулировать Пуассон. Однако позже, в 1850 г., Кирхгоф показал, что для данной приближенной теории изгиба пластин, основанной на использовании гипотезы прямых нормалей, в общем случае нельзя одновременно удовлетворить двум последним условиям (6.16). Как и в предыдущих случаях опирания, для свободного края возможно удовлетворить не трем, а только двум силовым условиям, соответствующим только двум независимым перемещениям на кромке. Так, на кромке $y=b$ ими являются прогиб $w(x)|_{y=b}$ и угол поворота в направлении, перпендикулярном кромке, т. е. $\Theta_y=\frac{\partial w}{\partial y}$, показанные для точки K (рис. 6.13). Другой угол поворота $\Theta_x=\frac{\partial w}{\partial x}$ зависит от линии прогибов $w(x)|_{y=b}$ как производная от этой заданной на кромке функции.

Двум независимым перемещениям (w и Θ_y) должны отвечать два обобщенных усилия. Углу Θ_y отвечает момент M_y, поскольку он совершает работу на этом угле поворота; следовательно, первое условие в (6.16) сохраняется.

Два усилия Q_y и H, входящие в последние два условия (6.16), надо заменить одним обобщенным усилием, отвечающим w как обобщенному перемещению Таковой является обобщенная поперечная сила

$$V_y=Q_y+\Delta Q_y, \tag{6.17}$$

где ΔQ_y — дополнительная интенсивность поперечной силы, статически эквивалентная крутящим моментам H.

Простое объяснение появления силы ΔQ_y было дано Максвеллом. Оно состоит в следующем. На рис. 6.14, *а* показаны два соседних элемента кромки $y=b$, каждый длиной dx. На них действуют крутящие моменты $H\,dx$ и $(H+\frac{\partial H}{\partial x}dx)\,dx$, реализуемые системой горизонтальных касательных сил (напряжениями τ_{yx}). Заменим их парами вертикальных сил H и $H+\frac{\partial H}{\partial x}dx$ с плечом dx, имеющими тот же момент (рис. 6.14, *б*), т. е. как бы повернем пары горизонтальных сил на 90°.

Такая статически эквивалентная замена пар горизонтальных сил парами вертикальных сил в рамках данной теории изгиба пластин вполне допустима. Действительно, элементы, к которым они приложены, связаны с недеформируемой (прямой) нормалью mn и поворачиваются в плоскости действия этих моментов вместе с нею на угол

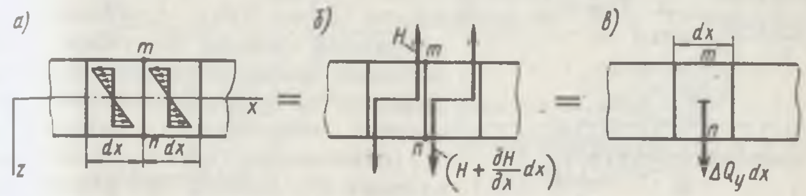


Рис. 6.14

Θ_x как твердые тела. А в твердом теле, как известно из теоретической механики, такая замена возможна, так как это не нарушает условий равновесия.

Силы H и $H+\frac{\partial H}{\partial x}dx$ (рис. 6.14, *б*) действуют вдоль линии mn в противоположные стороны. Приравнивая их разность нагрузке $\Delta Q_y\,dx$, собранной с длины dx (рис. 6.14, *в*), получим $\frac{\partial H}{\partial x}dx=\Delta Q_y\,dx$. Следовательно, $\Delta Q_y=\frac{\partial H}{\partial x}$ и суммарная обобщенная поперечная сила (6.17) будет представлена первым из двух равенств

$$V_y=Q_y+\frac{\partial H}{\partial x}; \quad V_x=Q_x+\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{6.18}$$

Второе усилие относится к перпендикулярной кромке и записано по аналогии.

Теперь два граничных условия для свободной кромки $y=b$ запишутся в виде

$$M_y=0|_{y=b}; \quad V_y=0|_{y=b}. \tag{6.19}$$

Эти равенства необходимо выразить через w. Такое выражение для M_y имеется (6.5), а для V_y и V_x их можно получить, подставляя (6.5) и (6.10) в (6.18). В результате найдем

$$\left.\begin{aligned} V_y&=-D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];\\ V_x&=-D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

Теперь граничные условия (6.19), выраженные через неизвестную функцию прогибов w, запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\Big|_{y=b};\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=0\Big|_{y=b}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

Использованная выше замена Q_y и H обобщенной силой V_y в рамках излагаемой приближенной теории изгиба пластин, как указывалось, вполне допустима. Но по отношению к реальной пластине это означает, что при равенстве нулю V_y каждое из слагаемых (6.18), содержащих Q_y и H, не обязательно равны нулю. Следовательно, по данной теории получаем такое решение, когда на свободной кромке оказывается приложенной некоторая система касательных напряжений τ_{yz} (отвечающих Q_y) и τ_{yx} (соответствующих H). Однако эти усилия взаимно уравновешены на кромке и, согласно принципу Сен-Венана, им отвечает в реальной пластине дополнительное поле напряжений, быстро затухающее с удалением от кромки в глубь пластины. Найти указанные дополнительные напряжения с помощью уравнения Софи Жермен — Лагранжа не представляется возможным. Уточнение можно получить, используя уравнения изгиба пластин с учетом сдвигов γ_{xz} и γ_{yz}. Для сплошных изотропных пластин эти уточнения, как правило, несущественны.

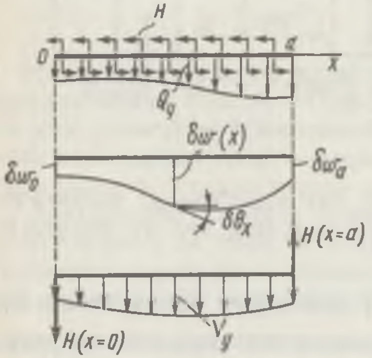


Рис. 6.15

Формулы (6.18) для обобщенной поперечной силы можно получить формальным путем, если подсчитать работу усилий Q_y и H, действующих в сечении $y=\text{const}$ (рис. 6.15) на обобщенных перемещениях в виде вариации прогибов этого сечения пластины $\delta w=\delta w(x)$:

$$\delta A=\int_0^a Q_y\cdot\delta w\,dx-\int_0^a H\cdot\delta\Theta_x\,dx.$$

Направления $H>0$ и $\delta\Theta_x>0$ противоположны, поэтому в выражении для работы поставлен знак минус. Заменяя $\delta\Theta_x=\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}$ и интегрируя второе слагаемое по частям, получим

$$\delta A=\int_0^a\left[Q_y+\frac{\partial H}{\partial x}\right]\delta w\,dx-H\delta w\Big|_0^a.$$

Выражение в квадратных скобках представляет искомую обобщенную силу V_y (6.18), совершающую работу на перемещениях δw.

Обратим внимание на последнее слагаемое работы δA. Оно выражает работу сосредоточенных сил H $(x = a)$ и H $(x = 0)$ на перемещениях δw_a и δw_0 (рис. 6.15):

$$-H\delta w \,|_0^a = -H_a \delta w_a + H_0 \delta w_0.$$

Следовательно, для того чтобы распределенные силы V_y были полностью статически эквивалентны усилиям Q_y и H, в концевых точках

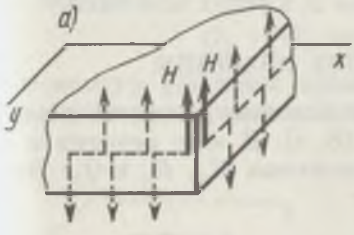


Рис. 6.16

отрезка Oa должны быть добавлены силы H $(x = 0)$ и H $(x = a)$. Это следует и из механической трактовки Максвелла. Действительно, на конце кромки сила H повернутой пары уже не уравновешивается такой же силой последующего элемента dx, так как кромка обрывается в точке $x = a$ (рис. 6.16, *а*, *б*). С учетом аналогичной силы на перпендикулярной кромке получаем в угловой точке прямоугольной пластины сосредоточенную суммарную силу

$$S = 2H = -2D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{6.22}$$

Если кромки пластины, сходящиеся в угловой точке, не взаимно перпендикулярны, то сила S будет зависеть от угла между кромками (см. § 6.7).

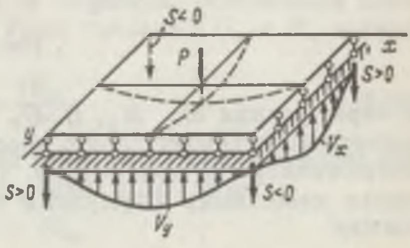


Рис. 6.17

Пусть на опорном контуре пластины размещены связи, способные воспринимать лишь вертикальные усилия (рис. 6.17). Тогда обобщенные поперечные силы V_x, V_y будут представлять собой распределенные опорные реакции пластины, а силы S — сосредоточенные реакции в угловых точках. Заметим, что на рис. 6.17 направления сил S показаны для симметричного загружения пластины. В начале координат, учитывая характер закручивания примыкающего элемента, для момента H, а следовательно, и силы S, получим знак минус. Если повернуть пару сил $H < 0$ на 90°, то получим в угловой точке силу $S = 2H$, направленную вниз. В других угловых точках знаки H чередуются, но силы S везде будут направлены также вниз. Как видно, угловые точки пластины при симметричном изгибе имеют тенденцию подниматься вверх и силы S притягивают их к опорам.

Если решается какая-либо задача об упругом взаимодействии пластины на ее контуре, то в качестве усилий взаимодействия должны быть учтены в общем случае как распределенные опорные реакции V_x, V_y (а при наличии необходимых связей и изгибающие моменты M_x, M_y), так и сосредоточенные силы S в углах пластины.

§ 6.7. УСИЛИЯ В КОСЫХ СЕЧЕНИЯХ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим вертикальное сечение пластины, нормаль к которому составляет угол α с осью x (рис. 6.18, *а*). В этом сечении в общем случае действуют усилия с интенсивностями M_α, H_α и Q_α. Выразим

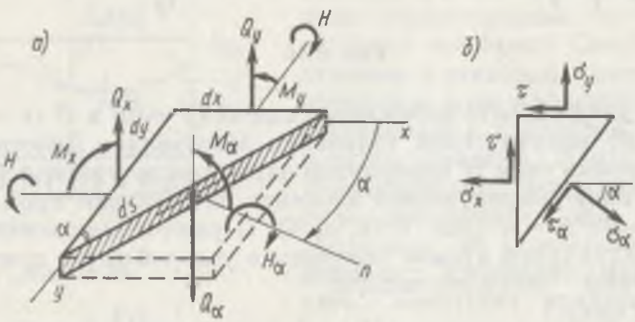


Рис. 6.18

их через усилия M_x, M_y, H, Q_x и Q_y. На рис. 6.18, *б* показано напряженное состояние слоя с координатой $z > 0$ элемента пластины, изображенной на рис. 6.18, *а*. Связь между напряжениями выражается известными формулами теории плоского напряженного состояния

$$\sigma_\alpha = 0{,}5\,(\sigma_x + \sigma_y) + 0{,}5\,(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha;$$
$$\tau_\alpha = -0{,}5\,(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \qquad (6.23)$$

Моменты M_α и H_α можно получить через σ_α и τ_α с помощью интегралов по высоте сечения, считая, что ширина косого сечения равна единице:

$$M_\alpha = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\sigma_\alpha\, dz)\, z; \quad H_\alpha = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\tau_\alpha\, dz)\, z.$$

Подставляя сюда (6.23) и выражая σ_x, σ_y и τ через M_x, M_y и H, по формулам (6.6) получим искомые соотношения:

$$\left.\begin{aligned} M_\alpha &= 0{,}5\,(M_x + M_y) + 0{,}5\,(M_x - M_y)\cos 2\alpha + H \sin 2\alpha; \\ H_\alpha &= -0{,}5\,(M_x - M_y)\sin 2\alpha + H \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

Для определения Q_α приравняем сумму проекций на ось z сил, действующих на элемент, показанный на рис. 6.18, *а*:

$$Q_\alpha\, ds - Q_x\, dy - Q_y\, dx = 0.$$

Отсюда получим

$$Q_\alpha = Q_x \cos\alpha + Q_y \sin\alpha. \qquad (6.25)$$

Если контур пластины криволинеен, то в произвольной точке контура граничные условия должны формулироваться с помощью

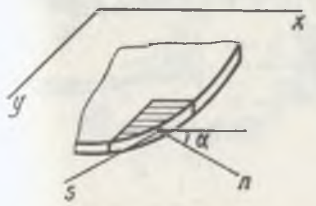


Рис. 6.19

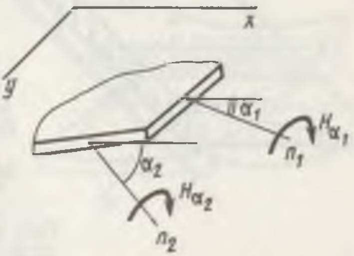


Рис. 6.20

усилий (6.24) и (6.25), где под α надо понимать угол между осью x и нормалью n к контуру (рис. 6.19). В частности, обобщенная поперечная сила V_α, аналогично (6.18), будет связана с Q_α и H_α зависимостью

$$V_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial H_\alpha}{\partial s}. \qquad (6.26)$$

Сосредоточенная сила S в угловой точке, если примыкающие стороны имеют наклон нормалей α_1 и α_2 (рис. 6.20), будет

$$S = H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2}.$$

При $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 90°$ получаем уже известную зависимость (6.22).

§ 6.8. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕРЫ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Рассмотрим несколько простых примеров изгиба пластин, имеющих важное значение для понимания особенностей работы пластин при изгибе.

1. Цилиндрический изгиб пластины. Представим себе пластину, бесконечно длинную в направлении оси y, загруженную постоянной в направлении этой оси нагрузкой (рис. 6.21, *а*). Вдоль оси x нагрузка может меняться произвольно: $q = q(x)$. Все полоски единичной ширины, выделенные из этой пластины, будут изгибаться одинаково и в целом пластина окажется изогнутой по цилиндрической поверхности $w = w(x)$. Полагая в (6.12) производные по y равными нулю, получим уравнение для w в виде

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q(x)}{D}. \tag{6.27}$$

Здесь применено обозначение для обыкновенной (а не частной) производной, поскольку w зависит только от одного аргумента. Уравнение (6.27), описывающее цилиндрический изгиб пластины, совпадает с уравнением изгиба балки, у которой жесткость сечения на из-

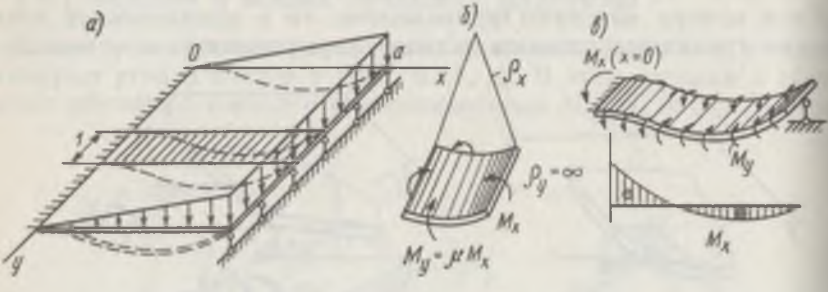


Рис. 6.21

гиб $EJ = D$. Отсюда величина D получила свое наименование *цилиндрическая жесткость*.

В рассматриваемом случае интегрирование (6.27) не представляет труда. Пусть, например, $q = q_0 \frac{x}{a}$, тогда общий интеграл (6.27), состоящий из решения однородного уравнения w_1, содержащего четыре произвольные постоянные, и частного решения, зависящего от вида правой части, в данном случае будет

$$w = w_1 + w_2 = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{q_0x^5}{120aD}.$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$w = 0|_{x=0}; \quad w' = 0|_{x=0}; \quad w = 0|_{x=a};$$
$$M_x = -Dw'' = 0\ |_{x=a},$$

где штрихами здесь и далее обозначены производные w по x. Из этих четырех условий найдем: $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = \frac{7q_0a^2}{240D}$, $C_4 = -\frac{9q_0a}{240D}$, после чего выражение для w получит вид

$$w = \frac{q_0a^4}{240D}\left[7\frac{x^2}{a^2} - 9\frac{x^3}{a^3} + 2\frac{x^5}{a^5}\right]. \tag{6.28}$$

При цилиндрическом изгибе, когда производные по y равны нулю, выражения для моментов (6.5) будут (рис. 6.21, *б*)

$$M_x = -Dw'', \ M_y = -\mu D w'' = \mu M_x; \ H = 0. \qquad (6.29)$$

Подставив (6.28) в (6.29), получим моменты

$$M_x = -\frac{q_0 a^2}{120}\left[7 - 27\frac{x}{a} + 20\frac{x^3}{a^3}\right]. \qquad (6.30)$$

Эпюра M_x и действие пропорциональных им моментов $M_y = \mu M_x$ в единичной полосе пластины показаны на рис. 6.21, *в*.

Если пластина имеет конечный размер в направлении оси y, то для создания ее цилиндрического изгиба на кромках, параллельных x, должны быть приложены моменты M_y наподобие того, как

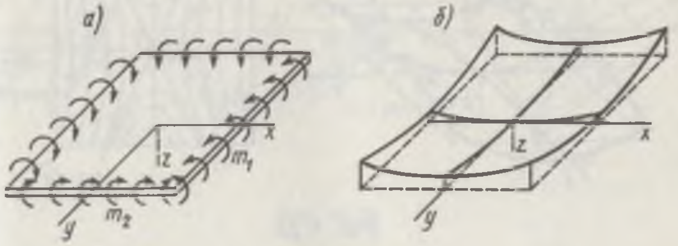


Рис. 6.22

это изображено для полоски, вырезанной из бесконечной пластины (рис. 6.21, *в*). При отсутствии таких моментов на части длины вдоль оси y поверхность прогибов будет отклоняться от цилиндрической поверхности.

1. Чистый изгиб пластины. Рассмотрим прямоугольную пластину, свободную от закреплений, на контуре которой приложены изгибающие моменты $M_x = m_1 = \text{const}$ и $M_y = m_2 = \text{const}$ (рис. 6.22, *а*). Начало координат поместим в центре пластины. Для определения прогибов имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

которое будет удовлетворено, если примем

$$w = 0{,}5\, C_1 x^2 + 0{,}5 C_2 y^2. \qquad (6.31)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из условий $M_x = m_1$ и $M_y = m_2$. Воспользовавшись формулами (6.5), получим

$$M_x = -D\,(C_1 + \mu C_2) = m_1; \quad M_y = -D\,(C_2 + \mu C_1) = m_2,$$
$$H = 0. \qquad (6.32)$$

Решая эти два уравнения, найдем

$$C_1 = \frac{\mu m_2 - m_1}{D(1-\mu^2)}; \quad C_2 = \frac{\mu m_1 - m_2}{D(1-\mu^2)},$$

и уравнение поверхности прогибов (6.31) запишется в виде (рис. 6.22, *б*)

$$w = \frac{1}{2D(1-\mu^2)}[(\mu m_2 - m_1)x^2 + (\mu m_1 - m_2)y^2]. \qquad (6.33)$$

Во всех сечениях пластины, параллельных осям x и y, действуют только изгибающие моменты постоянного значения (6.32). Других

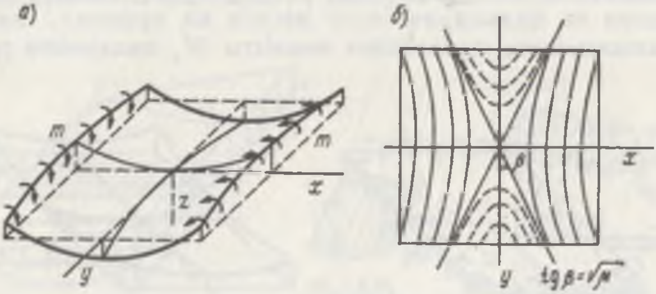


Рис. 6.23

усилий в этих сечениях не возникает: $H = Q_x = Q_y = 0$. Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $m_1 = m_2 = m$. Тогда

$$w = -\frac{m}{2D(1+\mu)}(x^2 + y^2). \qquad (6.34)$$

Это уравнение параболоида вращения. Искривленная пластина в этом случае представляет часть сферы, так как радиусы кривизны одинаковы во всех плоскостях и во всех точках пластины. Это следует из того, что $M_\alpha = m$ по формуле (6.24) при любом α. Параболоид (6.34), очень близкий к сфере, получился как результат использования приближенных линейных уравнений (точно так же при чистом изгибе балки из линейного уравнения ее упругая линия получается очерченной по квадратной параболе вместо окружности).

Возьмем другой частный случай $m_1 = m$, $m_2 = 0$ (рис. 6.23, *а*). Уравнение (6.33) получает вид

$$w = \frac{m}{2D(1-\mu^2)}(-x^2 + \mu y^2). \qquad (6.35)$$

Поверхность, описываемая этим уравнением, имеет седлообразную форму и называется *гиперболическим параболоидом.* Горизонталями этой поверхности являются гиперболы, асимптотами которых служат прямые $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\mu}$ (рис. 6.23, *б*). Как видно, благодаря влиянию коэффициента Пуассона пластина изгибается не только в плоскости действия моментов $M_x = m$, но получает и обратный выгиб в перпендикулярной плоскости.

Наконец, примем $m_1 = m$, $m_2 = -m$ (рис. 6.24, *а*). Тогда

$$w = \frac{m}{2D(1-\mu)}(-x^2+y^2). \qquad (6.36)$$

Это также гиперболический параболоид с асимптотами, наклоненными к осям x и y на 45°. Если в косых сечениях, параллельных асимптоте, определить усилия M_α и H_α по формулам (6.24), положив

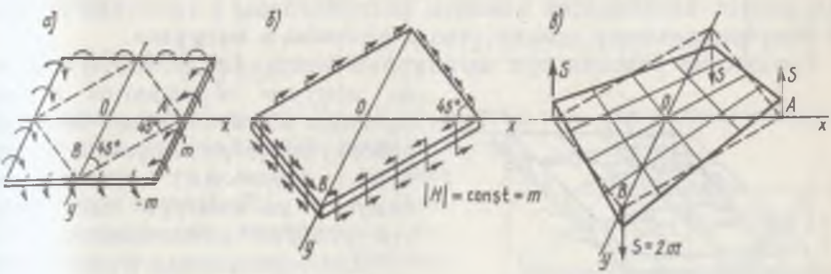


Рис. 6.24

$\alpha = 45°$, то найдем $M_\alpha = 0$, $H_\alpha = -m$. Таким образом, часть пластины, выделенная из рассматриваемой сечениями, равнонаклоненными к осям x и y, будет загружена на контуре постоянными крутящими моментами интенсивности m (рис. 6.24, *б*).

Заменим пары крутящих моментов обобщенной поперечной нагрузкой V_α, повернув эти пары на 90° (см. § 6.6). На всей длине кромок получим $V_\alpha = 0$, а в угловых точках будут приложены сосредоточенные силы $S = 2m$ (рис. 6.24, *в*). Таким образом, для модели пластины, подчиняющейся принятым в § 6.1 допущениям, приложение системы самоуравновешенных сосредоточенных сил в углах прямоугольной пластины создает деформацию чистого кручения, поскольку по всему полю пластины $H = m = \text{const}$.

§ 6.9. РЕШЕНИЕ В ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ

Данное решение, предложенное Навье, пригодно при действии произвольной поперечной нагрузки в случае, если все стороны прямоугольной пластины являются шарнирно опертыми.

1. Частный случай. Рассмотрим сначала загружение указанной пластины нагрузкой вида (рис. 6.25)

$$q(x,\ y) = q_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \qquad (6.37)$$

Прогибы зададим в аналогичной форме:

$$w(x,\ y)=w_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{6.38}$$

где w_0 — множитель, подлежащий определению. Изгибающие моменты M_x и M_y, имея $w(x,\ y)$, выразим по (6.5):

$$M_x=w_0\pi^2D\left(\frac{1}{a^2}+\mu\frac{1}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}; \tag{6.39}$$

$$M_y=w_0\pi^2D\left(\frac{1}{b^2}+\mu\frac{1}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{6.40}$$

Как видим, изгибающие моменты распределены в пластине по тому же синусоидальному закону, что и прогибы и нагрузка.

Граничные условия при шарнирном опирании состоят в том, что на контуре обращаются в ноль прогибы и изгибающие моменты, действующие по нормали к контуру. Поскольку произведение синусов на контуре дает ноль, эти условия выполняются.

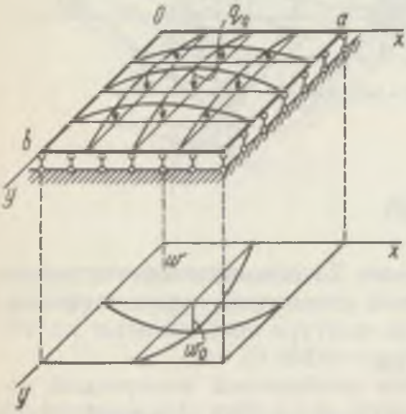


Рис. 6.25

Для определения w_0 подставим (6.37) и (6.38) в дифференциальное уравнение Софи Жермен — Лагранжа:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q(x,\ y)}{D}. \tag{6.41}$$

Так как четные производные от синуса дают вновь синус, то слева и справа получим общий множитель $\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$, сократив на который придем к равенству

$$w_0\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\right]=\frac{q_0}{D}. \tag{6.42}$$

В прямых скобках стоит выражение $\pi^4\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]^2$, с учетом этого отсюда найдем

$$w_0=\frac{q_0}{\pi^4D\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]^2}. \tag{6.43}$$

Мы убедились, что принятое выражение для прогибов (6.38) удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба, и одновременно нашли амплитуду прогиба w_0. В дополнение к (6.39) и (6.40) найдем другие внутренние усилия. По (6.5) и (6.10) получим

$$\left.\begin{aligned}
H &= -w_0(1-\mu)\pi^2 D\frac{1}{ab}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\,;\\
Q_x &= w_0\pi^3 D\,\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,;\\
Q_y &= w_0\pi^3 D\,\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Обобщенные поперечные силы на кромках $x = 0$ и $y = 0$ (опорные реакции) будут

$$\left.\begin{aligned}
V_x &= \left(Q_x+\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=0} = w_0\pi^3 D\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{(2-\mu)}{b^2}\right]\sin\frac{\pi y}{b}\,;\\
V_y &= \left(Q_y+\frac{\partial H}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=0} = w_0\pi^3 D\,\frac{1}{b}\left[\frac{1}{b^2}+\frac{(2-\mu)}{a^2}\right]\sin\frac{\pi x}{a}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Положительный знак при V_x и V_y говорит о том, что эти силы направлены вверх на указанных кромках. На кромках $x = a$ и $y = b$ их знак будет отрицательный, но по правилу знаков для поперечных сил это означает, что они направлены также вверх.

На рис. 6.26 показано распределение опорных реакций, изгибающих и крутящих моментов в пластине в предположении, что она удлинена в направлении оси x, т. е. $a > b$. Изгибающие моменты M_y и поперечные силы V_y превышают таковые для перпендикулярного направления. Чем больше удлинение пластины (a/b), тем более активно работают на изгиб полоски, выделенные параллельно короткой стороне пластины.

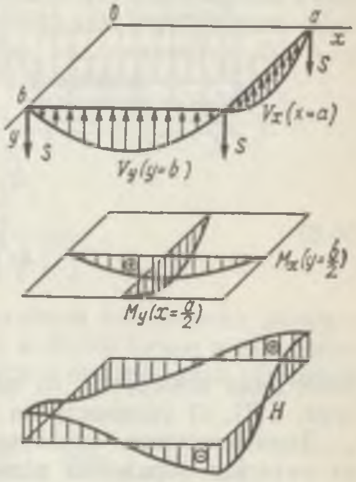


Рис. 6.26

Мы подробно рассмотрели случай нагрузки, изменяющейся по одной полуволне синуса в направлениях x и y. Ниже показано, что если нагрузка задана в виде

$$q = q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,, \tag{6.46}$$

где m и n — целые числа и очертание нагрузки имеет m полуволн по оси x и n — по оси y, то все формулы, приведенные выше, сохраняются. В них надо только вместо a и b подставить a/m и b/n, а вместо q_0 — величину q_{mn}. Этим воспользуемся при рассмотрении общего случая загружения.

2. Общий случай загружения. Разложим заданную функцию нагрузки $q(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд (рис. 6.27, *а*):

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \qquad (6.47)$$

где q_{mn} — коэффициенты разложения нагрузки. Тем самым заданная нагрузка представляется в виде набора отдельных синусоидальных составляющих нагрузок.

Некоторые базисные составляющие, по которым производится разложение, показаны в горизонталях (рис. 6.27, *б*). Чтобы получить

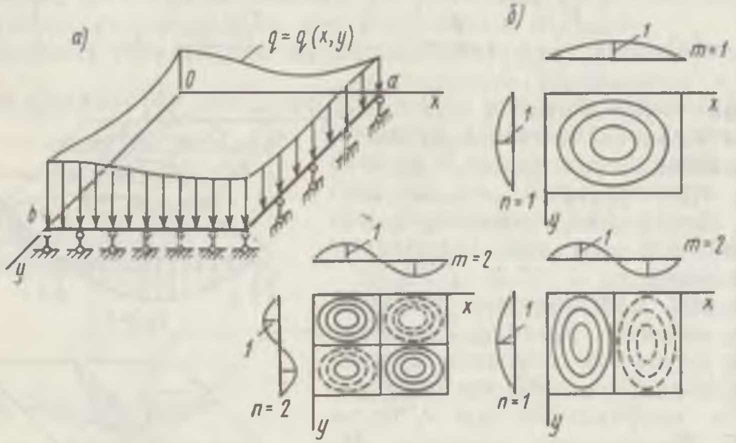


Рис. 6.27

член ряда номера m, n, надо ординаты соответствующего графика (рис. 6.27, *б*) умножить на амплитудное значение q_{mn}.

Замечательным свойством синусоидальных базисных функций, из которых образован данный ряд, является их взаимная ортогональность [см. (4.62) и (4.63)]. Состоит она в том, что интеграл по площади пластины от произведения этих функций при двух парах целых чисел m, n и m_1, n_1

$$\int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b}\, dx\, dy$$

принимает лишь два значения: 0, если $m_1 \neq m$ или $n_1 \neq n$, и $ab/4$, если $m_1 = m$, $n_1 = n$. Это свойство позволяет легко написать формулу для q_{mn} при произвольно заданной нагрузке $q(x, y)$. Действительно, умножим обе части равенства (6.47) на $\sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b}$ и проинтегрируем по площади пластины. Если теперь придадим

m_1, n_1 конкретные значения m, n, то все слагаемые в правой части окажутся равными нулю, кроме одного, с значениями m, n. Тогда из этого равенства найдем

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int\limits_0^b \int\limits_0^a q(x,\ y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6.48}$$

Будем считать, что мы произвели разложение заданной нагрузки в ряд (6.47), вычислив коэффициенты разложения q_{mn}. Теперь задача сводится к определению прогибов от отдельных членов этого ряда типа (6.46) и суммирования полученных результатов в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{6.49}$$

где w_{mn} — коэффициенты разложения поверхности прогибов, подлежащие определению. Для этого член ряда номера m, n для нагрузки (6.47) и такой же член ряда для прогибов (6.49) подставляем в дифференциальное уравнение изгиба пластины (6.41). В результате после сокращения синусов получается равенство, аналогичное (6.42), в котором надо a и b заменить на a/m и b/n, а именно:

$$w_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] = \frac{q_{mn}}{D},$$

откуда получим

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}. \tag{6.50}$$

Формулы для усилий в пластине получаем аналогично рассмотренному выше. Так, вместо (6.39), (6.40) и (6.44) будем иметь [заменяем в (6.39), (6.40) и (6.44) a, b на a/m, b/n и ставим знак суммирования]

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}\pi^2 D\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \mu\left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b};\\
M_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}\pi^2 D\left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \mu\left(\frac{m}{a}\right)^2\right] \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b};\\
H &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}\pi^2 D(1-\mu)\frac{mn}{ab} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

Рассмотрим пример — действие сосредоточенной силы P в точке с координатами x_P, y_P (рис. 6.28). Для вычисления коэффициентов q_{mn} по (6.48) представим, что сила P распределена на площади $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, тогда в точке с координатами x_P, y_P произведение $q\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$= P$, а во всех остальных точках площади пластины подынтегральное выражение (6.48) будет равно нулю. В результате получим

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} P \sin\frac{m\pi x_P}{a} \sin\frac{n\pi y_P}{b}. \tag{6.52}$$

Пусть $x_P = a/2$, $y_P = b/2$. Тогда при $m, n = 2, 4, 6, \ldots$ (четных) все числа $q_{mn} = 0$. Для нечетных номеров получим

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2}. \tag{6.53}$$

При $m = 1, 3, 5, \ldots \sin\frac{m\pi}{2} = 1, -1, 1, \ldots$, то же для n. Результирующий знак q_{mn} определяется произведением соответствующих

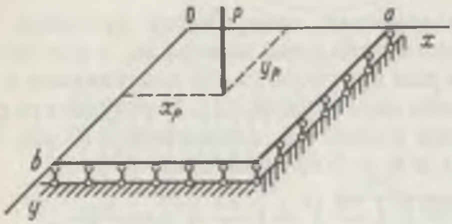
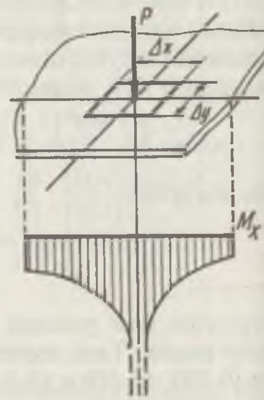


Рис. 6.28



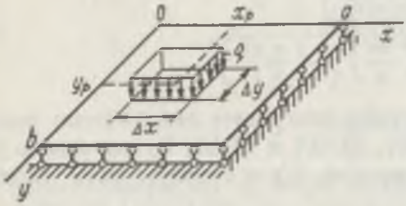


Рис. 6.30

Рис. 6.29

элементов этих знакочередующихся рядов. Прогибы (6.49) с учетом (6.50) и (6.53) получим в виде

$$w = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6.54}$$

Этот ряд довольно быстро сходится. Так, для квадратной пластины $a = b$ в центре пластины под силой при $x = y = a/2$ получим прогиб, удерживая члены ряда $m = 1, 3, 5$ и $n = 1, 3, 5$:

$$w = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{100} + \frac{1}{324} + \frac{2}{672} + \frac{2}{1156} + \frac{1}{2500}\right).$$

Ограничившись здесь лишь тремя первыми слагаемыми, что соответствует $m = 1, 3$ и $n = 1, 3$, найдем $w = 0{,}01121\ Pa^2/D$. Найденное методом одинарных тригонометрических рядов (см. § 6.10) практически точное значение прогибов составляет $w = 0{,}01160\ Pa^2/D$. Погрешность приведенного приближенного значения составляет примерно 3 %. Даже удержание лишь одного первого члена ряда дает погрешность несколько менее 12 %.

Если же составить ряд для изгибающих моментов (6.51), то он будет сходиться значительно медленнее, чем для прогибов, в особенности вблизи приложения силы P, а непосредственно под силой он вообще расходится — здесь моменты стремятся к бесконечности. Дело здесь не только и не столько в недостатках данного метода решения. Причина данной особенности состоит в самой модели силы, сосредоточенной в точке (рис. 6.29). Если из пластины вырезать вокруг точки приложения силы элемент $\Delta x \times \Delta y$ и устремить $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то для уравновешивания конечной силы P интенсивность поперечных сил и моментов Q_x, Q_y, M_x, M_y на гранях этого элемента должна будет возрастать до бесконечности. Действительно, пусть, например, из условий симметрии для квадратной пластины в точке под силой имеем равенство $Q_x = Q_y$. Тогда из суммы проекций на ось z всех сил, действующих на элемент $\Delta x\, \Delta y$,

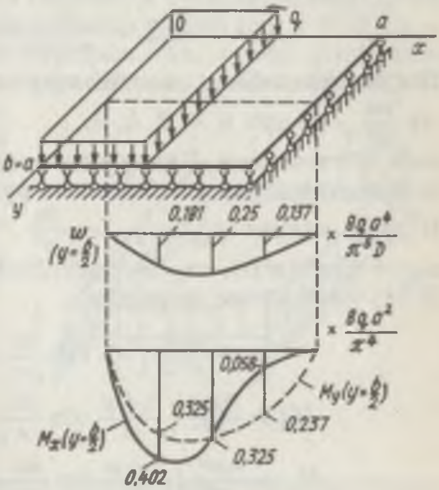


Рис. 6.31

$$P - 2Q_x\, \Delta x - 2Q_y\, \Delta y = 0$$

при $\Delta y = \Delta x$ получим $Q_x = \dfrac{P}{4\Delta x}$ и при $\Delta x \to 0$ интенсивность $Q_x \to \infty$. В практических расчетах силу приходится распределять на некоторой конечной площади, что устраняет разрывы во внутренних усилиях и одновременно улучшает сходимость рядов.

Пусть равномерная нагрузка q распределена на участке $\Delta x\, \Delta y$, а координаты ее центра по-прежнему обозначим x_P и y_P (рис. 6.30). Тогда по формуле (6.48) получим

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin\frac{m\pi x_P}{a} \sin\frac{m\pi\Delta x}{2a}\ \frac{n\pi y_P}{b} \sin\frac{n\pi\Delta y}{2b}\,. \qquad (6.55)$$

Для загружения всей площади пластины имеем $x_P = a/2$, $y_P = b/2$, $\Delta x = a$, $\Delta y = b$ и

$$q_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2}, \quad m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots . \tag{6.56}$$

Для четных m или n коэффициенты $q_{mn} = 0$.

Рассмотрим пример загружения квадратной пластины $b = a$ равномерной нагрузкой q на половине ее площади (рис. 6.31). Полагая в (6.55) $x_P = a/4$, $\Delta x = a/2$, $y_P = b/2$ и $\Delta y = b$, получим коэффициенты разложения нагрузки:

$$q_{mn} = \frac{8q}{mn\pi^2} \sin^2 \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Все коэффициенты, соответствующие четным n, выпадают, так как $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ при $n = 2, 4, 6, \ldots$. Числа m присутствуют как нечетные, так и четные. Примем далее для простоты $m = 1, 2$ и $n = 1$, т. е. используем лишь две базисные функции из показанных на рис. 6.27. В этом случае $q_{11} = q_{21} = \frac{8q}{\pi^2}$. Соответственно по (6.50) получим $w_{11} = 2qa^4/(\pi^6 D)$, $w_{21} = 8qa^4/(25\pi^6 D)$. С помощью рядов (6.49) и (6.51) составляем формулы:

$$w = \frac{8qa^4}{\pi^6 D}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{25}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi y}{a};$$

$$M_x = \frac{8qa^2}{\pi^4}\left(\frac{1+\mu}{4}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{4+\mu}{25}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi y}{a};$$

$$M_y = \frac{8qa^2}{\pi^4}\left(\frac{1+\mu}{4}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{4\mu+1}{25}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Сечение поверхностей $w(x, y)$, $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ по середине ширины пластины при $y = \frac{a}{2}$ показано на рис. 6.31 для $\mu = 0{,}3$. Вдоль оси y все ординаты этих поверхностей изменяются по полуволне синусоиды.

§ 6.10. ПРИМЕНЕНИЕ ОДИНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Приведенное выше решение Навье ограничено тем, что все четыре кромки пластины должны иметь шарнирное закрепление. Рассматриваемое ниже предложение М. Леви по использованию одинарных рядов в изгибе пластин существенно расширяет класс задач, допускающих решение. Аналогично решению Файлона в плоской задаче (см. § 4.7) примем уравнение поверхности прогибов в виде (рис. 6.32)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{6.57}$$

где $Y_m = Y_m(y)$ — функции одного аргумента y, подлежащие определению. Легко убедиться в том, что (6.57) удовлетворяет условиям опирания пластины на жесткие шарнирные опоры двух параллельных кромок $x = 0$ и $x = a$ [см. (6.15)]. Вычислив, используя (6.57),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} -Y_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a},$$

убеждаемся, что оба условия (6.15) выполняются на указанных поперечных кромках пластины, так как синусы, а следовательно, прогибы w и изгибающие моменты M_x обращаются в ноль при $x = 0$ и $x = a$. Функции $Y_m(y)$ должны выбираться так, чтобы выражение $w(x, y)$ удовлетворяло уравнению Софи Жермен — Лагранжа (6.12) и условиям закрепления на продольных кромках $y = \pm b/2$. Эти кромки могут быть закреплены произвольно.

Для определения Y_m подставим (6.57) в (6.12), но предварительно разложим заданную нагрузку $q(x, y)$ в одинарный ряд

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{6.58}$$

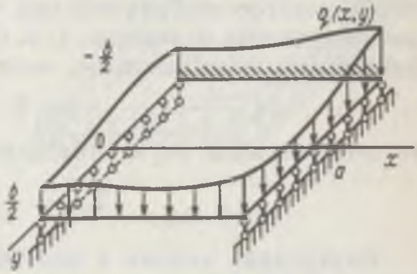


Рис. 6.32

Пользуясь свойством ортогональности синусов при различных числах m [см. (4.62) и (4.63)], найдем множитель q_m в виде

$$q_m = \frac{2}{a}\int_0^a q(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx. \tag{6.59}$$

Если $q(x, y)$ изменяется в направлении оси y, то величины q_m будут являться функциями координаты y, как это в общем случае указано в (6.58).

Подставив теперь в уравнение изгиба пластины (6.12) m-й член ряда из (6.57) и из (6.58) и сократив обе части равенства на $\sin\frac{m\pi x}{a}$, получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно Y_m:

$$\lambda^4 Y_m - 2\lambda^2 Y_m'' + Y_m^{\mathrm{IV}} = \frac{q_m(y)}{D}, \tag{6.60}$$

где $\lambda = \frac{m\pi}{a}$, а штрихами обозначены производные по y.

Общий интеграл этого уравнения состоит из двух слагаемых:

$$Y_m = Y_{m1} + Y_{m2}, \tag{6.61}$$

где первое слагаемое есть решение однородного уравнения, когда в правой части (6.60) стоит ноль. Такое решение уже было получено (см. § 4.7) в двух формах: первая — показательная форма

$$Y_{m1}=C_1e^{-\lambda y}+C_2\lambda y e^{-\lambda y}+C_3 e^{\lambda y}+C_4\lambda y e^{\lambda y}, \qquad (6.62)$$

вторая — гиперболо-тригонометрическая

$$Y_{m1}=C_1\operatorname{ch}\lambda y+C_2\lambda y\operatorname{sh}\lambda y+C_3\operatorname{sh}\lambda y+C_4\lambda y\operatorname{ch}\lambda y. \qquad (6.63)$$

Причем в (6.63) первые два слагаемых составляют симметричную часть решения относительно оси x, а вторые — антисимметричную. Произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_4$ находятся из условий на продольных кромках пластины $y=\pm\frac{b}{2}$.

Вторая часть суммы (6.61) — это частное решение уравнения (6.60), которое подбирается так, чтобы при подстановке в это уравнение получилось равенство, т. е. оно непосредственно зависит от вида функции $q_m(y)$. Например, если q_m — линейная функция от y

$$q_m=A+By, \qquad (6.64)$$

то подстановкой легко убедиться в том, что

$$Y_{m2}=\frac{1}{D\lambda^4}(A+By). \qquad (6.65)$$

Внутренние усилия в пластине можно выразить через Y_m, подставив (6.57) в формулы (6.5) и (6.20):

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=D\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda^2Y_m-\mu Y''_m)\sin\frac{m\pi x}{a};\\
M_y&=D\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda^2\mu Y_m-Y''_m)\sin\frac{m\pi x}{a};\\
H&=-D(1-\mu)\sum_{m=1}^{\infty}\lambda Y'_m\cos\frac{m\pi x}{a};\\
V_x&=D\sum_{m=1}^{\infty}[\lambda^3Y_m-\lambda(2-\mu)Y''_m]\cos\frac{m\pi x}{a};\\
V_y&=D\sum_{m=1}^{\infty}[-Y'''_m+(2-\mu)\lambda^2Y'_m]\sin\frac{m\pi x}{a}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.66)$$

Таким образом, в каждой конкретной задаче требуется определить коэффициенты разложения заданной нагрузки по (6.59), составить выражение Y_m (6.61) и найти произвольные постоянные из условий на кромках $y=\pm b/2$. После этого по (6.57) и (6.66) вычисляются прогибы и внутренние усилия в пластине.

Рассмотрим пример, когда равномерной нагрузкой q загружена пластина с шарнирно опертыми краями $x=0$, $x=a$ и заделанными кромками $y=\pm b/2$ (рис. 6.33).

По формуле (6.59) при $q=\mathrm{const}$ найдем

$$q_m=\frac{4q}{m\pi};\quad m=1,\ 3,\ 5,\ \ldots;$$

$$q_m=0;\quad m=2,\ 4,\ 6,\ \ldots,$$

и в решении будут участвовать только нечетные гармоники синуса. Учитывая симметрию относительно оси x, в выражении для Y_{m1} (6.63) удерживаем только первые два слагаемых, а Y_{m2} принимаем по (6.65) при $A=\frac{4q}{m\pi}$ и $B=0$, что дает

$$Y_m=C_1\operatorname{ch}\lambda y+C_2\lambda y\operatorname{sh}\lambda y+\frac{4q}{m\pi\lambda^4D}. \qquad (а)$$

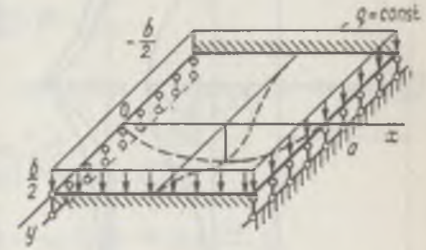


Рис. 6.33

Эту функцию надо подчинить двум условиям, учитывая, что при $y=\pm b/2$ кромки заделаны: $w=0$ и $\frac{\partial w}{\partial y}=0$. Для отдельного члена ряда это дает $Y_m\left(y=\pm\frac{b}{2}\right)=0$ и $Y'_m\left(y=\pm\frac{b}{2}\right)=0$. Вычислим производную:

$$Y'_m=C_1\lambda\operatorname{sh}\lambda y+C_2(\lambda\operatorname{sh}\lambda y+\lambda^2y\operatorname{ch}\lambda y). \qquad (б)$$

Составляя указанные два условия с использованием (а) и (б) получим уравнения относительно C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1\operatorname{ch}\alpha+C_2\alpha\operatorname{sh}\alpha+\frac{4q}{m\pi\lambda^4D}=0;\\
&C_1\operatorname{sh}\alpha+C_2(\operatorname{sh}\alpha+\alpha\operatorname{ch}\alpha)=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

где $\alpha=\frac{\lambda b}{2}=\frac{m\pi b}{2a}$. Решая их, найдем

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=-\frac{4q}{m\pi\lambda^4D}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha+\alpha\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha};\\
C_2&=\frac{4q}{m\pi\lambda^4D}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha}.
\end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Теперь можно составить окончательные выражения для прогибов (6.57) или усилий (6.66). Так, выражение для прогибов получит вид

$$w=\frac{4qa^4}{\pi^5D}\sum_{m=1,\,3,\,5,\,\ldots}\frac{1}{m^5}\left(1+\frac{\lambda y\operatorname{sh}\lambda y\operatorname{sh}\alpha-(\operatorname{sh}\alpha+\alpha\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\lambda y}{\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Этот ряд быстро сходится. Ряды для усилий (6.66) хотя и медленнее, но также хорошо сходятся.

Если пластина в одном направлении сильно удлинена ($b \gg a$), то в некоторых задачах ее можно рассматривать как бесконечную. Пусть, например, шарнирно опертая, бесконечная в направлении оси y пластина (рис. 6.34) загружена вдоль линии $y = 0$ (отмеченной пунктиром) нагрузкой вида

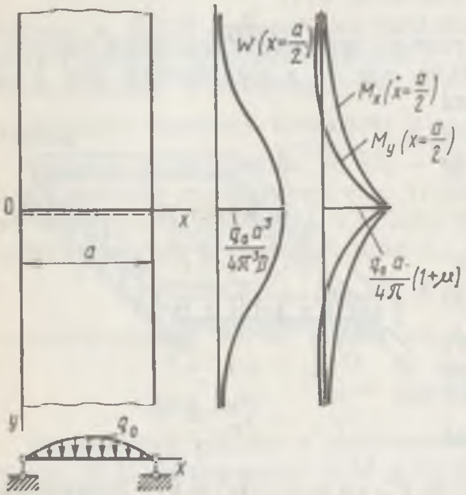


Рис. 6.34

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a}\Big|_{y=0}. \qquad (д)$$

Так как нагрузка в направлении оси x изменяется по одной полуволне синусоиды, то из всего ряда (6.57), выражающего прогибы, сохранится лишь один первый член ряда $m = 1$. Выражение для Y_{m1} удобно принять в показательной форме (6.62). Причем, так как при $y \to \infty$ прогибы не могут стремиться к бесконечности, слагаемые, содержащие $e^{\lambda y}$, надо исключить, как не удовлетворяющие этому условию. Поэтому в (6.62) сохраним лишь первые два слагаемых. Частное решение Y_{m2} будет равно нулю, поскольку на площади пластины поверхностная нагрузка $q(x, y)$ отсутствует. Итак, для w имеем выражение

$$w = (C_1 e^{-\lambda y} + C_2 \lambda y e^{-\lambda y}) \sin \frac{\pi x}{a}, \qquad (е)$$

где $\lambda = \pi/a$. Рассматриваем нижнюю часть пластины, где $y \geqslant 0$.

Постоянные C_1 и C_2 найдем из следующих условий. При $y = 0$ ввиду симметрии относительно оси x производная $\frac{\partial w}{\partial y}$ равна нулю, что дает $Y'_m\,(y = 0) = 0$. Второе условие состоит в том, что обобщенная поперечная сила в сечении чуть ниже оси x численно равна половине нагрузки $q(x)$. С учетом знака это дает $V_y\,(y = 0) = -q(x)/2$. С использованием (6.66) напишем эти два условия в виде

$$Y'_m = 0\Big|_{y=0}; \quad -Y'''_m + (2-\mu)\lambda^2 Y'_m = -\frac{q_0}{2D}\Big|_{y=0}. \qquad (ж)$$

Второе условие с учетом первого естественно упрощается и дает $Y'''_m = \frac{q_0}{2D}$. Здесь под Y_m понимается выражение в скобках в равенстве (е).

Производя вычисления найдем производные:

$$\left.\begin{aligned} Y_m' &= \lambda\,[-C_1 e^{-\lambda y} + C_2(1-\lambda y)\,e^{-\lambda y}]; \\ Y_m'' &= \lambda^2\,[C_1 e^{-\lambda y} - C_2(2-\lambda y)\,e^{-\lambda y}]; \\ Y_m''' &= \lambda^3\,[-C_1 e^{-\lambda y} + C_2(3-\lambda y)\,e^{-\lambda y}]. \end{aligned}\right\} \qquad (з)$$

Используя формулы (з), составляем условия (ж), что дает

$$-C_1 + C_2 = 0; \quad -C_1 + 3C_2 = \frac{q_0}{2\lambda^3 D}. \qquad (и)$$

Отсюда получим

$$C_1 = C_2 = \frac{q_0}{4\lambda^3 D} = \frac{q_0 a^3}{4\pi^3 D}.$$

Окончательно выражения для прогибов и моментов M_x и M_y по (6.66) получат вид

$$w = \frac{q_0 a^3}{4\pi^3 D}(1+\lambda y)\,e^{-\lambda y}\sin\frac{\pi x}{a};$$

$$M_x = \frac{q_0 a}{4\pi}\,[(1+\mu) + (1-\mu)\,\lambda y]\,e^{-\lambda y}\sin\frac{\pi x}{a};$$

$$M_y = \frac{q_0 a}{4\pi}\,[(1+\mu) - (1-\mu)\,\lambda y]\,e^{-\lambda y}\sin\frac{\pi x}{a}.$$

Так как $\lambda = \pi/a$, то при $y = a$ множитель $e^{-\lambda y} = e^{-\pi} \approx 0{,}045$ и можно считать, что на участке пластины $y \approx \pm a$ ее изгиб практически затухает. Эпюры w, M_x и M_y показаны на рис. 6.34. Если нагрузка $q(x)$ будет содержать гармоники номеров $m > 1$, то для каждой из них затухание изгиба произойдет на участке $y = \pm a/m$ и, следовательно, приведенное суждение останется справедливым для любой нагрузки распределенной по линии $y = 0$.

Одинарные тригонометрические ряды успешно применяются и в расчетах пластинчатых систем на изгиб, аналогично тому, как это было пояснено в плоской задаче (см. [2]).

§ 6.11. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ИЗГИБ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В настоящее время в технике все более широкое применение получают конструкции, в которых пластины изготовлены из ортотропного материала или являются так называемыми конструктивно-ортотропными элементами.

Пусть для материала пластины в плоскости слоев, параллельных срединной плоскости, справедлив закон Гука как для ортотропного материала:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

где справедливо известное соотношение $\mu_{xy}E_x = \mu_{yx}E_y$. Если повторить все рассуждения, приведенные для изотропных пластин, то вместо (6.5) и (6.10) придем к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D_1\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ M_y &= -D_2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]; \\ H &= -D_к\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \\ Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right], \end{aligned}\right| \tag{6.67}$$

где введены обозначения жесткостей

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = \frac{E_x\delta^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y\delta^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \\ &D_к = \frac{\delta^3 G}{12}; \quad D_3 = D_1\mu_{xy} + 2D_к = D_2\mu_{yx} + 2D_к. \end{aligned}\right\} \tag{6.68}$$

Дифференциальное уравнение изгиба, аналогичное уравнению (6.12), получит вид

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x,\ y). \tag{6.69}$$

Для его интегрирования применимы те же методы, которые используются и для расчета изотропных пластин. Так, при задании поверхности прогибов в форме двойного тригонометрического ряда (6.49) амплитуду прогиба w_{mn} вместо (6.50) получим в виде

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4\left[D_1\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3\left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_2\left(\frac{n}{b}\right)^4\right]}. \tag{6.70}$$

При использовании одинарных тригонометрических рядов и задании w в форме (6.57) придем вместо (6.60) к такому дифференциальному уравнению:

$$\lambda^4 D_1 Y_m - 2\lambda^2 D_3 Y''_m + D_2 Y_m^{\mathrm{IY}} = q_m(y). \tag{6.71}$$

Его решение состоит из двух частей (6.61), причем общий интеграл однородного уравнения может иметь три различные формы, что подробно рассмотрено в § 4.10.

Заметим, что иногда приближенно принимают $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$. В этом случае, как можно установить, и уравнение (6.69) и уравнение (6.71) приводятся к соответствующим уравнениям для изотропной пластинки, если ввести новую переменную $y_1 = y\sqrt[4]{D_1/D_2}$. Вместо (6.69) и (6.71) соответственно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y_1^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4}=\frac{q}{D_1};$$

$$\lambda^4 Y_m-2\lambda^2 Y_m''+Y_m^{\mathrm{IV}}=q/D_1.$$

Решение этих уравнений производится так же, как для условной изотропной пластины, у которой вместо ширины b принят размер $b_1 = b\sqrt[4]{D_1/D_2}$.

Рассмотрим теперь изотропную пластину, усиленную сеткой ребер, часто поставленных как в одном, так и в другом направлениях (рис. 6.35). Такая система проявляет в общем случае различные жесткостные характеристики в направлениях x и y и называется *конструктивно-ортотропной плитой*. Ее расчет можно приближенно выполнить как расчет условной ортотропной пластины с жесткостями D_1, D_2 и D_3, входящими в уравнения (6.69). Пусть для ребер, параллельных оси x, жесткость на изгиб EJ_1, на кручение $GJ_{\text{кр}1}$, а шаг расстановки этих ребер b_1. Соответственно для ребер, параллельных оси y, имеем EJ_2, $GJ_{\text{кр}2}$ и a_1. Если изгибающие и крутящие моменты, возникающие в сечениях стержней, условно равномерно распределить на длине соответствующего шага расстановки ребер, то указанные жесткости ортотропной пластины будут

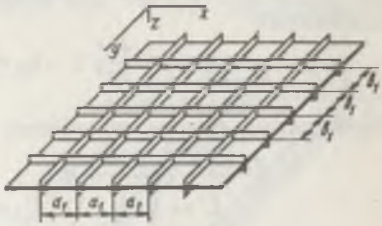


Рис. 6.35

$$D_1=D+\frac{EJ_1}{b_1};\quad D_2=D+\frac{EJ_2}{a_1};\quad D_3=D+\frac{1}{2}\left[\frac{GJ_{\text{кр}1}}{b_1}+\frac{GJ_{\text{кр}2}}{a_1}\right],$$

где D — цилиндрическая жесткость самой изотропной пластины, которая усиливается ребрами. При отсутствии пластины ($D = 0$) уравнение (6.69) будет приближенно описывать изгиб частой балочной клетки.

Заметим, что если ребра жесткости стоят несимметрично относительно срединной плоскости усиливаемой пластины, то расчет такой системы усложняется, так как в срединной поверхности появляются мембранные усилия даже при малых прогибах. Но упрощая задачу, в некоторых случаях уравнение (6.69) применяют и в указанных несимметричных системах.

§ 6.12. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН

Составим выражение потенциальной энергии деформации, накапливаемой при изгибе изотропной пластины, выразив ее через прогибы. В каждом горизонтальном слое пластины развиваются упругие деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} (6.2) и соответствующим им напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} (6.4). Плотность энергии деформации [см. (3.5)], отнесенная к единице объема материала пластины, будет

$$U_0=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy}\right),$$

или с учетом (6.2), (6.3) и (6.4)

$$U_0=\frac{E_1}{2}\left[\varkappa_x(\varkappa_x+\mu\varkappa_y)+\varkappa_y(\varkappa_y+\mu\varkappa_x)+\right.$$

$$\left.+2(1-\mu)\varkappa^2\right]z^2=\frac{E_1}{2}\left[\varkappa_x^2+\varkappa_y^2+2\mu\varkappa_x\varkappa_y+2(1-\mu)\varkappa^2\right]z^2,$$

где $E_1=E/(1-\mu^2)$. Кривизны (6.3) связаны с прогибами соотношениями

$$\varkappa_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \varkappa_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\quad \varkappa=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.$$

Интегрируя теперь по объему пластины, получим

$$U=\int_0^b\int_0^a\int_{-\delta/2}^{\delta/2}U_0\,dx\,dy\,dz=\int_0^b\int_0^a U_0^{\text{пл}}\,dx\,dy. \tag{6.72}$$

Здесь через $U_0^{\text{пл}}$ обозначен результат интегрирования по толщине пластины. Это есть плотность энергии деформации пластины, отнесенная к единице ее площади:

$$U_0^{\text{пл}}=\int_{-\delta/2}^{\delta/2}U_0\,dz=\frac{D}{2}\left[\varkappa_x^2+\varkappa_y^2+2\mu\varkappa_x\varkappa_y+2(1-\mu)\varkappa^2\right], \tag{6.73}$$

где $D=E\delta^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Энергия деформации всей пластины находится как интеграл по ее площади (6.72):

$$U=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{6.74}$$

Выражению (6.74) можно придать несколько другой вид, добавляя и вычитая в прямых скобках $2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a D\left\{(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy. \tag{6.75}$$

Если жесткость пластины постоянна, то величину D можно вынести за знак интеграла. Полезно отметить, что для пластин, на всей длине

контура которых имеем жесткую заделку (угол поворота нормали в направлении, перпендикулярном контуру $\Theta_n=0$) или шарнирное опирание (изгибающий момент $M_n=0$), интеграл по площади от выражения в прямых скобках (6.75) оказывается равным нулю. Тогда выражение U для указанных пластин упрощается:

$$U=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^a(\nabla^2 w)^2\,dx\,dy, \tag{6.76}$$

где $\nabla^2 w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Полная энергия изогнутой пластины (см. § 3.2) представляет сумму энергии деформации U и потенциала внешних сил Π:

$$Э=U+\Pi. \tag{6.77}$$

Для пластины, загруженной только нагрузкой $q(x, y)$, величина Π составляется как работа элемен-

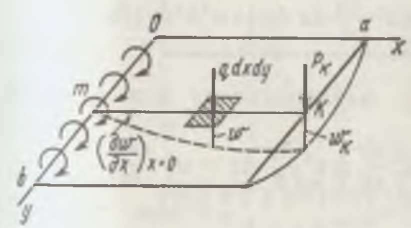


Рис. 6.36

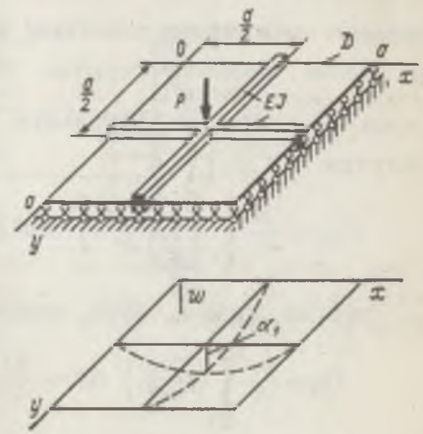


Рис. 6.37

тарных сил $q\,dx\,dy$ на перемещениях w при переводе изогнутой пластины в недеформированное состояние:

$$\Pi=-\int_0^b\int_0^a q(x,\ y)\,w(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{6.78}$$

Если на контуре пластины приложены еще какие-либо нагрузки, то в выражение для Π должна быть добавлена работа и этих нагрузок. Например, для пластины, показанной на рис. 6.36,

$$\Pi=-\int_0^b\int_0^a qw\,dx\,dy-P_K w_K-\int_0^b m\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}dy. \tag{6.79}$$

Здесь учтена работа сосредоточенной силы P_K и моментов m на углах поворота $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$ на кромке $x=0$.

Необходимость составления выражений полной энергии для пластины возникает при использовании различных энергетических методов. Покажем применение этого понятия в методе Ритца (см. § 3.5).

В качестве примера рассмотрим квадратную шарнирно опертую пластину с цилиндрической жесткостью D, усиленную двумя ребрами, изгибная жесткость каждого из которых равна EJ (рис. 6.37). Зададим поверхность прогибов в виде одного члена ряда

$$w = \alpha_1 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}, \tag{а}$$

где α_1 — прогиб в центре под силой. Следовательно,

$$\Pi = -\alpha_1 P.$$

Энергию деформации пластины в данном случае можно определить по более простой формуле (6.76). Так как $\nabla^2 w = -\frac{2\alpha_1\pi^2}{a^2} \times \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$, то используя формулу (4.63) для интегралов, получим

$$U_{\text{пл}} = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^a \left(\frac{2\alpha_1\pi^2}{a^2}\right)^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{a}\,dx\,dy = \alpha_1^2\pi^4 D/(2a^2).$$

Энергия изгиба бруса, например, параллельного оси x, будет

$$U_{б} = \frac{EJ}{2}\int_0^a \left(\frac{d^2 w_{б}}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EJ}{2}\int_0^a \alpha_1^2\frac{\pi^4}{a^4}\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx = \alpha_1^2\frac{\pi^4 EJ}{4a^3}.$$

Здесь прогибы бруса $w_{б}$ получены из (а) при $y = a/2$. Энергия деформации пластины и двух брусьев составит

$$U = U_{\text{пл}} + 2U_{б} = \alpha_1^2\left[\frac{\pi^4 D}{2a^2} + \frac{\pi^4 EJ}{2a^3}\right] = \alpha_1^2\frac{\pi^4}{2a^3}(Da + EJ).$$

Полная энергия

$$Э = U + \Pi = \alpha_1^2\frac{\pi^4}{2a^3}(Da + EJ) - P\alpha_1.$$

Условие $\partial Э/\partial\alpha_1 = 0$ дает

$$\alpha_1 = \frac{Pa^3}{\pi^4(Da + EJ)}. \tag{6.80}$$

§ 6.13. ПЛАСТИНА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Если пластина лежит на сплошном деформируемом основании, то при записи дифференциального уравнения изгиба необходимо учесть распределенную по площади пластины реакцию (отпор) основания (рис. 6.38). Обозначив интенсивность отпора $r = r(x, y)$, уравнение изгиба запишем так:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q-r}{D}, \tag{6.81}$$

где q — интенсивность внешней распределенной нагрузки. В зависимости от свойств деформируемого основания связь между отпором r и прогибами w может быть различной. В практике очень часто используют известную из курса сопротивления материалов модель Винклера, согласно которой $r = kw$, где k — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Подставив значение r в (6.81) и перенеся член, содержащий неизвестную функцию w, влево, окончательно получим уравнение изгиба

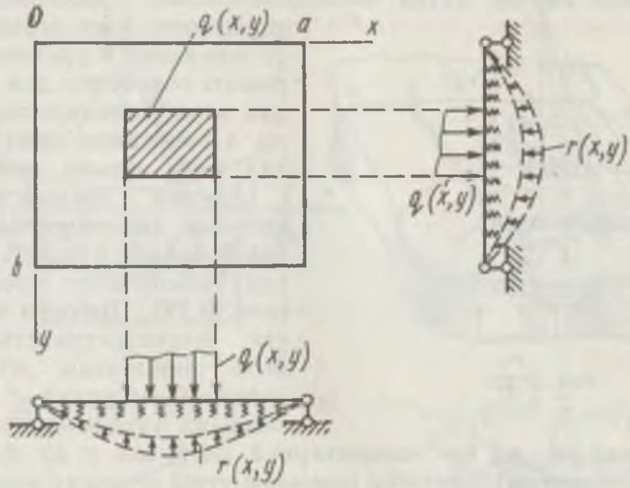


Рис. 6.38

пластины, лежащей на Винклеровом основании, в виде

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D}. \tag{6.82}$$

Для его интегрирования применим любой из рассмотренных методов. Так, для шарнирно опертой пластины (рис. 6.38) нагрузку $q(x, y)$ и прогибы $w(x, y)$, следуя § 6.9, представим в виде двойных рядов:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Повторяя выкладки указанного параграфа, придем к такой формуле для w_{mn}:

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}. \tag{6.83}$$

В частном случае $k = 0$ (6.83) совпадает с формулой (6.50) для пластины без упругого основания.

Данное решение предполагает, что связи между пластиной и упругим основанием работают как на сжатие, так и на отрыв (двусторонние связи). Такое решение будет верно только в том случае, если с учетом всех нагрузок (например, собственного веса плиты) суммарная реакция во всех точках опирания пластины будет сжимающей. В противном случае путем последовательных приближений надо определять зону отрыва плиты от основания и уравнение (6.82) решать совместно для двух зон: для зоны вдавливания пластины в основание при $k_1 = k$ и для зоны отрыва при $k_2 = 0$.

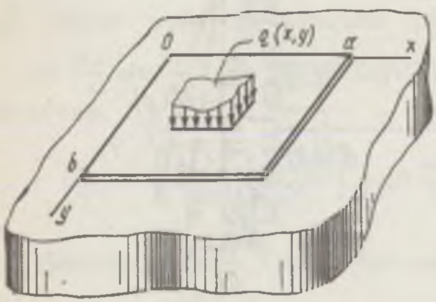


Рис. 6.39

Другой распространенной моделью деформируемого основания является модель упругого полубесконечного пространства (рис. 6.39). Прогибы поверхности полупространства могут быть определены от распределенной нагрузки с помощью решения Буссинеска (см. § 5.4). Так, в точке (x_i, y_i) от элементарной нагрузки $r\,dx\,dy$, приложенной в точке (x, y), прогиб с помощью этого решения можно представить в виде $dw_i = K[(x - x_i), (y - y_i)]\,r\,dx\,dy$, где $K[\ ]$ — функция влияния единичной силы $P = 1$, имеющей координаты (x, y), на прогибы поверхности полупространства. Она получается в решении Буссинеска. Тогда от произвольной нагрузки $r(x, y)$, возникающей по подошве пластины, прогиб в точке (x_i, y_i) будет

$$w_i = \int_0^b \int_0^a K[(x - x_i), (y - y_i)]\,r(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.84}$$

С учетом формулы (5.30) выражение (6.84) приобретает такую конкретную форму:

$$w_i = \frac{1-\mu^2}{\pi E}\int_0^b \int_0^a \frac{r(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}. \tag{6.85}$$

В данной модели связь между просадкой основания w_i и интенсивностью нагрузки r значительно более сложная, чем в модели

Винклера, поэтому задача существенно усложняется. В большинстве случаев задача расчета плит, лежащих на упругом полупространстве, приближенно решается численно.

