

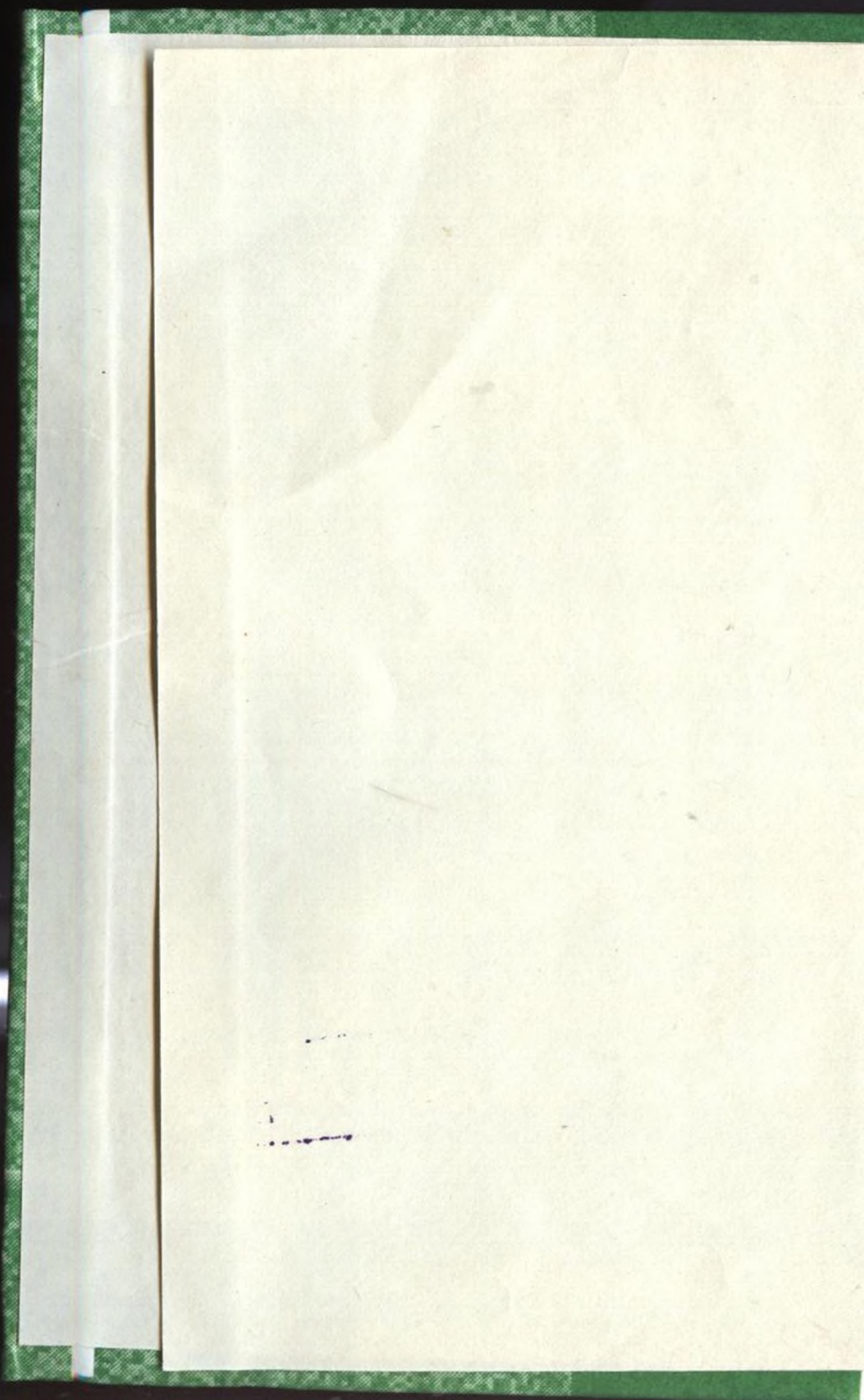


624.54
К 51
Қ.С.Абдурашидов
Б.А.Ҳобилов
Н.Ж.Тўйчиев
А.Ғ.Раҳимбоев

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ



"ЎЗБЕКИСТОН"



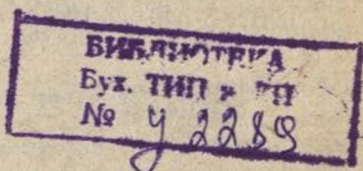
624.04

к-81

К. С. АБДУРАШИДОВ,
Б. А. ХОБИЛОВ,
Н. Ж. ТҲЙЧИЕВ,
А. Ғ. РАҲИМБОВ

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ

*Ўзбекистон Республикаси Олий
ва ўрта махсус таълим вазирлиги
олий ўқув юртлари учун дарслик
сифатида тавсия этган*



ТОШКЕНТ
•ЎЗБЕКИСТОН•

38.112

К 81

Б. А. ҲОБИЛОВНИНГ умумий таҳрири остида

*Тақризчи — физика-математика фанлари доктори,
академик В. Қ. ҚОБУЛОВ*

Мухаррир — А. Ҳақимжонова

Курилиш механикаси: Олий ўқув юрт. учун дарслик/Қ. С. Абдурашидов, Б. А. Ҳобилов, Н. Ж. Туйчиев, А. И. Раҳимбоев; / Б. А. Ҳобиловнинг умумий таҳрири остида /.—Т.: Ўзбекистон, 1999.—384 б.

И. Қ. С. Абдурашидов ва бошқ.

Курилиш механикаси фани иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги масалалари билан шугулланади. Мазкур дарсликда курилиш механикасининг асосий муаммолари тўлалигича ўз аксини топган.

Дарслик курилиш ихтисоси бўйича ўқийдиган талабаларга мулжалланган.

ББК 38.112я73

ISBN 5-640-02-194-2

Р 33080000000-159
М351(04)96

- 99

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти. 1999 й.

КИРИШ

Умуммуҳандислик фанлари орасида назарий механика, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси сингари фанлар салмокли ўрин тутди. Қурилиш муҳандисларининг савиясини белгилашда бу фанларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир. Ҳар қандай фанни талаба ўз она тилида осон ўзлаштира олишини яхши тушунган аллома олим академик М. Т. Ўрозбоев 1954 йилда назарий механика, 1960 йилда материаллар қаршилиги фанларидан биринчи бўлиб ўзбек тилида дарслик яратди. Орадан чорак аср ўтгач, З. А. Одилхўжаев, Т. Г. Ғуломов ва Т. Қ. Абдукаримовлар устоз М. Т. Ўрозбоев бошлаб берган хайрли ишни давом эттириб, ўзбек тилида илк бор қурилиш механикаси фанидан дарслик яратиб, талабаларга тортиқ этдилар.

Қурилиш механикаси фанидан ўзбек тилида дарслик чоп этилганига 10 йилдан ошди. Бу орада илм-фан таракқиёти ва ижтимоий ҳаётда жиддий ўзгаришлар рўй берди: республикамиз истиклолга эришди, ўзбек тилига давлат тили мақоми берилди. Эндиликда ўқув-услугиёт соҳасида катта тажрибага эга бўлган мохир устозлар ўзбек тилида дарсликлар ёзиш имкониятига эга бўлдилар. Қўлингиздаги китоб ҳам ана шундай имкониятларнинг маҳсулидир.

Мазкур дарслик юқорида қайд қилинган китобга қирмаган (иншоотлар устуворлиги ва динамикаси, чекли элементлар усули сингари) айрим мавзу ва боблар билан бойитилди. Бироқ шунга қарамай, қурилиш механикасига оид барча мавзулар тўлалигича қамраб олинди, деган фикрдан йироқмиз.

Дарсликнинг 3-, 4- ва 5- боблари К. С. Абдурашидов, 11- ва 12- боблари Н. Ж. Тўйчиев, 2-, 8- ва 9- боблари А. Ғ. Раҳимбоевлар қаламига мансуб, қолган бобларни Б. А. Ҳобилов ёзган. Иншоотлар динамикасига доир баъзи мисоллар Н. И. Безухов, К. С. Завриев, А. П. Филин сингари олимларнинг асарларидан олинди. Кўчишларни аниқлаш, куч усули ва устуворликка доир мисоллар У. К. Абдурахмонов томонидан тайёрланган.

Муаллифлар дарслик қўлёзмасини кўриб чиқиб, фойдали маслаҳатлар берганликлари учун Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси, техника фанлари доктори, профессор В. Қ. Қобуловга, техника фанлари доктори, профессор М. М. Мирсаидовга, қўлёзма-ни тайёрлашда кўрсатган катта ёрдами учун Захро Умаровага ўзларининг самимий миннатдорчиликларини билдирадилар.

1- боб

УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1.1. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ ФАНИ ВА УНИНГ ВАЗИФАЛАРИ

Қурилиш механикаси иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги ҳақидаги фандир.

Иншоотларнинг **мустаҳкамлиги** деганда уларнинг юк кўтариш қобилияти тушунилади, чунки мустаҳкам иншоот ўзига қўйилган юкларни бемалол кўтариб тура олиши лозим, акс ҳолда, унинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлмайди. Курсимиз давомида иншоотларнинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлиши учун нималар қилиш кераклиги ҳақида батафсил тўхталиб ўтамиз.

Иншоотларнинг **устуворлиги** (устойчивость) деганда юклар таъсирида иншоот ўзининг дастлабки мувозанат ҳолатини саклаб тура олиш-олмаслиги тушунилади.

Эксплуатация жараёнида иншоотда меъёридан ортиқча кўчиш, солқилик ва ғишлар рўй бермаслиги учун уларнинг **бикирлиги** ҳисоблаш йўли билан текширилади.

Маълумки, мустаҳкамлик, устуворлик ва бикирлик масалалари билан материаллар қаршилиги фани ҳам шуғулланади. Қурилиш механикаси билан материаллар қаршилиги фани ўртасидаги фарқ шундаки, материаллар қаршилиги фани иншоотни ташкил этувчи алоҳида элементлар (балка, стержень ва ҳ. к.) нинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлигини ўрганади. Қурилиш механикасида эса алоҳида элементлар мажмуасидан ташкил топган бутун иншоотнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги кўриб ўтилади. Аниқроқ қилиб айтганда, яхлит иншоотлар мустаҳкамлигини, устуворлигини ва бикирлигини таъминлайдиган қонун-қоидалар ва усуллар билан танишиб ўтилади. Кўриниб турибдики, қурилиш механикаси фани материаллар қаршилиги фани билан

узвий боғланган фандир. Бундан ташкари, қурилиш механикаси фани назарий механика, физика ва математика фанларига ҳам боғлиқдир. Бу ҳисобий фанлар занжирининг бир томони; занжирнинг иккинчи томонида ҳисобни якунига етказувчи фанлар — қурилиш конструкциялари фанлари (темирбетон ва ғишт-тош конструкциялари, металл, ёғоч ва пластмасса конструкциялари) туради. Ўз олдига қурилиш конструкциялари ҳисобини пухта ўзлаштиришни мақсад қилиб қўйган толиб, ана шу ҳисобий фанлар занжирини узвий равишда, бир-бирига боғлиқ ҳолда чуқур ўзлаштириши лозим.

Эластиклик назарияси, пластиклик назарияси ва тоб ташлаш назариялари юқорида кўриб ўтилган масалаларни кучли математик аппарат ёрдамида янада жиддийроқ ва янада аниқроқ ҳал этиш усуллари билан шуғулланади. Қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида қўлланилган айрим чекланишлар ва фаразлар бу фанларда қўлланилмайди. Шунинг учун ҳам ҳисоб натижалари ҳақиқатга анча яқин туради. Бироқ ҳисоблаш жараёнининг ўта мураккаблиги туфайли лойиҳа амалиётларида улардан фойдаланиш доираси анча тор.

Ҳозирги замон биолари ҳамда иншоотлари олдиндан тайёрланган лойиҳалар асосида бунёд этилиши ҳеч кимга сир эмас. Лойиҳада бино ва иншоотларнинг умумий ўлчамлари билан бир каторда ҳар бир алоҳида элементнинг ўлчамлари ҳам тўлиқ кўрсатилади.

Конструкция элементларининг узунликлари ҳамда кўндаланг кесим ўлчамлари элементларга таъсир этувчи кучлар ва элементнинг материалга боғлиқ ҳолда ҳисоблаш йўли билан аниқланади. Ҳисоблаш усуллари эса қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида баён этилади.

Қурилиш механикаси фанининг асосий вазифаларидан бири ташки кучлар (юқлар) таъсирида конструкция элементларида ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишларни) аниқлашдан иборатдир. Зўриқиш нималигини тўлиқроқ тасаввур этиш учун оддий бир мисол келтирамиз. Икки қўлингизда сув тўлдирилган икки челақни кўтариб турибсиз, дейлик. Дастлабки дақиқаларда қўлингиз толиқиш ёки оғрикни ҳис этмайди. Бироқ вақт ўтган сайин қўлингизда оғрикка ўхшаш енгил толиқиш пайдо бўлади ва у борган сари кучайиб боради. Ана шу оғрикка ўхшаш толиқиш механика тилида **зўриқиш** ёки **ички куч** деб аталади. Конструкция элементларига қўйилган ташки

кучларнинг (масалан, челагдаги сув) миқдори маълум бўлса, элементларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш қийин эмас. Конструкция элементларининг кўндаланг кесим ўлчамлари аниқланган зўриқишларнинг миқдорига қараб белгиланади.

Ташқи кучлар таъсирида иншоот ва унинг элементларида ҳосил бўладиган солкилик, кўчиш ва тебраниш амплитудаларини аниқлаш каби масалалар ҳам қурилиш механикаси фани доирасидаги масалалардан ҳисобланади.

Дарсликда зилзилалар содир бўлиб турадиган ҳудудлар учун муҳим аҳамиятга эга бўлган иншоотлар динамикаси масалаларига ҳам кенг ўрин ажратилган.

Назарий жиҳатдан баён этилган усулларнинг амалий тадбири мисол ва масалаларда ўз аксини топган.

Қурилиш механикасида яратилган ҳар қандай назарий усуллар тажрибада синаб қўрилади ва ўз навбатида, мавжуд конструкциялар устида олиб борилган тадқиқий тажрибалар асосида янги ҳисоблаш усуллари яратилади. Шунга кўра қурилиш механикаси фани тажрибавий-назарий фан саналади.

Ҳозирги кунда қурилиш механикаси фани бинокорлик ва муҳандислик амалиётида ҳар тарафлама синовдан ўтган кўплаб ҳисоблаш усулларига эга. Бу усуллар содда ва мукаммал бўлиб, шу билан бирга ишончлидир. Бирок бундан қурилиш механикаси ўз вазифаларини тўлиқ бажариб бўлди, деган маъно чиқмайди, албатта. Қурилиш механикаси ҳам бошқа фанлар сингари ўсиб бораётган қурилиш саноатининг талабларига мос равишда муттасил ривожланиб, такомиллашиб бормоқда.

1.2. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИНING РИВОЖЛАНИШИГА ОИД МАЪЛУМОТЛАР

Қурилиш механикаси ривожланиш жараёнининг дастлабки босқичларида мустақил фан бўлмай, умумий механиканинг таркибий қисмларидан бири бўлган. Бинобарин умумий механиканинг ибтидоий даврлардан бошлаб ҳозирги давргача бўлган тарихи қурилиш механикасига ҳам бевосита алоқадордир.

10—12 минг йил давом этган неолит (янги тош асри) даврининг охирига келиб Нил, Тигр ва Ефрат дарёлари соҳилларида дастлабки шаҳарлар пайдо бўла бошлайди. Эрамиздан аввалги V — III асрларда дастлабки машина-

сув тегирмони ихтиро қилинади. Эрадан аввалги VI аср бошларига келиб, қадимги аجدодларимиз ҳозирги замон атамаси билан айтганда гидравлика, қурилиш механикаси, статика, динамика ва коинот механикасига оид бошланғич элементар билимлардан хабардор бўлганлар. Масалан, канналлар ўтказиш, экинларни суғориш, сувни тепаликларга олиб чиқиш каби ишларни бажарганлар. Ҳозирги Покистон ҳудудига жойлашган Моҳинжа-Доро шаҳрида эрадан аввалги III асрда сув қувурлари (водопровод) ва ёмғир сувларини четга чиқарадиган канализация тармоғи бўлган. Водопровод тармоғи бундан 2500 йил муқаддам республикамиз ҳудудида жойлашган Афросиёб (қадимги Самарканд) аҳлини зилол сув билан таъминлаб турган. Қадимда Ўрта Осиёда сув кўтариш учун шодуф-чиғирдан (қудукдан сув чиқарадиган қурилма) фойдаланилган. Ўша вақтларда калъалар, масжид ва макбаралар, турар жой биноларининг бунёд этилиши қурилиш механикасига оид билимларни чуқур билишни, қўлланилаётган конструкция ва материалга танқидий муносабат билдириш, улар ичидан энг мақбуллари танлай билишни тақозо этарди. Қўп асрлик тажриба асосида тош, хом ғишт ва пишиқ ғишт мустаҳкамликлари орасидаги тафовут тўла ўрганилди. Баланд биноларнинг мақбул шакллари топилди.

Механиканинг назарий асослари дастлаб қадимги Юнонистон ва Мисрда пайдо бўлган. Механикага доир илк ёзма асар Юнонистоннинг машҳур файласуфи, эра-миздан 384—322 йиллар муқаддам яшаб ижод этган буюк олим Аристотель (Арасту)нинг қаламига мансуб. «Механика» сўзини илмий атама сифатида фанга биринчи бор олиб кирган олим ҳам ана шу буюк инсондир. Механиканинг хилма-хил масала ва муаммоларини ҳал этишда қадимги замон олимлари Архимед, Герон, Платон, Аполлоний, Гиппарх, Птолемей, Никомед, Архит ва бошқаларнинг хизматлари бениҳоя каттадир.

Шарқ мамлакатларида механика фани IX—XII асрларда тараккий эта бошлади. Бу даврга келиб шарқнинг машҳур олимлари ака-ука Бану Мусолар, Собит ибн Қурра, Абу Райҳон Беруний, Абу Абдулло ал-Хоразмий, Абу Али ибн Сино, Умар Ҳайём, ал-Ҳазиний, ал-Форобий сингари улкан сиймолар табиий фанлар, хусусан, механика соҳасида баракали ижод этдилар. Дастлабки кезларда улар имл-фан, давр ва ижтимоий ҳаёт тақозоси билан Аристотель, Герон, Архимед, Филопон ва бошқаларнинг

асарларини таржима қилиш ва уларни шарҳлаш билан шуғулланганлар. Шарҳлар кўпинча мустақил асарлар даражасига кўтарилган. Ватандошимиз Абу Али ибн Сино антик олим Филопоннинг механика соҳасидаги ғояларини давом эттириб, ҳаракатдаги жисмга таъсир эттирилган куч йўқолмайди; агарда жисм ҳаракати қаршиликка учрама-са, у абадий давом этади, деган ғояни илгари сурди. Ибн Сино ўзининг «Донишнома» асарида юкларни кўтарадиган ва кўзғатадиган ускуналар ҳақида фикр юритади. Ал-Хоразмий «Фанлар калити» номли китобида механика билимларига алоҳида боб ажратди.

VII — VIII асрлардан бошлаб ислом дини кенг ёйилган мамлакатларда масжид, мадраса, макбара сингари маҳобатли бинолар қурилиши авж олади. Шарқ мамлакатлари, жумладан, Ўрта Осиёда бунёд этилган қадимий меъморчи-лик ёдгорликларида гумбаз, минора, айланма зина, пешток, равок, муқарнас каби мураккаб қурилмалар қўлланилган. Табиийки, бундай биноларни қуриш учун муҳандис, меъмор ва усталардан катта билим ва маҳорат талаб этилган. Қадимий биноларнинг шакл ва ўлчамлари асрлар мобайнида такомиллашиб борди. Бухорода Мино-рай Калон номи билан аталувчи дунёга донғи кетган улкан минора бор. Минора асосининг диаметри 9 м, баландлиги 50 м, курсиси (цоколи) қиррадор бўлиб, миноранинг диаметри юқорига қараб ингичкалашиб боради. Минора 1127 йилда муҳандис ва меъмор Бако томонидан бунёд этилган. Минора шаклининг қурилиш механикаси нуқтаи-назаридан макбул томони шундан иборатки, унинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал кучлар (зилзила ва шамол) таъсирига бардошлиги юқори даражададир. Бундан ташқари унинг шакли сиқилишга тенг қаршилиқ курса-тувчи жисм шаклига яқин келади. Хулоса қилиб айтганда, қадимий меъморчилик обидаларини асрлар оша бизнинг давримизгача етиб келиши бобокалон меъморлар ва уста бинокорларнинг амалий қурилиш механикасидан чуқур ҳабардор экандиқларидан далолат беради.

Шарқ олимларининг дунё фани олдидаги буюк хизмат-лари яна шундан иборатки, улар қадимги юнон олимлари-нинг илмий меросини сақлаш ва уни ижодий ўрганиш билан бир каторда уни ўз асарлари билан янада бойитганлар. Ана шу бой мерос кейинчалик турли йўллар билан Ғарбий Европага кириб борди.

Механиканинг эндиги ривожини Уйғониш даврида Евро-пага кўчди. Бу давр механикаси буюк олимлар Леонардо

да Винчи, Стевин, Коперник, Кеплер, Галилей ва Ньютонларнинг оламшумул асарлари ва ихтиролари билан бойиди, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси-га доир биринчи китоб ўша даврда яратилди. Китобнинг номи «Икки янги фан ҳақида суҳбатлар ва математик исботлар» деб аталиб, муаллифи флоренциялик олим Галилео Галилей эди (1564—1642). 1678 йилда йирик инглиз олими Роберт Гук (1635—1703) ўзининг машҳур қонунини кашф этди, яъни чўзилиш қанақа бўлса, қуч ҳам шунақа бўлади, деб таърифлайди муаллиф. Ҳозирги иборалар билан айтганда, деформация қучга тўғри пропорционалдир. Ҳозирги замон қурилиш механикаси-нинг деярли барча назария ва усуллари ана шу оддий қонунга асосланади.

XVIII асрда саноатнинг кенг ривожланиши илм-фан олдига янги-янги вазифалар қўйди. XIX асрда темир йўлларнинг пайдо бўлиши, қўприклар ва йирик саноат биноларининг қад кўтариши қурилиш механикасини янада ривожланишига туртки бўлди. Бу ва бундан кейинги даврларда қурилиш механикасининг ривожланишига чет эллик олимлардан Даламбер, Лагранж, Кулон, Ламс, Сен-Венан, Эйлер, Максвелл, Мор, Мюллер-Бреслау ва бошқалар, рус ва совет олимларидан Д. И. Журавский, Ф. С. Ясинский, Н. А. Белелюбский, В. Г. Шухов, В. Л. Кирпичев, Л. Р. Проскураков, А. Н. Крилов, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галёркин, кейинчалик И. М. Рабинович, В. З. Власов, К. С. Завриев, А. Ф. Смирнов, Н. И. Безухов, В. В. Болотин, А. В. Дарков ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар. Қурилиш механикасининг оғир юқини кўтаришда ўзбек олимлари ҳам четда турмадилар: улар дунё олимлари билан ёнма-ён туриб фаннинг оғир машаққатларини енгишда ҳамдард бўлдилар.

Назарий механика ва материаллар қаршилиги курсларидан ўзбек тилида биринчи дарслик яратган олим академик М. Т. Ўрозбоев ўзбек механикларининг отаси ҳисобланади. Устознинг сафдоши академик Х. А. Рахматуллин умрининг охиригача Москва Давлат Университетида талабаларга сабоқ берди. Ўзбекистонда кибернетиканинг тараққиёти академик В. К. Қобуловнинг номи билан чамбарчас боғлиқдир. Зилзилалар тез-тез содир бўлиб турадиган бизнинг республикамизда зилзилабардош конструкциялар устида олиб борилаётган ишларнинг аҳамияти нақадар катта эканлиги сир эмас. Бу соҳанинг ўткир билимдони академик Т. Р. Рашидовнинг ер ости иншоотла-

ри сейсмик мустаҳкамлиги назариясига қўшган ҳиссаси беҳаддир. Ўзбекистон Фанлар академиясининг академиги Т. Ш. Ширинкуловнинг замин ва пойдеворлар соҳасида олиб борган илмий тадқиқотлари собиқ иттифоқ микёсида тан олинган ва уларга юксак баҳо берилган эди.

Юкорида номлари зикр этилган устозлар яратган мактаб республикамизнинг турли билимгоҳларида ҳар томонлама тараққий этиб, такомиллашиб бормокда. Жумладан, Ўзбекистон Фанлар академиясининг Ўрозбоев номли механика ва иншоотлар зилзилабардошлиги институти, Тошкент зонал илмий-тадқиқот ва тажрибавий лойиҳалаш институти (ТашЗНИИЭП), Тошкент темир йўл транспорти институти, Тошкент ва Самарқанд меъморчилик-қурилиш институтлари олимлари қурилиш механикасининг турли соҳаларида баракали ижод қилмокдалар.

Хозирги даврда йирик ўлчамларга эга бўлган мураккаб қурилиш конструкцияларининг янги-янги турлари кўпайиб бормокда. Булар орасида енгил вазнли фазовий конструкциялар салмоқли ўрин тутади. Мураккаб конструкцияларнинг ҳисоби ҳам мураккаб бўлади.

Оддий конструкциялар ҳисобини қўлда бажариш мумкин бўлса, мураккаб конструкцияларнинг ҳисобини электрон ҳисоблаш машиналарисиз (ЭХМ) тасаввур этиб бўлмайди. Шу боисдан эндиликда қурилиш механикасида компьютерлардан фойдаланиш имконини берадиган аналитик усулларнинг роли ортиб бормокда.