§ 6.14. ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Изучение изгиба круглых пластин начнем с наиболее простого случая — осесимметричной деформации. В круглых пластинах целесообразно использовать полярную систему координат, где положе-

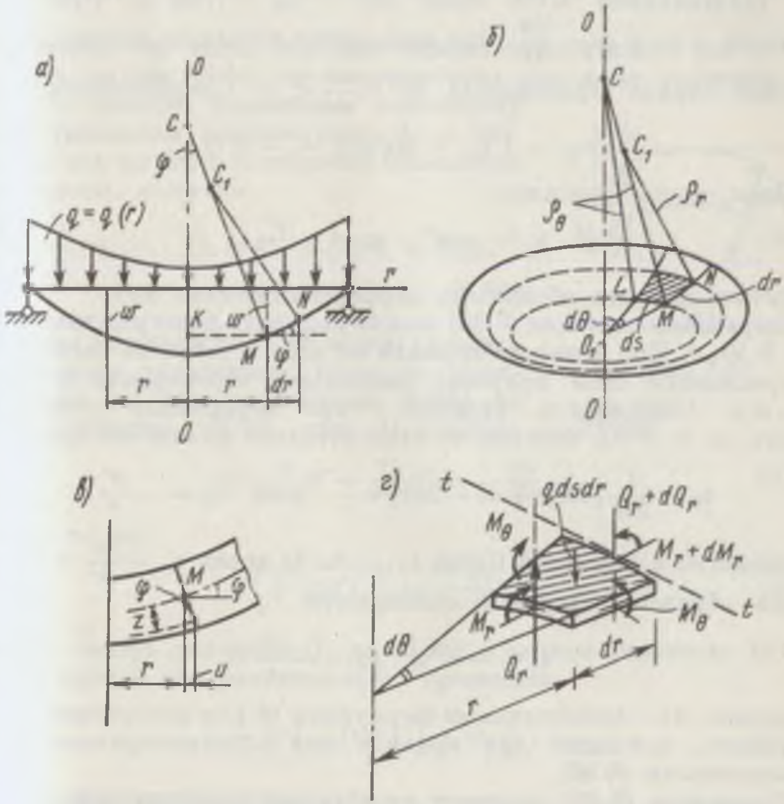


Рис. 6.40

ние каждой точки M (r, Θ) задается радиусом r и угловой координатой Θ, определяющей положение точки в окружном направлении.

В случае осесимметричного изгиба поверхность прогибов представляет поверхность вращения, а уравнение плоской кривой, являющейся любым меридиональным сечением этой поверхности, зависит только от аргумента r, т. е. $w = w\ (r)$. Нагрузка, очевидно, также зависит только от r, $q = q\ (r)$ (рис. 6.40, *а*, *б*).

В точке M поверхности прогибов (рис. 6.40, *б*) проведем нормаль MC. Элемент пластины $\mathrm{d}r \times \mathrm{d}s$ искривлен в двух перпендикулярных плоскостях, содержащих нормаль MC: в плоскости меридионального сечения с радиусом кривизны ρ_r и в тангенциальном (окружном) направлении с радиусом ρ_θ. Причем кривизна в радиальном направлении как для пологой плоской кривой будет $\varkappa_r = \frac{1}{\rho_r} \approx -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}$. Для окружного направления у поверхности вращения (как в конусе) радиус ρ_θ равен отрезку MC, где точка C — это точка пересечения нормали с осью симметрии. Из рис. 6.40, *а* найдем, что гипотенуза MC треугольника MCK будет $MC = \rho_\theta = r/\sin\varphi$. При малых углах $\sin\varphi \approx \varphi \approx -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}$, где знак минус поставлен потому, что на рисунке первая производная $w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} < 0$. Следовательно,

$$\varkappa_\theta = 1/\rho_\theta = \sin\varphi/r = -w'/r.$$

Итак, имеем кривизны

$$\varkappa_r = -w''; \quad \varkappa_\theta = -\frac{w'}{r}, \tag{6.86}$$

где штрихом будем обозначать дифференцирование по r.

Выражения кривизн (6.86) можно получить непосредственно и из рис. 6.40, *в*. При повороте нормали на угол φ точка на расстоянии z от срединного слоя получает радиальное перемещение $u = \varphi z = -w'z$. Окружность радиуса r при деформации увеличивает радиус до $(r + u)$, поэтому ее относительное удлинение будет

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2\pi r}\left[2\pi(r+u) - 2\pi r\right] = \frac{u}{r} \quad \text{или} \quad \varepsilon_\theta = -\frac{w'}{r} z.$$

По аналогии с формулой Коши $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$ имеем $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -w''z$. Таким образом, получаем зависимости

$$\varepsilon_r = -w''z; \quad \varepsilon_\theta = -\frac{w'}{r} z. \tag{6.87}$$

Сравнивая их с аналогичными формулами (6.2) в декартовой системе координат, приходим для кривизн при осесимметричном изгибе к выражениям (6.86).

Кривизнам (6.86) отвечают изгибающие моменты (рис. 6.40, *г*)

$$\left.\begin{aligned} M_r &= D(\varkappa_r + \mu\varkappa_\theta) = -D\left[w'' + \frac{\mu w'}{r}\right]; \\ M_\theta &= D(\varkappa_\theta + \mu\varkappa_r) = -D\left[\frac{w'}{r} + \mu w''\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.88}$$

Поскольку каждое меридиональное сечение является плоскостью симметрии, касательные напряжения в меридиональных сечениях отсутствуют, т. е. $\tau_\theta = 0$. Следовательно, поперечные силы $Q_\theta = 0$.

По той же причине крутящие моменты в меридиональном, а значит, и в окружных сечениях отсутствуют, т. е. $H = 0$.

Кроме изгибающих моментов M_Θ и M_r в окружных сечениях пластины возникают поперечные силы Q_r, которые определим из условий равновесия элемента пластины (рис. 6.40, *г*). Сумма проекций на ось z и сумма моментов относительно касательной $t - t$ к наружной границе элемента дают уравнения

$$(Q_r + \mathrm{d}Q_r)(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\Theta - Q_r r\,\mathrm{d}\Theta + q\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r = 0;$$

$$(M_r + \mathrm{d}M_r)(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\Theta - M_r r\,\mathrm{d}\Theta + (Q_r r\,\mathrm{d}\Theta)\,\mathrm{d}r + 2M_\Theta\,\mathrm{d}r\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{2}\right) = 0.$$

Здесь учтено, что пары M_Θ дают момент относительно оси $t - t$. Это видно из рис. 6.41, где векторы этих пар дают проекцию на ось $t - t$, равную последнему слагаемому второго уравнения. Заменив здесь $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\Theta$, сократив все на $\mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta$ и отбросив бесконечно малые члены, получим

Рис. 6.41

$$q = -\frac{1}{r}(rQ_r)'; \quad Q_r = M_r' + \frac{1}{r}(M_r - M_\Theta). \tag{6.89}$$

Каждое из равенств (6.89) может служить разрешающим уравнением, если его выразить через w. Так, подставляя (6.88) во второе равенство (6.89) при $D = \text{const}$, получим

$$w''' + \frac{1}{r}w'' - \frac{1}{r^2}w' = -\frac{Q_r}{D}, \tag{6.90}$$

или, что то же,

$$\left[\frac{1}{r}(rw')'\right]' = -\frac{Q_r}{D}. \tag{6.91}$$

Внеся теперь значение Q_r из (6.91) в первое равенство (6.89), получим другой вид разрешающего уравнения:

$$\frac{1}{r}\left\{r\left[\frac{1}{r}(rw')'\right]'\right\}' = \frac{q}{D}, \tag{6.92}$$

или в развернутой форме

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{r}w''' - \frac{1}{r^2}w'' + \frac{1}{r^3}w' = \frac{q}{D}. \tag{6.93}$$

Уравнение третьего порядка (6.91) целесообразно использовать в том случае, если содержащаяся в правой части интенсивность поперечной силы Q_r может быть найдена по методу сечений. Так, например, вырезая из пластины (см. рис. 6.40, *а*) окружным сечением круг радиуса r, можно найти Q_r из суммы проекций всех сил на ось z

(рис. 6.42, *а*)

$$Q_r 2\pi r + \int_0^r 2\pi r_1 \, dr_1 q(r_1) + P = 0,$$

откуда

$$Q_r = -\frac{1}{r}\int_0^r q(r_1) r_1 \, dr_1 - \frac{P}{2\pi r}. \qquad (6.94)$$

Так же легко составить выражение для Q_r в кольцевой пластине, сечение которой показано на рис. 6.42, *б*. Но если та же пластина будет опираться как на внутреннем, так и на внешнем контуре, то непосредственное определение Q_r из статических условий станет

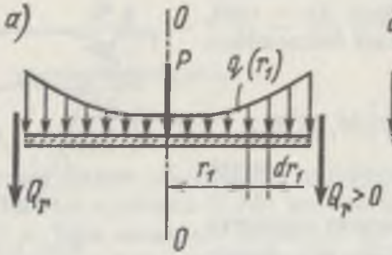


Рис. 6.42

невозможным и применение уравнения третьего порядка (6.91) будет менее удобным. В этом и других более общих случаях используется уравнение четвертого порядка (6.92), куда в правую часть непосредственно входит заданная интенсивность внешней нагрузки q.

Общий интеграл уравнения (6.91) будет

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + w(Q_r), \qquad (6.95)$$

где частное решение $w(Q_r)$ в общем случае может быть найдено по схеме последовательного интегрирования:

$$w(Q_r) = -\frac{1}{D}\int\left[\int\left(\int Q_r \, dr\right) r \, dr\right]\frac{1}{r}\, dr. \qquad (6.96)$$

Эти выражения легко находятся путем трехкратного интегрирования обеих частей равенства (6.91).

Аналогичные операции для уравнения четвертого порядка (6.92) дают

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w(q), \qquad (6.97)$$

где

$$w(q) = \frac{1}{D}\int\left\{\int\left[\int\left(\int qr \, dr\right)\frac{1}{r}\, dr\right] r \, dr\right\}\frac{1}{r}\, dr. \qquad (6.98)$$

Произвольные постоянные находятся, как обычно из граничных условий с учетом закрепления пластины. Рассмотрим пример — жестко защемленная сплошная пластина, загруженная на всей площади нагрузкой $q = \text{const}$ (рис. 6.43). Используем уравнение (6.91) третьего порядка. По (6.94) получим при $P = 0$ и $q = \text{const}$ поперечную силу $Q_r = -\frac{qr}{2}$ и по (6.96) — $w(Q_r) = qr^4/(64D)$. В результате решение на основании (6.95) получит вид

$$w = C_1 + C_2 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \tag{а}$$

Здесь опущено слагаемое $C_3 \ln r$, так как при $r \to 0$ оно стремится к $-\infty$, что противоречит физическому смыслу задачи. Это слагаемое

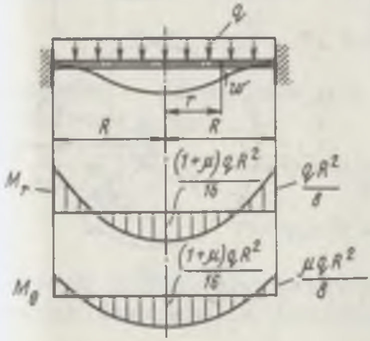


Рис. 6.43

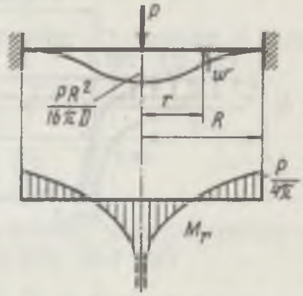


Рис. 6.44

необходимо сохранить в решении, когда точка $r = 0$ не принадлежит пластине (пластина с отверстием).

Постоянные C_1 и C_2 найдем из условий

$$w = 0\,|_{r=R}\ ; \quad w' = 0\,|_{r=R}, \tag{б}$$

что дает $C_1 = qR^4/(64\,D)$; $C_2 = -\,qR^2/(32\,D)$,

$$w = \frac{qR^4}{64D}\left[1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]. \tag{в}$$

По (6.88) составляем выражения для изгибающих моментов M_r и M_θ:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16}\left[(1+\mu)R^2 - (3+\mu)r^2\right]; \\ M_\theta &= \frac{q}{16}\left[(1+\mu)R^2 - (3\mu+1)r^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{г}$$

Эпюры M_r и M_θ изображены на рис. 6.43.

Пусть та же пластина загружена сосредоточенной силой P (рис. 6.44). Используем в этом случае решение (6.97) для уравнения четвертого порядка. Так как на площади пластины $q = 0$, то $w(q) = 0$. Кроме того, член $C_3 \ln r$ исключаем по тем же причинам, что и в предыдущем примере. Итак, получаем выражение для w в виде

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \tag{д}$$

Имеем три неизвестные постоянные. Поэтому к граничным условиям (б) добавим третье, состоящее в том, что поперечная сила $Q_r = -P/(2\pi r)$ при $r = R$, где $Q_r = -D\left(w''' + \frac{1}{r}w'' - \frac{1}{r^2}w'\right)\Big|_{r=R}$.

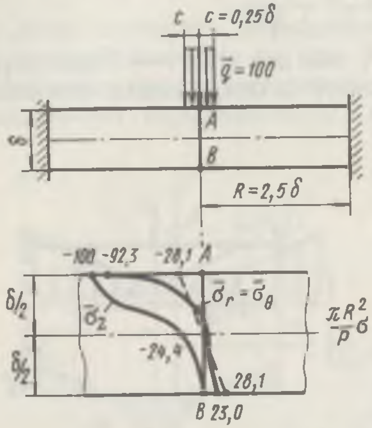


Рис. 6.45

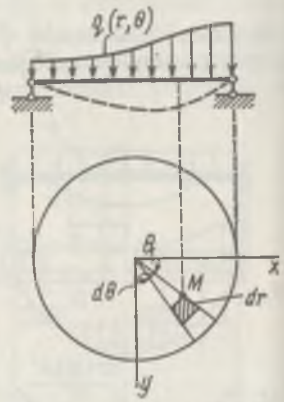


Рис. 6.46

В результате с использованием (6.88) придем к таким выражениям для прогибов и моментов:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{PR^2}{16\pi D}\left[1 + \frac{r^2}{R^2}\left(2\ln\frac{r}{R} - 1\right)\right];\\ M_r &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{R}{r} - 1\right];\\ M_\Theta &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{R}{r} - \mu\right]. \end{aligned}\right\} \tag{е}$$

Как видно, прогиб под силой ограничен и составляет $w(0) = PR^2/(16\pi D)$, а интенсивность моментов стремится к бесконечности, что объясняется схематизацией сосредоточенной силы, имеющей конечную величину, передаваемую через точку (см. рис. 6.29).

На рис. 6.45 показано распределение напряжений в точках $r = 0$ по высоте сечения от приложения силы P на площади круга малого радиуса $c = 0{,}25\ \delta$ [35, с. 87]. Оно получено без использования гипотез тонких пластин с учетом объемного напряженного состояния. Все напряжения указаны в безразмерной форме — они отнесены к величине $\sigma_0 = P/(\pi R^2)$; так, $\bar\sigma_r = \sigma_r/\sigma_0$; $\bar\sigma_\Theta = \sigma_\Theta/\sigma_0$; $\bar q = q/\sigma_0$; $\bar\sigma_z = \sigma_z/\sigma_0$. Пунктиром показано линейное распределение напряжений $\sigma_r = \sigma_\Theta$, соответствующее теории тонких пластин. Рисунок показывает, что эта теория в непосредственной близости приложения сил типа сосредоточенных неприменима. В частности, напряжения σ_z, которыми мы в теории тонких пластин пренебрегаем, превышают напряжения σ_r и σ_Θ в верхней точке сечения A. Напряжения в нижней точке B значительно менее чувствительны к характеру распределения силы P и лучше согласуются с приближенной теорией.

§ 6.15. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ОДИНАРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В общем случае несимметричного изгиба все величины зависят от двух координат: r и Θ (рис. 6.46). По аналогии с рис. 6.40, обозначаем углы наклона нормали в точке M

$$\varphi_r = -\frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{и} \quad \varphi_\Theta = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}. \tag{6.99}$$

Перемещения — радиальное u и окружное v — точки с координатой z получим в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_r z = -z\frac{\partial w}{\partial r};\\ v &= \varphi_\Theta z = -z\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}. \end{aligned}\right\} \tag{6.100}$$

В полярной системе координат связь между деформациями и перемещениями выражается фомулами (4.82):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{r};$$

$$\gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Подставив сюда (6.100), найдем деформации в произвольной точке в виде

$$\varepsilon_r = \varkappa_r z; \quad \varepsilon_\Theta = \varkappa_\Theta z; \quad \gamma_{r\Theta} = \varkappa z. \tag{6.101}$$

где кривизны элемента пластины получат вид

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_r &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \varkappa_\Theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r};\\ \varkappa &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.102}$$

С кривизнами (6.102) связаны моменты зависимостями, аналогичными для декартовой системы координат (6.5) (рис. 6.47):

$$M_r = D(\varkappa_r + \mu\varkappa_\Theta); \quad M_\Theta = D(\varkappa_\Theta + \mu\varkappa_r); \tag{6.103}$$
$$H = (1 - \mu) D\varkappa.$$

Из условий равновесия элемента пластины (рис. 6.47) получим поперечные силы Q_r и Q_Θ в виде, аналогичном (6.10) для декартовой системы

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w); \quad Q_\Theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}(\nabla^2 w), \tag{6.104}$$

где

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2}. \tag{6.105}$$

Выражение (6.105) представляет гармонический оператор Лапласа, записанный в полярных координатах. Как видим, $\nabla^2 w = -(\varkappa_r + \varkappa_\Theta)$ точно так же, как это было в декартовой системе $\nabla^2 w = -(\varkappa_x + \varkappa_y)$. Можно доказать, что сумма кривизн в двух ортогональных направлениях для данной точки поверхности есть величина постоянная, т. е. $\varkappa_x + \varkappa_y = \varkappa_r + \varkappa_\Theta$. Пользуясь этим положением, выражение (6.105) для оператора $\nabla^2 w$ через значения кривизн (6.102) можно было бы написать сразу.

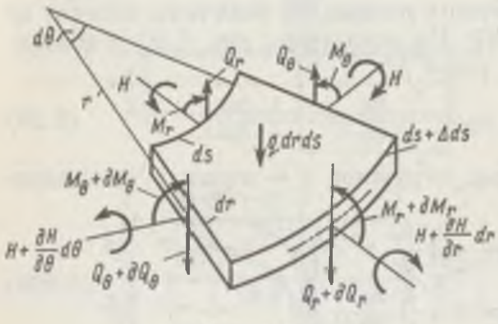


Рис. 6.47

Разрешающее уравнение изгиба пластины, представляющее условие равновесия элемента (рис. 6.47) по сумме проекций на ось z, выражается, как и для прямоугольных пластин, через бигармонический оператор $\nabla^2\nabla^2 w = q/D$, или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2}\right) = \frac{q(r,\Theta)}{D}. \tag{6.106}$$

Граничные условия на криволинейных кромках круглой пластины формулируются аналогично тому, как это рассмотрено в § 6.6 для прямоугольной пластины. В частности, для свободной кромки при $r = R$ будем иметь два условия

$$M_r = 0\,|_{r=R}; \quad V_r = Q_r + \frac{\partial H}{r\,\partial\Theta} = 0\,|_{r=R},$$

где V_r — обобщенная поперечная сила.

В общем случае, когда нагрузка q есть произвольная функция r и Θ, т. е. $q = q(r, \Theta)$, для получения решения она разлагается в одинарный тригонометрический ряд по координате Θ:

$$q(r,\Theta) = q_0(r) + \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} q_m(r)\sin m\Theta + \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} q_n(r)\cos n\Theta. \tag{6.107}$$

Аналогично тому, как это было для прямоугольной пластины, коэффициенты разложения (6.107) с учетом свойства ортогональности гармоник синуса и косинуса раличных номеров получим в виде

$$\left.\begin{aligned} q_m(r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\,\Theta)\sin m\Theta\,d\Theta;\\ q_n(r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\,\Theta)\cos n\Theta\,d\Theta;\\ q_0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\,\Theta)\,d\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6.108)$$

Все они в общем случае являются функциями r, так как в (6.108) переменная Θ исчезает после интегрирования, а r остается. Величина

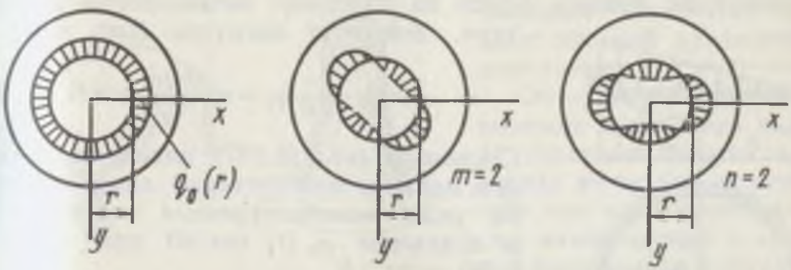


Рис. 6.48

$q_0(r)$ представляет собой среднюю нагрузку на окружность радиуса r. Отдельно взятой нагрузке $q_0(r)$ отвечает осесимметричный изгиб пластины. Изменение нагрузки вдоль окружности радиуса r, для $q_0(r)$, $q^{(r)}_{m=2}$ и $q^{(r)}_{n=2}$ показано на рис. 6.48.

Представим прогибы $w(r,\,\theta)$ в виде ряда, аналогичного (6.107):

$$w(r,\,\Theta) = w_0(r) + \sum_{m=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} w_m(r)\sin m\Theta + \sum_{n=1,\,2,\,\ldots}^{\infty} w_n(r)\cos n\Theta, \qquad (6.109)$$

где функции $w_0(r)$, $w_m(r)$ и $w_n(r)$ подлежат определению. Подставив (6.107) и (6.109) в основное дифференциальное уравнение (6.106) и приравняв коэффициенты при синусах и косинусах, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $w_m(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 w_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2}w_m\right) = \frac{q_m}{D}. \qquad (6.110)$$

Для функций w_n уравнение имеет тот же вид.

Полагая $m=0$, приходим к уравнению осесимметричного изгиба пластины нагрузкой $q_0(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_0}{dr}\right)=\frac{q_0(r)}{D},$$

которое в развернутой форме совпадает с (6.93), если опустить индекс 0. Следовательно, для w_0 решение запишем по (6.97):

$$w_0 = C_1 + C_2r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_0(q_0). \qquad (6.111)$$

Для $m = 1$ решение уравнения (6.110) имеет вид

$$w_1=C_1r+C_2r^3+\frac{1}{r}C_3+C_4r\ln r+w_1(q_1), \qquad (6.112)$$

а для $m = 2, 3, \ldots$.

$$w_m = C_1r^m + C_2r^{m+2} + C_3r^{-m} + C_4r^{-m+2} + w_m(q_m). \qquad (6.113)$$

Рассмотрим пример. Пусть на пластину, защемленную на контуре, действует нагрузка (рис. 6.49)

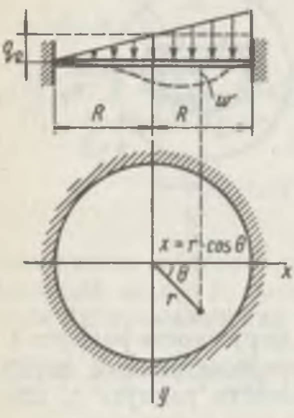


Рис. 6.49

$$q=q_0+\frac{x}{R}q_0=q_0+\frac{rq_0}{R}\cos\Theta. \qquad (а)$$

Сравнивая (а) с (6.107), видим, что в данном примере присутствуют лишь два члена ряда: осесимметричное слагаемое q_0 и слагаемое $q_n(r)\cos n\Theta$ при $n=1$ и $q_1(r)=rq_0/R$.

Решение $w_0(r)$ для q_0 уже получено в § 6.14 и выражается формулами (в) и (г), в которых q надо заменить на q_0.

Найдем решение $w_1(r)$ для нагрузки $q_1(r)\cos n\Theta$, взяв его по (6.112). В этом решении C_3 и C_4 надо положить равными нулю из условия, что при $r\to 0$ прогибы $w\neq\infty$. Частное решение $w_1(q_1)$ примем в форме Ar^5. Подставив его в (6.110) при $m=1$, найдем $A = q_0/(192\,RD)$. Итак, имеем

$$w_1(r)=C_1r+C_2r^3+\frac{q_0}{192RD}r^5. \qquad (б)$$

Для определения C_1 и C_2 используем граничные условия $w_1 = 0\,|_{r=R}$ и $w_1' = 0\,|_{r=R}$, что дает $C_1 = q_0R^4/(192D)$, $C_2 = -q_0R^2/(96D)$.

Окончательно получим такое выражение для прогибов:

$$w(r,\Theta)=w_0(r)+w_1(r)\cos\Theta=\frac{q_0R^4}{64D}\left[1-2\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]+$$

$$+\frac{q_0R^4}{192D}\left[\frac{r}{R}-2\left(\frac{r}{R}\right)^3+\left(\frac{r}{R}\right)^5\right]\cos\Theta.$$

Изгибающие и крутящие моменты могут быть найдены по (6.103) и (6.102).

ГЛАВА 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

§ 7.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Оболочки широко используются в различных областях техники. Перекрытия промышленных зданий, выставочных павильонов, спортивных и зрелищных сооружений, градирни тепловых станций, емкости для хранения жидкостей и газов, элементы двигателей, летательных аппаратов и судов (рис. 7.1) — вот далеко не полный перечень возможных применений оболочек, которые, отличаясь завидной легкостью, обладают высокой прочностью и жесткостью.

Объясняется это тем, что внешняя поперечная нагрузка уравновешивается в оболочках не только за счет изгиба, как в пластинах, но и за счет возникающих в срединной поверхности нормальных

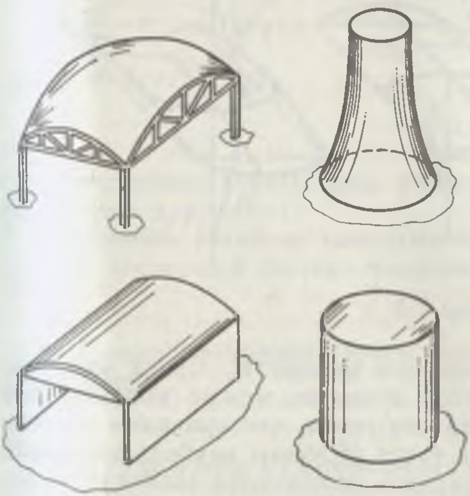


Рис. 7.1

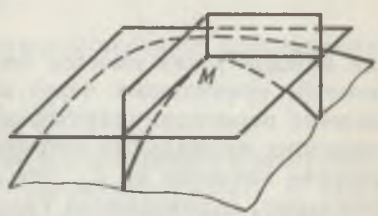


Рис. 7.2

и сдвигающих усилий. Здесь уместно провести аналогию с арками. Как известно, в сечениях арки появляются изгибающий момент, нормальная и поперечная силы, распределение которых при одной и той же нагрузке зависит от очертания оси арки. В случае ее рационального очертания изгибающий момент оказывается равным нулю во всех сечениях. Тогда внешняя нагрузка уравновешивается только нормальной силой, что дает возможность существенно облегчить конструкцию по сравнению с балкой, где внешняя нагрузка воспринимается только за счет изгиба.

Оболочкой в дальнейшем *будем называть тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми* (толщина оболочки) *мало по сравнению с другими размерами*. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, носит название *срединной поверхности оболочки*. Если толщина оболочки постоянна, а именно такие оболочки будут рассматриваться, то геометрия оболочки полностью определяется геометрией ее срединной поверхности.

Если через точку M поверхности провести всевозможные кривые, проходящие по поверхности, то касательные к ним будут лежать в одной плоскости, называемой *касательной плоскостью к поверхности в точке* M (рис. 7.2). Перпендикуляр к касательной плоскости в точке ее касания с поверхностью называется *нормалью к поверхности*.

Плоская кривая, получающаяся при пересечении поверхности с плоскостью, содержащей нормаль к поверхности в точке M, называется *нормальным сечением поверхности в точке* M. Таких сечений

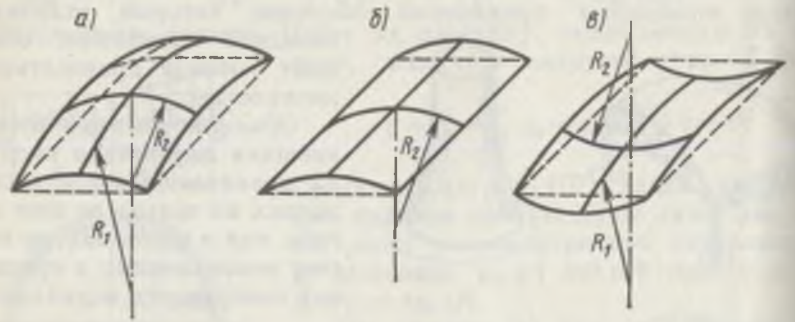


Рис. 7.3

для каждой точки имеется бесконечное множество. Среди всех плоскостей, проходящих через вектор нормали, можно выделить две взаимно перпендикулярные плоскости такие, что кривизны соответствующих нормальных сечений в точке M имеют наибольшее и наименьшее значения k_1, k_2. Эти кривизны называются *главными*, а направления, определяемые указанными двумя плоскостями,— *главными направлениями*.

Лежащие на поверхности кривые, вдоль которых кривизны принимают главные значения, называются *линиями главных кривизн* или просто *линиями кривизн*.

Кривизна поверхности в точке может быть охарактеризована двумя другими параметрами — средней кривизной нормальных сечений $k_{ср}$ и гауссовой кривизной k, которые связаны с главными кривизнами следующими равенствами:

$$k_{ср} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k = k_1 k_2.$$

В зависимости от знаков k_1, k_2 в данной точке поверхности гауссова кривизна может быть положительной, нулевой или отрицательной. Если во всех точках поверхности $k > 0$, $= 0$ или < 0, то такая

поверхность соответственно называется поверхностью положительной [например, поверхность эллипсоида, сфера (рис. 7.3, *а*)], нулевой [например, цилиндрическая (рис. 7.3, *б*), коническая] или отрицательной [например, поверхность однополостного гиперболоида (рис. 7.3, *в*)] гауссовой кривизны.

Оболочки первого (рис. 7.3, *а*) и третьего (рис. 7.3, *в*) типов еще называют оболочками двоякой кривизны. Как правило, эти оболочки являются либо оболочками вращения, образуемыми вращением некоторой плоской кривой вокруг прямолинейной оси, либо оболочками переноса, которые получаются путем перемещения некоторой образующей кривой по произвольной направляющей так, что плоскости,

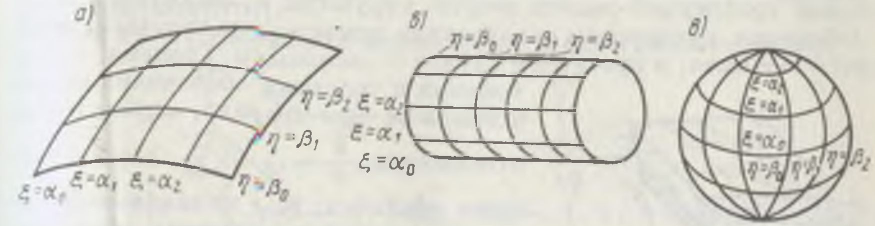


Рис. 7.4

в которых лежит образующая, в каждый момент остаются параллельными друг другу.

Положение точки на поверхности можно определить по координатам в декартовой системе координат

$$z = f(x, y).$$

Например, координаты точки поверхности переноса определяются выражением

$$z = f_1(x) + f_2(y).$$

Однако не всегда удобно задавать поверхность именно в декартовых координатах. Целесообразно систему координат связать с самой поверхностью, выбрав на ней две системы координатных линий ξ, η. В качестве таких линий чаще всего выбираются линии кривизн, которые образуют на поверхности ортогональную сетку (рис. 7.4, *а*). Параметры ξ, η называются *криволинейными координатами точек поверхности*. Конкретный смысл этих координат может быть различным. На рис. 7.4, *б*, *в* показаны цилиндрические и сферические координатные линии.

§ 7.2. ДЕФОРМАЦИИ, НАПРЯЖЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ

В основе теории тонких оболочек лежат две гипотезы, которые являются обобщением гипотез, уже встречавшихся при расчете пластин: прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочек до деформации, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки и не изменяет своей длины; нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, принимаются равными нулю [6, 14, 17, 34].

Первую гипотезу иначе называют, так же как и в пластинах, *гипотезой прямой нормали*, а вторую гипотезу — *гипотезой о ненадавливании слоев оболочки*.

Гипотеза прямой нормали дает возможность выразить деформации в любой точке оболочки через деформации ее срединной поверхности, которые зависят от двух координат ξ, η, и таким образом свести решение трехмерной задачи теории упругости к двухмерной.

Оболочки, для которых справедливы приведенные гипотезы, называются *тонкими*, в противном случае — *толстыми*. Граница между тонкими и толстыми оболочками весьма условна и, как правило, определяется отношением $\frac{\delta}{R} \sim \frac{1}{20} \cdots \frac{1}{30}$, где δ — толщина оболочки; R — минимальный радиус срединной поверхности оболочки.

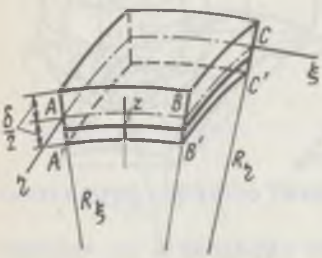


Рис. 7.5

В теории тонких оболочек всеми членами, имеющими порядок δ/R, пренебрегают по сравнению с единицей, так как принятые гипотезы дают погрешность того же порядка.

Выберем координатные оси так, чтобы они совпадали с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки, а ось z направим по нормали к ней, считая координату z положительной, если она направлена к центру кривизны. Кривизны срединной поверхности оболочки в исходном состоянии обозначим через k_ξ, k_η.

Возьмем бесконечно малый элемент оболочки, образованный двумя парами плоскостей, нормальных к срединной поверхности и совпадающих с направлениями главных кривизн (рис. 7.5, *а*).

Рассмотрим слой оболочки, отстоящий на расстоянии z от срединной поверхности. В результате деформации срединной поверхности и поворота боковых граней элемента в слое появляются деформации ε_ξ, ε_η, $\gamma_{\xi\eta} = \gamma$, равные

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_\xi^0 + \varkappa_\xi z, \quad \varepsilon_\eta = \varepsilon_\eta^0 + \varkappa_\eta z, \quad \gamma = \gamma^0 + \varkappa z, \tag{7.1}$$

где ε_ξ^0, ε_η^0, γ^0 — деформации в срединной поверхности; $\varkappa_\xi$, $\varkappa_\eta$, $\varkappa$ — изменения кривизн и кручение срединной поверхности.

Выражения для деформаций в срединной поверхности, изменения кривизн и кручения для некоторых классов оболочек будут получены в дальнейшем. С выражениями для тех же величин в случае произвольной оболочки можно ознакомиться в работах [6, 14, 19].

Используя закон Гука, можно определить нормальные и касательные напряжения, возникающие в том же слое:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\xi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\xi + \mu\varepsilon_\eta); \quad \sigma_\eta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\eta + \mu\varepsilon_\xi);\\ &\tau_{\xi\eta} = \tau = G\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Напряженное состояние характеризуется, с одной стороны, усилиями, связанными с деформацией срединной поверхности (N_ξ, N_η — нормальные силы, $N_{\xi\eta}$, $N_{\eta\xi}$ — сдвигающие силы), а с другой стороны, усилиями, возникающими при изгибе оболочки (Q_ξ, Q_η — поперечные силы, M_ξ, M_η — изгибающие моменты, $H_{\xi\eta}$, $H_{\eta\xi}$ — крутящие моменты).

Найдем интенсивности нормальных и сдвигающих усилий:

$$N_\xi = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\xi \left(1 - \frac{z}{R_\eta}\right) dz; \quad N_\eta = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\eta \left(1 - \frac{z}{R_\xi}\right) dz;$$

$$N_{\xi\eta} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau \left(1 - \frac{z}{R_\eta}\right) dz; \quad N_{\eta\xi} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau \left(1 - \frac{z}{R_\xi}\right) dz.$$

Слагаемые z/R_η, z/R_ξ появились в этих выражениях вследствие того, что длины дуг $A'B'$ и $B'C'$ не равны длинам дуг AB и BC. В результате силы $N_{\xi\eta}$, $N_{\eta\xi}$ оказываются различными (при $R_\xi \neq R_\eta$), хотя равенство между соответствующими касательными напряжениями на основании закона парности касательных напряжений соблюдается. Если же учесть, что для тонких оболочек справедливы неравенства $z/R_\eta \ll 1$, $z/R_\xi \ll 1$, то можно считать, что

$$1 - \frac{z}{R_\eta} \approx 1; \quad 1 - \frac{z}{R_\xi} \approx 1.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &N_\xi = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\xi \, dz; \quad N_\eta = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\eta \, dz;\\ &N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi} = S = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau \, dz. \end{aligned}\right| \tag{7.3}$$

Изгибающие и крутящие моменты соответственно равны:

$$M_\xi = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\xi z \left(1 - \frac{z}{R_\eta}\right) dz; \quad M_\eta = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\eta z \left(1 - \frac{z}{R_\xi}\right) dz;$$

$$H_{\xi\eta} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau z \left(1 - \frac{z}{R_\eta}\right) dz; \quad H_{\eta\xi} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau z \left(1 - \frac{z}{R_\xi}\right) dz.$$

И здесь, строго говоря, крутящие моменты $H_{\xi\eta}$, $H_{\eta\xi}$ не равны между собой. Однако, опуская вторые слагаемые в скобках, получим

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\xi z\,dz; \quad M_\eta = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\eta z\,dz; \\ H_{\xi\eta} &= H_{\eta\xi} = H = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau z\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (7.4)$$

Подставляя зависимости (7.2) в выражения для сил (7.3) и моментов (7.4), найдем

$$\left.\begin{aligned} & N_\xi = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_\xi^0 + \mu\varepsilon_\eta^0); \quad N_\eta = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_\eta^0 + \mu\varepsilon_\xi^0); \\ & S = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\gamma^0; \\ & M_\xi = D(\varkappa_\xi + \mu\varkappa_\eta); \quad M_\eta = D(\varkappa_\eta + \mu\varkappa_\xi); \\ & H = (1-\mu) D\varkappa, \end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

причем $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Соотношения для моментов подобны аналогичным соотношениям, полученным в теории изгибаемых пластинок. Так же как и в пластинах, эти моменты и нормальные, и сдвигающие силы являются в действительности интенсивностями соответствующих усилий, приходящихся на единицу длины срединной поверхности оболочки.

Расчет оболочек в общем случае представляет собой очень сложную задачу, в связи с чем при ее решении часто используются различные упрощения.

Если напряжения, вызываемые изгибом оболочки, малы по сравнению с напряжениями, обусловленными деформацией срединной поверхности, то изгибающими и крутящими моментами, а также перерезывающими силами пренебрегают и определяют только усилия в срединной поверхности. Такая теория носит название *безмоментной теории оболочек*. Результаты, получаемые с помощью этой теории, приемлемы для весьма тонких оболочек в областях, достаточно удаленных от края оболочки, от линий резкого изменения кривизн, от зон приложения сосредоточенных нагрузок и т. п.

При расчете цилиндрических оболочек, вытянутых в одном направлении, более точные результаты дает *полубезмоментная теория*. В ее основе лежит допущение о малости изгибающего момента M_ξ (ось ξ совпадает с образующей срединной поверхности оболочки) и крутящего момента H. Можно показать, что отсюда следует равенство нулю поперечной силы Q_ξ.

Кроме того, вводятся геометрические гипотезы

$$\varepsilon_\eta^0 = 0; \quad \gamma_{\xi\eta}^0 = 0,$$

где η — координатная линия, совпадающая с направляющей срединной поверхности оболочки.

Упрощение моментной теории (общей теории) оболочек возможно за счет наложения некоторых ограничений на геометрию ее срединной поверхности. Одним из вариантов такой теории является теория пологих оболочек.

§ 7.3. ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ

Пологие оболочки находят широкое применение в технике и и особенно в строительстве, поэтому их рассмотрение представляет большой самостоятельный интерес.

Пологими оболочками называются оболочки, имеющие небольшой подъем над плоскостью, на которую они опираются. Например, прямоугольную в плане оболочку (рис. 7.6) можно считать пологой, если $f/a \leqslant 1/5$, где f — стрела подъема оболочки; a — ее наименьший размер в плане.

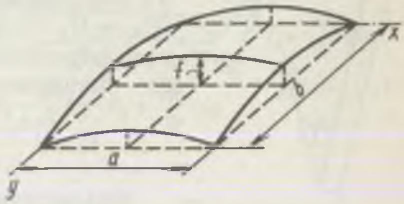


Рис. 7.6

Геометрию срединной поверхности пологих оболочек можно отождествить с геометрией плоскости, на которую они проецируются (опираются). В этом случае криволинейные координаты, откладываемые вдоль линий главных кривизн, можно считать совпадающими с декартовыми координатами x, y на плоскости.

Если принять, что срединная поверхность описывается в осях выражением

$$z = f(x, y),$$

то главные кривизны могут быть найдены так:

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{7.6}$$

Гауссову кривизну для пологих оболочек приближенно можно считать равной нулю.

§ 7.4. ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Как отмечалось в § 7.2, деформации в любой точке оболочки могут быть получены, если известны деформации срединной поверхности (7.1). Найдем эти деформации в предположении малости прогиба оболочки и малости деформаций в срединной поверхности.

Изменения кривизн и кручения срединной поверхности определяются по тем же формулам, что и в пластинах:

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \tag{7.7}$$

а деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0 представляются в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x^0=\frac{\partial u}{\partial x}-k_x w; \quad \varepsilon_y^0=\frac{\partial v}{\partial y}-k_y w; \\ &\gamma^0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Здесь u, v, w — перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей.

Происхождение дополнительных слагаемых в выражениях деформаций ε_x^0, ε_y^0 можно объяснить, рассмотрев положение элементарного участка координатной линии x в недеформированном и деформированном состояниях (рис. 7.7).

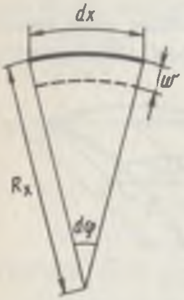


Рис. 7.7

В исходном (недеформированном) состоянии радиус кривизны элемента равен $R_x = 1/k_x$, а в деформированном состоянии он равен разности: $R'_x = R_x - w$. Отсюда следует, что относительная деформация элемента, обусловленная только его смещением, равна

$$\varepsilon_x^0=\frac{(R_x-w)\,d\varphi-R_x\,d\varphi}{R_x\,d\varphi}=-\frac{w}{R_x}=-k_x w.$$

Аналогично можно показать, что

$$\varepsilon_y^0=-k_y w.$$

Найденные деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0 должны удовлетворять уравнениям совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}.$$

После подстановки сюда выражений (7.8) получим

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x^0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y^0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma^0}{\partial x\,\partial y}=k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{7.9}$$

Здесь предполагается, что $k_x = k_x(x)$, $k_y = k_y(y)$.

§ 7.5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим элемент оболочки на боковых гранях которого действуют усилия в срединной поверхности (рис. 7.8, *а*), а также моменты и поперечные силы (рис. 7.8, *б*). На рисунке эти усилия показаны раздельно, чтобы не загромождать излишне чертеж. Нормально к срединной поверхности приложена внешняя поперечная нагрузка.

Составим уравнение суммы проекций всех сил, действующих на элемент, на направление касательной к координатной линии x.

Из-за малости соответствующих углов усилия в срединной поверхности элемента проецируются в натуральную величину, а проекции поперечных сил непренебрежимо малы:

$$-N_x\,dy+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\right)dy-S\,dx+\left(S+\frac{\partial S}{\partial y}\,dy\right)dx=0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0. \tag{7.10}$$

Уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно той

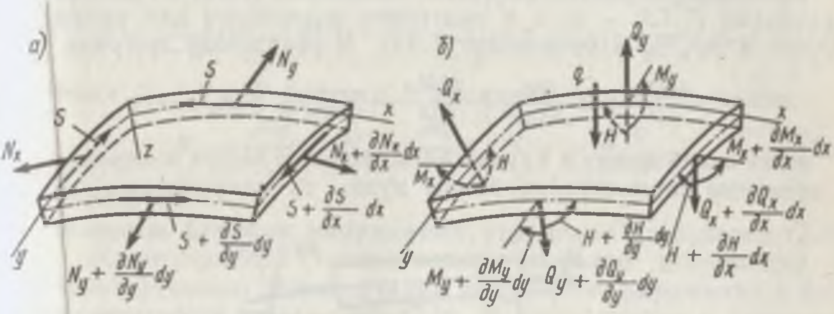


Рис. 7.8

же касательной представляется так:

$$-M_y\,dx+\left(M_y+\frac{\partial M_y}{\partial y}\,dy\right)dx-H\,dy+$$
$$+\left(H+\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\right)dy-\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\,dy\right)dx\,dy-$$
$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x}\,dx\,dy\,\frac{1}{2}\,dy-q\,dx\,dy\,\frac{1}{2}\,dy=0.$$

Отбросив малые высшего порядка, найдем

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}-Q_y=0. \tag{7.11}$$

Аналогично можно получить уравнения равновесия, проецируя все силы на направление касательной к координатной линии y и определяя сумму моментов относительно нее:

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0. \tag{7.12}$$

и

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-Q_x=0. \tag{7.13}$$

Далее запишем уравнение суммы проекций всех сил на ось z. Нетрудно убедиться в том, что в этом уравнении кроме тех слагаемых, которые фигурировали в таком же уравнении равновесия для пластин, появляются дополнительные слагаемые (рис. 7.9) вида $\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\right)k_x\,dx\,dy, \ldots$ Опуская члены более высокого порядка малости, представим уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \tag{7.14}$$

Продифференцируем обе части уравнения (7.11) по y, а обе части уравнения (7.13) — по x и подставим выражения для производных $\partial Q_x/\partial x$ и $\partial Q_y/\partial y$ в уравнение (7.14). В результате получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \tag{7.15}$$

Если изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы в оболочке тождественно равны нулю, то напряженное состояние

Рис. 7.9

оказывается безмоментным. При этом в оболочке действуют только усилия в срединной поверхности N_x, N_y, S, которые могут быть найдены из системы трех уравнений равновесия (7.10), (7.12) и (7.15), причем последнее принимает вид

$$N_x k_x + N_y k_y = -q. \tag{7.16}$$

В тех случаях, когда задача является статически определимой, для определения усилий N_x, N_y, S достаточно указанных уравнений равновесия.

§ 7.6. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Воспользуемся соотношениями (7.5), (7.7) и выразим моменты M_x, M_y, H через прогиб оболочки w

$$\left.\begin{aligned} &M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ &H = -(1-\mu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Далее подставим эти выражения в уравнение (7.15). В итоге получим

$$D\nabla^4 w - N_x k_x - N_y k_y = q. \tag{7.18}$$

Теперь неизвестными остались три усилия в срединной поверхности N_x, N_y, S и прогиб w, для определения которых используются четыре уравнения: (7.9), (7.10), (7.12) и (7.18).

Для сокращения числа неизвестных введем функцию напряжений, действующих в срединной поверхности оболочки:

$$\sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau^0 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y},$$

причем

$$\sigma_x^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^0 + \mu\varepsilon_y^0); \quad \sigma_y^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^0 + \mu\varepsilon_x^0); \quad \tau^0 = G\gamma^0.$$

Усилия N_x, N_y, S связаны с функцией φ соотношениями

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}, \tag{7.19}$$

где $\Phi = \delta\varphi$.

С помощью функции напряжений уравнения равновесия (7.10), (7.12) удовлетворяются тождественно. Выразим деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0 через функцию Φ и подставим полученные выражения в уравнение совместности деформаций (7.9). В итоге придем к уравнению

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi = -k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{7.20}$$

С учетом равенств (7.19) уравнение равновесия (7.18) принимает вид

$$D\nabla^4 w - k_x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = q. \tag{7.21}$$

Если воспользоваться обозначением

$$\nabla_k^2(\ ) = k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ ) + k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ ),$$

то уравнения (7.20), (7.21) запишутся следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi + \nabla_k^2 w = 0; \\ -\nabla_k^2\Phi + D\nabla^4 w = q. \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

В итоге имеем систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: w и Φ.

В случае безмоментного напряженного состояния функция напряжений находится из уравнения

$$\nabla_k^2\Phi = -q.$$

Если $k_x = k_y = 0$, оболочка превращается в пластину и из системы (7.22) получаем два самостоятельных уравнения:

$$\nabla^4\Phi = 0; \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}.$$

Первое из них совпадает с бигармоническим уравнением, определяющим функцию напряжений обобщенного плоского напряженного состояния в пластине, а второе уравнение совпадает с уравнением, из которого находится прогиб изгибаемой пластины.

Уравнения (7.22) записаны в координатных осях, которые совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. Иногда оказывается более предпочтительным выполнение расчета с использованием другой ортогональной системы координат. В этом случае разрешающая система уравнений формально может быть записана в том же виде, что и система уравнений (7.22), но под $\nabla_k^2(\ )$ подразумевается следующее выражение:

$$\nabla_k^2(\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k_y \frac{\partial}{\partial x}(\ )\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k_{xy}\frac{\partial}{\partial x}(\ )\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[k_{xy}\frac{\partial}{\partial y}(\ )\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k_x \frac{\partial}{\partial y}(\ )\right],$$

где k_{xy} — кручение срединной поверхности оболочки.

Если функция $z = f(x, y)$ описывает срединную поверхность оболочки, то

$$k_{xy} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}.$$

В том случае, когда справедливы соотношения

$$k_x = k_x(x); \quad k_y = k_y(y); \; k_{xy} = \text{const},$$

$\nabla_k^2(\ )$ принимает вид

$$\nabla_k^2(\ ) = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ ) - 2k_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\ ) + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ ).$$

Уравнения (7.22) получены в предположении, что материал оболочки является изотропным.

Если же материал обладает ортотропными свойствами, тогда уравнения, аналогичные уравнениям (7.22), принимают вид (направление осей ортотропии совпадает с направлением осей x, y)

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \nabla_k^2 \Phi = q;$$

$$\frac{1}{\delta}\left(A_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2A_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} + A_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right) + \nabla_k^2 w = 0,$$

где $A_1 = \frac{1}{E_x}$, $A_2 = \frac{1}{E_y}$, $A_3 = \frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} = \frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\mu_{yx}}{E_x}$; E_x, E_y — модули упругости при растяжении — сжатии по направлениям x, y; G_{xy} — модуль сдвига; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты поперечной деформации:

$$D_1 = \frac{E_x \delta^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y \delta^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})};$$

$$D_3 = \frac{G_{xy}\delta^3}{6} + \mu_{xy}\frac{E_x\delta^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})} = \frac{G_{xy}\delta^3}{6} + \mu_{yx}\frac{E_y \delta^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}.$$

§ 7.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Решение уравнений (7.22) должно удовлетворять граничным условиям, которые формулируются для всех кромок оболочки. Рассмотрим особенности записи их на примере пологой оболочки, прямоугольной в плане. Допустим, что кромки оболочки совпадают с координатными линиями x, y, являющимися линиями кривизны. На каждой кромке оболочки накладываются ограничения на функции w и Φ, причем таких условий должно быть четыре — по два условия на каждую из функций w и Φ.

Возьмем для примера кромку оболочки, совпадающую с координатной линией y (для точек этой кромки $x = 0$). Запишем различные варианты граничных условий для кромки. Заметим, что краевые условия, зависящие от прогиба оболочки, имеют точно такой же вид, что и для жестких пластинок.

Напомним, что для жестко защемленной кромки пластины справедливы условия

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

а для шарнирно закрепленной —

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Рассмотрим наиболее характерные граничные условия, которые накладываются на функцию Φ (или на перемещения в направлении осей x и y).

1. Точки кромки свободно смещаются в направлении оси x. Это означает, что

$$\sigma_x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

2. Точки кромки свободно смещаются в направлении оси y. Тогда

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

3. Отсутствуют перемещения точек кромки в направлении оси x, т. е.

$$u = 0.$$

4. Отсутствуют перемещения точек кромки в направлении оси y, т. е.

$$v = 0.$$

Заметим, что граничные условия для других кромок оболочки формулируются аналогично. Например, для кромки, совпадающей с координатной линией x, в перечисленных условиях нужно поменять местами x и y.

При решении конкретных задач могут встретиться различные комбинации перечисленных условий. Так, для жестко защемленной кромки, параллельной оси y, где исключаются перемещения в направлении осей x, y и z, следует положить

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

При опирании оболочки на диафрагмы, абсолютно жесткие по отношению к деформациям в своей плоскости и гибкие из нее, граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Если же кромки оболочки могут свободно перемещаться вдоль этой диафрагмы, тогда имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = 0; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

§ 7.8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Получим выражение потенциальной энергии пологой оболочки, которое часто используется при расчете оболочек вариационными методами. Потенциальная энергия U в оболочке складывается из энергии изгиба и кручения $U_{\text{и}}$, а также из энергии деформации в срединной поверхности U_{c}. Убедимся в этом, для чего запишем потенциальную энергию U через напряжения и деформации:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau\gamma)\, dV,$$

где V — объем, занимаемый оболочкой.

С учетом соотношений (7.1), (7.2), (7.5) имеем

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\delta} + \frac{M_x}{\delta^3/12} z; \quad \sigma_y = \frac{N_y}{\delta} + \frac{M_y}{\delta^3/12} z; \quad \tau = \frac{S}{\delta} + \frac{H}{\delta^3/12} z.$$

Тогда

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left[\left(\frac{N_x}{\delta} + \frac{M_x}{\delta^3/12} z \right) \left(\varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \left(\frac{N_y}{\delta} + \frac{M_y}{\delta^3/12} z \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \left(\frac{S}{\delta} + \frac{H}{\delta^3/12} z \right) \left(\gamma^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} z \right) \right] dV.$$

После интегрирования по толщине оболочки найдем

$$U = \frac{1}{2} \iint_{S_0} (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + S\gamma^0)\, dS_0 -$$
$$- \frac{1}{2} \iint_{S_0} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right) dS_0. \qquad (7.23)$$

Здесь S_0 — площадь срединной поверхности оболочки.

Первый интеграл представляет собой энергию U_{c}, а второй — $U_{\text{и}}$.

Выразим деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0 из равенств (7.5), после чего потенциальная энергия $U_{\text{с}}$ оказывается равной

$$U_{\text{с}} = \frac{1}{2E\delta} \iint\limits_{S_0} [(N_x^2 - 2\mu N_x N_y + N_y^2) + 2(1+\mu) S^2] \, dS_0.$$

Воспользовавшись функцией напряжений, окончательно получим

$$U_{\text{с}} = \frac{1}{2E\delta} \iint\limits_{S_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\mu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS_0.$$

После подстановки соотношений (7.17) в равенство (7.23) выражение потенциальной энергии изгиба и кручения $U_{\text{и}}$ принимает вид

$$U_{\text{и}} = \frac{D}{2} \iint\limits_{S_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS_0.$$

Записывая выражение работы внешних сил W и полной энергии оболочки $Э$, далее нетрудно воспользоваться, например, методом Ритца для решения различных задач расчета пологих оболочек.

§ 7.9. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим пологую прямоугольную в плане оболочку, срединная поверхность которой является эллиптическим параболоидом (рис. 7.10)

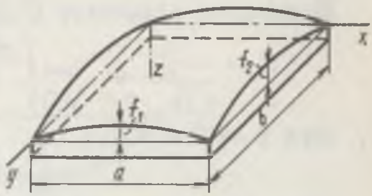


Рис. 7.10

Уравнение этой поверхности записывается следующим образом:

$$z = f\left[\frac{f_1}{f}\left(2\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \frac{f_2}{f}\left(2\frac{y}{b} - 1\right)^2 - 1\right],$$

где $f = f_1 + f_2$ — стрела подъема оболочки.

Очевидно, что

$$k_x \approx 8\frac{f_1}{a^2}; \quad k_y \approx 8\frac{f_2}{b_2}; \quad k_{xy} = 0.$$

Уравнения (7.22) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi + 8\frac{f_1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8\frac{f_2}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \\ &D\nabla^4 w - 8\frac{f_1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 8\frac{f_2}{b^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = q. \end{aligned}\right\} \qquad (7.24)$$

По краям оболочка соединена с диафрагмами, абсолютно жесткими в их плоскости и гибкими из нее, вследствие чего на всех кромках обеспечиваются граничные условия:

при $x = 0$, $x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad v = 0; \qquad (7.25)$$

при $y = 0$, $y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad u = 0. \tag{7.26}$$

Будем искать решение уравнений (7.24), в виде

$$w = \sum_{m,\, n} w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \tag{7.27}$$

$$\Phi = \sum_{m,\, n} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \tag{7.28}$$

Нетрудно убедиться в том, что первые три условия в(7.25) и (7.26) при принятых выражениях w и Φ удовлетворяются тождественно.

Проверим, выполняются ли последние граничные условия: $v = 0$ и $u = 0$. Найдем деформацию:

$$\varepsilon_y^0 = \frac{1}{E\delta} (N_y - \mu N_x) = \frac{1}{E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right).$$

Используя равенство (7.28), имеем

$$\varepsilon_y^0 = -\frac{1}{E\delta} \sum_{m,\, n} \varphi_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \mu \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

При $x = 0$ и $x = a$

$$\varepsilon_y^0 \equiv 0.$$

Итак, на указанных кромках перемещение v тождественно равно константе, которую можно принять равной нулю. Аналогично можно показать, что на двух других кромках перемещение u также тождественно равно нулю.

Следовательно, выражения (7.27), (7.28) удовлетворяют всем граничным условиям (7.25), (7.26).

Запишем функцию $q(x, y)$ в виде

$$q(x, y) = \sum_{m,\, n} q_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \tag{7.29}$$

где

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx\, dy.$$

Подставим соотношения (7.27). . .(7.29) в уравнения (7.24), из которых получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов w_{mn}, φ_{mn}

$$\frac{1}{E\delta} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi_{mn} - \frac{8\pi^2}{a^2b^2} (n^2 f_1 + m^2 f_2)\, w_{mn} = 0; \tag{7.30}$$

$$\frac{8\pi^2}{a^2b^2} (n^2 f_1 + m^2 f_2)\, \varphi_{mn} + D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 w_{mn} = q_{mn}. \tag{7.31}$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} w_{mn} &= \left[\frac{n^4\pi^4\delta^4}{12(1-\mu^2)\,b^4}A_{mn} + \frac{64f^2\delta^2}{A_{mn}a^4}\left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2}{n^2}\frac{f_2}{f}\right)^2\right]^{-1}\frac{q_{mn}\delta}{E}; \\ \varphi_{mn} &= \frac{8Eb^2f\delta}{\pi^2A_{mn}a^2n^2}\left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2f_2}{n^2f}\right)w_{mn}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

причем

$$A_{mn} = \left(\frac{m^2b^2}{n^2a^2} + 1\right)^2.$$

После того как определены функции w и Φ, нетрудно найти

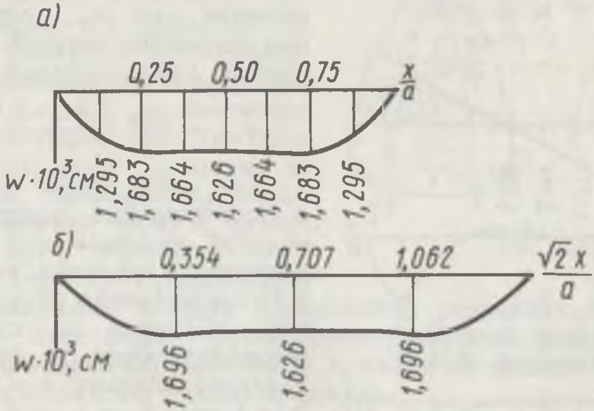


Рис. 7.11

внутренние усилия, действующие в оболочке:

$$M_x = D\sum_{m,\,n} w_{mn}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \mu\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

$$M_y = D\sum_{m,\,n} w_{mn}\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \mu\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

$$H = -D(1-\mu)\sum_{m,\,n} w_{mn}\frac{mn\pi^2}{ab}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y;$$

$$N_x = -\sum_{m,\,n}\varphi_{mn}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

$$N_y = -\sum_{m,\,n}\varphi_{mn}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

$$S = -\sum_{m,\,n}\varphi_{mn}\frac{mn\pi^2}{ab}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y.$$

В случае безмоментного напряженного состояния из уравнения (7.31) при $D = 0$ получим

$$\varphi_{mn} = \frac{q_{mn}a^2b^2}{8\pi^2n^2f}\left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2}{n^2}\,\frac{f_2}{f}\right)^{-1}.$$

Тогда коэффициенты w_{mn} в разложении прогиба определяются из уравнения (7.32):

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}A_{mn}a^4}{64E\delta f^2}\left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2f_2}{n^2f}\right)^{-2}.$$

Если в соотношении (7.32) положить $f_1 = f_2 = 0$, получим выражение для w_{mn}, справедливое для шарнирно опертой вдоль всех кромок прямоугольной пластины:

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^{-2}.$$

Для того чтобы качественно и количественно оценить работу пологой оболочки под действием поперечной нагрузки, на рис. 7.11, 7.12 представлены результаты расчета оболочки со следующими геометрическими и физическими характеристиками: $a = b = 100$ см; $\delta = 1$ см; $f_1 = f_2 = 5$ см; $E = 4\cdot10^4$МПа; $\mu = 0{,}17$; $q = 1$ кПа.

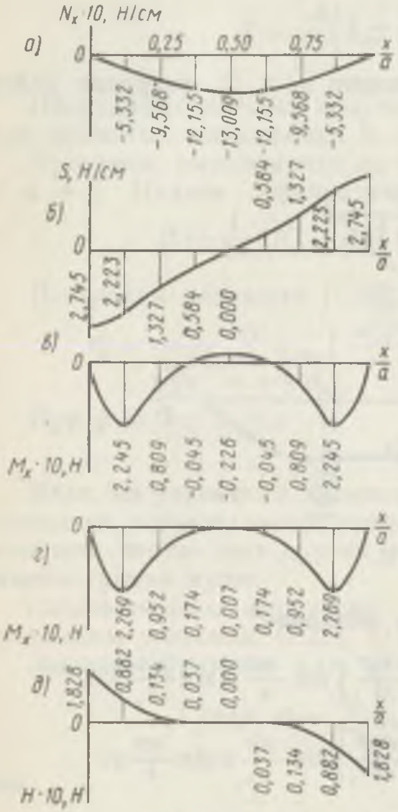


Рис. 7.12

На рис. 7.11, *а* показаны графики изменения прогиба оболочки вдоль среднего сечения ($y = a/2$) и вдоль диагонального сечения (рис. 7.11, *б*). Обращает на себя внимание то, что максимальное значение прогиб принимает не в центре оболочки (как это было в пластине), а в угловых зонах. Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 7.12, *а*. . .*д*. Эпюры N_x (рис. 7.12, *а*) и M_x (рис. 7.12, *в*) построены для среднего сечения оболочки ($y = a/2$), эпюра M_x (рис. 7.12, *г*) — для сечения с координатой $y = a/4$, эпюра сдвигающих усилий (рис. 7.12, *б*) и крутящего момента (рис. 7.12, *д*) — для крайнего сечения ($y = 0$).

Интересно отметить, что эпюры изгибающих моментов в оболочке имеют очертание, качественно отличающееся от очертания эпюр тех же моментов в пластине. Сравнение ординат эпюр моментов и значений прогиба в оболочке и пластине свидетельствует о том, что в пластинах указанные величины оказываются значительно (на порядок) больше, чем в оболочках.

§ 7.10. БЕЗМОМЕНТНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Другим классом оболочек, часто встречающихся в технике, являются оболочки вращения, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения (рис. 7.13, *а*).

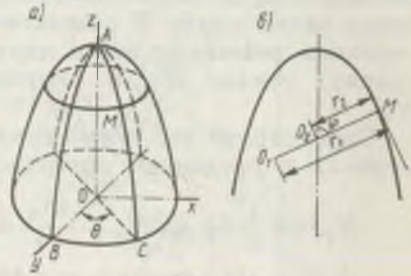


Рис. 7.13

Вертикальная плоскость, проходящая через ось вращения Oz, пересекает поверхность по кривой, которая называется *меридианом* (кривые AB, AC), а плоскость, перпендикулярная оси Oz, пересекает поверхность вращения по окружности, называемой *параллелью*. Обозначим через r_1 радиус кривизны дуги меридиана (рис. 7.13, *б*), а через r_2 — радиус кривизны нормального сечения поверхности, перпендикулярного дуге меридиана. Этот радиус равен отрезку нормали между поверхностью и осью вращения. Радиусы r_1, r_2 являются функциями угла φ — угла между нормалью и осью вращения.

Меридианы и параллели есть линии главных кривизн и часто принимаются в качестве координатных линий. Положение точки на

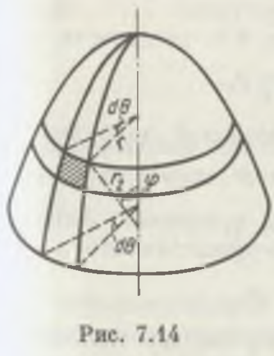


Рис. 7.14

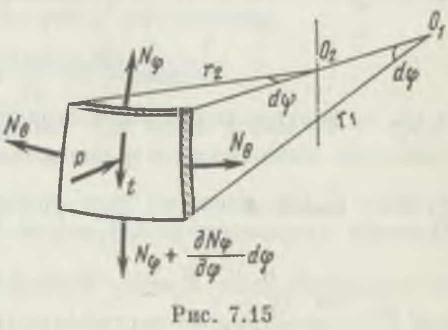


Рис. 7.15

поверхности вращения в такой системе координат может быть задано двумя углами φ и Θ, где Θ — угол между двумя меридиональными сечениями, одно из которых считается началом отсчета.

Двумя меридиональными сечениями и двумя нормальными (коническими) сечениями (рис. 7.14) вырежем из оболочки бесконечно малый элемент (рис. 7.15) и рассмотрим его равновесие. Будем предполагать, что напряжения равномерно распределены по толщине оболочки, что означает отсутствие в ней изгибающих и крутящих моментов.

Равнодействующие напряжений по толщине приводятся к усилиям, действующим в срединной поверхности оболочки N_Θ, N_φ, S. Если внешние нагрузки распределены симметрично относительно оси вращения оболочки с нормальной p и касательной к меридиану t составляющими, то напряженное состояние оказывается осесимметричным. Вследствие этого сдвигающие усилия S в оболочке тождественно равны нулю. В результате на гранях элементарного участка оболочки действуют лишь меридиональные (на нижней и верхней гранях) усилия N_φ и окружные (на боковых гранях) усилия N_Θ.

Спроецируем все силы, приходящиеся на вырезанный объем, на нормаль к срединной поверхности оболочки и на ось вращения

$$\left.\begin{aligned} & N_\varphi r\,\mathrm{d}\Theta\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi+\left(N_\varphi+\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(r+\frac{\partial r}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\Theta\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi+\\ & +N_\Theta r_1\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\Theta+pr_1r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi=0;\\ & N_\varphi r\,\mathrm{d}\Theta\sin\varphi-\left(N_\varphi+\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(r+\frac{\partial r}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)\times\\ & \times\mathrm{d}\Theta\sin(\varphi+\mathrm{d}\varphi)-pr_1r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi\cos\varphi-tr_1r\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi\sin\varphi=0, \end{aligned}\right\} \quad (7.33)$$

где r — радиус параллельного круга ($r = r_2\sin\varphi$).

Пренебрегая величинами выше второго порядка малости и принимая во внимание равенство $r\,\mathrm{d}\Theta=r_2\mathrm{d}\varphi$, из уравнений (7.33) получим

$$\frac{N_\varphi}{r_1}+\frac{N_\Theta}{r_2}+p=0; \quad (7.34)$$

$$\frac{1}{r_1r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,(N_\varphi r\sin\varphi)=-p_z. \quad (7.35)$$

Здесь p_z — вертикальная составляющая внешней нагрузки

$$p_z = p\cos\varphi + t\sin\varphi.$$

Уравнение (7.34) известно под названием *уравнения Лапласа.*

Решение уравнения (7.35) может быть представлено в виде

$$N_\varphi 2\pi r\sin\varphi = P + c, \quad (7.36)$$

причем P — проекция на вертикальную ось равнодействующей внешних распределенных нагрузок, лежащих выше рассматриваемого нормального (конического) сечения, определяемого углом φ:

$$P=-2\pi\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}p_zr_1r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Произвольная постоянная c учитывает возможные кольцевые силы, действующие на отсеченную часть оболочки. Эти силы могут быть внешними или реакциями в связях, наложенных на оболочку.

Уравнение (7.36) можно получить, рассмотрев равновесие не бесконечно малого участка оболочки, а верхней части, лежащей выше указанного конического сечения (рис. 7.16).

Итак, при осесимметричном безмоментном напряженном состоянии для определения внутренних усилий N_φ, N_θ используются два уравнения равновесия (7.34), (7.36). Если граничные условия заданы в силах, то задача оказывается статически определимой.