Ҳисоблаш техникасидан кенг фойдаланиш имконини берадиган усуллардан бири матрица усулидир. Матрица ҳисобининг тили сонли ҳисоблаш машиналарига жуда қўл келади. Матрица усулининг афзалликларидан бири шундан иборатки, бунда бир хил матрица амалидан фойдаланиб, турли хил тизимларни ҳисобласа бўлади.

Истикболли усуллардан яна бири чекли элементлар усулидир. (ЧЭУ). Бу усулга кўра яхлит жисм алоҳида чекли элементларга бўлиб чиқилади; бу элементларнинг ўзаро боғланиши алоҳида нукталардаги зўриқишларнинг ўзаро таъсири орқали бурчакларга, фазовий масалаларда эса — параллелепипед ёки тетраэдрларга тақсимлаб чиқилади.

Мазкур дарсликнинг 11 ва 12-бобларида матрицалар назарияси ҳамда чекли элементлар усулига батафсил тўхтаб ўтамиз.

1.3. ИНШООТЛАР ВА УЛАРНИНГ ҲИСОБЛАШ ТАРҲЛАРИ

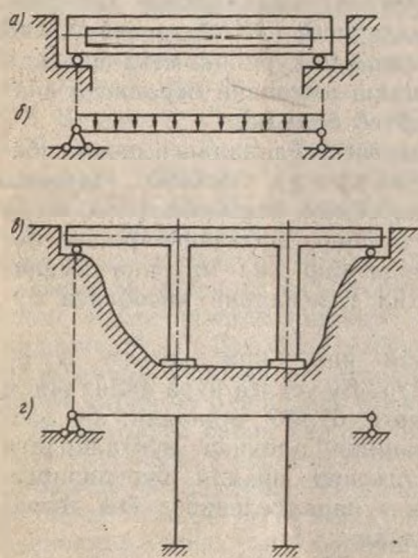
Муҳандислик иншоотлари одатда стержень, балка, пластина, қобик ва ҳажмий жисмлар сингари турли конструктив элементларни тегишли равишда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинади. Демак, яхлит иншоот алоҳида элементлардан ташкил топган мураккаб система ҳисобланади.

Иншоотларни ҳисоблаганда, айрим элементларнинг ўлчам ва шакллари, улар орасидаги боғланишни аниқ ҳисобга олиш назарий жиҳатдан ё имкони йўқ, ё ўта мураккаб ишдир. Шунинг учун қурилиш механикасида бошқа фанлардаги сингари илмий абстракция усулидан фойдаланиб, мавжуд иншоот ҳисоблаш тарҳи билан алмаштирилади.

Ҳисоблаш тарҳи — иншоотнинг соддалаштирилган тасвири бўлиб, унда юк таъсиридаги иншоотнинг асосий кўрсаткичлари мужассамлашган бўлади. Ҳисоблаш тарҳларида стерженлар — ўқлар билан, пластиналар — ўрта сиртлар билан, кўндаланг кесимлар — юза ва инерция моментларининг сон кийматлари билан, реал

таъсирлар идеал таъсирлар билан алмаштирилади; юклар ўқларга қўйилган деб фараз этилади ва ҳ.к. Иншоотлар ҳисоби ана шундай ҳисоблаш тарҳлари орқали амалга оширилади.

1.1-расмда бир ораликли кўприк (а) ҳамда балка деб аталувчи унинг ҳисоблаш тарҳи (б) тасвирланган. 1.1-расм, в-да уч ораликли кўприк ҳамда рама деб аталувчи унинг ҳисоблаш тарҳи (г) берилган. Йўл қопламасининг вазни ҳамда кўприкнинг



1.1-расм

хусусий оғирлиги балкага текис ёйиқ куч сифатида таъсир этади. Балкада ташки кучлар ва ҳарорат таъсирида бўйлама кучлар ҳосил бўлмаслиги учун унинг таянчларидан бири қўзғалувчан, иккинчиси қўзғалмас қилиб ишланади.

Иншоотнинг ҳисоблаш тарҳини танлаш мураккаб, айни пайтда, муҳим масалалардан биридир. Ҳисобнинг сифати, яъни унинг аниқлиги кўп жиҳатдан, ҳисоблаш тарҳининг қандай танланишига боғлиқ.

Агар ҳисоб нотўғри танланган ҳисоблаш тарҳи бўйича бажарилган бўлса, у ўта аниқ усуллар билан ҳисобланган тақдирда ҳам тўғри натижа бермайди.

Маълумки, стержень ва пластиналар иншоотнинг асосий элементлари ҳисобланади. Қўндаланг кесим ўлчамлари узунликка нисбатан анча кичик бўлган элемент стержень деб аталади. Бир ўлчами (калинлиги) қолган икки ўлчами (узунлиги ва эни)га нисбатан анча кичик бўлса, пластина деб аталади. Эгри ўқли пластина қобик (оболочка) деб аталади. Булардан ташқари ҳисоблаш тарҳлари ичида ҳажмий jismlar деб аталувчи элементлар ҳам учрайди. Бундай элементларнинг уч ўлчами бир-бирига яқин бўлади. Бунга пойдевор блоклари, тиргак деворлар мисол бўла олади.

Алоҳида элементларнинг жойлашув тартибига қараб иншоотлар ясси ва фазовий системаларга бўлинади. Барча стерженларнинг ўзлари бир текисликда жойлашган бўлса, бундай иншоот ясси система деб аталади. Акс ҳолда система фазовий бўлади. Ясси иншоотлар мустақил кўринишда камдан-кам учрайди. Кўпинча улар ҳисобни соддалаштириш мақсадида фазовий системалардан ажратиб олинади. Ясси системани фазовий системадан ажратиб олиниши ҳисоб аниқлигини пасайтиради. Бирок муҳандислик амалиётида баъзан шундай қилишга тўғри келади.

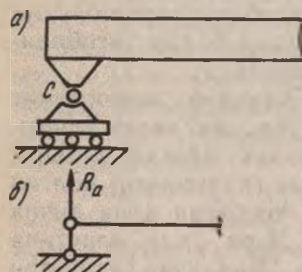
1.4. ТАЯНЧЛАР ВА ЮКЛАР

Иншоотнинг пойдевор ёки замин билан бириккан қисми таянч деб аталади. Таянчлар уч хил бўлади: шарнирли қўзғалувчи таянч, шарнирли қўзғалмас таянч, шарнирсиз қўзғалмас таянч.

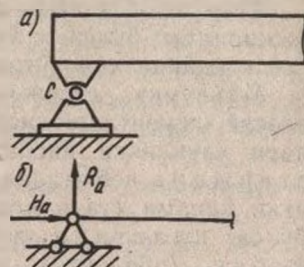
1.2-расмда шарнирли қўзғалувчи таянчнинг конструкцияси (а) ва унинг содда тасвири (б) берилган;

бунда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, горизонтал йўналишда қўзғала олади; биргина вертикал реакция вужудга келади.

1.3- расмда шарнирли қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва тасвири (б) берилган; бу ерда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, бироқ горизонтал йўналишда қўзғалмасдир. Бундай таянчда ҳам горизонтал, ҳам вертикал реакциялар вужудга келади.



1.2- расм

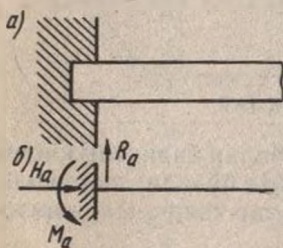


1.3- расм

1.4- расмда шарнирсиз қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган бўлиб, бунда стержень учи таянчга мустаҳкам бириктирилган; стержень горизонтал йўналишда қўзғолиш ёки таянч кесими атрофида айланиш имконига эга эмас. Бундай таянчда учта реакция (R_a , H_a , M_a) вужудга келади.

Иншоотга таъсир этадиган ташки кучлар юклар деб аталади. Юклар таъсир этиш муддати, таъсир этиш усули, вазифаси ва бошқа белгиларга қараб бир неча турга бўлинади.

Юклар иншоотга қўйилиш вакти (муддатига) қараб статик ва динамик юкларга бўлинади. С т а т и к юклар



1.4- расм

иншоотга зарбсиз аста-секин қўйилади; юкнинг қиймати нолдан бошлаб охириги қийматига қадар бир текисда ортиб боради. Д и н а м и к юклар иншоотга бирданига қўйилади ёки вақт ўтиши билан қиймат ва йўналишини ўзгартириб туради.

Қўйилиш усулига кўра ёйик ва йиғик (тўпланган) юклар бўлади.

Ёйик юк иншоот сирти ёки узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Узунлик бўйлаб ёйилган юк интенсивлик билан ўлчанади. Интенсивлик деганда узунлик бирлигига тўғри келадиган юк микдори тушунилади ва у kH/m билан ўлчанади. Агар юк сирт бўйлаб ёйилган бўлса, kH/m^2 билан ўлчанади.

Йиғик юк деганда бир нуктага тўпланган куч тушунилади. Аслида бундай юклар реал ҳолда камдан-кам учрайди. Ҳисоб ишларини соддалаштириш учун кўпинча ёйик юклар йиғик куч ҳолига келтириб олинади, яъни маълум бир нуктага тўпланади. Ҳозирда амалда бўлган халқаро ўлчам бирликлари тизими (СИ) бўйича кучнинг ўлчам бирлиги ньютон (Н) дир. Эслатиб ўтамиз: $1 \text{ кгк} \approx 9,81 \text{ Н}$.

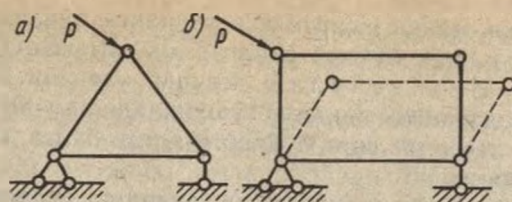
Вазифасига кўра юклар доимий, муваққат ва қўзғалувчан бўлади. Иншоотга доим таъсир этиб турувчи юк (масалан, хусусий оғирлик) доимий юк ҳисобланади. Муваққат юк иншоотга маълум даврларда таъсир этади (масалан, шамол ва қор таъсири, турли ускуна ва жиҳозлар ва ҳ.к.). Қўзғалувчан юкларга транспорт воситалари мисол бўла олади.

1.5. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ЎЗГАРМАСЛИК ШАРТЛАРИ

Курилиш конструкцияларининг аксарияти ҳисоблаш чизмаларида стерженлардан ташкил топади (балка, ферма, рама ва ҳ.к.). Алоҳида стерженларнинг тугунларда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинган қурилмалар стерженли система лар деб аталади.

Ҳар қандай иншоот, яъни стерженли система геометрик ўзгармас бўлиши лозим. Бунинг маъноси шуки, ҳар қандай бино ва иншоот бунёд этилгандан кейин ўзининг дастлабки геометрик шаклини ҳеч оғишмай саклаб туриши керак. Бинокорликда геометрик ўзгарувчан системалар қўлланилмайди, чунки бундай системалар деформацияланмаган ҳолда ўз шаклини кескин ўзгартиради. Геометрик ўзгармас системалар эса ўз шаклини стерженларнинг деформацияланиши эвазига ўзгартиради.

1.5- расмда учбурчакли (а) ва тўртбурчакли (б) иккита стерженли система тасвирланган бўлиб улардан бири геометрик ўзгармас, иккинчиси ўзгарувчандир.



1.5-расм

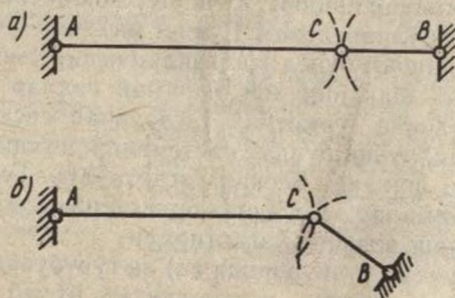
Учбурчакли системанинг шакли стерженлар деформация бергандагина ўзгаради, акс ҳолда ўзгаришсиз тураверади. Шунинг учун у геометрик ўзгармас система саналади. Тўртбурчакли система эса ўз шаклини осонгина ўзгартиради, бунда стерженлар дастлабки узунлигини сақлаб қолади, яъни деформацияланмайди. Демак, бу геометрик ўзгарувчан системадир.

Хулоса қилиб айтганда, ўзининг геометрик шаклини алоҳида стерженларнинг деформацияланиши ҳисобига ўзгартирадиган системалар геометрик ўзгармас системалар деб аталади.

Учбурчак система энг оддий геометрик ўзгармас система ҳисобланади. Хўш, мураккаб шаклга эга бўлган геометрик ўзгармас системалар қандай ҳосил қилинади? деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришга уриниб кўрамиз.

Бунинг учун аввал оний ўзгарувчан система билан танишиб чиқамиз.

Бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган система билан танишиб чиқайлик (1.6-расм, а).



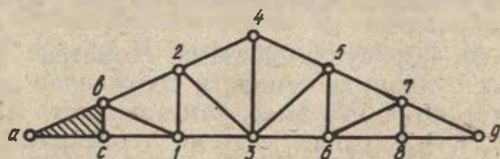
1.6-расм

Агар икки стерженни бир-бирига уловчи шарнир С ни йўқ деб фараз килсак, АС ва ВС стерженлари шаклда кўрсатилган ёйлар бўйича кўзгалиши мумкин. Бунда ҳар иккала ёй С нуктасида умумий уринмага эга бўлади. Бинобарин, стерженлардан бирига тегишли бўлган С нуктаси АВ чизигига тик йўналишда жуда киска масофага кўча, иккинчи стержень бунга қаршилиқ кўрсата олмайди. Демак, бу система геометрик ўзгарувчан экан, чунки системанинг шакл ўзгариши стерженларнинг деформациясиз амалга ошаяпти. Бирок бу системанинг геометрик ўзгарувчанлиги бир онликдир, чунки С нуктаси жуда киска масофага кўча олади. С нуктасининг кўчишини катталаштириш учун, яъни икки стерженли системанинг шакл ўзгартиришини янада давом эттириш учун стерженларни деформацияланишга мажбур этиш лозим бўлади. Ўз шаклини бу йўсинда ўзгартирадиган система геометрик ўзгармас бўлади. Шунинг учун ҳам бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган системалар оний ўзгарувчан системалар деб аталади.

Агар икки стержень ва уч шарнир бир ўқ устида ётмаса, у ҳолда ёйлар умумий уринмага эга бўлмайди (1.6- расм, б). С нуктаси бу системада кичик бир масофага кўчиши учун стерженлар деформацияланиши лозим бўлади. Бундай системанинг геометрик ўзгармас бўлишини юқорида кўриб ўтдик.

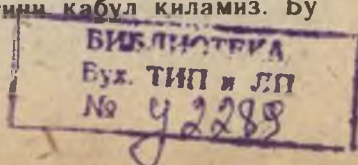
Демак, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун янги қўшиладиган тугун ва уни дастлабки система билан боғловчи икки стержень бир ўқ устида ётмаслиги лозим экан. Геометрик ўзгармас система ҳосил қилишнинг асосий қондаси ана шундан иборат.

Шу қоида асосида геометрик ўзгармас стерженли система ферма ҳосил қилиш тартибини кўриб чиқайлик (1.7- расм).



1.7- расм

Дастлабки геометрик ўзгармас система асос сифатида энг оддий система abc учбурчагини қабул қиламиз. Бу



учбурчакка бирин-кетин икки стержень оркали янги тугунларни кўшиб борамиз. Тугунларни кўшиш тартиби чизмада рақамлар билан кўрсатилган. Эътибор беринг: ҳар бир янги тугун ва икки стержень бир ўк устида ётмайди. Шу тартибда ҳосил килинган ферма ўзгармас бўлади.

Текшириш учун тугунларни ва уларга туташган икки стерженни тескари тартибда бирин-кетин ташлаб юборамиз. Агар ташлашлар охирида учбурчакли система қолса, у ҳолда берилган система геометрик ўзгармас бўлади. Бизнинг мисолда айнан шундай: тугунларни 9- тугундан бошлаб бирин-кетин ташлаб юборсак, охирида *abc* учбурчаги қолади. Демак яхлит ферма геометрик ўзгармас система экан.

Энди стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартларини формула оркали ифода этишга уриниб кўрамиз.

Геометрик ўзгармас оддий ферма стерженлари сонини S , тугунлари сонини K деб белгиласак, стерженлар сони билан тугунлар сони орасидаги боғланишни қуйидаги тартибда ифодаласа бўлади: асосий учбурчак учта тугун ва учта стерженга эга: бунга келиб қўшилувчи ҳар бир янги тугун сон жихатдан $(K - 3)$ га тенг бўлиб, ҳар бир тугунга иккитадан стержень туташган бўлади. Натижада ферма стерженларининг умумий сони қуйидагича бўлади:

$$S = 3 + 2(K - 3)$$

ёки

$$S = 3K - 3. \quad (1.1)$$

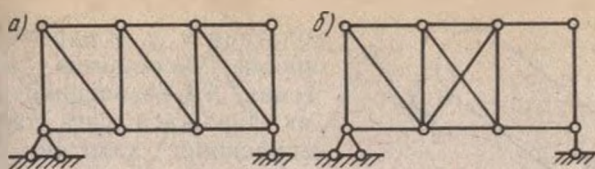
Бу ерда қуйидаги уч ҳол учраши мумкин:

1) $S < 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади; чунки стерженлар сони талаб этилган сондан кам;

2) $S = 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади; системадаги стерженлар сони талаб даражасида, ортиқ ҳам эмас, кам ҳам эмас;

3) $S > 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ бўлади; чунки стерженлар сони керагидан ортиқча.

Кўриб ўтилган уч ҳолдан биринчиси бинокорлик учун ярамайди, қолган икки ҳол қурилиш конструкцияларини қаноатлантиради. Чунки иншоотлар статик аниқ ёки



1.8-расм

ноаниклигидан катъи назар геометрик ўзгармас бўлиши даркор.

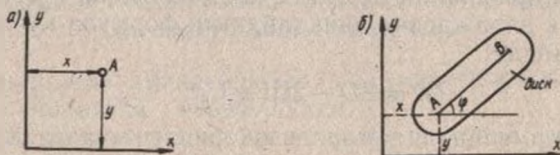
Бирок стерженли системанинг формулани каноатлантириши масаланинг бир томони холос. Масаланинг иккинчи томони ҳам бор: системанинг геометрик ўзгармаслигини таъминлашда унинг тузилиши ҳам катта роль ўйнайди. Масалан, 1.8-расмда стерженлари сони формулани каноатлантирадиган иккита ферма тасвирланган. Формулага кўра ҳар иккалови ҳам геометрик ўзгармас система бўлиши керак. Бирок ферманинг тузилишига кўра улардан бири (а) геометрик ўзгармас, иккинчиси (б) геометрик ўзгарувчандир. Иккинчи ферманинг охири панели геометрик ўзгарувчан тўртбурчакли системадан ташкил топганлиги сабабли у геометрик ўзгарувчандир.

1.6. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ЭРКИНЛИК ДАРАЖАЛАРИ

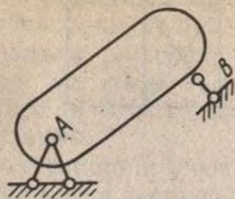
Нукта ёки системанинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрлар сони эркинлик даражаси деб аталади.

А нуктасининг ҳолатини x ва y параметрлари белгилайди (1.9-расм, а). Демак нуктанинг эркинлик даражаси иккига тенг.

Ясси диск (масалан, фанер парчаси)нинг эркинлик даражасини кўриб чиқамиз (1.9-расм, б). Дискнинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрларни белгилаш учун диск сиртида АВ кесмасини ўтказамиз. Бу кесманинг



1.9-расм



1.10-расм

ҳолатини x, y, φ параметрлари орқали билишимиз мумкин. Темак, АВ кесмасининг эркинлик даражаси учга тенг. АВ кесмасининг ҳолатини белгиловчи параметрлар (x, y, φ) дискнинг ҳолатини ҳам белгилайди, чунки кесма диск сиртида ётибди. Бундан дискнинг эркинлик даражаси ҳам

учга тенг бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Бунинг маъноси шуки, диск уч йўналишда эркин ҳаракат қилади: вертикал ва горизонтал йўналишларда кўчиши ҳамда бирор нуктага, масалан, А нуктасига нисбатан айланиши мумкин.

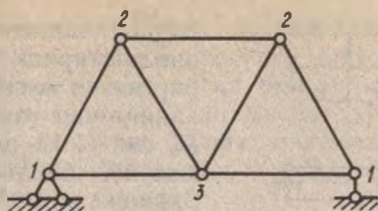
Диск ёки стерженнинг эркинлик даражасига чек қўядиган ҳар қандай қурилма боғланиш деб аталади. Шарнирлар ва таянч стерженлари боғланиш ҳисобланади. Ҳар бир шарнир иккита, ҳар бир таянч стержени эса битта эркинлик даражасига чек қўяди.

Яхлит бир диск олайлик. Агар унга ҳеч қандай боғланиш қўймасак, унинг эркинлик даражаси учга тенг бўлишини юқорида кўриб ўтдик. Энди дискка А шарнирини қўямиз (1.10-расм) (стол устида ётган фанера парчасига бир дона мих қоқамиз, дегандай гап). Бу билан дискнинг иккита эркинлик даражасига чек қўйилади (фанера икки йўналишда ҳаракат қилиш имкониятидан маҳрум бўлди, дегандай гап). Бироқ диск А шарнири атрофида айлана олади. Агар дискка яна бир боғланиш — таянч стержени В ни қўйсак, диск, айланиш имкониятидан ҳам маҳрум бўлади.

Мана шу мулоҳазалар асосида стерженли система-ларнинг эркинлик даражасини аниқлашга доир формулани ёза оламиз. Агар системанинг эркинлик даражасини W , дисклар сонини D , шарнирлар сонини Π ва таянч стерженлари сонини C , деб олсак, стерженли системанинг эркинлик даражасини аниқлайдиган формула қуйидагича ифодаланади:

$$W = 3D - 2\Pi - C, \quad (1.2)$$

Бу формуланинг замирида юқоридаги мулоҳаза ётибди, яъни ҳар бир диск учта эркинлик даражасига эга, ҳар бир шарнир иккита эркинлик даражасига чек қўяди ва ҳар бир таянч стержени битта эркинлик даражасига чек қўяди.



1.11-рaсm

Шарнирлар сонини ҳисоблашда, улар иккига — оддий ва мураккаб шарнирларга ажратилади. Икки дискни бирлаштирувчи шарнир оддий, иккидан ортик дискни бирлаштирувчи шарнир эса — мураккаб шарнир деб аталади. Шарнирлар сони дисклар сонидан битта кам бўлади, яъни

$$Ш = Д - 1$$

Стерженли системаларнинг эркинлик даражаларини аниқлашда ҳам қуйидаги учта ҳолга дуч келамиз:

1) $W = 0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади.

2) $W > 0$; бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади;

3) $W < 0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ, ортикча боғланишларга эга бўлади.

Мисол: Ясси ферманинг эркинлик даражасини аниқлаш керак (1.11-рaсm).

Дисклар сони $Д = 7$;

Шарнирлар сони $Ш = 9$ (шаклда шарнирлар сони рақамлар билан кўрсатилган);

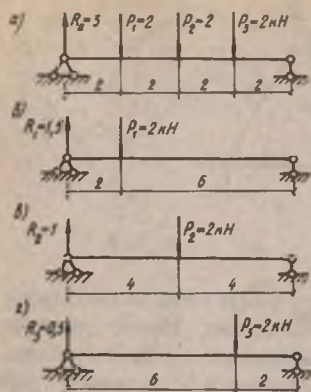
Таянч стерженлари сони $С_т = 3$; эркинлик даражаси $W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - 3 = 0$;

Демак, ферма геометрик ўзгармас, статик аниқ экан.

1.7. КУЧЛАР ТАЪСИРИНИНГ МУСТАҚИЛЛИГИ ҚОИДАСИ ВА УМУМЛАШМА ЭПЮРАЛАР

Қурилиш механикасида катта аҳамиятга эга бўлган бу қоида қуйидагича таърифланади:

Агар иншоотга бир неча кучлар қўйилган бўлса, уларнинг биргаликдаги таъсиридан ҳосил бўлган натижа ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан ҳосил бўлган натижалар йиғиндисига тенг бўлади.



1.12- расм

чизмаларда берилган (1.12- расм, б, в, г). Реакциянинг тўлик қиймати алоҳида топилган реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади: $R_a = R_1 + R_2 + R_3 = 1,5 + 1 + 0,5 = 3\text{кН}$.

Шундай қилиб, балкага кучлар бир йўла қўйилгандаги реакциянинг қиймати кучлар алоҳида-алоҳида қўйилган ҳолдаги реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг чиқди. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси деган иборанинг маъноси ана шундан иборат.

Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси эластиклик чегарасида қўлланилади. Реакция ва ички кучларни аниқлашда иншоот деформацияланмаган деб фараз этилади. Қўлланиладиган тенгламалар чизиксиз бўлса, мазкур усулдан фойдаланиб бўлмайди.

Умумлашма эпюралар. Маълумки, қурилиш конструкцияларига турли хил юклар таъсир этади. Ҳар бир юкнинг ўзига яраша эпюралари бўлади. Шундай ҳоллар бўладикки, маълум бир кесимда энг катта момент бир хил юкдан ҳосил бўлса, бошқа кесимда бошқа юкдан ҳосил бўлади. Муҳандисни эса максимал зўриқишлар қизиқтиради. Максимал ёки минимал зўриқишларни аниқлаш мақсадида умумлаштирилган эпюралар қурилади.

Қўпинча иншоотга доимий ва муваққат юклар таъсир этади. Доимий юклар иншоотга муттасил равишда таъсир этиб, муваққат юкларнинг таъсир этиш вақти, қиймати ва ўрни ўзгариб туради. Бу эса ўз навбатида иншоот кесимларидаги зўриқишларнинг ўзгаришига олиб келади. Бундай ҳолларда зўриқишларнинг максимал ёки минимал

Бу қонданинг моҳиятини ойдинлаштириш учун оддий бир мисол келтирайлик. Балканинг чап таянч реакцияси R_a ни (1.12- расм, а) икки хил йўл билан аниқлаймиз. Биринчи усул бўйича R_a таянч реакцияси учала куч (P_1 ; P_2 ; P_3) таъсирида бир йўла аниқланади: $R_a = 3\text{кН}$ чиқади. Иккинчи усулга кўра кучлар навбатма-навбат қўйилади ва ҳар бир кучга мос равишда реакциялар аниқланади. Топилган реакцияларнинг қиймати

кийматларини аниқлаш учун доимий ҳамда муваккат юкларнинг турли вариантлари учун алоҳида эпюралар қурилади. Доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш билан муваккат юкдан ҳосил бўлган мусбат зўриқишларнинг йиғиндиси $S_{\max}$ ни, яъни тўлиқ максимал зўриқишни, манфий зўриқишлар йиғиндиси эса $S_{\min}$ ни, яъни тўлиқ минимал зўриқишни беради;

$$\begin{aligned} S_{\max} &= S_{\text{доим}} + \Sigma(+S_{\text{мув}}) \\ S_{\min} &= S_{\text{доим}} + \Sigma(-S_{\text{мув}}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Бу ерда $S_{\text{доим}}$ — доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш; $\Sigma(+S_{\text{мув}})$, $\Sigma(-S_{\text{мув}})$ — муваккат юклардан ҳосил бўлган мусбат ва манфий зўриқишлар.

Зўриқишларнинг аниқланган қийматларини ягона масштабда бир ўқ устига жойлаштирилади ва туташ чизик билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график у м у м л а ш - м а ¹ эпюра деб аталади. Мазкур эпюрага доир мисол статик ноаниқ узлуксиз балкалар ҳисобида берилган.

Қурилиш конструкцияларини ҳисоблашда (масалан, арматуранинг кесимини танлашда) эпюрадан мутлак қиймати катта бўлган момент танлаб олинади; конструкциянинг мустаҳкамлиги ана шу момент бўйича текширилади.

2- боб

ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ

2.1. ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Замонавий иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлаш катта аҳамиятга эгадир.

Маълумки, кўприк, эстакада, кран ости балкалари сингари қатор муҳандислик иншоотларини ҳисоблашда биз қўзғалувчан юкларга дуч келамиз.

Иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлашда, асосан, қуйидаги икки масала ҳал этилади:

¹ Русчада бу атама «оггибающая» ёки «объемлющая» деб юритилади. Бу сўзларнинг ўзбек тилига айнан таржимаси атама маъносига унча тўғри келмаганлиги сабабли асли маъносига яқинроқ термин қабул қилдик.

1. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган зўриқишлар, иншоотнинг таянч реакциялари, эгувчи моментлари, кўндаланг ва бўйлама кучлари, ферма стерженларидаги зўриқишлар ва x . к. аниқланади.

2. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган энг катта зўриқишлар аниқланади, яъни ҳаракатланувчи юклар системасининг иншоотда энг нобоб жойлашуви масаласи ҳал этилади.

Иншоот бўйлаб бирлик куч ($P=1$) ҳаракатланганда, иншоот қисмларидаги куч омилларининг ўзгаришини ифодаловчи график таъсир чизиклари деб аталади. Куч омиллари деганда ҳосил бўладиган ички кучлар (M , Q , N) ва таянч реакциялари тушунилади.

Иншоот бўйлаб ҳаракатланувчи бирлик кучнинг ҳолатини белгиловчи абциссани x билан, иншоотдаги зўриқишни S билан белгиласак, у ҳолда зўриқишнинг таъсир чизик-тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$S=f(x).$$

Таъсир чизикларини чизишнинг статик ва кинематик усуллари мавжуд.

Статик усул ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) нинг ихтиёрий ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузиб, улардан изланаётган зўриқишнинг аналитик ифодасини тузишга асосланган.

Бу аналитик ифода ёрдамида зўриқиш S нинг ўзгариш графиги чизилади.

Кинематик усул ёрдамида таъсир чизикларини куриш мумкин бўлган кўчишлар қондасига асосланади.

2.2. ОДДИЙ БАЛКАЛАРДА ЗЎРИҚИШЛАРНИНГ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Агар иншоотга кўзғалувчи кучлар тизими қўйилган бўлса, уларни аввало ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) таъсирига ҳисобланади.

Оддий балкаларга куч омилининг таъсир чизигини куриш учун бирлик кучни балканинг тегишли нукталарига жойлаштириб, бизни кизиктираётган микдорнинг ўзгариш қонунини ифодаловчи тенглама тузилади ва унинг графиги чизилади.

Оддий балкаларда таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари

Бирлик куч балка бўйлаб ҳаракатланганда, таянч реакцияларининг қай тарзда ўзгаришини кўриб чиқамиз. Бирлик кучни шаклда кўрсатилганидек жойлаштирамиз (2.1-расм).

R_a таянч реакциясини аниқлаш учун В таянчига нисбатан статиканинг мувозанат тенгламасини тузамиз

$$R_a \cdot l - P(l-x) = 0;$$

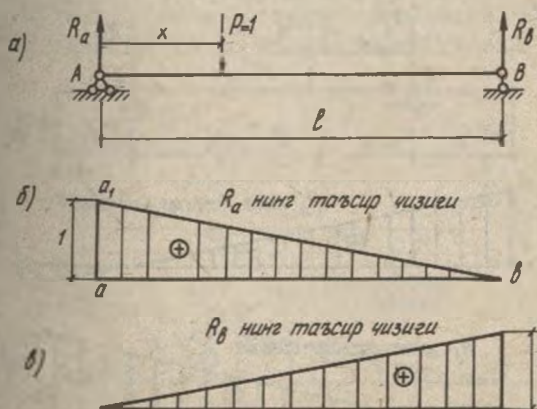
$$R_a = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}. \quad (2.1)$$

Демак, бирлик куч ($P=1$) балка бўйлаб ҳаракатланса, R_a таянч реакциясининг ўзгариши тўғри чизик бўйлаб содир бўлади. Шаклга кўра x нолдан l гача ўзгаради. Тўғри чизикни ўтказиш учун x га қийматлар берамиз:

$x=0$ бўлса $R_a=1$;

$x=l$ бўлса $R_a=0$ бўлади.

Шу икки нукта координаталари ёрдамида R_a таянч реакциясининг таъсир чизиги қурилади (2.1-расм, а).



2.1-расм

А таянчига нисбатан тузилган статик тенгламасидан R_b реакцияси топилади: саяинг мувозанат

$$\Sigma M_A = 0, P \cdot x - R_b \cdot l = 0$$

$$R_b = \frac{P \cdot x}{l} = \frac{x}{l} \quad (2.2)$$

Бу ерда $0 \leq x \leq l$ эканлигини ҳисобга олсак,
 $x=0$, $R_b=0$;
 $x=l$, $R_b=1$ бўлади.

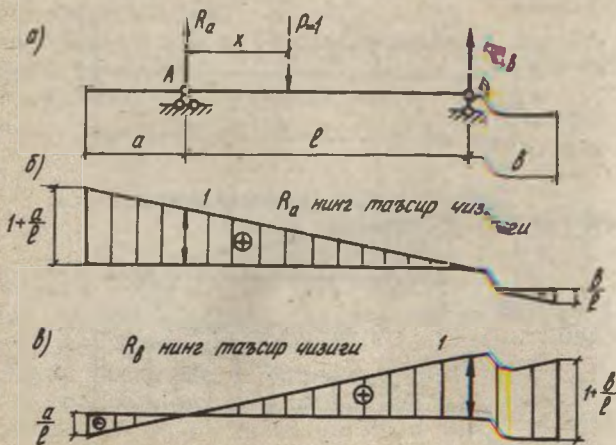
Демак R_b таъриқ реакциясининг таъ
туғри чизик тенгласи орқали қурилар сир чизиги ҳам
б). экан (2.1- расм,

R_a ва R_b таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари мусбат ишорали бўлиб, ординаталари ўлчамсиз микдордан иборатдир.

Икки консолли балка учун таянч реакциясининг таъсир чизиклари

Икки консолли балка учун (2.2- расм) ларининг таъсир чизикларини куриш од таянч реакция- амалга оширилган усуллар ёрдамида баъий балка учун Масалан, балканинг чап таянч реаварилади.

Масалан, балканинг чап таянч реаксияси R_a нинг таъсир чизигини куриш учун мувозанат тенгламасидан фойдаланиб $R_a = \frac{l-x}{2}$ ни топамиз.



2.2- р а с м

Бу ерда x масофа куйидаги тарзда ўзгаради:

$$-a \leq x \leq l+b$$

x га кийматлар берамиз:

$$x = -a, R_a = 1 + \frac{a}{l};$$

$$x = a, R_a = 1;$$

$$x = l, R_a = 0;$$

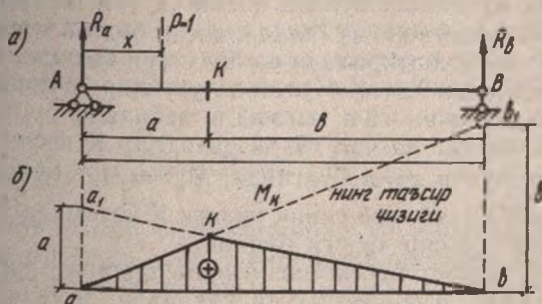
$$x = l+b, R_a = -\frac{b}{l};$$

Бу ординаталар ёрдамида қурилган R_a нинг таъсир чизиғи 2.2- расм, а, да ифодаланган. R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам шу тарзда чизилади (2.2, в- расм).

Демак, консолли балка таянч реакцияларининг таъсир чизиклари оддий балка таянч реакцияларининг таъсир чизиғига асосланган бўлиб, асосий тўғри чизик консол учигача давом эттирилар экан.

Оддий ва консол балкаларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиклари

Аввало эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизиклари оддий балка учун қуриб олинади, кейин консолга давом эттирилади. Одатда, M ва Q нинг таъсир чизиғи бирор кесим учун қурилади. К кесимдаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизигини кўрайлик. Кесимгача бўлган масофалар, 2,3, а- расмда ифодаланган.



2.3- расм

Таъсир чизигини куришда мусбат ишорали ординаталар ўқдан юкорига, манфий ординаталар эса ўқдан пастга жойлаштирилади.

Бирлик куч K кесимидан ўнгга ҳаракатланса, y ҳолда чап қисм учун мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_k = R_a \cdot a = \frac{l-x}{l} \cdot a, \quad (2.3)$$

Демак, эғувчи моментнинг таъсир чизиги R_a реакцияси га боғлиқ экан, яъни R_a нинг ординаталарини a га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиги келиб чиқар экан.

Таъсир чизигини куриш учун A таянч йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр ҳолатда a масофаси жойлаштирилади, топилган нукта ўнг таянч остидаги нукта билан туташтирилади ва шу тўғри чизикқа K кесим проекцияланади. Бу ерда kb масофа эғувчи момент таъсир чизигининг ўнг чизиги дейилади (2.3, в-расм).

Агар бирлик куч K кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, y ҳолда кесимнинг ўнг қисми учун мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$M_k = R_b \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b \quad (2.4)$$

Бу ерда ҳам эғувчи моментнинг таъсир чизиги таянч реакцияси R_b га боғлиқдир, яъни R_b нинг ординаталарини « b » га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиги келиб чиқади.

Ҳосил бўлган қийматлар бўйича M_k нинг таъсир чизигини қурамиз (2.3-расм). Бунинг учун R_b таянч реакцияси йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр « b » масофа ўлчаб қўйилади, ҳосил бўлган нукта b чап таянч билан туташтирилади ва шу тўғри чизикқа K кесим проекцияланади. Ҳосил бўлган ak узунлик, эғувчи момент таъсир чизигининг чап чизиги дейилади.

Ҳар икки ўнг ва чап тўғри чизиклар K кесим остида кесишади, чунки $x=a$ бўлганда, $M_k^{\text{чан}} = M_k^{\text{ўнг}}$ бўлади.

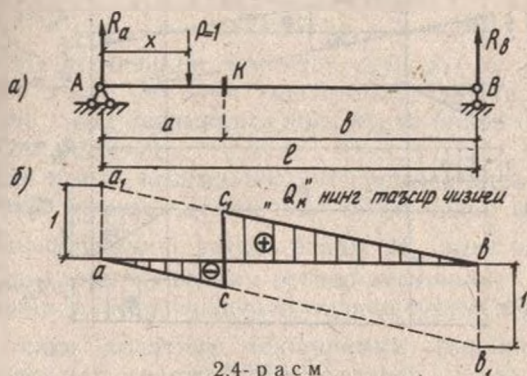
Шундай қилиб, akb синик чизиги K кесимидаги эғувчи моментнинг таъсир чизиги бўлади.

Эғувчи момент таъсир чизигининг ординаталари узунлик ўлчамида, яъни m (см) да ўлчанади. Эғувчи момент таъсир чизигининг ташқи кўриниши эғувчи момент эпюраси билан маълум ўхшашликка эга, лекин шунга карамай булар орасида кескин фарк бор. Эғувчи момент

эпюрасидан фойдаланиб, ташки кучлар таъсирида истаган кесимда ҳосил бўлган эгувчи моментни топа оламиз. Эгувчи моментнинг таъсир чизиғи орқали эса маълум бир кесимдаги эгувчи моментнинг қийматини топа оламиз, ҳолос.

Энди кўндаланг кучларнинг таъсир чизиғини қуришга ўтамиз.

Балканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик куч ($P=1$) нинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз (2.4. а-расм).



2.4-расм

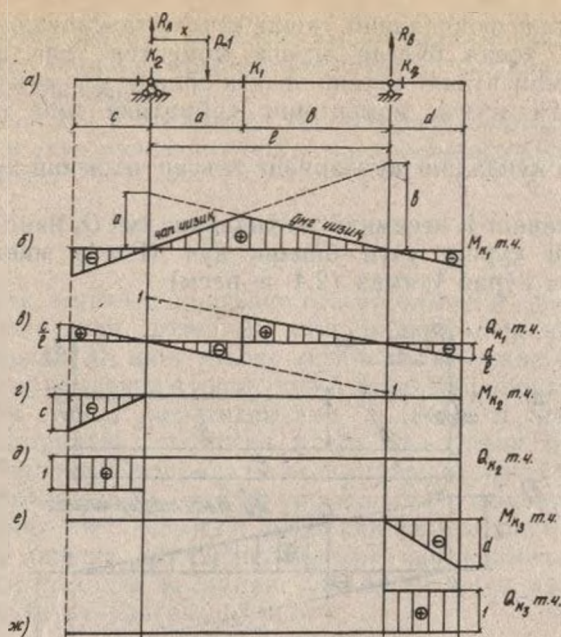
Биринчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг чап қисмида ҳаракатланади, деб фараз этайлик, у ҳолда ўнг қисм мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum Y = 0, \quad Q_k^{\text{чап}} = -R_b = -\frac{x}{l}. \quad (2.5)$$

Иккинчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланмокда, деб қабул қилинади, у ҳолда чап қисм учун тузилган мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q_k^{\text{ўнг}} = R_a = \frac{l-x}{l}. \quad (2.6)$$

Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун чап таянч остига бирор масштабда мусбат бирлик ординатани жойлаштириб, уни ўнг таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз, сўнгра ўнг таянч остига манфий бирлик ординатани жойлаштириб, уни чап таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз.



2.5-расм

Шу тарзда бир-бирига параллел бўлган чап ва ўнг тўғри чизикларга эга бўлдиқ. Чап тўғри чизик чап таянчдан К кесимгача, ўнг тўғри чизик эса К кесимидан ўнг таянчгача бўлган ораликларда Q_k нинг ўзгаришини ифодалайди (2.4- расм, б).

Штрихланган юза Q_k нинг таъсири чизиги деб аталади.

Кўндаланг кучнинг таъсир чизиклари таянч реакцияларининг таъсир чизиклари каби ўлчамсиз бўлади.

Консол балканинг К кесими учун ички кучлар (M_k ва Q_k нинг) таъсир чизиклари қурилиши талаб қилинса, у ҳолда иш оддий балкадагига ўхшаш амалга оширилади. Бунинг учун балканинг таянчи оралиғига M_k ва Q_k нинг таъсир чизиги қурилади, сўнгра чап тўғри чизик чап консол учигача, ўнг тўғри чизик эса ўнг консол учигача давом эттирилади (2.5- расм, а, б).

Агар кесим балканинг консол қисмида берилса, эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизикларини кўриб ўтамиз.

K_2 кесими балканинг чап консолида жойлашган бўлсин (2.5- расм, а). M_{k_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун бирлик юкнинг икки ҳолатини қараб чиқамиз.

1. Бирлик куч ($P=1$) кесимнинг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда

$$M_{k_2}^{\text{чап}} = P(c - x_1) = -(c - x_1),$$

$$x_1 = 0, M_{k_2}^{\text{чап}} = -c,$$

$$x_1 = c, M_{k_2}^{\text{чап}} = 0 \text{ бўлади.}$$

Чап тўғри чизикни ўтказиш учун $x_1 = 0$ нуктасига c ординатасини маълум масштабда жойлаштирамиз, сўнгра уни $x_1 = c$ кесимидаги ноль нукта билан бирлаштирамиз (2.5- расм, г).

Бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, M_{k_2} ўнг = 0 бўлади. Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балка ўқининг устида ётади. M_{k_2} нинг чап ва ўнг тўғри чизиклари K_2 кесими остида кесишади.

Q_{k_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун ҳам бирлик юкнинг икки ҳолатини текширамиз. Бирлик куч K_2 кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда консол қисмининг мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$Q_{k_2}^{\text{чап}} = -P = -1,$$

Q_{k_2} нинг чап тўғри чизиги консол учидан балканинг абсцисса ўқига параллел бўлади (2.5- расм, д).

Қўзғалувчан бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, у ҳолда чап қисмининг мувозанат тенгламаси $Q_{k_2}^{\text{ўнг}} = 0$ бўлади.

Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балканинг ўқи устида ётади (2.5- расм, д). Балканинг чап консол қисмида жойлашган K_3 кесими учун M_{k_3} ва Q_{k_3} ларнинг таъсир чизиклари юқорида баён этилган тартибда амалга оширилади (2.5- расм, е).

2.3. ЗҰРИҚИШЛАР ҚИЯМАТИНИ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ ЁРДАМИДА АНИҚЛАШ

Шу бобнинг бошланғич қисмида таъсир чизикларини қуриш тартиби билан танишиб ўтдик. Энди шу таъсир чизиклари ёрдамида зўриқишларнинг (яъни эгувчи момент, кўндаланг куч ва таянч реакцияларининг) қиймати-ни аниқлаш масаласига тўхталамиз.

Қўзғалмас юкларнинг иншоотга йиғиқ, ёйиқ ва жуфт куч тарикасида қўйилиши бизга маълум. Кучларнинг ҳар қайси турини алоҳида равишда кўриб чиқамиз.

Иншоотга йиғиқ кучлар тизими қўйилган ҳол

Балкага P_1 кучи таъсир этади, дейлик. Бу ҳолда исталган зўриқиш S нинг қиймати мазкур куч билан шу куч йўналишида таъсир чизигидан олинган ординатанинг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни зўриқишнинг қиймати $P_1 \cdot y_1$ бўлади.

Агар иншоотга кучлар тизими қўйилган бўлса (2.6- расм, а) кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасига кўра тўлиқ зўриқишнинг қиймати қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

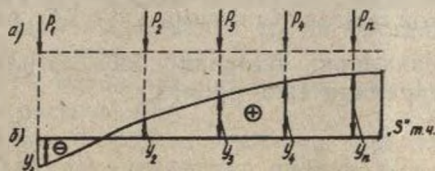
$$S = -P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4 + \dots + P_n \cdot y_n,$$

$$\text{ёки } S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i. \quad (2.7)$$

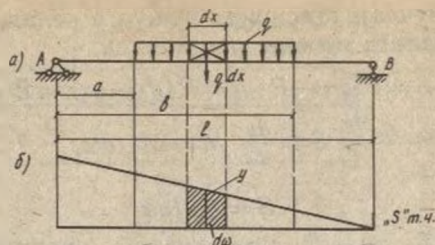
Бу ерда y_i — таъсир чизигида P_i куч йўналишидаги ордината.

Иншоотга ёйиқ юк қўйилган ҳол

Иншоотга қўйилган ёйиқ юкдан узунлиги dx бўлган кичкина бўлакча ажратамиз ва бунга мос келган ёйиқ



2.6- расм



2.7- расм

юкни элементар йиғик куч $q(x)dx$ оркали ифодалаймиз (2.7- расм). Элементар кучдан ҳосил бўлган элементар зўриқиш (2.7) формулага асосан қуйидагича аникланади:

$$dx = q \cdot dx \cdot dy. \quad (a)$$

Зўриқишнинг тўлиқ қийматини аниқлаш учун (a) тенгликни интеграллаймиз

$$S = \int_a^b q \cdot dx \cdot dy = q \cdot \omega. \quad (б)$$

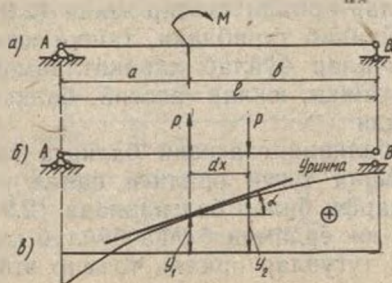
Бу ерда q — ёйик юк интенсивлиги;

ω — таъсир чизигида ёйик юк қўйилган ораликка мос келувчи юза

Иншоотга жуфт кучлар қўйилган ҳол

Моментдан ҳосил бўлган зўриқишни аниқлаш учун момент икки жуфт йиғик кучларга ажратилади (2.8- расм).

$$M = P \cdot dx, \text{ бундан } P = \frac{M}{dx}.$$



2.8- расм

Йиғик кучлар таъсирида вужудга келадиган зўриқиш (2.7) формулага асосан аниқланади:

$$S = P \cdot y_2 - P \cdot y_1 = P(y_2 - y_1) = P \cdot dy,$$

$$S = \frac{dy}{dx} \cdot M = M \cdot tq\alpha,$$

$$S = M \cdot tq\alpha.$$

Бу ерда α — момент кўйилган нуктада таъсир чизигига ўтказилган уринма билан абсцисса ўқи орасидаги бурчак.

Агар иншоотга бир йўла йиғик куч, ёйик куч ва жуфт кучлар кўйилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган зўриқишлар миқдори таъсир чизиги ёрдамида умумий ҳолда қуйидагича аниқланади:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n q_i \omega_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot tq\alpha_i \quad (2.8)$$

Бу формуладан фойдаланишда қуйидаги ишора қоида-сига амал қилинади:

1. Юклар юқоридан пастга йўналган бўлса, улар мусбат деб қабул қилинади.

2. Момент соат стрелкаси бўйича йўналса, мусбат олинади.

3. Таъсир чизигидан олинган ордината y_i ва юза ω_i ўз ишораси бўйича олинади.

4. Агар α бурчак соат стрелкасига тескари йўналишда ортиб борса, мусбат бўлади.

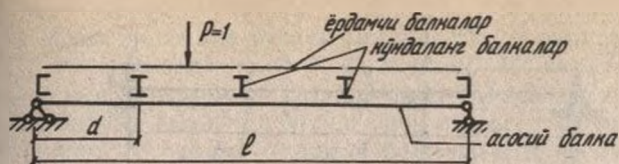
2.4. ЮК ТУГУНЛАР ОРҚАЛИ УЗАТИЛГАНДА ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИНИ ҚУРИШ

Бинокорликда шундай иншоотлар учрайдики, ташки юклар асосий балкага бевосита қўйилмай, балки бошқа ёрдамчи балкалар орқали таъсир этади (2.9- расм).

Шаклдан кўриниб турибдики, ташки юклар ёрдамчи бўйлама балкачалар бўйлаб ҳаракатланмоқда. Бундай системаларда ташки юклар асосий балкага тугунлар орқали узатилади.

Қўндаланг балканинг асосий балкага таянган жойи тугун, икки қўшни тугун оралиғи панел узунлиги деб аталади ва d ҳарфи билан белгиланади (2.9- расм).

Энди ташки юк ёрдамчи балка бўйлаб ҳаракатланиб, асосий балкага тугунлар орқали таъсир этишини кўриб ўтамиз (2.10- расм).