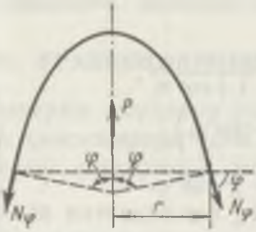


Рис. 7.16

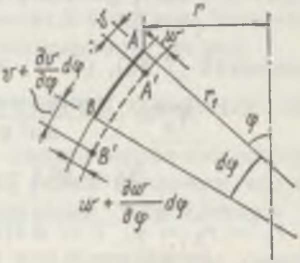


Рис. 7.17

Найдем деформации срединной поверхности при осесимметричном деформировании оболочки вращения.

Полное перемещение любой точки срединной поверхности можно разложить на две составляющие: по касательной к меридиану — перемещение v; по нормали к срединной поверхности — перемещение w.

Из рис. 7.17 нетрудно заметить, что удлинение элементарного отрезка меридиана AB определяется выражением

$$\Delta\, \mathrm{d}s = \frac{\partial v}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - w\,\mathrm{d}\varphi.$$

Первоначальная длина отрезка AB была равна $\mathrm{d}s = r_1 \mathrm{d}\varphi$.

Тогда деформация в меридиональном направлении находится из равенства

$$\varepsilon_\varphi^0 = \frac{\Delta\, \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r_1}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{w}{r_1}. \tag{7.37}$$

При деформировании меридиана радиус параллельного круга увеличивается на величину

$$\Delta r = v\cos\varphi - w\sin\varphi.$$

Для деформации в окружном направлении имеем соотношение

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{2\pi\,\Delta r}{2\pi r} = \frac{v}{r}\cos\varphi - \frac{w}{r}\sin\varphi.$$

Но $r = r_2 \sin\varphi$, в итоге можно записать

$$\varepsilon_\Theta^0 = \frac{v}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{w}{r_2}. \tag{7.38}$$

Используя зависимости (7.5), нетрудно выразить перемещения точек срединной поверхности оболочки через усилия N_φ, N_Θ.

В качестве примера рассмотрим замкнутый сферический купол постоянной толщины, опертый по параллельному кругу (рис. 7.18). Купол находится под действием собственного веса g:

$$P = -2\pi \int_0^\varphi ga^2 \sin\varphi \, d\varphi = -2\pi(1-\cos\varphi)\, ga^2.$$

Из уравнений (7.36), (7.34) имеем

$$N_\varphi = -\frac{ga(1-\cos\varphi)}{\sin^2\varphi} = -\frac{ga}{1+\cos\varphi};$$

$$N_\Theta = ga\left(\frac{1}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi\right),$$

при этом $r_1 = r_2 = a$, $r = a\sin\varphi$, $p = g\cos\varphi$.

Как видно, меридиональное усилие N_φ оказывается всегда отрицательным. Наименьшее (по модулю) усилие возникает в верхней

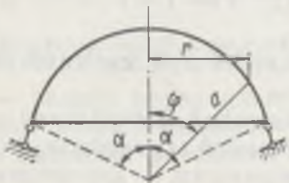


Рис. 7.18

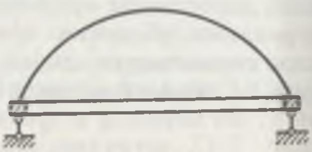


Рис. 7.19

точке купола $N_\varphi = -ga/2$. С увеличением φ сила N_φ увеличивается по абсолютному значению. В экваториальном сечении она равна $N_\varphi = -ga$.

При малом угле φ окружное усилие N_Θ тоже отрицательно. При $\varphi = 0$ оно равно $N_\Theta = -ga/2$. С увеличением угла φ усилие N_Θ сначала приближается к нулю и обращается в нуль при $\varphi = \varphi_*$, который является решением уравнения

$$\frac{1}{1+\cos\varphi_*} - \cos\varphi_* = 0, \quad \varphi_* \approx 51°50'.$$

При $\varphi > \varphi_*$ усилие N_φ становится положительным.

По найденным усилиям N_φ, N_Θ далее нетрудно определить перемещения v, w.

Если опорное закрепление выполнено таким образом, что реакции направлены по касательной к меридиану, напряженное состояние в оболочке оказывается безмоментным. В действительности же опирание купола чаще всего осуществляется через опорное кольцо (рис. 7.19), на которое со стороны основания передается только вертикальная реакция. Таким образом, горизонтальная составляющая меридионального усилия, называемая распором воспринимается опорным кольцом. Так как деформация растяжения кольца, как правило, значительно меньше, чем деформация растяжения в параллельном сечении оболочки, то в окрестности опорного кольца наблюдается изгибание оболочки. Анализ, выполняемый с помощью общих (моментных) уравнений теории оболочек, показывает, что такой изгиб носит местный характер. Это явление в теории оболочек получило название *краевого эффекта*. Вне зоны краевого эффекта напряженное состояние оболочки с достаточно высокой степенью точности описывается решением, найденным по безмоментной теории.

§ 7.11. УРАВНЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим оболочку вращения, напряженное состояние которой является осесимметричным. Если из такой оболочки вырезать элемент двумя смежными меридиональными плоскостями и двумя

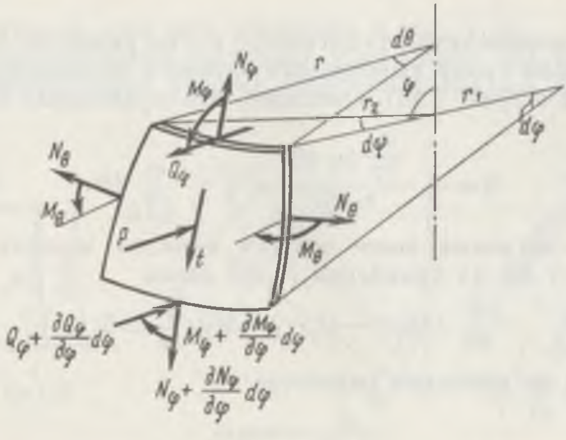


Рис. 7.20

нормальными (коническими) сечениями (рис. 7.20), то на его гранях при наличии изгибных деформаций кроме усилий N_φ, N_Θ будут действовать поперечные силы Q_φ и изгибающие моменты M_φ, M_Θ.

Рассмотрим равновесие вырезанного элемента. При записи суммы проекций сил на нормаль к срединной поверхности и на ось вращения дополнительно к тем выражениям, которые фигурировали в равенствах (7.33), появятся слагаемые

$$-Q_\varphi r\, d\Theta + \left(Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\, d\varphi\right)\left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\, d\varphi\right) d\Theta$$

и

$$-Q_\varphi r\,d\Theta\cos\varphi+\left(Q_\varphi+\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)\left(r+\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\Theta\cos(\varphi+d\varphi).$$

В результате вместо уравнений (7.34), (7.35) получим

$$\frac{N_\varphi}{r_1}+\frac{N_\Theta}{r_2}+\frac{1}{rr_1}\frac{d}{d\varphi}(Q_\varphi r)+p=0; \tag{7.39}$$

$$\frac{1}{rr_1}\frac{d}{d\varphi}[(Q_\varphi\cos\varphi+N_\varphi\sin\varphi)r]=-p_z. \tag{7.40}$$

Далее составим третье уравнение равновесия, записав сумму моментов относительно оси, касательной к окружности T:

$$-M_\varphi r\,d\Theta+\left(M_\varphi+\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)\left(r+\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\Theta-$$
$$-\left(Q_\varphi+\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)\left(r+\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\Theta\,r_1\,d\varphi-$$
$$-M_\Theta r_1\,d\varphi\frac{1}{r_1}\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\Theta+pr\,d\Theta\,r_1\,d\varphi\frac{1}{2}r_1\,d\varphi=0. \tag{7.41}$$

Наличие предпоследнего слагаемого в этом равенстве объясняется тем, что боковые грани вырезанного элемента наклонены под углом $90°-\beta$ к оси T (рис. 7.21). Очевидно, что справедливо соотношение

$$\beta=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi\,d\Theta}{r_1\,d\varphi}=\frac{1}{2}\frac{1}{r_1}\frac{\partial r}{\partial\varphi}d\Theta. \tag{7.42}$$

Опуская слагаемые выше второго порядка малости, с учетом зависимости (7.42) из уравнения (7.41) имеем

$$\frac{d}{d\varphi}(M_\varphi r)-Q_\varphi rr_1-M_\Theta\frac{dr}{d\varphi}=0. \tag{7.43}$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{dr}{r_1\,d\varphi}=\cos\varphi,$$

запишем уравнение (7.43) в виде

$$\frac{1}{rr_1}\frac{d}{d\varphi}(M_\varphi r)-\frac{\cos\varphi}{r}M_\Theta-Q_\varphi=0. \tag{7.44}$$

В результате получим три уравнения (7.39), (7.40), (7.44), которые содержат пять неизвестных функций; N_φ, N_Θ, M_φ, M_Θ, Q_φ. Если выразить усилия, N_φ, N_Θ, действующие в срединной поверхности и изгибающие моменты M_φ, M_Θ через перемещения точек срединной поверхности, то указанную систему уравнений можно записать системой трех уравнений относительно двух перемещений v, w и поперечной силы Q_φ. Для этого необходимо найти деформации в точке, лежащей на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 7.22).

На основании гипотезы прямой нормали запишем [см. (7.1)]

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_\varphi^0 + \varkappa_\varphi z; \\ \varepsilon_\Theta &= \varepsilon_\Theta^0 + \varkappa_\Theta z, \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

где $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_\Theta$ — изменение кривизн срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях.

За счет поворота нормалей в точках M, N (рис. 7.22) радиус параллельного круга в точке L и длина отрезка KL уменьшается соответственно на величину

$$\Delta r = z\alpha \cos \varphi, \quad \Delta ds = z d\alpha.$$

Тогда кривизны $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_\Theta$ оказываются равными

$$\varkappa_\varphi = -\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{r_1}\frac{d\alpha}{d\varphi};$$

$$\varkappa_\Theta = -\frac{\Delta r\, d\Theta}{z}\frac{1}{r\, d\Theta} = -\frac{\alpha \cos\varphi}{r} = -\frac{\alpha}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Найдем угол α, для чего обратимся к рис. 7.23.

В недеформированном состоянии угол между верхней и нижней гранями элементарного участка оболочки равен $d\varphi$. За счет пере-

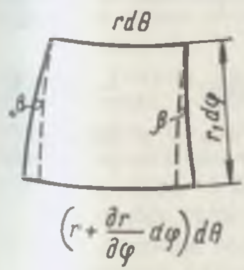


Рис. 7.21

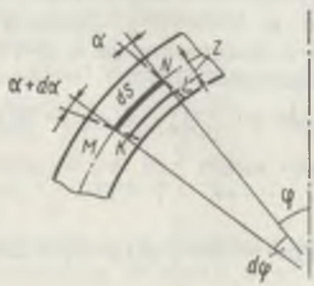


Рис. 7.22

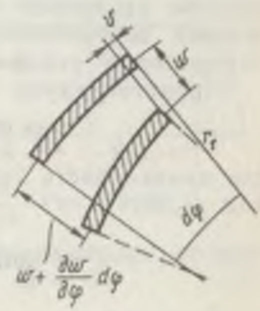


Рис. 7.23

мещения элемента вдоль меридиана верхняя грань поворачивается относительно касательной к параллельному кругу на угол v/r_1. Кроме того, эта грань повернется на дополнительный угол вследствие перемещения в направлении нормали на величину $\frac{dw}{d\varphi}\frac{d\varphi}{r_1 d\varphi} = \frac{dw}{r_1 d\varphi}$.

В результате суммарный угол поворота грани α определяется выражением

$$\alpha = \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1\, d\varphi}. \tag{7.46}$$

Далее, используя соотношения (7.5), нетрудно записать усилия через перемещения

$$\left.\begin{aligned}
N_\varphi &= \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\varphi^0+\mu\varepsilon_\Theta^0\right)=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{r_1}\left(\frac{dv}{d\varphi}-w\right)+\right.\\
&\left.+\mu\frac{1}{r_2}\left(v\operatorname{ctg}\varphi-w\right)\right];\\
N_\Theta &= \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\Theta^0+\mu\varepsilon_\varphi^0\right)=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(v\operatorname{ctg}\varphi-w\right)+\right.\\
&\left.+\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{dv}{d\varphi}-w\right)\right];
\end{aligned}\right\}\qquad (7.47)$$

$$\left.\begin{aligned}
M_\varphi &= D\left(\varkappa_\varphi+\mu\varkappa_\Theta\right)=-D\left[\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r_1}+\frac{dw}{r_1\,d\varphi}\right)+\right.\\
&\left.+\mu\frac{1}{r_2}\left(\frac{v}{r_1}+\frac{dw}{r_1\,d\varphi}\right)\operatorname{ctg}\varphi\right];\\
M_\Theta &= D\left(\varkappa_\Theta+\mu\varkappa_\varphi\right)=-D\left[\frac{1}{r_2}\left(\frac{v}{r_1}+\frac{dw}{r_1\,d\varphi}\right)\operatorname{ctg}\varphi+\right.\\
&\left.+\mu\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v}{r_1}+\frac{dw}{r_1\,d\varphi}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\qquad (7.48)$$

После подстановки этих выражений в уравнения (7.39), (7.40), (7.44) получим искомую систему трех уравнений относительно неизвестных v, w, Q_φ. Число уравнений можно сократить до двух, выразив поперечную силу через перемещения v, w. Однако более простые уравнения получаются в том случае, если воспользоваться новыми переменными α и $V = r_2 Q_\varphi$. Найдем зависимости между внутренними усилиями и неизвестными α и V.

Проинтегрируем уравнение (7.40):

$$2\pi r\left(N_\varphi\sin\varphi+Q_\varphi\cos\varphi\right)=2\pi F(\varphi), \qquad (7.49)$$

где правая часть $2\pi F(\varphi)$ имеет тот же смысл, что и в соотношении (7.36)

$$2\pi F(\varphi)=-2\pi\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}p_z r_1 r\,d\varphi+2\pi c.$$

Из равенств (7.39), (7.49) следует

$$N_\Theta=-\frac{1}{r_1}\frac{dV}{d\varphi}-pr_2-\frac{1}{r_1\sin^2\varphi}F(\varphi); \qquad (7.50)$$

$$N_\varphi=-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}V+\frac{1}{r_2\sin^2\varphi}F(\varphi). \qquad (7.51)$$

Для изгибающих моментов M_φ, M_Θ справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned}
M_\varphi &= -D\left(\frac{1}{r_1}\frac{d\alpha}{d\varphi}+\mu\frac{\alpha}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi\right);\\
M_\Theta &= -D\left(\frac{\alpha}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi+\mu\frac{1}{r_1}\frac{d\alpha}{d\varphi}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad (7.52)$$

Итак, нормальные силы N_φ, N_Θ и моменты M_φ, M_Θ выражены через две введенные неизвестные функции α и V, причем уравнения (7.39), (7.40) при таком представлении функций N_φ, N_Θ удовлетворяются тождественно.

Два уравнения относительно α, V следуют из уравнения совместности деформаций в срединной поверхности оболочки и уравнения равновесия (7.44). Опуская все промежуточные выкладки, запишем эти уравнения в окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r_2}{r_1}\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\left[\frac{r_2}{r_1}\operatorname{ctg}\varphi+\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\frac{dV}{d\varphi}-\\
&-\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\varphi V+\mu V=E\delta r_1\alpha+\Phi(\varphi);\\
&\frac{r_2}{r_1}\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}+\left[\frac{r_2}{r_1}\operatorname{ctg}\varphi+\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\frac{d\alpha}{d\varphi}-\\
&-\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\varphi\alpha-\mu\alpha=-r_1\frac{V}{D},
\end{aligned}\right\}\qquad(7.53)$$

где

$$\Phi(\varphi)=-\frac{d}{d\varphi}(pr_2^2)+tr_2(r_2+\mu r_1)-\frac{F(\varphi)}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{r_1}{r_2}-\frac{r_2}{r_1}\right)\operatorname{ctg}\varphi+\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right].$$

По решению уравнений (7.53) определяются внутренние усилия из соотношений (7.50). . .(7.52), после чего находятся деформации и перемещения в каждой точке оболочки.

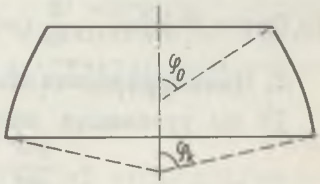


Рис. 7.24

Функции α, V должны удовлетворять не только уравнениям (7.53), но и граничным условиям, которые формулируются по одному для α и V на каждом крае оболочки, т. е. при $\varphi=\varphi_0$ и $\varphi=\varphi_k$ (рис. 7.24).

Например, если нижний край оболочки жестко защемлен, то при $\varphi=\varphi_k$ должны выполняться условия $\alpha=0$ и $\varepsilon_\Theta^0=0$.

Из второго условия следует $N_\Theta-\mu N_\varphi=0$.

Для шарнирно опертого края имеем

$$M_\varphi=0,\quad \varepsilon_\Theta^0=0,$$

или

$$\frac{1}{r_1}\frac{d\alpha}{d\varphi}+\mu\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2}\alpha=0;\quad N_\Theta-\mu N_\varphi=0.$$

Если оболочка замкнута в вершине, то условия записываются для вершины, которые при отсутствии сосредоточенной силы в ней принимают вид $(\varphi=\varphi_0=0)$

$$\alpha=0,\ Q_\varphi=0.$$

Иногда вместо независимой переменной φ удобно воспользоваться другой величиной s — длиной дуги меридиана:

$$ds = r_1\, d\varphi.$$

Тогда уравнения (7.53) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV^2}{ds^2}+\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_1}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{ds}\right)\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{r_2^2}V+\frac{\mu}{r_1r_2}V=\\&=\frac{E\delta}{r_2}\alpha+\frac{1}{r_2}\Phi(s);\\&\frac{d^2\alpha}{ds^2}+\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_1}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{ds}\right)\frac{d\alpha}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{r_2^2}\alpha-\frac{\mu}{r_1r_2}V=-\frac{V}{r_2D},\end{aligned}\right\}\quad(7.54)$$

причем $\Phi(s)=-\frac{d}{ds}(pr_2^2)+tr_2\left(\mu+\frac{r_2}{r_1}\right)-\frac{F(\varphi)}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{1}{r_2}-\frac{r_2}{r_1^2}\right)\operatorname{ctg}\varphi+\right.$ $\left.+\frac{1}{r_1}\frac{dr_2}{ds}\right]$.

Рассмотрим некоторые частные случаи оболочек вращения.

1. Коническая оболочка ($r_1=\infty$).

Уравнения (7.54) для такой оболочки записываются следующим образом:

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{ds}\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{r_2^2}V=\frac{E\delta}{r_2}\alpha+\frac{1}{r_2}\Phi(s);$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}+\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{ds}\frac{d\alpha}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{r_2^2}\alpha=-\frac{V}{r_2D}.$$

Здесь $\Phi(s)=-\frac{d}{ds}(pr_2^2)+\mu r_2t-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r_2\sin^2\varphi}F(\varphi)$.

2. Цилиндрическая оболочка $\left(\varphi=\frac{\pi}{2},\ r_2=a=\text{const}\right)$.

Те же уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2V}{ds^2}=\frac{E\delta}{a}\alpha+\frac{1}{a}\Phi(s);\\&\frac{d^2\alpha}{ds^2}=-\frac{V}{aD},\end{aligned}\right\}\quad(7.55)$$

где

$$\Phi(s)=-a^2\frac{dp}{ds}+\mu at.$$

3. Сферическая оболочка ($r_1=r_2=R$).

Уравнения для нее оказываются более простыми, если записать их исходя не из уравнений (7.54), а из уравнений (7.53):

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\operatorname{ctg}\varphi\frac{dV}{d\varphi}-\operatorname{ctg}^2\varphi V+\mu V=E\delta R\alpha+\Phi(\varphi);$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2}+\operatorname{ctg}\varphi\frac{d\alpha}{d\varphi}-\operatorname{ctg}^2\varphi\alpha-\mu\alpha=-R\frac{V}{D},$$

причем $\Phi(\varphi)=-R^2\frac{dp}{d\varphi}+(1+\mu)R^2t$.

§ 7.12. ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Для цилиндрической оболочки из соотношений (7.47), (7.48) имеем:

$$N_\varphi = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{dv}{ds} - \mu\frac{w}{a}\right); \tag{7.56}$$

$$N_\Theta = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(-\frac{w}{a} + \mu\frac{dv}{ds}\right); \tag{7.57}$$

$$\begin{aligned} M_\varphi &= -D\frac{d^2w}{ds^2}; \\ M_\Theta &= -\mu D\frac{d^2w}{ds^2}. \end{aligned} \tag{7.58}$$

В качестве разрешающих уравнений для цилиндрической оболочки можно взять уравнения (7.55), которые в данном случае сводятся к одному уравнению относительно функции V или α. Однако для рассматриваемой оболочки разрешающее уравнение легко получить из уравнений равновесия (7.39), (7.40), (7.44), принимающих в данном случае вид

$$\frac{dQ_\varphi}{ds} + \frac{N_\Theta}{a} + p = 0; \tag{7.59}$$

$$\frac{dN_\varphi}{ds} = -t; \tag{7.60}$$

$$\frac{dM_\varphi}{ds} = -Q_\varphi. \tag{7.61}$$

Из уравнений (7.59), (7.61) следует

$$\frac{d^2M_\varphi}{ds^2} + \frac{N_\Theta}{a} = -p. \tag{7.62}$$

При $t = 0$ из уравнения (7.60) найдем

$$N_\varphi = \text{const}.$$

Будем считать $N_\varphi = 0$.
Тогда из равенства (7.56) имеем

$$\frac{dv}{ds} = \mu\frac{w}{a}. \tag{7.63}$$

После подстановки выражений (7.57), (7.58) в уравнение (7.62) с учетом соотношения (7.63) получим

$$\frac{d^4w}{ds^4} + 4\beta^4 w = \frac{p}{D}, \tag{7.64}$$

где

$$\beta^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{a^2\delta^2}.$$

Заметим, что уравнение (7.64) совпадает с уравнением для стержня, лежащего на сплошном упругом основании.

Общее решение уравнения (7.64) запишется следующим образом:

$$w = e^{\beta s}(c_1 \cos \beta s + c_2 \sin \beta s) + e^{-\beta s}(c_3 \cos \beta s + c_4 \sin \beta s) + w_{\text{част}}, \quad (7.65)$$

причем c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные; $w_{\text{част}}$ — частное решение уравнения (7.64).

Если $p = \text{const}$, то

$$w_{\text{част}} = \frac{p}{4\beta^4 D} = \frac{pa^2}{E\delta}.$$

При свободных концах оболочки внешнее давление p вызывает лишь окружные сжимающие усилия

$$N_\Theta = -pa,$$

т. е. напряженное состояние оболочки является безмоментным. Если же края оболочки закреплены, то в окрестности торцов появляется локальный изгиб. По мере удаления от края оболочки напряженное состояние будет приближаться к безмоментному. Зона краевого эффекта зависит от цилиндрической жесткости и радиуса оболочки.

Для анализа краевого эффекта рассмотрим полубесконечную оболочку, защемленную

Рис. 7.25

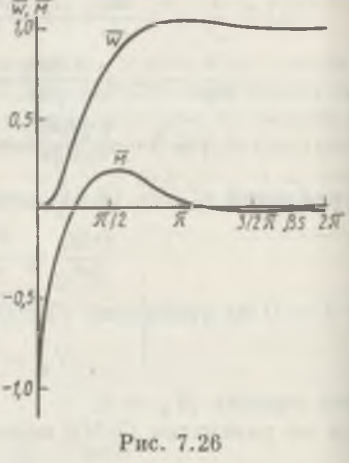


Рис. 7.26

при $s = 0$ (рис. 7.25). При $s \to \infty$ прогиб оболочки остается ограниченным, поэтому постоянные c_1, c_2 в выражении (7.65) следует положить равными нулю. Тогда

$$w = e^{-\beta s}(c_3 \cos \beta s + c_4 \sin \beta s) + \frac{pa^2}{E\delta};$$

$$\frac{dw}{ds} = \beta e^{-\beta s}[(c_4 - c_3)\cos \beta s - (c_3 + c_4)\sin \beta s];$$

$$M_\varphi = -D\frac{d^2 w}{ds^2} = 2\beta^2 D e^{-\beta s}(c_4 \cos \beta s - c_3 \sin \beta s).$$

Из граничных условий при $s = 0$

$$w = \frac{dw}{ds} = 0$$

найдем:

$$c_3 = c_4 = -\frac{pa^2}{E\delta}; \ w = \frac{pa^2}{E\delta}\left[1 - e^{-\beta s}(\sin\beta s + \cos\beta s)\right];$$

$$N_\Theta = -pa\left[1 - e^{-\beta s}(\sin\beta s + \cos\beta s)\right];$$

$$M_\varphi = -\frac{pa\delta}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta s}(\cos\beta s - \sin\beta s).$$

Для количественной оценки длины зоны краевого эффекта на рис. 7.26 приведены графики изменения безразмерного прогиба

$$\bar{w} = \frac{E\delta}{pa^2} w$$

и безразмерного изгибающего момента

$$\bar{M} = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{pa\delta} M_\varphi$$

для оболочки, имеющей следующие характеристики: $\mu = 0{,}3$; $a/\delta = 100$.

Заметим, что график $\bar{w}$ совпадает с графиком изменения безразмерного окружного усилия N_Θ/pa.

Как видно из рисунка, при $s > 0{,}25\ a$ изгибающий момент M_φ в рассмотренной оболочке оказывается практически равным нулю, т. е. при $s > 0{,}25\ a$ напряженное состояние можно считать безмоментным.

ГЛАВА 8

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 8.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Точное решение в аналитической форме уравнений теории упругости при соблюдении граничных условий, что составляет так называемую краевую задачу, возможно лишь в некоторых частных случаях нагружения тел и условий их закрепления. Поэтому для инженерной практики имеют особо важное значение приближенные, но достаточно общие методы решения задач прикладной теории упругости.

Уравнения теории упругости относятся к одному из разделов уравнений математической физики, по методам решений которых существует обширнейшая литература. Причем эти методы получили особенно активное развитие в последние десятилетия в связи с потребностями применения ЭВМ в прикладных проблемах.

В данной главе мы рассмотрим только некоторые методы, наиболее характерные для задач механики деформирования.

Эти методы можно разделить на две группы. Первая составляет *методы приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений*, к которым сводятся те или иные задачи прикладной теории упругости. Из числа этих методов прежде всего рассмотрим метод конечных разностей (МКР) и особенности его применения в плоской задаче и в задачах изгиба пластин. Далее излагаются метод Бубнова — Галеркина и метод Канторовича — Власова.

Вторую группу методов составляют так называемые *прямые методы*. Их характерной особенностью является то, что минуя дифференциальные уравнения на основе вариационных принципов механики упругого тела строятся процедуры для отыскания числовых полей неизвестных функций в теле — перемещений, усилий, напряжений. В гл. 3 при рассмотрении двух основных принципов — Лагранжа (вариации перемещений) и Кастильяно (вариации напряжений) — уже были изложены два таких прямых метода, а именно метод Ритца (см. § 3.5) и метод, основанный на принципе Кастильяно (см. § 3.7). В дополнение к ним в данной главе излагаются общие основы наиболее эффективного в настоящее время прямого метода — метода конечных элементов (МКЭ). Перечисленные методы либо полностью основаны на вариационных принципах (методы второй группы), либо допускают соответствующую трактовку с использованием этих принципов (методы первой группы). Поэтому часто эти приближенные методы называют вариационными.

§ 8.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (МКР)

Этот метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также методом сеток. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела (область решения краевой задачи) — ось балки, площадь пластины, поверхность оболочки и т. д. — покрывается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. За неизвестные принимаются значения разыскиваемых функций в узлах сетки. Для этого строятся приближенные формулы для производных от функций, выраженные через узловые ординаты этих

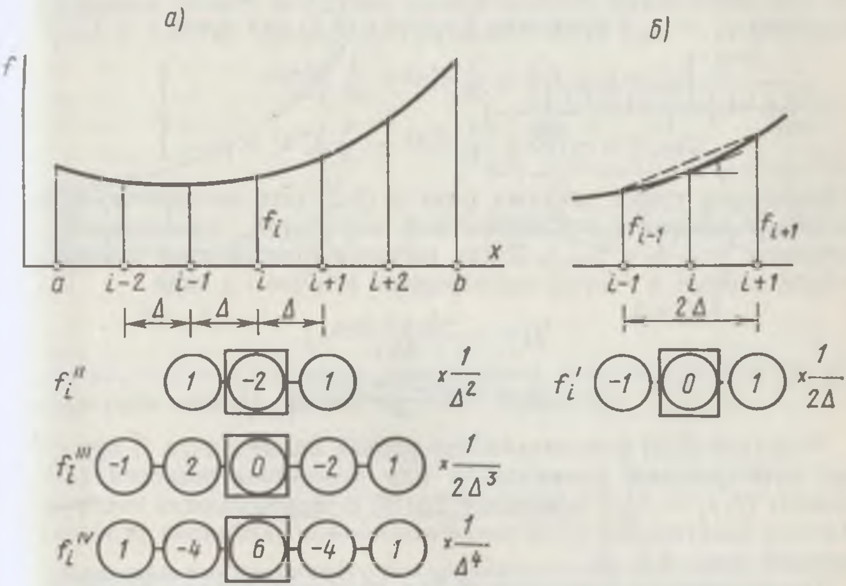


Рис. 8.1

функций (конечно-разностные операторы производных). Эти операторы подставляются в дифферениальное уравнение, и требуется, чтобы дифференциальное уравнение выполнялось в каждом узле сетки (такой прием называют в математике коллокацией). Граничные условия данной краевой задачи также формулируются с помощью конечно-разностных операторов. В целом это приводит к алгебраической системе уравнений относительно узловых ординат разыскиваемых функций, решение которых и дает числовое поле определяемых в теле функций. Для линейных дифференциальных уравнений конечно-разностные уравнения образуют систему линейных алгебраических уравнений. Поскольку использование ЭВМ позволяет составить и решать системы таких уравнений очень высокого порядка (несколько тысяч или даже десятков тысяч уравнений), МКР представляет весьма мощное средство решения прикладных задач как теории упругости, так и других задач математической физики.

Рассмотрим построение операторов для производных от одномерной функции $f = f(x)$ (рис. 8.1, *а*). Участок отыскания решения ab разобьем на равные интервалы Δ и воспользуемся теоремой Тейлора: если функция f непрерывна вместе со своими производными на отрезке $(x_0, x_0 + \Delta)$, то эта функция в точке $x = x_0 + \Delta$ может быть выражена через производные в точке $x = x_0$ формулой

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + \frac{1}{2!} f''(x_0)\Delta^2 + \ldots . \tag{8.1}$$

Положим $x_0 = x_i$ и применим формулу (8.1) для точек $i + 1$ и $i - 1$:

$$\left.\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f'_i\Delta + \frac{1}{2!} f''_i\Delta^2 + \frac{1}{3!} f'''_i\Delta^3 + \ldots; \\ f_{i-1} &= f_i - f'_i\Delta + \frac{1}{2!} f''_i\Delta^2 - \frac{1}{3!} f'''_i\Delta^3 + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Ограничимся тремя членами ряда в (8.2) (что соответствует замене истинной кривой $f(x)$ квадратной параболой, проведенной через ординаты f_{i-1}, f_i и f_{i+1}). Тогда вычитая и складывая строки (8.2), найдем первую и вторую производные в точке i в виде

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta}; \tag{8.3}$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2}. \tag{8.4}$$

Формула (8.3) показывает, что первая производная f'_i при сделанном приближении вычисляется как отношение разности соседних ординат $(f_{i+1} - f_{i-1})$ к отрезку 2Δ, т. е. приближенно тангенс угла наклона касательной в i-й точке заменяется тангенсом угла наклона секущей (рис. 8.1, *б*).

Вычисление по формулам (8.3) и (8.4) можно представить в виде схем, называемых операторами для вычисления производных и изображенных на рис. 8.1, *а* под сеткой узлов. Чтобы в точке i вычислить производную, надо наложить центр оператора (отмеченный прямоугольником) на эту точку и составить сумму произведений узловых ординат на соответствующие коэффициенты оператора.

Третью производную f'''_i можно получить, применив оператор первой производной ко второй производной f'', значение которой в каждой узловой точке получается по оператору второй производной

$$f'''_i = \frac{d}{dx}(f'')_i = \frac{-f''_{i-1} + f''_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i) + (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})}{2\Delta \cdot \Delta^2}$$

или

$$f'''_i = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3}. \tag{8.5}$$

Легко проверить, что то же получится по схеме $f'''_i = \frac{d^2}{dx^2}(f')_i$.

Аналогично, применив оператор второй производной к оператору второй производной, получим формулу четвертой производной

$$f_i^{\mathrm{IV}} = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4}. \tag{8.6}$$

Операторы для третьей и четвертой производных также изображены на рис. 8.1, *а*.

Полученные операторы симметричны относительно их центра и соответствующие им формулы называют **центральными конечными разностями**. Путем соответствующего интерполирования можно получить односторонние выражения для про-

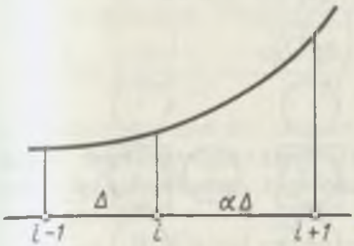


Рис. 8.2

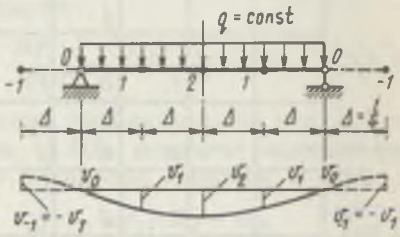


Рис. 8.3

изводных, когда в i-й точке производная выражается только через правые (или левые) ординаты. Так, например,

$$\left.\begin{aligned} f_i' &= \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta}; \\ f_i'' &= \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{\Delta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

С помощью квадратичного интерполирования можно получить также формулы для неравномерного шага сетки (рис. 8.2).

$$f_i' = \frac{-\alpha^2 f_{i-1} - (1-\alpha^2) f_i + f_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)\Delta}; \tag{8.8}$$

$$f_i'' = \frac{2[\alpha f_{i-1} - (1+\alpha) f_i + f_{i+1}]}{\alpha(1+\alpha)\Delta^2}. \tag{8.9}$$

При удержании в формуле Тейлора большего числа членов можно получить уточненные выражения для производных, но их операторы будут иметь большую протяженность и их использование будет более громоздким.

Технику применения МКР поясним на очень простом, но характерном примере (рис. 8.3). В симметричной балке найдем прогибы v в узловых точках *1* и *2*, решая краевую задачу для уравнения изгиба балки

$$v^{\mathrm{IV}} = \frac{q}{EJ}. \tag{a}$$

Последовательно накладывая центр оператора четвертой производной на точки 1 и 2, составляем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} v_{-1} - 4v_0 + 6v_1 - 4v_2 + v_1 = \frac{q\Delta^4}{EJ}\,; \\ v_0 - 4v_1 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 = \frac{q\Delta^4}{EJ}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

Вошедшие сюда значения v_0 и v_{-1} надо исключить, используя граничные условия. Первое из них дает $v_0 = 0$, второе — $M_0 = 0$ или

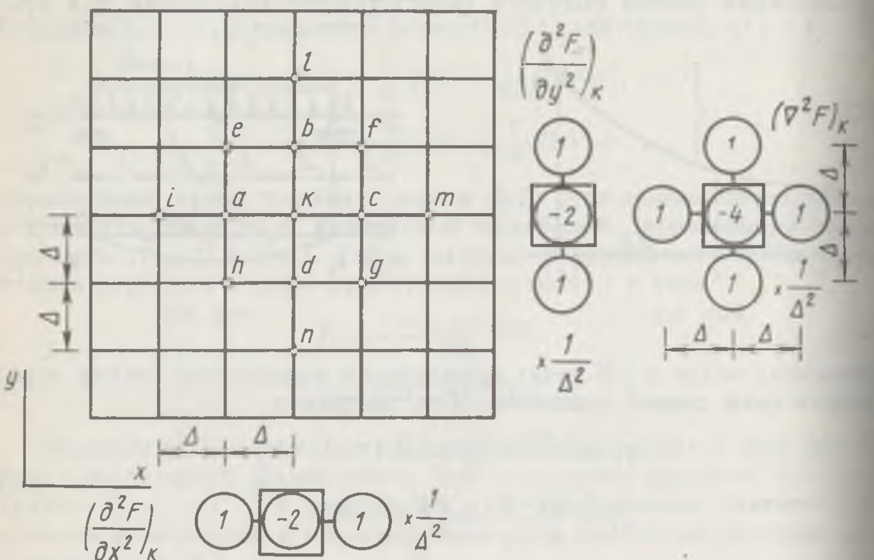


Рис. 8.4

$-v''EJ = 0$. Наложив оператор второй производной на точку 0, найдем

$$v_0'' = \frac{v_{-1} - 2v_0 + v_1}{\Delta^2} = 0.$$

Отсюда при $v_0 = 0$ имеем $v_{-1} = -v_1$. Внося эти значения v_0 и v_{-1} в уравнения (б), приведем их к виду

$$\left.\begin{aligned} 6v_1 - 4v_2 = \frac{q\Delta^4}{EJ}\,; \\ -8v_1 + 6v_2 = \frac{q\Delta^4}{EJ}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Их решение дает $v_1 = 2{,}5\ q\Delta^4/(EJ)$, $v_2 = 3{,}5\ q\Delta^4/(EJ)$. При $\Delta = l/4$ прогиб $v_2 = (7/502)ql^4/(EJ) = 0{,}01394ql^4/(EJ)$. Точное значение $v_2 = (5/384)\ ql^4/(EJ) = 0{,}01302\ ql^4/(EJ)$. Погрешность составляет 7%. Она может быть снижена уменьшением шага сетки.

Из разобранного примера видим, что в МКР приходится искусственно как бы расширять область интегрирования, вводя в уравнения точки, лежащие за контуром этой области. Эти законтурные узловые точки затем используются для удовлетворения граничных условий.

Перейдем к составлению операторов для частных производных от функции двух аргументов $F = F(x, y)$ (рис. 8.4).

Выражение $F = F(x, y)$ можно трактовать как уравнение некоторой поверхности с ординатами F над плоскостью xy. Вертикальные сечения этой поверхности плоскостями, параллельными x или y, представляют плоские кривые, для которых производные $\partial F/\partial x$, $\partial^2 F/\partial x^2$, $\partial F/\partial y$, $\partial^2 F/\partial y^2$ и т. д. могут вычисляться по приведенным выше формулам. Так, для точки k имеем

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_k = \frac{F_a - 2F_k + F_c}{\Delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_k = \frac{F_d - 2F_k + F_b}{\Delta^2}. \qquad (8.10)$$

Соответствующие им операторные схемы изображены на рис. 8.4 рядом с сеткой. Складывая равенства (8.10), получим конечно-разностное выражение гармонического оператора Лапласа в точке k

$$(\nabla^2 F)_k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_k = \frac{F_a + F_b + F_c + F_d - 4F_k}{\Delta^2}. \qquad (8.11)$$

Формуле (8.11) соответствует операторная схема крестообразной формы (рис. 8.4).

Особый интерес представляет бигармонический оператор, который получим, дважды применив оператор Лапласа (8.11)

$$(\nabla^2\nabla^2 F)_k = \nabla^2 (Z)_k = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d - 4Z_k}{\Delta^2},$$

где $Z_j = (\nabla^2 F)_j$, $j = a, b, c\ d, k$. Последовательно наложив на эти точки «крест» гармонического оператора, получим слагаемые числителя искомой формулы, выраженные через ординаты F. После приведения подобных членов будем иметь

$$(\nabla^2\nabla^2 F)_k = \frac{20F_k - 8(F_a + F_b + F_c + F_d) + 2(F_e + F_f + F_g + F_h) + (F_l + F_m + F_n + F_i)}{\Delta^4}. \qquad (8.12)$$

Схема бигармонического оператора изображена на рис. 8.5.

Вторая смешанная производная может быть получена по схеме

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k = \frac{-(\partial F/\partial y)_a + (\partial F/\partial y)_c}{2\Delta} = \frac{F_h - F_e + F_f - F_g}{4\Delta^2}. \qquad (8.13)$$

Ее оператор показан на рис. 8.6. Заметим, что расстановка знаков в этом операторе зависит от направления осей x, y. Единицы со знаком плюс всегда расположены по биссектрисе прямого угла между x и y.

Операторы частных производных могут быть составлены с использованием не только декартовой системы координат. Применяют косоугольную, полярную систему и др. [31]. Например, для расчета

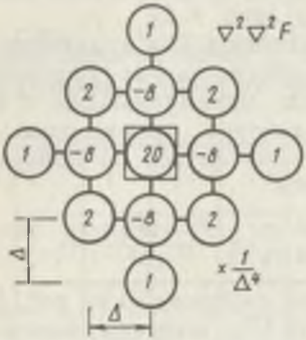


Рис. 8.5

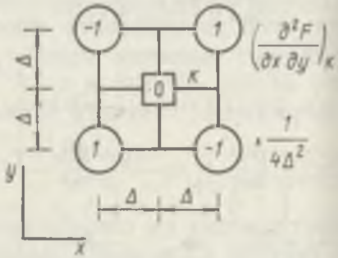


Рис. 8.6

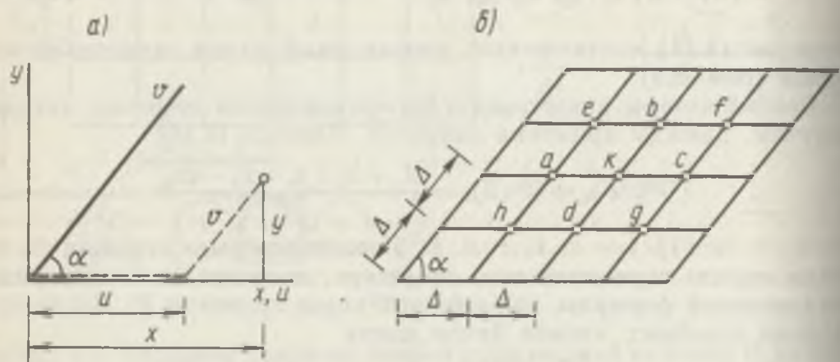


Рис. 8.7

косых пластин полезно использовать косоугольную систему $u - v$ с углом α (рис. 8.7, *а*). Для этой системы, учитывая соотношения

$$u = x - y\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,; \qquad v = y\,\frac{1}{\sin\alpha}\,,$$

можно получить производные

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\,; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cos\alpha\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\cos\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cos^2\alpha\right).$$

Гармонический оператор $\nabla^2 F = \partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial y^2$ получит вид

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\cos\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right), \tag{8.14}$$

а его конечно-разностное выражение для ромбической сетки (рис. 8.7 *б*) запишется так:

$$(\nabla^2 F)_k = \frac{F_a - 2F_k + F_c}{\Delta^2 \sin^2\alpha} + \frac{F_d - 2F_k + F_b}{\Delta^2 \sin^2\alpha} - \frac{-F_e + F_f - F_g + F_h}{2\Delta^2 \sin^2\alpha}\cos\alpha. \tag{8.15}$$

Дважды применив оператор (8.15), можно получить бигармонический оператор.

§ 8.3. ПРИМЕНЕНИЕ МКР ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим особенности применения метода конечных разностей в плоской задаче на примере использования функции напряжений (см. § 4.4). В этом случае задача сводится к решению уравнения совместности деформаций в виде бигармонического уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Пластину покрываем квадратной сеткой с шагом Δ. Для каждого внутреннего узла сетки с использованием оператора (см. рис. 8.5) составляем конечно-разностный аналог бигармонического уравнения в виде равенств

$$(\nabla^2\nabla^2\varphi)_j = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{8.16}$$

где N — общее число внутренних узлов сетки. Равенства (8.16) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых ординат φ_j, к которой надо присоединить граничные условия.

Пусть на контуре пластины задана некоторая нагрузка. Тогда формулировка граничных условий может быть осуществлена на основе рамной аналогии (4.25):

$$\varphi_K = M_K; \ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_K = N_K. \tag{8.17}$$

Равенства (8.17) показывают, что на контуре пластины значения функции φ_K могут быть приняты как ординаты изгибающих моментов M_K в условной раме, очертание которой совпадает с контуром пластины. Второе условие (8.17), выражающее производную φ по нормали к контуру n, позволяет выразить законтурные значения φ через ординаты во внутренних точках.

Укажем правило знаков для (8.17). Если ординаты изгибающих моментов (откладываемые со стороны растянутого волокна) отложены внутрь контура пластины, то такие $\varphi_K = M_K > 0$ и наоборот. Растягивающая продольная сила как обычно считается положительной, т. е. $(\partial\varphi/\partial n)_K = N_K > 0$, если N_K — растягивающая сила, и наоборот.

Пусть точка K расположена на контуре пластины (рис. 8.8). Тогда значение φ_K в этой точке берется по эпюре изгибающих моментов. Бигармонический оператор (см. рис. 8.5), будучи наложенным на соседнюю внутреннюю точку A, вовлечет и законтурную точку B. Ординату φ_B найдем с помощью оператора первой производной по нормали к контуру n и равенства (8.17):

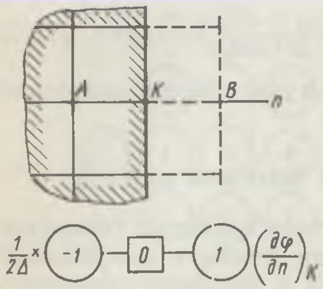


Рис. 8.8

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_K = \frac{-\varphi_A+\varphi_B}{2\Delta} = N_K.$$

Отсюда получаем выражение для ординат φ законтурных точек

$$\varphi_B = \varphi_A + 2N_K\Delta. \qquad (8.18)$$

Таким образом, в пластине, покрытой сеткой, неизвестными будут только ординаты во внутренних узлах этой сетки. Именно для всех этих узлов и составляются уравнения (8.16) путем последовательного наложения на них бигармонического оператора (8.12), что дает систему алгебраических линейных уравнений относительно указанных ординат.

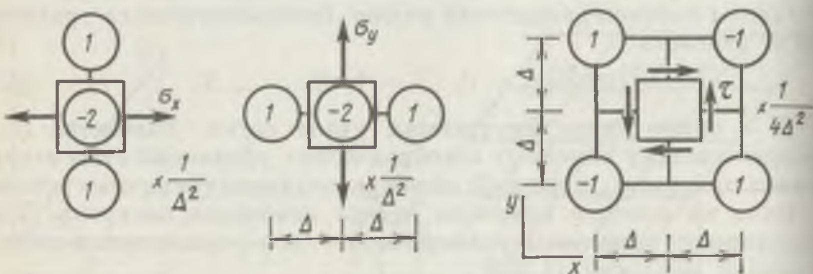


Рис. 8.9

После решения системы алгебраических уравнений получаем числовое поле φ в узлах сетки, от которых надо перейти к напряжениям по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}. \qquad (8.19)$$

Соответствующие им операторы, построенные с помощью рис. 8.4 и 8.6, изображены на рис. 8.9.

Заметим, что оператор для τ, показанный на рис. 8.9, дает это напряжение в узле сетки. Если в нем вместо шага Δ принять шаг $\Delta/2$, то при наложении на ячейку сетки он дает напряжение τ в средней точке этой ячейки, которое может рассматриваться как среднее касательное напряжение ячейки.

С помощью операторов, изображенных на рис. 8.9, переходим от числового поля φ к числовым полям напряжений в узлах сетки.

Рассмотрим конкретный пример. Пластина толщиной, равной единице, в виде высокой балки (балки -стенки) нагружена равномерно распределенной нагрузкой q; опорные реакции считаем сосредоточенными в угловых точках. Сетка $4\Delta \times 5\Delta$ и нумерация точек с учетом симметрии относительно $O - O$ показаны на рис. 8.10.

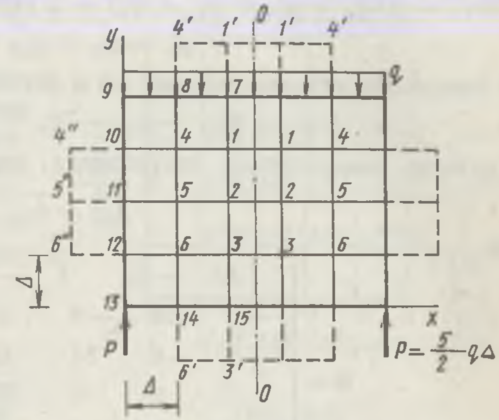


Рис. 8.10

На рис. 8.11 изображены эпюры M и N в раме, по очертанию совпадающей с контуром пластины и загруженной той же нагрузкой, что и пластина распределенной нагрузкой q и реакциями R. В нижнем горизонтальном стержне для упрощения построения эпюр введен разрез на оси симметрии, что, как разъяснено в § 4.4, допускается при формулировке граничных условий с помощью рамной аналогии.

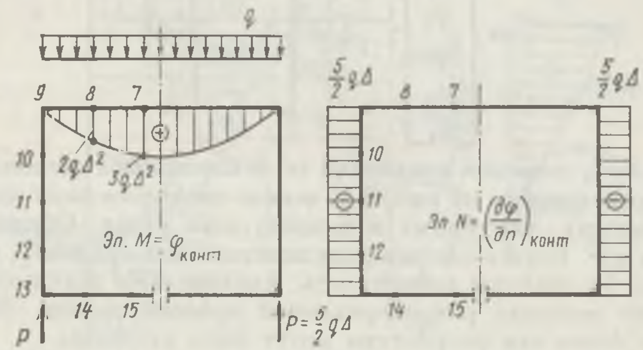


Рис. 8.11

В соответствии с (8.17) для контурных точек имеем

$$\varphi_7 = 3q\Delta^2; \quad \varphi_8 = 2q\Delta^2; \quad \varphi_9 = \ldots = \varphi_{15} = 0. \qquad (а)$$

С использованием формулы (8.18) получаем выражения для ординат в законтурных точках

$$\begin{array}{ll|ll} \varphi_{1'} = \varphi_1; & \varphi_{4'} = \varphi_4 & \varphi_{4''} = \varphi_4 - 5q\Delta^2; & \varphi_{5''} = \varphi_5 - 5q\Delta^2; \\ \varphi_{6'} = \varphi_6; & \varphi_{3'} = \varphi_3 & \varphi_{6''} = \varphi_6 - 5q\Delta^2. & \end{array} \qquad (б)$$

Составляем уравнения относительно узловых ординат φ, последовательно накладывая бигармонический оператор (см. рис. 8.5) на внутренние точки 1 . . . 6. Так, результат наложения этого оператора на точку 1 дает

$$20\varphi_1 - 8(\varphi_4 + \varphi_7 + \varphi_1 + \varphi_2) + 2(\varphi_8 + \varphi_7 + \varphi_2 + \varphi_5) + \varphi_1 + \\ + \varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_{10} = 0.$$

С учетом граничных условий (а) и (б) эта строка получает вид

$$13\varphi_1 - 6\varphi_2 + \varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 = 14\, q\Delta^2.$$

Проделав аналогичные вычисления, получаем систему уравнений

$$\mathbf{A}\vec{\varphi} = \vec{b}, \tag{в}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -6 & 1 & -7 & 2 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 2 & -7 & 2 \\ 1 & -6 & 13 & 0 & 2 & -7 \\ -7 & 2 & 0 & 22 & -8 & 1 \\ 2 & -7 & 2 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 2 & -7 & 1 & -8 & 22 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3 \\ 0 \\ 15 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} q\Delta^2. \tag{г}$$

Результаты решения уравнений (в) в сочетании с использованием (а) и (б) представлены на рис. 8.12 в виде числового поля значений φ для внутренних, контурных и законтурных узлов. Общий множитель у них $q\Delta^2$. Если в каждом узле восстановить ординату, равную φ этого узла, то получим поверхность, являющуюся результатом приближенного решения рассматриваемой краевой задачи. Путем измельчения сетки эти результаты могут быть уточнены.

Определим напряжения в узлах линий $I - I$ и $II - II$ (рис. 8.13): Так, в верхней точке сечения $I - I$ (точка 7 на рис. 8.10) с помощью операторов (см. рис. 8.9) получим:

$$\sigma_x^{(7)} = (2{,}675 - 2\cdot 3 + 2{,}675)\frac{q\Delta^2}{\Delta^2} = -0{,}65q;$$

$$\sigma_y^{(7)} = (2 - 2\cdot 3 + 3)\frac{q\Delta^2}{\Delta^2} = -q;$$

$$\tau^{(7)} = (1{,}849 + 2{,}675 - 1{,}849 - 2{,}675)\frac{q\Delta^2}{4\Delta^2} = 0.$$

Обратим внимание на то, что при вычислении напряжений в контурных точках, как в точке 7, учитываются соответствующие законтурные узловые ординаты φ. Эпюры напряжений σ_x, τ^{I}, σ_y^{I} в точках линии $I - I$ и напряжений σ_y^{II} в точках линии $II - II$ изображены на рис. 8.13 и 8.14.

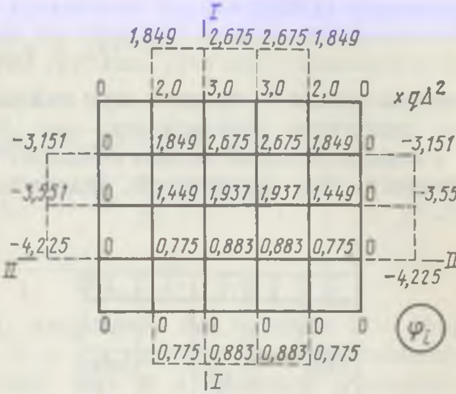


Рис. 8.12

На рис. 8.13 пунктиром показана эпюра σ_x в сечении $I - I$, полученная по формуле сопротивления материалов. В крайних точках сечения в соответствии с этой формулой напряжения будут

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{3q\Delta^2 \cdot 6}{(4\Delta)^2} = 1,125q.$$

Полученные эпюры напряжений должны удовлетворять условиям равновесия. Так, если рассечь пластину сечением $I - I$, то легко убедиться, что продольная сила в этом сечении равна нулю, отсюда получаем, что площадь эпюры σ_x также

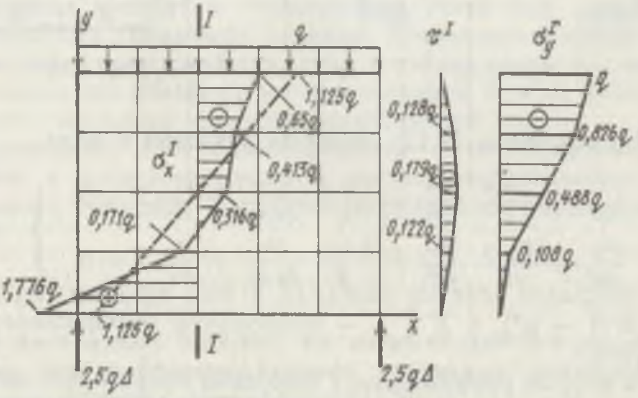


Рис. 8.13

должна быть равна нулю. По формуле трапеций найдем

$$N^{\mathrm{I}} = \Delta\left(\frac{-0,65}{2} - 0,413 - 0,316 + 0,171 + \frac{1,776}{2}\right)q = 0.$$

Аналогично найдем, что площадь эпюры σ_y^{II} (рис. 8.14) равна $N^{\mathrm{II}} = - 5\ q\Delta$. Однако проверка напряжений по условиям равновесия лишь необходимое, но не достаточное условие их правильности. Как мы знаем, произвольная функция φ дает при применении формул(8.19) равновесное поле напряжений. Поэтому эти условия не могут проверить справедливость найденных φ. Достаточной проверкой может служить лишь проверка совместности деформаций в форме третьего уравнения (4.17)

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

которую можно выполнить при найденном поле напряжений с помощью оператора Лапласа (см. рис. 8.4).

Решение плоской задачи проводят также и в перемещениях, определяемых для изотропной пластины из двух дифференциальных

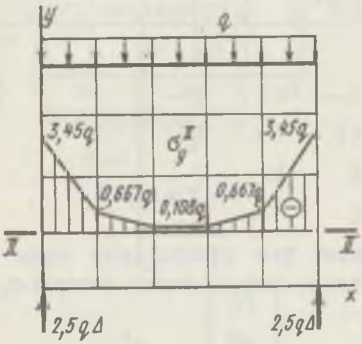


Рис. 8.14

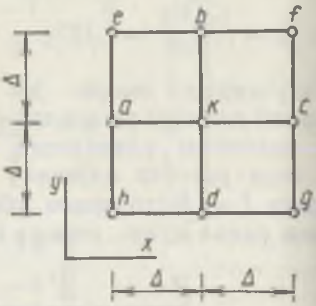


Рис. 8.15

уравнений равновесия (4.12), которые напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{E_1}X = 0; \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{E_1}Y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

где $E_1 = E/(1 - \mu^2)$, а X и Y — компоненты интенсивности объемной нагрузки.

Записав вторые производные с помощью операторов, показанных на рис. 8.4 и 8.6, приведем уравнения (8.20) к конечно-разностной форме для узла k (рис. 8.15):

$$\left.\begin{aligned} &8(3-\mu)u_k - 8(u_a + u_c) - 4(1-\mu)(u_b + u_d) + \\ &+ (1+\mu)(v_h + v_f - v_e - v_g) - \frac{8\Delta^2}{E_1}X_k = 0; \\ &8(3-\mu)v_k - 8(v_b + v_d) - 4(1-\mu)(v_a + v_c) + \\ &+ (1+\mu)(u_h + u_f - u_e - u_g) - \frac{8\Delta^2}{E_1}Y_k = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.21)$$

Для каждого узла сетки с неизвестными перемещениями u и v в общем случае составляется пара уравнений (8.21). На границе пластины часть узлов могут быть закреплены или для них заданы перемещения. В таких точках формулируются кинематические граничные условия, т. е. узловые граничные перемещения приравниваются заданным. В точках, где на границе заданы напряжения, формулируются силовые граничные условия. Для этого используются операторы для напряжений

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_k = E_1\frac{u_c-u_a+\mu(v_b-v_d)}{2\Delta}; \\ \sigma_y &= E_1\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_k = E_1\frac{v_b-v_d+\mu(u_c-u_a)}{2\Delta}; \\ \tau &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_k = G\frac{u_b-u_d+v_c-v_a}{2\Delta}. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

С помощью равенств (8.22), например, на границе $x = \mathrm{const}$ составляются условия $\sigma_x = p_x$, $\tau = p_y$, где p_x, p_y — интенсивность заданной поверхностной нагрузки. Как и в решении с помощью функции напряжений, приходится рассматривать вспомогательные законтурные узлы сетки. После решения системы линейных уравнений и определения узловых перемещений по формулам (8.22) вычисляется поле напряжений в пластине.

Преимущество решения в перемещениях по сравнению с решением в напряжениях состоит в возможности учета как силовых, так и кинематических граничных условий. Недостатком является более высокий порядок уравнений при одной и той же сетке, так как в каждом узле имеем два неизвестных перемещения u_k и v_k вместо одного неизвестного значения функции напряжений φ_k.

В современных программах решение в перемещениях обычно реализуется в конечно-разностной форме, получаемой на основе вариационного принципа Лагранжа (вариационно-разностный метод) (см. § 8.5).

§ 8.4. ПРИМЕНЕНИЕ МКР В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Расчет изотропных пластин на изгиб сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия (6.12) относительно функции прогибов $w(x, y)$:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \tag{8.23}$$

Как и в плоской задаче, пластину покрываем квадратной сеткой с шагом Δ и для каждого k-го узла, в котором $w_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, N$), составляем с использованием бигармонического оператора (8.12) конечно-разностный аналог уравнения (8.23):

$$(\nabla^2\nabla^2 w)_k = \frac{q_k}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{8.24}$$

где q_k — средняя нагрузка на площади $\Delta \times \Delta$, окружающей узел k. Если в узле приложена сосредоточенная сила P_k, то $q_k = P_k/\Delta^2$. К уравнениям (8.24) надо присоединить граничные условия.

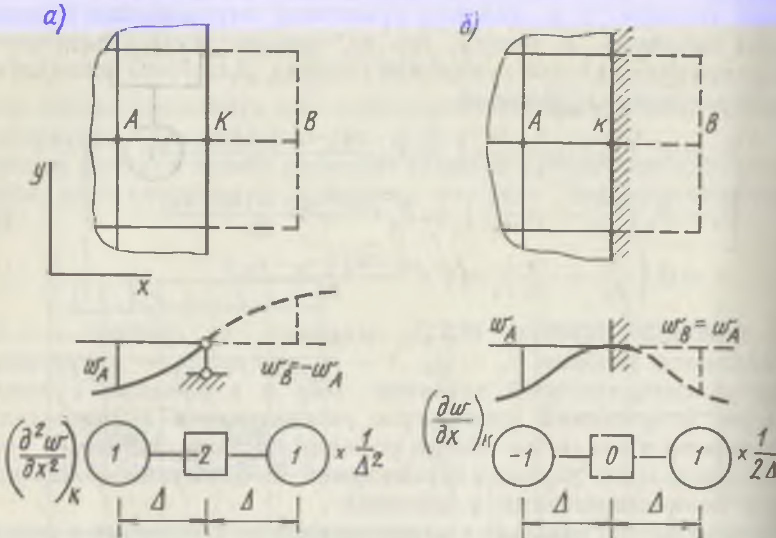


Рис. 8.16

Рассмотрим характерные случаи для кромки $x = \text{const}$.

1. Шарнирно-опертый край (рис. 8.16, *а*). В точке K имеем $w_K = 0$ и, согласно (6.15), $(\partial^2 w/\partial x^2)_K = 0$, что с применением оператора второй производной (см. рис. 8.4) дает

$$\frac{w_A - 2w_K + w_B}{\Delta^2} = 0.$$

Отсюда получаем, что $w_B = -w_A$.

2. Заделанный край (рис. 8.16, *б*). Аналогично имеем $w_K = 0$, а из условия $(\partial w/\partial x)_K = 0$ с помощью оператора первой производной(см. рис. 8.1, *б* получим $(w_B - w_A)/2\Delta = 0$, откуда $w_B = w_A$.

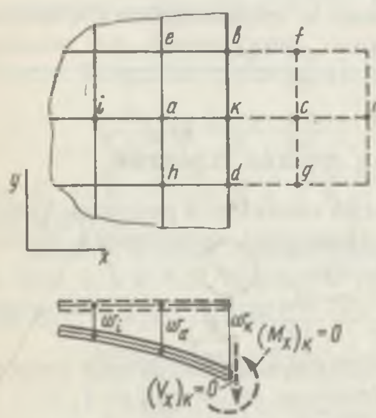


Рис. 8.17

3. Свободная кромка (рис. 8.17). В § 6.6 показано, что в этом случае составляются два силовых условия: $M_x = 0$ и $V_x = 0$. Используя приводимые ниже операторы усилий (рис. 8.18 и 8.20), эти два

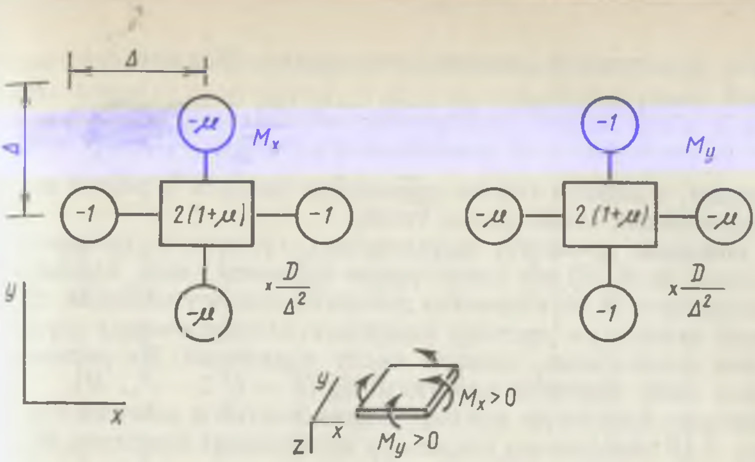


Рис. 8.18

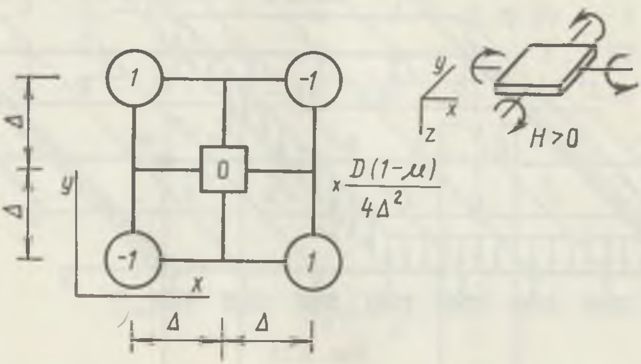


Рис. 8.19

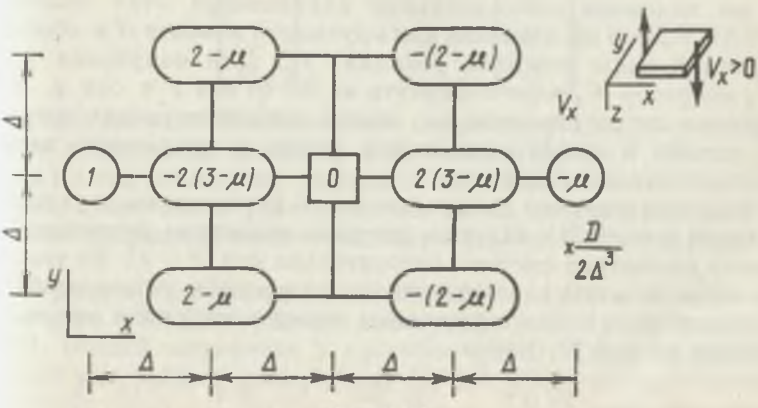


Рис. 8.20

условия для точки k, лежащей на кромке, запишем так:

$$2\,(1+\mu)\,w_k - w_a - w_c - \mu\,(w_b + w_d) = 0;$$

$$2\,(3-\mu)\,(w_c - w_a) + (2-\mu)\,(w_e + w_h - w_f - w_g) + w_i - w_m = 0.$$

Как видим, в данном случае приходится вводить в расчет два слоя вспомогательных законтурных точек.

С помощью равенств, выражающих граничные условия, либо исключают из (8.24) все законтурные ординаты, либо присоединяют эти равенства к (8.24) в качестве дополнительных уравнений. В целом это дает замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равным числу уравнений. Их решение дает числовое поле прогибов пластины w_k ($k = 1, 2, \ldots, N$).

Приведем операторы для внутренних усилий и реакций пластины. На рис. 8.18 изображены операторы изгибающих моментов M_x и M_y.

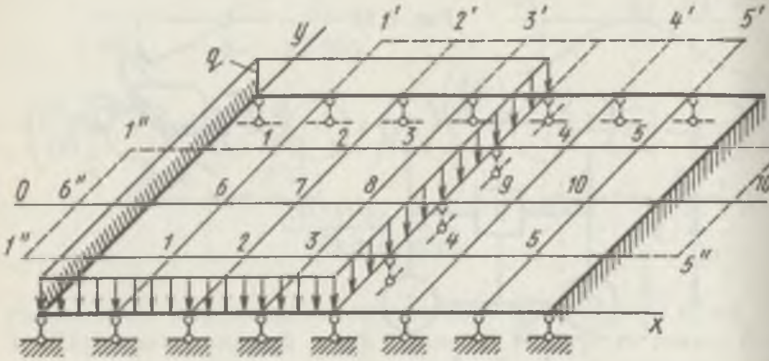


Рис. 8.21

Там же показаны положительные направления этих усилий. На рис. 8.19, 8.20 то же показано для крутящего момента H и обобщенной поперечной силы (опорной реакции) V_x. Для получения оператора V_y оператор V_x надо повернуть на 90° от оси x к оси y. Все эти операторы легко строятся на основе соответствующих выражений этих усилий в дифференциальной форме и операторов входящих в них частных производных.