2.9- расм

Харакатланувчи бирлик куч 2 — ва 3 — тугунлар орасида жойлашган дейлик: агар куч 2 — таянчдан x масофада ва 3 — таянчдан $d-x$ масофада жойлашган бўлса, у ҳолда унинг иккинчи ва учинчи тугунлардаги ташкил этувчи қийматлари қуйидаги формула билан ифодаланади (2.10- расм):

$$P_2 = 1 \cdot \frac{d-x}{d} \text{ ва } P_3 = 1 \cdot \frac{x}{d}.$$

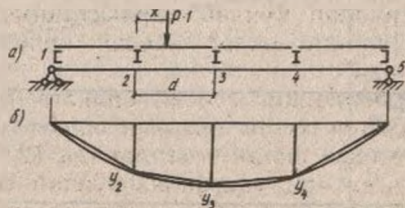
2.10- расм, б да ифодаланган эгрилик бирлик кучнинг асосий балка бўйлаб ҳаракатланишидан ҳосил бўлган таъсир чизиги десак, у ҳолда

$$S = P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 = \frac{d-x}{d} \cdot y_2 + \frac{x}{d} \cdot y_3 \quad (2.9)$$

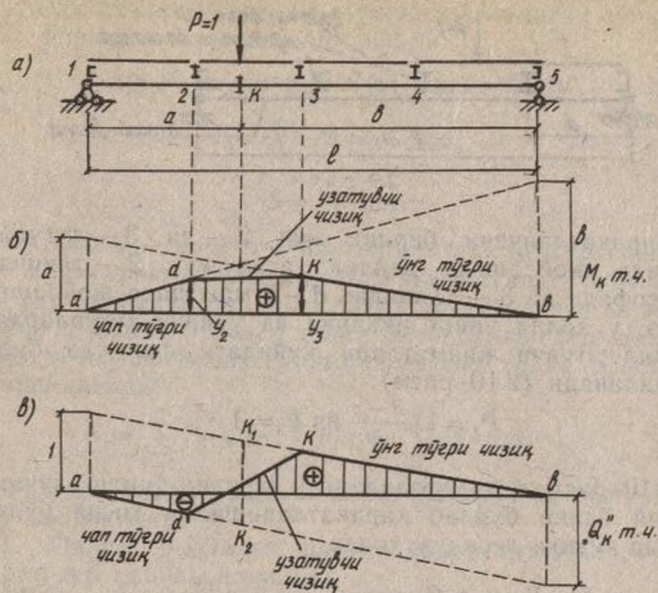
бўлади.

Зўриқиш S нинг қийматини аниқлаш учун тузилган бу тенглик тўғри чизик тенгламасини ифодалайди, шу сабабли y_2 билан y_3 ўзаро тўғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.10- расм, б).

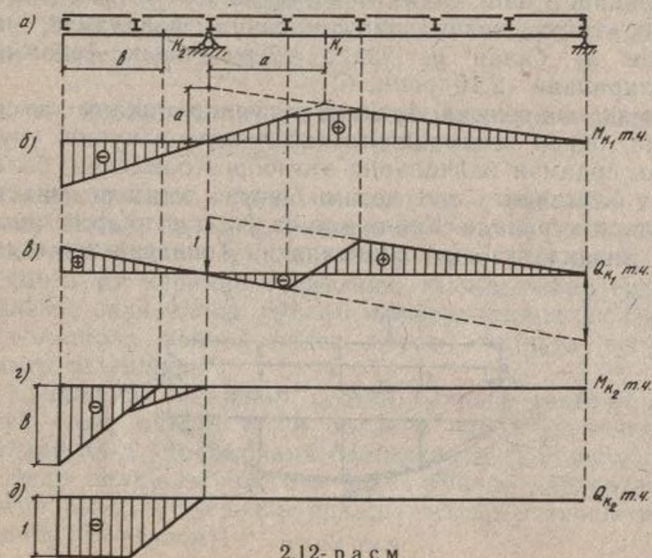
Демак, юк асосий балкага тугунлар оркали таъсир этганда, бирор кесимнинг таъсир чизигини қуриш учун, аввало, ёрдамчи балкаларни эътиборга олмасдан, балки оддий балканинг шу кесими учун тегишли таъсир чизиклари қурилади. Кейин чап ва ўнг тугунлар тегишли тўғри чизикларга проекцияланади. Топилган нукталар



2.10- расм



2.11-расм



2.12-расм

туғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.11- расм, а, б, в).

Бу расмда akb асосий балканинг К кесими учун курилган эгувчи момент таъсир чизиги; $adkb$ юк тугунлар оркали таъсир этган ҳол учун эгувчи момент таъсир чизиги (2.11- расм, б); ak_2k_1b — оддий балканинг К кесими учун курилган кирқувчи кучнинг таъсир чизиги (2.11- расм, в); $adkb$ — юк асосий балкага тугунлар оркали таъсир этганда ҳосил бўлган кирқувчи кучнинг таъсир чизиги (2.11- расм, в).

2.12- расмда консолли балкага ташқи юк тугунлар оркали таъсир этган ҳол учун М ва Q нинг таъсир чизиклари тасвирланган. 2.12- расм, а да берилган балка акс этган; б ва в да K_1 кесим учун, г ва д да эса K_2 кесим учун М ва Q нинг таъсир чизиклари чизилган.

Шундай қилиб, юк асосий балкага тугунлар оркали узатилганда, зўриқишларнинг таъсир чизиклари қуйидаги тартибда курилади:

1. Зўриқишларнинг таъсир чизиги, аввало, юк тугунлар оркали узатилишини эътиборга олмаган ҳолда асосий балка учун курилади.

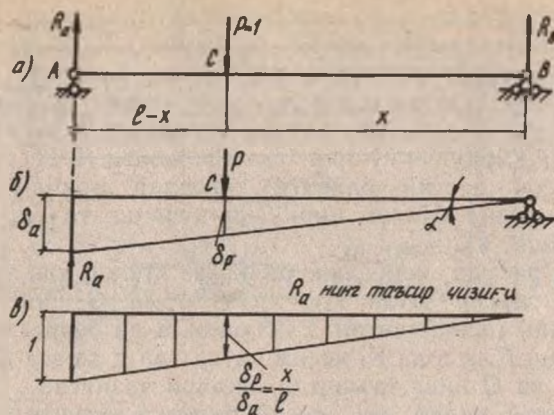
2. Кесимнинг чап ва унг қисмида жойлашган қўшни тугунлар тегишли чизикларга проекцияланади ва нукталар ўзаро туташтирилади.

Ҳосил бўлган график юклар асосий балкага тугунлар оркали таъсир этган ҳол учун курилган таъсир чизиги бўлади.

2.5. ТАЪСИР ЧИЗИКЛАРИ ҚУРИШНИНГ КИНЕМАТИК УСУЛИ

Таъсир чизикларини кинематик усулда қуришда кўчишлар эпюрасидан фойдаланилади. Бунинг учун асосий системада зўриқиши изланаётган боғланиш ташлаб юборилади ҳамда мумкин бўлган (жоиз) кўчишлар қондасидан фойдаланилади. Бу қондага қўра, агар система мувозанат ҳолатда бўлса, ҳар қандай кичик жоиз кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарадиган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Мисол тариқасида оддий балканинг R_a реакцияси учун кинематик усулда таъсир чизиги қурамиз (2.13- расм, а). А таянчини ташлаб юбориб, ўрнига R_a реакция кучини қўямиз. АВ балка чексиз кичик бурчак α га кўчди дейлик. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли балка ўқи кўчишларини вертикал деб қабул қилса бўлади. Р кучи қўйилган



2.13- расм

нуктанинг кўчишини δ_p , R_a кучи қўйилган нуктанинг кўчишини δ_a деб белгилаймиз. Жоиз кўчишлар қондасига мувофиқ балкага таъсир этувчи кучлар бажарган иш бўлади. Куч йўналиши билан кўчиш йўналиши қарама-қарши бўлганлиги сабабли R_a кучи бажарган ишнинг ишораси манфий олинган.

$$P \cdot \delta_p - R_a \cdot \delta_a = 0.$$

$P=1$ эканлигини эътиборга олсак, (а) дан

$$R_a = 1 \cdot \frac{\delta_p}{\delta_a} \quad (б)$$

келиб чиқади. Бирлик куч кўзгалувчан бўлганлиги учун δ_p кўчиш ҳам ўзгарувчан бўлади. δ_a эса ўзгармас микдордир.

Бинобарин, R_a реакциясининг таъсир чизиги δ_p кўчишнинг эпюраси тариқасида ҳосил қилиниши мумкин. Бунда таъсир чизигининг ординаталари кўчиш ординаталаридан δ_a маротаба кичик бўлади (2.13- расм, в).

Кинематик усулда қурилган таъсир чизигининг статик усулдаги шакли билан бир хил эканлиги қуйидаги ифодадан кўриниб турибди (2.13- расм, б):

$$\delta_p = x \cdot t q \alpha; \quad \delta_a = l \cdot t q \alpha.$$

Буларни (б) га қўйсак, $R_a = \frac{x}{l}$ келиб чиқади.

Навбатдаги мисолда (2.14- расм, а) балканинг К кесимидаги эгувчи момент таъсир чизигини кинематик усулда кураимиз. Балканинг К кесимида шарнир киритамиз, натижада балканинг битта боғланиши йўқолади. Йўқолган боғланишни момент M_k билан алмаштирамиз (2.14- расм, б).

К шарнири чексиз кичик масофа δ_k га кўчди дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида M_k ва P кучлари қуйидаги ишни бажаради:

$$P \cdot \delta_p - M_k \alpha - M_k \cdot \beta = 0. \quad (\text{в})$$

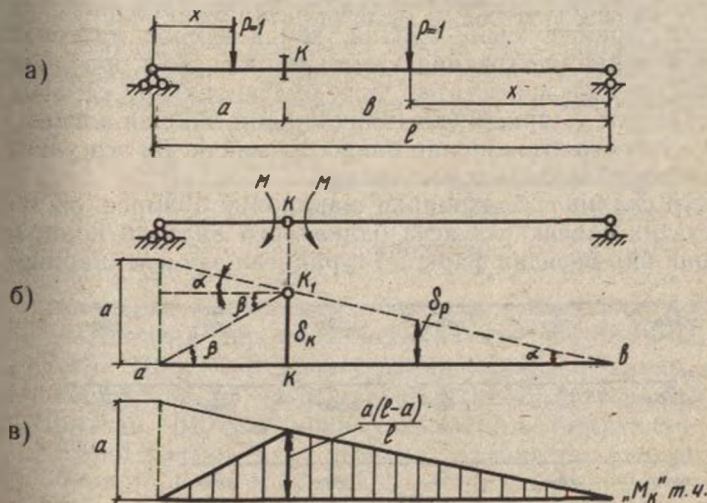
M_k нинг йўналиши бурилиш бурчаклари α ва β нинг йўналишига қарама-қарши бўлганлиги сабабли ишораси манфий олинди. (в) ифодасидан

$$M_k = \frac{P \cdot \delta_p}{\alpha + \beta} = \frac{l \cdot \delta_p}{\delta_{xx}} \quad (\text{г})$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\delta_p = \frac{\delta_k}{l-a} \cdot x$$

$$\delta_{xx} = \frac{\delta_k}{l-a} + \frac{\delta_k}{a} \quad (\text{д})$$



2.14- расм

(г) ифодасидан кўринадики, M_k нинг таъсир чизиги ҳам вертикал кўчишлар δ_r эпюраси каби бўлиб, кийматига кўра ундан δ_{x_x} мартаба кам бўлар экан (2.14- расм, в).

(д) ифодани (г) га қўйсак,

$$M_k = \frac{ax}{l}$$

келиб чиқади. Бу эса статик усулдаги ўнг тўғри чизикнинг тенгламасидир.

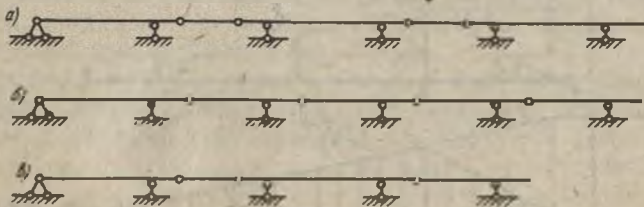
3- боб

КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР

3.1. УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Кўп ораликли статик аниқ балкалар бир ораликли консолли балкаларни шарнирлар воситасида бириктириш йўли билан ҳосил қилинади (3.1- расм). Кўп ораликли шарнирли балкалар ёндош ораликларни ёпишда қўлланилади. Бундай ораликларни ёпишда кетма-кет жойлашган бир ораликли балкалардан фойдаланса бўлмайдами, деган савол туғилиши табиий. Тўғри, назарий ва амалий жиҳатдан фойдаланса бўлади. Аммо иктисодий жиҳатдан мақсадга мувофиқ эмас. Чунки бир хил юк таъсирида бир ораликли балкаларда кўп ораликли балкаларга нисбатан кўпроқ зўриқиш ҳосил бўлади, демак кўпроқ материал сарф бўлади, конструкция вазминлашади. Кўп ораликли шарнирли балкалар статик аниқ бўлганликлари сабабли ҳароратнинг ўзгариши ёки таянчларнинг чўкиши натижа-сида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлмайди. Бу эса унинг афзаллик томонлари ҳисобланади.

Кўп ораликли балкаларда шарнирлар бўлмаса, система статик ноаниқ узлуксиз балкаларга айланиб қолади. Уларни бир-биридан фарқлаб турадиган элемент шарнир-



3.1- расм

дир. Узлуксиз балкалар хакида дарсликнинг 8- бобида муфассал маълумотлар берганмиз. Бу бобда эса асосан кўп ораликли шарнирли балкалар билан танишиб чиқамиз. Шарнирли балкани узлуксиз балкага киёслаб, уни узлукли балка деб атаса ҳам бўлади. Сабаби шуки, узлуксиз балкалар бутун яхлит конструкциядан иборат, шарнирли балкалар шарнир қўйилган ерда узилади. Шарнирнинг чизма конструкцияси 3.2- расмда берилган.



3.2- расм

Кўп ораликли балкани статик аниқ системага айлантириб берадиган элемент ҳам шарнирдир. Демак, шарнирлар сонини шундай аниқлаш керакки, ҳосил бўлган система статик аниқ, геометрик ўзгармас бўлсин. Қуйидаги формула ёрдамида аниқланган шарнирлар сони юқоридаги талабларни қондиради:

$$Ш = C_1 - 3 \quad (3.1)$$

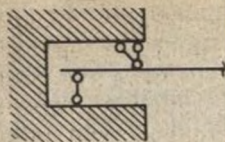
Бу ерда C_1 — таянч стерженлари сони;
3 — статика тенгламалари сони.

Шарнирлар сонини ушбу формула билан аниқланиши зарурий, аммо етарли шарт эмас. Статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун шарнирларни балка бўйлаб тўғри жойлаштириш талаб этилади. 3.3- расмда тасвирланган система шарнирларнинг нотўғри жойлашти-



3.3- расм

рилишига мисолдир. Бу балкадаги шарнирлар сони талаб даражасидадир, яъни система геометрик ўзгармас бўлиши учун $Ш = 6 - 3 = 3$ дона шарнир қўйилиши талаб этилади. Бирок ана шу учта шарнир балкада нотўғри жойлаштирилган. Шунинг учун у геометрик ўзгарувчан система бўлиб қолган. Агар иккинчи ораликдаги икки шарнирдан бири биринчи ораликка кўчирилса, система геометрик ўзгармас ҳолга келади. Шунинг ҳам эслатиб ўтиш керакки, стерженлар сонини аниқлашда шарнирсиз кўзголмас



3.4- расм

таянчининг стерженлари сони $C_T=3$ деб қабул қилинган (3.4- расм).

Битта оралikka учта шарнир жойлаштириш ҳам нотўғридир, чунки бунда оний ўзгарувчан система ҳосил бўлади.

Шарнирларни тўғри жойлаштиришнинг уч хил усули бор:

а) шарнирларни иккинчи ораликдан бошлаб жуфт жойлаштириш (3.1- расм, а);

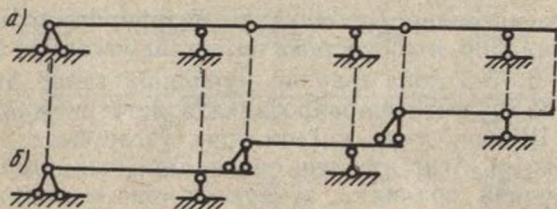
б) шарнирларни (иккинчи ораликдан бошлаб) якка тартибда жойлаштириш (3.1- расм, б);

в) юқоридаги икки усулга асосланган аралаш усул (3.1- расм, в), яъни шарнирларни жуфт ва якка тартибда жойлаштириш.

Жуфт шарнирлар иккинчи ораликдан бошлаб оралик оша кўйилади. Якка шарнирлар бирорта ораликдан бошқа ҳар бир оралikka биттадан кўйиб чиқилади. Жуфт шарнирнинг икки ёни шарнирсиз оралик бўлиши лозим, акс ҳолда система геометрик ўзгарувчан бўлиб қолади.

Кўп оралikli балканинг геометрик ўзгармаслиги масаласини тўғри ҳал этиш системанинг ишлаши тўғрисида туларок тасаввурга эга бўлиш мақсадида каватлар тарҳи қурилади. Каватлар тарҳи балканинг алоҳида элементлари орасидаги боғланишни ўзида акс эттиради.

3.5- расмда тасвирланган балканинг геометрик ўзгармаслигини унинг каватлар тарҳи (3.5- расм, б) оркали таҳлил этайлик. Балкаларни туташтирувчи каватлар тарҳида шарнирлар шарнирли кўзғолмас таянчлар билан алмаштирилади. Каватлар тарҳидан кўп оралikli балка учта бир оралikli консолли балкаларнинг йиғиндисидан ташкил топганлиги намоён бўлади. Ҳар қайси оддий



3.5- расм

балка — геометрик ўзгармасдир. Геометрик ўзгармас оддий балкалар бир-бири билан шарнирлар ёрдамида уланган. Шарнирлар балкаларнинг горизонтал йўналишда қўзғалишига йўл бермайди. Балкаларнинг вертикал йўналишдаги қўзғолмаслиги таянч стерженлари орқали таъминланади. Шуларга асосланиб, берилган қўп оралик-ли балка геометрик ўзгармас система экан, деган хулосага келамиз.

Қаватлар тарҳи икки хил балкалардан ташкил топади: асосий ва иккинчи даражали балкалар.

Асосий балкалар ўзига қўйилган юклардан ташқари иккинчи даражали балкаларга қўйилган юкларни ҳам (тўлалигича ёки қисман) қабул қилади. Асосий балкаларга таяниб турувчи балкалар иккинчи даражали (осма) балкалар дейилади. Иккинчи даражали балка синса, асосий балканинг ишига путур етмайди. Асосий балка синса, осма балка ҳам қулаб тушади.

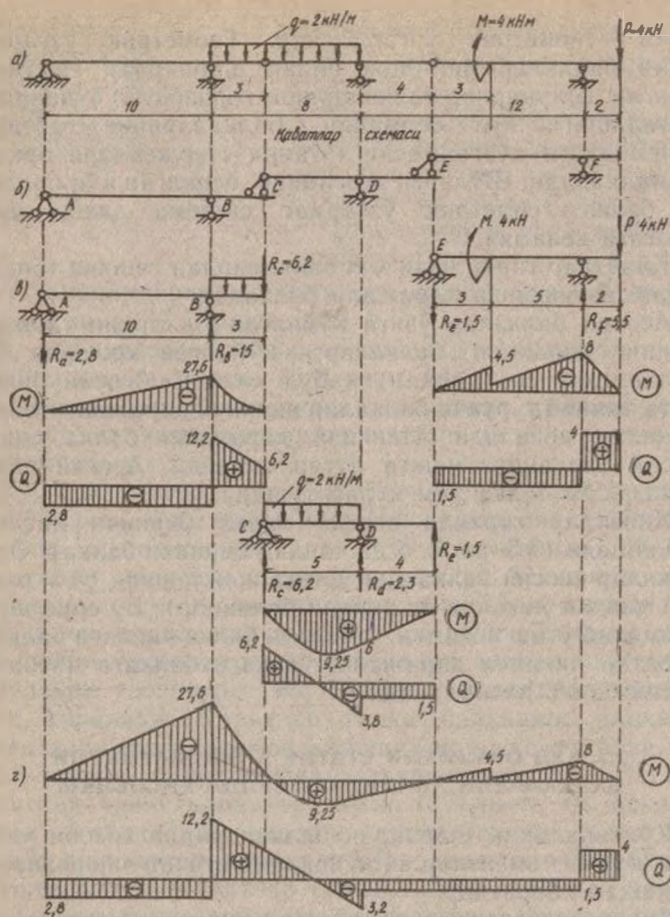
Қаватлар тарҳида асосий балка биринчи қаватда жойлашади (3.5- расм, б да чапдан биринчи балка). Осма балкалар асосий балканинг устига жойлашади (3.5- расм, б да чапдан иккинчи ва учинчи балкалар). Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, ўртадаги балка чапдаги балкага нисбатан иккинчи даражали, ўнгдаги балкага нисбатан асосий балка ҳисобланади.

3.2. ҚўП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ ШАРНИРЛИ БАЛКАЛАРНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Қўп ораликли шарнирли балкаларнинг ҳисоби уларнинг эгувчи моментлар ва қўндаланг кучлар эпюраларини қуришдан иборатдир.

Бизга материаллар қаршилиги курсидан эпюраларни қуришдан мақсад балканинг қўндаланг кесим ўлчамлари-ни аниқлашдан иборат эканлиги маълум. Эпюраларни қуриш ҳам материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида бажарилади.

Қўп ораликли балкаларнинг ҳисоби қаватлар тарҳини қуришдан бошланади. Мустақил равишда аввал иккинчи даражали (осма) балкалар, сўнгра асосий балка ҳисобланади. Осма балкалар бир нечта бўлса, ҳисоб энг устки қаватдаги балкадан бошланади. Бунинг сабаби шуки, устки қаватдаги юкнинг таъсири пастки қаватдаги балкаларга ҳам таъсир этади. Буни ҳисобга олиш учун устки балканинг таянч реакциясини пастки балкага



3.6- расм

тескари йўналишда қўйилади ва пастки балкани ҳисоблашда уни ташки кучлардан бири деб қаралади. Ҳисоб охирида алоҳида қурилган эпюралар бир ўқ устида жойлаштирилади.

Мисол. Кўп оралиқли статик аниқ балканинг M ва Q эпюраси қурилсин (3.6- расм, а).

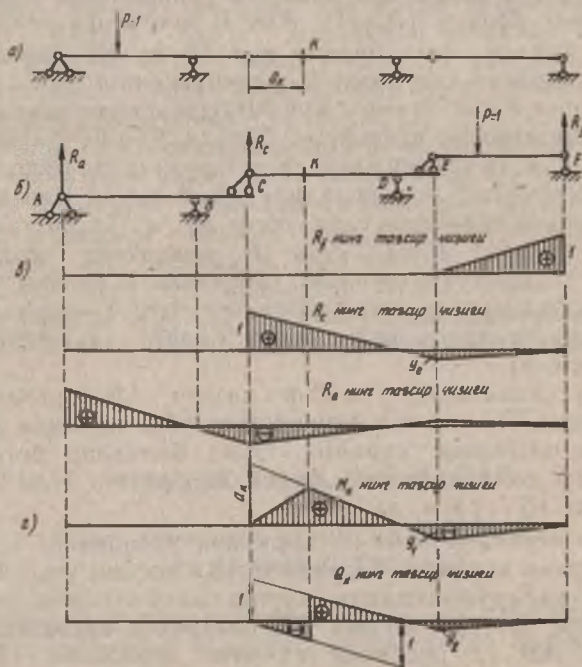
Ечиш. Берилган балканинг қаватлар тарҳини курамиз (3.6- расм, б) ва ҳисоблаш тартибини белгилаймиз.

Ҳисоб ишлари EF балкасидан бошланади. Уни асосий балкадан ажратиб олиб, мустақил равишда M ва

Q эпюралари курилади. Шундан сўнг СД балкаси ҳисобланади. ЕФ балкасига қўйилган юкларнинг СД балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади. Ўз навбатида СД ва ЕФ балкаларига қўйилган юкларнинг АВ балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади (3.6- расм, в). Иккинчи даражали балкалар ҳисоби тугагач, асосий балка АВ ҳисобланади. Ҳисоб охирида алоҳида ҳисобланган эпюралар умумий ўк устига жойлаштирилади (3.6- расм, г).

3.3. ҚУП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАРДА ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Қўп оралиқли балкаларнинг таъсир чизиқларини чизиш балканинг қаватлар тарҳини куришдан бошланади (3.7- расм, а, б). Таъсир чизиқларини чизишда балкага фақат ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ таъсир этади, деб фараз этилади. Графикни чизиш жараёнида доимий юклар



3.7- расм

таъсири эътиборга олинмаслигини эслатиб ўтамиз. Таъсир чизиклари чизиб бўлингандан кейин зўриқишларнинг кийматини аниқлаш жараёнида балкага қўйилган доимий юклардан фойдаланилади.

Осма балкаларда зўриқиш уларга куч қўйилган тақдирдагина пайдо бўлади. Асосий балкаларга қўйилган куч осма балкаларда зўриқишни уйғотмайди.

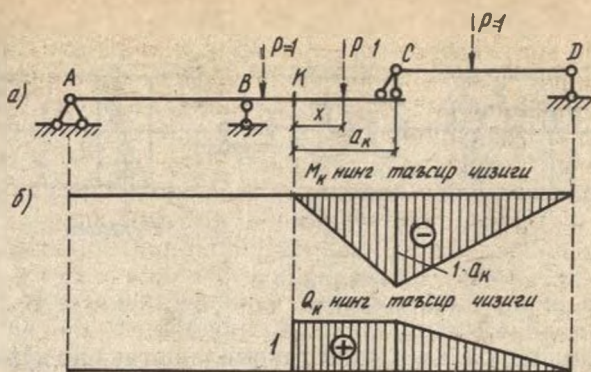
Асосий балкаларда шаронт бутунлай бошқача: осма балкаларга қўйилган кучлар асосий балкада ҳам зўриқиш уйғотади. Шу қоидадан келиб чиқиб, кўп ораликли балканинг таъсир чизикларини курамыз.

Осма балкага тегишли R_f таянч реакциясининг таъсир чизиги оддий балкаларникидан фарк қилмайди (3.7- расм, в).

R_c реакциясининг таъсир чизигини куришда СД консолли балкасининг ўзи берилган (унга туташган АВ ва ЕФ балкалари йўқ) деб фараз қиламиз ва шу балканинг ўзи учун таъсир чизиги курамыз. Ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ С нуктага келганда, R_c реакциянинг киймати бирга тенг бўлади ($R_c=1$). Куч Е нуктасига келганда, $R_c=Y_e$ бўлади. Энди бирлик куч АВ ва ЕФ балкалари бўйлаб ҳаракат қилганда, R_c реакциясининг қай тариқа ўзгаришини кўриб ўтамиз. Куч АВ балкасида юрганида R_c га таъсир этмайди, яъни $R_c=0$ бўлади. Куч ЕФ балкасида юрганида, R_c га таъсир этади. Куч Е нуктасида бўлганида, R_c нинг киймати Y_e га тенг эканлигини биламиз. Бирлик куч F таянчга яқинлашган сари унинг R_c га бўлган таъсири камая боради. $P=1$ кучи F нуктасига келганда, $R_c=0$ бўлади, чунки кучнинг таъсирини F таянчи тўлиқ ўзига қабул қилиб олади. Шунинг учун, Y_e ординатаси F таянчи остидаги ноль нукта билан туташтирилади (3.7- расм, в).

R_a реакциясининг таъсир чизиги АВ балкасидан бошланади. Таъсир чизигининг дастлабки қисмини оддий балкага чизгандек курамыз. Осма балкалар остидаги қисми эса юқоридаги каби мулоҳаза юритиш йўли билан курилади (3.7- расм, в).

Энди эғувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизикларини курамыз. Балканинг «К» қесими учун M_k ва Q_k нинг таъсир чизикларини куриш талаб этилади, дейлик (3.7- расм, а). «К» қесими СД балкасига қарашли. СД балкаси АВ га нисбатан иккинчи даражали, ЕФ га нисбатан эса асосий балка ҳисобланади. Бу шуни англатадики, $P=1$ кучи АВ балкаси бўйлаб ҳара-



3.8- расм

катланганда «К» кесимида M ҳам, Q ҳам ҳосил бўлмайди. Консолли СД балкаси учун таъсир чизиклари оддий балкадаги сингари курилади. Куч ЕF балкасида ҳаракатланганида, СД балкасининг «К» кесимидаги ички кучларга таъсир этади. Куч Е нуктасида турганида $Q_k = Y_2$, $M_k = Y_1$ бўлади. Куч F нуктасига етганида, $M_k = 0$; $Q_k = 0$ бўлади. Шунга кўра у ҳам, Y_2 ҳам ноль билан туташтирилди. Ҳосил бўлган график M_k ва Q_k нинг таъсир чизиклари деб аталади (3.7- расм, г).

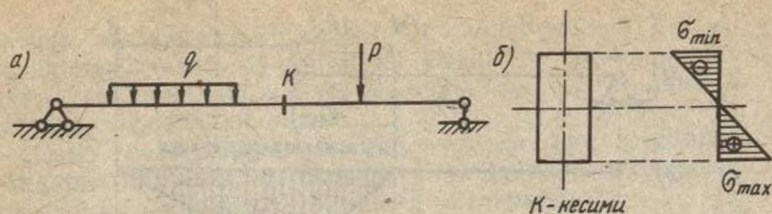
Баъзан «К» кесими балканинг консол қисмида берилиши мумкин (3.8- расм, а). У ҳолда M_k ва Q_k нинг таъсир чизиги кесимнинг консолда ётганлигини ҳисобга олган ҳолда курилади. Бирлик куч кесимдан чапда ҳаракатланса, «К» кесимида ҳеч қандай зўриқиш ҳосил бўлмайди. Куч КС оралиғида бўлса, $M_k = -1 \cdot x$ ва $Q_k = 1$ бўлади. Куч СД балкаси устида ҳаракатланса, M_k ва Q_k учбурчак конуни бўйича ўзгаради (3.8- расм, б).

4- боб

СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР

4.1. ФЕРМАЛАР ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Биқир тугунларни шарнирлар билан алмаштирганда, ўзининг геометрик ўзгармаслигини сақлаб қолувчи стер-
женли системалар ферма деб аталади.



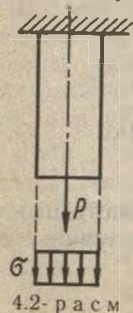
4.1-расм

Фермалар балкаларнинг такомиллашган бир кўриниши бўлиб, балкалар ўтайдиган вазифани бажаради: балкалар кичик ораликларни ёпишда қўлланса, фермалар катта ораликларни ёпишда қўлланилади.

Балкадан фермага ўтиш ғояси унинг ишлаш шароитини таҳлил қилиш оқибатида пайдо бўлган. Маълумки, балка эгилишга ишлайди (4.1-расм, а). Балканинг ихтиёрий кесими учун қурилган нормал кучланишлар эпюраси (4.1-расм, б) дан кўриниб турибдики, балканинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилмайди. Нормал кучланиш нейтрал ўқда ноль, ўқдан узоклашган сари унинг қиймати ортиб боради. Энг кўп ишни ўқдан узокда жойлашган толалар бажаради, нейтрал қатлам ва унинг атрофи деярли ишламайди. Хаттоки прокат профиллар (кўштавр, швеллер ва бурчакликлар) да ҳам ашёларнинг атиги 60–70 фоизидан фойдаланилади, холос.

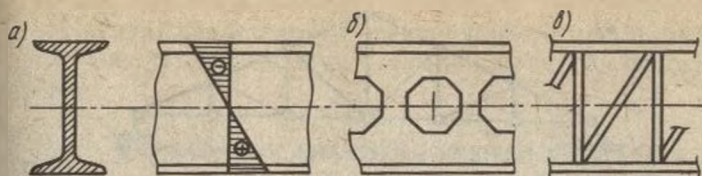
Агар элемент сиқилиш ёки чўзилишга ишласа, у ҳолда унинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилади (4.2-расм). Нормал кучланишлар эпюрасидан кўринадики, элементнинг ҳар бир нуктаси ишлайди.

Ҳар иккала эпюрани солиштиришдан қуйидаги мулоҳаза пайдо бўлади. Шундай конструкция яратиш керакки, унда қўлланилган ашёдан тўлиқ фойдаланилсин, агар имкон бўлса, элемент фақат сиқилиш ва чўзилишга ишласин.



4.2-расм

Бу вазифа қисқа вақт ичида босқичма-босқич амалга оширилди. Дастлаб тўғри тўртбурчакли яхлит кесим ўрнига кўштавр пайдо бўлди (4.3-расм, а), кейинчалик кўштавр деворлари ўйиклар ҳисобига енгиллаштирилади (4.3-расм, б) ва ниҳоят, бу изланишларнинг мантикий давоми



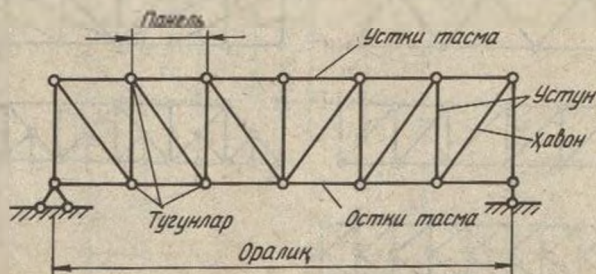
4.3-расм

сифатида ферма конструкцияси яратилди (4.3-расм, в). Оддий статик аник ферманинг ҳисоблаш тарҳи 4.4-расмда тасвирланган.

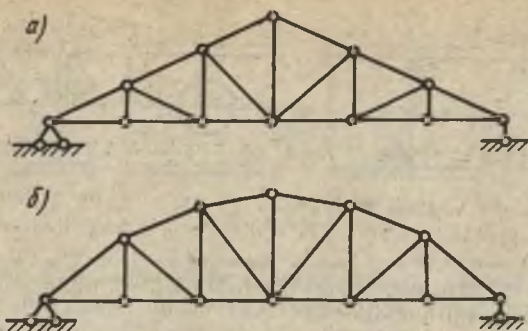
Одатда ташки кучлар ферма тугунларига қўйилади. Ферма стерженлари ташки кучлар таъсирида асосан сикилиш ва чўзилишга ишлайди. Бу ҳол ферма материалидан самарали фойдаланиш имконини беради, чунки ҳар бир стержень кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар эпюраси тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлади.

Ферманинг барча стерженлари ёки уларнинг ўқлари бир текисликда жойлашса, текис ёки ясси фермалар деб, бир текисликда жойлашмаса фазовий фермалар деб аталади. Фазовий фермалар кўпинча алоҳида ясси фермаларга ажратилган ҳолда ҳисобланади.

Икки таянч орасидаги масофа оралик (пролёт) деб аталади; ферманинг ташқи чегарасида жойлашган стерженлар тасмалар деб аталиб, улар орасида жойлашган стерженлар ферма панжараларини ташкил этади. Панжаранинг тик элементлари устун, оғма элементлари — ҳавон деб юритилади. Ферма тугунлари орасидаги горизонтал масофа панел дейилади.



4.4-расм



4.5-расм

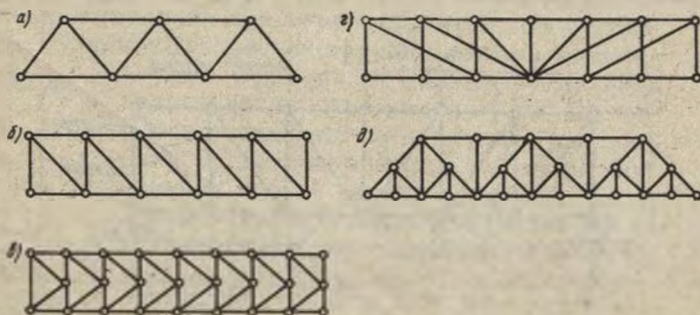
Фермалар ташки кўриниши, панжара шакли, таянч хиллари ва ўтайдиган вазифасига қараб бир неча турга бўлинади:

а) ферма ташки контурининг шаклига кўра параллел тасмали фермалар (4.4-расм), учбурчак шаклли фермалар (4.5-расм, а), полигонал тасмали фермалар (4.5-расм, б);

б) панжарасининг тузилишига кўра учбурчак панжарали фермалар (4.6-расм, а), ҳавон панжарали фермалар (4.6-расм, б), ярим ҳавон панжарали фермалар (4.6-расм, в), қўшҳавон панжарали фермалар (4.6-расм, г), қўш панжарали (шпренгелли) фермалар (4.6-расм, д);

в) таянч хилларига қараб балкасимон ёки консол фермалар;

г) ўтайдиган вазифасига кўра том, кўприк ва кран фермалари;



4.6-расм

д) кўприк фермаларида юкнинг ҳаракатланиш сатҳига қараб юк устки ёки пастки тасмадан юрадиган фермалар бўлади.

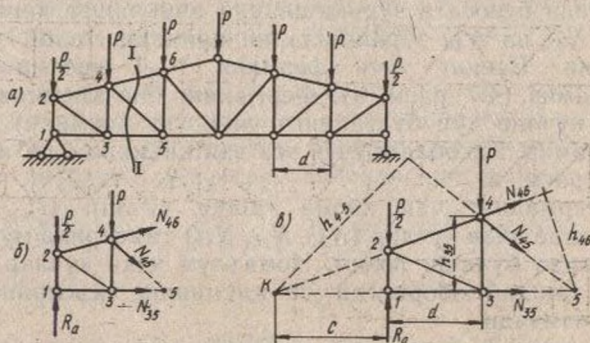
4.2. ФЕРМАЛАРНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Статик аниқ ясси фермаларни ҳисоблаш деганда ҳар бир стержендаги зўриқишларни аниқлаш тушунилади. Зўриқишларни аниқлашнинг аналитик, график ва таъсир чизиклари усули мавжуд. Мазкур параграфда аналитик усул билан танишиб чиқамиз.

Аналитик усулнинг ўзи бир-бирини тўлдирувчи учта усулга бўлинади: момент нуктаси ёки Риттер усули, проекциялаш усули ҳамда тугунларни кесиб олиш усули. Усулларнинг ичида энг қулайи Риттер усулидир, бироқ ундан ҳамма вақт ҳам фойдалана олмаймиз. Момент нуктаси усулидан фойдаланиш имкон бўлмаган ҳолларда проекциялаш ёки тугунлардан кесиб олиш усулларидан фойдаланилади. Ҳар учала усул билан бирма-бир танишиб ўтамиз.

Момент нуктаси усули. Ферманинг ҳисоби таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади (бошқа усулларда ҳам худди шундай қилинади). Ферма реакциялари оддий балка реакциялари сингари аниқланади, яхлит ферма учун статиканинг мувозанат тенгламалари тузилади ва шу тенгламалардан таянч реакциялари аниқланади ҳамда текширилади.

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлаш учун ферма хаёлан қиркилади (4.7- расм, а), ҳисоблаш учун қиркилган ферманинг бир қисми ажратиб олинади (4.7- расм, б)



4.7- расм

ва ажратилган бўлак учун мувозанат тенгламаси тузилади. Мувозанат тенгламаси таркибига ташки кучлар ва таянч реакцияларидан ташқари номаълум зўриқишлар киради.

Момент нуктаси усулида кесим шундай ўтказиладики, бунда кесимга кирган стерженларнинг сони учтадан ортмаслиги ва учала стержень бир нуктада кесишмаслиги керак. Кесимга кирган стерженлар жуфт-жуфт бўлиб, бир нуктада кесишади (4.7-расм, б). Ҳар бир стержень ўзининг момент нуктасига эга. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стерженнинг кесишув нуктаси момент нуктаси деб аталади. Мувозанат тенгламалари ана шу момент нукталарига нисбатан тузилади. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, тузиладиган тенгламалар ҳар сафар бир номаълумли бўлади. Бир номаълумли оддий тенгламадан изланаётган зўриқишнинг киймати аникланади.

Тенглама тузаётганда, номаълум зўриқишларнинг йўналишини ферманинг кесилган томонига йўналтирилади, яъни стержень чўзилувчан деб қаралади. Ҳисоб натижасида зўриқиш мусбат ишорада чикса, стерженнинг чўзилишга ишлаши тасдиқланади. Манфий чикса — стержень сикилувчан бўлади.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар аслида ички кучлар бўлганлиги сабабли уларни N ҳарфи билан белгилаймиз ва қайси тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билиш мақсадида остига икки рақамдан иборат белги қўямиз. Масалан, N_{46} — тўртинчи ва олтинчи тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билдиради.

Энди бевосита зўриқишларни аниқлашга киришамиз. N_{35} , N_{45} ва N_{46} зўриқишларни аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бунинг учун фермани 1—1 кесими бўйича қирқамиз (4.7-расм, а). Ферманинг бир қисмини (масалан, кучлар куп бўлганлиги учун ўнг қисмини) ташлаб юборамиз. Ҳисоблаш учун эса чап қисмини олиб қоламиз (4.7-расм, в).

Ферманинг чап қисми ташки кучлар (R_a ; $0,5 P$; P) ҳамда ички кучлар (N_{35} , N_{45} , N_{46}) таъсирида мувозанат ҳолатида бўлиши лозим. Номаълум ички кучлар ферманинг ташлаб юборилган ўнг қисмининг таъсирини ўзида акс эттиради.

4- тугун 3—5 стержени учун момент нуктаси ҳисобланади. Номаълум зўриқиш N_{35} ни аниқлаш учун шу нуктага

нисбатан барча кучларнинг моментлари йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d - \frac{P}{2} \cdot d - N_{35} \cdot h_{35} = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = \frac{R_a \cdot d - 0,5P \cdot d}{h_{35}} = \frac{M_4^0}{h_{35}}$$

Бу ерда d ва h — елкалар нисбатан ферманинги чап тўртинчи тугунга бўлади. 6-угада ётган кучларнинг моментлари йиғиндисини.

Бу момент микдор жихати дан оддий балканинг, ферма Зўриқишнинг мусбат ишораси даги моментга тенг бўлади. лувчан эканлигини англатади. 3—5 стерженнинг чўзи-

Энди 4—6- тугунлар ораси даги стерженнинг зўриқиши N_{46} ни аниқлаймиз. Кесимга кирган икки стерженнинг кесишув нуктаси (5) N_{46} учун момент нуктаси бўлади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_5 = R_a \cdot 2d - \frac{P}{2} \cdot 2d - P \cdot d + N_{46} h_{46} = 0;$$

бу ердан

$$N_{46} = \frac{2d(P - R_a)}{h_{46}} = \frac{M_5^0}{h_{46}}$$

Зўриқиш ишорасининг маънавий чикиши 4—6 стержени-нинг сиқилувчан эканлигини билдиради. Умуман фермага қўйилган ташки кучлар пастга йўналган бўлса, ферманинг устки тасмаси сиқилишга, остки тасмаси чўзилишга ишлайди.

Эндиги навбат N_{45} га. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стержень «К» нуктасида кесишади. Ана шу нукта N_{45} учун момент нуктаси ҳисобланади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_k = -R_a \cdot c + \frac{P}{2} \cdot c + P(c + d) + N_{45} \cdot h_{45} = 0;$$

бу ердан

$$N_{45} = \frac{R_a \cdot c - 0,5P \cdot c - P(c + d)}{h_{45}} = \frac{M_k^0}{h_{45}}$$

Шундай қилиб, момент нуктаси усулида исталган стержендаги зўриқиш қуйидаги формула асосида топилар экан:

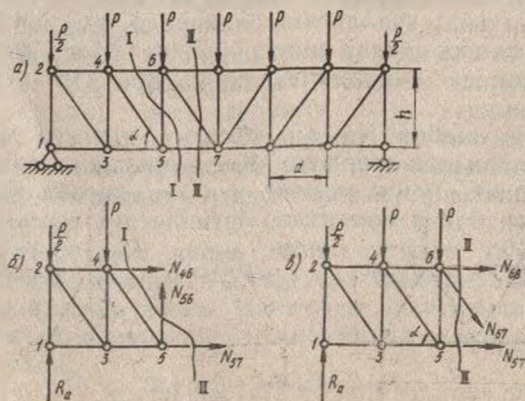
$$N = \frac{M}{h}.$$

Бу ерда M — кесилган ферманинг бир қисмида ётган кучларнинг момент нуктасига нисбатан олинган моментлари йиғиндиси;

h — изланаётган зўриқишнинг шу нуктага нисбатан елкаси.

Проекциялаш усули. Баъзан шундай фермалар учрайдики, уларда момент нуктаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда бошқа усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Параллель тасмали ферма бунга мисол бўла олади (4.8- расм, а). Ферманинг ҳавон ва устунлари момент нуктасига эга эмас, чунки тасмалар параллел бўлганлиги сабабли ўзаро кесишмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усули жуда қўл келади.

5—6 тугунлар орасидаги устуннинг зўриқишини аниқламоқчимиз, дейлик. Бунинг учун энг аввал I—I кесим билан фермани икки қисмга ажратамиз; кучлар қўп бўлгани учун ўнг томонини ташлаб юборамиз. Кесимга кирган уч стерженнинг иккитаси ўзаро параллел, демак N_{56} нинг момент нуктаси йўқ. Шунинг учун мувозанат тенгламасини тузишда кучлар проекцияларининг йиғиндидан фойдаланамиз:



4.8- расм

$$\Sigma Y = R_a - \frac{P}{2} - P + N_{56} = 0;$$

бу ердан

$$N_{56} = -(R_a - 1,5P) = -Q.$$

Бу ерда N_{56} — оддий балкадаги кўндаланг куч.

N_{67} зўриқишни аниқлаш учун фермани II — II кесим бўйлаб киркамиз ва унинг чап қисми учун қуйидаги проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma Y = R_a - \frac{P}{2} - P - P - N_{67} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{67} = \frac{R_a - 2,5P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Бу ерда ҳам Q оддий балканинг киркувчи кучи.

Тугунларни кесиб олиш усули. Бу усулни проекциялаш усулининг хусусий холи деса ҳам бўлади. Чунки бунда ҳам проекция тенгламаларидан фойдаланилади. Фарқи шуки, аввалги усулда яхлит фермани қирқиб, унинг бир қисми ажратиб олинган бўлса, бу сафар битта тугун кесиб олинади ва шу тугун учун мувозанат тенгламалари тузилади (4.9-расм, а, б).

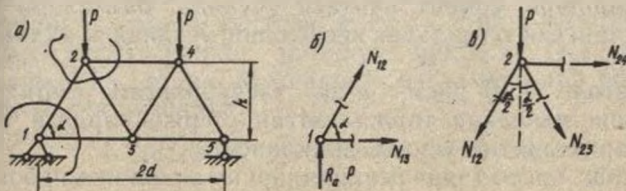
Ҳисоб ишлари икки стерженли тугундан бошланади. Нега деганда тугун мувозанатини текшириш учун ихтиёриймизда фақат иккита тенглама бор. $\Sigma x = 0$; $\Sigma y = 0$.

Шунга мувофиқ яхлит фермадан I тугунни кесиб оламиз ва ундаги N_{12} ҳамда N_{13} номаълум зўриқишларни аниқлаймиз. Кучларнинг Y ўқиға бўлган проекциялари йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma y = R_a + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{12} = -\frac{R_a}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\sin \alpha};$$



4.9-расм

N_{13} ни аниқлаш учун кучларни X ўқиға проекциялаймиз;

$$\Sigma X = N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Энди 2- тугунга ўтилади; бу ердаги учта зўриқишдан биттаси маълум (N_{12}), қолган икkitаси номаълум. N_{23} ни аниқлаш учун кучларни Y ўқиға проекциялаймиз (4.9- расм, в).

$$\Sigma Y = -P - N_{12} \cos \frac{\alpha}{2} - N_{23} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{23} = -P(1 - \sin \alpha) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

N_{24} ни аниқлаш учун кучларни x ўқиға проекциялаймиз (4.9- расм, в)

$$\Sigma X = N_{24} - N_{12} \sin \frac{\alpha}{2} + N_{23} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

бу ердан

$$N_{24} = P \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - P \sin \frac{\alpha}{2} / \sin \alpha.$$

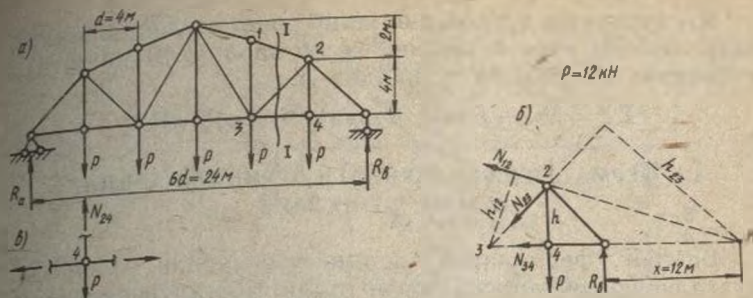
Юкоридагилардан кўриниб турибдики, тугунларни кесиб олиш усулида навбатдаги стержень зўриқиши ўздан олдинги стерженлар зўриқишларига боғлиқ ҳолда топилади. Олдинги зўриқишни аниқлашда йўл кўйилган хато табиийки кейинги зўриқишларда ҳам такрорланади. Бу мазкур усулнинг камчиликларидан ҳисобланади. Усулнинг яна бир камчилиги шундан иборатки, унинг тенгламаларида кўплаб тригонометрик функциялар учрайди, бу эса ҳисобни мураккаблаштиради.

Ана шуларни ҳисобга олиб, фермаларни ҳисоблаганда кўриб ўтилган усуллардан қайси бири қўл келса, ўша усулдан фойдаланилади. Масалан, ферманинг баъзи зўриқишлари момент нуқтаси усулида, баъзилари проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулида аниқланиши мумкин.

Мисол. 4.10- расм, а-да тасвирланган ферманинг бешинчи панелини ташкил этган стерженлардаги зўриқишлар аналитик усулда аниқлансин.

Ечиш. Ҳисоб таянч реакцияларини аниқлашдан бошла-

$$\text{нади: } R_a = R_b = \frac{5P}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ кН.}$$



4.10-расм

Ферманинг 5-панелини 1—1 кесим билан кесиб, чап кismiни ташлаб юборамиз ва ўнг томони учун мувозанат тенгламаларини тузамиз (4.10-расм, б). Мувозанат тенгламаларини тузишда кесилган стерженлар чўзилишга ишлайди деб фараз этилади ва зўриқишлар тугундан ташқи томонга йўналтирилади.

N_{12} зўриқишини аниқлашда 2—3 ва 3—4 стерженларнинг кесишув нуктаси (3) момент нуктаси деб қабул қилинади. Шу нуктага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади.

$$\Sigma M_3 = -R_b \cdot 2d + P \cdot d - N_{12} \cdot h_{12} = 0.$$

Тригонометрик йўллар билан $x=12$ м ва $h_{12}=4,9$ м ни аниқлаймиз. У ҳолда $N_{12}=-39,6$ кН бўлади.

N_{34} зўриқишнинг момент нуктаси 2-тугунга тўғри келади. Моментлар тенгламасини шу нуктага нисбатан тузамиз:

$$\Sigma M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0;$$

бундан $N_{34}=30$ кН.

N_{23} зўриқишини ҳам аввалги зўриқишлар сингари момент нуктаси усулида аниқлаймиз. Бирок бу зўриқишнинг момент нуктаси, яъни 1—2 ва 3—4 стерженлардан ўтган ўқнинг кесишув нуктаси (К) фермадан ташқарида ётади. Мувозанат тенгламаси ана шу нуктага нисбатан тузилади:

$$\Sigma M_K = R_b \cdot x - P(d+x) - N_{23} \cdot h_{23} = 0.$$

Тригонометриядан $h_{23}=11,9$ м. Тенгламадан $N_{23}=11,9$ кН.

N_{24} зўриқиши тугунларни кесиб олиш усулида аниқланади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб олиб (4.10- расм, а), мувозанат тенгламаси тузилади:

$$\Sigma Y = N_{24} - P = 0; \text{ бундан } N_{24} = 12 \text{ кН.}$$

4.3. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИНГ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Баъзан фермаларга доимий юклардан ташқари қўзғалувчан юклар ҳам таъсир этади. Қўзғалувчан юклар таъсирида ферма стерженларидаги зўриқишларнинг қиймати ўзгариб боради. Зўриқишларнинг қандай ўзгаришини билиш учун таъсир чизиклари деб аталган график чизилади.