Рассмотрим пример расчета на изгиб неразрезной двухпролетной пластины (рис. 8.21). На этом рисунке приведена нумерация узлов с учетом симметрии системы относительно оси $O - O$. Во всех узлах на контуре, а также вдоль линии $x = 4\Delta$ прогибы равны нулю. В законтурных узлах для заделанных краев и шарнирно опертого края (с учетом рис. 8.16) имеем

$$\left.\begin{aligned} &w_{1''} = w_1;\ w_{6''} = w_6;\ w_{5''} = w_5;\ w_{10''} = w_{10};\\ &w_{1'} = -w_1;\ w_{2'} = -w_2;\ w_{3'} = -w_3. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Узловые нагрузки на правом поле пластины $q_4 = q_5 = q_9 = q_{10} = 0$, а на левом — $q_1 = q_2 = q_3 = q_6 = q_7 = q_9 = q = \text{const}$. Используя оператор (8.12), составляем уравнения (8.24) для точек $1, 2, \ldots, 10$, которые с учетом (а) получат вид

$$\mathbf{R}\vec{w} = \vec{R}_q, \tag{8.25}$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & -8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 21 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ -16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -16 & 4 & 0 & 0 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 1 & -8 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 21 \end{bmatrix};$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{10} \end{bmatrix}; \qquad \vec{R}_q = \frac{q\Delta^4}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\mathbf{R}$ может быть симметризована, если ее строки (вместе со свободными членами), отвечающие точкам $6, 7, \ldots, 10$, лежащим на оси симметрии, разделить на 2. При наличии двух осей симметрии в системе и узловой точки на их пересечении для симметризации матрицы $\mathbf{R}$ соответствующую строку пришлось бы делить на 4.

После решения системы уравнений (8.25) получаем числовое поле прогибов (рис. 8.22). Поверхность изогнутой пластины изображена на рис. 8.23. Общий множитель у прогибов $q\Delta^4/D$. Теперь с помощью операторов внутренних усилий (рис. 8.18, 8.19) могут быть вычислены моменты в пластине. На рис. 8.24 для $\mu = 0{,}25$ показаны изгибающие моменты M_x, а на рис. 8.25 — крутящие моменты H. Обратим

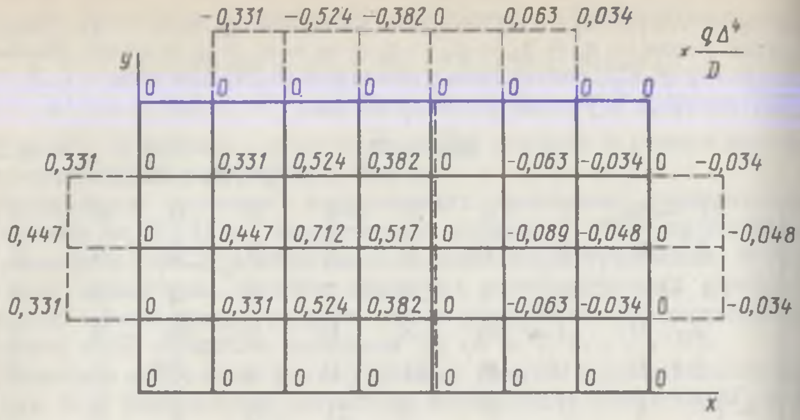


Рис. 8.22

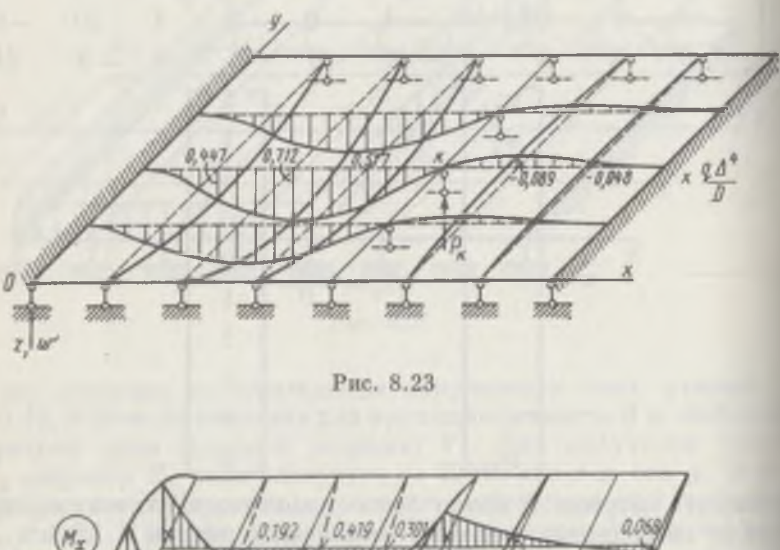


Рис. 8.23

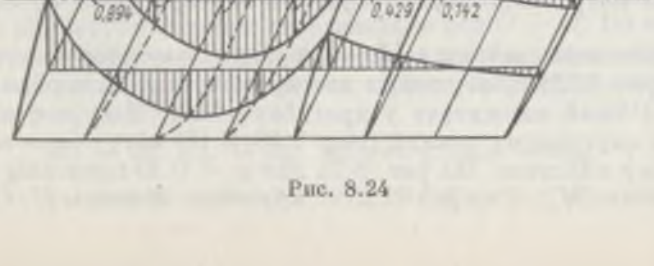


Рис. 8.24

внимание на то, что если графики первых являются симметричными кривыми относительно оси симметрии системы, то графики крутящих моментов антисимметричны.

Найдем опорную реакцию P_k в узле k, лежащем на оси симметрии $0 - O$ (см. рис. 8.23). Для этого наложим оператор $\nabla^2\nabla^2 w$ на эту точку и составим уравнение $(\nabla^2\nabla^2 w)_k = P_k/(\Delta^2 D)$, что дает

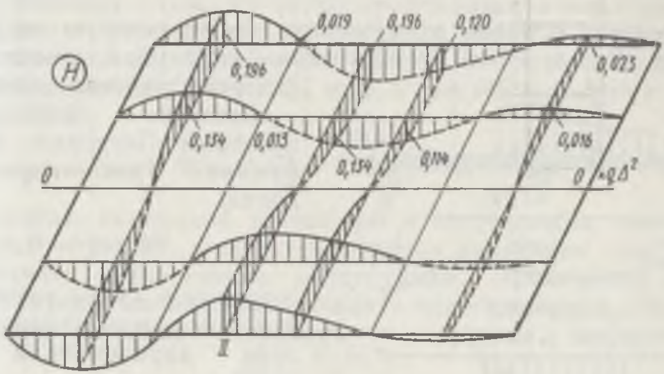


Рис. 8.25

$[-8\ (0{,}517-0{,}089) + 2\ (0{,}382 + 0{,}382 - 0{,}063 - 0{,}063) + 0{,}712 - 0{,}048)]\ q/D = P_k/(\Delta^2 D)$. Отсюда $P_k = -1{,}484\ q\Delta^2$. Знак минус говорит о том, что эта сила, как внешняя для пластины, направлена вверх.

§ 8.5. ПОНЯТИЕ О ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ

В гл. 3 было показано, что задачи теории упругости допускают как дифференциальную формулировку, так и вариационную об отыскании таких функций, которые сообщают некоторому функционалу $Э$ стационарное значение, когда вариация $\delta Э = 0$. В связи с применением ЭВМ в решении сложных задач прикладной теории упругости в последние два-три десятилетия было установлено, что конечно-разностные аппроксимации во многих случаях предпочтительнее сочетать именно с вариационной постановкой задачи. Это позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета, избежать вывода дифференциальных уравнений в сложных случаях, упрощает формулировку граничных условий [1,5].

Покажем идею этого метода на примере изгиба балки переменной жесткости $EJ = EJ\ (x)$ (рис. 8.26). Дифференциальное уравнение изгиба такой балки хорошо известно:

$$(v''EJ)'' - q = v^{IV}EJ + 2v'''\ (EJ)' + v''\ (EJ)'' - q = 0. \qquad (8.26)$$

Но вместо построения конечно-разностного оператора непосредственно для этого дифференциального уравнения, составим функционал потенциальной энергии $Э$ балки, выраженный через прогибы v (см. § 3.2):

$$Э=\frac{1}{2}\int\limits_0^l (v'')^2\, EJ\, \mathrm{d}x-\int\limits_0^l qv\,\mathrm{d}x+M_l v_l'-M_0 v_0'+Q_0 v_0-Q_l v_l. \qquad (8.27)$$

Здесь первое слагаемое представляет потенциальную энергию деформации балки, а все последующие — потенциал внешних сил, включая краевые воздействия.

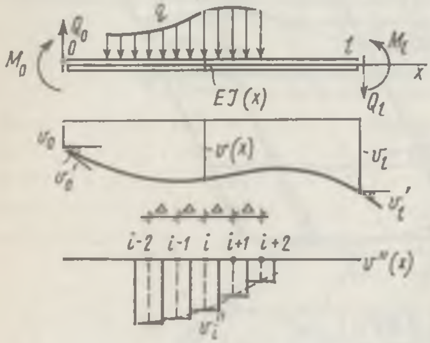


Рис. 8.26

Согласно вариационному принципу Лагранжа, истинная функция удовлетворяет уравнению

$$\delta Э\,(v)=0. \qquad (8.28)$$

Уравнение (8.26) служит дифференциальным уравнением Эйлера вариационной задачи (8.28).

В вариационно-разностном методе интегрирование в (8.27) выполняют по приближенной формуле прямоугольников, заменяя кривые v'' и v ступенчатыми линиями (рис. 8.26). Это преобразует функционал (8.27) в сумму:

$$Э=\frac{1}{2}\sum_i (v_i'')^2\, EJ_i\Delta-\sum_i q_i v_i\Delta+\sum\nolimits_{\text{кр}}, \qquad (8.29)$$

где последнее слагаемое символически обозначает сумму членов, соответствующих краевым воздействиям. Теперь производные v_i'' заменим их центральными конечно-разностными выражениями

$$v_i''=\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{\Delta^2}, \qquad (8.30)$$

что превращает (8.29) — в функцию узловых ординат v_i

$$Э=Э\,(v_i),$$

а вариационное условие (8.28) — в систему уравнений

$$\frac{\partial Э}{\partial v_i}=0, \quad i=1,\,2,\,\ldots\,N. \qquad (8.31)$$

Так, для внутреннего i-го узла сетки в данном случае будем иметь

$$\frac{\partial Э}{\partial v_i}=\left(EJ_{i-1}v_{i-1}''\frac{\partial v_{i-1}''}{\partial v_i}+EJ_i v_i''\frac{\partial v_i''}{\partial v_i}+EJ_{i+1}v_{i+1}''\frac{\partial v_{i+1}''}{\partial v_i}\right)\Delta-q_i\Delta=0.$$

Учитывая выражение (8.30) для v_i'' и аналогичные формулы для соседних точек, полученное равенство приведем к виду

$$EJ_{i-1}v_{i-2} - 2\,(EJ_{i-1} + EJ_i)v_{i-1} + (EJ_{i-1} + \\ + 4EJ_i + EJ_{i+1})\,v_i - 2\,(EJ_{i+1} + EJ_i)\,v_{i+1} + \\ + EJ_{i+1}v_{i+2} - q_i\Delta^4 = 0. \qquad (8.32)$$

Можно убедиться в том, что (8.32) представляет конечно-разностный аналог для i-го узла сетки с равномерным шагом Δ дифференциального оператора (8.26). В частности, при $EJ = \text{const}$ (8.32) превращается в уравнение (а) (см. § 8.2), если в нем v^{IV} записать с помощью оператора (8.6):

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q_i\Delta^4}{EJ}.$$

С помощью описанной процедуры в современных программных комплексах строятся конечно-разностные уравнения для решения задач расчета тонкостенных конструкций. Применение непрямоугольных сеток позволяет рассчитывать пластинчатые и оболочечные конструкции сложных очертаний, с вырезами, подкреплениями и т. п.

§ 8.6. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Этот метод позволяет получить в отличие от МКР не числового а аналитическое приближенное решение краевой задачи для данного дифференциального уравнения. Его идея была высказана кораблестроителем проф. И. Г. Бубновым в отзыве на работы С. П. Тимошенко, опубликованном в 1913 г. Независимо от него этот метод в 1915 г. был широко использован академиком Б.Г. Галеркиным в решении задач прикладной теории упругости.

С формально-математической точки зрения этот метод состоит в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L\,(w) = 0, \qquad (8.33)$$

где $w = w\,(x,\ y)$ — искомая функция, которую для определенности считаем зависящей от двух аргументов: x, y. Символом L обозначен дифференциальный оператор уравнения. Например, для изгиба пластин

$$L\,(w) = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - q\,(x,\ y). \qquad (8.34)$$

Зададим w в виде суммы:

$$w = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j\,(x,\ y), \qquad (8.35)$$

где α_j — неизвестные постоянные множители, подлежащие определению; $f_j\,(x,\ y)$ — функции, которые задаем так, чтобы они удовлетворяли всем (кинематическим и силовым) граничным условиям. Их называют базисными или координатными функциями.

При подстановке w в уравнение (8.33) в общем случае мы не получим тождественного нуля, т. е. $L(w) \neq 0$. В каждой точке x, y области интегрирования A величина $L(w)$ будет иметь свое значение вместо требуемого по (8.33) нуля. Ее называют *функцией-ошибкой*. Если бы $L(w)$ был точный ноль, то функция $L(w)$ была бы ортогональна к любой функции $F(x, y)$ в области A, т. е.

$$\iint_A L(w)\, F(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0. \tag{8.36}$$

Не имея такой возможности, но стремясь к минимальной величине функции-ошибки, потребуем, чтобы она была ортогональна к каждой из базисных функций f_i:

$$\iint_A L(w)\, f_i(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots N. \tag{8.37}$$

Для линейного дифференциального уравнения (8.33) $L(w) = \sum_j \alpha_j L(f_j)$. Поэтому после подстановки (8.35) в (8.37) и замены интеграла от суммы суммой интегралов, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1N}\alpha_N + b_1 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}\alpha_1 + a_{N2}\alpha_2 + \ldots + a_{NN}\alpha_N + b_N = 0, \end{array}\right\} \tag{8.38}$$

где

$$a_{ij} = \iint_A L^*(f_j)\, f_i\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \tag{8.39}$$

$$b_i = \iint_A L^0(x, y)\, f_i\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \tag{8.40}$$

L^0 — свободные члены оператора L [например, в (8.34) $L^0 = q(x, y)$]; L^* — оператор L, за исключением свободных членов, т. е. $L^* = L - L^0$.

Решение системы уравнений (8.38) и дает искомые коэффициенты разложения α_j (8.35). Если уравнение (8.33) нелинейное, то и система уравнений (8.37) относительно α_j будет также нелинейной.

Уравнениям (8.37) данного метода можно дать вариационную трактовку, если задача, описываемая исходным дифференциальным уравнением (8.33), допускает вариационную формулировку. Пусть это будет задача изгиба пластины. Тогда $L(w)$ в (8.34) можно написать в виде двух слагаемых:

$$L(w) = q_1 - q = 0, \tag{8.41}$$

где $q_1 = D\nabla^2\nabla^2 w$ — интенсивность упругого отпора изогнутой пластины, с которым она противодействует внешней нагрузке q в данной точке (рис. 8.27).

Как известно, уравнение Софи Жермен — Лагранжа как раз выражает условие равновесия элемента пластины $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, что и подчеркивается записью (8.41). Следовательно, $L(w)$ — это интенсивность неуравновешенной суммарной нагрузки, возникающей по области интегрирования A (площади пластины) при задании прогибов в виде суммы (8.35). Удержание N членов в нем означает, что действительную систему заменили системой с N степенями свободы, в которой α_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — это обобщенные перемещения, каждому из которых отвечает деформированное состояние, определяемое функцией $f_i(x, y)$. Для того чтобы дискретная система находилась в равновесии по принципу Лагранжа, надо, чтобы работа всех элементарных сил системы, т. е. $L(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, на каждом из возможных перемещений, т. е. $\delta\alpha_i f_i(x, y)$, была равна нулю:

$$\delta A_i = \delta\alpha_i \iint_A L(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f_i(x, y) = 0, \tag{8.42}$$

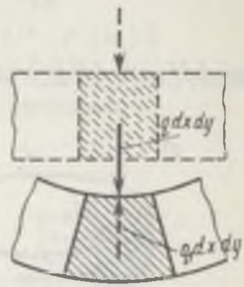


Рис. 8.27

что после отбрасывания произвольной вариации $\delta\alpha_i$ и дает уравнения (8.37).

Так как уравнения (8.37) метода Бубнова — Галеркина можно трактовать как выражение принципа возможных перемещений, то отсюда следует, что в этих уравнениях вместо множителя $f_i(x, y)$ в зависимости от смысла оператора $L(w)$ следует ставить какую-либо производную от f_i. Например, в дифференциальном уравнении изгиба балки второго порядка $v'' = -M/(EJ)$ оператор $L(v) = EJv'' + M$, по размерности представляет изгибающие моменты. Тогда, задав прогибы в виде $v = \sum_j^N \alpha_j f_j(x)$, надо в качестве множителя под интегралом типа (8.37) принять не f_i, а f_i'', имеющую размерность кривизны, так чтобы произведение $L(v)\,f_i''\mathrm{d}\,x$ давало элементарную работу, и уравнения Бубнова — Галеркина получат вид

$$\int_0^l L(v)\, f_i''\,\mathrm{d}x = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Опыт показывает, что такой подход обеспечивает бóльшую точность при удержании одного и того же числа членов ряда.

Вариационная трактовка метода позволяет обосновать так называемый обобщенный метод Бубнова — Галеркина. Пусть базисные функции f_i в отличие от (8.35) удовлетворяют всем кинематическим граничным условиям, но не удовлетворяют силовым условиям. Это значит, что если в действительности, например, внутренние усилия на контуре пластины M_n и V_n, где n — нормаль к контуру (рис. 8.28, *а*, *б*), равны нулю, то изгиб пластины по поверхности $f_i(x, y)$ может вызвать появление некоторых усилий $M_{ni} \neq 0$ и $V_{ni} \neq 0$. Тогда из вариационного условия $\delta A_i = 0$ вместо (8.37) следуют уравнения

$$\iint_A L(w) f_i(x, y)\,dx\,dy - A_i^{\text{конт}} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{8.43}$$

где $A_i^{\text{конт}}$ — работа сил на границе области интегрирования на перемещениях $f_i(x, y)$. Для изгиба пластины это будет

$$A_i^{\text{конт}} = \oint_S \Delta M_n \frac{\partial f_i}{\partial n}\,dS + \oint_S \Delta V_n f_i\,dS, \tag{8.44}$$

где ΔM_n и ΔV_n — неуравновешенные части момента и поперечной

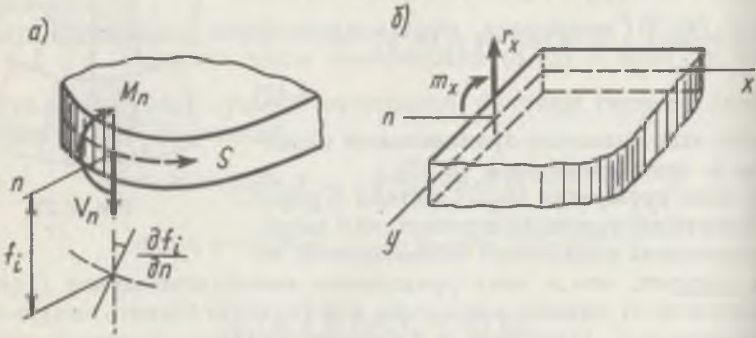


Рис. 8.28

силы на контуре при прогибе пластины по поверхности w. Так, например, на кромке $x = 0$ (рис. 8.28, *б*)

$$\left.\begin{aligned} \Delta M_x &= m_x - \left[-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}\right)\right]; \\ \Delta V_x &= r_x - \left[-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

где m_x и r_x — интенсивности внешней нагрузки, приложенной к кромке.

Приведем простейший пример (рис. 8.29, *а*). Стержень растянут силой P. Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях имеет вид

$$L(u) = u''EA + q = 0, \tag{8.46}$$

где в данном случае $q = 0$.

Пусть $u = \alpha_1 f_1(x)$, где $f_1(x) = x$. Если не учесть работу контурной нагрузки, то уравнение Бубнова — Галеркина

$$\int_0^l L(u) f_1 \, dx = 0 \tag{8.47}$$

в данном случае непосредственно неприменимо, так как оператор L при дифференцировании u вырождается в ноль. Поэтому здесь необходимо использовать уравнение обобщенного метода

$$\int_0^l L(u) f_1 \, dx - A_1^{\text{конт}} = 0. \tag{8.48}$$

Величину $A_1^{\text{конт}}$ получим по рис. 8.29, *б*:

$$A_1^{\text{конт}} = [P - N(l)] f_1(l) = [P - EA\, u'(l)] f_1(l) = (P - EA\alpha_1)\, l.$$

Уравнение (8.48) дает $P - EA\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = P/(EA)$. Полученное выражение $u = Px/(EA)$ совпадает с точным решением.

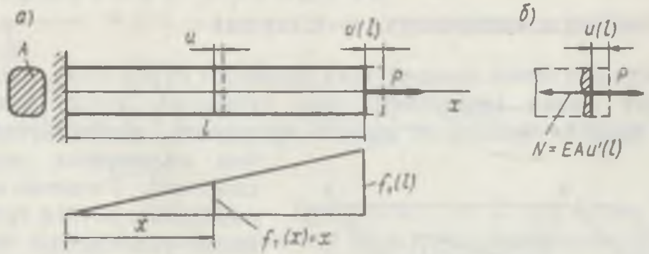


Рис. 8.29

Приведем еще пример. Шарнирно опертая прямоугольная пластина $a \times b$ загружена нагрузкой $q = q(x, y)$. В (8.35) в качестве i-й базисной функции примем

$$f_i = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

которая удовлетворяет всем условиям на контуре и дает невырожденный оператор $L(w)$. Поэтому применим уравнения (8.37) метода Бубнова — Галеркина.

Учитывая, что $L^* = D\nabla^2\nabla^2 w$, а $L^0 = q(x, y)$, по формулам (8.39) и (8.40) найдем

$$\left.\begin{aligned} & a_{ij} = 0, \ i \neq j; \ a_{ii} = \pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\frac{ab}{4}; \\ & b_i = \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \, dx\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

Система (8.38) распадается на отдельные уравнения, из которых получим

$$\alpha_i = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2},$$

где $q_{mn} = (4/ab)\, b_i$. Как видно, α_i в точности совпадает с выражением для амплитуды прогибов w_{mn} (6.50), полученным в § 6.9 в двойных тригонометрических рядах. При других базисных функциях и граничных условиях система уравнений (8.38) не распадается.

Чаще всего метод Бубнова — Галеркина используется как вспомогательный прием, который позволяет достаточно просто получить в аналитической форме приближенное описание деформации отдельного элемента конструкции при одном или нескольких первых членах ряда (8.35). Эти выражения затем могут использоваться в других исследованиях. Хотя описание метода велось на примере двумерной области интегрирования A, но он, естественно, применим и для одномерных, и для трехмерных задач. Он применим также и к системам дифференциальных уравнений.

§ 8.7. МЕТОД КАНТОРОВИЧА — ВЛАСОВА

Из опыта изучения предыдущих разделов курса ясно, что решение одномерных задач (например, для стержня), когда неизвестная функция зависит только от одного аргумента, существенно проще, чем двумерных задач (для пластин). Решение еще более осложняется для трехмерных задач (массивные тела). Поэтому среди приближенных методов существует ряд таких, в которых проблема более высокой мерности сводится к проблеме меньшего измерения, правда, как правило, ценою увеличения числа дифференциальных уравнений. Одним из таких методов и является метод, предложенный академиком Л. В. Канторовичем применительно к вариационной постановке краевых задач. Аналогичный подход развит чл.-корр. АН СССР В. З. Власовым для ее постановки в дифференциальной форме. Рассмотрим этот метод в форме В. З. Власова на примере задачи об изгибе прямоугольной пластины.

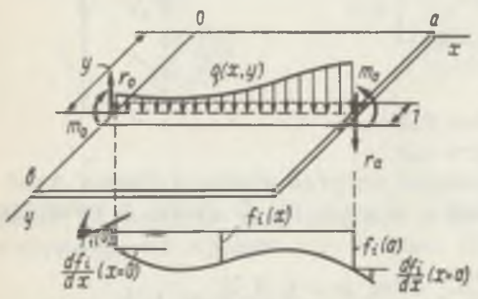


Рис. 8.30

Рассмотрим пластину, загруженную нагрузкой $q\,(x,\ y)$ и некоторыми усилиями на контуре m и r. На рис. 8.30 показана такая нагрузка, относящаяся к полоске единичной ширины. Закрепления на контуре считаем произвольными. Поверхность прогибов зададим в форме суммы:

$$w=\sum_{j=1}^{N} Y_j f_j(x), \tag{8.50}$$

где $Y_j = Y_j(y)$ — N неизвестных функций одного аргумента y, подлежащих определению; $f_j = f_j(x)$ — N базисных функций, которыми задаемся так, чтобы они на краях $x = 0$ и $x = a$ (по концам единичной полоски) удовлетворяли кинематическим, а при возможности и силовым граничным условиям.

Выражение (8.50) показывает, что пластину мы рассматриваем в направлении оси x как дискретную систему с N степенями свободы, каждая из которых характеризуется своей линией прогиба f_j, а в направлении оси y — как систему континуальную, обладающую бесконечным числом степеней свободы. Если сравнить (8.50) и (8.35), то можно сказать, что величины Y_j играют роль обобщенных перемещений, являющихся не константами, а одномерными функциями координаты y. Выражения $Y_j(y)$ называют обобщенными прогибами, а $f_j(x)$ — функциями поперечного распределения прогибов.

Подстановка (8.50) в левую часть уравнения изгиба пластины 8 .34) дает

$$L(w)=D\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j\frac{d^4 f_j}{dx^4}+2Y_j''\frac{d^2 f_j}{dx^2}+Y_j^{IV}f_j\right)-q(x,\ y). \tag{8.51}$$

Как и в методе Бубнова — Галеркина, на $L(w)$ будем смотреть как на некоторую функцию-ошибку или неуравновешенную нагрузку системы. Чтобы свести ее к минимуму, применим к произвольной единичной полоске, показанной на рис. 8.30, уравнения обобщенного метода Бубнова — Галеркина:

$$\int_0^a L(w) f_i(x)\,dx - A_i^{\text{конт}} = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{8.52}$$

где $A_i^{\text{конт}}$ — работа неуравновешенной части усилий в граничных сечениях полоски $x = 0$ и $x = a$ на перемещениях $Y_i f_i(x)$ при $Y_i = 1$. Учитывая (8.44) и (8.45), для $A_i^{\text{конт}}$ можно написать выражение

$$A_i^{\text{конт}}=\left(-\Delta M_x\frac{df_i}{dx}+\Delta V_x f_i\right)\Big|_0^a. \tag{8.53}$$

Система (8.52) представляет N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций Y_i. Если применить в (8.52) интегрирование по частям в отношении коэффициента при Y_j (8.51) дважды, а у Y_j'' — один раз, то с учетом (8.53) эта система может быть приведена к следующей симметричной форме:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}Y_j^{\mathrm{IV}}-2b_{ij}Y_j''+c_{ij}Y_j\right)-\frac{G_i}{D}=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\tag{8.54}$$

где

$$a_{ij}=a_{ji}=\int_0^a f_if_j\,\mathrm{d}x;\quad c_{ij}=c_{ji}=\int_0^a f_i''f_j''\,\mathrm{d}x;$$

$$b_{ij}=b_{ji}=\int_0^a f_i'f_j'\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mu\left(f_if_j''+f_i''f_j\right)\Big|_0^a;$$

$$G_i=\int_0^a q(x,\ y)\,f_i\,\mathrm{d}x+\left(rf_i-mf_i'\right)\Big|_0^a.$$

Здесь штрихами при Y обозначено дифференцирование по y, а при f — по x.

Заметим, что В. З. Власовым помимо изложенного пути подробно разработан и другой путь получения уравнений (8.54), а именно путем непосредственного применения принципа возможных перемещений к полоске шириной dy, выделенной из пластины и загруженной на кромках и в угловых точках соответствующими усилиями. Он не требует использования дифференциального уравнения изгиба пластины (8.34). Эти вопросы им подробно развиты и для решения плоской задачи, а также для расчета пластинчатых систем и оболочек [7].

Граничные условия на кромках пластины $x=0$, $x=a$ учитываются при выборе функций $f_j(x)$. На кромках $y=0$, $y=b$ они должны быть учтены при решении системы (8.54). 4 N граничных условия формулируются с привлечением принципа возможных перемещений. Это приводит к понятиям обобщенных перемещений — прогибов Y_jf_j и углов поворота $Y_j'f_j$ ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ N$) и соответствующих им обобщенных усилий в сечении. Последние представляют собой работу всех сил в сечении $y=0$, b на указанных обобщенных перемещениях. С помощью обобщенных перемещений и усилий и составляются упомянутые $4N$ граничных условия.

Если считать, что пластина на краях $x=0$ и $x=a$ шарнирно оперта, и принять в качестве $f_j=\sin\frac{j\pi x}{a}$, то система (8.54) распадается на отдельные уравнения:

$$Y_j^{\mathrm{IV}}-2\frac{j^2\pi^2}{a^2}Y_j''+\frac{j^4\pi^4}{a^4}Y_j-\frac{q_j}{D}=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

где

$$q_j=\frac{2}{a}\int_0^a q(x,\ y)\sin\frac{j\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Это уравнение и последующее его решение совпадают с уравнением (6.60) и решением М. Леви в одинарных рядах, приведенных в § 6.10.

Как видим, метод Канторовича — Власова позволяет свести двумерную (а в общем случае и трехмерную) краевую задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа (8.54). Для ее решения в современной вычислительной математике существует ряд эффективных методов. Укажем, например, на метод ортогональной прогонки С. Г. Годунова (см. [20]) и на интерполяционный метод [2, с. 429].

§ 8.8. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Метод конечных элементов является методом приближенного прямого отыскания неизвестных функций на основе какого-либо вариационного принципа. Зародившись в строительной механике, он получил широкое распространение в решении различных проблем

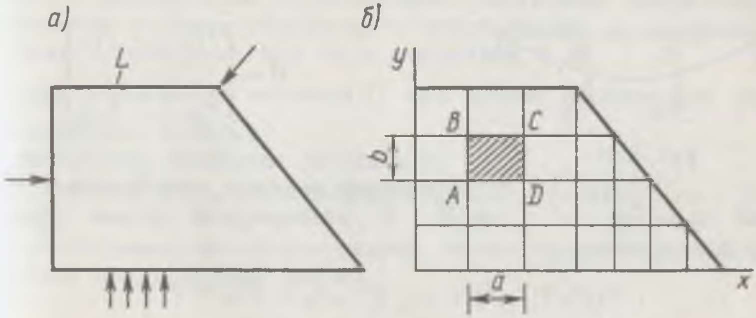


Рис. 8.31

математической физики — в задачах теплопроводности, гидро- и аэродинамики, фильтрации и других задачах физики сплошных сред. Он имеет достаточно широкую математическую трактовку. Здесь мы ограничимся знакомством с этим методом с позиций, наиболее близких к строительной механике.

За три десятилетия существования и развития этого метода наиболее развитой оказалась та его разновидность, когда решение ведется в перемещениях. Она связана с вариационным принципом Лагранжа и может быть истолкована как усовершенствованная модификация метода Ритца.

Рассмотрим эти вопросы на примере решения плоской задачи для пластины, нагруженной в ее плоскости (рис. 8.31, *а*).

Согласно методу Ритца, перемещения u и v задаются в виде сумм:

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i f_{ui}(x,\ y);\quad v=\sum_{i=1}^{n} a_i f_{vi}(x,\ y), \tag{8.55}$$

где α_i — обобщенные перемещения (числа), подлежащие определению; f_i — базисные функции, которыми задаемся в пределах площади пластины.

В § 3.5 показано, что α_i находятся из уравнений

$$\frac{\partial Э}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial П}{\partial \alpha_i} = S_i + R_{iP} = 0, \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{8.56}$$

выражающих условия равновесия в виде равенства нулю суммарной обобщенной силы, отвечающей каждому обобщенному перемещению α_i.

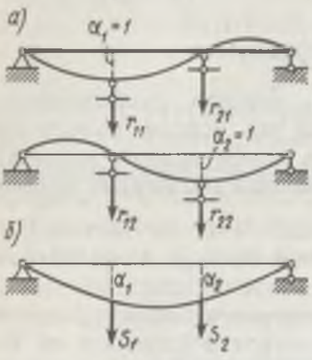


Рис. 8.32

В линейно-деформируемой системе вектор обобщенных сил упругости $\vec{S}$ выражается через обобщенные перемещения $\vec{\alpha}$ с помощью матрицы $\mathbf{R}$:

$$\vec{S} = \mathbf{R}\,\vec{\alpha}, \tag{8.57}$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ r_{n1} & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.58}$$

называется матрицей жесткости, отвечающей вектору обобщенных перемещений $\vec{\alpha} = [\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n]^т$. В развернутой форме уравнения (8.56) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} r_{11}\alpha_1 + r_{12}\alpha_2 + \ldots + r_{1n}\alpha_n + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}\alpha_1 + r_{22}\alpha_2 + \ldots + r_{2n}\alpha_n + R_{2P} &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_{n1}\alpha_1 + r_{n2}\alpha_2 + \ldots + r_{nn}\alpha_n + R_{nP} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

или в матричной записи

$$\mathbf{R}\vec{\alpha} + \vec{R}_p = 0. \tag{8.60}$$

Из решения этих уравнений и определяются искомые обобщенные перемещения α_i.

Остановимся подробнее на понятиях матрицы жесткости $\mathbf{R}$ и обобщенной упругой силы S_i. На рис. 8.32, *а* элементы матрицы проиллюстрированы на примере балки, в которой в качестве обобщенных перемещений приняты прогибы α_1 и α_2. Силы S_1 и S_2 связаны с ними соотношением (рис. 8.32, *б*)

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}\alpha_1 + r_{12}\alpha_2 \\ r_{21}\alpha_1 + r_{22}\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь, например, первый столбец матрицы $\mathbf{R}$ есть силы S, изображенные на рис. 8.32, *а* как реакции в условных опорах при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$. Таким образом, элемент r_{ij} матрицы $\mathbf{R}$ выражает влияние перемещения $\alpha_j = 1$ на обобщенную упругую силу S_i, в общем случае равную

$$S_i = r_{i1}\alpha_1 + \ldots + r_{in}\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\alpha_j. \tag{8.61}$$

Подчеркнем, что понятие обобщенной силы имеет энергетическую природу и в общем случае величина S_i не обязательно представляет собой реальную силу, как это имело место в рассмотренной балке. Из формулы $S_i = \partial U/\partial\alpha_i$ следует, что $\partial U = S_i\partial\alpha_i = S_i\delta\alpha_i$. Это равенство говорит лишь о том, что произведение S_i на малое приращение $\delta\alpha_i$ должно быть равно изменению энергии деформации системы, численно равной работе всех сил упругости на деформациях системы, отвечающих перемещению $\delta\alpha_i$. Следовательно, в общем случае S_i может рассматриваться как некоторый условный силовой фактор, связанный с обобщенным перемещением указанным соотношением. В зависимости от вида обобщенного перемещения α_i величина S_i может быть истолкована как сила, момент и т. д.

Энергия деформации системы U как работа обобщенных сил $\vec{S}$ на перемещениях $\vec{\alpha}$ будет

$$U = \frac{1}{2}(S_1\alpha_1 + \ldots + S_n\alpha_n) = \frac{1}{2}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\vec{\alpha}. \tag{8.62}$$

Развернув это равенство, можно видеть, что оно представляет матричную запись квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\alpha_j\right)\alpha_i, \tag{8.63}$$

которой в (3.27) выражалась энергия деформации U. Выражение (8.62) используется в дальнейшем при получении общей формулы, служащей для построения матрицы жесткости $\mathbf{R}$, роль которой очень важна так как именно с ее помощью образуются разрешающие уравнения (8.59).

Трудность применения метода Ритца в описанном виде состоит в том, что для тела сложной формы, в том числе и в рассматриваемой пластине, очень сложно, практически невозможно, подобрать такую систему базисных функций $f_i(x, y)$ в равенствах (8.55), которая, будучи заданной на всем поле пластины с контуром L (см. рис. 8.31, *а*), позволяла бы учесть различные местные особенности ее напряженно-деформированного состояния. Метод конечных элементов (МКЭ) устраняет эту главную трудность.

Разобьем пластину сеткой на отдельные элементы конечных размеров, как это для примера показано на рис. 8.31, *б*. Поле перемещений u и v будем задавать отдельно в пределах каждого конечного элемента. В качестве обобщенных перемещений примем перемещения узловых точек элемента, которые принято вместо α_i обозначать Z_i. На рис. 8.33, *а* показаны восемь таких перемещений, полностью определяющих деформированное состояние некоторого элемента $ABCD$.

Поле перемещений элемента выразим через узловые перемещения в системе координат x' y', связанной с элементом (местной системе координат)

$$u=\sum_{i=1}^{i=8} Z_i N_{ui};\quad v=\sum_{i=1}^{i=8} Z_i N_{vi}, \tag{8.64}$$

где $N_{ui} = N_{ui}(x', y')$ и $N_{vi} = N_{vi}(x', y')$ — базисные функции, заданные в пределах элемента. Их строят так, чтобы в соответствую-

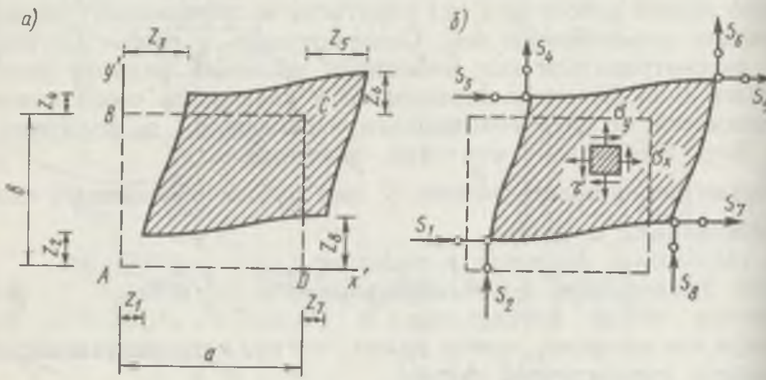


Рис. 8.33

щих узловых точках они имели значение, равное единице, а в остальных узлах обращались в ноль. В (8.64) множители Z_i приобретают смысл как бы амлитудного значения для соотвествующего слагаемого. Например, введем такие четыре функции (рис. 8.34):

$$\left.\begin{aligned} N_A&=(a-x')(b-y')/ab; & N_C&=x'y'/ab;\\ N_B&=(a-x')y'/ab; & N_D&=x'(b-y')/ab. \end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

Тогда выражения (8.64) могут быть записаны в соответствии с указанным свойством базисных функций так:

$$\left.\begin{aligned} u&=Z_1N_A+Z_3N_B+Z_5N_C+Z_7N_D;\\ v&=Z_2N_A+Z_4N_B+Z_6N_C+Z_8N_D. \end{aligned}\right\} \tag{8.66}$$

При таком задании перемещений энергия деформации рассматриваемого элемента будет полностью определяться его узловыми перемещениями $Z_1, \ldots, Z_8$. Поэтому, аналогично (8.57), для него можем написать соотношение между обобщенными силами упругости и перемещениями:

$$\vec{S} = R'\vec{Z}, \tag{8.67}$$

где

$\vec{S} = [S_1 S_2 \dots S_8]^{\text{т}}$;

$$\mathrm{R}' = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{18} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ r_{81} & \dots & r_{88} \end{bmatrix} \tag{8.68}$$

— матрица жесткости конечного элемента в местной системе координат.

Работа этих сил на перемещениях $\vec{Z}$, как подчеркивалось выше, равна работе внутренних сил упругости элемента при любых дефор-

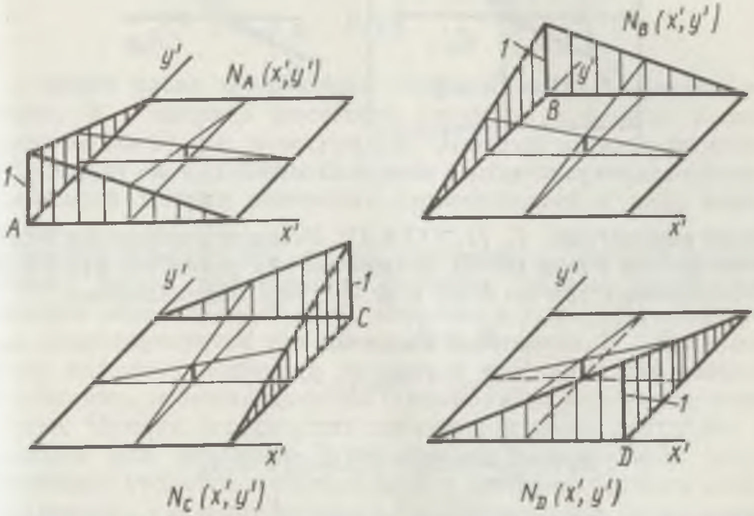


Рис. 8.34

мированных состояниях, определяемых перемещениями $\vec{Z}$. Следовательно, в данном случае обобщенные силы получают наглядное истолкование — их можно представить как сосредоточенные силы в узлах элемента так, чтобы они совершали работу на соответствующих узловых перемещениях Z (см. рис. 8.33, *б*).

Здесь необходимо сделать одно замечание. Из теоретической механики известно, что обобщенная сила равна производной от энергии по обобщенному перемещению с обратным знаком. В уравнениях Ритца (8.56) знак минус опущен и упругой силой названа сама производная $\partial U/\partial Z_i$. Такую силу надо рассматривать как силу, противоположно направленную силам упругости, т. е. уравновешивающую эти силы. Механически можно представить себе это так, как изображено на рис. 8.33, *б*. В узловые точки элемента введены связи, которым сообщили перемещения $Z_1, \ldots, Z_8$. Возникшие в связях реакции $S_1, \ldots, S_8$, уравновешивающие (в смысле равенства работ) упругие силы деформированного элемента, и есть то, что находится с помощью матрицы жесткости $\mathbf{R}'$ и соотношения (8.67). Заметим, что то же относится и к грузовому слагаемому R_{ip} в (8.56): R_{ip} — это реакция в i-й связи от внешней силы, приложенной в данном узле.

Рассмотрим теперь отдельный узел сетки конечных элементов, у которого перемещения будут Z_k и Z_{k+1} (рис. 8.35). Он окружен

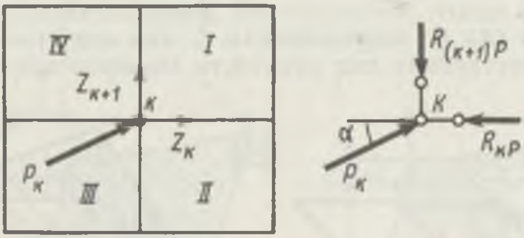


Рис. 8.35

четырьмя элементами: *I*, *II*, *III* и *IV*. Условие равновесия k-го узла, согласно методу Ритца (8.56), запишется как равенство нулю суммарных обобщенных сил по k-му и $(k+1)$-му направлениям:

$$\left.\begin{aligned} &S_k + R_{kP} = 0, \\ &S_{k+1} + R_{(k+1)P} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

где

$$S_k = \frac{\partial U}{\partial Z_k} = S_k^{\mathrm{I}} + S_k^{\mathrm{II}} + S_k^{\mathrm{III}} + S_k^{\mathrm{IV}}. \tag{8.70}$$

Аналогичное выражение будет и для S_{k+1}. Оно показывает, что в уравнения равновесия типа (8.69) войдут обобщенные упругие силы только от примыкающих к узлу конечных элементов. Это следует из механической модели обобщенных упругих сил, изображенной на рис. 8.33, *б*. Формально это можно доказать тем, что энергия деформации пластины равна сумме энергий отдельных элементов:

$$U = U^{\mathrm{I}} + U^{\mathrm{II}} + U^{\mathrm{III}} + U^{\mathrm{IV}} + \Delta U,$$

где через ΔU обозначена энергия всех остальных элементов, кроме *I*, . . ., *IV*. Согласно способу задания поля перемещений в элементе (8.64), можно утверждать, что ΔU не зависит от Z_k, и, следовательно, при подстановке U в (8.70) мы получим только четыре указанных там слагаемых.

Если для каждого из четырех примыкающих к k-му узлу элементов построена матрица жесткости $\mathbf{R}'_{\mathrm{I}}, \ldots, \mathbf{R}'_{\mathrm{IV}}$, то по равенству (8.67) вычисляем упругие силы $S_k^{\mathrm{I}}, \ldots, S_k^{\mathrm{IV}}$, и, суммируя их, составляем уравнения (8.69). Узловая внешняя сила P_k дает грузовые члены (как реакции в связях)

$$R_{kp} = -P_k \cos\alpha; \; R_{(k+1)p} = -P_k \sin\alpha.$$

В результате уравнения, выражающие равновесие всех узлов конечно-элементной системы, получат вид

$$\mathbf{R}\vec{Z} + \vec{R}_p = 0, \tag{8.71}$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & \ldots & R_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ R_{n1} & \ldots & R_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{bmatrix};$$

n — общее число неизвестных обобщенных перемещений в конструкции; $\mathbf{R}$ — матрица жесткости ансамбля конечных элементов, образующих заданную конструкцию. Каждый элемент ее строится как это следует из изложенного, путем соответствующего суммирования элементов матриц жесткости примыкающих к узлу конечных элементов.

Конечные элементы могут быть построены различной формы, для различных видов деформации (плоская задача, изгиб пластин, деформации элемента оболочки, стержня и т. д.). Каждый из элементов характеризуется его матрицей жесткости $\mathbf{R}'$. Если они построены, то метод конечных элементов позволяет по изложенной схеме создавать любые композиции (ансамбли) из различных конечных элементов. Причем определение деформированного состояния такой композиции или ансамбля (приближенно заменяющего реальную конструкцию) сводится к составлению и решению системы линейных алгебраических уравнений типа (8.71). В настоящее время существуют автоматизированные комплексы программ, позволяющие рассчитывать по методу конечных элементов очень сложные конструкции с числом неизвестных перемещений, соствляющим тысячи или даже десятки тысяч единиц. Он успешно также применяется в решении нелинейных задач и задач динамики деформируемых систем.

§ 8.9. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Общий порядок построения матрицы жесткости проследим на примере конечного элемента пластины, показанного на рис. 8.33, *а*, *б*. Толщину пластины обозначим δ.

Необходимо составить выражение потенциальной энергии деформации U, выразив его через вектор обобщенных узловых перемещений

$$\vec{Z} = [Z_1 \ldots Z\,]^{\text{т}}. \qquad (8.72)$$

Из § 3.2 имеем

$$U = \iiint\limits_V U_0 \, dx \, dy \, dz, \qquad (8.73)$$

где плотность энергии деформации для плоского напряженного состояния будет

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau\gamma_{xy}) = \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}^{\text{т}}\vec{\sigma}. \qquad (8.74)$$

Здесь

$$\vec{\varepsilon}^{\text{т}} = [\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}]; \quad \vec{\sigma} = [\sigma_x \sigma_y \tau]^{\text{т}}. \qquad (8.75)$$

Используя формулы Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (8.76)$$

и выражение для поля перемещений в элементе (8.66), найдем

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= Z_1 \frac{\partial N_A}{\partial x} + Z_3 \frac{\partial N_B}{\partial x} + Z_5 \frac{\partial N_C}{\partial x} + Z_7 \frac{\partial N_D}{\partial x};\\
\varepsilon_y &= Z_2 \frac{\partial N_A}{\partial y} + Z_4 \frac{\partial N_B}{\partial y} + Z_6 \frac{\partial N_C}{\partial y} + Z_8 \frac{\partial N_D}{\partial y};\\
\gamma_{xy} &= Z_1 \frac{\partial N_A}{\partial y} + Z_2 \frac{\partial N_A}{\partial x} + \ldots + Z_7 \frac{\partial N_D}{\partial y} + Z_8 \frac{\partial N_D}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.77)$$

В кратком виде эти равенства запишем так:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B}\vec{z}, \qquad (8.78)$$

где

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_A \,\vdots\, \mathbf{B}_B \,\vdots\, \mathbf{B}_C \,\vdots\, \mathbf{B}_D]; \ \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}; \quad i = A, B, C, D. \qquad (8.79)$$

Закон Гука в обратной форме (4.8) для плоского напряженного состояния дает соотношение

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \qquad (8.80)$$

где

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \qquad (8.81)$$

Следовательно,

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\vec{Z}. \qquad (8.82)$$

Учитывая, что $\vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}\vec{Z})^{\mathrm{T}} = \vec{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, подставив (8.82) и (8.78) в (8.74), получим

$$U_0 = \frac{1}{2}\,\vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\,\vec{Z}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B})\,\vec{Z}. \qquad (8.83)$$

Подставив (8.83) в (8.73), приведем выражение для энергии деформаций элемента к виду

$$U = \frac{1}{2}\,\vec{Z}^{\mathrm{T}}\left(\iiint_V \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\vec{Z}. \qquad (8.84)$$

Перепишем (8.62), заменив старое обозначение обобщенных перемещений $\vec{\alpha}$ на новое $\vec{Z}$, используемое в МКЭ:

$$U = \frac{1}{2}\,\vec{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\vec{Z}. \qquad (8.85)$$

Сравнивая (8.84) и (8.85), можем записать общее выражение для матрицы жесткости, отвечающей вектору перемещений $\vec{Z}$, в виде

$$\mathbf{R}' = \iiint_V \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \qquad (8.86)$$

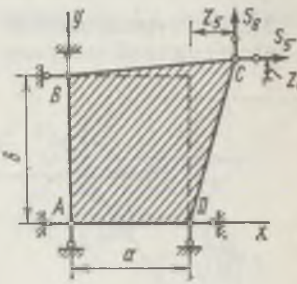


Рис. 8.36

Штрих у $\mathbf{R}$ подчеркивает, что матрица жесткости получена в местной системе координат, связанной с элементами. Штрихи у x и y в этом параграфе опущены.

Для пластины толщиной δ интеграл $\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathrm{d}z = \delta$ и вместо (8.86) можем написать

$$\mathbf{R}' = \delta \iint_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (8.87)$$

где A — площадь элемента $a \times b$.

Интегрирование в этих формулах ведется поэлементно. Число элементов матрицы зависит от числа обобщенных перемещений $\vec{Z}$. Чтобы проиллюстрировать это, построим матрицу жесткости в отношении двух перемещений Z_5 и Z_6 для элемента, показанного на рис. 8.36. Вектор $\vec{Z}$ имеет второй порядок:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix}. \qquad (8.88)$$

Матрица B, переводящая вектор $\vec{Z}$ в вектор деформаций $\vec{\varepsilon}$ по (8.79), состоит из одного блока $\mathbf{B}_C$, что с учетом (8.65) дает

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_C=\begin{bmatrix}\partial N_C/\partial x & 0\\ 0 & \partial N_C/\partial y\\ \partial N_C/\partial y & \partial N_C/\partial x\end{bmatrix}=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix}y & 0\\ 0 & x\\ x & y\end{bmatrix}. \tag{8.89}$$

Подставив (8.89) и (8.81) в (8.87), получим

$$\mathbf{R}'=\frac{E\delta}{ab\,(1-\mu^2)}\int_0^b\int_0^a\begin{bmatrix}y & 0 & x\\ 0 & x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y & 0\\ 0 & x\\ x & y\end{bmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

После перемножения трех матриц под знаком интеграла придем к симметричной матрице размера 2×2, интегрируя каждый элемент

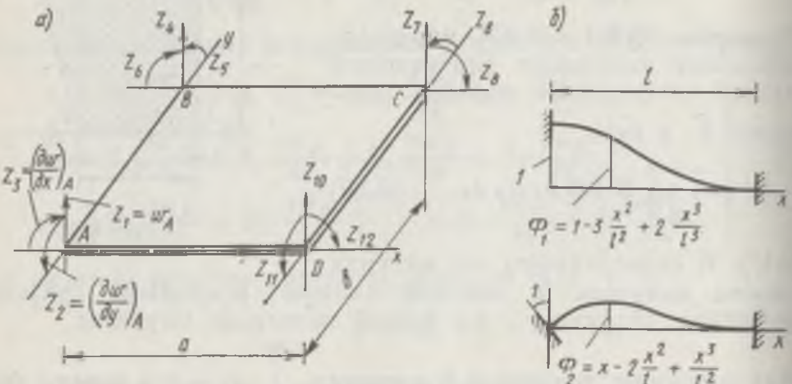


Рис. 8.37

которой в указанных пределах окончательно найдем

$$\mathbf{R}'=\begin{bmatrix}r_{55} & r_{56}\\ r_{65} & r_{66}\end{bmatrix}=\frac{E\delta}{ab\,(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\left(ab^3+\frac{1-\mu}{2}\,ba^3\right) & \text{Симм.}\\ \frac{1+\mu}{2}\,a^2b^2 & \frac{1}{3}\left(ba^3+\frac{1-\mu}{2}\,ab^3\right)\end{bmatrix}$$

Формула (8.86) носит общий характер, хотя и получена на примере плоской задачи. Чтобы ею воспользоваться, необходимо построить только две матрицы, а именно: матрицу закона Гука $\mathbf{D}$, связывающую напряжения и деформации (или усилия и деформации), и матрицу $\mathbf{B}$, которая позволяет перейти от перемещений к деформациям в элементе. Это иллюстрируется далее на примере задачи изгиба пластины.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент изгибаемой пластины (рис. 8.37, *а*). В каждом узле примем за неизвестные три обобщенных перемещения: прогиб w, два угла поворота нормали — $\partial w/\partial y$ и $\partial w/\partial x$. Следовательно, полный вектор обобщенных перемещений элемента состоит из 12 компонент

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_A \\ \vec{Z}_B \\ \vec{Z}_C \\ \vec{Z}_D \end{bmatrix}; \quad \vec{Z}_A = \begin{bmatrix} w_A \\ (\partial w/\partial y)_A \\ (\partial w/\partial x)_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{Z}_B = \ldots . \tag{8.90}$$

и элемент имеет 12 степеней свободы. Выражение поверхности прогибов элемента зададим так, чтобы оно содержало 12 постоянных

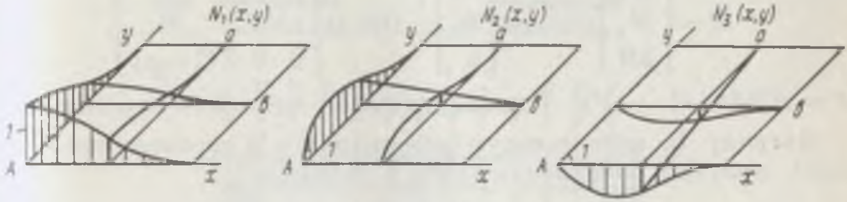


Рис. 8.38

коэффициентов, например в виде следующего полинома:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + \\ + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3.$$

Выражая параметры $a_1, \ldots, a_{12}$ через $Z_1, \ldots, Z_{12}$, перейдем к базисным функциям (функциям формы) $N_i(x, y)$:

$$w = \sum_{i=1}^{i=12} Z_i N_i(x, y). \tag{8.91}$$

Так, для узла A первые три базисные функции будут

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{y}{b}\right)\Phi_1\left(\frac{x}{a}\right) + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\Phi_1\left(\frac{y}{b}\right) - \\ &\qquad - \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right); \\ N_2 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\Phi_2\left(\frac{y}{b}\right); \quad N_3 = -\left(1 - \frac{y}{b}\right)\Phi_2\left(\frac{x}{a}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.92}$$

где Φ_1 и Φ_2 — функции, выражающие линию прогибов защемленной по концам балки от единичного смещения или угла поворота заделки (рис. 8.37, *б*). Вид трех базисных функций N_1, N_2 и N_3 изображен на рис. 8.38. Остальные функции N_i в (8.91) строятся аналогично.

Из гл. 6 известно, что каждый элемент пластины испытывает три характерные деформации

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \tag{8.93}$$

которым отвечают изгибающие и крутящие моменты

$$M_x = D\,(\varkappa_x + \mu\varkappa_y); \quad M_y = D(\varkappa_y + \mu\varkappa_x); \quad H = D\,(1-\mu)\varkappa. \tag{8.94}$$

Энергия деформации элемента пластины создается за счет деформаций (8.93) и усилий (8.94), связанных законом Гука

$$\vec{M} = \mathbf{D}\vec{\varkappa}, \tag{8.95}$$

где

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ 2H \end{bmatrix}; \quad \vec{\varkappa} = \begin{bmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = D\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix}, \tag{8.96}$$

$D = E\delta^3/[12\,(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Матрицу $\mathbf{B}$, связывающую деформации $\vec{\varkappa}$ и перемещения $\vec{Z}$ элемента, получим, подставляя (8.91) в (8.93):

$$\vec{\varkappa} = \mathbf{B}\vec{Z}, \tag{8.97}$$

где

$$\mathbf{B} = -\begin{bmatrix} \partial^2 N_1/\partial x^2 & \ldots\ldots & \partial^2 N_{12}/\partial x^2 \\ \partial^2 N_1/\partial y^2 & \ldots\ldots & \partial^2 N_{12}/\partial y^2 \\ \partial_2 N_1/\partial x\, \partial y & \ldots\ldots & \partial^2 N_{12}/\partial x\, \partial y \end{bmatrix}. \tag{8.98}$$

Подставляя матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в формулу (8.86) и заменив в ней интегрирование по объему интегрированием по площади пластины, получим формулу для вычисления матрицы жесткости конечного элемента при изгибе:

$$\mathbf{R}' = \int_0^b \int_0^a \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\, dx\, dy. \tag{8.99}$$

§ 8.10. ОБЩАЯ ПРОЦЕДУРА РАСЧЕТА ПО МКЭ

Проследим основные этапы использования МКЭ на конкретном примере расчета плоской конструкции, изображенной на рис. 8.39, *а*.

На первом этапе выбирается расчетная схема и наносится сетка конечных элементов. На рис. 8.39, *б* показана рассматриваемая половина конструкции ввиду ее симметрии с выбранной сеткой квадратных элементов $a = b = 20$ см. Там же дана нумерация узлов и конечных элементов (в кружках). От нумерации узлов зависит структура матрицы системы уравнений, к которой сводится решение задачи. Матрица имеет ленточную структуру, схематически показанную на рис. 8.39, *б*.

В заштрихованной ленте шириной $2M$ в каждой строке могут находиться ненулевые элементы, вне ее все элементы нулевые. Это связано с тем, что, как указывалось в § 8.8, в уравнения равно-

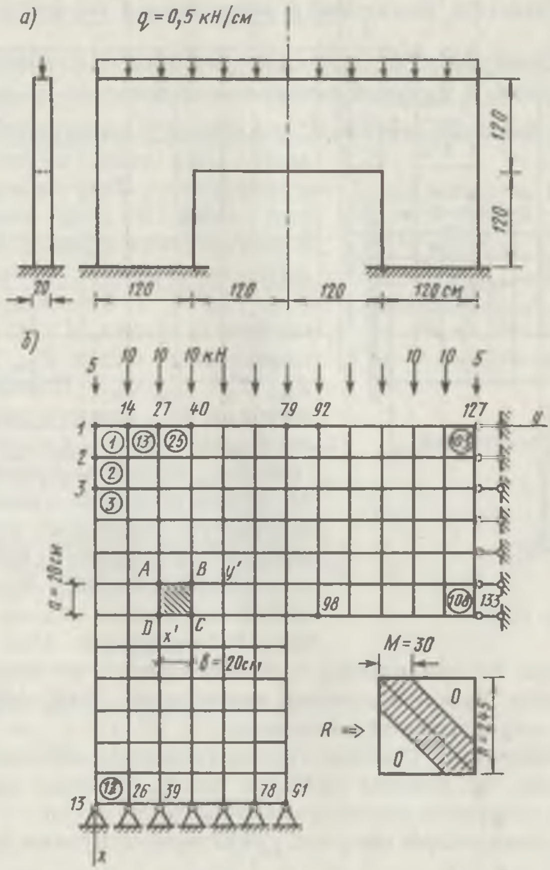


Рис. 8.39

весия узла входят лишь обобщенные силы, соответствующие элементам, примыкающим к этому узлу. Можно сказать, что данный узел непосредственно «взаимодействует» только с ближайшими окружающими его узлами.

При нумерации надо стремиться к тому, чтобы наибольшая разность номеров «взаимодействующих» узлов была как можно меньше. В данном случае общее число неизвестных перемещений за вычетом перемещений закрепленных на границе узлов будет $n = 2 \times 133 - 2 \times 7 - 7 = 245$. Таков порядок системы уравнений в данной задаче; полуширина ленты $M = 30$. Ленточность структуры уравнений является большим достинством МКЭ, так как упрощает и ускоряет решение уравнений.

На следующем этапе строятся матрицы жесткости отдельных элементов в местной системе координат $x'y'$. В данном случае все элементы одинаковые и матрицы $\mathbf{R}'$ строились, как описано в § 8.9. В общем случае они могут быть различными по форме, материалу и размерам.

Далее из матрицы $\mathbf{R}'$ надо сформировать матрицу жесткости всей конструкции $\mathbf{R}$ в общей системе координат xy. В данном случае неизвестные в местной системе $\vec{Z}'$ и в общей $\vec{Z}$ по направлению совпадают. Они лишь имеют различную нумерацию. Так, показанный на рис. 8.39, *б* 30-й элемент $ABCD$ в соответствии с рис. 8.33, *а*, *б* будет иметь нумерацию неизвестных: Z'_1, Z'_2, . . ., Z'_8. В то же время в общей системе в узлах A; B; C; D номера неизвестных будут Z_{59}, Z_{60}; Z_{83}, Z_{84}; Z_{85}, Z_{86}; Z_{61}, Z_{62}. Поэтому элементы матрицы $\mathbf{R}'_{30}$ данного элемента должны будут попасть в соответствующие клетки общей матрицы жесткости $\mathbf{R}$. Такая рассылка элементов матриц жесткости отдельных конечных элементов с их суммированием в клетках общей матрицы $\mathbf{R}$ производится автоматически на основе общей логической процедуры. Оси x', y' могут быть повернуты по отношению к общим осям x, y. Тогда требуется предварительное преобразование матрицы $\mathbf{R}'$. Эти вопросы изучаются в курсе строительной механики.

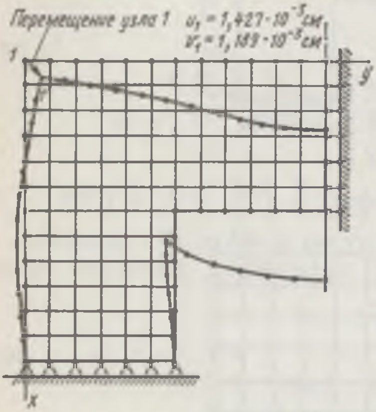


Рис. 8.40

Далее формируется столбец грузовых членов системы уравнений из узловых сил. В данном примере такие узловые силы имеются лишь в узлах верхнего горизонтального ряда сетки.

После решения общей системы уравнений получаем все перемещения узлов $\vec{Z} = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_{245}]^{\text{т}}$ в общей системе координат. На этом этапе надо перейти обратно от указанных перемещений $\vec{Z}$ к перемещениям узлов $\vec{Z}'$ в местной системе для каждого элемента. Это опять делается в автоматическом режиме.

Наконец, после того как найдены перемещения узлов каждого элемента $\vec{Z}'$, по формулам типа (8.82) в нем могут быть найдены напряжения

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\vec{Z}'.$$

На рис. 8.40 показана общая картина перемещений узлов (с увеличением в 500 раз), а на рис. 8.41 — эпюры напряжений в двух сечениях конструкции. В расчетах принято $E = 40$ ГПа, $\mu = 0,1$.

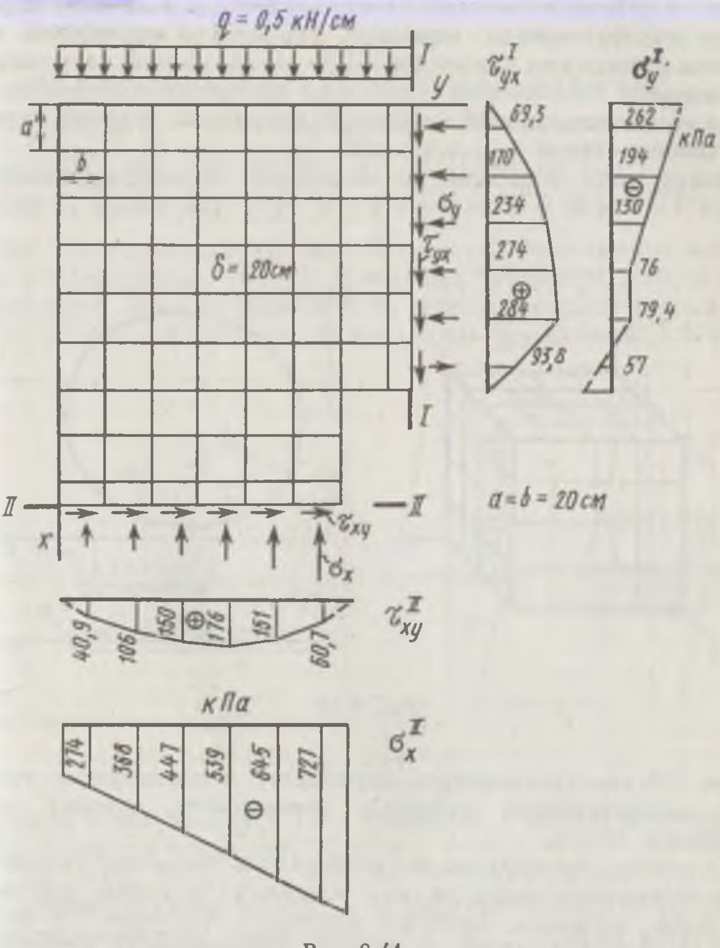


Рис. 8.41

В заключение отметим, что здесь изложены лишь начальные основы МКЭ. Более полные сведения можно найти в учебнике [2] и в специальной литературе.

§ 8.11. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МГЭ)

Этот метод успешно конкурирует и в определенных случаях оказывается более эффективным, чем метод конечных элементов.

Идея его состоит в условном расширении расчетной схемы для рассматриваемого тела. Дело в том, что для бесконечных областей, таких, как бесконечная балка на упругом основании, упругая плоскость, упругое пространство, известны точные аналитические решения от действия единичной сосредоточенной силы (или момента). Назовем их функциями влияния. Пользуясь принципом суперпозиции и функциями влияния в МГЭ, находят такие нагрузки, прикладываемые в бесконечной области на воображаемой границе тела, которые обеспечивают удовлетворение граничных условий заданного ограниченного тела.

Границу тела разобьем на отдельные элементы, называемые граничными элементами (ГЭ). На рис. 8.42 показаны

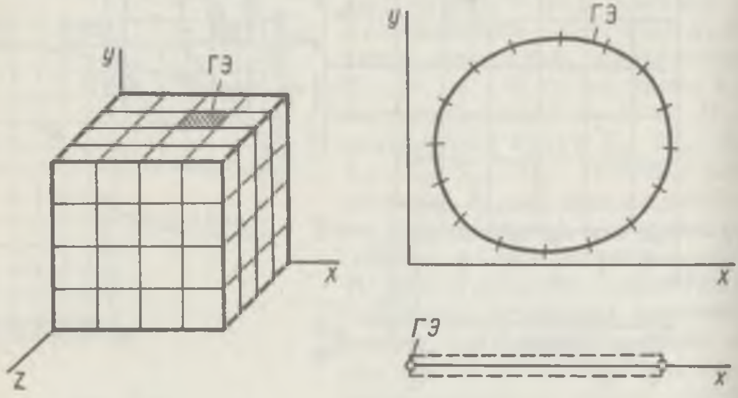


Рис. 8.42

примеры ГЭ для трехмерного, двумерного и одномерного тел. Ими служат соответственно элементы поверхности, отрезки контура и граничные точки.

Тело условно продолжим за границы так, чтобы оно превратилось в часть бесконечной области (или конечной, но такой, для которой могут быть получены функции влияния). Каждый ГЭ загрузим некоторой распределенной нагрузкой, интенсивность которой обозначим X_i. Она может приниматься равномерно распределенной, изменяться в пределах ГЭ по линейному или более сложному закону. Путем интегрирования функций влияния по области ГЭ, аналогично тому, как это делалось в задаче Фламана в § 4.13, сначала найдем от нагрузки X_i напряжения и перемещения в любой точке области.