Таъсир чизикларининг тенгламалари аналитик усулдаги сингари момент нуктаси, проекциялаш ва тугунларни кесиб олиш усулларида тузилади. 4.11- расм, а да тасвирланган ферма стерженларидаги айрим зўриқишларнинг таъсир чизикларини қурамыз.

Ферманинг иккинчи панелидаги N_{35} , N_{46} , N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиклари момент нуктаси усулида, учинчи панелдаги N_{67} зўриқиш проекциялаш усулида ҳамда N_{87} зўриқишнинг таъсир чизиги тугунни кесиб олиш усулида қурилади.

Ишни N_{35} зўриқишининг таъсир чизигини қуришдан бошлаймиз. Бунинг учун фермани I—I кесим билан ҳаёлан қирқамиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч кесимнинг ўнг томонида деб фараз этамиз ва шу томонни ташлаб юборамиз. Қирқимга тушган учта стерженда зўриқишларнинг йўналиши ташлаб юборилган томонга қаратилади.

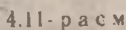
Кесимнинг чап томони учун момент нуктаси усулини қўллаб, мувозанат тенгламасини тузамиз. 3—5 стержени учун 4 нукта момент нуктаси ҳисобланади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d - N_{35} \cdot h_1 = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_a \cdot \frac{d}{h_1}.$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиги бирлик куч кесимдан ўнгга ҳаракатланганда, R_a таянч реакциясининг таъсир чизиги сингари бўлиб, ординаталари d/h_1 микдорга фарқ қилади. Шунга кўра А таянч остида ўқдан юқорига



Чап чизикни утказиш мақсадида кесимнинг ўнг томони учун моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = N_{35} \cdot h_1 - R_b \cdot 5d = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_{\Phi} \cdot \frac{5d}{h_1}$$

Демак, N_{35} зүрикишининг таъсир чизиги бирлик куч кесимдан чапда бўлганда, тузилиши жихатидан худди R_a реакциясининг таъсир чизигига ухшаш бўлиб, микдор жихатдан ундан $5d/h_1$ мартаба куп бўлади. Бунга асосан B таянч остида $5d/h_1$ масофани ўқдан юкорига ўлчаб қўямиз ва уни A таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз. Бу чизик чап чизик деб аталади. Чап ва ўнг чизиклар момент нуктаси (4) остида кесишади (4.11- расм, б). Штрихланган учбурчак N_{35} зүрикишининг таъсир чизиги ҳисобланади. Мусбат ишора 3—5 стерженни қўзилишга ишлашини билдиради. 3- ва 5- тугунларни таянч чизигига туширилган проекцияларини туташтирувчи чизик — узатувчи чизик деб аталади.

N_{35} га тааллуқли узатувчи чизик бизнинг ҳолда ўнг чизик билан устма-уст тушган. Баъзи ҳолларда узатувчи чизик чап ёки ўнг чизик билан устма-уст тушмайди.

Ўнг ва чап чизикларнинг момент нуктаси остида кесишувини эътиборга олиб, таъсир чизикларини чизишни бир мунча енгиллаштириш мумкин. Бунинг учун биргина ўнг ёки чап чизик чизилса кифоя. Иккинчиси момент нуктасининг проекцияси оркали ўтказилади.

Шу йўл билан N_{46} ва N_{45} зүрикишларнинг таъсир чизигини курамиз.

1—1 кесим ўз кучини сақлайди. 5- нукта N_{46} нинг момент нуктаси бўлади. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнг томонда ҳаракатланади, деб чап томон учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\Sigma M_5 = R_a \cdot 2d + N_{46} \cdot h_2 = 0,$$

бундан

$$N_{46} = -R_a \frac{2d}{h_2}$$

N_{46} нинг таъсир чизигини чизиш учун A таянчи йўналишида ўқдан пастга (манфий бўлганлиги учун) $2d/h_2$ масофани ўлчаб қўямиз ва B таянчи йўналишидаги ноль билан бирлаштирамиз (4.11- расм, в). Бу ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун момент нуктаси 5 ни ўнг чизикка проекциялаймиз. Топилган нукта C ни A таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Бу чизик чап чизик бўлади. Штрихланган юза N_{46} зүрикишининг таъсир чизиги ҳисобланади. Манфий ишора 4—6 стерженининг сикилишга ишлашини билдиради.

Энди ҳавондаги зүрикиш N_{45} нинг таъсир чизигини чизамиз. 1—1 кесим бу стерженни ҳам кесиб ўтган.

Кесимнинг ўнг томонини ташлаб юборамиз. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз. Ферманинг кесимдан чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз. Бунинг учун аввал момент нуктасини белгилаб оламиз; N_{45} зўриқишининг момент нуктаси 3—5 ва 4—6 стерженларидан ўтган ўқнинг кесишув нуктаси К да ётади. Моментлар йиғиндисини шу нуктага нисбатан тузамиз:

$$\Sigma M_k = -R_a \cdot a_k + N_{45} \cdot h_k = 0,$$

бундан

$$N_{45} = R_a \frac{a_k}{h_k}.$$

Демак, куч ($P=1$) кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, N_{45} зўриқишнинг қиймати R_a реакциясидан a_k/h_k маротаба катта бўлар экан. Бунга асосланиб, ўқдан юқорига a_k/h_k масофани ўлчаб қўямиз; уни В таянчи йўналишидаги ноль билан туташтирамиз (4.11-расм, г), ҳосил бўлган чизик ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун ўнг чизикни чапга давом эттирамиз. Момент нуктаси — К ни унинг давомига проекциялаймиз. Улар K_1 нуктасида кесишади. K_1 нуктаси билан А таянчи остидаги ноль нуктани бирлаштирамиз ва ўнгга давом эттирамиз. Бу чап чизик бўлади. Узатувчи чизикни ўтказиш учун 4-тугунни чап, 5-тугунни ўнг чизикка проекциялаймиз. Топилган нукталарни бирлаштирувчи чизик узатувчи чизик ҳисобланади. Штрихланган юза эса N_{45} нинг таъсир чизигидир. Бу ерда юза икки хил ишорага эга. n нуктада ордината нолга тенг. Бунинг маъноси шуки, бирлик куч n нуктасидан чапда ҳаракатланса, 4—5 стержень сикилишга, ўнгда ҳаракатланса қўзилишга ишлайди.

Энди ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизикларини қуришда проекциялаш усулини қўллаб кўрамиз.

4.11-расм, а да тасвирланган ферманинг учинчи ва туртинчи панелидаги устки ва остки тасмалар ўзаро параллел. Шу боисдан мазкур панеллардаги хавонларга момент нуктаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усулига мурожаат этилади.

Учинчи панел хавонидаги зўриқиш N_{67} нинг таъсир чизигини қурайлик. Бунинг учун II—II кесими бўйлаб фермани қирқамиз. Ўнг томонини ташлаб, чап томони учун тенглама тузамиз; бунда бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз

$$\Sigma Y = R_a - N_{67} \cdot \cos \alpha = 0$$

бундан

$$N_{67} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R_a$$

Бирлик куч кесимдан чапда деб фараз этиб, ўнг томон учун проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma Y = R_b + N_{67} \cdot \cos \alpha = 0,$$

бундан

$$N_{67} = -R_b \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

N_{67} зўриқишнинг таъсир чизиғи ҳам таянч реакциялари R_a ва R_b нинг таъсир чизиғи каби бўлар, миқдори эса $1/\cos \alpha$ га фарқ қилар экан. Шунга кўра реакциялар йўналишида ўқдан юқорига ва пастга $1/\cos \alpha$ ни ўлчаб қўямиз, топилган нукталарни таянчлар остидаги ноль нукталар билан бирлаштирамиз. Юқорида ўнг, пастда чап чизик ҳосил бўлади (4.11-расм, д). 6-тугунни чап, 7-тугунни ўнг чизикка проекциялаймиз ва топилган нукталарни туташтирсак, узатувчи чизик ҳосил бўлади. Штрихланган юза 6—7 хавондаги зўриқишнинг таъсир чизиғи бўлади.

Тугунларни кесиб олиш усулини N_{87} зўриқиши мисолида кўриб ўтамиз.

7—8-устуннинг зўриқишини аниқлашда ферма қиркимига учдан ортик (бизнинг ҳолда 4 та) стержень тўғри келади. Шунинг учун 8-тугунни шаклда кўрсатилгандек кесиб, ажратиб оламиз (4.11-расм, а ва ж).

Бирлик куч 8-тугундан бошқа тугунлар бўйлаб ҳаракатланса, устундаги зўриқиш ноль бўлади: $\Sigma Y = N_{87} = 0$.

Бирлик куч 8-тугунда бўлса,

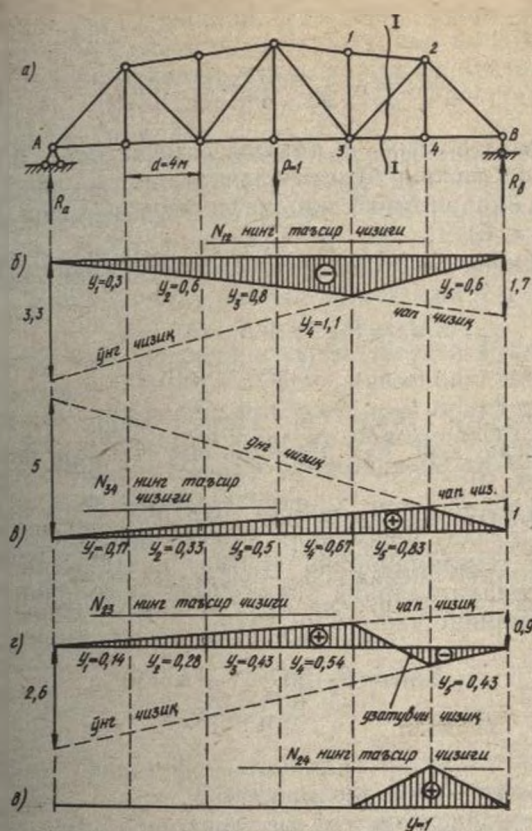
$$\Sigma Y = -N_{87} - P = 0,$$

бундан

$$N_{87} = -P = -1.$$

Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.12-расм, е да тасвирланган.

Мисол. 4.12-расм, а да тасвирланган ферманинг бешинчи панелидаги зўриқишлар учун таъсир чизиклари чизилсин ҳамда чизилган таъсир чизикларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қиймати аниқлансин.



4.12- расм

Ечиш. Момент нуктаси усулидан фойдаланиб N_{12} зўриқишининг таъсир чизиғини чизамиз. Бунинг учун фермани 1—1 кесим билан қирқамиз. Навбатма-навбат ферманинг чап ва ўнг қисмлари учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. Ферманинг чап қисми учун тенглама тузганда, бирлик куч $P=1$ ферманинг ўнг томонида ҳаракатланади деб фараз этамиз ва аксинча.

3- тугун N_{12} учун момент нуктаси бўлади. Шу нуктага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (4.10- расм, б).

а) ферманинг ўнг томони тенгламаси

$$\Sigma M_3 = -R_b \cdot 2d - N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -\frac{2.4}{4.9} \cdot R_b = -1.7R_b.$$

Бу ифодага кўра А таянчи остига ноль, В таянчи остига — 1,7 га тенг бўлган ординаталарни ўлчаб кўямиз ва уларни бирлаштириб, чап тўғри чизикни ҳосил қиламиз (4.12- расм, б);

б) бу ишларни ферманинг чап томони учун такрорлаймиз

$$\Sigma M_3 = R_a \cdot 4d + N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -3,3R_a.$$

Бу ифодага кўра ўнг тўғри чизик ўтказилади. Штрихланган юза N_{12} зўриқишнинг таъсир чизигидир (4.12- расм, б).

N_{34} зўриқишнинг момент нуктаси 2- тугун билан устма-уст ётади. Ферманинг чап ва ўнг қисмлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз ва уларнинг N_{34} га тегишли ординаталарини аниқлаймиз (4.10- расм, б):

а) ферманинг чап қисми учун

$$\Sigma M_2 = R_a \cdot 5d - N_{34} \cdot h = 0,$$

бундан

$$N_{34} = 5R_a;$$

б) ферманинг ўнг қисми учун

$$\Sigma M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0, \quad N_{34} = R_b.$$

Штрихланган юза N_{34} нинг таъсир чизигидир (4.12- расм, в).

N_{23} зўриқишнинг момент нуктаси (К) фермадан ташқарида ётади (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини шу нуктага нисбатан тузамиз:

а) ферманинг чап қисми учун

$$\Sigma M_k = R_a(6d + x) + N_{23}h_{23} = 0; \text{ бундан } N_{23} = -2,6R_a.$$

бунга кўра ўнг (тўғри) чизик ўтказилади;

б) ферманинг ўнг қисми тенгламаси

$$\Sigma M_k = R_b \cdot x - N_{23} \cdot h_{23} = 0, \quad N_{23} = 0,9R_b.$$

Бунга асосан чап (тўғри) чизик ўтказилади.

Чап ва ўнг чизиклар узатувчи чизик ёрдамида туташтирилади. Бунинг учун 3- тугун чап ва 2- тугун ўнг чизикка проекцияланади ҳамда топилган нукталар бирлаштирилади. Штрихланган юза N_{23} нинг таъсир чизигидир (4.12- расм, г).

N_{24} зўрикишнинг таъсир чизиги тугунларни кесиб олиш усулида курилади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб оламиз ва унинг икки ҳолатини текшираемиз (4.10- расм, в).

Биринчи ҳолатда бирлик куч 3—4 ва 4—В панеллардан ташқарида ҳаракатланади, деб фараз этамиз. Бу ҳолда мувозанат тенгламаси $\Sigma Y = 0$ дан $N_{24} = 0$ келиб чиқади.

Иккинчи ҳолатда бирлик куч 4- тугунга қўйилган деб фараз этамиз. Бу ҳол учун мувозанат тенгламаси $\Sigma Y = N_{24} - P = 0$ бўлади, бундан $N_{24} = 1$ келиб чиқади.

Бирлик куч бошқа тугунларда бўлганда, N_{24} зўрикиш нолга тенг бўлади. Мазкур зўрикишнинг таъсир чизиги 4.12- расм, д да тасвирланган.

Энди масаланинг иккинчи қисмини ҳал этишга киришамиз, яъни тайёр таъсир чизикларидан фойдаланиб, зўрикишларнинг қийматини аниқлаймиз. Фермага факат йиғик кучлар қўйилган бўлганлиги учун зўрикишлар қуйидаги формула билан аниқланади:

$$N = P \sum_{i=1}^n Y_i$$

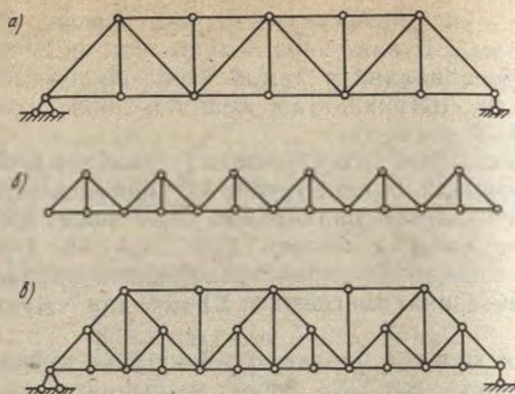
Бу формуладан фойдаланишда йиғик кучлар пастга йўналганлиги учун (4.10- расм, а) мусбат ишорада, Y_i ординатасининг ишоралари эса таъсир чизиклари ишораси бўйича олинади.

N_{12} зўрикишининг қийматини аниқлайлик. Ферма тугунларига қўйилган кўзғолмас кучларнинг қиймати $P = 12$ кН. Номатлум ординаталар (Y) нинг қиймати N_{12} зўрикишининг таъсир чизикларидан топилади. Бунинг учун учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилади. Топилган ординаталарнинг қиймати шаклда кўрсатилган (4.12- расм, б).

Изланаётган зўрикишининг қиймати

$$N_{12} = P(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) = -12(0,3 + 0,6 + 0,8 + 1,1 + 0,6) = -39,6 \text{ кН.}$$

Бу қиймат аналитик усулда топилган қиймат билан бир хилдир. Қолган зўрикишларнинг қийматлари ҳам шу йўсинда аниқланади.



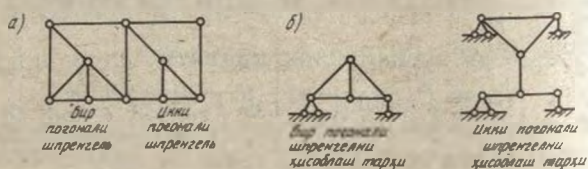
4.13-расм

4.4. ШПРЕНГЕЛЛИ ФЕРМАЛАР

Катта узунликка эга бўлган ферманинг тугунлари орасидаги масофа (панел) ҳам катта бўлади. Бунинг оқибатида тугунларга таянувчи кўндаланг балкалар устига қўйиладиган бўйлама балкаларнинг вазни ортиб кетади. Бу ҳол иқтисодий жиҳатдан самарасиздир. Панел узунлигини саклаган ҳолда бўйлама балканинг узунлигини қисқартириш учун асосий фермага (4.13-расм, а) қўшимча элементлар — шпренгеллар киритилади (4.13-расм, б). Натижада ҳосил бўлган ферма шпренгелли ферма деб аталади (4.13-расм, в).

Асосий ферма барча юкни ўзига қабул қилади, шпренгеллар эса факат ўзига қўйилган юкни қабул қилади.

Шпренгеллар бир ва икки поғонали бўлиши мумкин (4.14-расм, а). Бир ва икки поғонали шпренгелларнинг ҳисоблаш тархлари 4.14-расм, б-да тасвирланган.



4.14-расм

Шпренгелли фермаларнинг элементлари тўрт туркумга бўлинади:

1) факат асосий фермага тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар асосий ферма ҳисобидан топилади; ферма таркибига шпренгелларнинг қўшилиши мазкур элементлардаги зўриқишларга таъсир этмайди;

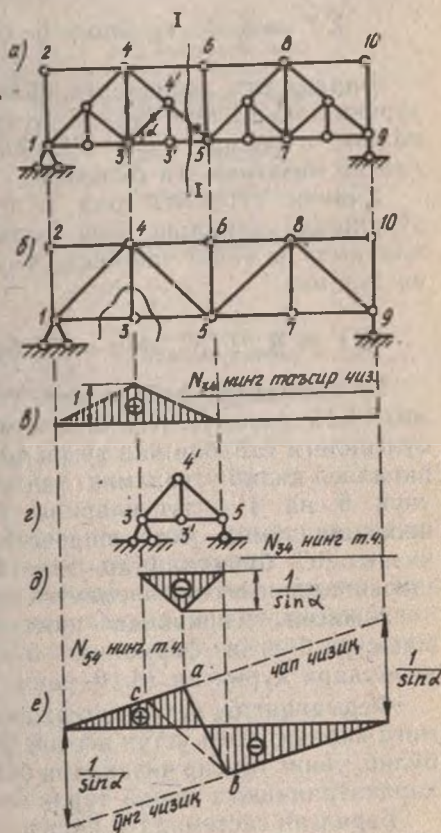
2) факат шпренгелларга, яъни қўшимча фермачаларга тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар шпренгелларнинг алоҳида ҳисобидан топилади;

3) бир вақтнинг ўзида ҳам асосий фермага, ҳам шпренгелга тегишли бўлган элементлар. Бундай элементдаги зўриқиш икки хил зўриқишнинг йиғиндиси сифатида аниқланади; булардан бири асосий ферма элементининг зўриқиши; иккинчиси эса шпренгелли элементнинг зўриқишидир;

4) асосий ферманинг шундай элементларидирки, қўзғалувчан юкнинг ҳаракат сатҳига кўра, яъни юкнинг остки ёки устки тасмадан ҳаракатланишига қараб элементдаги зўриқишнинг таъсир чизиклари турлича бўлади.

1- мисол. 3—4, 3—4' ва 5—4' стерженлардаги зўриқишларнинг таъсир чизиклари қурилсин (4.15- расм).

Ишни 3—4 стерже-нидаги зўриқишнинг таъсир чизигини чизишдан бошлайлик. Авваламбор бу стержень биринчи туркумга қараган, яъни факат асосий фермага оид бўлган стержендир. Шунинг учун бу масалани ҳал



4.15- расм

этишда шпренгелларни олиб ташлаб, асосий ферманинг узини колдирамиз (4.15- расм, б) ва ундан 3- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз, натижада 4.15- расм, в да тасвирланган таъсир чизигига эга бўламиз.

3—4¹ стержень иккинчи туркумга оид стержень эканлигини эътиборга олиб, шпренгелни асосий фермадан ажратиб оламиз ҳамда унга мустакил ферма сифатида ёндошамиз (4.15- расм, г).

Харакатланувчи бирлик куч $P=1$ 3¹ — тугунга қўйилган деб фараз этиб, 3- тугун учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum Y = \frac{1}{2} + N'_{34} \sin \alpha = 0; \text{ бундан } N'_{34} = -\frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Бирлик куч таянчларга қўйилса, 3—4¹ стерженидаги зўриқиш нолга тенг бўлади. Буларга асосан 3—4¹ стерженидаги зўриқиш учун 4.15- расм, д да тасвирланган таъсир чизигига эга бўламиз.

Учинчи туркумга оид бўлган 5—4¹ стерженидаги зўриқишни аниқлаш учун фермани 1—1 кесим бўйлаб қиркамиз ва унинг чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

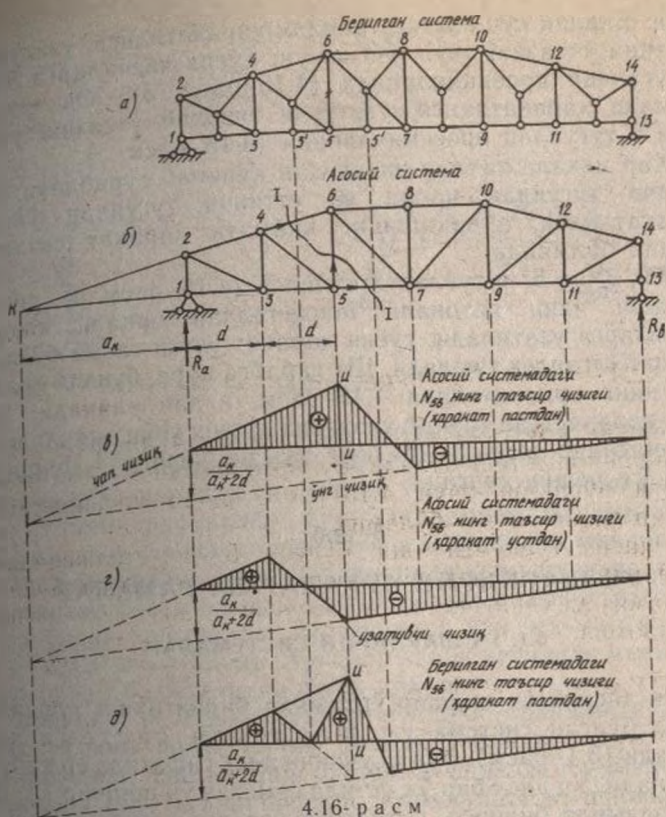
$$\sum Y = R_a + N'_{54} \sin \alpha = 0; \text{ бундан } N'_{54} = -\frac{R_a}{\sin \alpha}.$$

Бу қийматдан фойдаланиб, ўнг тўғри чизикни ўтказамиз (4.15- расм, е). N'_{54} нинг момент нуктаси чексизликда бўлганлиги сабабли чап тўғри чизикни ўнг тўғри чизикка параллел қилиб ўтказамиз. Узатувчи чизик ab ни ўтказиш учун 5 ва 4¹ — тугунларини ўнг ва чап чизикларга проекциялаймиз. Агар шпренгел бўлмаганида, узатувчи чизик BC бўйича ўтар эди. Бу ерда abc учбурчак шпренгелнинг асосий элементга таъсирини ифодалайди.

2- мисол. Таркибида икки поғонали шпренгеллар мавжуд бўлган ферманинг 5—6 устуни учун таъсир чизиклари қурилсин (4.16- расм, а).

Ферманинг бу устуни стерженларнинг тўрттинчи туркумига қиради, яъни устун асосий фермага тегишли элемент бўлиб, унинг таъсир чизиклари бирлик куч қайси тасмадан ҳаракатланишига қараб турлича бўлади.

Берилган системадаги шпренгелларни ташлаб юбориш йўли билан асосий системани ҳосил қиламиз (4.16- расм, б). Асосий системанинг 5—6 стержени учун таъсир



чизикларини чизамиз. Бунда юкнинг устки ва остки тасмалар бўйича ҳаракати кўриб чиқилади.

Фермани 1—1 кесим бўйлаб қирқамиз, бирлик куч кесимдан ўнг томонда ҳаракат қилади, деб фараз этиб, чап қисм учун К нуктага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_K = -R_a a_k - N_{56} \cdot (a_k + 2d) = 0,$$

бундан

$$N_{56} = -\frac{R_a \cdot a_k}{a_k + 2d}.$$

Бу қийматга асосан ўнг тўғри чизикни ўтказамиз. Момент нуктасидан фойдаланиб, чап тўғри чизик ўткази-

лади. Бирлик куч пастки тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун чап ва ўнг тўғри чизикларга 5 ва 7 тугунлар проекцияланади (4.16-расм, в). Юк юкори тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун 4 ва 6 тугунлар проекцияланади (4.16-расм, г).

Ҳар иккала таъсир чизигидан кўриниб турибдики, юк учинчи тугундан чапда ва еттинчи тугундан ўнгда ҳаракатланса, зўриқишнинг қиймати ҳаракат сатҳига боғлиқ бўлмайди.

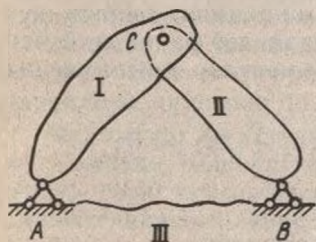
Юк 3^1 ва 5^1 тугунларга қўйилса (4.16-расм, а), унинг таъсири икки поғонали шпренгеллар орқали юкори тугунларга узатилади; гўёки ҳаракат устки тасма бўйлаб содир бўлгандек туюлади. Шу сабабга кўра, бундай ҳолда N_{56} нинг ординаталари 4.15-расм, г дан олинади. N_{56} нинг изланаётган таъсир чизигини куриш учун аниқланган ординаталар етарли. Мазкур таъсир чизиги 4.16-расм, д да ўз аксини топган.

5- боб

УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР

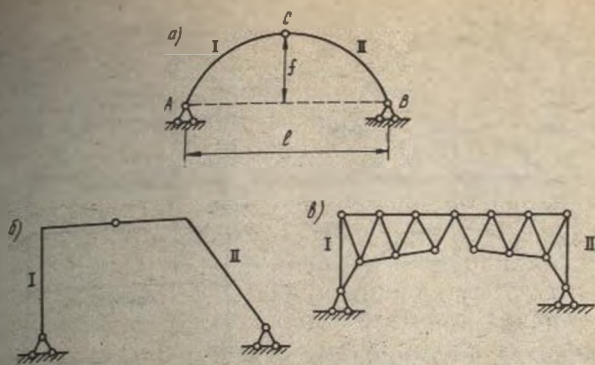
5.1. УЧ ШАРНИРЛИ СИСТЕМАЛАР

Уч дискни уч шарнир ёрдамида бириктириш туфайли ҳосил бўлган система уч шарнирли система деб аталади (5.1-расм). Бунда учинчи диск сифатида ер қабул қилинади. Уч диск бир ўк устида ётмаган уч шарнир (А, В, С) ёрдамида бирикса, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлиши бизга аввалдан маълум.



5.1-расм

Агар I ва II дисклар эгри чизикли стерженлардан иборат бўлса, бундай система уч шарнирли арка деб аталади (5.2-расм, а), агар I ва II диск синик тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган бўлса, уч шарнирли рама деб аталади (5.2-расм, б); агар I ва II диск ферма бўлса, у ҳолда система уч шарнирли аркасимон ферма деб аталади (5.2-расм, в).



5.2-расм

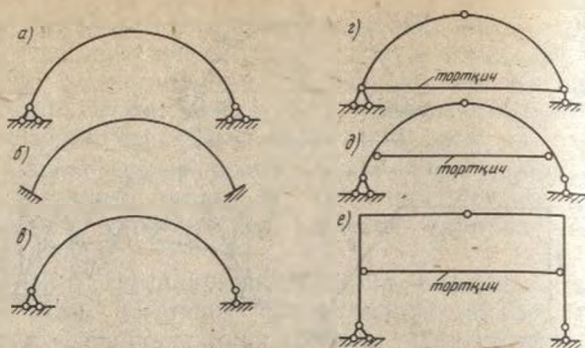
Уч шарнирли системалар вертикал ўққа нисбатан симметрик ёки носимметрик бўлиши мумкин. Симметрик системада С шарнири симметрия ўқи устида жойлашади, А ва В таянч шарнирлари бир сатҳда ётади. Носимметрик системаларда таянчлар турли сатҳда жойлашиши мумкин.

Уч шарнирли система таянчларида вужудга келадиган горизонтал босим ва унга қарши реакция керки (распор) номи билан юритилади; системанинг ўзи эса керкили система деб аталади. Аркалар керки кучининг мавжудлиги билан балкалардан фарк қилади.

Аркининг гумбаздан фарқи шундаки, арканинг кўнда-ланг кесими анча кичик бўлади, шунинг учун ҳам у стерженли системалар гуруҳига қиради. Гумбаз эса қобиклар гуруҳига қўшилади. Қурилишда уч шарнирли, икки шарнирли (5.3-расм, а) ва шарнирсиз (5.3-расм, б) аркалар қўлланилади. Аркаларда керки кучининг мавжудлиги сабабли уларнинг таянчлари шарнирли ёки шарнирсиз қўзғалмас таянч кўринишида ишланади. Таянчлардан бири шарнирли қўзғалувчан бўлса, у арка эмас, эгри ўқли балка деб аталади (5.3-расм, в). Бинокорликда баъзан уч шарнирли аркаларнинг бошқача хили — тортқичли аркалар ҳам учраб туради (5.3-расм, г).

Тортқичлар шароитга қараб таянчлардан юқорирок ўрнатилиши ҳам мумкин (5.3-расм, д). Қурилишда тортқичли рамалар ҳам кенг тарқалган (5.3-расм, е). Амалда аркаларнинг қайси туридан фойдаланиш иншоотнинг конкрет иш шароитига қараб ҳал этилади.

Уч шарнирли ҳамда тортқичли аркалар ва рамалар



5.3-рasm

статик аниқ, икки шарнирли ва шарнирсиз аркалар статик ноаниқ системаларга киради. Бу бобда статик аниқ аркалар ва рамалар кўриб ўтилади. Статик ноаниқ аркалар билан 8- бобда танишамиз.

Аркаларнинг асосий белгилари уларнинг оралик узунлиги l ва арка баландлиги f дир. Ўртадаги C шарнири кулф-калит деб аталади.

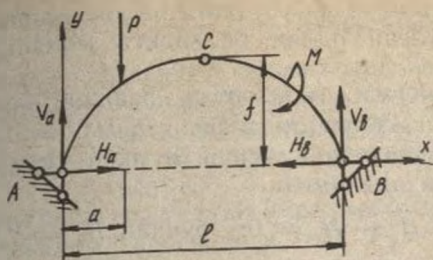
Шарнирсиз аркалар Ўрта Осиё бинокорлигида қадим замонлардан буён қўлланилиб келинади. Масжид, мадрасалар, хашаматли сарой ва макбаралар, хаммом, сардоба ва кўприкларда равок ва гўмбаз кўринишида арка элементларини кўплаб учратамиз. 1502 йили Шайбонийхон томонидан Зарафшон дарёсига қурилган сув айирғич кўпригининг айрим равоклари ҳозирга қадар сақланиб қолган.

5.2. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИНГ ТАЯНЧ РЕАКЦИЯЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Ихтиёрий кучлар қўйилган уч шарнирли арканинг (5.4- расм) таянч реакцияларини аниқлаш талаб этилади.

Маълумки, уч шарнирли аркалар статик аниқ бўлади. Шу боисдан уларнинг таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя этади. Уч шарнирли аркаларда ташки кучлар таъсирида иккита горизонтал (H_a , H_b) ва иккита вертикал (V_a , V_b) реакция кучлари вужудга келади. Бу номаълум таянч реакциялари кўйидаги тенгламалардан аниқланиши мумкин:

$$\sum M_A = 0; \sum M_b = 0; \sum M_{\text{чан}} = 0; \sum X = 0.$$



5.4- расм

В таянчидаги вертикал реакция кучи V_b ни аниклаш учун А шарнирига нисбатан моментлар йиғиндисини тузамиз:

$$\Sigma M_a = P \cdot a + M - V_b l = 0.$$

Бундан

$$V_b = \frac{P_1 a + M}{l}.$$

Мазкур формуланинг сурати А нуктасига нисбатан барча ташқи кучлар моментлари йиғиндиси $\Sigma M_A^{\text{таш}}$ ни ифодалайди. Шунга кўра юқоридаги формулани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$V_b = \frac{\Sigma M_A^{\text{таш}}}{l}.$$

А таянчидаги реакциянинг вертикал ташкил этувчиси-ни ҳам шу йўсинда топа оламиз:

$$V_a = \frac{\Sigma M_b^{\text{таш}}}{l}.$$

Горизонтал реакция кучи H_b ни аниклаш учун С шарнирига нисбатан ўнг томонда ётган кучлардан момент оламиз:

$$\Sigma M_c^{\text{сн}} = M - V_b \frac{l}{2} + H_b f = 0,$$

бундан

$$H_b = \frac{V_b \frac{l}{2} - M}{f} \quad \text{ёки} \quad H_b = \frac{\Sigma M_c^0 (\text{ўнг})}{f}.$$

Бу ерда ноль индекси узунлиги ва юкланиши арка билан бир хил бўлган оддий балкадаги момент эканлигини билдиради.

А таянчидаги горизонтал реакция куч H_a икки тенгламанинг биридан, яъни $\sum M_c^{\text{арка}} = 0$ ёки $\sum x = 0$ тенгламаларидан аниқланиши мумкин. Проекция тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum x = H_a - H_b = 0; \text{ бундан } H_a = H_b = H.$$

Охирги ифода шуни кўрсатадики, агар аркага вертикал кучлар қўйилган бўлса, горизонтал реакциялар ўзаро тенг бўлар экан.

Уч шарнирли аркалар учун баён этилган қоидалар тўлалигича уч шарнирли рамалар учун ҳам тааллуқлидир.

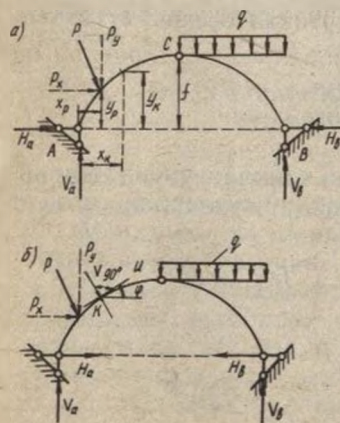
5.3. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Ҳисоблашдан мақсад бу ерда ҳам бошқа конструкциялардаги сингари ички кучларни аниқлашдан иборатдир. Ички кучлар деганда, арканинг қўндаланг кесимларида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўладиган эғувчи момент M , қўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

Ички кучларни аниқлашда ишора қоидаи балкадаги қоидага ўхшашдир, яъни куч арканинг эгрилигини оширса — ишора манфий, эгрилигини камайтирса — мусбат, кесимга нисбатан куч

соат стрелкаси бўйича айлansa — мусбат, тескари йўналишда — манфий олинади. Бўйлама кучлар ишораси бошқача: куч стерженни сикса — мусбат, чузса — манфий олинади.

Уч шарнирли арканинг ихтиёрий K кесимида вужудга келадиган эғувчи момент M_k ни аниқлаймиз (5.5- расм, а). Бунинг учун аркани шу кесим бўйича хаёлан қирқамиз ва кесимнинг чап ёки ўнг томони учун моментлар йиғиндисини ёзамиз:



5.5- расм

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - P_y (x_k - x_p) - P_x (y_k - y_p), \quad (5.1)$$

Бу ерда x_k ва y_k — арканинг K кесими координаталари;
 P_x ва P_y — ташки куч P нинг горизонтал ва
 вертикал проекциялари;

x_p ва y_p — куч қўйилган нуктанинг координаталари.

Агар аркага қўйилган куч оғма эмас, тик бўлса, у ҳолда P кучининг горизонтал проекцияси ноль, $P_y = P$ ва $H_a = H$ бўлади.

(5.1) ифода эса қуйидаги кўринишни олади:

$$M_k = V_a x_k - P (x_k - x_p) - H y_k \quad (5.2)$$

Бу формуладаги $V_a x_k - P (x_k - x_p)$ ифода, узунлиги ва юкланиши жиҳатидан шу арка билан бир хил бўлган оддий балканинг эғувчи моменти M_k^0 ни англатади. Буни эътиборга олсак, (5.2) формула қуйидаги содда кўринишга келади:

$$M_k = M_k^0 - H y_k. \quad (5.3)$$

Қўндаланг ва бўйлама кучларни аниқлаш учун арканинг K кесимида уринма (u) ва шу уринмага тик бўлган чизик (v) ўтказамиз (5.5-расм, б). Қўндаланг кучларни аниқлаш учун v ўқида, бўйлама кучларни аниқлаш учун u ўқида нисбатан кучлар проекцияларининг йиғиндисини оламиз:

$$\begin{aligned} Q_k &= V_a \cos \varphi - H_a \sin \varphi - P_y \cos \varphi - P_x \sin \varphi; \\ N_k &= V_a \sin \varphi + H_a \cos \varphi - P_y \sin \varphi + P_x \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Бу ерда φ — уринма билан горизонтал чизик орасидаги бурчак. Агар аркага қўйилган кучлар тик бўлса, у ҳолда (5.4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} Q_k &= (V_a - P) \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k &= (V_a - P) \sin \varphi + H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Бу ерда $|V_a - P|$ аркага тенг кучли бўлган оддий балкадаги қўндаланг куч Q_k^0 дир. Буни эътиборга олсак, (5.5) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k &= Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.3) ва (5.6) формулалардан фойдаланиб, арканинг бир канча кесимлари учун эғувчи момент, қўндаланг ва

бўйлама кучлар аниқланади ҳамда M , Q ва N эпюралар қурилади.

Арка моменти балка моментларидан кичик бўлиши (5.3) формуладан яққол кўриниб турибди.

5.4. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАНИНГ МАҚБУЛ УҚИ

Агар аркага вертикал йўналишда текис ёйик куч қўйилган бўлса, арканинг ўқини шундай олиш мумкинки, бунда арканинг барча кесимларида эгувчи момент нолга тенг бўлади. Эгувчи моментлари нолга тенг бўлган арка ўқи мақбул (рационал) ўқ деб аталади. Арканинг ўзи эса мақбул ўқли арка деб юритилади (5.6- расм).

Арканинг мақбул ўқи тенгламасини тузиш учун (5.3) формуладан фойдаланамиз. Ушбу формуладаги арка моментини нолга тенглаймиз:

$$M_x^0 - Hy = 0. \quad (a)$$

Шаклдан

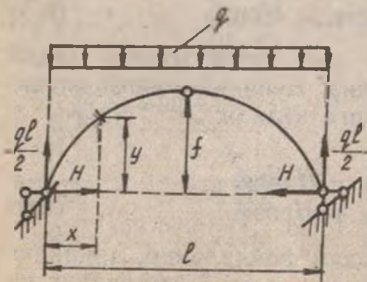
$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l-x).$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}. \quad (б)$$

Ифода (a) дан

$$y = M_x^0/H \quad (в)$$

келиб чиқади. (б) да аниқланган қийматларни (в) га қўямиз:



5.6- расм

$$\begin{aligned} y &= \frac{(qx/2)(l-x) \cdot 8f}{ql^2} = \\ &= \frac{4f}{l^2} \cdot (l-x)x. \end{aligned}$$

Шу тенглама ёрдамида чизилган парабола арканинг мақбул ўқи бўлади. мақбул ўқли аркада эгувчи момент нолга тенгдир.

5.5. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ КЎЗГАЛУВЧИ ЮК ТАЪСИРИГА ҲИСОБЛАШ

Балка ва фермалар ҳисобида кўриб ўтганимиздек, иншоотларни кўзгалувчи юклар таъсирига ҳисоблаш учун таъсир чизиклари деб аталувчи график чизиб олинади. Таъсир чизиклари ҳар бир таянч реакцияси ва ҳар бир ички куч (M , Q , N) учун алоҳида равишда қурилади.

Таянч реакцияларининг таъсир чизиклари

Чап ва ўнг таянч шарнирларига нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (5.7- расм, а):

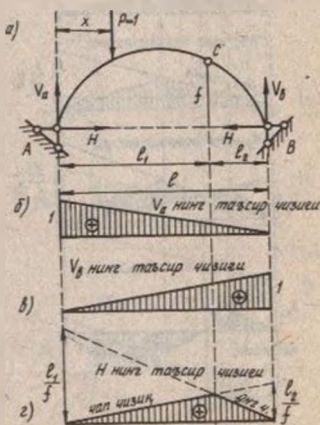
$$\Sigma M_b = V_a \cdot l - P(l - x) = 0;$$

$$\Sigma M_a = -V_b l + P \cdot x = 0.$$

Бу тенгламалардан V_a ва V_b топилади.

Топилган ифодалар балка таянч реакцияларининг ифодасидан фарқ қилмайди. Демак, арка реакцияларининг таъсир чизиклари ҳам балканинг таъсир чизикларидан фарқ қилмаслиги керак (5.7- расм, б, в).

Маълумки, керки кучи $H = M_c^0/f$ тенгламаси ёрдамида аниқланади. Бундан H нинг таъсир чизиги балка моменти M_c^0 нинг таъсир чизигидан $1/f$ маротаба кичик эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун H нинг таъсир чизигини қуришда A таянчи остига l_1 нинг ўрнига l_1/f ни ўлчаб кўямиз. Бу микдорни B таянч остидаги ноль билан туташтирсак, ўнг тўғри чизик келиб чиқади. Чап тўғри чизикни ўтказиш учун C шарнирни ўнг тўғри чизикка проекциялаймиз, топилган нуқтани A таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Штрихланган юза керки кучи — горизонтал реакция H нинг таъсир чизигидир (5.7- расм, г). Агар $l_1 = l_2 = l/2$ бўлса, C шарнири остидаги ордината $l/4f$ бўлади.

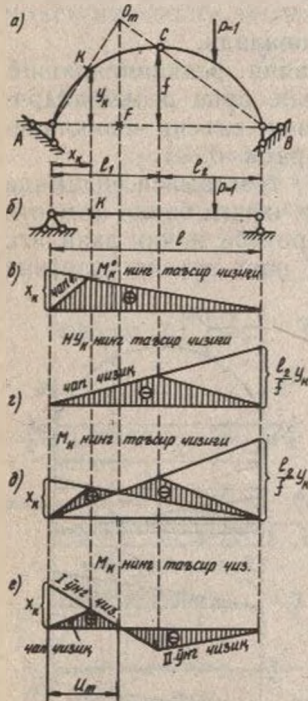


5.7 расм

Эгувчи момент M нинг таъсир чизиғи

Арканинг исталган кесимидаги эгувчи момент $M_k = M_k - Hy_k$ формуласи ёрдамида аниқланишини юқорида кўриб ўтдик. Арканинг ихтиёрий K кесимидаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини қуришда ҳам шу формуладан фойдаланамиз (5.8- расм, а).

Формулага қараганда, арканинг таъсир чизиғи оддий балканинг (5.8- расм, б) K кесимидаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғи билан y_k марта катталаштирилган керки кучи H нинг таъсир чизиклари орасидаги фаркка тенг бўлади. M_k ва H_{y_k} нинг таъсир чизиклари 5.8- расм, в.г — да тасвирланган. Ҳар иккала шаклни устма-уст жойлаштириш йўли билан изланаётган таъсир чизиғини ҳосил қиламиз (5.8- расм, д). Ҳосил бўлган таъсир чизиғини туғри ўққа жойлаштира са ҳам бўлади (5.8- расм, е).



5.8- расм

5.8- расм, г — да тасвирланган M_k нинг таъсир чизиғида M_k нинг ўнг чизиғи билан H_{y_k} нинг чап чизиғи ноль нуктасида кесишади. Ушбу нуктанинг ҳолатини график усулда аниқласа бўлади. Бунинг учун BC ва AK чизикларининг кесишув нуктаси O_m ни аниқлаймиз (5.8- расм, а). Таъсир чизиғининг 0 нуктаси ана шу нукта остида ётади.

M_k нинг таъсир чизиғини бевосита ноль нуктаси орқали курса ҳам бўлади. Бунинг учун ихтиёрий ўққа X_k масофаси ўлчаб қўйилади (5.8- расм, е). O_m нуктасини ўққа проекциялаб, ноль (0) нуктаси аниқланади. X_k нинг учи 0 билан бирлаштирилади ва C шарнирининг проекцияси билан учрашгунча давом эттирилади. Ўтказилган чизик I ўнг чизик деб аталади. II ўнг чизик шаклда

тилгандек ўтказилади. Чап чизик одатдагидек ўтказилади, яъни K кесимнинг проекцияси билан A таянчи остидаги ноль нукта бирлаштирилади. Штрихланган юза M_k нинг таъсир чизиги бўлади.

Ноль нуктасининг абсциссаси u_m AFO_m ва BFO_m учбурчакларидан топилади: $FO_m = \frac{y_k}{x_k} u_m = \frac{l}{l_2} (l - u)$;

$$\text{бундан } u_m = \frac{fx_k}{y_k l_2 + fx_k}$$

келиб чиқади.

Кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиги

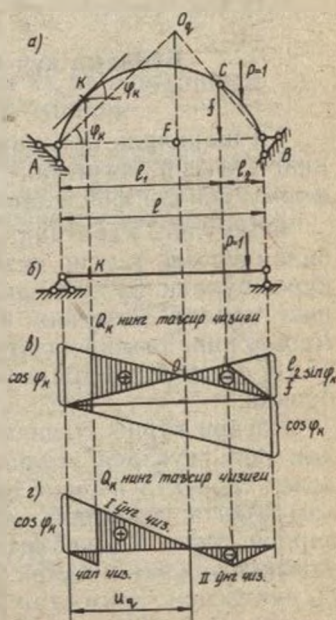
Уч шарнирли арканинг K кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизигини куришда куйидаги формуладан фойдаланамиз (5.9- расм, а):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k;$$

бу ерда Q_k^0 оддий балканинг K кесимидаги кўндаланг куч (5.9- расм, б); φ_k — K кесимига ўтказилган уринма билан горизонтал ўк орасидаги бурчак.

Арка бўйлаб бирлик куч ҳаракат қилганда, Q_k^0 билан H ўзгариб боради, $\cos \varphi_k$ билан $\sin \varphi_k$ эса ўзгаришсиз қолади. Бунга кўра Q_k нинг таъсир чизиги $Q_k^0 \cos \varphi_k$ билан $H \sin \varphi_k$ нинг таъсир чизиклари алгебраик йиғиндиси сифатида курса бўлади. Ана шу йиғинди 5.9- расм, в-да тасвирланган, яъни икки хил таъсир чизиги устма-уст жойлаштирилган. Микдорлари тенг, ишораси қарама-қарши бўлган ординаталар қисқариб кетган, қолганлари штрихланган. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизигидир.

Агар ҳосил бўлган шаклни горизонтал ўк устига



5.9- расм

жойлаштирсак, Q_k нинг таъсир чизиги 5.9-расм, ϵ да тасвирланган кўринишни олади.

Мазкур таъсир чизигини ноль нуктаси усулида, яъни график усулда курса ҳам бўлади. Бунинг учун аввал ноль нуктанинг ҳолати аниқлаб олинади, изланаётган нукта (O_q) икки чизикнинг кесишув нуктаси тарикасида топилади. Улардан бири BC чизиги, иккинчиси K кесимидан ўтган уринмага A шарниридан ўтказилган параллел чизикдир (5.9-расм, a). Шу нуктанинг горизонтал ўққа проекцияси (O) ноль нукта ҳисобланади.

Ихтиёрий горизонтал ўққа $\cos\varphi_k$ масофани ўлчаб кўямиз (5.9-расм, z). Масофанинг учини ноль нукта билан туташтирамиз ва уни C шарнири проекцияси билан учрашгунча давом эттирамиз. Ўтказилган кесма I ўнг чизик бўлади. II ўнг чизик шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизик I ўнг чизикка параллел равишда ўтказилиб K кесимининг проекциясига қадар давом этади. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиги ҳисобланади.

Ноль нуктанинг абсциссаси AFO_q ва BFO_q учбурчаклари орқали $U_q = \frac{H}{1 + \tan^2\varphi_k}$ формуладан топилади.

Бўйлама куч N нинг таъсир чизиги

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги бўйлама куч N_k нинг таъсир чизигини қуришда $N_k = Q_k \sin\varphi_k + H \cos\varphi_k$ формуласидан фойдаланамиз (5.10-расм, a).

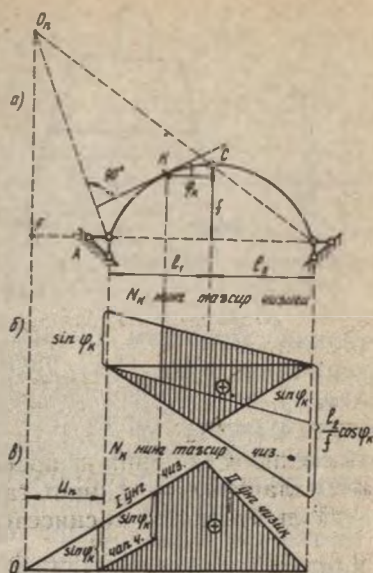
Формулага қараганда N_k нинг таъсир чизигини $Q_k \sin\varphi_k$ билан $H \cos\varphi_k$ таъсир чизикларининг йиғиндиси сифатида курса бўлади. Бу ишни амалга ошириш учун аввал $Q_k \sin\varphi_k$ нинг таъсир чизигини қурамиз. Сўнгра бунинг устига $H \cos\varphi_k$ нинг таъсир чизигини тесқари равишда жойлаймиз (5.10-расм, b). Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиги бўлади.

Илгари кўриб ўтганимиздек, N_k нинг таъсир чизигини ҳам ноль нуктаси усулида қуриш мумкин. Бунинг учун аввал O_n нуктаси топиб олинади (5.10-расм, a). Бу нукта ҳам иккита чизикнинг кесишув нуктасида ётади: чизиклардан бири BC кесмаси, иккинчиси эса K кесимидан ўтказилган уринмага тик бўлган AO_n чизигидир. Топилган O_n нуктасини горизонтал ўққа проекциялаб, ноль (O) нуктасини аниқлаймиз (5.10-расм, b). А таянч остига $\sin\varphi_k$

кесмасини ўлчаб қўямиз. Кесманинг юкори учини ноль нукта билан бирлаштириб, C шарнирининг проекциясигача давом эттирамиз. Бу I ўнг чизик бўлади. Чап тўғри чизик I ўнг чизикка параллел равишда ўтказилади. Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизигидир.