Так, для тела в виде бесконечной упругой пластины единичной толщины от нагрузок $X_i = q_x = \text{const}$ и $X_{i+1} = q_y = \text{const}$, равномерно распределенных вдоль линейного ГЭ длиной $2a$, можно получить следующие выражения для напряжений в произвольной точке пластины [15] (рис. 8.43):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= [(3-2\mu) f_1 + y f_3] q_x + (2\mu f_2 - y f_4) q_y;\\ \sigma_y &= -[(1-2\mu) f_1 + y f_3] q_x + [2(1+\mu) f_2 + y f_4] q_y;\\ \tau_{xy} &= [2(1-\mu) f_2 - y f_4] q_x + [(1-2\mu) f_1 - y f_3] q_y,\end{aligned}\right\} \quad (8.100)$$

где

$$f_1 = (\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2} - \ln\sqrt{(x+a)^2+y^2})/[4\pi(1-\mu)];$$

$$f_2 = [\operatorname{arctg}(y/(x-a)) - \operatorname{arctg}(y/(x+a))]/[4\pi(1-\mu)];$$

$$f_3 = [y/((x-a)^2+y^2) - y/((x+a)^2+y^2)]/[4\pi(1-\mu)];$$

$$f_4 = [(x-a)/((x-a)^2+y^2) - (x+a)/((x+a)^2+y^2)]/[4\pi(1-\mu)].$$

Теперь для определения неизвестных X_i составим граничные условия в характерных точках граничных элементов (узловых точках). Например, если на границе тела заданы поверхностные нагрузки p_x, p_y (в плоской задаче), то, пользуясь формулами (8.100), для

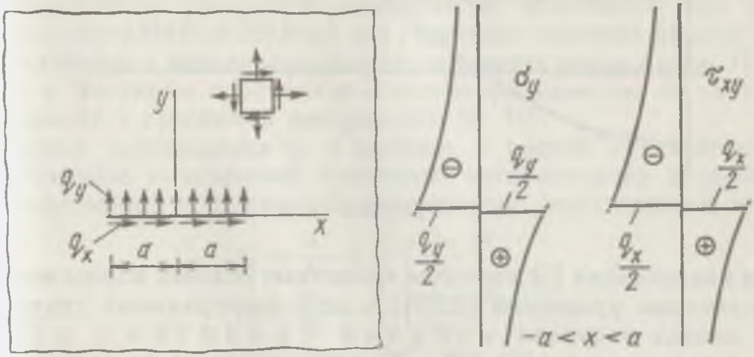


Рис. 8.43

центральной точки каждого ГЭ составляют с учетом влияния всех нагрузок X_i по два уравнения (4.4): $\sigma_x l + \tau_{xy} m = p_x$; $\tau_{xy} l + \sigma_y m = p_y$. При этом, учитывая разрывы в напряжениях (рис. 8.43), следует различать точки по одну и по другую сторону от ГЭ. Формулировать условия надо с той стороны от ГЭ, с которой расположено рассматриваемое тело по отношению к ГЭ.

В результате придем к системе алгебраических уравнений относительно X_i

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n + b_{1p} &= 0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n + b_{np} &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (8.101)$$

где n будет равно произведению числа граничных условий в точке границы тела на число ГЭ. После решения уравнений (8.101) и определения X_i напряжения в теле вычислим по формулам типа (8.100) для неограниченной среды от нагрузок X_i ($i = 1, \ldots, n$).

Таким образом, система уравнений (8.101) позволяет найти нагрузки на границе тела, как бы «погруженного» в неограниченную упругую область, которые устраняют (компенсируют) взаимодействие тела с условно введенной окружающей средой. Поэтому изложенный вариант МГЭ называют методом компенсирующих (или фиктивных) нагрузок. Вместо нагрузок на границе тела иногда удобнее задавать смещения (метод разрывных смещений).

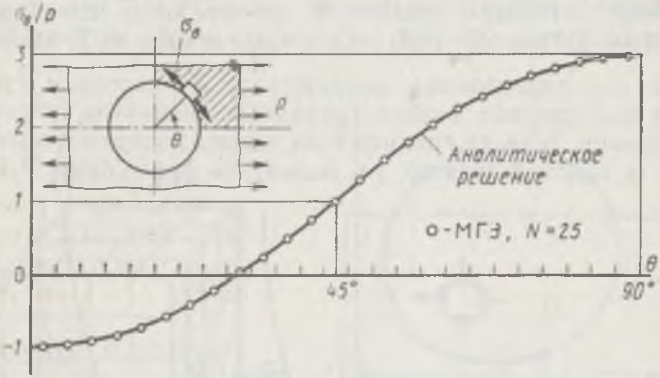


Рис. 8.44

При измельчении ГЭ в пределе граничные условия можно записать вместо системы уравнений (8.101) в виде интегральных уравнений. Такой подход называют методом граничных интегральных уравнений. Не останавливаясь на подробностях и других вариантах МГЭ, за которыми отсылаем учащегося в литературе [15, 37], приведем лишь один иллюстративный пример.

На рис. 8.44, заимствованном из [15], сплошной линией показано точное решение для напряжения σ_θ, действующего вдоль дуги отверстия в бесконечной пластине (см. § 4.13), а кружками — то же по МГЭ, полученное с использованием формул (8.100) при разбиении четверти окружности на 25 прямолинейных элементов. В пределах точности чертежа эти результаты неразличимы.

ГЛАВА 9

ГИБКИЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

§ 9.1. ДЕФОРМАЦИИ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ

При изучении изгиба жестких пластин отмечалось, что результаты такого расчета справедливы в том случае, когда прогиб пластины, как правило, не превышает $^1/_5 \ldots {}^1/_2$ ее толщины. Если же прогиб больше этой величины, необходимо рассматривать пластину как гибкую. Особенностью такой пластины является то, что в ней наряду с изгибными напряжениями возникают напряжения, равномерно распределенные по толщине, называемые *цепными* или *мембранными*. Этим напряжениям соответствуют деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0, возникающие в срединной поверхности пластины. При расчете гибких пластин используются две гипотезы: гипотеза прямой нормали и гипотеза о ненадавливаемости горизонтальных слоев. По сравнению с жесткими пластинами исключается гипотеза об отсутствии деформаций в срединной поверхности [8, 19].

Считая перемещения u, v малыми, а прогиб w — конечным, но сопоставимым с толщиной пластины, воспользуемся выражениями для деформаций в срединной поверхности, полученными в § 2.3:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \tag{9.1}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \tag{9.2}$$

$$\gamma^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{9.3}$$

Деформации в срединной поверхности пластины должны удовлетворять условию совместности деформаций, которое, как нетрудно убедиться простой подстановкой, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x\, \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{9.4}$$

Кривизны $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ и кручение $\varkappa$ срединной поверхности изогнутой гибкой пластины определяются теми же выражениями, что и в жестких пластинах:

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{9.5}$$

Тогда на основании гипотезы прямой нормали деформации в произвольной точке пластины оказываются равными

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \quad \gamma = \gamma^0 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} z. \tag{9.6}$$

§ 9.2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента пластины, боковые грани которого в исходном (недеформированном) состоянии были параллельны вертикальным координатным плоскостям (рис. 9.1, *а*, *б*).

К первой группе отнесены усилия, действующие в срединной поверхности пластины (рис. 9.1, *а*), а ко второй группе — усилия, вызывающие ее изгиб (рис. 9.1, *б*).

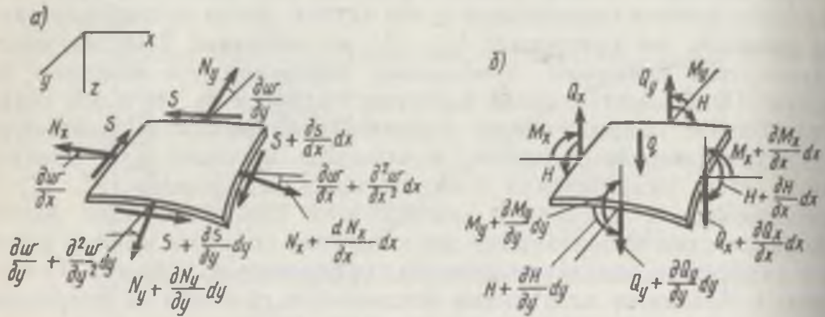


Рис. 9.1

Составим уравнения равновесия, спроецировав все силы на ось x:

$$-N_x\,dy+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\right)dy-S\,dx+\left(S+\frac{\partial S}{\partial y}\,dy\right)dx=0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0. \tag{9.7}$$

Аналогично можно получить второе уравнение равновесия, спроецировав силы на ось y:

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0. \tag{9.8}$$

Далее запишем третье уравнение равновесия, спроецировав все силы на ось z:

$$-Q_x\,dy+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\,dx\right)dy-Q_y\,dx+\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\,dy\right)dx-$$

$$-N_x\,dy\,\frac{\partial w}{\partial x}+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\right)dy-$$

$$-N_y\,dx\,\frac{\partial w}{\partial y}+\left(N_y+\frac{\partial N_y}{\partial y}\,dy\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy\right)dx-$$

$$-S\frac{\partial w}{\partial x}\,dx+\left(S+\frac{\partial S}{\partial y}\,dy\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dy\right)dx-$$
$$-S\frac{\partial w}{\partial y}\,dy+\left(S+\frac{\partial S}{\partial x}\,dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx\right)dy+q\,dx\,dy=0.$$

Опуская слагаемые выше второго порядка малости, получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+\frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+q=0.$$

Принимая во внимание равенства (9.7), (9.8), имеем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-q. \tag{9.9}$$

Уравнения равновесия, представляющие собой сумму моментов сил относительно осей x и y, записываются так же, как для жесткой пластины:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}=Q_x; \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y. \tag{9.11}$$

Из уравнений (9.9). . .(9.11) следует

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-q. \tag{9.12}$$

§ 9.3. СИСТЕМА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ

Уравнения (9.6). . .(9,8), (9.12) содержат десять неизвестных: ε_x^0, ε_y^0, γ^0, w, N_x, N_y, S, M_x, M_y, H. В качестве дополнительных уравнений используются соотношения между деформациями и усилиями в срединной поверхности, а также между прогибом и изгибающими и крутящим моментами.

На основании закона Гука запишем

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x^0=\frac{1}{E\delta}(N_x-\mu N_y);\quad \varepsilon_y^0=\frac{1}{E\delta}(N_y-\mu N_x);\\&\gamma^0=\frac{S}{G\delta}.\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

Для моментов M_x, M_y, H справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned}&M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\&H=-(1-\mu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Подставим выражения (9.13), (9.14) в уравнения (9.6), (9.12). В результате получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{E\delta}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x-\mu N_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y-\mu N_x)-\right.\\&\left.-2(1+\mu)\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right]=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\&D\nabla^4 w-N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=q.\end{aligned}\right\}\qquad(9.15)$$

Таким образом, система четырех уравнений (9.6). . .(9.8), (9.12) оказывается замкнутой, т. е. она содержит четыре неизвестные функции: N_x, N_y, S, w.

Для уменьшения числа разрешающих уравнений воспользуемся функцией напряжений φ, действующих в срединной поверхности. С помощью функции φ усилия N_x, N_y, S определяются так:

$$N_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};\ N_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2};\ S=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},\qquad(9.16)$$

где $\Phi=\delta\varphi$.

При этом, как нетрудно убедиться, уравнения (9.7), (9.8) удовлетворяются тождественно.

После подстановки выражений (9.16) в уравнения (9.15) получим уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0;\\&D\nabla^4 w-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=q.\end{aligned}\right\}\qquad(9.17)$$

Итак, решение задачи об изгибе гибких пластин сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно функции Φ и прогиба пластины w. Эти уравнения известны в теории упругости как уравнения Кармана.

Функции Φ, w должны удовлетворять не только уравнениям (9.17), но и граничным условиям.

Если рассмотреть прямоугольную в плане пластину, то на каждой кромке на функцию напряжений и на функцию прогибов должны быть наложены по два условия. В частности, для жестко защемленных или шарнирно опертых кромок пластины при различных ограничениях на напряжения или перемещения в срединной поверхности граничные условия совпадают с аналогичными условиями, справедливыми для пологих оболочек (см. § 7.7).

Разрешающие уравнения (9.17) получены в предположении изотропии материала пластины. Для пластин из ортотропного материала (в том случае, когда оси упругой симметрии совпадают с осями x, y) уравнения, аналогичные уравнениям (9.17), записываются следующим образом:

$$\frac{1}{\delta}\left(A_2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2A_3\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+A_1\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\right)=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$

$$-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=q,$$

где

$$A_1=\frac{1}{E_x};\quad A_2=\frac{1}{E_y};\quad A_3=\frac{1}{2G_{xy}}-\frac{\mu_{xy}}{E_y}=$$

$$=\frac{1}{2G_{xy}}-\frac{\mu_{yx}}{E_x};\quad D_1=\frac{E_x\delta^3}{12\,(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};$$

$$D_2=\frac{E_y\delta^3}{12\,(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\quad D_3=\frac{G_{xy}\delta^3}{6}+\mu_{xy}\frac{E_x\delta^3}{12\,(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}=$$

$$=\frac{G_{xy}\delta^3}{6}+\mu_{yx}\frac{E_y\delta^3}{12\,(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}.$$

§ 9.4. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим прямоугольную пластину при действии на нее равномерно распределенной нагрузки q (рис. 9.2). Вдоль всех кромок пластина опирается на абсолютно жесткие в своей плоскости диафрагмы и гибкие из нее. Это соответствует следующим граничным условиям: $w=0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$, $N_x=0$, $v=0$ при $x=0$, $x=a$.

Аналогично можно записать граничные условия для двух других кромок пластины при $y=0$ и $y=b$.

Ищем решение уравнений (9.17) в виде

$$w=\sum_{m,\,n} f_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y; \tag{9.18}$$

$$\Phi=\sum_{i,\,j}\varphi_{ij}\sin\frac{i\pi}{a}x\sin\frac{j\pi}{b}y, \tag{9.19}$$

где f_{mn}, φ_{ij} — константы.

Нетрудно убедиться в том, что функции w, Φ удовлетворяют всем граничным условиям.

Для определения постоянных f_{mn}, φ_{ij} воспользуемся методом Бубнова — Галеркина, применение которого в данном случае сводится к следующему.

Подставим разложения (9.18), (9.19) в уравнения (9.17), после чего умножим первое из них на $\sin\frac{i\pi}{a}x\sin\frac{j\pi}{b}y$, а второе — на $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$. Интегрируя каждое из полученных выражений по площади пластины и приравнивая, результаты к нулю, придем к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно констант f_{mn}, φ_{ij}.

Особенности такого способа получения решения уравнений (9.17) проиллюстрируем для случая, когда в разложениях (9.18), (9.19) удерживается только один член:

$$w \approx f \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y; \qquad \Phi \approx \varphi \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y. \tag{9.20}$$

После подстановки выражений (9.20) в уравнения (9.17) получим

$$X_1 = \frac{1}{E\delta}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \varphi \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y -$$
$$-\frac{\pi^4}{a^2b^2} f \left(\cos^2\frac{\pi}{a}x \cos^2\frac{\pi}{b}y - \sin^2\frac{\pi}{a}x \sin^2\frac{\pi}{b}y\right);$$
$$X_2 = D\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 f \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y -$$
$$-2\frac{\pi^4}{a^2b^2} f\varphi \left(\sin^2\frac{\pi}{a}x \sin^2\frac{\pi}{b}y - \cos^2\frac{\pi}{a}x \cos^2\frac{\pi}{b}y\right) - q.$$

Используя метод Бубнова — Галеркина (см. § 8.6), умножим X_1,

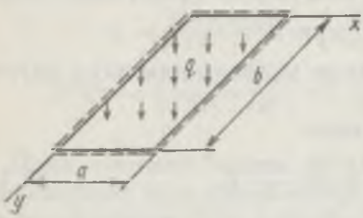


Рис. 9.2

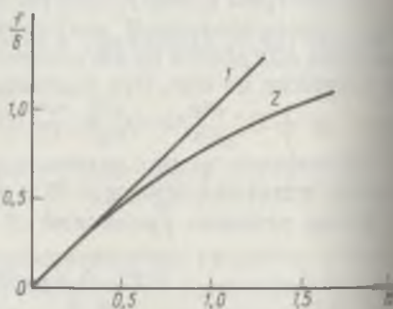


Рис. 9.3

X_2 на $\sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y$ и проинтегрируем по площади пластины:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 \varphi + \frac{16\pi^2 E\delta}{3a^2b^2} f^2 = 0; \\ &D\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 f - \frac{32\pi^2}{3a^2b^2} f\varphi = \frac{16}{\pi^2} q. \end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

Система уравнений (9.21) сводится к одному уравнению относительно амплитуды прогиба f. Например, при $a/b = 1$ имеем

$$\frac{f}{\delta} + \frac{128(1-\mu^2)}{3\pi^4}\frac{f^3}{\delta^3} = B, \tag{9.22}$$

где $B = \dfrac{4qa^4}{\pi^6 D\delta}$.

Уравнение (9.22) позволяет провести качественный анализ решения задачи об изгибе гибкой квадратной пластины. Для получения более точных результатов необходимо удерживать в разложениях (9.18), (9.19) большее число членов.

Для сравнения на рис. 9.3 показаны графики зависимости $\frac{f}{\delta} \sim B$, отвечающие квадратной в плане жесткой (кривая *1*) и гибкой (кривая 2) пластине при $\mu = 0{,}3$.

Погрешность, равная 10%, в решении для жесткой пластины достигается в этом случае уже при $f/\delta \approx 0{,}5$.

§ 9.5. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБАХ

Выражения для деформаций в срединной поверхности оболочки при малых прогибах имеют вид [см. (7.8)]

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w; \quad \gamma^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В случае конечных прогибов эти соотношения дополняются такими же нелинейными членами, что и в гибких пластинах:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ \gamma^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

Формулы для приращения кривизн $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ и кручения $\varkappa$ остаются теми же, что и для пологих оболочек в случае малых прогибов (7.7):

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{9.24}$$

Уравнение совместности деформаций в срединной поверхности (7.9) и уравнение равновесия (7.15), записанные для пологой оболочки в предположении малости прогибов

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x\, \partial y} = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x k_x + N_y k_y = -q,$$

дополняются такими же слагаемыми, что и соответствующие уравнения теории гибких пластин:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon_x^0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y^0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma^0}{\partial x\,\partial y}=-k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\\&-k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_xk_x+\\&+N_yk_y+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-q.\end{aligned}\right| \tag{9.25}$$

Два других уравнения равновесия, полученные при проецировании сил (действующих на бесконечно малый элемент оболочки) на координатные оси x, y, совпадают с уравнениями (7.10), (7.12).

Для пологой оболочки при конечных прогибах справедливы соотношения (9.13), (9.14), которые определяют деформации ε_x^0, ε_y^0, γ^0 через усилия N_x, N_y, S, а изгибающие моменты M_x, M_y — через кривизны $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ и крутящий момент H — через кручение $\varkappa$. Подставляя указанные зависимости в уравнения (9.25) и вводя функцию напряжений Φ, получим в результате систему двух нелинейных уравнений относительно неизвестных функций Φ, w

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi=-k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$D\nabla^4 w-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+k_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}+k_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)=q,$$

которые кратко запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi=-\nabla_k^2 w-L(w,\ w);\\&D\nabla^4 w=\nabla_k^2\Phi+L(\Phi,\ w)+q,\end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

где

$$\nabla_k^2(\ \ )=k_x\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x^2};$$

$$L(w,\ w)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2;$$

$$L(\Phi,\ w)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Граничные условия на кромках пологой оболочки при конечных прогибах формулируются аналогично краевым условиям для пологой оболочки при малых прогибах или для гибкой пластины.

§ 9.6. УДЛИНЕННАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПАНЕЛЬ

Рассмотрим пологую цилиндрическую панель радиуса R, длина которой b значительно больше ее ширины a ($b \gg a$) (рис. 9.4). Панель находится под действием равномерно распределенной нагрузки q. Если сосредоточить внимание только на анализе напряженно-деформированного состояния средней части панели, достаточно удаленной от коротких кромок, можно предположить, что в указанной части изгиб происходит по цилиндрической поверхности, т. е. функция прогиба зависит только от координаты x.

Рис. 9.4

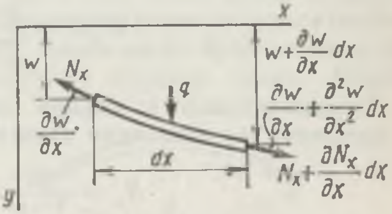


Рис. 9.5

Будем считать, что граничные условия оболочки соответствуют шарнирному закреплению длинных кромок, при котором исключается смещение вдоль оси x:

$$\text{при } x=0;\ x=a \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0; \tag{9.27}$$

$$u=0. \tag{9.28}$$

Уравнения (9.26) для панели принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4\Phi=0;\\ &D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=q. \end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

Составив сумму проекций сил, действующих на элементарный участок панели (рис. 9.5), на ось x, можно убедиться в том, что усилие $N_x=\partial^2\Phi/\partial y^2$ является постоянным по ширине оболочки. Для его определения воспользуемся выражением для ε_x^0 (9.23), которое запишем следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x^0+\frac{w}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Интегрирование по ширине панели дает

$$u(a)-u(0)=\int_0^a\left[\varepsilon_x^0+\frac{w}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx. \tag{9.30}$$

Выразим деформацию ε_x^0 через N_x, для чего обратимся к зависимостям (9.13). Принимая во внимание равенство $\varepsilon_y^0 = 0$, из соотношений (9.13) получим

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1-\mu^2}{E\delta} N_x.$$

С учетом (9.28) из соотношения (9.30) имеем

$$N_x = -\frac{E\delta}{(1-\mu^2)\,a}\int\limits_0^a \left[\frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x. \qquad (9.31)$$

Решение второго уравнения системы (9.29) можно представить в виде ряда:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\frac{m\pi}{a}x.$$

Ограничиваясь в первом приближении первым членом ряда и принимая во внимание зависимость (9.31), найдем

$$N_x = \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\pi^2 f^2}{4a^2} - \frac{2f}{\pi R}\right).$$

Для решения уравнения (9.26) воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. В итоге получим кубическое уравнение относительно амплитуды прогиба панели:

$$\frac{\pi^5}{16}\frac{f^3}{\delta^3} - \frac{3\pi^2}{4}\frac{a^2}{R\delta}\frac{f^2}{\delta^2} + \left(\frac{\pi^5}{48} + \frac{2a^4}{4R^2\delta^2}\right)\frac{f}{\delta} = (1-\mu^2)\frac{qa^4}{E\delta^4}. \qquad (9.32)$$

Зависимость между безразмерными параметрами $q^* = \frac{qa^4}{E\delta^4}(1 - \mu^2)$ и f/δ иллюстрируется графиками (рис. 9.6), построенными при разных значениях величины $k = a^2/(R\delta)$.

Как следует из рисунка, зависимость $q^* \sim f/\delta$ оказывается в некоторых случаях неоднозначной (например, при $k = 40$, что соответствует начальной стрелке 5δ), т. е. одному значению параметра q^* соответствуют три действительных корня уравнения (9.32). Это является следствием особенности деформирования панели в процессе увеличения нагрузки. Пока параметр q^* возрастает от нуля до значения, равного 1025,5 (ордината точки A на кривой *1*) амплитуда прогиба непрерывно увеличивается до значения $\sim 2{,}2\ \delta$, чему на кривой *1* отвечает участок OA. Как только параметр нагрузки q^* становится бóльшим значения 1025,5 наступает «хлопóк» панели, т. е. прогиб скачкообразно изменяет свое значение и оказывается равным $\sim 11{,}1\ \delta$ (абсцисса точки D на кривой *1*). При «хлопке» панель мгновенно переходит из положения I в положение II (рис. 9.7).

При дальнейшем увеличении нагрузки происходит рост прогиба панели, что на кривой *1* отражено участком DC (см. рис. 9.6).

Для сравнения на рис. 9.6 представлена прямая $1'$, которая отвечает линейной теории оболочек. Как видно, последняя может привести не только к неверным количественным, но, что особенно важно, к неверным качественным результатам в оценке деформации оболочечных конструкций.

Интересно отметить, что при последующей за нагружением панели разгрузке траектория деформирования панели будет отличаться от траектории нагружения $OADC$.

При снятии внешней нагрузки панель не возвращается в исходное положение. В ней остается прогиб, измеряемый абсциссой точки E. Для того чтобы вернуть панель в первоначальное исходное состояние, необходимо приложить к ней нагрузку другого знака, безразмерный параметр q^* которой равен — 959,7 (ордината точки B на кривой 1, рис. 9.6). При этой нагрузке происходит обратный «хлопо́к» панели, чему соответствует на кривой 1 переход из точки B в точку F. И только теперь, после удаления нагрузки, панель возвратится в свое исходное положение.

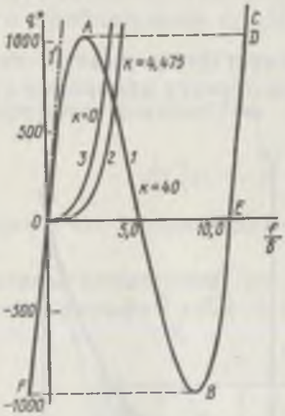


Рис. 9.6

Рис. 9.7

Анализ кубического уравнения (9.32) показывает, что «хлопо́к» появляется в панелях, имеющих достаточно большую начальную стрелку. Если же она мала ($k \leqslant 4{,}475$), то никаких «хлопко́в» при нагружении оболочки не наблюдается.

На рис. 9.6 для сравнения показаны графики зависимостей $q^* \sim f/\delta$ при $k = 4{,}475$ (кривая 2) и при $k = 0$ (кривая 3). Последний случай отвечает удлиненной пластине. Как видно, с уменьшением начальной стрелы подъема панели происходит существенная перестройка в диаграмме ее деформирования.

§ 9.7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Расчет гибких пластин и оболочек сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений, записанных относительно прогиба и функции напряжений. С помощью вариационных методов, метода конечных разностей и т. д. указанные уравнения заменяются системой нелинейных алгебраических уравнений. Поскольку точное решение указанных уравнений возможно только в исключительных случаях, особое значение приобретают приближенные методы. Среди большого числа известных приближенных методов решения нелинейных уравнений и их систем весьма эффективным является метод Ньютона. Поясним суть этого метода сначала на примере одного уравнения

$$\Phi(x) = 0. \tag{9.33}$$

Будем считать, что функция Φ имеет непрерывные первую Φ' и вторую Φ'' производные на некотором отрезке изменения аргумента

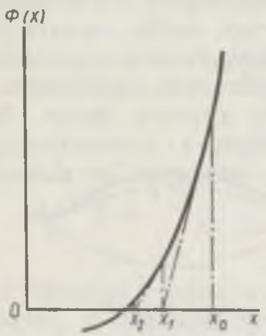


Рис. 9.8

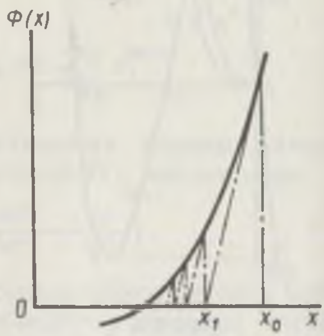


Рис. 9.9

$a \leqslant x \leqslant b$. Допустим, что каким-либо образом найдено приближенное значение корня x_0 уравнения (9.33) и требуется его уточнить.

Предположим, что точное значение корня уравнения (9.33) можно представить в виде суммы:

$$x = x_0 + \Delta x, \tag{9.34}$$

где Δx — малая величина.

Используя разложение функции $\Phi(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0, можно записать

$$\Phi(x_0) + \Phi'(x_0)\,\Delta x \approx 0.$$

Отсюда следует

$$\Delta x = -\frac{\Phi(x_0)}{\Phi'(x_0)}.$$

С учетом полученной поправки новое приближенное значение корня определяется из равенства (9.34) так:

$$x_1 = x_0 - \frac{\Phi(x_0)}{\Phi'(x_0)}.$$

Повторяя эти рассуждения далее, найдем 2-е, 3-е, . . . приближения для корня, каждое из которых определяется выражением

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\Phi(x_{n-1})}{\Phi'(x_{n-1})}. \tag{9.35}$$

Геометрически последовательность вычислений по формуле (9.35) интерпретируется так, как показано на рис. 9.8.

Заметим, что метод Ньютона эффективен в том случае, когда для начального приближения x_0 выполняется неравенство

$$\Phi(x_0)\,\Phi''(x_0) > 0.$$

Для примера рассмотрим уравнение (9.22), которое запишем в виде

$$\Phi(x) = x + 3x^3 - B = 0.$$

Очевидно, что производные $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$ непрерывны при любом x.

Результаты вычислений по формуле (9.35) при $B = 1$ и $x_0 = 1$ представлены в графе 2 табл. 9.1. Как видно, метод Ньютона позволяет достаточно быстро найти решение уравнения с нужной степенью точности.

Таблица 9.1

n	x_n	x_n	n	x_n	x_n
1	2	3	1	2	3
0	1	1	⋮		⋮
1	0,7	0,7	15		0,53680
2	0,56525	0,62710	⋮		⋮
3	0,53763	0,59041	⋮		⋮
4	0,53657	0,56963	20		0,53659
5	0,53657	0,55721	⋮		⋮
⋮		⋮	25		0,53657
10		0,53871			⋮
⋮					

Если производная функции Φ' достаточно мало меняется на отрезке $[a, b]$, то соотношение (9.35) можно видоизменить:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\Phi(x_{n-1})}{\Phi'(\xi)}, \tag{9.36}$$

где ξ — некоторое значение x, принадлежащее отрезку $[a, b]$.

В процедуре (9.36) величина $\Phi'(\xi)$ остается неизменной при любом n. В частности, можно положить $\xi = x_0$. Тогда

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\Phi(x_{n-1})}{\Phi'(x_0)}. \tag{9.37}$$

Такой метод решения нелинейных уравнений называется модифицированным методом Ньютона. Графическая иллюстрация его представлена на рис. 9.9.

Результаты решения уравнения (9.22) при том же значении B с помощью формулы (9.37) приведены в графе 3 табл. 9.1. В качестве начального приближения корня принято $x_0 = 1$.

Сравнение результатов решения уравнения, полученных по формулам (9.35) и (9.37), свидетельствует о том, что для нахождения корня с одинаковой точностью во втором случае требуется выполнение большего числа приближений.

Далее остановимся на решении системы нелинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0; \\ &\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

причем функции Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ имеют непрерывные производные по всем аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Предположим, что известно приближенное решение системы уравнений (9.38) $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$. Представим точное решение той же системы в виде

$$x_1 = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)};\ x_2 = x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_k = x_k^0 + \Delta x_k^{(0)}. \tag{9.39}$$

Подставим выражения (9.39) в (9.38) и воспользуемся формулой Тейлора для разложения каждой функции Φ_i $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ в окрестности $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$:

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \approx \Phi_i^{(0)} + \frac{\partial \Phi_i^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} \Delta x_1^{(0)} + \\ + \frac{\partial \Phi_i^{(0)}}{\partial x_2^{(0)}} \Delta x_2^{(0)} + \ldots + \frac{\partial \Phi_i^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} \Delta x_k^{(0)} = 0$$

где

$$\Phi_i^{(0)} = \Phi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}).$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \ldots, \Delta x_k^{(0)}$, которую удобно записать в векторной форме следующим образом:

$$\mathbf{F}_0 \vec{\Delta}^{(0)} = -\vec{\Phi}^{(0)}. \tag{9.40}$$

Здесь

$$\vec{\Delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_k^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \vec{\Phi}^{(0)} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}) \\ \Phi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_0=\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_2^{(0)}} & \dots & \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} \\ \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_2^{(0)}} & \dots & \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial x_2^{(0)}} & \dots & \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial x_k^{(0)}} \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (9.40) с учетом представлений (9.39) нетрудно найти новое приближенное решение системы уравнений (9.38):

$$\vec{x}_1=\vec{x}_0-\mathbf{F}_0^{-1}\vec{\Phi}^{(0)}, \tag{9.41}$$

где

$$\vec{x}_0=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_k^{(0)} \end{bmatrix}; \quad \vec{x}_1=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_k^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Повторяя рассуждения, можно получить соотношения, аналогичные (9.41), для последующих приближений решения системы нелинейных уравнений (9.38).

В итоге для n-го приближения имеем

$$\vec{x}_n=\vec{x}_{n-1}-\mathbf{F}_{n-1}^{-1}\vec{\Phi}^{(n-1)}. \tag{9.42}$$

Здесь

$$\vec{x}_{n-1}=\begin{bmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)} \end{bmatrix}; \quad \vec{x}_n=\begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{F}_{n-1}$ и вектор $\vec{\Phi}^{(n-1)}$ вычисляются аналогично матрице $\mathbf{F}_0$ и вектору $\vec{\Phi}^{(0)}$ при $x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_k^{(n-1)}$.

Весьма существенным неудобством применения формулы (9.42) является необходимость обращения матрицы $\mathbf{F}_{n-1}$ на каждом шаге вычислений. Если вектор $\vec{x}_0$ достаточно близок к точному решению, можно принять

$$\mathbf{F}_{n-1}\approx\mathbf{F}_0.$$

Тогда вместо (9.42) будем иметь

$$\vec{x}_n=\vec{x}_{n-1}-\mathbf{F}_0^{-1}\vec{\Phi}^{(n-1)}. \tag{9.43}$$

Нахождение поправки к приближенному решению системы нелинейных уравнений (9.38) в этом случае сводится к определению вектора $\vec{\Phi}^{(n-1)}$ и умножению на него матрицы $\mathbf{F}_0^{-1}$, которая была получена на первом шаге.

§ 9.8. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ДОГРУЖЕНИЙ

Одним из других методов решения нелинейных уравнений теории гибких пластин и оболочек является метод последовательных догружений. Суть его заключается в следующем.

Предположим, что внешняя нагрузка прикладывается на оболочку малыми порциями (слоями). После приложения первой порции q_0 прогиб оболочки мал и для его определения можно воспользоваться линейными уравнениями (7.22), которые представим в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi^{(0)}+\nabla^2_{k0}w^{(0)}=0;\\ &D\nabla^4 w^{(0)}-\nabla^2_{k0}\Phi^{(0)}=q_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Здесь $\nabla^2_{k0}w^{(0)}=k_x\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y^2}+k_y\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}$; $\nabla^2_{k0}\Phi^{(0)}=k_x\dfrac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial y^2}+k_y\dfrac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial x^2}$.

Затем прикладывается следующий малый слой нагрузки Δq_1. Прогиб и функция напряжений получают приращение, в результате чего их можно записать так:

$$w^{(1)}=w^{(0)}+\Delta w^{(1)};\quad \Phi^{(1)}=\Phi^{(0)}+\Delta\Phi^{(1)}, \tag{9.45}$$

где $\Delta w^{(1)}$, $\Delta\Phi^{(1)}$ — приращение прогиба и функции напряжений.

Подставим выражения (9.45) в уравнения (9.44):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\left(\Phi^{(0)}+\Delta\Phi^{(1)}\right)+\nabla^2_{k0}\left(w^{(0)}+\Delta w^{(1)}\right)=\\ &=-L_1\left[\left(w^{(0)}+\Delta w^{(1)}\right),\ \left(w^{(0)}+\Delta w^{(1)}\right)\right];\\ &D\nabla^4\left(w^{(0)}+\Delta w^{(1)}\right)-\nabla^2_{k0}\left(\Phi^{(0)}+\Delta\Phi^{(1)}\right)=\\ &=L_2\left[\left(\Phi^{(0)}+\Delta\Phi^{(1)}\right),\ \left(w^{(0)}+\Delta w^{(1)}\right)\right]+q_0+\Delta q_1. \end{aligned}\right\} \tag{9.46}$$

Вычитая почленно уравнения (9.44) из уравнений (9.46), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Delta\Phi^{(1)}+\nabla^2_{k1}\Delta w^{(1)}=-L_1\left(\Delta w^{(1)},\Delta w^{(1)}\right);\\ &D\nabla^4\Delta w^{(1)}-\nabla^2_{k1}\Delta\Phi^{(1)}-\nabla^2_1\Delta w^{(1)}=L_2\left(\Delta\Phi^{(1)},\ \Delta w^{(1)}\right)+\Delta q_1, \end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

причем

$$\nabla^2_{k1}\Delta w^{(1)}=$$

$$=\left(k_x+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial x\,\partial y}+\left(k_y+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial x^2};$$

$$\nabla^2_{k1}\Delta\Phi^{(1)}=$$

$$=\left(k_x+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(1)}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(1)}}{\partial x\,\partial y}+\left(k_y+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(1)}}{\partial x^2};$$

$$\nabla^2_1\Delta w^{(1)}=\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Delta w^{(1)}}{\partial y^2}.$$

Считая приращение нагрузки малым, можно ожидать, что приращение прогиба и функции напряжений также достаточно малы. Тогда можно опустить в правых частях уравнений (9.47) нелинейные слагаемые $L_1(\Delta w^{(1)}, \Delta w^{(1)})$, $L_2(\Delta\Phi^{(1)}, \Delta w^{(1)})$. В итоге для нахождения $\Delta w^{(1)}$, $\Delta\Phi^{(1)}$ имеем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Delta\Phi^{(1)}+\nabla^2_{k1}\Delta w^{(1)}=0;\\ &D\nabla^4\Delta w^{(1)}-\nabla^2_{k1}\Delta\Phi^{(1)}-\nabla^2_1\Delta w^{(1)}=\Delta q_1.\end{aligned}\right\} \qquad (9.48)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для последующих приращений нагрузки, получим уравнения относительно приращений $\Delta w^{(2)}$, $\Delta\Phi^{(2)}$, $\Delta w^{(3)}$, $\Delta\Phi^{(3)}$, ... Для произвольного приращения Δq_n можно записать

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Delta\Phi^{(n)}+\nabla^2_{kn}\Delta w^{(n)}=0;$$

$$D\nabla^4\Delta w^{(n)}-\nabla^2_{kn}\Delta\Phi^{(n)}-\nabla^2_n\Delta w^{(n)}=\Delta q_n,$$

где

$$\nabla^2_{kn}\Delta w^{(n)}=\left(k_x+\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial y^2}-$$

$$-2\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial x\,\partial y}+\left(k_y+\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial x^2};$$

$$\nabla^2_{kn}\Delta\Phi^{(n)}=\left(k_x+\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(n)}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial x\,\partial y}\times$$

$$\times\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(n)}}{\partial x\,\partial y}+\left(k_y+\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\Delta\Phi^{(n)}}{\partial x^2};$$

$$\nabla^2_n\Delta w^{(n)}=\frac{\partial^2\Phi^{(n-1)}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial x^2}-$$

$$-2\frac{\partial^2\Phi^{(n-1)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi^{(n-1)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Delta w^{(n)}}{\partial y^2}.$$

Полное значение прогиба w и функции усилий Φ после выполнения n-го шага определяются суммами:

$$w^{(n)}=w^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}\Delta w^{(i)};\quad \Phi^{(n)}=\Phi^{(0)}+\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi^{(i)}.$$

Заметим, что преобразования, проделанные с дифференциальными уравнениями (9.44), предполагают в случае необходимости аналогичные преобразования с граничными условиями.

При многократном повторении последовательных догружений погрешность нахождения функций w, Φ, вызванная отбрасыванием нелинейных членов, накапливается. Измельчение величины приращения нагрузки приводит к значительному увеличению трудоемкости решаемой задачи и устранить указанную погрешность не позволяет. Для повышения точности определения w и Φ метод последовательных догружений комбинируется с методом Ньютона, который на каждом шаге догружения уточняет искомое решение.

ГЛАВА 10

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТЕЛ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

§ 10.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В линейной теории упругости предполагается, что в процессе деформирования тела между напряжениями и деформациями соблюдается линейная зависимость. Однако испытания стандартных образцов убеждают в том, что для большинства материалов закон Гука справедлив лишь в области малых деформаций. Диаграмма испытания образцов при растяжении имеет вид, показанный на рис. 10.1,*а*,*б*, из которого видно, что начиная с некоторой точки B происходит нарушение линейной зависимости между σ и ε.

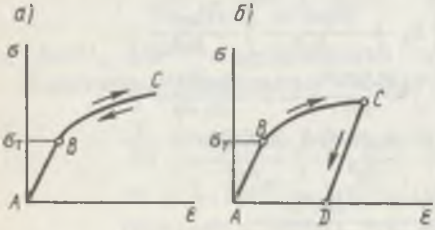


Рис. 10.1

Допустим, что при нагружении образца напряжения достигли значения, соответствующего точке C. При последующей разгрузке образца могут представиться две возможности. В одном случае диаграмма разгрузки совпадает с диаграммой нагружения CBA и тогда после снятия нагрузки образец возвращается в свое исходное состояние (рис. 10.1, *а*). Такие материалы называют *нелинейно-упругими*. В другом случае диаграмма разгрузки совпадает с прямой CD, почти параллельной первоначальному участку диаграммы AB (рис. 10.1, *б*). После удаления нагрузки в образце появляются остаточные деформации, определяемые отрезком AD. Подобные материалы называются *упругопластическими*.

Между нелинейно-упругими и упругопластическими материалами имеется принципиальная разница. Если для первых материалов справедлива однозначная зависимость между напряжениями и деформациями, которая позволяет по заданным деформациям определить напряжения, действующие в теле, то для упругопластических материалов взаимно однозначной зависимости $\sigma \sim \varepsilon$ не существует. По заданным деформациям напряжения можно определить только тогда, когда известна предыстория напряженно-деформированного состояния тела.

Изучению напряжений, деформаций и перемещений в пластически деформируемых телах посвящен раздел механики деформируемого твердого тела, называемый теорией пластичности [10, 12, 13, 18, 36]. Теория пластичности решает главным образом те же задачи, что и линейная теория упругости, но для материалов с другими физическими свойствами. Поэтому между указанными теориями имеется много общего, в частности общими оказываются уравнения равновесия, зависимости между перемещениями и деформациями, уравнения совместности деформаций. Только вместо закона Гука, используемого в линейной теории упругости, в теории пластичности применяются другие физические соотношения.

В общем случае нагружения тело можно разделить на две части. В одной из них появляются только упругие деформации, в другой — пластические. Возникает вопрос, связанный с определением границы между этими двумя частями. При одноосном напряженном состоянии это решается достаточно просто. Если напряжение $\sigma < \sigma_т$ (рис. 10.1), то справедлив закон Гука, если же $\sigma \geqslant \sigma_т$, то закон Гука перестает быть справедливым и нужно воспользоваться другими зависимостями между напряжениями и деформациями.

В случае плоского или объемного напряженного состояния определение границы между областями упругого и пластического деформирования тела решается с помощью так называемого критерия пластичности (текучести) или условия пластичности (текучести). Поэтому, приступая к изучению основ теории пластичности, нужно в первую очередь сформулировать критерий пластичности и получить соотношения между напряжениями и деформациями в случае пластического деформирования тела.

§ 10.2. УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассмотрим тело произвольной формы, считая, что начальные напряжения и деформации в нем отсутствуют. На начальном этапе нагружения такого тела возникают только упругие деформации и, следовательно, появление пластических деформаций однозначно определяется действующими напряжениями. В связи с этим условие пластичности можно записать в виде некоторой функции компонент тензора напряжений. Очевидно, что для изотропного материала условие появления пластических деформаций не должно зависеть от выбора координатной системы. Тогда указанная функция должна быть функцией трех инвариантов тензора напряжений, в качестве которых можно взять, например, три главных напряжения:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{10.1}$$

При одноосном растяжении имеем

$$\sigma_1 = \sigma_т. \tag{10.2}$$

При кручении стержней круглого поперечного сечения условие наступления пластичности записывается в виде

$$|\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \tau_т, \tag{10.3}$$

где $\tau_т$ — предел текучести материала при сдвиге.

Как видно, оба равенства (10.2) и (10.3) являются частными случаями соотношения (10.1).

Сен-Венан, основываясь на опытах французского инженера Треска по истечению металлов через отверстия, высказал предположение, что в пластическом состоянии максимальное касательное напряжение имеет одно и то же постоянное значение, являющееся константой для данного материала. Сен-Венан дал математическую формулировку критерию для случая плоской деформации, которую Леви обобщил на пространственную задачу теории пластичности, и потому этот критерий известен под названием критерия Сен-Венана — Леви.

Для объемного напряженного состояния критерий записывается так:

$$\left.\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_т; \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_т; \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_т. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Если $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то из трех соотношений (10.4) остается только одно:

$$2\,|\,\tau_{\max}\,| = |\,\sigma_1 - \sigma_3\,| = \sigma_т. \tag{10.5}$$

Заметим, что в курсе «Сопротивление материалов» критерий Сен-Венана — Леви известен под названием теории прочности наибольших касательных напряжений. Вообще говоря, это название не совсем корректно, так как прочность и пластичность совершенно различные понятия и наступление пластического состояния еще далеко не означает исчерпание прочности материала.

В условии (10.5) не учитывается влияние промежуточного главного напряжения σ_2 на возникновение пластических деформаций, что является главным недостатком критерия Сен-Венана — Леви.

В соотношении (10.1) вместо главных напряжений можно записать другие инварианты тензора напряжений, в частности I_1, I_2, I_3.

Многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что при всестороннем растяжении или сжатии материал деформируется упруго. Тогда можно принять, что условие пластичности зависит лишь от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений (первый инвариант девиатора напряжений равен нулю):

$$f_1\,(I_2^д,\ I_3^д) = 0. \tag{10.6}$$

Примером критерия пластичности, записанного в форме (10.6), является критерий, предложенный Губером и Мизесом и полученный ими исходя из условия постоянства энергии формоизменения:

$$\sigma_и = \sigma_т. \tag{10.7}$$

Здесь $\sigma_и$ — интенсивность напряжений, квадрат которой пропорционален второму инварианту девиатора напряжений:

$$\sigma_и^2 = 3I_2^д = \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]}.$$

Заметим, что критерий (10.7) известен в курсе «Сопротивление материалов» под названием энергетической теории прочности.

Интересно отметить, что Мизес считал условие (10.5) точным, а (10.7) — приближенным. Однако на деле оказалось, что равенство (10.7) лучше подтверждается опытами, чем условие (10.5).

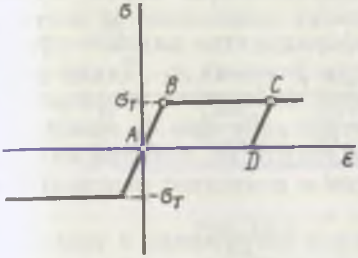


Рис. 10.2

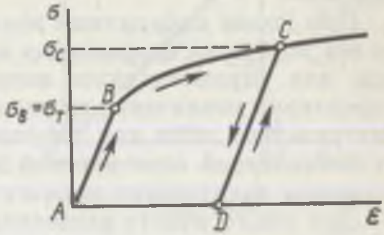


Рис. 10.3

Например, при чистом сдвиге из (10.5) имеем

$$|\tau_{max}| = \sigma_т/2, \tag{10.8}$$

а из (10.7) —

$$|\tau_{max}| = \sigma_т/\sqrt{3} \approx 0{,}577\ \sigma_т. \tag{10.9}$$

Эксперименты показывают, что пластические деформации при чистом сдвиге появляются при $|\tau_{max}| = (0{,}56\ \ldots\ 0{,}60)\ \sigma_т$. Таким образом, значение τ_{max}, определяемое равенством (10.9), ближе к опытным данным, чем τ_{max}, которое определяется выражением (10.8).

Учитывая тот факт, что оба рассмотренных критерия достаточно правильно предсказывают момент появления пластических деформаций, они занимают в теории пластичности равноправное положение. При решении конкретных задач, как правило, пользуются тем из них, который упрощает решение.

Приведенные критерии пластичности дают возможность зафиксировать момент появления первых пластических деформаций. Этих критериев достаточно для решения задач пластичности в том случае, когда деформирование материала при одноосном напряженном состоянии подчиняется диаграмме Прандтля (рис. 10.2). Объясняется это следующим обстоятельством. Допустим, что одноосному нагружению образца соответствует участок диаграммы ABC, а разгрузке — прямая CD. При повторном нагружении образец сначала деформируется упруго (в соответствии с прямой CD) до тех пор, пока напряжение вновь не достигнет предела текучести $\sigma_т$, после чего в нем появляются дополнительные пластические деформации. Другими словами, условие появления пластических деформаций в точке C имеет точно такой же вид, как и в точке B.

Ситуация изменяется, если рассматриваемый материал обладает упрочнением. Обратимся к рис. 10.3. При первоначальном нагружении появление пластических деформаций определяется на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$ значением напряжения σ_B, равным $\sigma_т$. Допустим, что после достижения на кривой деформирования точки C производится разгрузка образца, которой отвечает прямая CD, параллельная прямой AB.

При новом нагружении материал деформируется линейно-упруго до тех пор, пока напряжения не окажутся равными σ_C. Таким образом, для упрочняющихся материалов при повторных нагружениях характерно увеличение предела текучести и величина σ_C может рассматриваться лишь как текущий предел текучести, который зависит от накопленной пластической деформации и позволяет разграничить процессы нагружения и разгрузки.

Для аналогичного разделения процессов нагружения и разгрузки при сложном напряженном состоянии вводится условие упрочнения, которое по виду напоминает условие пластичности (10.6):

$$f\,(I_2^д,\ I_3^д) = \Phi\,(\eta). \tag{10.10}$$

Условие (10.6) содержит инварианты девиатора напряжений и константы материала, например предел текучести. В условие (10.10) входит некоторая функция $\Phi\,(\eta)$, зависящая от параметра упрочнения η материала.

В качестве одного из вариантов критерия (10.10) можно взять соотношение

$$\sigma_и = \Phi\,(\eta), \tag{10.11}$$

которое также является обобщением критерия Губера — Мизеса.

Если параметр упрочнения η совпадает с интенсивностью деформаций, то из (10.11) получим

$$\sigma_и = \Phi\,(\varepsilon_и). \tag{10.12}$$

Предположим, что кривая, описываемая функцией (10.12) и построенная в осях $\sigma_и$, $\varepsilon_и$, является «единой» для различных напряженных состояний. В таком случае ее можно определить из опытов при простом растяжении или сдвиге. Например, при одноосном растяжении имеем $\sigma_и = \sigma$ и, если материал несжимаем, $\varepsilon_и = \varepsilon$. Таким образом, кривая, соответствующая соотношению (10.12), совпадает в данном случае с диаграммой растяжения материала.

Если в рассматриваемой точке тела реализуется процесс нагружения, то текущее значение интенсивности напряжения $\sigma_и$ превышает все предшествующие ее значения. Уменьшение напряжения $\sigma_и$ свидетельствует о процессе разгрузки.

§ 10.3. ПРОСТОЕ И СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Определяющие соотношения теории пластичности, т. е. зависимости между напряжениями и деформациями, очевидно, должны учитывать не только текущие значения компонент тензора напряжений и деформаций, но и пути их достижения. Последнее встречает большие принципиальные трудности, которые в общем случае нагружения не решены до настоящего времени.

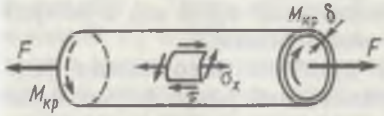


Рис. 10.4

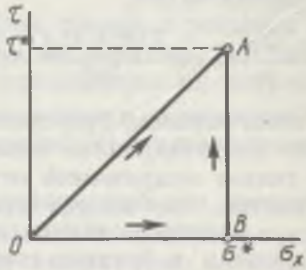


Рис. 10.5

В теории пластичности различают два вида нагружения тел: простое и сложное.

Нагружение называется простым, если все компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально одному параметру. В противном случае нагружение называется сложным.

Рассмотрим примеры простого и сложного нагружения.

Допустим, что цилиндрическая трубка находится под действием равномерного осевого растяжения и кручения (рис. 10.4). Если трубка имеет достаточно тонкую стенку, то напряженное состояние в ней можно считать плоским. Нормальное напряжение σ_x и касательное τ находятся из выражений

$$\sigma_x = \frac{F}{2\pi R\delta}; \quad \tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2\delta}.$$

При изменении внешних воздействий F, $M_{кр}$ пропорционально одному параметру λ осуществляется простое нагружение, так как компоненты тензора напряжений меняются пропорционально этому же параметру.

На рис. 10.5, где траектория нагружения строится в осях σ_x, τ, такое нагружение представлено лучом OA.

Итак, для простого нагружения справедливы равенства

$$\sigma_x = \lambda\sigma_x^0, \quad \tau_{xy} = \lambda\tau_{xy}^0, \quad \ldots \; .$$

Тогда среднее напряжение $\sigma_{ср}$ и интенсивность напряжения $\sigma_и$ равны

$$\sigma_{ср} = \lambda\sigma^0_{ср}, \quad \sigma_и = \lambda\sigma^0_и,$$

где

$$\sigma^0_{ср} = (\sigma^0_x + \sigma^0_y + \sigma^0_z)/3;$$

$$\sigma^0_и = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma^0_x - \sigma^0_y)^2 + (\sigma^0_y - \sigma^0_z)^2 + (\sigma^0_z - \sigma^0_x)^2 + 6(\tau^{0^2}_{xy} + \tau^{0^2}_{yz} + \tau^{0^2}_{zx})}.$$

В свою очередь, компоненты направляющего тензора напряжений не зависят от параметра λ.

Действительно,

$$\frac{\sigma_x - \sigma_{ср}}{\varepsilon_и} = \frac{\lambda(\sigma^0_x - \sigma^0_{ср})}{\lambda\sigma^0_и} = \frac{\sigma^0_x - \sigma^0_{ср}}{\sigma^0_и}; \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_и} = \frac{\lambda\tau^0_{xy}}{\lambda\sigma^0_и} = \frac{\tau^0_{xy}}{\sigma^0_и}, \ \ldots .$$

Таким образом, при простом нагружении от параметра λ зависят только два инварианта тензора напряжений $\sigma_{ср}$ и $\sigma_и$, а направляющий тензор напряжений остается неизменным.

Заметим, что иногда критерий простого нагружения формулируется в несколько отличной от приведенной ранее форме, а именно: при простом нагружении пропорционально одному параметру меняются компоненты девиатора напряжений (а не тензора напряжений).

Теперь рассмотрим другое нагружение, при котором к трубке (см. рис. 10.4) сначала была приложена осевая нагрузка F, создающая нормальное напряжение, значение которого достигло σ^*, затем был приложен крутящий момент $M_{кр}$. Нормальное напряжение σ^* в процессе приложения крутящего момента оставалось неизменным, а касательные напряжения возрастали от нуля до значения τ^*. В результате точка, изображающая тензор напряжений на плоскости в осях σ_x, τ, совпала с точкой A. Такое нагружение является сложным.

Для упругого тела последовательность его нагружения какой-либо роли не играет, так как имеет место однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями независимо от того, каким образом они созданы. В упругопластических телах ситуация оказывается принципиально отличной. Для упругопластического тела существен не только характер напряженного состояния в его точках, но и путь, по которому оно было создано. В зависимости от этого может значительно меняться деформированное состояние в одних и тех же точках тела.

§ 10.4. ТЕОРИЯ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Перейдем к формулировке соотношений между напряжениями и деформациями, используемыми в теории пластичности. Сразу следует отметить, что в настоящее время даже для изотропного материала известны различные теории пластичности. Все они могут быть условно отнесены к двум типам: к деформационным теориям пластичности и теориям пластического течения. В теориях первого типа устанавливается связь между напряжениями и деформациями, в то время как в теориях пластического течения — между бесконечно малыми приращениями пластических деформаций и напряжениями. Отсюда видна принципиальная разница между указанными теориями, так как в деформационных теориях уравнения, описывающие пластическое деформирование, являются конечными соотношениями, а в теориях пластического течения — дифференциальными.

Одной из теорий деформационного типа является теория малых упругопластических деформаций.

В гл. 1 были введены понятия тензоров, шаровых тензоров и девиаторов напряжений и деформаций. Там же отмечено, что тензоры напряжений и деформаций полностью определяются их направляющими тензорами $\bar{D}_{\text{н}}$, $\bar{D}_{\text{д}}$, средними значениями напряжений $\sigma_{\text{ср}}$ и деформаций $\varepsilon_{\text{ср}}$ (или объемной деформацией Θ) и интенсивностями напряжений $\sigma_{\text{и}}$ и деформаций $\varepsilon_{\text{и}}$.

Теория малых упругопластических деформаций для изотропных материалов строится на трех гипотезах-предположениях.

1. Объемная деформация тела считается упругой, т. е. для объемной деформации справедлив закон Гука

$$\sigma_{\text{ср}} = K\Theta = 3K\varepsilon_{\text{ср}}, \tag{10.13}$$

где K — объемный модуль упругости.

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя:

$$D_{\text{н}} = \psi D_{\text{д}}.$$

В скалярной форме это равенство записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} &= \psi(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}); \quad \tau_{xy} = \psi\gamma_{xy}/2; \\ \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} &= \psi(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}}); \quad \tau_{yz} = \psi\gamma_{yz}/2; \\ \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} &= \psi(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}}); \quad \tau_{zx} = \psi\gamma_{zx}/2. \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

Воспользуемся соотношениями (10.14) и выразим параметр ψ через интенсивности напряжений и деформаций:

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\psi^2\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi\,\frac{3}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_{\text{и}}.$$

Отсюда следует

$$\psi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}.$$

3. Соотношение $\sigma_и = \Phi(\varepsilon_и)$ не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Зависимости теории малых упругопластических деформаций, строго говоря, справедливы только при простом нагружении, однако и при сложных нагружениях, но близких к простым, указанная теория дает результаты, близкие к тем, которые наблюдаются в экспериментах.

В частном случае из равенств (10.14) следует закон Гука. Действительно, учитывая «единство» кривой $\sigma_и \sim \varepsilon_и$ и находя интенсивности напряжений и деформаций для одноосного напряженного состояния $\sigma_и = |\sigma|$, $\varepsilon_и = \frac{2}{3}(1+\mu)|\varepsilon|$, имеем

$$\frac{2}{3} \frac{\sigma_и}{\sigma_и} = \frac{|\sigma|}{(1+\mu)|\varepsilon|} = \frac{E}{1+\mu} = 2G.$$

В итоге из уравнений (10.14) следуют линейные зависимости, которые в сочетании с равенством (10.13) дают закон Гука для трехосного напряженного состояния [см. (2.37)].

Равенства (10.14) можно разрешить относительно напряжений, для чего среднее напряжение $\sigma_{ср}$ выражается с помощью (10.13) через объемную деформацию, которая переносится в правую часть соотношений (10.14):

$$\sigma_x = \left(3K - \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}\right)\varepsilon_{ср} + \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_и}{3\varepsilon_и}\gamma_{xy}, \quad \ldots \quad (10.14')$$

При решении задач теории пластичности в напряжениях необходимы выражения деформаций через напряжения, которые так же легко находятся из уравнений (10.14):

$$\varepsilon_x = \frac{3\varepsilon_и}{2\sigma_и}(\sigma_x - \sigma_{ср}) + \frac{\sigma_{ср}}{3K}, \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_и}{\sigma_и}\tau_{xy}, \quad \ldots$$

Часто для упрощения решения задач теории пластичности объемная деформация полагается равной нулю, т. е. материал предполагается несжимаемым. Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{3\varepsilon_и}{2\sigma_и}(\sigma_x - \sigma_{ср}), \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_и}{\sigma_и}\tau_{xy}, \quad \ldots \quad (10.14'')$$

§ 10.5. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В теориях пластического течения постулируется связь между приращениями пластических деформаций $d\varepsilon_x^п$, $d\gamma_{xy}^п$, ... и напряжениями.

Введем понятие интенсивности приращений пластических деформаций, определяя ее выражением, аналогичным выражению для интенсивности деформаций:

$$d\bar{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left(d\varepsilon_x^{\text{п}} - d\varepsilon_y^{\text{п}} \right)^2 + \left(d\varepsilon_y^{\text{п}} - d\varepsilon_z^{\text{п}} \right)^2 + \left(d\varepsilon_z^{\text{п}} - d\varepsilon_x^{\text{п}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \left[\left(d\gamma_{xy}^{\text{п}} \right)^2 + \left(d\gamma_{yz}^{\text{п}} \right)^2 + \left(d\gamma_{zx}^{\text{п}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \qquad (10.15)$$

Заметим, что интенсивность приращений пластических деформаций $d\bar{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}}$ не равна приращению интенсивности пластических деформаций.

По аналогии с девиатором деформаций введем понятие девиатора приращений пластических деформаций

$$D_{d\varepsilon}^{\text{п}} = \begin{vmatrix} d\varepsilon_x^{\text{п}} - d\varepsilon_{\text{ср}}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{yx}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{zx}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xy}^{\text{п}} & d\varepsilon_y^{\text{п}} - d\varepsilon_{\text{ср}}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{zy}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xz}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{yz}^{\text{п}} & d\varepsilon_z^{\text{п}} - d\varepsilon_{\text{ср}}^{\text{п}} \end{vmatrix}.$$

Теория пластического течения для изотропных материалов основывается на следующих гипотезах.

1. Соблюдается объемный закон Гука

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3K} \sigma_{\text{ср}}$$

или

$$d\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3K} d\sigma_{\text{ср}}.$$

2. Приращения деформации равны сумме приращений упругих $d\varepsilon_x^{\text{у}}$, $d\gamma_{xy}^{\text{у}}$, . . . и пластических деформаций $d\varepsilon_x^{\text{п}}$, $d\gamma_{xy}^{\text{п}}$, . . ., т. е.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^{\text{у}} + d\varepsilon_x^{\text{п}}, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^{\text{у}} + d\gamma_{xy}^{\text{п}}, \; \ldots .$$

В соответствии с первой гипотезой отсюда следует равенство

$$d\varepsilon_{\text{ср}}^{\text{п}} = 0.$$

Это условие можно интерпретировать как несжимаемость материала в пластическом состоянии.

Девиатор $D_{d\varepsilon}^{\text{п}}$ принимает вид

$$D_{d\varepsilon}^{\text{п}} = \begin{vmatrix} d\varepsilon_x^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{yx}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{zx}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xy}^{\text{п}} & d\varepsilon_y^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{zy}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2} d\gamma_{xz}^{\text{п}} & \frac{1}{2} d\gamma_{yz}^{\text{п}} & d\varepsilon_z^{\text{п}} \end{vmatrix}.$$

3. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций $D_{d\varepsilon}^{\text{п}}$ и девиатора напряжений $D_{\text{н}}$ равны с точностью до

множителя:

$$D^{\text{п}}_{\text{d}\varepsilon} = \text{d}\lambda D_{\text{н}}.$$

Это равенство в скалярной форме записывается так:

$$\left.\begin{aligned} \text{d}\varepsilon^{\text{п}}_x &= \text{d}\lambda\,(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}); \quad \frac{1}{2}\,\text{d}\gamma^{\text{п}}_{xy} = \text{d}\lambda\tau_{xy};\\ \text{d}\varepsilon^{\text{п}}_y &= \text{d}\lambda\,(\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}); \quad \frac{1}{2}\,\text{d}\gamma^{\text{п}}_{yz} = \text{d}\lambda\tau_{yz};\\ \text{d}\varepsilon^{\text{п}}_z &= \text{d}\lambda\,(\sigma_z - \sigma_{\text{ср}}); \quad \frac{1}{2}\,\text{d}\gamma^{\text{п}}_{zx} = \text{d}\lambda\tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

Повторяя рассуждения аналогичные тем, которые были выполнены при определении параметра ψ в теории малых упругопластических деформаций, найдем выражение для $\text{d}\lambda$:

$$\text{d}\lambda = \frac{3}{2}\,\frac{\text{d}\bar{\varepsilon}^{\text{п}}_{\text{и}}}{\sigma_{\text{и}}}.$$

Для приращений упругих деформаций $\text{d}\varepsilon^{\text{у}}_x$, $\text{d}\gamma^{\text{у}}_{xy}$, . . . и приращений напряжений $\text{d}\sigma_x$, $\text{d}\tau_{xy}$, . . . справедлив закон Гука

$$\text{d}\varepsilon^{y}_x = \frac{1}{E}\,[\text{d}\sigma_x - \mu\,(\text{d}\sigma_y + \text{d}\sigma_z)], \quad \text{d}\gamma^{y}_{xy} = \frac{1}{G}\,\text{d}\tau_{xy}, \quad \ldots . \tag{10.17}$$

Сложим соответственно левые и правые части уравнений (10.16), (10.17), в результате чего получим

$$\left.\begin{aligned} \text{d}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\,[\text{d}\sigma_x - \mu\,(\text{d}\sigma_y + \text{d}\sigma_z)] + \frac{3}{2}\,\frac{\text{d}\bar{\varepsilon}^{\text{п}}_{\text{и}}}{\sigma_{\text{и}}}\,(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}});\\ \text{d}\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\,\text{d}\tau_{xy} + 3\,\frac{\text{d}\bar{\varepsilon}^{\text{п}}_{\text{и}}}{\sigma_{\text{и}}}\,\tau_{xy}, \quad \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

4. Соотношение между параметром упрочнения и интенсивностью напряжений (10.11) не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Возьмем в качестве параметра упрочнения параметр

$$\eta = \int \text{d}\bar{\varepsilon}^{\text{п}}_{\text{и}}, \tag{10.19}$$

называемый *параметром Одквиста*.

Тогда из равенства (10.11) следует

$$\sigma_{\text{и}} = \Phi\,(\text{d}\bar{\varepsilon}^{\text{п}}_{\text{и}}). \tag{10.20}$$

Найдем эту зависимость, воспользовавшись, например, диаграммой растяжения материала.

При одноосном растяжении имеем

$$\sigma_{\text{и}} = \sigma, \quad \text{d}\varepsilon^{\text{п}}_{x} = \text{d}\varepsilon^{\text{п}}.$$

По отношению к чисто пластическим деформациям материал несжимаем, поэтому

$$d\varepsilon_y^{п} = d\varepsilon_z^{п} = -d\varepsilon^{п}/2.$$

Очевидно, что $d\bar{\varepsilon}_{и}^{п} = d\varepsilon^{п}$, и из (10.19) имеем

$$\eta = \int d\bar{\varepsilon}_{и}^{п} = \varepsilon^{п}.$$

В результате получим

$$\sigma = \Phi\left(\int d\bar{\varepsilon}_{и}^{п}\right) = \Phi(\varepsilon^{п}). \qquad (10.21)$$

Теперь график зависимости (10.21) нетрудно построить по диаграмме растяжения (рис. 10.6, кривая *1*), для чего в каждой точке ее нужно найти величину упругой деформации $\varepsilon^{у}$ и сдвинуть эту точку влево на расстояние $\varepsilon^{у}$. Построенная таким образом кривая *2* (рис. 10.6) и является графиком функции $\Phi\left(\int d\bar{\varepsilon}_{и}^{п}\right)$.

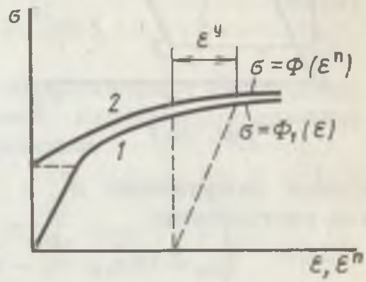


Рис. 10.6

При соблюдении равенства (10.20) условием нагружения в рассматриваемой точке тела является выполнение неравенства $d\sigma_{и} > 0$.

Нетрудно показать, что

$$d\sigma_{и} = \frac{3}{2\sigma_{и}}[(\sigma_x - \sigma_{ср})\,d\sigma_x + (\sigma_y - \sigma_{ср})\,d\sigma_y + (\sigma_z - \sigma_{ср})\,d\sigma_z + 2(\tau_{xy}\,d\tau_{xy} + \tau_{yz}\,d\tau_{yz} + \tau_{zx}\,d\tau_{zx})].$$

С учетом $\sigma_{и} > 0$ можно записать

$$(\sigma_x - \sigma_{ср})\,d\sigma_x + (\sigma_y - \sigma_{ср})\,d\sigma_y + (\sigma_z - \sigma_{ср})\,d\sigma_z + 2(\tau_{xy}\,d\tau_{xy} + \tau_{yz}\,d\tau_{yz} + \tau_{zx}\,d\tau_{zx}) > 0.$$

Условием разгрузки при соблюдении равенства (10.20) является выполнение неравенства $d\sigma_{и} < 0$.

Как видим, записанные в дифференциалах уравнения теории течения оказываются значительно сложнее уравнений теории малых упругопластических деформаций.

В теории пластичности доказано, что при простом нагружении эти теории дают одинаковое решение. В случае сложного нагружения результаты, полученные с помощью теории пластического течения, лучше согласуются с экспериментальными данными, и потому эта теория находит применение именно при решении задач в случаях сложных нагружений тел.

Если приращения упругих деформаций малы по сравнению с приращениями пластических деформаций, в равенствах (10.18) ими можно пренебречь. Тогда из уравнений (10.18) получим уравнения теории пластичности Сен-Венана — Леви:

$$d\varepsilon_x = \frac{3d\bar{\varepsilon}_{и}^{п}}{2\sigma_{и}}(\sigma_x - \sigma_{ср}),\quad d\gamma_{xy} = 3\,\frac{d\bar{\varepsilon}_{и}^{п}}{\sigma_{и}}\tau_{xy},\quad \dots$$

§ 10.6. РАЗГРУЗКА

Допустим, что после достижения интенсивностью напряжения некоторого значения $\sigma_{и}^{C}$ происходит ее уменьшение до значения $\sigma_{и}^{D}$ (рис. 10.7). Точкам C и D соответствуют напряжения σ_x^*, σ_x, . . . и деформации ε_x^*, ε_x, ...

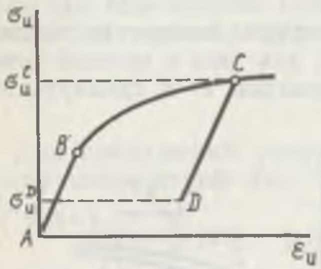


Рис. 10.7

Обозначим разности соответствующих напряжений и деформаций через $\bar{\sigma}_x$, . . ., $\bar{\varepsilon}_x$, . . ., т. е.

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x^* - \sigma_x,\ \dots,\ \bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x^* - \varepsilon_x, \dots \tag{10.22}$$

Считая справедливым при разгрузке закон Гука по отношению к разностям напряжений $\bar{\sigma}_x$, . . . и деформаций $\bar{\varepsilon}_x$, . . . (10.22) получим соотношения:

$$\bar{\sigma}_{ср} = 3K\bar{\varepsilon}_{ср};\quad \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_{ср} = 2G(\bar{\varepsilon}_x - \bar{\varepsilon}_{ср}),\quad \bar{\tau}_{xy} = G\bar{\gamma}_{xy};$$
$$\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_{ср} = 2G(\bar{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}_{ср}),\quad \bar{\tau}_{yz} = G\bar{\gamma}_{yz};$$
$$\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_{ср} = 2G(\bar{\varepsilon}_z - \bar{\varepsilon}_{ср}),\quad \bar{\tau}_{zx} = G\bar{\gamma}_{zx},$$

где

$$\bar{\sigma}_{ср} = \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z}{3};\quad \bar{\varepsilon}_{ср} = \frac{\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_z}{3}.$$

Зависимости между напряжениями σ_x, τ_{xy}, . . . и деформациями ε_x, γ_{xy}, . . . соответственно имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ср} = 3K\varepsilon_{ср} + (\sigma_{ср}^* - 3K\varepsilon_{ср}^*);\\ &\sigma_x - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{ср}) + [(\sigma_x^* - \sigma_{ср}^*) - 2G(\varepsilon_x^* - \varepsilon_{ср}^*)];\\ &\tau_{xy} = G\gamma_{xy} + (\tau_{xy}^* - G\gamma_{xy}^*),\ \dots \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

Таким образом, зная напряжения и деформации, отвечающие точке C, которые определяются при нагружении как результат решения задачи теории пластичности, напряжения и деформации, отвечающие точке D, можно определить из уравнений теории упругости.

§ 10.7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассмотрим некоторое тело, которое находится под действием массовых сил с составляющими X, Y, Z и поверхностных нагрузок, заданных составляющими p_x, p_y, p_z. В результате в теле появляются напряжения σ_x, τ_{xy}, . . ., деформации ε_x, γ_{xy}, . . . и перемещения u, v, w.

Напряжения удовлетворяют трем уравнениям равновесия внутри тела:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,\ \dots \tag{10.24}$$

Для перемещений и деформаций соблюдаются зависимости

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \dots \tag{10.25}$$

Деформации удовлетворяют уравнениям совместности

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y};\\ &2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right),\ \dots \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

Наконец, напряжения и деформации удовлетворяют физическим соотношениям, в качестве которых примем, например, уравнения теории малых упругопластических деформаций:

при нагружении

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \left(3K - \frac{2\sigma_{и}}{3\varepsilon_{и}}\right)\varepsilon_{ср} + \frac{2\sigma_{и}}{3\varepsilon_{и}}\varepsilon_x,\quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_{и}}{3\varepsilon_{и}}\gamma_{xy},\ \dots;\\ &\varepsilon_{ср} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3},\quad \sigma_{и} = \Phi(\varepsilon_{и}); \end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

при разгрузке

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ср} = 3K\varepsilon_{ср} + (\sigma_{ср}^* - 3K\varepsilon_{ср}^*);\\ &\sigma_x - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{ср}) + [(\sigma_x^* - \sigma_{ср}^*) - 2G(\varepsilon_x^* - \varepsilon_{ср}^*)];\\ &\tau_{xy} = G\gamma_{xy} + (\tau_{xy}^* - G\gamma_{xy}^*),\ \dots \end{aligned}\right\} \tag{10.28}$$

Задачи теории пластичности, так же как и задачи теории упругости, могут быть решены в перемещениях или напряжениях.

В первом случае решение задачи сводится к решению системы трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых функций перемещений u, v, w. Очевидно, что в частном случае при соблюдении закона Гука из этих уравнений должны получаться уравнения Ляме.

Если задача теории пластичности решается в напряжениях, то для их определения в общем случае нужно решить уравнения (10.24) и систему из шести нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которая является обобщением уравнений Бельтрами — Митчелла. Ввиду громоздкости названные уравнения не приводятся, а при решении частных задач их проще записать непосредственно с учетом конкретных условий.

Заметим, что при нагружении тела произвольной формы какими-либо внешними нагрузками в нем одновременно могут появиться зоны упругих и неупругих деформаций. В связи с этим решение задачи теории пластичности должно удовлетворять не только геометрическим и статическим граничным условиям на поверхности тела, но и дополнительным условиям на поверхности раздела зон упругих и пластических деформаций.

Как уже отмечалось, задача теории пластичности является нелинейной задачей, а для них принципиальным является вопрос о единственности решения.

В деформационной теории пластичности доказана теорема о единственности полей напряжений, деформаций и перемещений в случае упрочняющегося материала, т. е. при соблюдении неравенств

$$\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и} \geqslant \frac{d\sigma_и}{d\varepsilon_и} > 0.$$

В том случае, когда граничные условия на всей поверхности тела заданы в напряжениях, перемещения определяются с точностью до смещения рассматриваемого тела как абсолютно жесткого тела. Если же материал не обладает упрочнением, то единственность деформаций и перемещений может и не иметь места.

В теории пластического течения доказана теорема о единственности полей приращений напряжений, деформаций и перемещений в упрочняющемся теле. Гарантировать единственность приращений деформаций и перемещений в случае неупрочняющегося материала нельзя, хотя в частных задачах может быть доказана единственность указанных приращений и для идеально пластического материала.

§ 10.8. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

До сих пор речь шла о решении задач деформационной теории пластичности как о решении обобщенных уравнений Ляме или Бельтрами — Митчелла. Однако те же задачи могут рассматриваться как вариационные задачи, для решения которых могут быть привлечены вариационные принципы.

Воспользуемся для примера вариационным принципом Лагранжа, который заключается в том, что вариация работы внутренних и внешних сил на возможных перемещениях, согласующихся с геометрическими граничными условиями, равна нулю. При этом предполагается, что во всех точках тела не возникает разгрузка (другими словами, рассматривается вариационный принцип Лагранжа для нелинейно-упругого тела). Вариация работы внутренних сил δU определяется выражением

$$\delta U = \iiint\limits_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})\, dV,$$

а вариация работы внешних сил — работой массовых и поверхностных нагрузок

$$\delta \Pi = \iiint\limits_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dV + \iint\limits_{S_p} (p_x\delta u + p_y\delta v + p_z\delta w)\, dS,$$

где V, S_p — объем и поверхность тела, на которой заданы поверхностные нагрузки; δu, δv, δw — вариации перемещений, согласующиеся со связями, наложенными на тело:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), \; \ldots .$$

Уравнение Лагранжа записывается так [см. (3.15), (3.17)]:

$$\delta U - \delta \Pi = 0$$

или

$$\delta Э = 0, \tag{10.29}$$

причем $Э = U - \Pi$ — полная энергия тела.

Можно показать, что для устойчивой системы равенство (10.29) является условием минимума полной энергии.

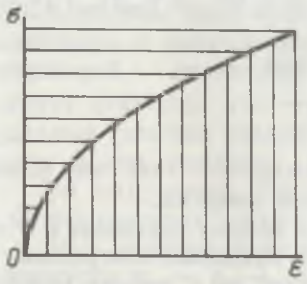


Рис. 10.8

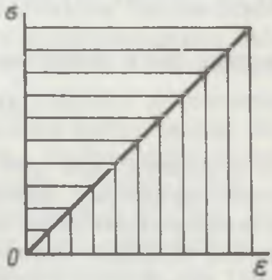


Рис. 10.9

Вариационное уравнение дает возможность получения приближенного решения задачи теории пластичности прямыми вариационными методами, в частности методом Ритца.

Аналогично принципу Лагранжа можно сформулировать вариационный принцип Кастильяно.

Рассмотрим диаграмму растяжения упрочняющегося материала (рис. 10.8). Работа, совершаемая действительными напряжениями на приращениях деформаций (работа внутренних сил на приращениях перемещений), численно равна площади фигуры, заштрихованной вертикальными линиями. С другой стороны, работа, совершаемая приращениями напряжений на действительных деформациях, определяется площадью фигуры, заштрихованной горизонтальными линиями. Эта работа называется дополнительной работой $U_0^{\text{доп}}$ (см. § 3.6). Заметим, что для линейно-упругого материала площади двух заштрихованных фигур совпадают (рис. 10.9), в связи с чем потенциальная энергия U такого тела совпадает с дополнительной работой. Очевидно, что для нелинейно-упругого тела подобное равенство оказывается несправедливым.

В соответствии с принципом Кастильяно работа вариаций напряжений $\delta\sigma_x$, $\delta\tau_{xy}$, . . . и внешних поверхностных нагрузок δp_x, . . ., образующих уравновешенную систему, на любом возможном для тела перемещении должна обратиться в нуль. Если в качестве перемещений принять действительные перемещения u, v, w, то

$$\iiint\limits_V (\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \varepsilon_z\delta\sigma_z + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx})\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int\limits_{S_p} (u\delta p_x + v\delta p_y + w\delta p_z)\,\mathrm{d}S.$$

В том случае, когда работа вариаций внешних сил на действительных перемещениях равна нулю, имеет место уравнение

$$\iiint\limits_V (\varepsilon_x\delta\sigma_x + \varepsilon_y\delta\sigma_y + \varepsilon_z\delta\sigma_z + \gamma_{xy}\delta\tau_{xy} + \gamma_{yz}\delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx})\,\mathrm{d}V = 0,$$

которое может быть представлено в виде

$$\delta U^{\text{доп}} = 0.$$

Можно показать, что для упрочняющегося тела это равенство соответствует минимуму дополнительной энергии.

Вариационные принципы могут быть сформулированы и в теории пластического течения. Остановимся на принципе Лагранжа.

Заметим, что в этом случае речь идет не о работе внутренних и внешних сил на возможных перемещениях, а о работе приращений указанных сил на возможных приращениях перемещений, согласованных с геометрическими граничными условиями.

Действительно, вводя аналогично понятию полной энергии $Э$ в теории упругости или деформационной теории пластичности понятие энергии приращений перемещений при отсутствии массовых сил:

$$Э(\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v,\ \mathrm{d}w) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\mathrm{d}\sigma_x\,\mathrm{d}\varepsilon_x + \mathrm{d}\sigma_y\,\mathrm{d}\varepsilon_y + \mathrm{d}\sigma_z\,\mathrm{d}\varepsilon_z + \mathrm{d}\tau_{xy}\,\mathrm{d}\gamma_{xy} +$$

$$+ \mathrm{d}\tau_{yz}\,\mathrm{d}\gamma_{yz} + \mathrm{d}\tau_{zx}\,\mathrm{d}\gamma_{zx})\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_p} (\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}p_z\,\mathrm{d}w)\,\mathrm{d}S,$$

можно показать, что среди всех возможных приращений перемещений, согласованных с геометрическими граничными условиями, истинными являются те, при которых $Э(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}w)$ имеет абсолютно минимальное значение.

§ 10.9. ТЕОРЕМА О ПРОСТОМ НАГРУЖЕНИИ. ТЕОРЕМА О РАЗГРУЗКЕ

Ранее отмечалось, что уравнения теории малых упругопластических деформаций, строго говоря, справедливы только при простом нагружении, т. е. в том случае, когда компоненты тензора напряжений меняются при увеличении нагрузок пропорционально одному параметру. Как было показано ранее на примере однородного напряженного состояния (напряженное состояние одинаково во всех точках тела), простое нагружение реализуется в том случае, когда внешние нагрузки меняются пропорционально одному параметру. Однако пока не известно, можно ли осуществить в случае произвольного тела такое нагружение, при котором направляющий тензор напряжений останется в процессе нагружения от начала и до конца неизменным, будучи различным в разных точках тела.

Частичный ответ на поставленный вопрос дает доказанная А. А. Ильюшиным теорема о простом нагружении, которая утверждает: *для того чтобы во всех точках тела произвольной формы при увеличении внешних нагрузок пропорционально одному общему параметру нагружение было простым, достаточно, чтобы материал был несжимаемым, а зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций — степенной* $\sigma_и = A\varepsilon_и^\alpha$ (*A*, α — *константы*).

Следует отметить, что теорема формулирует достаточные, но не необходимые условия реализации простого нагружения. На частных примерах можно показать, что простое нагружение можно осуществить при нарушении условий теоремы. Тривиальным примером этого может служить нагружение тонкостенной трубки, рассмотренное в § 10.3. Материал трубки может быть сжимаемым ($\mu \neq 0{,}5$), а зависимость $\sigma_и \sim \varepsilon_и$ — отличной от степенной, но тем не менее при пропорциональном увеличении внешних нагрузок в ней создается простое нагружение.

Допустим, что при простом (или близком к нему) нагружении в теле было создано напряженно-деформированное состояние, которое определяется компонентами тензоров напряжений σ_x^*, τ_{xy}^* ... и деформаций ε_x^*, γ_{xy}^* ... . Для сравнения найдем напряжения $\sigma_x^у$, $\tau_{xy}^у$, ... и деформации $\varepsilon_x^у$, $\gamma_{xy}^у$, ..., которые возникают в том же теле при соблюдении закона Гука в процессе всего нагружения.

После того как нагрузка достигла своего максимального значения, производится разгружение тела. Будем предполагать, что оно не влечет за собой появления в теле вторичных пластических деформаций (пластических деформаций противоположного знака). Определение напряжений и деформаций при разгрузке осуществляется с помощью уравнений (10.23).

Если нагрузка снята полностью, то в теле возникают остаточные напряжения σ_x^0, τ_{xy}^0, . . . и деформации ε_x^0, γ_{xy}^0, . . ., которые могут быть найдены на основании теоремы о разгрузке, доказанной А. А. Ильюшиным, как разности:

$$\sigma_x^0 = \sigma_x^* - \sigma_x^y, \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{xy}^* - \tau_{xy}^y, \ . \ . \ .;$$

$$\varepsilon_x^0 = \varepsilon_x^* - \varepsilon_x^y, \quad \gamma_{xy}^0 = \gamma_{xy}^* - \gamma_{xy}^y, \ . \ . \ . \ .$$

Иначе говоря, остаточные напряжения и деформации определяются как разности напряжений и деформаций, существовавших в упругопластическом теле перед началом разгрузки, и напряжений и деформаций, которые возникли бы в аналогичном упругом теле при нагружении его той же нагрузкой.

Таким образом, для отыскания остаточных напряжений и деформаций нужно для одного и того же нагружения решить сначала задачу теории пластичности, а затем задачу теории упругости.

§ 10.10. МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Решение задач теории пластичности связано с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (10.24) . . . (10.28), что представляет собой чрезвычайно сложную задачу, которая в аналитическом виде решается, как правило, в исключительных случаях. Поэтому решение задачи теории пластичности чаще всего строится с помощью приближенных методов. Одним из них является метод последовательных приближений, предложенный А. А. Ильюшиным и называемый в теории пластичности *методом упругих решений*. Суть его заключается в рассмотрении последовательности линейных задач теории упругости, решения которых с увеличением порядкового номера сходятся к решению задачи теории пластичности.

Известны различные модификации метода упругих решений. Остановимся на двух из них: методе упругих решений в форме дополнительных нагрузок и методе упругих решений в форме переменных параметров упругости.

В первом случае появление пластических деформаций учитывается введением некоторых фиктивных дополнительных объемных и поверхностных нагрузок, во втором — изменением модуля упругости и коэффициента Пуассона, которые являются в каждом приближении функциями пространственных координат.

Схему решения задач по каждой из модификаций рассмотрим сначала на простейшей задаче.

Возьмем стержень постоянного поперечного сечения, площадь которого равна A, растянутый силами F, приложенными по концам (рис. 10.10).

Будем считать, что напряженное состояние в стержне является одноосным.

Для материала стержня при монотонном нагружении характерна однозначная нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями

$$\sigma = \Phi(\varepsilon). \tag{10.30}$$

Задача состоит в определении относительной продольной деформации стержня при заданной силе F.

Метод упругих решений в форме дополнительных нагрузок. Перепишем зависимость (10.30) следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon - [E\varepsilon - \Phi(\varepsilon)]$$

или

$$\sigma = E[\varepsilon - \omega(\varepsilon)\varepsilon], \tag{10.31}$$

где

$$E\omega(\varepsilon)\varepsilon = E\varepsilon - \Phi(\varepsilon).$$

Зависимость (10.31) может быть легко интерпретирована графически (рис. 10.11). Очевидно, что

$$\omega(\varepsilon) = 1 - \frac{\Phi(\varepsilon)}{E\varepsilon} = \begin{cases} 0, & \sigma \leqslant \sigma_т; \\ \dfrac{AB - AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB}, & \sigma > \sigma_т. \end{cases}$$

Отрезок BC показывает, насколько напряжение в упругопластическом стержне меньше напряжения в упругом стержне при одном и том же значении деформации. Таким образом, функция $\omega(\varepsilon)$ характеризует степень упрочнения материала.

Выразим деформацию ε через напряжение σ и функцию $\omega(\varepsilon)$

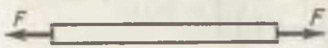


Рис. 10.10

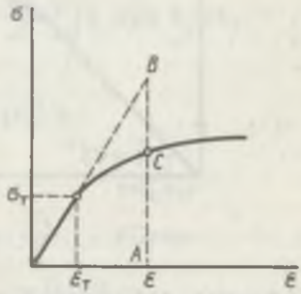


Рис. 10.11

из равенства (10.31). Принимая во внимание то, что $\sigma = F/A$, имеем

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon)\varepsilon.$$

Построим последовательность вычисления ε (при фиксированном значении силы F) таким образом:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_0 = \frac{F}{EA}; \\ &\varepsilon_1 = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon_0)\varepsilon_0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varepsilon_n = \frac{F}{EA} + \omega(\varepsilon_{n-1})\varepsilon_{n-1}, \quad n > 0. \end{aligned}\right| \tag{10.32}$$

Другими словами, в качестве начального приближения ε_0 принимается решение для упругого стержня с модулем упругости E, нагруженного силой F, а на каждом последующем шаге вновь решается задача для того же упругого стержня, но уже находящегося под действием новой нагрузки:

$$F_* = F + EA\omega(\varepsilon_{n-1})\,\varepsilon_{n-1}, \quad n > 0.$$

Последовательность вычислений по алгоритму (10.32) можно геометрически проиллюстрировать рис. 10.12. Действительно, для каж-

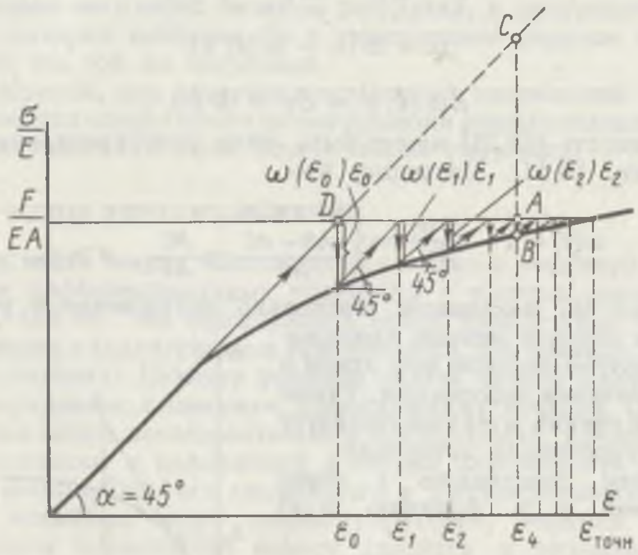


Рис. 10.12

дого значения деформации ε_n находится значение отрезка $CB = \omega(\varepsilon_n)\,\varepsilon_n$ и в следующем приближении полагается, что

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 + CB$$

или

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 + DA + AB = \varepsilon_n + AB.$$

Как видно из рисунка, процесс последовательных приближений (итерационный процесс) сходится к точному значению деформации $\varepsilon_{\text{точн}}$, если функция $\omega(\varepsilon)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega(\varepsilon) \leqslant \omega(\varepsilon) + \varepsilon\frac{d\omega(\varepsilon)}{d\varepsilon} \leqslant \lambda \quad \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_{\text{т}}, \qquad (10.33)$$

где $\lambda < 1$ — константа.

Однако можно заметить, что скорость сходимости существенно зависит от вида функции $\omega(\varepsilon)$. Если материал стержня обладает большим упрочнением, т. е. кривая $\sigma \sim \varepsilon$ мало отклоняется от прямой $\sigma = E\varepsilon$ или, что то же самое, функция $\omega(\varepsilon)$ мала, то уже третье-четвертое приближения дают достаточно точное значение деформации ε. И наоборот, если материал обладает малым упрочнением, то может потребоваться значительное число итераций (приближений), чтобы получить значение деформации с требуемой точностью.

Для числового примера рассмотрим диаграмму растяжения материала, имеющего линейное упрочнение (рис. 10.13). Зависимость между напряжениями и деформациями для нее записывается следующим образом:

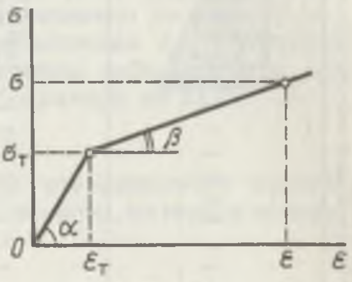


Рис. 10.13

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_т; \\ \sigma_т + E_k(\varepsilon - \varepsilon_т), & \varepsilon \geqslant \varepsilon_т, \end{cases} \tag{10.34}$$

где $E = \operatorname{tg}\alpha$, $E_k = \operatorname{tg}\beta$.

Представим зависимость (10.34) в форме (10.31), для чего прибавим и вычтем в правой части равенства (10.34) произведение $E\varepsilon$:

$$\sigma = E\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_т}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\right]\varepsilon \text{ при } \varepsilon \geqslant \varepsilon_т.$$

Таким образом, имеем

$$\sigma = E\,[1 - \omega(\varepsilon)]\,\varepsilon,$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_т; \\ \left(1 - \dfrac{\varepsilon_т}{\varepsilon}\right)\left(1 - \dfrac{E_k}{E}\right), & \varepsilon \geqslant \varepsilon_т. \end{cases}$$

Допустим, что $F/(EA) = 0{,}002$; $\varepsilon_т = 0{,}001$.

Для оценки влияния отношения E_k/E, т. е. степени упрочнения материала, на скорость сходимости процесса итераций в табл. 10.1 представлены значения ε_n при $E_k/E = 0{,}5$ и $0{,}25$.

Как видно, снижение степени упрочнения может привести к резкому увеличению числа приближений.

Относительно процесса последовательных приближений по рассмотренной модификации метода упругих решений можно заметить, что в теории пластичности доказана его сходимость к точному решению для задач, в которых граничные условия формулируются только в перемещениях ($u = v = w = 0$) или в напряжениях при

$$0 \leqslant \omega(\varepsilon_и) < 1$$

и

$$0 \leqslant \omega(\varepsilon_и) + \varepsilon_и \frac{d\omega(\varepsilon_и)}{d\varepsilon_и} \leqslant 1 - \frac{k}{2G} = \lambda < 1, \quad \frac{d\omega(\varepsilon_и)}{d\varepsilon_и} \geqslant 0.$$

Таблица 10.1

n	$E_k/E=0,5$; $\varepsilon_{\text{точн}}=0,003$		$E_k/E=0,25$; $\varepsilon_{\text{точн}}=0,005$	
	ε_n	погрешность, %	ε_n	погрешность, %
0	0,002	50	0,002	60
1	0,0025	16,67	0,00275	45
2	0,00275	8,33	0,0033125	33,75
3	0,002875	4,17	0,00373438	25,31
4	0,0029375	2,08	0,00405078	18,98
5	0,00296875	1,04	0,00428809	14,24
6	—	—	0,00446606	10,68
7	—	—	0,00459955	8,01
8	—	—	0,00469966	6,01
9	—	—	0,00477475	4,51
10	—	—	0,00483106	3,38
11	—	—	0,00487329	2,53
12	—	—	0,00490497	1,90
13	—	—	0,00492873	1,43
14	—	—	0,00494655	1,07

Последнее условие вытекает из следующих соображений: касательный модуль для диаграммы $\sigma_и \sim \varepsilon_и$ предполагается отличным от нуля, т. е.

$$\frac{d\sigma_и}{d\varepsilon_и} \geqslant k > 0,$$

но, с другой стороны,

$$\frac{d\sigma_и}{d\varepsilon_и} = 2G\left[1-\omega(\varepsilon_и)-\varepsilon_и\frac{d\omega(\varepsilon_и)}{d\varepsilon_и}\right], \quad \frac{d\omega(\varepsilon_и)}{d\varepsilon_и} > 0.$$

В итоге получим приведенное выше условие, которому должна удовлетворять функция $\omega(\varepsilon_и)$.

Особенности применения метода дополнительных нагрузок к решению более сложных задач теории пластичности будут проиллюстрированы в дальнейшем на примере изгиба пластин.

Метод переменных параметров упругости. Представим зависимость (10.30) в виде $\sigma = E(\varepsilon)\,\varepsilon$ или $\varepsilon = \sigma/E(\varepsilon)$, причем

$$E(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon)/\varepsilon.$$

Построим следующий итерационный процесс:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_0 = \frac{F}{EA};\\ &\varepsilon_1 = \frac{F}{E(\varepsilon_0)\,A};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varepsilon_n = \frac{F}{E(\varepsilon_{n-1})\,A}, \quad n>0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.35)$$

Как видно, в этом случае решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности линейных упругих задач. В качестве начального приближения, так же как и в предыдущей форме метода упругих решений, принимается решение для упругого стержня с модулем упругости E. В последующих приближениях также рассматривается упругий стержень, но на каждом шаге с новым модулем упругости.

Последовательность вычислений по формулам (10.35) геометрически можно интерпретировать так, как показано на рис. 10.14.

Очевидно, что последовательные приближения ε_n, полученные таким образом, сходятся к точному значению деформации ε, если функция $E(\varepsilon)$ является непрерывной и отличной от нуля:

$$E(\varepsilon) \geqslant E_* > 0.$$

Для сравнения скорости сходимости итерационного процесса (10.35) вернемся к рассмотренному ранее стержню, материал которого обладает линейным упрочнением.

Нетрудно убедиться в том, что модуль упругости $E(\varepsilon)$ для такого материала определяется следующим образом:

$$E(\varepsilon) = \begin{cases} E, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_т; \\ E_k + (E - E_k)\frac{\varepsilon_т}{\varepsilon}, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_т. \end{cases}$$

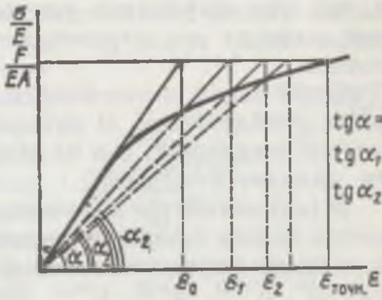


Рис. 10.14

Результаты решения задачи по методу переменных параметров упругости, представленные в табл. 10.2, также свидетельствуют о сходимости последовательности ε_n к точному значению деформации ε. Причем можно отметить более быструю сходимость данного итерационного процесса, особенно при $E_k/E = 0{,}25$, по сравнению с процессом, построенным по методу упругих решений в форме дополнительных нагрузок.

Таблица 10.2

n	$E_k/E = 0,5$; $\varepsilon_{точн} = 0,003$		$E_k/E = 0,25$; $\varepsilon_{точн} = 0,005$	
	ε_n	погрешность, %	ε_n	погрешность, %
0	0,002	50	0,002	60
1	0,00266667	11,11	0,0032	36
2	0,00290909	3,03	0,00412903	17,42
3	0,00297674	0,78	0,00463348	7,33
4	—	—	0,00485596	2,88
5	—	—	0,00494499	1,10
6	—	—	0,00497923	0,42

Соотношения между напряжениями и деформациями теории малых упругопластических деформаций можно представить в виде соотношений закона Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}[\sigma_x - \mu^*(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G^*}\tau_{xy}, \quad \ldots,$$

где

$$E^* = \frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}\left[1 + \frac{1-2\mu}{3E}\,\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}\right]^{-1},$$

$$\mu^* = \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E}\,\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}\right]\left[1 + \frac{1-2\mu}{3E}\,\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}\right]^{-1}, \quad G^* = \frac{\sigma_и}{3\varepsilon_и} = \frac{E^*}{2(1+\mu^*)}.$$

Для несжимаемого материала (при $\mu = 0{,}5$) выражения для E^*, μ^* упрощаются: $E^* = 3G^* = \sigma_и/e_и$, $\mu^* = 0{,}5$.

Как видно, в этом случае «модуль упругости» E^* совпадает с секущим модулем на диаграмме $\sigma_и \sim \varepsilon_и$.

Таким образом, задачу теории пластичности можно рассматривать как задачу теории упругости, но для неоднородного упругого тела, так как «параметры упругости» в каждой точке тела в общем случае зависят от характеристик напряженно-деформированного состояния.

Решение такой нелинейной задачи строится по методу последовательных приближений. В начальном приближении $E^{*(0)}$, $\mu^{*(0)}$ принимаются равными E, μ и из решения задачи линейной теории упругости находятся $\sigma_x^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$, . . ., $\varepsilon_x^{(0)}$, $\gamma_{xy}^{(0)}$, . . ., $\varepsilon_и^{(0)}$. Из зависимости $\Phi(\varepsilon_и)$ находится величина $\sigma_и^{(0)}$, а затем $E^{*(1)}$, $\mu^{*(1)}$, $G^{*(1)}$. Далее решается задача линейной неоднородной теории упругости. По найденным из нее компонентам деформированного состояния определяются $\varepsilon_и^{(1)}$, $\sigma_и^{(1)}$, $E^{*(2)}$, $\mu^{*(2)}$, $G^{*(2)}$. Как и в рассмотренном примере для одноосного напряженного состояния, процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока значения компонент тензоров напряжений или деформаций в двух соседних приближениях не будут отличаться друг от друга на величину, меньшую величины допустимой погрешности.

Накопленный опыт применения метода упругих решений в форме метода переменных параметров упругости при решении задач теории пластичности говорит о том, что он обеспечивает сходимость последовательных приближений к точному решению, однако до настоящего времени строгого доказательства этого утверждения нет.

§ 10.11. КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

При кручении упругого стержня (см. § 5.2) предполагалось, что нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z равны нулю, а из касательных напряжений отличными от нуля являются напряжения τ_{xz}, τ_{yz} (рис. 10.15), которые удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \qquad (10.36)$$

причем на боковой поверхности соблюдается равенство

$$\tau_{xz}\cos(\nu,\ x) + \tau_{yz}\cos(\nu,\ y) = 0.$$

Очевидно, что эти уравнения справедливы и для стержня, выполненного из идеального упругопластического материала, для которого справедлива диаграмма Прандтля. Допустим, что все поперечное сечение стержня находится в состоянии текучести.

Интересно отметить, что условия текучести Сен-Венана и Мизеса в данном случае имеют один и тот же вид:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2. \tag{10.37}$$

Наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении стержня

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}.$$

На основании критерия пластичности Сен-Венана имеем $2\tau_{\max} = \sigma_т$, откуда следует, что $k = \sigma_т/2$.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является то, что касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} могут быть найдены из уравнений (10.36) и (10.37) независимо от деформаций и перемещений, что характерно для статически определимых задач. Однако статическая определимость является в данном случае условной, так как для определения напряжений наряду с уравнением равновесия используется условие текучести.

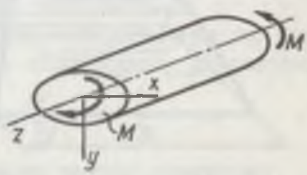


Рис. 10.15

Для решения задачи воспользуемся функцией напряжений $F_п$, через которую напряжения τ_{xz}, τ_{yz} определяются производными

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F_п}{\partial y};\quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F_п}{\partial x}. \tag{10.38}$$

Очевидно, что уравнение равновесия (10.36) удовлетворяется тождественно. После подстановки соотношений (10.38) в условие текучести (10.37) получим нелинейное уравнение относительно функции $F_п$:

$$\left(\frac{\partial F_п}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_п}{\partial y}\right)^2 = k^2. \tag{10.39}$$

На контуре функция $F_п$, так же как и в упругом стержне, принимает постоянное значение: $F_п = c = \text{const}$.

Постоянную c для односвязного контура вновь можно принять равной нулю.

Найдем направляющие косинусы нормали к поверхности, описываемой уравнением

$$z = F_п(x,\ y). \tag{10.40}$$

Из аналитической геометрии известно, что

$$\cos(\nu,\ x)=\frac{1}{d}\ \frac{\partial F_п}{\partial x}; \qquad \cos(\nu,\ y)=\frac{1}{d}\ \frac{\partial F_п}{\partial y};$$

$$\cos(\nu,\ z)=\frac{1}{d},$$

где $d^2=1+\left(\frac{\partial F_п}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_п}{\partial y}\right)^2$.

Учитывая равенство (10.39), получим

$$\cos(\nu,\ x)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\partial F_п}{\partial x};\ \cos(\nu,\ y)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\ \frac{\partial F_п}{\partial y};\ \cos(\nu,\ z)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Таким образом, выражение, стоящее в левой части уравнения (10.39), является квадратом градиента функции $F_п$, а поверхность, описываемая функцией (10.40), в силу постоянства $\cos(\nu, z)$ является

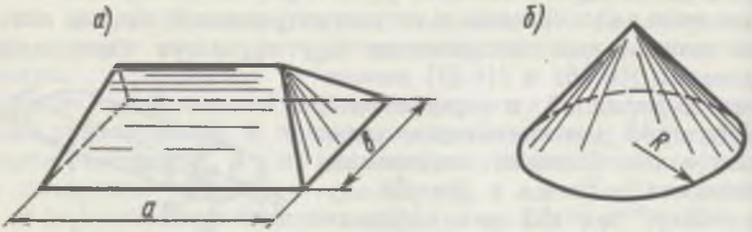


Рис. 10.16

поверхностью с постоянным углом ската (поверхность естественного откоса), которую можно построить на контуре поперечного сечения стержня. Уравнение (10.39) не содержит угла закручивания Θ, поэтому поверхность (10.40) не зависит от него, т. е. угол Θ оказывается неопределенным.

Чтобы получить наглядное представление о поверхности (10.40), поступим следующим образом. Расположим горизонтально жесткий шаблон, повторяющий поперечное сечение стержня, и насыплем на него сухой мелкий песок. Получится холмик с естественными откосами, поверхность которого подобна поверхности, описываемой выражением (10.40). Для прямоугольного поперечного сечения она напоминает крышу (рис. 10.16, *а*), а для круглого поперечного сечения она оказывается конической (рис. 10.16, *б*).

Рассмотренное состояние стержня является предельным и соответствующий ему крутящий момент M_* определяется, аналогично крутящему моменту в упругом стержне (5.24), интегралом

$$M_*=2\iint F_п(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Как видно, предельный момент равен удвоенному объему, ограниченному поверхностью (10.40) и поперечным сечением стержня, что и позволяет легко найти величину M_*.

Так, для круглого поперечного сечения радиусом R имеем (рис. 10.16, *б*) $M_* = \frac{2}{3} k\pi R^3$, для прямоугольного сечения с размерами a и b ($a > b$) (рис. 10.16, *а*) $M_* = \frac{k}{6}(3a - b)\, b^2$, а для очень вытянутого прямоугольника ($a \gg b$)

$$M_* \approx \frac{k}{2} ab^2.$$

Рис. 10.17

В состоянии, предшествующем предельному, в поперечном сечении имеют место зоны упругих и пластических деформаций. В упругой области функция напряжений $F_у$ определяется из уравнения (5.22), а в пластической зоне — из (10.39).

На границе указанных зон касательные напряжения не имеют разрывов, поэтому должны соблюдаться следующие равенства:

$$\frac{\partial F_у}{\partial x} = \frac{\partial F_п}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_у}{\partial y} = \frac{\partial F_п}{\partial y}.$$

Другими словами, на границе зон имеет место равенство

$$F_у = F_п + \text{const}.$$

Если хотя бы в одной точке справедливо равенство $F_у = F_п$, то это равенство сохраняется вдоль всей границы.

Решение задачи о распределении областей упругих и пластических деформаций для стержня с произвольным поперечным сечением представляет значительные трудности. Наглядное представление о них можно получить, воспользовавшись аналогией Надаи.

Построим над поперечным сечением жесткую «крышу», например из оргстекла, с естественным углом откоса. Основание этой крыши затянем пленкой (мембраной), которую будем загружать равномерно распределенным давлением. Если давление достаточно мало, то пленка не будет нигде касаться стеклянной крыши, что свидетельствует об отсутствии пластических зон в пределах поперечного сечения стержня. По мере увеличения давления мембрана получает все бо́льшие перемещения, в результате чего в некоторых местах она начнет прилегать к крыше. Те части поперечного сечения, которые располагаются под местами соприкасания пленки и крыши, являются зонами пластического деформирования, а остальная часть поперечного сечения деформируется упруго.

На рис. 10.17 показаны возможные распределения зон упругих и пластических деформаций в стержне прямоугольного сечения при увеличении внешнего момента M.

Ранее были рассмотрены стержни, выполненные из идеально упругопластического материала. Теперь коротко остановимся на особенностях расчета закручиваемых стержней из упрочняющегося материала. Для решения задачи в напряжениях воспользуемся функцией напряжений (функцией Прандтля), через которую касательные напряжения определяются выражениями

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

С помощью зависимостей теории малых упругопластических деформаций найдем деформации сдвига:

$$\gamma_{xz} = \Phi_* (\sigma_и) \tau_{xz}; \quad \gamma_{yz} = \Phi_* (\sigma_и) \tau_{yz}, \tag{10.41}$$

где

$$\Phi_* (\sigma_и) = 3 \frac{\varepsilon_и}{\sigma_и}; \quad \sigma_и = \sqrt{3} \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

После подстановки соотношений (10.41) в уравнение совместности деформаций

$$-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\Theta}{l}$$

получим разрешающее уравнение для функции F:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_* (\sigma_и) \frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi_* (\sigma_и) \frac{\partial F}{\partial y}\right] = -\frac{2\Theta}{l}. \tag{10.42}$$

На контуре поперечного сечения функция F удовлетворяет условию $F = \mathrm{const}$.

Решая уравнение (10.42) совместно с уравнением

$$M_{кр} = 2 \iint F(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{10.43}$$

найдем функцию напряжений F и значение угла закручивания для заданного внешнего скручивающего момента.

В редких случаях, как, например, для стержня, поперечное сечение которого имеет форму круга или очень вытянутого прямоугольника, при некоторых законах упрочнения достаточно просто можно получить аналитическое решение поставленной задачи. Во всех других случаях может быть найдено только приближенное решение, что, в частности, можно сделать с помощью метода упругих решений.

Уравнения (10.42), (10.43) представлены в такой форме, которая удобна для применения метода переменных параметров упругости.

При этом алгоритм решений имеет вид

$$\nabla^2 F_0 = -2G\frac{\Theta}{l};\quad 2\iint F_0(x,\ y)\,dx\,dy = M_{\text{кр}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G_{n-1}}\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G_{n-1}}\frac{\partial F_n}{\partial y}\right) = -2\frac{\Theta_n}{l};$$

$$2\iint F_n(x,\ y)\,dx\,dy = M_{\text{кр}}\quad \text{при}\quad n>0,$$

где F_n, Θ_n, G_n — n-е приближение функции $F(x, y)$, угла закручивания Θ и переменного модуля сдвига G;

$$\frac{1}{G_n} = \Phi_*(\sigma_{\text{и}}^{(n)});\quad \sigma_{\text{и}}^{(n)} = \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_n}{\partial y}\right)^2}.$$

Очевидно, что модуль сдвига G_n является функцией координат x, y.

§ 10.12. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассмотрим плоское напряженное состояние, которое реализуется в тонкой пластине, выполненной из идеально упругопластического материала, при действии сил, лежащих в ее плоскости.

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, возникающие в пластине ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} \equiv 0$), должны удовлетворять уравнениям равновесия (при отсутствии массовых сил)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}&=0;\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(10.44)$$

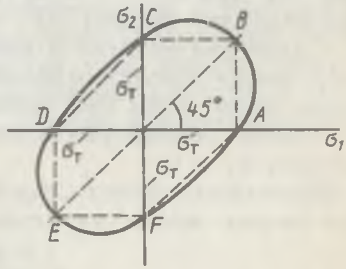


Рис. 10.18

а в зоне пластических деформаций, кроме того, условию текучести.

Если в качестве этого условия принять условие Мизеса, то оно запишется следующим образом:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_т^2 \qquad (10.45)$$

или через главные напряжения

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_т^2. \qquad (10.46)$$

На плоскости в ортогональных осях σ_1, σ_2 последнее соотношение изображается эллипсом, большая полуось которого наклонена под углом 45° к осям координат (рис. 10.18). Большая и малая полуоси эллипса соответственно равны $\sqrt{2}\sigma_т$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_т$. Точки, расположенные внутри эллипса, соответствуют упругому деформированию материала, а точки, лежащие на самом эллипсе, — переходу материала в пластическое состояние или его пластическому деформированию.

Далее остановимся на условии текучести Сен-Венана

$$2\tau_{max} = \sigma_т. \tag{10.47}$$

При плоском напряженном состоянии σ_z является одним из главных напряжений.

Допустим, что $\sigma_1\sigma_2 < 0$, т. е. главные напряжения σ_1 и σ_2 имеют разные знаки. Тогда

$$2\tau_{max} = |\sigma_1 - \sigma_2|. \tag{10.48}$$

Если же $\sigma_1\sigma_2 > 0$, то

$$2\tau_{max} = |\sigma_1|$$

или

$$2\tau_{max} = |\sigma_2|. \tag{10.49}$$

Равенства (10.47) . . . (10.49) описывают в осях σ_1, σ_2 шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в построенный ранее эллипс (рис. 10.18).

Действительно, равенству (10.49) (при $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) соответствует линия AB; если же $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$, то этому равенству отвечает линия CB; при $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$ справедливо равенство (10.48), которому соответствует прямая AF, и т. д.

Сравнение эллипса и шестиугольника наглядно показывает разницу между условиями Мизеса и Сен-Венана. Максимальное расхождение имеет место при чистом сдвиге, когда $\sigma_1 = -\sigma_2$.

Теперь рассмотрим плоское деформированное состояние, при котором $\varepsilon_z = 0$.

Если предположить, что материал несжимаем, то $\varepsilon_{ср} = 0$. Используя теорию малых упругопластических деформаций, из уравнения

$$\sigma_z - \sigma_{ср} = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(\varepsilon_z - \varepsilon_{ср})$$

в этом случае найдем

$$\sigma_z = \sigma_{ср}$$

или

$$\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2.$$

Условия текучести принимают вид

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 2k, \tag{10.50}$$

причем в условии Мизеса $k = \sigma_т/\sqrt{3}$, а в условии Сен-Венана $k = \sigma_т/2$.

Если граничные условия на контуре пластины заданы в напряжениях, то уравнения (10.44) и одно из условий пластичности, записанное в форме (10.45), (10.47) или (10.50), дают замкнутую систему уравнений относительно напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}.

§ 10.13. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в длинной толстостенной трубе, находящейся под действием равномерного внутреннего давления p (рис. 10.19).

Будем считать трубу бесконечно длинной и материал трубы идеально упругопластическим несжимаемым, т. е. $\varepsilon_z = \varepsilon_{ср} = 0$ (ось трубы совпадает с осью z, перпендикулярной плоскости чертежа).

Пока внутреннее давление мало, труба деформируется упруго и напряжение в полярной системе координат определяется известными выражениями (см. § 4.12).

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}; \quad \tau = 0, \qquad (10.51)$$

где A, B — константы, которые находятся из граничных условий.

Рис. 10.19

Таким образом, напряжения σ_r, σ_φ являются главными, а третье главное напряжение равно

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi)/2. \qquad (10.52)$$

По мере увеличения давления p напряжения в рассматриваемой точке возрастают до тех пор, пока не наступит состояние текучести. В результате в кольцевой области, примыкающей к внутреннему контуру поперечного сечения трубы, наступит пластическое состояние. Обозначим радиус внешнего контура этой области через $r_т$. Очевидно, что всегда соблюдается соответствие $a \leqslant r_т \leqslant b$.

В зоне текучести напряжения σ_r, σ_φ должны удовлетворять условию равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \qquad (10.53)$$

и условию пластичности (10.50) ($\sigma_\varphi \geqslant \sigma_r$)

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k. \qquad (10.54)$$

Подставим в уравнение (10.53) вместо разности напряжений $\sigma_r - \sigma_\varphi$ константу $-2k$. Тогда

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2k}{r}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{r_т} + c,$$

причем c — произвольная постоянная.

Из соотношений (10.52), (10.54) найдем

$$\sigma_\varphi = 2k\left(1 + \ln\frac{r}{r_т}\right) + c; \quad \sigma_z = 2k\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{r_т}\right) + c.$$

Для определения констант A, B, c воспользуемся граничными условиями:

при $r = a$ $\sigma_r = -p$;

при $r = b$ $\sigma_r = 0$;

при $r = r_т$ $\sigma_r^у = \sigma_r^п$.

Здесь $\sigma_r^у$, $\sigma_r^п$ — радиальные нормальные напряжения соответственно в упругой и пластической зонах трубы.

Из первого условия имеем

$$c = -p - 2k \ln \frac{a}{r_т}.$$

Итак, в пластической области напряжения равны

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2k \ln \frac{r}{a} - p; \\ \sigma_\varphi &= 2k \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) - p; \\ \sigma_z &= 2k \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{a}\right) - p; \end{aligned}\right\} a \leqslant r \leqslant r_т. \tag{10.55}$$

Из оставшихся граничных условий и равенства (10.54) найдем константы A, B и получим уравнение относительно $r_т$:

$$p = k\left[\ln\left(\frac{r_т}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_т}{b}\right)^2 + 1\right]. \tag{10.56}$$

В итоге в упругой области напряжения определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= k\left(\frac{r_т}{b}\right)^2\left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right]; \\ \sigma_\varphi &= k\left(\frac{r_т}{b}\right)^2\left[1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2\right]; \\ \sigma_z &= k\left(\frac{r_т}{b}\right)^2; \end{aligned}\right\} r_т \leqslant r \leqslant b. \tag{10.57}$$

Предельному состоянию трубы соответствует достижение радиусом $r_т$ значения, равного b. Тогда из равенства (10.56) имеем предельное давление

$$p_{пред} = 2k \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

а из уравнений (10.55) — распределение напряжений по толщине трубы

$$\sigma_r = 2k \ln \frac{r}{b}; \quad \sigma_\varphi = 2k\left(\ln \frac{r}{b} + 1\right); \quad \sigma_z = 2k\left(\ln \frac{r}{b} + \frac{1}{2}\right).$$

На рис. 10.20 показаны эпюры $\frac{\sigma_r}{2k}$, $\frac{\sigma_\varphi}{2k}$, построенные для трубы с отношением внешнего и внутреннего радиусов $b/a = 2$ и отношениями $r_т/a$, равными 1 (упругое состояние), 1,5 и 2 (предельное состояние). Этим значениям $r_т$ отвечают значения внутреннего давления: 0,75k; 1,24k; 1,386k. Сравнивая распределение напряжений σ_φ в упругом и предельном состояниях трубы, нетрудно заметить их принципиальное различие. Если в упругом состоянии наибольшее значение напряжение σ_φ принимает в точках, лежащих на внутреннем контуре поперечного сечения, то в предельном состоянии максимальные напряжения возникают в точках, принадлежащих внешней поверхности трубы. Это согласуется с экспериментами, проводимыми со стальными трубами, которые указывают на то, что разрушение труб начинается с наружной поверхности.

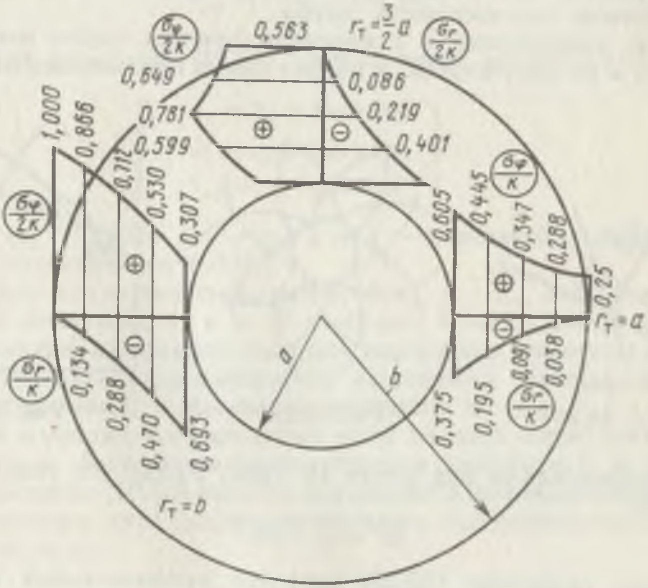


Рис. 10.20

Отношение предельного давления $p_{пред}$ к давлению p_1, при котором впервые появляются пластические деформации в точках внутренней поверхности трубы, равно

$$\frac{p_{пред}}{p_1} = 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^{-1}.$$

При $b = 2a$ имеем $\frac{p_{пред}}{p_1} = 1,848$.

§ 10.14. ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Особое значение в задачах пластичности приобретает определение линий скольжения. Линией скольжения или линией сдвига называется линия, которая в каждой своей точке касается площадки максимального касательного напряжения. Наглядное представление о линиях скольжения дают линии Людерса — Чернова, которые можно наблюдать на поверхности плоского полированного образца при его растяжении за пределом упругости. Линии Людерса — Чернова наклонены под углом 45° к оси образца, так как именно на площадках, расположенных под этим углом к оси образца, возникают наибольшие касательные напряжения.

Как известно, направление наибольших касательных напряжений делит углы между главными осями пополам.

Для примера построим линии скольжения для рассмотренной ранее длинной толстостенной трубы.

Главные напряжения в поперечном сечении трубы направлены по радиусу и по касательной, а потому линии скольжения наклонены

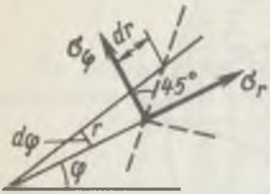


Рис. 10.21

Рис. 10.22

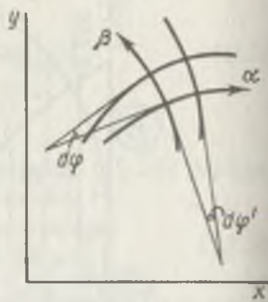


Рис. 10.23

к этим направлениям под углом 45° (рис. 10.21). Из этого рисунка видно, что

$$dr = \pm r\,d\varphi. \tag{10.58}$$

Решение уравнения (10.58) дает два ортогональных семейства линий скольжения:

$$r = ce^{\pm\varphi}.$$

Такие линии, называемые логарифмическими спиралями, показаны на рис. 10.22.

В случае плоского деформированного состояния главные оси образуют с осью x углы α^* и $\alpha^* + 90°$, а касательные к линиям скольжения в каждой точке наклонены к оси x под углами φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, причем

$$\varphi = \alpha^* - \frac{\pi}{4}. \tag{10.59}$$

Дифференциальные уравнения, описывающие линии скольжения, записываются в виде

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi; \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi,$$

т. е. линии скольжения образуют сетку ортогональных линий α, β (рис. 10.23).

Нормальные и касательные напряжения на любой площадке могут быть выражены через главные напряжения следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha^*;$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha^*;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha^*.$$

С учетом равенства (10.59) отсюда имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 - k\sin 2\varphi;\\ \sigma_y &= \sigma_0 + k\sin 2\varphi;\\ \tau_{xy} &= +k\cos 2\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (10.60)$$

где $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $(\sigma_1 - \sigma_2)/2 = k$ — константа, определяемая условием пластичности (10.50).

Итак, для нахождения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} достаточно знать только две величины: σ_0 и φ. И наоборот, если на какой-либо площадке, лежащей на границе тела или внутри его, известны нормальное и касательное напряжения, то известными оказываются и все другие напряжения, в частности величины σ_0 и φ.

Если в качестве координатных осей на плоскости взять линии скольжения α, β (криволинейную систему координат), то из уравнений равновесия (10.44) после подстановки в них выражений (10.60) получим систему двух дифференциальных уравнений относительно функций σ_0 и φ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha} - 2k\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} &= 0;\\ \frac{\partial\sigma_0}{\partial\beta} + 2k\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.61)$$

Эти уравнения могут быть проинтегрированы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_0}{2k} - \varphi &= \eta(\beta);\\ \frac{\sigma_0}{2k} + \varphi &= \xi(\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (10.62)$$

т. е. параметр ξ постоянен вдоль линии скольжения β, а параметр η постоянен вдоль линии скольжения α.

Если бы линии скольжения были известны, то интегралы (10.62) представляли бы общее решение задачи о плоской деформации пластической среды.

Продифференцируем первое из уравнений (10.61) по β, а второе — по α и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0. \tag{10.63}$$

Уравнение (10.63) говорит о том, что угол $d\varphi$ между соседними линиями скольжения α остается постоянным при движении вдоль этих линий, так же как угол $d\varphi'$ остается постоянным при движении вдоль линий β (рис. 10.23).

Уравнения равновесия (10.61) позволяют сделать некоторые качественные замечания о поведении линий скольжения на плоскости, однако не дают возможности найти эти линии.

Дифференциальные уравнения для их определения можно получить, подставив выражения (10.60) в уравнения равновесия (10.44):

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}-2k\left(\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0;$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}-2k\left(\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0.$$

Исключая отсюда σ_0, придем к уравнению относительно угла φ который определяет расположение линий скольжения на плоскости

§ 10.15. ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА

Рассмотрим задачу о вдавливании абсолютно жесткого штампа (рис. 10.24) при отсутствии трения на границе контакта между штатпом и полуплоскостью.

Эта задача имеет значение для оценки несущей способности грунтового массива под жестким фундаментом, который вытянут в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Будем считать, что упругие деформации в теле настолько малы по сравнению с пластическими деформациями, что ими можно пренебречь.

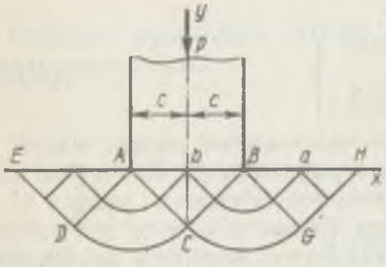


Рис. 10.24

Пластические деформации начинают появляться в областях, примыкающих к точкам A и B, сразу после приложения даже малой нагрузки к штампу. Однако вдавливание штампа начинается только после того, как пластическая область распространится вдоль всего основания штампа. Заметим, что по мере вдавливания штампа материал, выдавленный из-под него, образует по бокам штампа возвышения (бугорки). В дальнейшем ограничимся рассмотрением только начала вдавливания, когда свободная поверхность тела еще сохраняет горизонтальное положение.

На границе тела касательные напряжения везде равны нулю. Следовательно, здесь главные напряжения совпадают с направлениями осей x и y ($\alpha^* = 0$). Тогда угол φ равен $+45°$ и $-45°$. Построим на участках EA, AB, BH треугольники EAD, ABC, BHG с прямоугольными сетками линий скольжения, а в треугольниках ADC, CBG — полярную сетку. Таким образом, в окрестности штампа построим всюду ортогональную сетку линий скольжения. Возьмем на границе полуплоскости точки a и b, принадлежащие одной линии скольжения α. В точке a напряжения $\tau_{xy} = \sigma_y = 0$. Из условия пластичности найдем $\sigma_x = -2k$. Знак минус взят потому, что в областях EAD, BGH происходит сжатие. Следовательно $\sigma^a_{\text{s}} = -k$. Линия скольжения α в точке a образует угол $\varphi^a = \pi/4$, а в точке b — $\varphi^b = -\pi/4$.

Из первого равенства (10.62) имеем $\eta^a = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$, $\eta^b = \dfrac{\sigma^b_{\text{s}}}{2k} + \dfrac{\pi}{4}$.

Параметр η постоянен вдоль линии скольжения α, в результате чего можно записать $\eta^a = \eta^b$ или $\sigma^b_{\text{s}} = -k\,(1 + \pi)$.

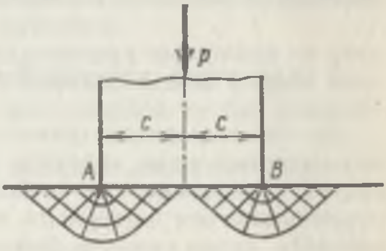


Рис. 10.25

Как видно, под штампом величина σ_0 принимает постоянное значение.

Воспользуемся второй из формул (10.60), из которой получим давление под штампом

$$\sigma_y = -p = -k\,(2 + \pi). \tag{10.64}$$

Предельная нагрузка

$$P_{\text{пред}} = 2ck\,(2 + \pi). \tag{10.65}$$

Сетка линий скольжения, представленная на рис. 10.24, впервые была дана Прандтлем.

Позднее другое решение той же самой задачи было предложено Хиллом. В соответствии с ним линии скольжения располагаются под штампом так, как показано на рис. 10.25.

Аналогично тому, как это было сделано ранее, можно доказать, что по линии контакта AB действует равномерно распределенное давление, определяемое выражением (10.64). Предельная нагрузка также имеет прежнее значение (10.65).

Неоднозначность решения поставленной задачи объясняется использованием предположения о равенстве нулю упругих деформаций, вызываемых в теле. В связи с этим следует заметить, что для получения истинного решения рассматриваемой задачи необходимо использовать экстремальные принципы теории пластичности или вспомогательные, например экспериментальные, данные.

Все рассуждения, которые касались линий скольжения, относились к случаю плоского деформированного состояния. Естественно, что задача построения линий скольжения важна и для плоского напряженного состояния. Однако решение такой задачи оказывается значительно сложнее, чем при плоском деформированном состоянии. Объясняется это тем, что при плоском деформированном состоянии максимальные сдвиги происходят по площадкам, направленным перпендикулярно плоскости чертежа, а линии скольжения располагаются всегда в плоскости чертежа. При плоском напряженном состоянии кроме аналогичной ситуации возможна и другая, при которой максимальный сдвиг происходит по площадкам, наклоненным под углом 45° к плоскости пластины (плоскости чертежа).

§ 10.16. УЧЕТ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

До сих пор рассматривалась плоская задача в предположении, что материал тела является идеально упругопластическим. Далее кратко остановимся на особенностях решения плоской задачи для упрочняющегося материала при простом нагружении на примере плоского напряженного состояния.

Допустим для простоты, что материал является несжимаемым. Тогда из уравнений теории малых упругопластических деформаций имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_и}{2\sigma_и}(2\sigma_x - \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_и}{2\sigma_и}(2\sigma_y - \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_и}{\sigma_и}\tau_{xy},$$

причем

$$\varepsilon_и = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}\,; \quad \sigma_и = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}.$$

Выражая составляющие тензора напряжений через функцию напряжений (при отсутствии массовых сил)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

из условия совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

получим нелинейное дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\varepsilon_и}{\sigma_и}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\varepsilon_и}{\sigma_и}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right] +$$
$$+ 6\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\varepsilon_и}{\sigma_и}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right) = 0.$$

Решение этого уравнения может быть найдено, например, методом переменных параметров упругости следующим образом:

$$\nabla^4\varphi_0 = 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E_{n-1}}\left(2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{E_{n-1}}\left(2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\right)\right]+$$
$$+6\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{E_{n-1}}\,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x\,\partial y}\right)=0,\quad n\geqslant 1,$$

где $E_{n-1}=\sigma_и^{(n-1)}/\varepsilon_и^{(n-1)}$.

Естественно, что, решая на каждом этапе плоскую задачу для неоднородной упругой пластины, необходимо добиваться удовлетворения граничных условий на кромках пластины.

Чтобы наглядно оценить влияние упрочнения материала на распределение напряжений и деформаций в плоской задаче теории пластичности, вновь вернемся к задаче о толстостенной трубе, рассмотренной в § 10.13.

Будем считать, что материал трубы обладает линейным упрочнением, т. е.

$$\sigma_и=\left(1-\frac{E_k}{E}\right)\sigma_т+E_k\varepsilon_и. \qquad (10.66)$$

При такой постановке можно получить решение задачи без привлечения процедуры последовательных приближений.

Учитывая равенство $\varepsilon_z = 0$, найдем интенсивность деформаций:

$$\varepsilon_и=\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_r^2-\varepsilon_r\varepsilon_\varphi+\varepsilon_\varphi^2},$$

где

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr};\quad \varepsilon_\varphi=\frac{u}{r}.$$

Из условия несжимаемости материала $(\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi=0)$ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=0.$$

Его решение имеет вид $u = c/r$, причем c — произвольная постоянная $(c > 0)$.

Тогда

$$\varepsilon_\varphi=-\varepsilon_r=\frac{c}{r^2}.$$

После подстановки этих выражений в соотношение для $\varepsilon_и$ получим

$$\varepsilon_и=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{c}{r^2}. \qquad (10.67)$$

Интенсивность напряжений, в свою очередь, равна $\left(\text{при } \sigma_z = \right.$ $\left. = \dfrac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2}\right)$

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sigma_\varphi - \sigma_r). \tag{10.68}$$

Уравнение равновесия (10.53) с учетом (10.67) запишется так:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sigma_{\text{и}}}{r}$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}\,r}\left[\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\sigma_{\text{т}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,E_k\,\frac{c}{r^2}\right].$$

Интегрируя обе части равенства, найдем напряжение σ_r, действующее в пластической области трубы:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\sigma_{\text{т}}\ln r - \frac{E_k}{r^2}\,\frac{c}{\sqrt{3}}\right] + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Напряжение σ_φ определяется соотношением (10.68), откуда с учетом равенств (10.66) и (10.67) имеем

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\sigma_{\text{т}}\,(1 + \ln r) + \frac{E_k}{\sqrt{3}}\,\frac{c}{r^2}\right] + c_1.$$

В упругой зоне напряжения σ_r, σ_φ находятся из выражений (10.51).

Константы c, c_1, A, B и граница области пластических деформаций $r_{\text{т}}$ находятся из граничных условий, которые остаются теми же, что и в § 10.13, и, кроме того, из условия пластичности $\sigma_{\text{и}} = \sigma_{\text{т}}$, которое должно соблюдаться при $r = r_{\text{т}}$.

Последнее равенство эквивалентно $\varepsilon_{\text{и}} = \varepsilon_{\text{т}}$ или

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{c}{r_{\text{т}}^2} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{E}.$$

После всех преобразований найдем напряжения, действующие в зоне пластических деформаций:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\left(2\ln\frac{r}{r_{\text{т}}} - 1\right) + \frac{r_{\text{т}}^2}{b^2} - \frac{E_k}{E}\,\frac{r_{\text{т}}^2}{r^2}\right];\\
\sigma_\varphi &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\left(2\ln\frac{r}{r_{\text{т}}} + 1\right) + \frac{r_{\text{т}}^2}{b^2} + \frac{E_k}{E}\,\frac{r_{\text{т}}^2}{r^2}\right];\\
\sigma_z &= \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\left[2\left(1 - \frac{E_k}{E}\right)\ln\frac{r}{r_{\text{т}}} + \frac{r_{\text{т}}^2}{b^2}\right].
\end{aligned}\right\}\ a \leqslant r \leqslant r_{\text{т}}. \tag{10.69}$$

Напряжения в упругой области трубы определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}}\,\frac{r_т^2}{b^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right);\\ \sigma_\varphi &= \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}}\,\frac{r_т^2}{b^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right);\\ \sigma_z &= \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}}\,\frac{r_т^2}{b^2};\end{aligned}\right|\quad b \geqslant r \geqslant r_т. \tag{10.70}$$

Величина $r_т$ находится как решение нелинейного уравнения

$$\left(1-\frac{E_k}{E}\right)\left(1+2\ln\frac{r_т}{a}\right)+\frac{E_k}{E}\,\frac{r_т^2}{a^2}-\frac{r_т^2}{b^2}=\frac{\sqrt{3}\,p}{\sigma_т}. \tag{10.71}$$

Очевидно, что выражения (10.70) совпадают с аналогичными

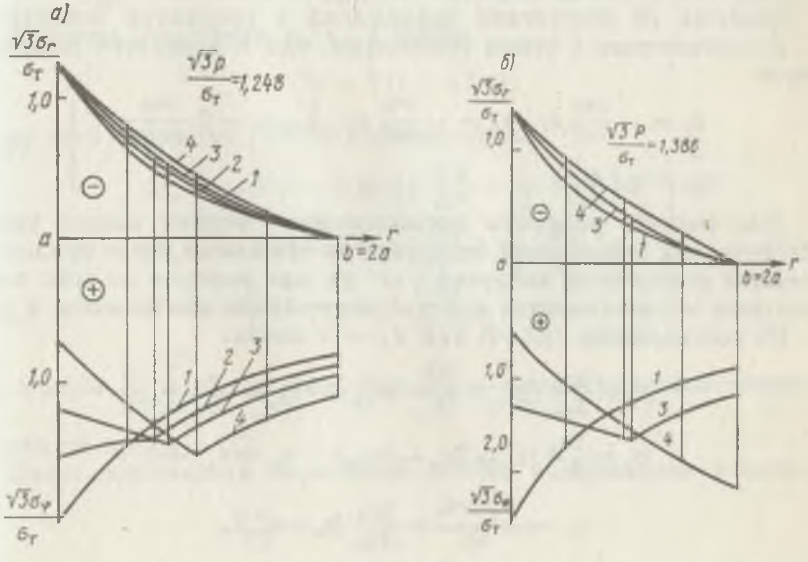


Рис. 10.26

выражениями (10.57), если в последних положить параметр k равным $\sigma_т/\sqrt{3}$.

Наконец, при $E_k = 0$, т. е. для неупрочняющегося материала, из соотношений (10.69), (10.71) следуют равенства, которые эквивалентны равенствам (10.55) и (10.56).

На рис. 10.26, *а*, *б* показано изменение напряжений $\sqrt{3}\sigma_r/\sigma_т$, $\sqrt{3}\sigma_\varphi/\sigma_т$ вдоль радиуса толстостенной трубы с отношением внешнего и внутреннего диаметров, равным 2, при двух значениях внутреннего давления. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* на этих рисунках соответствуют отношениям модуля упрочнения E_k к модулю упругости E, равным 1 (упругий материал); 0,5; 0,25 и 0 (материал без упрочнения).

Из представленных графиков видно, что наиболее существенное влияние степень упрочнения материала оказывает на эпюру тангенциальных нормальных напряжений.

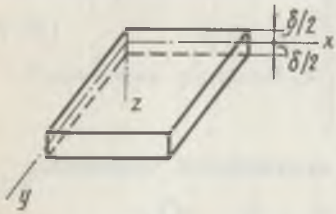


Рис. 10.27

§ 10.17. ИЗГИБ ПЛАСТИН

При расчете изгибаемых тонких пластин (рис. 10.27) с учетом упруго-пластических свойств материала обычно используются те же гипотезы, что и при расчете упругих пластин, а именно:

гипотеза прямых нормалей;

гипотеза о ненадавливании горизонтальных слоев, т. е. $\sigma_z = 0$;

гипотеза об отсутствии деформаций в срединной поверхности.

В соответствии с этими гипотезами, как и в упругих пластинах, имеем

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z; \quad \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} z;\\ &\gamma_{yz} = \gamma_{xz} \equiv 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.72)$$

Для расчета пластины воспользуемся теорией малых упруго-пластических деформаций, предполагая тем самым такое приложение внешней поперечной нагрузки $q(x, y)$, при котором во всех точках пластины осуществляется простое нагружение или близкое к нему.

Из соотношения (10.14) при $\sigma_z = 0$ имеем:

$$\sigma_x = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y - 3\varepsilon_{ср}); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_и}{3\varepsilon_и}\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y - 3\varepsilon_{ср}); \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

$$-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(\varepsilon_z - \varepsilon_{ср}),$$

причем

$$\varepsilon_и = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}.$$

В целях упрощения выкладок в дальнейшем будем считать, что материал пластины несжимаем. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_и}{3\varepsilon_и}\gamma_{xy};\\ &\sigma_y = \frac{2\sigma_и}{3\varepsilon_и}(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)\end{aligned}\right\} \qquad (10.73)$$

и

$$\varepsilon_и=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y^2+\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2}\,|z|.$$

Изгибающие моменты M_x, M_y и крутящий момент H равны

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\sigma_x z\,dz=-\frac{2}{3}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}z^2\,dz\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
M_y&=\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\sigma_y z\,dz=-\frac{2}{3}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}z^2\,dz\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
H&=\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\tau_{xy} z\,dz=-\frac{2}{3}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}z^2\,dz\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10.74)$$

Запишем отношение $\sigma_и/\varepsilon_и$ в форме

$$\frac{\sigma_и}{\varepsilon_и}=E\,[1-\omega(\varepsilon_и)],$$

после чего равенства (10.74) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=-D\,[1-\chi(w)]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
M_y&=-D\,[1-\chi(w)]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
H&=-\frac{D}{2}\,[1-\chi(w)]\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},
\end{aligned}\right\}\qquad(10.75)$$

где $\chi(w)=\frac{12}{\delta^3}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\omega(\varepsilon_и)\,z^2\,dz$; $D=\frac{E\delta^3}{9}$ — цилиндрическая жесткость пластины при $\mu=1/2$.

После подстановки выражений (10.75) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q$$

получим нелинейное уравнение относительно функции прогиба

$$\nabla^4 w=\frac{q}{D}+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\chi(w)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\chi(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\chi(w)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\right\}.\qquad(10.76)$$

Если положить функцию $\chi(w)$ тождественно равной нулю, придем к бигармоническому уравнению для упругой пластины

$$\nabla^4 w=\frac{q}{D}.\qquad(10.77)$$

Уравнение (10.76) удобно для использования метода упругих решений в форме метода дополнительных нагрузок. Действительно, принимая за первое приближение функции w_0 решение уравнения (10.77), ее последующие приближения находим из уравнений

$$\nabla^4 w_n = \frac{q}{D} + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\chi(w_{n-1}) \left(\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial y^2} \right) \right] + \right.$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \left[\chi(w_{n-1}) \frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x\,\partial y} \right] +$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\chi(w_{n-1}) \left(\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2} \right) \right] \right\}, \quad n \geqslant 1. \qquad (10.78)$$

На каждом шаге итераций прогиб пластины $w_n(x, y)$ должен удовлетворять граничным условиям, которые в случае защемленного и шарнирно опертого края записываются через функцию w точно так же, как и для упругой пластины. Несколько сложнее выглядят граничные условия для свободного края, поскольку в нем должны обращаться в нуль изгибающий момент и приведенная поперечная сила, однако и их нетрудно записать с использованием функции $\chi(w)$, если повторить дословно те преобразования, которые проделывались в упругих пластинах.

Второе слагаемое в правой части уравнения (10.78), т. е. выражение, заключенное в фигурные скобки, можно рассматривать с точностью до постоянного множителя $1/D$ как некоторую дополнительную поперечную нагрузку q_{n-1}, действующую на пластину.

Таким образом, применение метода дополнительных нагрузок дает возможность заменить расчет упругопластической пластины расчетом однородной упругой пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки, характер которой уточняется в процессе итераций.

Здесь следует обратить внимание на одно принципиальное отличие метода дополнительных нагрузок от метода переменных параметров упругости.

Предположим, что для решения задачи изгиба применяется метод конечных разностей. Расчет упругой пластины в этом случае сводится в итоге к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\vec{w} = \vec{q}$$

для чего достаточно обернуть матрицу коэффициентов системы $\mathbf{A}$ и умножить ее на вектор $\vec{q}$:

$$\vec{w} = \mathbf{A}^{-1}\vec{q}.$$

В соответствии с методом дополнительных нагрузок решение нелинейной задачи сводится к решению последовательности систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A}\vec{w}_n=\vec{q}_n;\quad \vec{q}_n=\vec{q}+\vec{q}_{n-1},\ n>0.$$

Важно то, что матрица $\mathbf{A}$ остается во всех этих системах неизменной, в связи с чем для получения каждого нового приближения вектора $\vec{w}_n$ достаточно умножить обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, которая была найдена на первой итерации, на вектор $\vec{q}_n$. Таким образом, все вычисления сводятся к получению нового вектора $\vec{q}_n$ и умножению матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ на этот вектор.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет большой порядок, то такой метод решения задачи теории пластичности позволяет существенно сократить объем вычислений и время решения, так как обращение матрицы (или решение системы линейных алгебраических уравнений) на каждой итерации является наиболее трудоемкой процедурой.

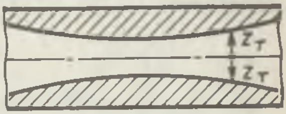


Рис. 10.28

Метод переменных параметров упругости также сводит решение нелинейной задачи к последовательности линейных задач. Однако здесь при формировании системы линейных алгебраических уравнений приходится на каждой итерации строить новую матрицу $\mathbf{A}_n$ и обращать ее, что может привести к серьезным потерям времени.

Если в диаграмме $\sigma_и \sim \varepsilon_и$ имеется линейный участок, отвечающий закону Гука, тогда очевидно, что в области упругопластических деформаций по толщине пластины можно выделить две зоны пластических деформаций, примыкающие к ее поверхности (рис. 10.28), и одну зону упругих деформаций, содержащую срединную поверхность. Границы между зонами упругих и пластических деформаций, которые являются двумя поверхностями, определяются из условия пластичности (условия Мизеса)

$$\sigma_и=\sigma_т$$

или

$$\varepsilon_и=\varepsilon_т. \tag{10.79}$$

Допустим, что материал пластины обладает линейным упрочнением. Тогда при $\varepsilon_и \geqslant \varepsilon_т$. функция $\omega(\varepsilon_и)$ имеет вид [см. (10.34)]

$$\omega(\varepsilon_и)=\left(1-\frac{E_k}{E}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_т}{\varepsilon_и}\right).$$

Вычисляя интеграл по толщине пластин, найдем

$$\chi(w)=\left(1-\frac{E_k}{E}\right)\left[\left(1-8\frac{z_т^3}{\delta^3}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{\varepsilon_т}{\delta\varkappa}\left(1-4\frac{z_т^2}{\delta^2}\right)\right],\quad 0\leqslant z_т\leqslant\frac{\delta}{2},$$

где

$$\varkappa=\sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2}\,.$$

Из соотношения (10.79) получим

$$z_{\text{т}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\varepsilon_{\text{т}}}{\varkappa}\,.$$

В результате выражение $\chi(w)$ записывается следующим образом:

$$\chi(w)=\left(1-\frac{E_k}{E}\right)\left(1-3\,\frac{z_{\text{т}}}{\delta}+4\,\frac{z_{\text{т}}^3}{\delta^3}\right).$$

В частном случае, когда материал пластины не обладает упрочнением ($E_k=0$), найдем

$$\chi(w)=1-3\,\frac{z_{\text{т}}}{\delta}+4\,\frac{z_{\text{т}}^3}{\delta^3}\,.$$

Из равенств (10.75) при этом имеем зависимости для моментов

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=-M_{\text{т}}\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
M_y&=-M_{\text{т}}\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
H&=-M_{\text{т}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(10.80)$$

Здесь

$$M_{\text{т}}=\frac{\sigma_{\text{т}}\delta^2}{4}\,;\quad \beta=\frac{2}{\sqrt{3}\,\varkappa}\,[1-4z_{\text{т}}^2/(3\delta^2)].$$

§ 10.18. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПЛАСТИН

В балках, выполненных из неупрочняющегося материала, по мере увеличения внешней нагрузки появляются пластические деформации, область которых увеличивается не только по длине, но и по высоте поперечного сечения. В конце концов в одном или нескольких сечениях могут образоваться пластические шарниры, которые превращают исходную геометрически неизменяемую систему в изменяемую. Такое состояние называют *предельным*, а нагрузку, соответствующую ему, — *предельной нагрузкой*.

Определение предельной нагрузки, естественно, важно не только для балок, но и для пластин. Говорят, что эта нагрузка характеризует несущую способность балок и пластин.

Предположим, что для материала пластины справедлива диаграмма Прандтля. В предельном состоянии зона пластических деформаций распространяется по всей толщине пластины. Полагая в выражениях (10.80) величину $z_{\text{т}}$ равной нулю, найдем изгибающие и крутящий моменты, отвечающие этой ситуации:

$$M_x = -\frac{2M_т}{\sqrt{3}\varkappa}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ M_y = -\frac{2M_т}{\sqrt{3}\varkappa}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$H = -\frac{M_т}{\sqrt{3}\varkappa}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \qquad (10.81)$$

Будем считать, что упругие деформации в пластине малы по сравнению с пластическими деформациями и потому их можно положить равными нулю. Таким образом, появление прогиба пластины возможно только тогда, когда зона пластичности распространится на всю ее толщину. Конечно, это не означает, что вся пластина должна перейти в пластическое состояние. Достаточно, чтобы указанное условие выполнялось хотя бы вдоль некоторых линий. Для подтверждения сказанного сошлемся на следующий пример.

Допустим, что удлиненная прямоугольная пластина шарнирно оперта вдоль двух противоположных кромок (рис. 10.29). На пластину действует распределенная вдоль средней линии пластины AB нагрузка q. Очевидно, что предельному состоянию пластины отвечает образование пластического цилиндрического шарнира вдоль линии нагружения.

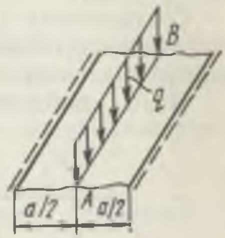


Рис. 10.29

Для решения задачи о несущей способности пластины воспользуемся вариационным принципом Лагранжа, для чего найдем полную энергию $Э$, которая складывается из работы внутренних U и внешних $П$ сил:

$$Э = U - П.$$

В свою очередь, эти работы определяются интегралами по площади пластины:

$$U = -\iint_S \left(M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2H\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

$$П = \iint_S qw\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

После подстановки вместо M_x, M_y, H выражений (10.81) получим

$$Э = \iint_S \left\{\frac{2M_т}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]^{1/2} - qw\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (10.82)$$

Если нагрузка меняется пропорционально параметру q_0, то рассматриваемая задача сводится к определению такого значения параметра q_0, при котором функционал (10.82) принимает экстремальное значение. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\delta Э = 0. \tag{10.83}$$

Тогда

$$q_0 = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} M_{\text{т}} \iint\limits_S \delta \varkappa \, dx \, dy}{\iint\limits_S \bar{q} \delta w \, dx \, dy}, \tag{10.84}$$

где $q = q_0 \bar{q}$.

Соотношение (10.84) соблюдается при определенных значениях параметра q_0. Минимальное из них и определяет несущую способность пластины.

Итак, необходимо найти функцию $w(x, y)$ такую, при которой величина q_0 принимает минимальное значение.

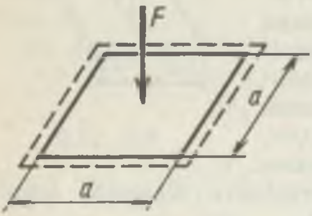


Рис. 10.30

Для примера рассмотрим квадратную в плане шарнирно опертую вдоль всех кромок пластину, нагруженную сосредоточенной силой, приложенной в центре пластины (рис. 10.30).

Положим

$$w(x, y) = c \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y.$$

После подстановки этого выражения в равенство (10.84) и варьирования числителя и знаменателя по параметру c получим

$$F = \frac{2M_{\text{т}}}{\sqrt{3}} \frac{\pi^2}{a^2} \int\limits_0^a \int\limits_0^a \sqrt{3\left(\sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} y\right)^2} \, dx \, dy.$$

Используя квадратурную формулу Симпсона, вычислим значение интеграла, разбивая пластину в каждом направлении на шесть равных частей. В результате найдем приближенное значение предельной нагрузки $F_{\text{пред}} = 9{,}26\ M_{\text{т}}$, которое является оценкой несущей способности пластины сверху.

Представим зависимость (10.83) в несколько иной форме.

После варьирования подынтегрального выражения (10.82) имеем

$$\delta Э = \frac{2M_{\text{т}}}{\sqrt{3}} \iint\limits_S \frac{1}{\varkappa} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \, \partial y} \right] dx \, dy -$$

$$- \iint\limits_S q \delta w \, dx \, dy.$$

Учитывая равенства (10.81), запишем вариацию $\delta Э$ следующим образом:

$$\delta Э = -\iint\limits_S \left(M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2H \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\, \partial y} + q\delta w \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Отсюда получим

$$-\iint\limits_S \left(M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2H \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\, \partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_S q\delta w\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad (10.85)$$

В левой части соотношения фигурирует работа внутренних сил (действующих в пластине) на возможных перемещениях, а в правой части — работа внешних сил на тех же перемещениях.

В некоторых случаях равенство (10.85) оказывается более удобным при отыскании предельной нагрузки.

§ 10.19. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим полигональную пластину, шарнирно закрепленную по контуру и нагруженную в некоторой точке O сосредоточенной силой (рис. 10.31). Форма разрушения такой пластины при достижении нагрузкой предельного значения может быть представлена, согласно предложению А. А. Гвоздева, боковой поверхностью пирамиды с вершиной в точке O' и с ребрами, которые являются пластическими цилиндрическими шарнирами, соединяющими точку O' с вершинами опорного контура. Треугольные участки пластины предполагаются недеформируемыми. Высота пирамиды считается малой величиной, задаваемой с точностью до неопределенного параметра Δ.

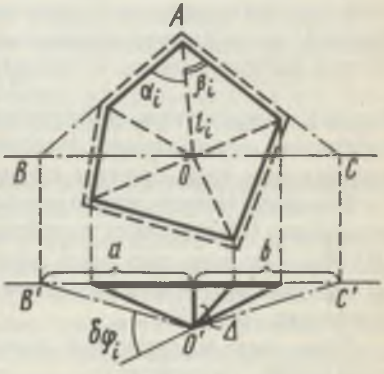


Рис. 10.31

При заданной форме разрушения работа внутренних сил на возможных перемещениях сводится к работе моментов, совершаемой ими на углах взаимного поворота боковых граней пирамиды $\delta\varphi_i$. Моменты постоянны вдоль каждого цилиндрического шарнира и имеют предельное значение $M_{\text{пред}}$. Тогда равенство (10.85) принимает вид

$$\sum_i M_{\text{пред}} l_i \delta\varphi_i = F_{\text{пред}} \Delta$$

или

$$M_{\text{пред}} \sum_i l_i \delta\varphi_i = F_{\text{пред}}\Delta, \tag{10.86}$$

где l_i — длина i-го цилиндрического шарнира.

Найдем угол $\delta\varphi_i$.

Проведем через точку O перпендикулярно прямой OA прямую BC и рассмотрим два треугольника: AOB и AOC. При повороте граней, примыкающих к ребру AO', на тот же самый угол поворачиваются и указанные треугольники.

Из рис. 10.31 нетрудно заметить, что

$$\delta\varphi_i \approx \frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta}{b} = \frac{\Delta}{l_i}(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i).$$

После подстановки в равенство (10.86) получим

$$F_{\text{пред}} = M_{\text{пред}} \sum_i (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i).$$

Для пластины в виде правильного n-угольника, нагруженной силой в центре, имеем

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пред}} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}. \tag{10.87}$$

Для определения момента $M_{\text{пред}}$ можно воспользоваться зависимостями (10.81). Тогда

$$M_{\text{пред}} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_{\text{т}}. \tag{10.88}$$

Если же для этих целей использовать критерий текучести Сен-Венана, то можно показать, что

$$M_{\text{пред}} = M_{\text{т}}, \tag{10.89}$$

так как напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных срединной поверхности пластины и проходящих через ось пластического шарнира, равны по модулю $\sigma_{\text{т}}$.

Разница между приведенными значениями предельных моментов невелика. Обычно при подобных расчетах пользуются соотношением (10.89), так как оно дает искомый результат с небольшим запасом по сравнению с аналогичным результатом, найденным с помощью равенства (10.88).

Так, для квадратной пластины, рассмотренной в предыдущем параграфе, получим

$$F_{\text{пред}} = M_{\text{пред}}\, 2 \cdot 4 \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 8M_{\text{пред}}.$$

Если $M_{\text{пред}} = M_{\text{т}}$, то $F_{\text{пред}} = 8\ M_{\text{т}}$.

При $n \to \infty$ из формулы (10.87) найдем значение несущей способности круглой пластины, нагруженной сосредоточенной силой в центре:

$$F_{\text{пред}} = 2\pi M_{\text{т}}.$$

Интересно отметить, что этот результат совпадает с точным решением.

ГЛАВА 11

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

§ 11.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущих главах предполагалось, что при неизменных во времени воздействиях напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела остается неизменным. Однако многие материалы даже при комнатных температурах обладают способностью медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях. Это свойство материалов называют *ползучестью* [1].

Ползучесть может приводить с течением времени к значительным изменениям в напряженно-деформированном состоянии конструкции или сооружения. Подтверждением сказанного могут служить следующие примеры. Вследствие неравномерности осадки грунтового основания во времени происходит перераспределение усилий между отдельными элементами сооружений, в результате чего в протяженных в плане сооружениях иногда появляются трещины, а в наиболее неблагоприятных условиях наблюдается их разрушение. В качестве другого примера можно сослаться на массивные бетонные плотины современных гидроэлектростанций, в которых существенную роль играют экзотермические процессы, протекающие при затвердевании бетона (в частности, объем бетона в арочной плотине Саяно-Шушенской ГЭС составляет 9 млн. $м^3$). Ползучесть в данном случае играет положительную роль, снижая возникающие напряжения. Учет ползучести оказывается необходимым для разработки комплекса мероприятий, позволяющих предотвратить образование трещин в теле плотины. Такие комплексы разрабатывались при проектировании плотин Братской, Красноярской, Усть-Илимской и других крупных ГЭС.

Заметим, что металлы и в первую очередь стали обнаруживают свойство ползучести при высоких температурах, достигающих нескольких сотен градусов (по Цельсию), в связи с чем вопросы ползучести металлов в дальнейшем не рассматриваются. Желающие познакомиться с указанным разделом механики твердого деформируемого тела могут воспользоваться работами [18, 27].

§ 11.2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ[1]

По результатам испытаний образцов материала, обладающего свойством ползучести, на растяжение или сжатие при постоянных напряжениях строятся кривые ползучести, очертание которых зави-

[1] В современной литературе термин «ползучесть» часто заменяют термином «вязкоупругость».

сит в общем случае от многих факторов, в том числе от действующего напряжения σ и от момента его приложения η. Таким образом, кривая ползучести может быть описана выражением [3; 26]

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma, t, \eta),$$

где t — время.

Если деформация $\varepsilon(t)$ нелинейно зависит от напряжения σ, говорят о нелинейной ползучести материала, а если указанная зависимость линейная, то о линейной ползучести. В дальнейшем будем рассматривать только линейную ползучесть. Для кривой ползучести в этом случае имеем зависимость

$$\varepsilon(t) = \sigma\delta(t, \eta), \qquad (11.1)$$

где функция $\delta(t, \eta)$ обычно представляется в виде суммы (рис. 11.1):

$$\delta(t, \eta) = \frac{1}{E(\eta)} + C(t, \eta).$$

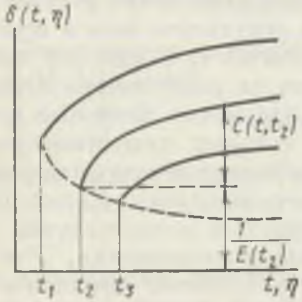


Рис. 11.1

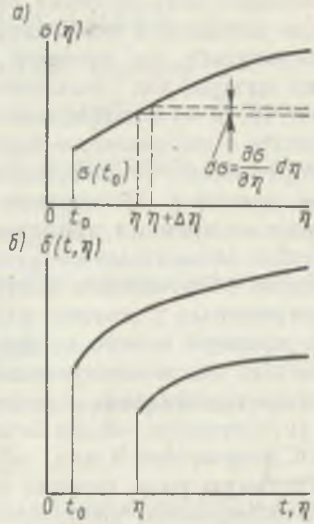


Рис. 11.2

Слагаемое $\sigma/E(\eta)$ в соотношении (11.1) определяет упругую деформацию в момент приложения нагрузки, а $\sigma C(t, \eta)$ — деформацию, накопившуюся в течение промежутка времени $t - \eta$. Функцию $C(t, \eta)$ называют *мерой ползучести*, которая представляет собой относительную деформацию ползучести материала к моменту времени t, вызванную единичным напряжением, приложенным в момент времени η. Очевидно, должно соблюдаться условие $C(t, t) = C(\eta, \eta) = 0$.

Далее рассмотрим случай, когда в момент времени t_0 к образцу приложена нагрузка, создающая напряжение $\sigma(t_0)$ и затем медленно меняющаяся во времени.

Для получения зависимости между напряжением и деформацией воспользуемся принципом наложения, согласно которому полную деформацию образца при переменных напряжениях можно найти как алгебраическую сумму полных деформаций, вызванных отдельными приращениями напряжений, причем деформация от фиксированного приращения напряжения пропорциональна его значению и зависит от длительности действия этого приращения, но не зависит от значения и длительности действия других приращений напряжений. В результате можно записать (рис. 11.2, *а*, *б*)

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)\,\delta(t,\ t_0) + \int_{t_0}^{t} \delta(t,\ \eta)\,d\sigma(\eta).$$

После интегрирования по частям имеем [3, 27, 28, 29]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^{t} K(t,\ \eta)\,\sigma(\eta)\,d\eta, \tag{11.2}$$

где введено обозначение

$$K(t,\ \eta) = -\frac{\partial\delta(t,\ \eta)}{\partial\eta}.$$

Функцию $K(t,\ \eta)$ называют ядром ползучести или «функцией памяти». В общем случае графики изменения этой функции могут

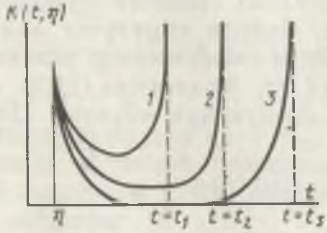


Рис. 11.3

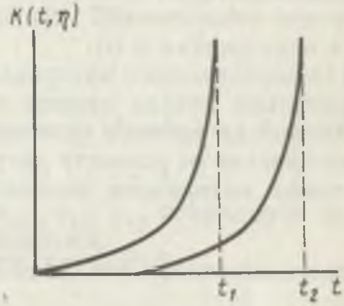


Рис. 11.4

быть представлены так, как показано на рис. 11.3. Если промежуток времени $[\eta,\ t]$ достаточно мал, материал «помнит» о том, что с ним происходило на всем промежутке (кривые *1*, *2*). С увеличением протяженности интервала времени $[\eta,\ t]$ в «памяти» материала постепенно стирается информация о его нагружениях, происходивших в средней части интервала $[\eta,\ t]$, и сохраняется информация о нагружениях в «раннем возрасте» (левая ветвь кривой *3*) и в моменты времени, предшествующие времени t (правая ветвь кривой *3*).

Приведенные графики справедливы для материалов, свойства которых меняются во времени, или, как говорят, для «стареющих» материалов. Если материал не обладает старением, то графики $K(t,\ \eta)$ для него имеют вид, показанный на рис. 11.4. В этом случае в «памяти» материала полностью стирается информация о его нагружениях в раннем возрасте.

Соотношение (11.2) позволяет определить деформацию образца, если известен закон изменения напряжения во времени. Если же задан закон изменения деформаций $\varepsilon(t)$ и нужно найти напряжение $\sigma(t)$, то равенство (11.2) можно рассматривать как уравнение относительно искомой функции $\sigma(t)$. Уравнение, в котором неизвестное находится под знаком интеграла, называется *интегральным уравнением*. Если верхний предел интеграла является переменной величиной t, как в рассматриваемом случае, такое уравнение называется *интегральным уравнением Вольтерры*.

Формально решение уравнения (11.2) можно записать в виде

$$\sigma(t) = E(t)\,\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} R(t, \eta)\,\varepsilon(\eta)\,d\eta, \qquad (11.3)$$

причем функция $R(t, \eta)$, называемая ядром релаксации, однозначно выражается через модуль упругости $E(t)$ и ядро ползучести $K(t, \eta)$. Если же имеется семейство экспериментальных кривых релаксации, то функция $R(t, \eta)$ может быть получена аналогично тому, как было получено ядро ползучести $K(t, \eta)$.

Зависимость (11.3) также можно рассматривать как интегральное уравнение относительно деформации $\varepsilon(t)$, если известен закон изменения напряжения $\sigma(t)$.

Для нестареющих материалов, у которых свойства инвариантны относительно начала отсчета времени, модуль упругости является постоянной во времени величиной, а ядра ползучести и релаксации зависят только от разности аргументов t и η. Уравнения (11.2), (11.3) для таких материалов записываются следующим образом [28, 29]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^{t} K(t-\eta)\,\sigma(\eta)\,d\eta;$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} R(t-\eta)\,\varepsilon(\eta)\,d\eta.$$

Здесь

$$K(t-\eta) = -\frac{dC(t-\eta)}{d\eta} = \frac{dC(t-\eta)}{d(t-\eta)}.$$

В дальнейшем для краткости будем пользоваться операторной формой записи уравнений (11.2), (11.3):

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1 + \mathbf{K})\,\sigma; \qquad (11.4)$$

$$\sigma = E(1 - \mathbf{R})\,\varepsilon, \qquad (11.5)$$

где

$$\mathbf{K}\sigma = E(t)\int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\,\sigma(\eta)\,d\eta; \quad \mathbf{R}\varepsilon = \frac{1}{E(t)}\int_{t_0}^{t} R(t, \eta)\,\varepsilon(\eta)\,d\eta.$$

Очевидно, что всегда справедливо равенство

$$\frac{1}{E}(1+\mathbf{K})=[E(1-\mathbf{R})]^{-1},$$

т. е. операторы ползучести и релаксации являются взаимно обратными.

§ 11.3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Изотропный упругий материал характеризуется двумя упругими постоянными: модулем упругости и коэффициентом Пуассона или модулем сдвига и объемным модулем упругости. Изотропный вязкоупругий материал характеризуется двумя операторами, в качестве которых удобно выбрать операторы сдвиговой $\frac{1}{G}(1+\mathbf{K}_с)$ и объемной ползучести $\frac{1}{K}(1+\mathbf{K}_0)$. С помощью этих операторов легко записываются соотношения между компонентами девиаторов и шаровых тензоров деформаций и напряжений, для чего в аналогичных соотношениях для упругого изотропного материала упругие постоянные заменяются указанными операторами [28, 29]:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{ср}=\dfrac{1}{3K}(1+\mathbf{K}_0)\,\sigma_{ср};\\ (\varepsilon_x-\varepsilon_{ср})=\dfrac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_с)(\sigma_x-\sigma_{ср});\qquad \gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}(1+\mathbf{K}_с)\,\tau_{xy};\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\qquad(11.6)$$

Выражения для $\varepsilon_y-\varepsilon_{ср}$, $\varepsilon_z-\varepsilon_{ср}$, γ_{yz}, γ_{zx} получаются из приведенных круговой подстановкой индексов.

В скалярной форме равенства (11.6) можно представить следующим образом:

$$\varepsilon_{ср}(t)=\frac{1}{3K(t)}\left[\sigma_{ср}(t)+K(t)\int_{t_0}^{t}K_0(t,\ \eta)\,\sigma_{ср}(\eta)\,d\eta\right];$$

$$\varepsilon_x(t)-\varepsilon_{ср}(t)=\frac{1}{2G(t)}\left\{\sigma_x(t)-\sigma_{ср}(t)+\right.$$

$$\left.+G(t)\int_{t_0}^{t}K_с(t,\ \eta)\,[\sigma_x(\eta)-\sigma_{ср}(\eta)]\,d\eta\right\};$$

$$\gamma_{xy}(t)=\frac{1}{G(t)}\left[\tau_{xy}(t)+G(t)\int_{t_0}^{t}K_с(t,\ \eta)\,\tau_{xy}(\eta)\,d\eta\right];\ \dots$$

Здесь $K_0(t,\ \eta)$, $K_с(t,\ \eta)$ — ядра объемной и сдвиговой ползучести. Они могут быть определены аналогично ядру ползучести $K(t,\ \eta)$ при одноосном напряженном состоянии по кривым ползучести образцов материала при чистом сдвиге и всестороннем (гидростатическом) давлении.

Соотношения (11.6) позволяют выразить деформации через напряжения:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_c)\,\sigma_x + \left[\frac{1}{3K}(1+\mathbf{K}_0) - \frac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_c)\right]\sigma_{cp};\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}(1+\mathbf{K}_c)\,\tau_{xy};\ \ldots .\end{aligned}\right\}\qquad(11.7)$$

При $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ из первого выражения найдем зависимость для деформации ε_x при одноосном напряженном состоянии:

$$\varepsilon_x = \left[\frac{1}{3G}(1+\mathbf{K}_c) + \frac{1}{9K}(1+\mathbf{K}_0)\right]\sigma_x.$$

Учитывая равенство $\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K}$,

запишем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[1 + E\left(\frac{1}{3G}\mathbf{K}_c + \frac{1}{9K}\mathbf{K}_0\right)\right]\sigma_x.$$

Очевидно, что оператор $E\left(\frac{1}{3G}\mathbf{K}_c + \frac{1}{9K}\mathbf{K}_0\right)$ равен оператору в выражении (11.4). Отсюда можно заметить, что ядра сдвиговой и объемной ползучести могут быть найдены из экспериментов при одноосном растяжении-сжатии и чистом сдвиге.

Соотношения (11.6) можно разрешить относительно компонент девиатора и шарового тензора напряжений:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{cp} &= 3K(1-\mathbf{\Gamma}_0)\,\varepsilon_{cp};\\ \sigma_x - \sigma_{cp} &= 2G(1-\mathbf{\Gamma}_c)(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp});\\ \tau_{xy} &= G(1-\mathbf{\Gamma}_c)\,\gamma_{xy};\ \ldots,\end{aligned}\right\}\qquad(11.8)$$

где $K(1-\mathbf{\Gamma}_0)$, $G(1-\mathbf{\Gamma}_c)$ — операторы объемной и сдвиговой релаксации, являющиеся обратными к операторам объемной и сдвиговой ползучести $\frac{1}{K}(1+\mathbf{K}_0)$, $\frac{1}{G}(1+\mathbf{K}_c)$.

Запишем равенства (11.8) в скалярной форме:

$$\sigma_{cp}(t) = 3K(t)\left[\varepsilon_{cp}(t) - \frac{1}{K(t)}\int_{t_0}^{t}\Gamma_0(t,\ \eta)\,\varepsilon_{cp}(\eta)\,d\eta\right];$$

$$\sigma_x(t) - \sigma_{cp}(t) = 2G(t)\left\{\varepsilon_x(t) - \varepsilon_{cp}(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{G(t)}\int_{t_0}^{t}\Gamma_c(t,\ \eta)\,[\varepsilon_x(\eta) - \varepsilon_{cp}(\eta)]\,d\eta\right\};$$

$$\tau_{xy}(t) = G(t)\left[\gamma_{xy}(t) - \frac{1}{G(t)}\int_{t_0}^{t}\Gamma_c(t,\ \eta)\,\gamma_{xy}(\eta)\,d\eta\right];\ \ldots .$$

Здесь $\Gamma_c(t, \eta)$, $\Gamma_0(t, \eta)$ — ядра сдвиговой и объемной релаксации.

Из физических соображений понятно, что при постоянных во времени положительных сдвиговой и объемной деформациях касательные напряжения или среднее нормальное напряжение в любой момент времени $t \geqslant t_0$ должны оставаться положительными. А это означает, что должны соблюдаться очевидные следующие неравенства:

$$0 < G_0 \leqslant G(t) < \infty, \quad 0 < K_0 \leqslant K(t) < \infty,$$

$$\frac{1}{G(t)} \int_{t_0}^{t} \Gamma_c(t, \eta)\, d\eta \leqslant m, \frac{1}{K(t)} \int_{t_0}^{t} \Gamma_0(t, \eta)\, d\eta \leqslant m, \quad m = \text{const} < 1.$$

Аналогичные неравенства должны соблюдаться для модуля упругости $E(t)$ и ядра релаксации $\Gamma(t, \eta)$ при одноосном сжатии-растяжении

$$0 < E_0 \leqslant E(t) < \infty, \frac{1}{E(t)} \int_{t_0}^{t} \Gamma(t, \eta)\, d\eta \leqslant m,$$

которые, впрочем, могут быть получены из предыдущих неравенств.

Из выражений (11.8) легко находятся компоненты тензора напряжений

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = 2G(1 - \mathbf{\Gamma}_c)\,\varepsilon_x + [3K(1 - \mathbf{\Gamma}_0) - 2G(1 - \mathbf{\Gamma}_c)]\,\varepsilon_{\text{ср}};\\ &\tau_{xy} = G(1 - \mathbf{\Gamma}_c)\,\gamma_{xy};\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (11.9)$$

При записи определяющих соотношений теории вязкоупругости часто делается предположение, что коэффициент Пуассона μ является постоянной во времени величиной. В этом случае зависимости (11.6) принимают вид

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1 - 2\mu}{E}(1 + \mathbf{K})\,\sigma_{\text{ср}};$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1 + \mu}{E}(1 + \mathbf{K})(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}});$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E}(1 + \mathbf{K})\,\tau_{xy}; \ \dots,$$

или в более наглядной форме [3, 26]

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1}{E}(1 + \mathbf{K})[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];\\ &\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E}(1 + \mathbf{K})\,\tau_{xy}; \ \dots . \end{aligned}\right\} \quad (11.10)$$

Обратные соотношения легко можно получить из аналогичных соотношений для упругого изотропного тела, заменив в последних величину E оператором $E(1 - \mathbf{\Gamma}) = \left[\frac{1}{E}(1 + \mathbf{K})\right]^{-1}$.

Хотя гипотеза о постоянстве коэффициента Пуассона в силу своей простоты получила широкое распространение в инженерных расчетах, в экспериментах над изотропными материалами бо́льшее подтверждение находит другая гипотеза, а именно гипотеза об упругости объемных деформаций, т.е. $K\,(1-\mathbf{Г}_0)\equiv K$. Тогда равенства (11.7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_с)\,\sigma_x+\left[\frac{1}{3K}-\frac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_с)\right]\sigma_{ср};\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}(1+\mathbf{K}_с)\,\tau_{xy};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(11.11)$$

Если объемными деформациями можно пренебречь (несжимаемый материал), из соотношений (11.11) имеем равенства

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(1+\mathbf{K}_с)(\sigma_x-\sigma_{ср});\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}(1+\mathbf{K}_с)\,\tau_{xy},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(11.12)$$

которые в этом частном случае совпадают с равенствами (11.10).

§ 11.4. ПРИНЦИП ВОЛЬТЕРРЫ

Под действием постоянных или медленно меняющихся во времени внешних нагрузок точки вязкоупругого тела медленно перемещаются в пространстве. Если пренебречь силами инерции по сравнению с другими силовыми факторами, т.е. ограничиться рассмотрением квазистатической постановки задачи, то перемещения, деформации и напряжения в вязкоупругом теле будут определены из решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_x=2G\,(1-\mathbf{Г}_с)\,e_x+[3K\,(1-\mathbf{Г}_0)-2G\,(1-\mathbf{Г}_с)]\,\varepsilon_{ср};$$

$$\tau_{xy}=G\,(1-\mathbf{Г}_с)\,\gamma_{xy},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

причем решение должно удовлетворять статическим и кинематическим (геометрическим) граничным условиям на поверхности тела, которые записываются подобно условиям для упругого тела. Кроме того, предполагается, что при $t < t_0$ все перемещения, деформации и напряжения в теле равны нулю.

В теории вязкоупругости доказано, что эта система уравнений имеет единственное решение.

Заметим, что операция умножения на интегральные операторы (операция интегрирования по времени) и операция дифференцирования или интегрирования по пространственным координатам переставимы между собой. Отсюда следует простое правило построения решения задачи теории вязкоупругости, которое носит название *принципа Вольтерры*. Принцип заключается в том, что решение задачи для вязкоупругого тела может быть получено так же, как решение аналогичной задачи для упругого тела, если в процессе решения с интегральными операторами обращаться как с упругими постоянными. В итоге решение будет представлено как произведение функции от упругих постоянных и от пространственных координат на известную функцию времени. Последняя определяется по заданным силовым или кинематическим воздействиям. Далее следует заменить упругие постоянные интегральными операторами и произвести необходимые операции над ними.

Если решение задачи теории упругости содержит рациональные функции упругих постоянных, то получение решения задачи теории вязкоупругости в этом случае принципиальных затруднений не вызывает и сводится к расшифровке указанных функций от операторов ползучести.

В качестве примера рассмотрим решение задачи вязкоупругости в напряжениях, считая, что коэффициент Пуассона материала тела остается постоянным во времени ($\mu = \mathrm{const}$).

Для упругого тела при постоянных объемных силах решение такой задачи сводится к решению трех уравнений равновесия и шести уравнений Бельтрами (см. § 2.7):

$$(1+\mu)\,\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,3\sigma_{\text{ср}} = 0, \quad (1+\mu)\,\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,3\sigma_{\text{ср}} = 0, \quad \ldots\,.$$

Если граничные условия заданы в усилиях, то напряженное состояние в односвязном теле будет зависеть только от коэффициента Пуассона. В соответствии с принципом Вольтерры для рассматриваемого вязкоупругого тела распределение напряжений будет совпадать в любой момент времени $t \geqslant t_0$ с распределением напряжений в упругом теле. Деформации определяются из соотношений (11.10):

$$\varepsilon_x(t, x, y, z) = \frac{1}{E(t)}\Big\{\sigma_x(t, x, y, z) - \mu\sigma_y(t, x, y, z) - \mu\sigma_z(t, x, y, z) +$$

$$+ E(t)\int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\,[\sigma_x(\eta, x, y, z) - \mu\sigma_y(\eta, x, y, z) - \mu\sigma_z(\eta, x, y, z)]\,d\eta\Big\};$$

$$\gamma_{xy}(t, x, y, z) = \frac{1}{G(t)}\Big[\tau_{xy}(t, x, y, z) +$$

$$+ E(t)\int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\,\tau_{xy}(\eta, x, y, z)\,d\eta\Big]; \;\ldots .$$

Здесь подразумевается, что при внешней нагрузке, меняющейся во времени, напряжения в упругой задаче также являются функциями времени.

Если внешние воздействия остаются постоянными, то и напряженное состояние в теле не меняется во времени. Тогда очевидно, что графики изменения деформаций во времени подобны кривым ползучести для материала тела. Таким образом, в данном случае решается задача о ползучести тела.

В качестве другого примера рассмотрим решение задачи вязкоупругости в перемещениях для того же тела в предположении, что массовые силы тождественно равны нулю.

Решение аналогичной задачи для упругого тела сводится к решению трех уравнений Ляме (см. § 2.7):

$$(\lambda + G)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + G\nabla^2 u = 0, \;\ldots,\; \Theta = 3\varepsilon_{\text{ср}}.$$

С учетом соотношения $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ уравнения Ляме принимают вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + (1-2\mu)\nabla^2 u = 0, \;\ldots .$$

На основании принципа Вольтерры это же уравнение оказывается справедливым и для вязкоупругого тела.

Допустим, что граничные условия на всей поверхности тела заданы в перемещениях. Очевидно, что распределение деформаций и перемещений в упругом теле зависит только от одной упругой постоянной — коэффициента Пуассона. Следовательно, деформированное состояние вязкоупругого тела в любой момент времени $t \geqslant t_0$ совпадает с деформированным состоянием упругого тела. Если граничные условия во времени остаются постоянными, то и деформированное состояние вязкоупругого тела остается неизменным. Компоненты тензора напряжений меняются во времени. Их значения легко найти из физических соотношений, а графики изменения напряжений во времени оказываются подобными кривым релаксации, которые строятся по результатам испытаний образцов при фиксированных во времени деформациях. Итак, в рассматриваемом случае решается задача о релаксации вязкоупругого тела.

Если же решение задачи теории упругости содержит иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных, то решение соответствующей задачи теории вязкоупругости может вызвать определенные затруднения. В частности, решение осесимметричной задачи об изгибе цилиндрической оболочки содержит функции вида $e^{\pm\beta x}\cos\beta x$, $e^{\pm\beta x}\sin\beta x$, где параметр β определяется выражением (см. § 7.12)

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{a^2\delta^2}}.$$

В том случае, когда при записи физических соотношений теории вязкоупругости используется гипотеза о постоянстве коэффициента Пуассона, появление указанных трансцендентных функций не усложняет решение задачи вязкоупругости. В противном случае более целесообразными для решения поставленной задачи могут оказаться другие методы, например основанные на применении вариационных принципов.

Важно отметить, что использование принципа Вольтерры при решении задачи вязкоупругости предполагает неизменность типа

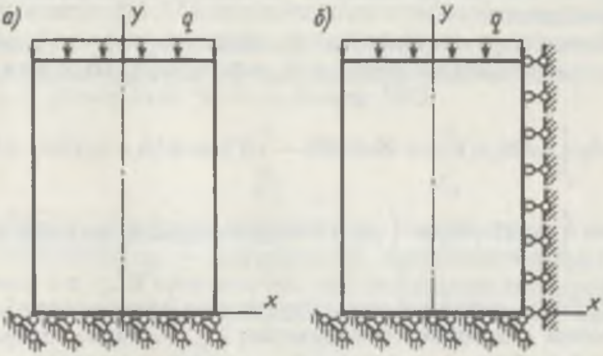


Рис. 11.5

граничных условий на поверхности тела (в каждой точке поверхности тела в любой момент времени задаются либо перемещения, либо усилия), иначе принцип может оказаться неприменимым [28]. Поясним сказанное на следующем простом примере.

Вязкоупругая прямоугольная пластина закреплена вдоль нижней кромки и нагружена в момент времени t_0 так, как показано на рис. 11.5,*а*. Решение для такой пластины при $t \geqslant t_0$ может быть получено с помощью принципа Вольтерры из решения для аналогичной упругой пластины. Заметим при этом, что картина перемещений точек пластины будет симметричной относительно оси y.

Далее предположим, что непосредственно после приложения нагрузки (в момент времени $t_1 = t_0 + 0$) вдоль правой (деформированной) кромки пластины устанавливаются связи, препятствующие дополнительным горизонтальным смещениям точек кромки (рис. 11.5,*б*). В упругой пластине при неизменной нагрузке это не вызовет никаких изменений в деформированном (симметричном относительно оси y) состоянии, в то время как в вязкоупругой пластине постановка дополнительных связей при $t > t_1$ приведет к нарушению симметрии деформированного состояния. Таким образом, при $t > t_1$ решение задачи теории вязкоупругости не может быть получено с помощью принципа Вольтерры из решения задачи теории упругости.

Заметим, что с задачами подобного типа приходится встречаться часто в тех случаях, когда расчеты сооружений выполняются с учетом их изготовления и монтажа и при этом на разных стадиях сборки используются различные расчетные схемы сооружения.

§ 11.5. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В тех случаях, когда решение задачи теории вязкоупругости с помощью принципа Вольтерры невозможно или затруднено, эффективными могут оказаться методы решения, основанные на вариационных принципах.

По аналогии с функционалом полной энергии, используемым в теории упругости, введем функционал $Э$, определяемый следующим образом:

$$Э = U_0 - U_1 - \int\limits_V (Xu + Yv + Zw)\, dV - \int\limits_{S_p} (p_x u + p_y v + p_z w)\, dS. \quad (11.13)$$

Здесь $U_0 = \int\limits_V u_0\, dV$, $U_1 = \int\limits_V u_1\, dV$ — потенциалы, первый из которых является упругим потенциалом (потенциальная энергия), а второй условно назовем «вязким» потенциалом; S_p — часть поверхности тела, на которой заданы поверхностные нагрузки (на остальной части поверхности тела S_u заданы перемещения $u = v = w = 0$); V — объем тела.

Для потенциала u_0 справедливо выражение

$$u_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

или, что то же самое,

$$u_0 = G\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp})^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp})^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp})^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right] + \frac{9}{2} K \varepsilon_{cp}^2.$$

Потенциал u_1 зададим в виде [28]

$$u_1 = 2G\Big[(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp})\Gamma_c(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}) + (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp})\Gamma_c(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}) + (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp})\Gamma_c(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}) + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}\Gamma_c\gamma_{xy} + \gamma_{yz}\Gamma_c\gamma_{yz} + \gamma_{zx}\Gamma_c\gamma_{zx}) + 9\varepsilon_{cp}K\Gamma_0\varepsilon_{cp}.$$

В скалярной форме каждое из слагаемых записывается следующим образом:

$$G(\varepsilon_x-\varepsilon_{\text{cp}})\,\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_x-\varepsilon_{\text{cp}})\equiv$$

$$\equiv[\varepsilon_x(t)-\varepsilon_{\text{cp}}(t)]\int\limits_{t_0}^{t}\Gamma_{\text{c}}(t,\eta)\,[\varepsilon_x(\eta)-\varepsilon_{\text{cp}}(\eta)]\,\mathrm{d}\eta,\ \ldots;$$

$$K\varepsilon_{\text{cp}}\Gamma_0\varepsilon_{\text{cp}}\equiv\varepsilon_{\text{cp}}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Gamma_0(t,\eta)\,\varepsilon_{\text{cp}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

При заданных объемных и поверхностных нагрузках функционал $Э$ зависит от перемещений и деформаций, а так как деформации однозначно определяются через перемещения, то можно утверждать, что функционал $Э$ зависит только от перемещений u, v, w. Заметим, что в выражении (11.13) перемещения считаются согласованными с геометрическими граничными условиями на поверхности тела S_u.

Проварьируем функционал $Э$ по перемещениям u, v, w в момент времени t, в результате чего получим [28]

$$\delta Э=\int\limits_V(\delta U_0-\delta U_1-X\delta u-Y\delta v-Z\delta w)\,\mathrm{d}V-\int\limits_{S_{\text{p}}}(p_x\delta u+p_y\delta v+p_z\delta w)\,\mathrm{d}S.$$

Потенциал u_0 содержит деформации, относящиеся к моментам времени t, а потенциал u_1 — деформации, относящиеся к разным моментам времени t и η. Учитывая то, что варьирование производится по перемещениям, соответствующим моменту времени t, запишем:

$$\delta u_0=2G\Big[(\varepsilon_x-\varepsilon_{\text{cp}})(\delta\varepsilon_x-\delta\varepsilon_{\text{cp}})+(\varepsilon_y-\varepsilon_{\text{cp}})(\delta\varepsilon_y-\delta\varepsilon_{\text{cp}})+$$

$$+(\varepsilon_z-\varepsilon_{\text{cp}})(\delta\varepsilon_z-\delta\varepsilon_{\text{cp}})+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}\delta\gamma_{xy}+\gamma_{yz}\delta\gamma_{yz}+\gamma_{zx}\delta\gamma_{zx})\Big]+9K\varepsilon_{\text{cp}}\delta\varepsilon_{\text{cp}};$$

$$\delta u_1=2G\Big[(\delta\varepsilon_x-\delta\varepsilon_{\text{cp}})\,\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_x-\varepsilon_{\text{cp}})+(\delta\varepsilon_y-\delta\varepsilon_{\text{cp}})\,\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_y-\varepsilon_{\text{cp}})+$$

$$+(\delta\varepsilon_z-\delta\varepsilon_{\text{cp}})\,\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_z-\varepsilon_{\text{cp}})+\frac{1}{2}(\delta\gamma_{xy}\Gamma_{\text{c}}\gamma_{xy}+\delta\gamma_{yz}\Gamma_{\text{c}}\gamma_{yz}+\delta\gamma_{zx}\Gamma_{\text{c}}\gamma_{zx})\Big]+$$

$$+9\delta\varepsilon_{\text{cp}}K\Gamma_0\varepsilon_{\text{cp}}.$$

Каждое из слагаемых в последнем равенстве нужно понимать следующим образом:

$$2G(\delta\varepsilon_x-\delta\varepsilon_{\text{cp}})\,\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_x-\varepsilon_{\text{cp}})\equiv$$

$$\equiv2[\delta\varepsilon_x(t)-\delta\varepsilon_{\text{cp}}(t)]\int\limits_{t_0}^{t}\Gamma_{\text{c}}(t,\eta)\,[\varepsilon_x(\eta)-\varepsilon_{\text{cp}}(\eta)]\,\mathrm{d}\eta;$$

$$9\delta\varepsilon_{\text{cp}}K\Gamma_0\varepsilon_{\text{cp}}\equiv9\delta\varepsilon_{\text{cp}}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Gamma_0(t,\eta)\,\varepsilon_{\text{cp}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Условием стационарности функционала $Э$ является равенство

$$\delta Э = 0. \tag{11.14}$$

Можно показать, что из этого условия вытекают уравнения равновесия во внутренних точках тела и силовые граничные условия на поверхности тела S_p. Этих уравнений достаточно для решения задач вязкоупругости, так как их нужно понимать как уравнения равновесия в перемещениях (обобщение уравнений Ляме на случай вязкоупругого тела).

Вторая вариация функционала $\delta^2 Э$ совпадает со второй вариацией полной энергии упругого тела. Так как последняя положительна, то очевидно, что $\delta^2 Э > 0$.

Таким образом, можно сформулировать вариационный принцип Лагранжа применительно к вязкоупругим телам: среди всех возможных полей перемещений вязкоупругого тела, согласованных с геометрическими граничными условиями, истинными являются те, при которых функционал $Э$ принимает минимальное значение.

Предположим, что дифференциальные уравнения равновесия и уравнения равновесия на части поверхности тела S_p удовлетворяются. Введем новый функционал

$$Э_1 = \int\limits_V (\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1)\, dV,$$

где $\tilde{u}_0$ — упругий потенциал, выраженный через напряжения:

$$\tilde{u}_0 = \frac{1}{4G}\left[(\sigma_x - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_y - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_z - \sigma_{cp})^2 + \right.$$

$$\left. + 2\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right] + \frac{\sigma_{cp}^2}{2K};$$

$\tilde{u}_1$ — потенциал, определяемый следующим образом [28]:

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2G}\left[(\sigma_x - \sigma_{cp})\,\mathbf{K}_c\,(\sigma_x - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp})\,\mathbf{K}_c\,(\sigma_y - \sigma_{cp}) + \right.$$

$$\left. + (\sigma_z - \sigma_{cp})\,\mathbf{K}_c\,(\sigma_z - \sigma_{cp}) + 2\,(\tau_{xy}\mathbf{K}_c\tau_{xy} + \tau_{yz}\mathbf{K}_c\tau_{yz} + \tau_{zx}\mathbf{K}_c\tau_{zx})\right] +$$

$$+ \frac{1}{K}\,\sigma_{cp}\mathbf{K}_0\sigma_{cp}.$$

Здесь

$$\frac{1}{G}\,(\sigma_x - \sigma_{cp})\,\mathbf{K}_c\,(\sigma_x - \sigma_{cp}) \equiv$$

$$\equiv [\sigma_x(t) - \sigma_{cp}(t)] \int\limits_{t_0}^{t} K_c(t, \eta)\,[\sigma_x(\eta) - \sigma_{cp}(\eta)]\, d\eta;$$

$$\frac{1}{K}\,\sigma_{cp}\mathbf{K}_0\sigma_{cp} \equiv \sigma_{cp}(t) \int\limits_{t_0}^{t} K_0(t, \eta)\,\sigma_{cp}(\eta)\, d\eta.$$

Проварьируем функционал $Э_1$ по напряжениям, относящимся к моменту времени t, принимая в качестве вариаций напряжений статически возможные поля напряжений. Под этими полями понимаются такие распределения напряжений, которые удовлетворяют однородным уравнениям равновесия и однородным граничным условиям на части поверхности тела S_p (вариации массовых сил и поверхностных нагрузок считаются равными нулю). Тогда

$$\delta Э_1 = \int_V (\delta \tilde{u}_0 + \delta \tilde{u}_1)\, dV,$$

причем

$$\delta u_0 = \frac{1}{2G}\left[(\sigma_x - \sigma_{ср})(\delta\sigma_x - \delta\sigma_{ср}) + (\sigma_y - \sigma_{ср})(\delta\sigma_y - \delta\sigma_{ср}) + \right.$$

$$+ (\sigma_z - \sigma_{ср})(\delta\sigma_z - \delta\sigma_{ср}) + 2(\tau_{xy}\delta\tau_{xy} + \tau_{yz}\delta\tau_{yz} + \tau_{zx}\delta\tau_{zx})] +$$

$$+ \frac{1}{K}\sigma_{ср}\delta\sigma_{ср};$$

$$\delta\tilde{u}_1 = \frac{1}{2G}\left[(\delta\sigma_x - \delta\sigma_{ср})\mathbf{K}_c(\sigma_x - \sigma_{ср}) + (\delta\sigma_y - \delta\sigma_{ср})\mathbf{K}_c(\sigma_y - \sigma_{ср}) + \right.$$

$$+ (\delta\sigma_z - \delta\sigma_{ср})\mathbf{K}_c(\sigma_z - \sigma_{ср}) + 2(\delta\tau_{xy}\mathbf{K}_c\tau_{xy} + \delta\tau_{yz}\mathbf{K}_c\tau_{yz} + \delta\tau_{zx}\mathbf{K}_c\tau_{zx}] +$$

$$+ \frac{1}{K}\delta\sigma_{ср}\mathbf{K}_0\sigma_{ср}.$$

Каждое из слагаемых в последнем выражении нужно понимать следующим образом:

$$\frac{1}{G}(\delta\sigma_x - \delta\sigma_{ср})\mathbf{K}_c(\sigma_x - \sigma_{ср}) \equiv$$

$$\equiv [\delta\sigma_x(t) - \delta\sigma_{ср}(t)]\int_{t_0}^{t} K_c(t, \eta)[\sigma_x(\eta) - \sigma_{ср}(\eta)]\, d\eta;$$

$$\frac{1}{K}\delta\sigma_{ср}\mathbf{K}_0\sigma_{ср} \equiv \delta\sigma_{ср}(t)\int_{t_0}^{t} K_0(t, \eta)\,\sigma_{ср}(\eta)\, d\eta.$$

Условию стационарности функционала $Э_1$ соответствует равенство

$$\delta Э_1 = 0,$$

из которого вытекают уравнения совместности деформаций, записанные в напряжениях.

Вторая вариация функционала $Э_1$ положительна.

В результате для вязкоупругого тела можно сформулировать вариационный принцип, являющийся обобщением вариационного принципа Кастильяно, рассмотренного в гл. 3 применительно к упругим телам.

Среди всех статически возможных полей напряжений истинными являются те, при которых функционал $Э_1$ принимает минимальное значение.

Вариационные принципы чаще всего используются для получения приближенного решения задач вязкоупругости. В частности, из вариационного принципа Лагранжа следует метод Ритца. Суть его поясним на примере тела с однородными кинематическими (геометрическими) граничными условиями.

Представим искомые перемещения в вязкоупругом теле в виде

$$\left.\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\varphi_i(x, y, z); \\ v(t, x, y, z) &= \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\,\psi_j(x, y, z); \\ w(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{l} c_k(t)\,\varkappa_k(x, y, z). \end{aligned}\right| \tag{11.15}$$

Здесь $a_i(t)$, $b_j(t)$, $c_k(t)$ — неизвестные функции только времени, а базисные функции φ_i, ψ_j, $\varkappa_k$ являются непрерывными и дифференцируемыми в объеме тела функциями только пространственных координат, удовлетворяющими однородным геометрическим граничным условиям на части поверхности тела S_u.

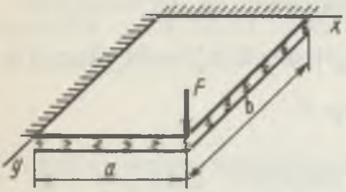


Рис. 11.6

Подставляя суммы (11.15) в выражение (11.13), получим в результате функционал $Э$, зависящий только от функций времени $a_i(t)$, $b_j(t)$, $c_k(t)$. Считая вариации функций $\delta a_i(t)$, $\delta b_j(t)$, $\delta c_k(t)$ независимыми, найдем вариацию функционала $Э$ по каждой из функций и приравняем эту вариацию в соответствии с равенством (11.14) нулю:

$$\frac{\partial Э}{\partial a_i}\,\delta a_i = 0, \quad \frac{\partial Э}{\partial b_j}\,\delta b_j = 0, \quad \frac{\partial Э}{\partial c_k}\,\delta c_k = 0.$$

Вариации δa_i, δb_j, δc_k отличны от нуля, в связи с чем должны быть справедливы равенства

$$\frac{\partial Э}{\partial a_i} = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad \frac{\partial Э}{\partial b_j} = 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$\frac{\partial Э}{\partial c_k} = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{11.16}$$

Можно показать, что каждое из этих равенств является линейным интегральным уравнением относительно искомых функций $a_i(t)$, $b_j(t)$, $c_k(t)$.

Для примера рассмотрим упругую пластину, лежащую на сплошном вязкоупругом основании (рис. 11.6), которое характеризуется следующей зависимостью между вертикальной реакцией r и прогибом пластины:

$$r = -k\,(1 - \mathbf{R})\,w,$$

где k — коэффициент упругого отпора,

$$k\mathbf{R}w = k \int_0^t R^* (t-\eta)\, w(\eta)\, d\eta;$$

$kR^*\ (t-\eta)$ — ядро релаксации основания.

Потенциальная энергия пластины и основания соответственно равны

$$U_0^{\text{пл}} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x\, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2} \right] \right\} dx\, dy;$$

$$U_0^{\text{ос}} = \frac{k}{2} \int_0^a \int_0^b w^2(t, x, y)\, dx\, dy.$$

«Вязкий» потенциал определяется выражением

$$U_1 = k \int_0^a \int_0^b w(t, x, y) \int_0^t R^* (t-\eta)\, w(\eta, x, y)\, d\eta\, dx\, dy.$$

В качестве базисных функций, удовлетворяющих однородным геометрическим условиям (при $x=0,\ w=\frac{\partial w}{\partial x}=0$, при $y=0,\ w=\frac{\partial w}{\partial y}=0$) примем

$$\varkappa_{nm}(x, y) = \left(\frac{x}{a} \right)^{n+1} \left(\frac{y}{b} \right)^{m+1}.$$

Не преследуя цель получить результаты с высокой степенью точности, для большей наглядности рассуждений ограничимся в разложении прогиба w (11.15) одним первым членом

$$w(t, x, y) = c(t) \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(\frac{y}{b} \right)^2, \tag{11.17}$$

где $c\ (t)$ — неизвестная функция времени.

С учетом выражения (11.17) функционал $Э$ записывается следующим образом:

$$Э = \frac{2}{45} D \frac{c^2(t)}{a^3 b^3} [9a^4 + 10(4-3\mu) a^2 b^2 + 9b^4] +$$

$$+ k \left[\frac{c(t)^2}{2} - c(t) \int_0^t R^* (t-\eta)\, c(\eta)\, d\eta \right] \frac{ab}{25} - Fc(t).$$

Последнее слагаемое определяет работу сосредоточенной силы. Условия (11.16) в данном случае сводятся к одному уравнению $\frac{\partial Э}{\partial c} = 0$.

Отсюда имеем

$$\left\{\frac{4}{45} D\left[9a^4+10(4-3\mu)a^2b^2+9b^4\right]+\frac{a^4b^4}{25}k\right\}\frac{c(t)}{a^4b^4}-$$

$$-\frac{k}{25}\int_0^t R^*(t-\eta)\,c(\eta)\,\mathrm{d}\eta-\frac{F}{ab}=0.$$

Функция $c(t)$ находится как решение этого интегрального уравнения, после чего приближенное значение прогиба в любой точке пластины может быть получено из равенства (11.17).

§ 11.6. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Решение плоской задачи теории упругости сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений φ. Так как оно не содержит упругих постоянных, то на основании принципа Вольтерры можно утверждать, что это же уравнение справедливо и для плоской задачи теории вязкоупругости. Если граничные условия на границе односвязной области, занимаемой рассматриваемым телом, заданы в усилиях, то, как отмечалось в § 4.3, решение плоской задачи теории упругости не зависит от упругих постоянных. Следовательно, распределение напряжений в каждый момент времени t в вязкоупругом теле совпадает с распределением напряжений в упругом теле.

При постоянных во времени внешних воздействиях напряженное состояние в теле будет оставаться неизменным, меняться будут лишь деформации и перемещения. В частности, определение деформаций в этом случае сводится к вычислению интегралов

$$\int_{t_0}^t K_c(t,\eta)\,\mathrm{d}\eta;\qquad \int_{t_0}^t K_0(t,\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

в выражениях (11.7).

Заметим, что в § 11.4 аналогичный результат был получен для общего случая напряженного состояния. Однако там было наложено ограничение на физические соотношения, а именно предполагалось, что коэффициент Пуассона не меняется во времени. Если отказаться от этого предположения, то вывод о совпадении напряженных состояний в упругом и вязкоупругом теле оказывается неверным. Если же ограничиться рассмотрением только плоской задачи, то на основании приведенных выше рассуждений можно констатировать, что этот вывод остается справедливым для любой изотропной вязкоупругой пластины или изотропного вязкоупругого тела, находящегося в условиях плоского деформированного состояния.

§ 11.7. ИЗГИБ ПЛАСТИН

Рассмотрим пластину из материала, для которого *коэффициент Пуассона остается постоянным во времени.*

Для определения прогиба пластины воспользуемся бигармоническим уравнением, полученным ранее для упругой пластины (§ 6.5), заменив в нем величину $\frac{1}{E}$ оператором $\frac{1}{E}$ $(1+\mathbf{K})$:

$$\nabla^4 w = \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta^3}(1+\mathbf{K})\,q.$$

Сохраняя прежнее обозначение для цилиндрической жесткости, можно переписать это уравнение следующим образом:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}(1+\mathbf{K})\,q.$$

Функция w должна, кроме того, удовлетворять граничным условиям на кромках пластины. Если в упругой пластине краевые условия не зависят от модуля упругости, то решение задачи для вязкоупругой пластины с помощью принципа Вольтерры легко может быть найдено из решения для упругой пластины. Ограничимся рассмотрением пластинки, кромки которой жестко защемлены либо свободно (шарнирно) оперты.

Допустим, что для упругой пластины с модулем упругости E_0 решение равно $w_0(x, y)$. В том случае, когда внешняя нагрузка меняется во времени, прогиб w_0 зависит еще и от времени t. Тогда для рассматриваемой вязкоупругой пластины прогиб определяется выражением

$$w = \frac{E_0}{E}(1+\mathbf{K})\,w_0 \tag{11.18}$$

или

$$w(t, x, y) = \frac{E_0}{E(t)}\left[w_0(t, x, y) + E(t)\int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\,w_0(\eta, x, y)\,d\eta\right].$$

Если внешняя нагрузка во времени остается постоянной, то прогиб вязкоупругой пластины равен

$$w(t, x, y) = w_0(x, y)\frac{E_0}{E(t)}\left[1 + E(t)\int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\,d\eta\right].$$

Таким образом, график изменения прогиба во времени в каждой точке пластины подобен кривой ползучести материала.

Для изгибающих и крутящего моментов в упругой пластине с модулем упругости E_0 справедливы зависимости

$$\left.\begin{aligned} &M_x = -D_0\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -D_0\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right); \\ &H = -(1-\mu)\,D_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

где
$$D_0 = \frac{E_0 \delta^3}{12(1-\mu^2)}.$$

На основании принципа Вольтерры для вязкоупругой пластины имеем

$$M_x = -D_0 \frac{E}{E_0}(1-\mathrm{R})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$M_y = -D_0 \frac{E}{E_0}(1-\mathrm{R})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$
$$H = -(1-\mu) D_0 \frac{E}{E_0}(1-\mathrm{R})\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}.$$

После подстановки сюда выражения (11.18) с учетом равенства $E(1-\mathrm{R})\frac{1}{E}(1+\mathrm{K}) = 1$ вновь получим соотношения (11.19). Это означает, что внутренние усилия, так же как и напряжения в вязкоупругой пластине, совпадают в каждый момент времени с усилиями и напряжениями в упругой пластине.

Далее рассмотрим вязкоупругую пластину, *материал которой характеризуется упругими объемными деформациями.*

Для получения зависимостей между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии в нашем случае воспользуемся соотношениями (11.11). После некоторых преобразований из них получим:

$$\sigma_x = 2G(1-\Gamma_c)\,\varepsilon_x + \mathrm{L}(\varepsilon_x + \varepsilon_y);$$
$$\sigma_y = 2G(1-\Gamma_c)\,\varepsilon_y + \mathrm{L}(\varepsilon_x + \varepsilon_y);$$
$$\tau_{xy} = G(1-\Gamma_c)\,\gamma_{xy},$$

где

$$\mathrm{L} = \left\{\frac{2}{3} + K[2G(1-\Gamma_c)]^{-1}\right\}^{-1}\left[K - \frac{2}{3}G(1-\Gamma_c)\right].$$

Для упругого тела нормальные напряжения σ_x и σ_y определяются выражениями

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).$$

Таким образом, можно сказать, что оператор $2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L}$ является аналогом соотношения $E/(1-\mu^2)$.

Уравнение относительно прогиба пластины записывается в виде

$$\nabla^4 w = \frac{12}{\delta^3}[2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L}]^{-1} q, \tag{11.20}$$

которое следует из уравнения для упругой пластины, в котором на основании принципа Вольтерры константа $E/(1-\mu^2)$ заменяется оператором $2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L}$.

При прежних предположениях относительно граничных условий прогиб вязкоупругой пластины находится из выражения, аналогичного выражению (11.18):

$$w = E_0 [2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L}]^{-1} w_0. \tag{11.21}$$

Изгибающие и крутящий моменты определяются зависимостями

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\left[2G\left(1-\Gamma_c\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\delta^3}{12};\\ M_y &= -\left[2G\left(1-\Gamma_c\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\delta^3}{12};\\ H &= -2G\left(1-\Gamma_c\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\delta^3}{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.22)$$

Что касается напряжений, то они находятся через найденные моменты точно так же, как и в упругих пластинах.

Равенства (11.21), (11.22) свидетельствуют о том, что даже при постоянной во времени внешней нагрузке происходит изменение во времени прогиба пластины и внутренних усилий в ней. Для подтверждения сказанного рассмотрим в качестве примера прямоугольную

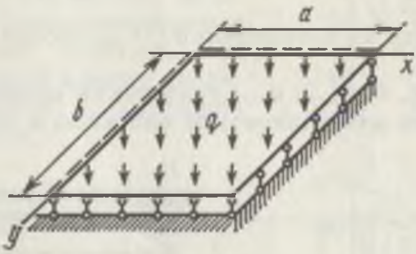


Рис. 11.7

в плане пластину, шарнирно опертую вдоль всех кромок и находящуюся под действием постоянной во времени равномерно распределенной нагрузки q (рис. 11.7).

Решение уравнения (11.20) ищем в виде

$$w(t, x, y)=\sum_{m,\, n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y, \qquad (11.23)$$

которое, очевидно, удовлетворяет граничным условиям на контуре пластины.

В упругой пластине коэффициенты ряда (11.23) определяются выражениями

$$f_{mn}^0=\frac{16q}{\pi^6 mnD}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{-2}, \text{ причем } m,\ n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots .$$

Для вязкоупругой пластины те же коэффициенты находятся из аналогичных выражений

$$f_{mn}(t)=\frac{192}{\pi^6 mn\delta^3}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{-2}\left[2G\left(1-\Gamma_c\right)+\mathrm{L}\right]^{-1} q. \qquad (11.24)$$

Для изгибающих и крутящего моментов в пластине справедливы зависимости

$$\left.\begin{aligned}
M_x = & \sum_{m,\, n=1,\, 3,\, \ldots} \left\{ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \mathrm{L} \left[2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L} \right]^{-1} \right\} \times \\
& \times \frac{16}{\pi^4 mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} q \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\
M_y = & \sum_{m,\, n=1\,\, 3} \left\{ \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \mathrm{L} \left[2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L} \right]^{-1} \right\} \times \\
& \times \frac{16}{\pi^4 mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} q \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\
H = - & \sum_{m,\, n=1,\, 3,\, \ldots} G(1-\Gamma_c) \left[2G(1-\Gamma_c) + \mathrm{L} \right]^{-1} \times \\
& \times \frac{64}{\pi^4 ab} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-2} q \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y,
\end{aligned}\right| \qquad (11.25)$$

которые получаются из соотношений (11.22) после подстановки в них ряда (11.23).

На рис. 11.8, *а*, *б*, 11.9, *а...в* графически представлены результаты решения задачи для квадратной пластины в предположении, что

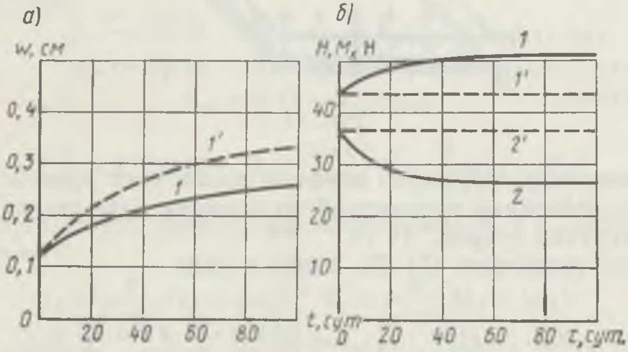


Рис. 11.8

объемный модуль упругости K и модуль сдвига G постоянны во времени, а ядро $\Gamma_c(t, \eta)$ имеет вид

$$\Gamma_c(t, \eta) = \gamma A G e^{-\gamma(1+A)(t-\eta)}.$$

Значения геометрических и физических констант приняты равными: $a = b = 1$ м; $\delta = 0{,}01$ м; $q = 1$ кПа; $t_0 = 0$; $E = 4 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 0{,}17$; $\gamma = 0{,}025$ 1/сут; $A = 2$.

На рис. 11.8, *а* показано изменение максимального прогиба во времени (кривая 1), а на рис. 11.8,*б* — изменение максимальных изгибающего M_x и крутящего H моментов (соответственно кривые

1 и 2). Для сравнения на тех же рисунках (пунктирными линиями 1′ и 2′) показано изменение тех же величин для пластины с постоянным во времени коэффициентом Пуассона и ядром релаксации, совпадающим с ядром $\Gamma_c(t, \eta)$ для рассматриваемой пластины. Из сопоставления графиков видно, что выбор той или иной гипотезы при формулировке физических соотношений может внести заметные коррективы в характеристики напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел.

На рис. 11.9 представлены графики изменения w, M_x (при $y = a/2$) и H (при $y = 0$) по ширине пластины для моментов времени $t = 0$ (кривые 1) и $t = 100$ сут (кривые 2).

Приведенные результаты свидетельствуют о существенном влиянии, которое могут оказать вязкие свойства материала на работу изгибаемых пластин. Интересно отметить, что прогиб и изгибающий момент увеличиваются во времени, а крутящий момент уменьшается.

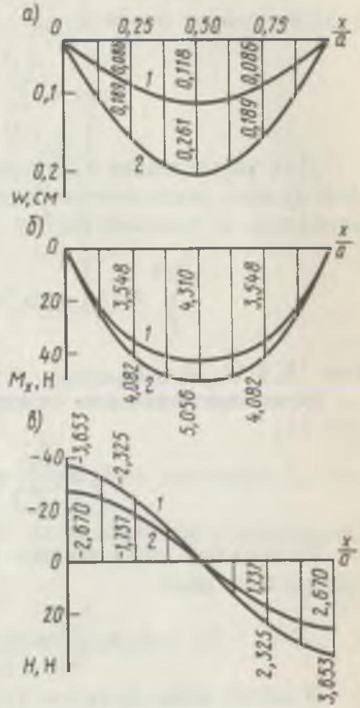


Рис. 11.9

§ 11.8. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ

Решение задач теории вязкоупругости часто сводится к решению линейных интегральных уравнений Вольтерры или их систем. Точное аналитическое решение таких уравнений возможно, как правило, только в исключительных случаях, а потому большое значение приобретают приближенные методы решения и, в частности, численные методы.

В основе численных методов лежит замена линейного интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений. Поясним это на примере.

Рассмотрим уравнение (11.2), которое перепишем следующим образом:

$$\sigma(t) + E(t) \int_{t_0}^{t} K(t, \eta)\, \sigma(\eta)\, d\eta = E(t)\, \varepsilon(t). \qquad (11.26)$$

Допустим, что известен закон изменения деформаций $\varepsilon(t)$ и нужно найти закон изменения напряжений $\sigma(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$.

Разобьем отрезок времени $[t_0, T]$ на n равных отрезков продолжительностью Δt. Для момента времени $t_k = t_0 + k\Delta t$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) представим интеграл

$$I_k = \int\limits_{t_0}^{t_k} K(t_k, \eta)\, \sigma(\eta)\, d\eta$$

в виде суммы интегралов:

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_k, \eta)\, \sigma(\eta)\, d\eta.$$

Для вычисления каждого из интегралов, фигурирующих под знаком суммы, воспользуемся теоремой о среднем для определенных интегралов, в соответствии с которой соблюдается равенство

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_k, \eta)\, \sigma(\eta)\, d\eta = \sigma(\xi_i) \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_k, \eta)\, d\eta,$$

где $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Если приближенно принять $\xi_i \cong t_{i+1}$, тогда

$$I_k \approx \sum_{i=0}^{k-1} \sigma(t_{i+1}) \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_k, \eta)\, d\eta.$$

Используя обозначение $\delta(t, \eta)$ (11.1), последнюю сумму можно записать в виде

$$I_k \approx \sum_{i=0}^{k-1} \sigma(t_{i+1}) [\delta(t_k, t_i) - \delta(t_k, t_{i+1})].$$

В итоге интегральное уравнение (11.26) для момента времени t_k заменяется алгебраическим уравнением

$$\sigma(t_k) + E(t_k) \sum_{i=0}^{k-1} [\delta(t_k, t_i) - \delta(t_k, t_{i+1})]\, \sigma(t_{i+1}) = E(t_k)\, \varepsilon(t_k).$$

Поделив это уравнение на $E(t_k)$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{E(t_0)}\, \sigma(t_0) = \varepsilon(t_0);\\
&\left\{\frac{1}{E(t_1)} + [\delta(t_1, t_0) - \delta(t_1, t_1)]\right\} \sigma(t_1) = \varepsilon(t_1);\\
&\frac{\sigma(t_2)}{E(t_2)} + [\delta(t_2, t_0) - \delta(t_2, t_1)]\, \sigma(t_1) + [\delta(t_2, t_1) -\\
&- \delta(t_2, t_2)]\, \sigma(t_2) = \varepsilon(t_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

Для представления соотношений (11.27) в более наглядной форме введем следующие векторы и матрицы:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \\ \vdots \\ \sigma(t_n) \end{bmatrix}; \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon(t_0) \\ \varepsilon(t_1) \\ \vdots \\ \varepsilon(t_n) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & E(t_n) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где $K_{ij} = \delta(t_i, t_{j-1}) - \delta(t_i, t_j)$.

В результате система уравнений (11.27) принимает вид

$$(\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{K}_*)\vec{\sigma} = \vec{\varepsilon}. \tag{11.28}$$

Здесь $\mathbf{E}^{-1}$ — диагональная матрица, обратная матрице $\mathbf{E}$; на диагонали этой матрицы стоят элементы $1/E(t_k)$.

Решение системы уравнений (11.28) записывается следующим образом:

$$\vec{\sigma} = (\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{K}_*)^{-1}\vec{\varepsilon}. \tag{11.29}$$

Нетрудно убедиться в том, что обратная матрица $(\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{K}_*)^{-1}$ является нижней треугольной матрицей.

Введем условное обозначение

$$(\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{K}_*)^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{R}_*.$$

Равенство (11.29) эквивалентно равенству

$$\vec{\sigma} = (\mathbf{E} - \mathbf{R}_*)\,\vec{\varepsilon}, \tag{11.30}$$

которое, очевидно, является аналогом интегрального уравнения

$$\sigma(t) = E(t)\,\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} R(t, \eta)\,\varepsilon(\eta)\,d\eta.$$

По элементам матрицы $\mathbf{R}_*$ можно получить дискретное представление ядра релаксации $R(t, \eta)$.

Если сопоставить уравнения (11.28), (11.30) с уравнениями (11.4), (11.5), легко заметить, что произведения $\mathbf{EK}_*$ и $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{R}_*$ являются дискретными аналогами интегральных операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}$. Таким образом, эти интегральные операторы, введенные в § 11.1 лишь для компактности записи зависимостей между напряжениями и деформациями, получают вполне конкретное физическое содержание.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим интегральное уравнение

$$\sigma(t) + \int_0^t \gamma A e^{-\gamma(t-\eta)} \sigma(\eta)\, d\eta = E\varepsilon, \quad E\varepsilon = \text{const}, \tag{11.31}$$

для которого известно точное решение

$$\sigma^*(t) = [1 + Ae^{-\gamma(1+A)t}] \frac{E\varepsilon}{1+A}.$$

Найдем численное решение уравнения (11.31) с шагом по времени равным $\Delta t = 10$ сут при $A = 1$, $\gamma = 0{,}025$ 1/сут. Заметим, что

$$E\delta(t_k, t_l) = \gamma A \int_{t_l}^{t_k} e^{-\gamma(t_k-\eta)}\, d\eta = A[1 - e^{-\gamma(t_k-t_l)}].$$

Уравнения (11.27) в рассматриваемом частном случае принимают вид

$$\sigma(t_0) = E\varepsilon, \quad t_0 = 0; \quad [1 + A(1 - e^{-\gamma t_1})]\, \sigma(t_1) = E\varepsilon;$$

$$\{1 + A[1 - e^{-\gamma(t_2-t_1)}]\}\, \sigma(t_2) + A[e^{-\gamma(t_2-t_1)} - e^{-\gamma t_2}]\, \sigma(t_1) = E\varepsilon;$$

$$\{1 + A[1 - e^{-\gamma(t_3-t_2)}]\}\, \sigma(t_3) + A[e^{-\gamma(t_3-t_2)} - e^{-\gamma(t_3-t_1)}]\, \sigma(t_2) +$$
$$+ A[e^{-\gamma(t_3-t_1)} - e^{-\gamma t_3}]\, \sigma(t_1) = E\varepsilon;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Результаты вычислений представлены в графе 3 табл. 11.1. Для сравнения в графе 2 той же таблицы приведены значения $\sigma(t)$, отвечающие точному решению уравнения. Как видно, численный метод дает возможность получить решение интегрального уравнения с достаточно высокой точностью.

Если неизвестная функция $\sigma(t)$ на отрезке времени $[t_0, t]$ меняется достаточно мало, тогда уравнение (11.26) приближенно можно

Таблица 11.1

t_k, сут	$\sigma^*(t_k)/(E\varepsilon)$	$\sigma(t_k)/(E\varepsilon)$	Погрешность, %
1	2	3	4
0	1	1	0
10	0,803265	0,818867	1,9
20	0,683940	0,703353	2,8
30	0,611565	0,629685	2,9
40	0,567668	0,582705	2,6
50	0,541042	0,552744	2,1

записать так:

$$\left[\frac{1}{E(t)}+\int_{t_0}^{t} K(t,\eta)\,d\eta\right]\sigma(t)=\varepsilon(t)$$

или

$$\sigma(t)=\frac{\varepsilon(t)}{\delta(t,\ t_0)}. \qquad (11.32)$$

Заметим, что при таком подходе к решению интегрального уравнения (11.26) задача теории вязкоупругости сводится к решению задачи теории упругости для тела с изменяющимися во времени упругими характеристиками.

Равенство (11.32) является приближенным и им следует пользоваться с известной осторожностью, поскольку иногда оно может привести к большим погрешностям. Однако в одном частном случае, когда материал тела не обладает свойством старения, а функция $\varepsilon(t)$ при неограниченном увеличении времени стремится к константе ε_∞, можно показать, что соотношение (11.32) дает точное решение при $t\to\infty$:

$$\sigma_\infty=\frac{\varepsilon_\infty}{E_\infty},$$

где

$$\frac{1}{E_\infty}=\frac{1}{E}+\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} K(t-\eta)\,d\eta=\frac{1}{E}+\int_0^\infty K(t_1)\,dt_1.$$

Величину E_∞ называют *длительным модулем упругости* в отличие от *мгновенного модуля* E.

Таким образом, если интерес представляет напряженно-деформированное состояние вязкоупругого тела, выполненного из нестареющего материала, только в начальный момент времени t_0 и в бесконечно удаленный $t\to\infty$, то решение задачи вязкоупругости сводится к решению двух задач теории упругости. В первом случае рассматривается тело с мгновенными объемным модулем упругости K и модулем сдвига G, а во втором случае — то же тело, но с длительными модулями, для которых справедливы соотношения

$$\frac{1}{K_\infty}=\frac{1}{K}+\int_0^\infty K_0(t_1)\,dt_1;\quad \frac{1}{G_\infty}=\frac{1}{G}+\int_0^\infty K_c(t_1)\,dt_1.$$

В заключение заметим, что в данном параграфе был рассмотрен лишь один из многих известных в настоящее время вариантов численных методов решения интегральных уравнений Вольтерры, называемый методом Крылова — Боголюбова. Существуют методы, основанные, например, на использовании различных квадратурных формул (формулы трапеций, формулы Симпсона и т.д.). В зависимости от характера конкретной задачи теории вязкоупругости предпочтение отдается тому или иному из названных методов.

ГЛАВА 12

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН

§ 12.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

За последние два-три десятилетия сформировалось и активно развивается новое направление в механике деформирования твердых тел, получившее название *механика разрушения*. Под этим термином понимается изучение условий равновесия и распространения макротрещин внутри нагруженных элементов конструкций вплоть до их полного разрушения.

Целый ряд катастроф, имевших место с морскими судами, газгольдерами и другими объектами, произошли при сравнительно невысоком уровне напряжений. Внешне они носили характер хрупкого внезапного излома и их смогли объяснить лишь после тщательного рассмотрения устойчивости трещин. Такие трещины, пустоты, раковины, как показывают обследования, практически всегда есть в реальных объектах (например, технологический брак материала).

Проблема трещиностойкости конструкций особенно возрастает с применением современных высокопрочных материалов и повышением уровня нагруженности при создании ответственных и дорогостоящих объектов (реакторов, летательных аппаратов, крупных транспортных сооружений, хранилищ больших объемов при низких температурах и агрессивности среды и др.).

В настоящей главе даются лишь начальные представления об условиях распространения трещин, основанные на решениях теории упругости и составляющие так называемую линейную механику разрушения. В основном они справедливы лишь тогда, когда зона нелинейных упругопластических деформаций у острия трещины невелика по сравнению с ее длиной. В данной главе можно познакомиться с явлением роста трещины и с рядом характеризующих его понятий. Это позволит в случае необходимости самостоятельно воспользоваться обширной литературой, существующей по механике разрушения, как линейной, так и нелинейной [см. 4, 11, 24, 38 и др.].

§ 12.2. НАПРЯЖЕНИЯ У КОНЦА ТРЕЩИНЫ

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в бесконечной пластине, растянутой вдоль оси y напряжениями σ (рис. 12.1). Пластина имеет узкий разрез длиной $2l$, имитирующий трещину. На большом удалении от трещины (теоретически на бесконечности) пусть $\sigma_y = \sigma = \text{const}$. В окрестности трещины это однородное поле напряжений получит возмущение. Найдем это возмущенное поле напряжений в окрестности трещины, при этом основное внимание уделим напряжениям вблизи ее концов. Если толщина пластины t мала по сравнению с l ($t \ll l$), то это будет задача о плоском напряженном состоянии.

Если толщина пластины $t \to \infty$, то имеем задачу о плоском деформированном состоянии. Из § 4.2 известно, что обе эти задачи при заданных напряжениях на поверхности тела дают одно и то же распределение напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} в плоскости xy. Различие состоит в том, что во втором случае возникают напряжения $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ и точки тела испытывают объемной напряженное состояние. Несколько различными будут также перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ точек этих тел.

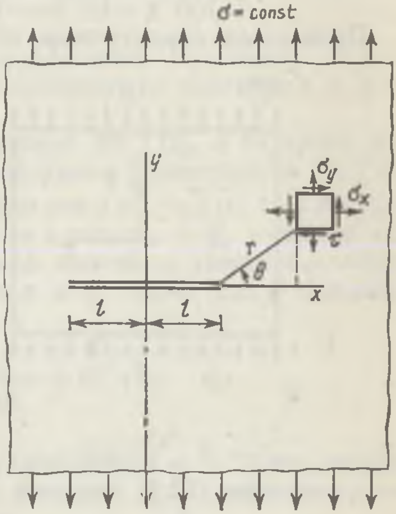


Рис. 12.1

Как известно, решение плоской задачи в напряжениях может быть сведено к определению функции напряжений, которую здесь обозначим $F = F(x, y)$. Эта функция находится как решение бигармонического уравнения (см. § 4.4)

$$\nabla^2\nabla^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \qquad (12.1)$$

При этом напряжения определяются формулами

$$\sigma_x = \partial^2 F/\partial y^2; \ \sigma_y = \partial^2 F/\partial x^2; \quad \tau_{xy} = \tau = -\partial^2 F/\partial x \partial y. \qquad (12.2)$$

Напряжения (12.2), выраженные через функцию F, являющуюся решением уравнения (12.1), должны удовлетворять условиям на поверхности тела. В нашем случае на бесконечности ($x \to \infty$, $y \to \infty$) надо иметь $\sigma_y = \sigma$; $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, а на каждом из берегов разреза (трещины) должны выполняться условия

$$\sigma_y = 0; \ \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } -l \leqslant x \leqslant l. \qquad (12.3)$$

Сформулированную краевую задачу заменим суммой двух задач (рис. 12.2,*а*,*б*). На рис. 12.2, *а* показана пластина без разреза, во всех точках которой, в том числе и на берегах воображаемого разреза $2l$, возникают растягивающие напряжения $\sigma_y = \sigma$. На рис. 12.2, *б* показано действие «расклинивающих» напряжений $p(x) = -\sigma$, приложенных к берегам трещины. В сумме эти два состояния дают граничные условия (12.3). Естественно, что нас интересует второе состояние (рис. 12.2, *б*), поскольку именно оно дает возмущение в распределении напряжений у трещины.

Для решения задачи о «расклинивании» трещины удобно перейти к функциям комплексного переменного $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, где $i = \sqrt{-1}$, z и $\bar{z}$ — новые комплексные переменные (не путать с декартовой координатой).

По правилу дифференцирования функций сложного аргумента получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right) i.$$

Продолжая аналогичным образом процесс дифференцирования,

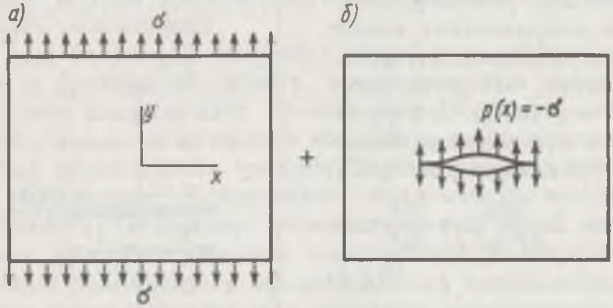


Рис. 12.2

найдем, что $\nabla^2 F = 4\,(\partial^2 F/\partial z \partial \bar{z})$ и $\nabla^2\nabla^2 = 16\,(\partial^4 F/\partial z^2 \partial \bar{z}^2)$ так, что вместо уравнения (12.1) получим

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\,\partial \bar{z}^2} = 0. \tag{12.4}$$

Последовательно интегрируя это уравнение четыре раза и учитывая, что функция F должна быть действительной функцией, получим общее решение бигармонического уравнения в виде

$$F = \frac{1}{2}\left(\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \chi + \bar{\chi}\right), \tag{12.5}$$

где φ и χ — две произвольные аналитические функции комплексной переменной z.

Эта формула найдена французским математиком Э. Гурса в 1898 г.

В (12.5) черточка обозначает комплексную величину, сопряженную данной, например, $\bar{z} = x - iy$ и $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\,(\bar{z})$ — сопряженные величины для $z = x + iy$ и $\varphi = \varphi\,(z)$. Сопряженные функции получают заменой всех i в данной функции на $-i$. Черточка над φ и над z обозначает, что эта замена делается как в аргументе z, так и во всех комплексных коэффициентах функции φ. В общем случае $\overline{\varphi\,(z)} \neq \varphi\,(\bar{z})$.

Легко видеть, что сумма комплексной и ей сопряженной величины дает действительную величину. Поэтому решение (12.5) выражает действительную функцию напряжений.

В теории упругости применение функций комплексного аргумента было развито в работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили. Так, используя (12.5), (12.3), а также уравнения Коши и закон Гука, Г. В. Колосов в 1909 г. получил формулы

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=2\,[\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})];\\&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\,[\overline{z}\varphi''(z)+\chi''(z)];\\&E\,(u+iv)=(1+\mu)\,[\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi}'(\overline{z})-\overline{\chi}'(\overline{z})],\end{aligned}\right\}\tag{12.6}$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона, а $\varkappa = (3-\mu)/(1+\mu)$ для плоского напряженного состояния и $\varkappa = 3-4\mu$ для плоской деформации.

Действительную часть $f(z)$ обозначают $\mathrm{Re}\, f(z)$, в то время как для множителя у мнимой ее части пользуются обозначением $\mathrm{Im}\, f(z)$, так что $f(z) = \mathrm{Re}\, f(z) + i\,\mathrm{Im}\, f(z)$. Так как $f(z) + \overline{f}(\overline{z}) = 2\,\mathrm{Re}\, f(z)$, то первую строку (12.6) можно записать и так: $\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$.

Применительно к рассматриваемой задаче о трещине, следуя предложению Вестергарда, выразим φ и χ через одну функцию $Z(z)$ согласно выражениям

$$\varphi'=\frac{1}{2}Z(z);\qquad \chi''=-\frac{1}{2}zZ'(z).$$

Подставляя их в (12.6), получим

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\mathrm{Re}\,Z-y\,\mathrm{Im}\,Z';\\&\sigma_y=\mathrm{Re}\,Z+y\,\mathrm{Im}\,Z';\\&\tau_{xy}=-y\,\mathrm{Re}\,Z';\\&u=\frac{1+\mu}{E}\left(\frac{\varkappa-1}{2}\mathrm{Re}\,Z_1-y\,\mathrm{Im}\,Z\right);\\&v=\frac{1+\mu}{E}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\mathrm{Im}\,Z_1-y\,\mathrm{Re}\,Z\right),\end{aligned}\right\}\tag{12.7}$$

где $Z_1=\int Z\,dz$.

Теперь надо задать функцию $Z(z)$ так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Условию $\sigma_y = \mathrm{Re}\, Z = -p(x)$ на берегах трещины, а также условиям затухания на бесконечности напряжений и перемещений в задаче о расклинивании трещины нагрузкой $p(x)$ удовлетворяет функция [11]

$$Z=\frac{1}{\pi\sqrt{z^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{p(\xi)\sqrt{l^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi.$$

Если перейти к полярной системе координат, положив $z - l = re^{i\theta}$ (с полюсом в острие трещины $x = l$; $y = 0$), и разложить в ряд функцию $Z(z)$ по степеням r, то это дает

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(z-l)}} + \ldots \tag{12.8}$$

Здесь точками обозначены члены, не содержащие в знаменателе разностей $(z - l)$ и, следовательно, при $z \to 0$ не дающие особенностей. Первое слагаемое, выписанное в (12.8), дает именно такую особенность: при $r \to 0$ оно стремится к бесконечности. Оно называется сингулярным членом. В малой окрестности у острия трещины

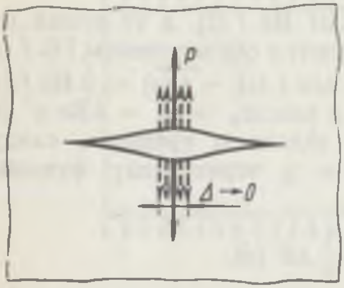


Рис. 12.3

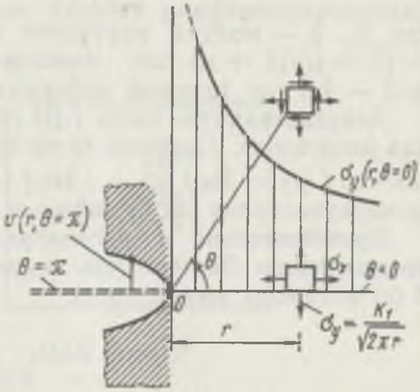


Рис. 12.4

$(r \ll l)$ это слагаемое доминирует и поэтому все остальные несингулярные члены можно отбросить.

Постоянная K_I зависит от распределения «расклинивающих» напряжений $p(x)$ вдоль берега трещины и определяется формулой

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^{l} p(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}}\, d\xi. \tag{12.9}$$

В частном случае $p = \sigma = \mathrm{const}$ получим

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}. \tag{12.10}$$

Для расклинивания трещины нагрузками типа двух сосредоточенных сил P (отнесенных к единице толщины пластины) $p(x) = P/\Delta$ (рис. 12.3). Для этого случая при $\Delta \to 0$ имеем

$$K_I = P/\sqrt{\pi l}. \tag{12.11}$$

По формулам (12.7) с использованием (12.8) получим следующие асимптотические выражения для напряжений и перемещений, справедливые в малой окрестности у конца трещины:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1-\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{3\Theta}{2}\right)\cos\frac{\Theta}{2};\\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left(1+\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{3\Theta}{2}\right)\cos\frac{\Theta}{2};\\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{3\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2};\\ u &= \frac{2(1+\mu)K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\frac{\varkappa-1}{2}+\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)\cos\frac{\Theta}{2};\\ v &= \frac{2(1+\mu)K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\frac{\varkappa+1}{2}-\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)\sin\frac{\Theta}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

В соответствии с (12.8) в этих формулах удержаны только сингулярные части решения.

На рис. 12.4 показано распределение напряжений σ_y у кончика трещины O вдоль линии $\Theta = 0$, а также перемещений раскрытия $v(r)$ при $\Theta = \pi$. Пунктиром условно показаны берега трещин до раскрытия.

Подчеркнем качественное различие в напряженных состояниях для плоской деформации и для плоского напряженного состояния у линии, являющейся продолжением трещины. При $\Theta \approx 0$ по формулам (12.12) получаем $\sigma_x \approx \sigma_y$ и элемент материала в первом случае благодаря наличию напряжений $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \approx 2\mu\sigma_y$ будет находиться в объемном напряженном состоянии, близком к гидростатическому (рис.12.5, *а*).Это характерно для толстых пластин с трещиной ($t \gg l$). Во втором случае (тонкая пластина) $\sigma_z = 0$ и элемент материала испытывает двухосное напряженное состояние (рис. 12.5,*б*).

Применим критерий Треска — Сен-Венана (см. § 10.2) для предсказания появления пластических деформаций у кончика трещины, согласно которому $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т$. Для плоской деформации в точках $\Theta = 0$ имеем $\sigma_1 = \sigma_y$; $\sigma_3 = 2\mu\sigma_y$ и появление пластических деформаций получим при $\sigma_y = \sigma_т/(1 - 2\mu)$, а при плоском напряженном состоянии $(\sigma_1 = \sigma_y;\ \sigma_3 = 0)$ — при $\sigma_y = \sigma_т$.

Величину σ_y, при которой возможно появление текучести, называют *эффективным пределом текучести*. При $\mu = 1/3$ отношение этих величин в указанных двух случаях будет равно 3 и радиусы пластичности r_p, учитывая степенную зависимость σ_y от r, будут отличаться в 9 раз.

Известно, что с развитием пластических деформаций коэффициент Пуассона μ увеличивается и приближается к 0,5. При этом множитель $1/(1 - 2\mu)$также возрастает, что приводит к еще более резкому различию размеров зоны пластичности (радиусов r_p) при плоской деформации и при плоском напряженном состоянии.

На рис. 12.6,*а* показан примерный вид эпюры напряжений σ_y при плоской деформации, а на рис. 12.6, *б* — при плоском напряжен-

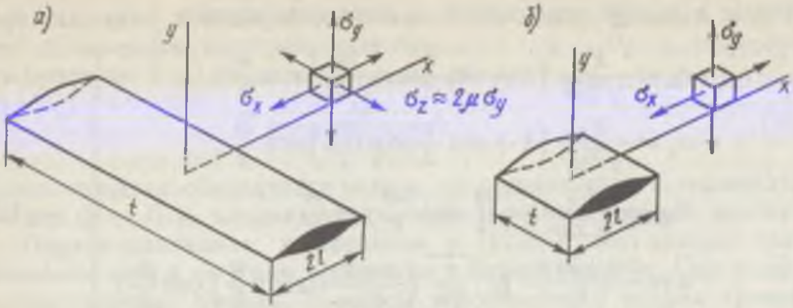


Рис. 12.5

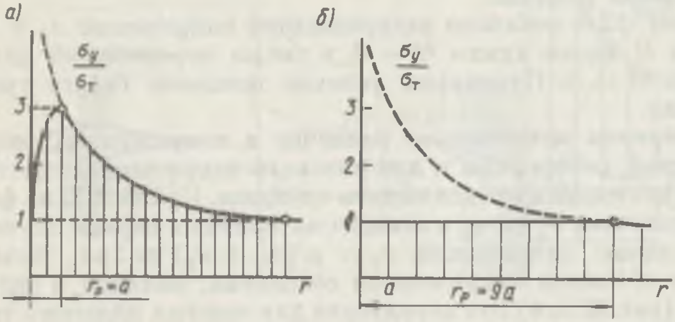


Рис. 12.6

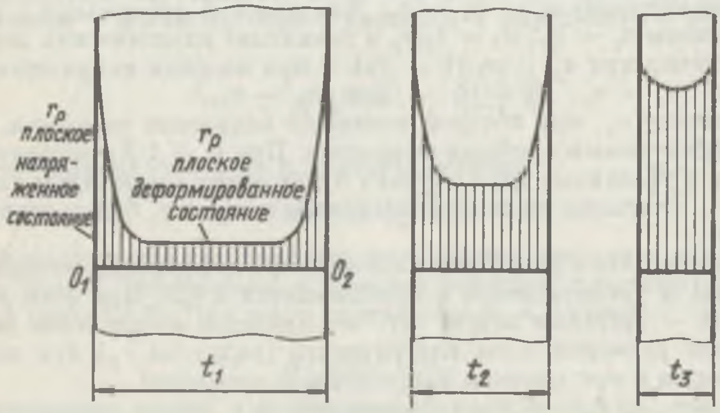


Рис. 12.7

ном состоянии с учетом пластических деформаций у кончика трещины вдоль линии ее продолжения. В точке O острия трещины вследствие развития деформаций происходит ее затупление и напряжение σ_x будет равно нулю, поскольку эта точка оказывается лежащей на поверхности, свободной от нагрузок. В этой точке возникает плоское напряженное состояние и поэтому эффективный предел текучести будет $\sigma_y \approx \sigma_т$, что и показано на рис. 12.6, *а* у точки O.

На рис. 12.7 показано изменение радиуса пластичности r_p по толщине пластины для трех толщин: $t_1 > t_2 > t_3$. У мест выхода трещины на поверхность пластины (точки O_1, O_2) напряженное состояние будет плоским и размер пластической зоны, т.е. радиус r_p, будет больше, чем во внутренних точках пластины. По мере уменьшения толщины пластины величина r_p выравнивается по толщине, стремясь

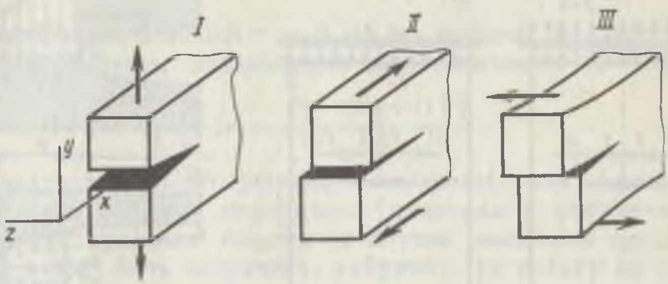


Рис. 12.8

к величине, соответствующей плоскому напряженному состоянию. Все сказанное существенно влияет на устойчивость равновесия трещин в толстых и тонких пластинах.

Вернемся к формулам (12.12). В них входит постоянная K_I, которая называется *коэффициентом интенсивности напряжений*. Как видим, это единственная константа, которая может отличать одну трещину от другой по напряженному состоянию у ее острия. Эта величина имеет размерность Н/м$^{3/2}$. Она играет важную роль в оценке устойчивости трещины, так как во многих случаях полностью определяет состояние равновесия внутренних сил у фронта трещины, складывающееся на данном уровне нагружения. С ростом уровня нагружения (возрастанием σ), так же как и с увеличением длины трещины l, величина K_I возрастает, что видно из формулы (12.10).

Индекс I в обозначении K_I говорит о том, что рассматривалась трещина типа I — трещина отрыва (относительное смещение берегов трещины происходит в направлении напряжений σ_y). На рис. 12.8 кроме этого типа трещин изображены два других: трещины сдвига II (смещение в направлении напряжений τ_{yx}) и III — сдвиг или срез в направлении напряжений τ_{yz}. Тип II иногда называют плоским сдвигом, а тип III — антиплоским сдвигом. Напряжения у острия трещины в случаях II и III получаются путем, аналогичным рассмотренному, и характеризуются своими коэффициентами интенсивности K_{II} и K_{III}. Их можно найти в литературе [24, 38]. Наибольшее практическое значение имеет случай трещин отрыва, которому далее уделяется основное внимание.

§ 12.3. КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим растянутую пластину с трещиной с фиксированными (закрепленными от перемещений) точками приложения внешних сил P (рис. 12.9,*а*). Другой возможный случай загружения, когда

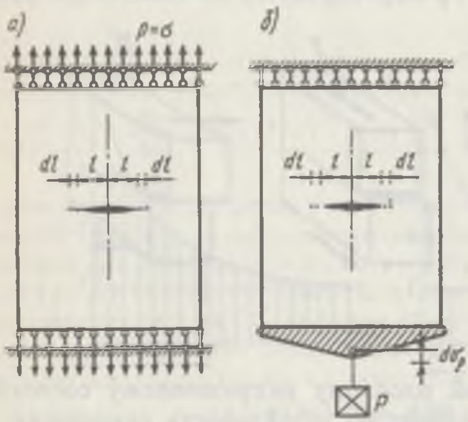


Рис. 12.9

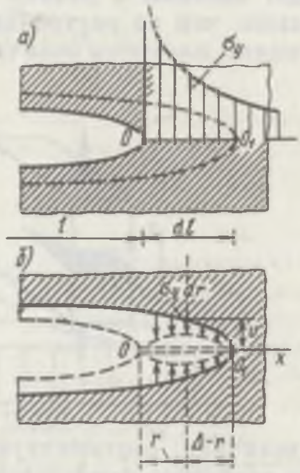


Рис. 12.10

точка приложения внешней силы P при росте трещины может свободно перемещаться (рис. 12.9, *б*), рассмотрим позже.

Выясним механический смысл коэффициента K_I, для чего рассмотрим изменение потенциальной энергии деформации пластины с трещиной, вызванное бесконечно малым изменением ее длины, т.е. вычислим величину $\mathrm{d}U = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l$, где U — энергия деформации пластины.

На рис. 12.10,*а* показано продвижение трещины от точки O к точке O_1 на величину $\mathrm{d}l$, временно обозначенную через Δ. Этот переход вызывает снятие напряжений σ_y на участке Δ, что приводит к уменьшению энергии деформации пластины. Если эти напряжения вновь приложить к берегам трещины длиной $2\,(l + \Delta)$, то, очевидно, она закроется и пластина вернется к исходному состоянию с длиной трещины $2l$. Отсюда ясно, что энергию $\mathrm{d}U$ можно подсчитать как численно равную ей работу напряжений σ_y в процессе «закрытия» трещины на длине Δ (рис. 12.10,*б*). При этом знаки работы и дифференциала $\mathrm{d}U$ будут противоположны. Итак,

$$\mathrm{d}U = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\Delta 2\sigma_y v\,\mathrm{d}r,$$

где, согласно (12.12), $\sigma_y = K_I/\sqrt{2\pi r}$, а $v = [(1+\mu)(\varkappa+1)K_I/E]\times\times\sqrt{(\Delta - r)/(2\pi)}$. Заметим, что σ_y находится для трещины с острием в точке O ($\Theta = 0$), а перемещение v — для трещины с острием в точке O_1 ($\Theta = \pi$), поэтому вместо r в формуле для v поставлено $(\Delta - r)$. Следовательно,

$$\mathrm{d}U = -\frac{(1+\mu)(\varkappa+1)K_I^2}{2\pi E}\int\limits_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta - r}{r}}\,\mathrm{d}r.$$

Воспользовавшись заменой $r = \Delta\sin^2\varphi$, найдем, что этот интеграл равен $\pi\Delta/2$. Отсюда, возвращаясь к обозначению $\Delta = \mathrm{d}l$, имеем

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = -\frac{(1+\mu)(\varkappa+1)K_I^2}{4E}. \qquad (12.13)$$

Производная $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}l)$ выражает скорость или интенсивность высвобождения энергии деформации пластины с ростом трещины. Эта высвобождающаяся энергия (в случае реального продвижения трещины) может быть затрачена, например, на работу по преодолению сил, сдерживающих это продвижение. Если длину трещины l принять в качестве обобщенной координаты, определяющей состояние пластины, то производная от энергии по координате с обратным знаком будет обобщенной силой. Обозначим ее

$$G = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = \frac{(1+\mu)(\varkappa+1)K_I^2}{4E}. \qquad (12.14)$$

Ее иногда называют трещинодвижущей обобщенной силой. Выше указывалось, что для плоского деформированного состояния (п.д.с.) $\varkappa = 3 - 4\mu$, а для плоского напряженного состояния (п.н.с.) $\varkappa = (3-\mu)/(1+\mu)$. Соответственно имеем

$$G_{\text{п.д.с.}} = (1-\mu^2)K_I^2/E;\quad G_{\text{п.н.с.}} = K_I^2/E. \qquad (12.15)$$

Аналогичные результаты можно получить и для трещин двух других типов II и III:

$$G_{II} = (1-\mu^2)\,K_{II}^2/E;\; G_{III} = (1+\mu)K_{III}^2/E. \qquad (12.16)$$

Если трещина находится в условиях одновременного воздействия отрыва и сдвига, то интенсивность высвобождения энергии деформации при росте трещины будет равна сумме:

$$G = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = G_I + G_{II} + G_{III}.$$

Формула (12.14) показывает, что квадрат коэффициента интенсивности напряжений K_I непосредственно определяет выделение энергии деформации с ростом трещины. Другими словами, в сложной картине продвижения трещины в деформированном теле коэффициент K_I количественно выражает (с энергетических позиций) уровень тех внутренних сил, которые способствуют росту трещины, т.е. дестабилизируют ее состояние. При оценке устойчивости любого состояния производится в какой-то форме сопоставление сил, стабилизирующих это состояние и дестабилизирующих его. Отсюда понятна важная роль коэффициента интенсивности напряжений в устойчивости трещин.

Рассмотрим теперь случай загружения, показанный на рис. 12.9,*б*. В этом случае продвижение трещины на $\mathrm{d}l$ вызывает не только изменение энергии деформации пластины $\mathrm{d}U$, но также и изменение энергии положения нагрузки P (потенциала внешних сил П), вызванного перемещением $\mathrm{d}v_P$. Поэтому вместо (12.13) надо написать

$$G = -\frac{\mathrm{d}Э}{\mathrm{d}l} = -\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} + \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}l}\right). \tag{12.17}$$

Обозначим δ_{11} податливость точки приложения силы P (упругое перемещение от $P = 1$). Тогда $v_P = \delta_{11}P$ и $U = \frac{1}{2}Pv_P = \frac{1}{2}\delta_{11}P^2$. Потенциал внешних сил $\Pi = -Pv_P = -\delta_{11}P^2$. Здесь, как и ранее, под P понимается сила, приходящаяся на единицу толщины пластины.

С увеличением трещины увеличивается и податливость δ_{11}, поэтому

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{2}P^2\frac{\mathrm{d}\delta_{11}}{\mathrm{d}l}; \quad \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}l} = -P^2\frac{\mathrm{d}\delta_{11}}{\mathrm{d}l} \tag{12.18}$$

и, согласно (12.17), интенсивность выделения энергии с ростом трещины (трещинодвижущая сила) будет

$$G = \frac{1}{2}P^2\frac{\mathrm{d}\delta_{11}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}. \tag{12.19}$$

Сравнив (12.19) и (12.14), видим, что интенсивность выделения энергии с ростом трещины

$$G = \frac{(1+\mu)(\varkappa+1)K_I^2}{4E} \tag{12.20}$$

всегда может быть представлена как производная от энергии деформации пластины ($\mathrm{d}U/\mathrm{d}l$). Но в случае фиксированных точек приложения внешних сил эта производная должна быть взята со знаком минус, а при свободном подвешивании груза P — со знаком плюс. В первом случае эта энергия U убывает (и $\mathrm{d}U/\mathrm{d}l < 0$), во втором — возрастает ($\mathrm{d}U/\mathrm{d}l > 0$) и величина G в обоих случаях будет положительной, что непосредственно следует из формулы (12.20). При закрепленных концах пластины выделение энергии идет только за счет уменьшения ранее накопленной энергии деформации U. При свободном подвесе груза P источником выделения энергии является этот груз. Его работа $P\mathrm{d}v_P$ делится поровну на две части — половина идет на увеличение энергии деформации пластины и равна $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}l)\,\mathrm{d}l$, такая же величина составляет выделяемую энергию, расходуемую на продвижение трещины.

Величина K_I по (12.10) получена для бесконечной пластины. Реально коэффициент интенсивности напряжений K_I зависит от размеров и формы тела. Причем не всегда возможно его определение в аналитической форме. В настоящее время разработаны методы приближенного численного и экспериментального определения коэффициента интенсивности напряжений. Некоторые из них непосредственно используют формулу (12.19). Численно (например, по методу конечных элементов) или экспериментально на образце с подращиваемой трещиной (подращивание достигается с помощью циклических нагружений) строится зависимость податливости δ_{11} от длины трещины $\delta_{11} = \delta_{11}(l)$, по которой вычисляется производная $\mathrm{d}\delta_{11}/\mathrm{d}l$, что с учетом (12.19) и (12.20) дает возможность найти

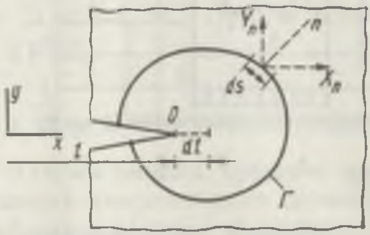


Рис. 12.11

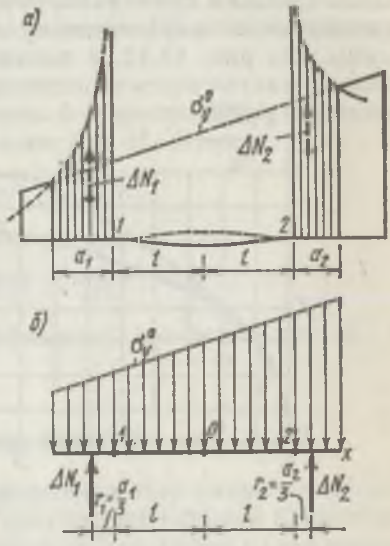


Рис. 12.12

$$K_I = 2\sqrt{\frac{EG}{(1+\mu)(\varkappa+1)}} = \sqrt{2}\,P\sqrt{\frac{E}{(1+\mu)(\varkappa+1)}\left(\frac{\mathrm{d}\delta_{11}}{\mathrm{d}l}\right)}. \qquad (12.21)$$

Этот метод называют методом податливости.

Было доказано, что так называемый J-интеграл, вычисленный по произвольному контуру Γ, охватывающему острие трещины (рис. 12.11):

$$J = \oint_\Gamma \left(U_0\,\mathrm{d}y - X_n\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}s - Y_n\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}s\right), \qquad (12.22)$$

равен интенсивности выделения энергии, т.е. $J = G = -\mathrm{d}Э/\mathrm{d}l$. В (12.22) U_0 — плотность энергии деформаций; X_n, Y_n — компоненты интенсивности внутренних сил на площадках контура с нормалью n; u, v — компоненты перемещений. При численном определении K_I вместо вычисления $(d\delta_{11}/dl)$ определяют J-интеграл по некоторому выбранному контуру Γ, после чего по (12.21) находят K_I, заменив $G = J$. Заметим, что этот метод применим для тел, материал которых рассматривается как не только линейно-, но и нелинейно-упругий.

Е. М. Морозовым [24] предложен так называемый метод сечений для приближенного определения K_I. Его идея состоит в том, что вдоль трещины проводится сечение в котором считаются заданными номинальные напряжения σ_y^0, которые возникали бы в теле без трещины. На рис. 12.12, *а* показана для примера линейная эпюра σ_y^0,

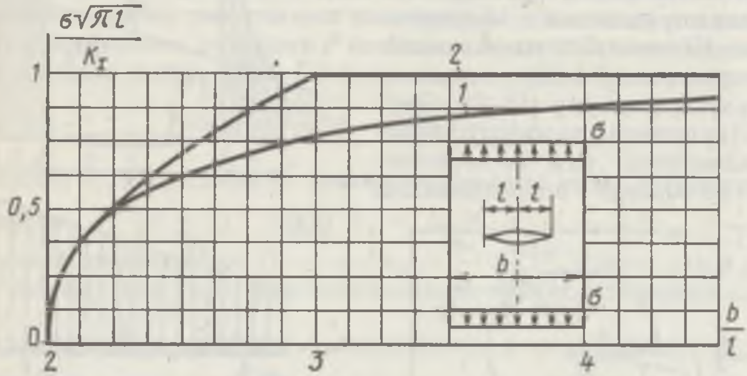


Рис 12.13

хотя она может быть и нелинейной, найденной обычными методами теории упругости. У вершин трещины *1* и *2* вместо $\sigma_y^0(x)$ условно на конечных отрезках a_1 и a_2 принимается распределение напряжений по зависимостям (12.12):

$$\sigma_y^{(i)} = \frac{K_I^{(i)}}{\sqrt{2\pi r_i}}, \quad i = 1,\ 2. \tag{12.23}$$

Величины a_1 и a_2 находятся из условий совпадения значений напряжений (12.23) и σ_y^0, т.е. из равенств

$$\frac{K_I^{(i)}}{\sqrt{2\pi a_i}} = \sigma_y^0\,(r_i = a_i), \quad i = 1,\ 2. \tag{12.24}$$

Таким образом, эпюра номинальных напряжений σ_y^0 на участке $a_1 + 2l + a_2$ заменяется напряжениями (12.23), приложенными на участках a_1 и a_2, при нулевых напряжениях на длине трещины $2l$.

Легко вычислить, что напряжения (12.23) приводятся к двум равнодействующим $\Delta N_i = \sqrt{2} K_I^{(i)} \sqrt{a_i}/\sqrt{\pi}$, приложенным в точках $r_i = a_i/3$. Из условия статической эквивалентности (рис. 12.12,*б*) можно составить два уравнения равновесия ($\Sigma Y = 0$ и $\Sigma m_0 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta N_1 + \Delta N_2 = \int\limits_{-(l+a_1)}^{(l+a_2)} \sigma_y^0 \, dx; \\ &\Delta N_1 \left(l + \frac{a_1}{3} \right) - \Delta N_2 \left(l + \frac{a_2}{3} \right) = \int\limits_{-(l+a_1)}^{(l+a_2)} x \sigma_y^0 \, dx. \end{aligned}\right\} \quad (12.25)$$

Четыре уравнения (12.24) и (12.25) позволяют найти четыре неизвестные величины: a_1, a_2, $K_I^{(1)}$, $K_I^{(2)}$.

На рис. 12.13 приведен пример применения этого метода к задаче о растяжении полосы конечной ширины b с центральной трещиной $2l$ [24]. Кривая *1* соответствует решению Дж. И. Ирвина

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{(b/\pi l) \operatorname{tg} (\pi l/b)},$$

а кривая *2* — методу сечений, согласно которому

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{l/(b - 2l)},$$

где $2l < b \leqslant 3l$. При $b > 3l$ коэффициент интенсивности $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$.

§ 12.4. КРИТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРЕЩИН

Как мы видели, трещина в деформируемом теле создает очаг возмущения напряженного состояния, характерный сильной концентрацией напряжений у ее острия. На первый взгляд любая малая трещина благодаря стремлению напряжений к неограниченному росту с приближением к кончику трещины должна была бы породить прогрессирующий процесс разрушения. Однако такой теоретический результат следует из модели идеально упругой сплошной среды и не соответствует реальным физическим свойствам материала. Дискретная структура реального материала и нелинейность механических соотношений для него в сильной степени изменяют картину физико-механического состояния, следующую из линейной теории упругости. В результате, как показывает опыт, в одних условиях трещина может устойчиво существовать, не проявляя как-либо себя, а в других — происходит взрывоподобный рост трещины, приводящий к внезапному разрушению тела. Существуют попытки проанализировать это явление на атомном уровне методами физики твердого тела. Они представляют определенное перспективное направление в этой проблеме, но, к сожалению, до сих пор полученные здесь результаты далеки от уровня прикладных инженерных запросов.

В 1920 г. была опубликована работа А. А. Гриффитса «Явление разрушения и течения в твердых телах», в которой задача равновесия трещины решается с энергетических позиций. Она явилась первой и основополагающей в механике разрушения. Рассмотрим основные положения упомянутой работы Гриффитса.

На рис. 12.14 изображен кончик трещины, где для наглядности связь на отрыв между продолжениями берегов трещины осуществлена с помощью условных связей, моделирующих межатомные силы взаимодействия реального тела. Для того чтобы трещина смогла продвинуться на $\mathrm{d}l$, эти связи на длине $\mathrm{d}l$ должны быть разрушены, для чего надо затратить определенную работу $\mathrm{d}A$. Гриффитс представил эту работу в виде произведения $\mathrm{d}A = 2\gamma \mathrm{d}l \cdot 1$, где γ — плотность энергии образования свободной поверхности тела; $2\mathrm{d}l \cdot 1$ — площадь добавочной свободной поверхности у двух берегов подросшей трещины (размер, перпендикулярный чертежу, принят равным единице). Таким образом, по Гриффитсу, γ — это константа материала, характеризующая удельную работу разрушения межатомных связей при отрыве. В общем случае напишем для приращения работы разрушения выражение

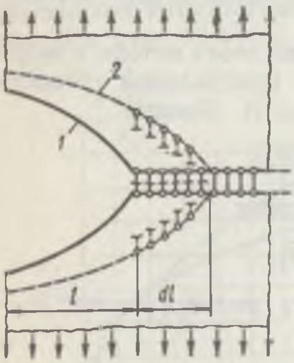


Рис. 12.14

$$\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}l}\,\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}l, \tag{12.26}$$

где $R = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}l}$ — плотность работы разрушения при продвижении трещины. Ее называют также сопротивлением росту трещины. По Гриффитсу,

$$R = 2\gamma. \tag{12.27}$$

Составим уравнение энергетического баланса тела для положений *1* и *2* при подрастании трещины на величину $\mathrm{d}l$ (рис. 12.14):

$$\mathrm{d}Э + \mathrm{d}T + \mathrm{d}A + \mathrm{d}Q = 0, \tag{12.28}$$

где $\mathrm{d}Э = Э_2 - Э_1$ и $\mathrm{d}T = T_2 - T_1$ — приращения потенциальной и кинетической энергий тела; $\mathrm{d}A$ — работа разрушения; $\mathrm{d}Q$ — затрата энергии на тепловые и прочие эффекты. Для медленных процессов изменение кинетической энергии $\mathrm{d}T = 0$. Кроме того, пренебрежем тепловыми и другими эффектами, положив $\mathrm{d}Q = 0$. Тогда

$$\mathrm{d}Э + \mathrm{d}A = 0, \tag{12.29}$$

т.е. продвижение трещины может наблюдаться только тогда, когда уменьшение энергии тела $\mathrm{d}Э$ сможет компенсировать работу разрушения $\mathrm{d}A$. Равенство (12.29) запишем в виде $(-\mathrm{d}Э/\mathrm{d}l)\,\mathrm{d}l = (\mathrm{d}A/\mathrm{d}l)\,\mathrm{d}l$ или, учитывая (12.17) и (12.26), получаем критерий распространения трещины в энергетической форме:

$$G = R. \tag{12.30}$$

Подставим в это равенство значение интенсивности выделения энергии G по (12.14):

$$\frac{(1+\mu)(\varkappa+1)K_I^2}{4E}=R. \qquad (12.31)$$

Отсюда получим так называемый *критический коэффициент интенсивности напряжений*

$$K_{Ic}=2\sqrt{\frac{RE}{(1+\mu)(\varkappa+1)}}. \qquad (12.32)$$

Чтобы уяснить смысл термина «критический», рассмотрим пример бесконечной пластины с центральной трещиной $2l$, растянутой напряжениями σ (см. рис. 12.1). Для этого случая, согласно (12.10), $K_I=\sigma\sqrt{\pi l}$. Энергетическое условие возможности продвижения трещины (12.30) будет выполнено, если

$$K_I=K_{Ic}. \qquad (12.33)$$

Заметим, что так как K_I пропорционален напряжениям (и внешним силам), то в отличие от энергетического условия (12.30) равенство (12.33) называют силовым условием распространения трещины. Из (12.33) следует $\sigma_{кр}\sqrt{\pi l_{кр}}=K_{Ic}$, откуда

$$\sigma_{кр}=\frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l_{кр}}}. \qquad (12.34)$$

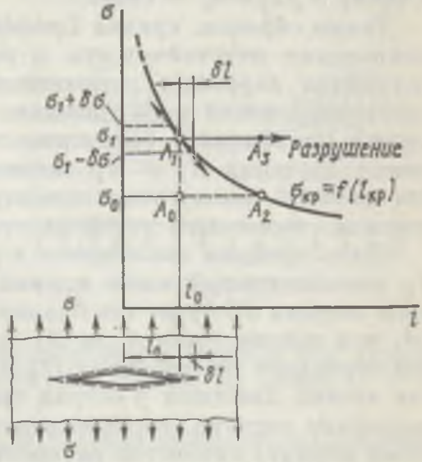


Рис. 12.15

Эта формула, полученная Гриффитсом, объясняет упомянутое поведение трещин: либо их устойчивое равновесие, либо взрывоподобное, лавинообразное распространение. На рис. 12.15 по формуле (12.34) построена кривая $\sigma_{кр}=f(l_{кр})$, называемая кривой критического разрушения.

Пусть имеется трещина длиной $2l_0$ и действуют напряжения σ_0 такие, что отвечающая им точка A_0 в осях σ, l лежит ниже кривой (12.34). Тогда любые случайные малые вариации в напряжениях $\sigma_0+\delta\sigma$ или в длине трещины $l_0+\delta l$ не вызовут ее прогрессирующего роста, так как не будет выполняться энергетическое условие (12.30) и выделяемой энергии d$Э$ будет недостаточно, чтобы компенсировать затраты работы на разрушение dA.

Иное дело, если напряжения возрастут до значения $\sigma=\sigma_1$ и соответствующая точка A_1 окажется на кривой $\sigma_{кр}=f(l_{кр})$. Здесь теоретически возможен медленный рост трещины с движением точки A_1 вниз по кривой так, чтобы приращению длины δl

строго соответствовало снижение напряжений до уровня $\sigma_1 - \delta\sigma$, при этом выполнялось энергетическое равновесие (12.29) и трещина развивалась монотонно. Но это равновесие неустойчиво. Действительно, обычно в этих условиях нагрузка и напряжение σ_1 остаются на постоянном уровне. Точка A_1 движется по горизонтали в направлении точки A_3, выделяемая энергия d$Э$ превосходит работу разрушения dA и возникает прогрессирующий процесс разрушения. Приращение напряжений $\sigma_1 + \delta\sigma$, как следует из рис. 12.15, требует даже «закрытия» трещины на величину $-\delta l$, чтобы точка оставалась на кривой (12.34) и имело место энергетическое равновесие. Так как это невозможно, то опять-таки возникает прогрессирующее лавинообразное распространение трещины. Аналогичная ситуация возникает, если за счет подрастания трещины система переходит из точки A_0 в точку A_2 при $\sigma_0 = \text{const}$.

Таким образом, кривая Гриффитса (12.34) определяет момент возникновения неустойчивости в равновесии трещины, когда любая случайная вариация напряжений или длины трещины вызывает прогрессирующий рост трещины. Отсюда и название K_{Ic} — критический коэффициент интенсивности напряжений, поскольку достижение значения $K_I = K_{Ic}$ знаменует потерю устойчивости равновесия системы (аналогично термину «критическая сила» для сжатого стержня, теряющего устойчивость).

Пусть трещина оказывается в условиях, характеризуемых точкой A_3, расположенной выше кривой $\sigma_{\text{кр}} = f(l_{\text{кр}})$ (рис. 12.15). Выделяемая энергия d$Э$ будет тем больше потребляемой работы разрушения dA, чем дальше точка A_3 от A_1, и этот избыток потенциальной энергии переходит по равенству (12.28) в кинетическую энергию движения частиц пластины у острия трещины dT. Как показывают более подробные расчёты, распространение трещины происходит со скоростями порядка скоростей распространения волн деформаций в упругом теле. Например, для стали скорость распространения продольных деформаций $c \approx 5600$ м/с. Во всяком случае, эта скорость может быть достаточно большой, что и создает впечатление взрывоподобного разрушения тела.

§ 12.5. ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ У КОНЦА ТРЕЩИНЫ

В § 12.2 говорилось о том, что в толстых пластинах с трещиной у острия возникает плоское деформированное состояние, а в тонких — плоское напряженное состояние. При этом протяженность пластической зоны у кончика трещины в последнем случае больше, чем в первом. В связи с этим величина K_{Ic} как критерий устойчивости трещины оказывается справедливой только для достаточно толстых пластин, где пластическая зона у кончика трещины невелика.

Для плоского или близкого к нему напряженного состояния, где необходим учет влияния пластической зоны, предложен ряд упрощенных моделей определения протяженности этой зоны. Так, Ирвином было показано, что наличие пластической зоны можно учесть, если вместо длины физической трещины $2l$ в расчетах использовать эффективную длину $2l_{эф} = 2\,(l + a)$, где a — так называемая поправка Ирвина на пластичность. Ее можно найти из рис. 12.16, на котором на всей длине зоны пластичности $r_p = a + b$ напряжения σ_y приняты равными $\sigma_т$. Кривая «упругих» напряжений σ_y, показанная пунктиром, изменяется по закону $\sigma_y = K_I/\sqrt{2\pi r}$.

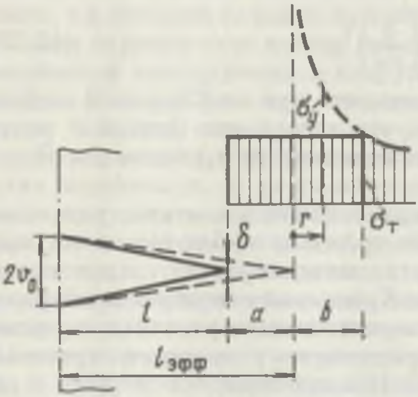


Рис 12.16

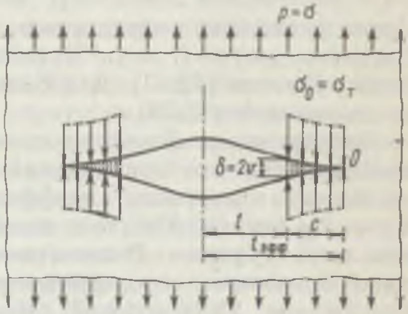


Рис. 12.17

Составим два условия, а именно: равенство площади под пунктирной кривой σ_y площади прямоугольной эпюры на длине $(a + b)$, т.е. $\int\limits_0^b (K_I/\sqrt{2\pi r})\,dr = \sigma_т\,(a + b)$, и условие равенства напряжений σ_y пределу текучести $\sigma_т$ при $r = b$, а именно $K_I/\sqrt{2\pi b} = \sigma_т$. Приведенный выше интеграл, как указано в § 12.3, равен $\Delta N = \sqrt{2}K_I\sqrt{b/\pi}$, так что из указанных двух уравнений легко найдем

$$a = b = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_т^2}. \tag{12.35}$$

Согласно другой модели (рис. 12.17), называемой моделью Дагдейла — Леонова — Панасюка, считается, что на длине c у острия трещины между ее берегами существует тонкая пластически деформированная клиновидная область. Остальной материал за берегами трещины считается упругим. Со стороны клиновидной части на берега трещины действует напряжение $\sigma_0 = \sigma_т$, стягивающее берега. Для упругого матерала напряжения не могут быть равны бесконечности. Следовательно, в точке O острия трещины сингулярная часть напряжений должна быть равна нулю, откуда, согласно (12.8), следует, что суммарный коэффициент интенсивности K_I от действия напряжений $p = \sigma$ и σ_0 должен быть равен нулю. Составив равенство $K_I = K_I(p) - K_I(\sigma_0) = 0$ и вычислив каждое из слагаемых по формуле (12.9), получим $c = l_{эф}\{1 - \cos[\pi\sigma/(2\sigma_т)]\}$. Заменяя $l_{эф} = l + c$, найдем относительный размер пластической зоны в модели Дагдейла:

$$\frac{c}{l} = \frac{1 - \cos[\pi\sigma/(2\sigma_т)]}{\cos[\pi\sigma/(2\sigma_т)]}. \tag{12.36}$$

Приняв в формуле Ирвина (12.35) $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}$, получим аналогичную величину в виде

$$\frac{c}{l} = \frac{2a}{l} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2. \tag{12.37}$$

Путем разложения в ряд можно видеть, что при $\pi\sigma/(2\sigma_т) \to 0$ модель Дагдейла дает $(c/l) \approx (\pi^2/8)(\sigma/\sigma_т)^2$, что достаточно близко к результату Ирвина (12.37). Для больших значений $(\sigma/\sigma_т)$ более достоверно выражение (12.36).

Эксперименты показывают, что при наличии достаточно развитых пластических зон критический рост трещины наблюдается не при постоянном значении коэффициента интенсивности напряжений $K_I = K_{Ic}$ [см. (12.33)], т. е. значение K_I не может служить критерием начала разрушения. В качестве критерия в этом случае было предложено принимать так называемое раскрытие у вершины трещины $\delta = 2v$ (рис. 12.16 и 12.17). Модель Ирвина при $r = a$ дает $\delta = 2v(r = a) = 4K_I^2/(\pi E\sigma_т)$. Соответственно из модели Дагдейла следует равенство $\delta = [8\sigma_т l/(\pi E)] \lg \sec[\pi\sigma/(2\sigma_т)]$.

Условие наступления критического равновесия трещины записывается при этом в виде

$$\delta = \delta_c, \tag{12.38}$$

где δ_c — критическое раскрытие, определяемое экспериментально. Его непосредственное измерение представляет значительные трудности, поэтому применяются косвенные приемы. Один из них состоит в том, что измеряется раскрытие $2v_0$ вдали от вершины трещины (см. рис.12.16) и затем по соответствующим формулам пересчитывается раскрытие $\delta = 2v$ у вершины. Существуют стандартные методики проведения испытаний по определению критериев трещиностойкости K_{Ic} и δ_c, регламентируемые ГОСТами (см. ГОСТ 25.506—85 «Определение характеристик трещиностойкости»).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко подведем итог изложенному в книге и укажем на некоторые актуальные вопросы, которые не смогли войти в данный курс. Он потому и называется «Основы..», что представляет лишь фундамент, на котором каждый инженер в ходе практической деятельности сможет строить свое здание знаний теории упругости и пластичности элементов конструкций и сооружений. Настоящее заключение в какой-то степени поможет представить соотношение уже известного и того, чем еще ему предстоит овладеть.

В книге использованы простейшие модели, описывающие свойства материалов. В разделе теории упругости это была модель линейно-упругого сплошного и однородного тела. Вопросы пластичности также рассматривались применительно к простейшим моделям пластического деформирования, а в явлении ползучести мы вынуждены были ограничиться лишь линейной ползучестью. В то же время, например, новые композитные материалы иногда не могут быть описаны с помощью рассмотренной выше модели ортотропного материала и требуют привлечения общей теории анизотропных тел, физические свойства которых описываются соответствующими тензорами параметров упругости.

Технология изготовления материалов и взаимодействие с окружающими физическими полями (например, радиационное облучение) делают материал неоднородным, что также требует углубленного развития теории.

Действие повышенных или пониженных температур, к тому же меняющихся во времени, а также нагрузки динамической природы иногда не дают возможности записать физические соотношения в конечном виде. Приходится рассматривать соответствующие модели состояния в дифференциальной или интегральной форме, а напряженно-деформированное состояние тела становится существенно нестационарным и зависящим от режимов нагружения.

Механика разрушения как наука о равновесии и распространении трещин в деформируемых телах бурно развивается под влиянием все более глубокого проникновения в ее арсеналы численных методов решения задач механики, с одной строны, и привлечения результатов, полученных в физике твердого тела,— с другой. Здесь актуальными являются проблемы зарождения и развития усталостных трещин, долговечность конструкций в агрессивных средах, распространение трещин в композитных материалах и др.

Строительные конструкции часто представляют собой сложные многоэлементные системы, в которых требуется одновременный учет физической и геометрической нелинейности всего сооружения как единого целого. Анализ отдельного элемента является недостаточным. Это возможно лишь с использованием вычислительной техники высокого уровня. Поэтому в теории упругости и пластичности, как и в целом в строительной механике, постоянную актуальность сохраняет проблема развития эффективных численных методов механики деформирования твердых тел, доведенных до простых в использовании программных комплексов. Эти методы будут приносить тем большую пользу, чем они глубже проникнут в процесс реального проектирования конструкций, проводимый с использованием методов оптимизации и численного моделирования работы несущих конструкций. Отсюда следует, что методы механики деформируемого твердого тела должны сливаться с методами автоматизации проектирования.

Далеко не все проблемы могут быть решены расчетом. Эксперимент, подчас очень тонкий и сложный, по-прежнему играет важную роль в вопросах прочности и деформирования. Здесь большие возможности представляют такие экспериментальные методы исследования, как метод фотоупругости, голографической интерферометрии и муаровых полос. Их использование возможно только в соединении с методами механики деформирования.

Мы перечислили далеко не полный перечень проблем, которые предстоит решать инженеру в его практической деятельности. Но даже и из этого краткого перечня очевидна исключительно важная роль теории упругости и пластичности в деле создания экономичных и долговечных сооружений настоящего и будущего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. — М.: Наука, 1978. — 288 с.
2. *Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. — М.: Стройиздат, 1983. — 488 с.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1952. — 324 с.
4. *Броек Д.* Основы механики разрушения. — М.: Высшая школа, 1980. — 368 с.
5. *Вайнберг Д. В.* Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. — Киев: Будівельник, 1973. — 488 с.
6. *Власов В. З.* Избранные труды, т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 528 с.
7. *Власов В. З.* Избранные труды, т. III. — М.: Наука, 1964. — 472 с.
8. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956. — 420 с.
9. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1986. — 304 с.
10. *Ильюшин А. А.* Пластичность. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1948. — 376 с.
11. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
12. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
13. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. — М.: Изд-во МГУ, 1979. — 208 с.
14. *Колкунов Н. В.* Основы расчета упругих оболочек. — М.: Высшая школа, 1987. — 296 с.
15. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
16. *Курдюмов А. А., Локшин А. З., Иосифов Р. А., Козляков В. В.* Строительная механика корабля и теория упругости. — Л.: Судостроение, 1968. — 420 с.
17. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
18. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
19. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. — Казань: Таткнигоиздат, 1957. — 432 с.
20. *Мяченков В. И., Мальцев В. П.* Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. — М.: Машиностроение, 1984. — 280 с.
21. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. — Л. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 212 с.
22. *Новожилов В. В.* Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 372 с.
23. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. — Л. — М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1939. — 640 с.
24. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
25. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1977. — 280 с.
26. *Прокопович И. Е., Зедгенидзе В. А.* Прикладная теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1980. — 240 с.

27. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.— 752 с.
28. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
29. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1968. — 416 с.
30. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. — 224 с.
31. Справочник по теории упругости. — Киев: Будівельник, 1971. — 418 с.
32. *Теребушко О. И.* Основы теории упругости и пластичности. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
33. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 536 с.
34. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 636 с.
35. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
36. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. — М.: Физматгиз, 1965. — 408 с.
37. *Цейтлин А. И., Петросян Л. Г.* Методы граничных элементов в строительной механике. — Ереван: Луйс, 1987. — 200 с.
38. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Александров Анатолий Васильевич,
Потапов Вадим Дмитриевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Зав. редакцией А. В. Дубровский. Редактор М. А. Алексеева. Младший редактор Т. Ф. Артюхина. Художник Э. А. Марков. Художественный редактор Л. К. Громова. Технические редакторы Э. М. Чижевский, Л. Ф. Попова. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 7965

Изд. № ОТ-644. Сдано в набор 13.06.89. Подп. в печать 13.12.89. Формат $60\times88^1/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать офсетная. Объем 24,50 усл. печ. л. 24,50 усл. кр.-отт. 23,96 уч.-изд. л. Тираж 23 800 экз. Зак. № 0846. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14. Набрано в ордена Трудового Красного Знамени Московской типографии № 7 «Искра революции» В/О «Совэкспорткнига» Госкомпечати СССР. 103001, Москва, Трехпрудный пер., 9.

Отпечатано с диапозитивов в Московской типографии № 8 Госкомпечати СССР, 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7. Тип. зак. № 31.