Ноль нуктасининг абсциссаси AFO_n ва BFO_n учбурчаклари оркали қуйидаги формуладан топилади:

$$u_n = \frac{l_2}{l_2 \operatorname{ctg} \varphi_k - f}$$

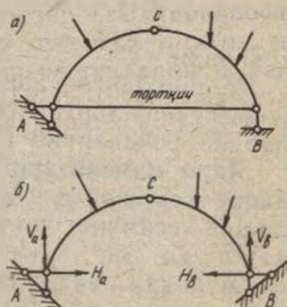


5.10-расм

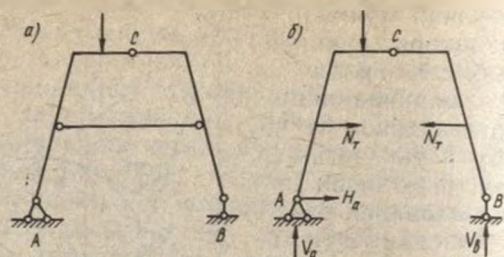
5.6. УЧ ШАРНИРЛИ ТОРТКИЧЛИ АРКА ВА РАМАЛАРНИ ХИСОБЛАШ. ЯДРО МОМЕНТЛАРИ

Уч шарнирли торткичли арка ва рамаларнинг ҳисоби торткичсиз системалар ҳисобидан биров фарк қилади. Бу тафовутни 5.11-расм, a — да тасвирланган арка мисолида кўриб ўтамиз.

Арканинг B таянчи шарнирли қўзғалувчидир. Ўртадаги C шарнирнинг мавжудлигини инобатга олсак, бу системага торткичнинг зарурийлиги ўз-ўзидан аён бўлади. Чунки бу системанинг геометрик ўзгармаслигини айнан шу торткич таъминлайди. Бошқача қилиб айтганда, B таянчи горизонтал йуналишда торткич туфайли қўзғалмасдир. Демак, торткични B таянчининг горизонтал стержени сифатида



5.11-расм



5.12- расм

талкин этса ҳам бўлади. Бу эса ҳисоб жараёнида торткичсиз арка (5.11- расм, б) учун берилган формулардан бемалол фойдаланиш имконини беради. Торткичдаги зўриқиш горизонтал таянч реакцияси H_b га тенг бўлганлиги сабабли торткичли арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишлар торткичсиз арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишларга тенг бўлади. Шунингдек, торткичли ва торткичсиз аркаларнинг таъсир чизикларида ҳам ҳеч қандай тафовут бўлмайди.

Баъзан уч шарнирли арка ва рамаларда торткич таянчдан юқорирокка ўрнатилади (5.12- расм, а). Торткични ташлаб юбориб, ўрнига карама-қарши йўналган кучлар N_r қўямиз (5.12- расм, б). Кучларнинг қиймати торткичдаги зўриқишга тенг бўлади. Бу ерда асосий масала ана шу зўриқишни аниқлашдан иборатдир. Раманинг таянч реакциялари статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилади.

N_r нинг қиймати C шарнирига нисбатан чап ёки ўнг томонда жойлашган кучларнинг моментлари йигиндисини ифодаловчи тенгламалар $\sum_{\text{чап}} M_c = 0$ ёки $\sum_{\text{ўнг}} M_c = 0$ дан топилади.

N_r аниқлангач, арка ёки раманинг исталган кесимидаги ички кучлар торткичсиз система учун берилган формулардан фойдаланиб топилади.

Ядро моментлари ва нормал кучланишлар. Материаллар қаршилиги фанидан маълумки, номарказий сиклишда кесимнинг четки нуқталарида ҳосил бўладиган энг катта ва энг кичик нормал кучланишлар қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$

Бу ерда F — элементнинг кўндаланг кесим юзаси; W — кўндаланг кесимнинг қаршилик моменти; N ва M — кесимга таъсир этувчи бўйлама куч ва эгувчи момент.

Арқа кесимининг четки нукталаридаги нормал кучланишларни аниқлашга ядро моментларидан фойдалансак, масала анча осонлашади.

Арқа кесимининг энг четки нукталари 1 ва 2 да ҳосил бўладиган нормал кучланишларни аниқлайлик (5.13-расм, а). Арқанинг чап қисмини ўнг қисмига бўлган таъсирини m нуктага қўйилган тенг таъсир этувчи R орқали белгилайлик. Тенг таъсир этувчи куч R ни бўйлама N ва кўндаланг Q ташкил этувчиларга ажратамиз.

1-нуктадаги нормал кучланишни кесим ядроси орқали аниқлаймиз (5.13-расм, б). Маълумки, бўйлама сиқувчи куч — ядронинг ҳошиясига қўйилса, кесим қирғоқларида нормал кучланиш нолга тенг бўлади. Бинобарин, бўйлама куч кесим ядросининг K_1 нуктасига қўйилса, 1-нуктадаги нормал кучланиш ноль бўлади.

Кесим ядросининг K_1 нуктасига ўзаро тенг, аммо қарама-қарши йўналган N кучини қўямиз. Бу учлардан бири m нуктасига қўйилган N кучи билан жуфт куч, яъни момент ҳосил қилади:

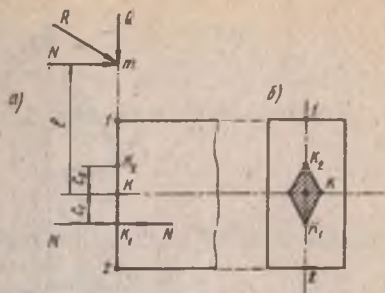
$$M_k = N(l + C_1)$$

иккинчиси эса 1 — нуктада нолга тенг бўлган кучланиш ҳосил қилади. Натижада 1-нуктадаги кучланиш σ фақат эгувчи момент M_k орқали ифодаланади: $\sigma_1 = \frac{M_k}{W}$; бу ердаги M_k — ядро моменти деб аталади.

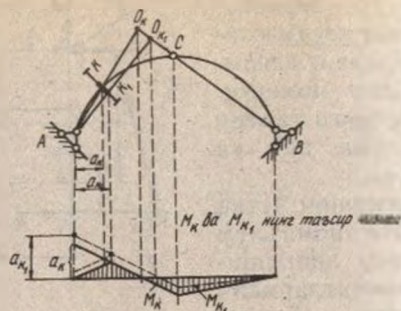
2-нуктадаги кучланишни ҳам ядро моменти орқали топса бўлади:

$$\sigma_2 = \frac{M_k}{W}, \text{ бу ерда } M_k = N(l - C_2)$$

5.14-расмда K кесимидаги эгувчи моменти M_k ва ядро моменти M_k нинг таъсир чизиклари берилган. Ҳар иккала



5.13-расм



5.14- расм

таъсир чизиги ноль нуктаси усулида қурилган. Графикни ясаш тартиби ҳар иккала момент учун бир хил. Асосий фарк O_k нуктасини аниқлашда намоён бўлади. Агар O_k нуктасини топишда AK нукталари бирлаштирилса, O_k нуктасини топишда AK_1 нукталари туташтирилади. Шунинг эвазига ноль нукталар орасида озгина фарк бўлади. Бу фарк ўз навбатида таъсир чизиклари ординаталари орасидаги тафовутга олиб келади.

5.7. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАСИМОН ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Аркасимон фермалар тузилиш жиҳатидан фермаларни, ишлаш жараёни жиҳатидан аркаларни эслатади. Шунинг учун ҳам уларни ҳисоблашда баъзан аркага, баъзан фермага хос бўлган қоидалардан фойдаланилади. Мухими шундаки, уч шарнирли аркасимон фермалар керкили (распорли) системаларга киради, яъни буларда ҳам вертикал кучлар таъсирида горизонтал реакция кучлари пайдо бўлади (5.15- расм, а). Керки кучларини шарнирли қўзғолмас таянчлар қабул қилади. Аркасимон ферманинг икки диски кулф-қалит шарнири C воситасида бириктирилади. Расмдан кўриниб турибдики, дисклар яхлит эмас панжародор қилиб ферма шаклида ишланган.

5.15- расм, а — да берилган уч шарнирли аркасимон ферманинг ҳисоби билан танишиб чиқамиз.

Берилган системанинг вертикал ва горизонтал реакциялари яхлит арканинг реакциялари каби аниқланади. Масалан, чап таянчдан x масофада бирлик куч $P=1$ қўйилган бўлса, V_a ва V_b реакциялари қуйидагича топилади:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

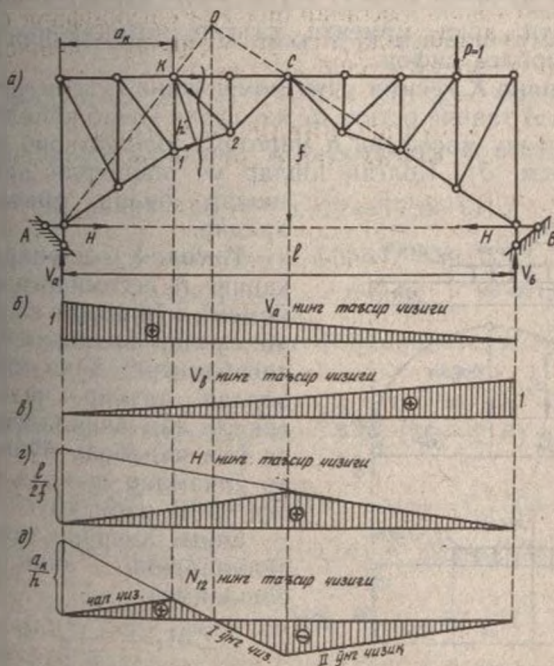
Керки кучи H куйидаги тенгламадан аникланади:

$$H = \frac{M_c^0}{f};$$

бу ерда M_c^0 — аркага тенг узунликка эга бўлган оддий балканинг C кесимидаги момент.

V_a , V_b ва H нинг таъсир чизиклари 5.15- расм, б, в, г — да тасвирланган.

Уч шарнирли аркасимон ферманинг 1—2 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизигини курамиз (5.15- расм, а). Фермани 1—1 кесими бўйлаб қирқамиз. Зўриқиши изланаётган стержень (1—2) учун K нукта момент нуктаси ҳисобланади. $N_{1,2}$ ни аниклаш учун K нуктага нисбатан чап томонда ётган кучлардан моментлар йиғиндисини



5.15- расм

ёзамиз (бунда бирлик куч кесимдан ўнгга деб фараз
этамиз):

$$\Sigma M_k = V_a a_k - H y_k - N_{12} h = 0;$$

бу ердан

$$N_{12} = \frac{V_a a_k - H y_k}{h}.$$

Агар момент нуктаси K ни арканинг K кесими деб
фараз этсак ҳамда a_k ва y_k ларни шу кесимнинг
координаталари деб олсак, касрнинг сурати аркавий
момент M_k^{ap} бўлади. У ҳолда зўриқиш

$$N_{12} = \frac{M_k^{ap}}{h}$$

ифодаси билан аникланади.

Демак, ферма стерженидаги зўриқиш N_{12} нинг таъсир
чизигини аркавий момент M_k^{ap} оркали курса бўлади. Бу
нинг учун арка моменти таъсир чизикларини h га
кискартирилса kifоя.

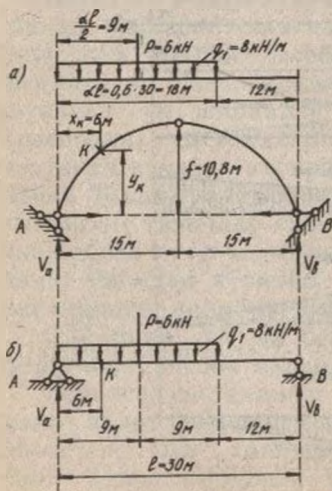
Арканинг K кесими учун моментнинг таъсир чизигини
куришда A таянчи остига a_k масофани ўлчаб қўйилар эди.
Бу сафар шу масофани h маротаба кичрайтириб қўямиз
(5.15- расм, δ). Колган ишлар уч шарнирли аркадаги
ишлар билан айнан бир
хилдир.

Мисол. Уч шарнирли ар-
канинг K кесимидаги эгувчи
момент, кўндаланг ва бўйла-
ма кучлар аналитик усулда
ҳисоблансин. Айни шу мик-
дорлар таъсир чизиклари
оркали ҳам аниклансин. Ар-
ка ўқи парабола бўлиб, куч
ва ўлчамлар шаклда берил-
ган (5.16- расм, a).

Ечиш. Ҳисобни таянч ре-
акцияларини аниклашдан
бошлаймиз:

$$\Sigma M_A = -V_B \cdot 30 + \\ + q_1 \cdot 18 \cdot 9 + P \cdot 9 = 0;$$

бундан $V_B = 45$ кН;



5.16- расм

$$\sum M_B = V_A \cdot 30 - P \cdot 21 - q_1 \cdot 18 \cdot 21 = 0;$$

бундан $V_A = 105$ кН;

$$\sum M_c^{\text{члп}} = V_A \cdot 15 - P \cdot 6 - q_1 \cdot 15 \cdot 7,5 - H_A f = 0$$

бундан $H_A = 59,167$ кН.

Кучлар вертикал бўлганлиги учун $H_A = H_B = H = 59,167$ кН.

Текшириш. $\sum y = V_A - P - q_1 \cdot 18 + V_B = 105 - 6 - 8 \cdot 18 + 45 = 0$.

Аналитик усулда K кесимидаги ички кучлар (M_k , Q_k , N_k) ни аниқлаймиз. Эгувчи момент куйидаги формуладан (5.3) топилади:

$$M_k = M_k^0 - H y_k.$$

Аркининг ўки парабола бўлганлиги учун y_k ординатаси куйидаги тенгламадан топилади:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x_k(l - x_k) = \frac{4 \cdot 10,8}{30^2} \cdot 6(30 - 6) = 6,912 \text{ м}.$$

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги момент

$$M_k^0 = V_A \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 = 105 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 486 \text{ кНм}.$$

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги момент

$$M_k = 486 - 59,167 \cdot 6,912 = 77,04 \text{ кНм}.$$

Кўндаланг кучни аниқлаш формуласи (5.6):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k.$$

Арка ўқининг тенгламасидан фойдаланиб, φ_k бурчакни аниқлаймиз (5.16- расм, а):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{dy_k}{dx_k} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 10,8}{30^2} (30 - 2 \cdot 6) = 0,864,$$

бундан $\varphi_k = 40^\circ 50'$; $\sin \varphi_k = 0,6538$; $\cos \varphi_k = 0,7566$.

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги кўндаланг куч

$$Q_k^0 = V_A - q_1 \cdot 6 = 105 - 8 \cdot 6 = 57 \text{ кН}$$

Аркининг K кесимидаги кўндаланг куч:

$$Q_k = 57 \cdot 0,7566 - 59,167 \cdot 0,6538 = 4,443 \text{ кН}.$$

Арканинг K кесимидаги бўйлама кучни аниқлаймиз (5.6):

$$N_k = Q_k \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k = 57 \cdot 0,6538 + 59,167 \cdot 0,7566 = 82,033 \text{ кН.}$$

Шундай қилиб, уч шарнирли арканинг K кесимидаги ички кучларни аналитик усулда аниқладик. Энди шу микдорларни таъсир чизиклари ёрдамида аниқлаймиз.

M_k нинг таъсир чизикларини қуриш

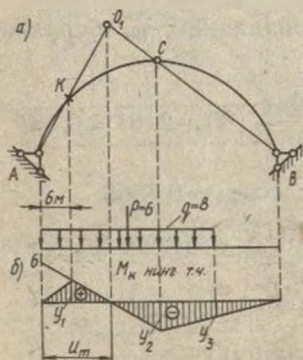
Таъсир чизигини ноль нуктаси усулида курамиз. Бунинг учун A таянч билан K кесим тўғри чизик ёрдамида туташтирилади. B таянч C шарнир билан туташтирилади. Икки тўғри чизикнинг кесишиш нуктаси (O_1) эгувчи моментнинг ноль нуктаси бўлади, чунки $P=1$ куч шу нуктада бўлганда K кесимдаги эгувчи момент нолга тенг бўлади (5.17- расм, а).

Координата ўқининг A таянч остидаги нуктасидан K кесимигача бўлган масофа (6м) ни ўқдан юқорига масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани координата ўқидаги O_1 нуктанинг проекцияси билан туташтириб, C шарнир проекциясигача давом эттирамиз. Бу тўғри чизикка K кесимининг проекциясини туширамиз ва уни A таянч остидаги координата ўқининг ноль нуктаси билан туташтирамиз. C шарнир остидаги ординатани B таянч остидаги координата ўқининг ноль нуктаси билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график M_k нинг таъсир чизиги деб аталади (5.17- расм, б).

А таянчдан O_1 нуктагача бўлган масофани u_m билан белгилаб, уни қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{2fl}{1 \cdot \frac{y_e}{x_e} + 2f} = \\ &= \frac{2 \cdot 10,8 \cdot 30}{30 \cdot \frac{6 \cdot 912}{6} + 2 \cdot 10,8} = \\ &= \frac{648}{56,16} = 11,538 \text{ м} \end{aligned}$$

Таъсир чизиклари ёрдамида номаълум зўриқишлар қуйидаги формула орқали ҳисобланади:



5.17- расм

$$M = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i.$$

Бизнинг мисол учун формула қуйидаги қуринишда ёзилади:

$$M_k = q(\omega - \omega_1 - \omega_2) + P \cdot y.$$

Бу ерда P, q — аркага қўйилган қўзгалмас юклар:

y — таъсир чизигида P кучи остидаги ордината;

ω — шу таъсир чизигида ёйилган куч остидаги қисмининг юзаси.

Ташки кучлар остидаги ординаталар, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади. Масалан,

$$\frac{6}{11,538} = \frac{y_1}{5,538}; \quad \frac{6}{11,538} = \frac{y}{2,538}; \quad \frac{6}{11,538} = \frac{y_2}{3,462}; \quad \frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12};$$

$$y_1 = 2,880; \quad y = 1,320; \quad y_2 = 1,8; \quad y_3 = 1,44.$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 11,538}{2} = 16,615; \quad \omega_1 = \frac{y_2 \cdot 3,462}{2} = 3,116;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 4,860.$$

Шундай қилиб, K кесимдаги эгувчи момент:

$$M_k = 8(16,615 - 3,116 - 4,860) - 5 \cdot 1,320 =$$

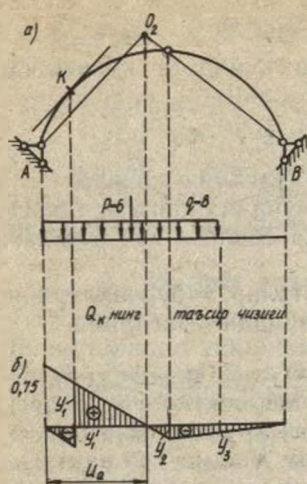
$$= 69,12 - 7,92 = 77,04 \text{ кНм}$$

(Аввалгиси билан таққосланг).

Q_k нинг таъсир чизигини қуриш (5.18- расм, а)

Қўндаланг куч учун ноль нуктаси ҳолатини аниқлай-
миз. Бунинг учун K кесимга уринма ўтказамиз. Бу
уринмага параллел қилиб A таянчдан тўғри чизик
ўтказамиз ва бу тўғри чизикни B таянч билан C шарнирни
туташтирувчи чизикдан давом эттирамиз. Кесишиш
нуктаси O_2 қўндаланг кучнинг ноль нуктаси бўлади, чунки
 $P=1$ бирлик куч шу нуктада турганда K кесимдаги
қўндаланг куч нолга айланади.

Қўндаланг куч таъсир чизигини қуриш учун ихтиёрий
масофада координата ўқи олинади ва бу ўққа A ,
 B таянчлари, C шарнири ва O_2 нуктасининг проекциялари
туширилади. A таянчи остига $\cos \varphi_k = 0,7566$ ни масштаб
бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани нукта билан тўғри



5.18-расм

чизик ёрдамида туташтирамиз. Координата ўқининг A таянчи остида бу тўғри чизикка параллел тўғри чизик ўтказамиз ва уни K кесимга ча давом эттирамиз. Сўнгра бу икки параллел тўғри чизикка K кесимининг проекцияси туширилади. С шарнир остидаги ордината B таянчининг ноль ординатаси билан туташтирилади. Кейин шаклда кўрсатилгандек штрихланади, ҳосил бўлган график Q_k нинг таъсир чизиги бўлади (5.18-расм, б).

Кўндаланг кучнинг ноль нуктасигача бўлган масофа u_Q куйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$u_Q = \frac{2fl}{2l + l \cdot \operatorname{tg} \varphi_k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 30}{2 \cdot 10 \cdot 8 + 30 \cdot 0,864} = \frac{648}{47,52} = 13,636 \text{ м.}$$

Кўндаланг кучнинг қийматини куйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$Q_k = +g(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + P \cdot y$$

Зарур ординаталарни учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_1}{7,636}; y_1 = 0,424; y'_1 = 0,7566 - y_1 = 0,3326;$$

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y}{4,636}; y = 0,257; \frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_2}{1,364}; y_2 = 0,076;$$

$$\frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12}; y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,061$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 7,636}{2} = 1,619; \omega_1 = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0,938;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 \cdot 1,364}{2} = 0,052; \omega_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 0,206$$

Қўндаланг куч киймати

$$Q_k = 8(1,619 - 0,998 - 0,052 - 0,206) + 6 \cdot 0,257 = 2,904 + 1,542 = 4,446 \text{ кН.}$$

N_k нинг таъсир чизигини қуриш (5.19- расм, а).

Бўйлама кучнинг ноль нуктасини аниқлаш учун A таянчидан K кесимиға ўтказилган уринмага тик чизик ўтказамиз ва уни B таянчи билан C шарнирни туташтирувчи тўғри чизик билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишув нуктаси бўйлама кучнинг ноль нуктаси (O_3) бўлади.

Ихтиёрий масофада координата ўқи олиниб, унга A , B таянчлари, C шарнири ва O_3 нуктасининг проекциялари (a , b , c ва d) туширилади. « a » нуктадан $\sin \varphi_k = 0,6538$ масофа (aa_1) ўлчанади ва бу масофа « d » нуктаси билан туташтирилади. « a_1d » чизигини « c_1 » нуктасигача давом эттириб, бу ординатани « b » нуктаси билан бирлаштирилади. « a » нуктасидан « $d c_1$ » чизигига параллел чизик ўтказиб, « ak » тўғри чизигини ҳосил қиламиз. K кесим остида бўйлама куч $\sin \varphi_k = 0,6538$ га тенг микдорда сакрайди. Штрихланган шакл N_k нинг таъсир чизиги бўлади (5.19- расм, б).

Бўйлама кучнинг ноль нуктасигача бўлган масофа

$$u_k = \frac{l}{\frac{l}{2j} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k - 1} = \frac{30}{\frac{30}{2 \cdot 10,8} \cdot \frac{0,7566}{0,6538} - 1} = \frac{30}{0,6072} = 49,407 \text{ м}$$

га тенг бўлади.

Таъсир чизиги ёрдамида бўйлама кучнинг кийматини аниқлаймиз

$$N_k = q_1(\omega + \omega_1 + \omega_2) + P \cdot y.$$

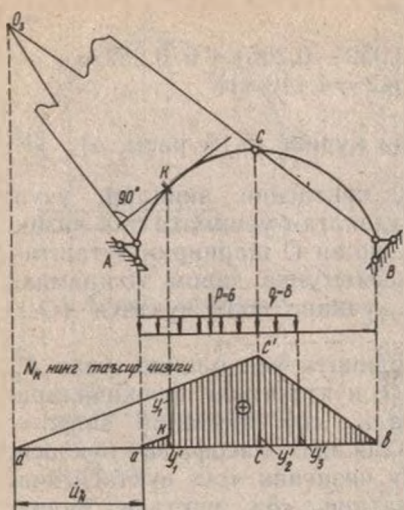
Керакли ординаталарни аниқлаймиз. Учбурчаклар ўхшашлигидан:

$$\frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_2}{64,407}, \quad \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_2}{55,407}, \quad \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y}{58,407},$$

$$y_2 = 0,852; \quad y_1 = 0,733; \quad y = 0,773;$$

$$y_1' = y_1 - 0,6538 = 0,0792; \quad y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,682.$$

Юзалар:



5.19- расм

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0,238;$$

$$\omega_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot 9 = 7,133;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 2,301.$$

Бўйлама кучнинг кий-
мати

$$\begin{aligned} N_k &= 8(0,238 - 7,133 - \\ &\quad - 2,301) - 6 \cdot 0,773 = \\ &= 77,376 - 4,638 = \\ &= 82,104 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, таъсир
чизиклари ёрдамида ички
кучларнинг қуйидаги кий-
матларини аниқладик:

$$M_k = 77,740 \text{ кН м}; Q_k = 4,446 \text{ кН}; N_k = 82,014 \text{ кН}.$$

Ички кучларнинг бу кийматлари аналитик усулда
аниқланган кийматлар билан бир хилдир.

6- боб

КЎЧИШЛАР НАЗАРИЯСИ

6.1. КЎЧИШЛАР ВА ИШЛАР ҲАҚИДА ТЎШУНЧА

Статик ноаник системаларни ҳисоблашда мувозанат тенгламаларидан ташқари кўчишлар тенгламаларини тузишга ва ечишга тўғри келади. Бундай тенгламаларни тузиш учун аввало иншоотларнинг деформацияларини аниқлашни билиш зарур. Кўчишларни аниқлаш масаласи фақат статик ноаник системаларгагина тааллуқли бўлиб қолмай, балки статик аниқ системаларга ҳам алоқадордир. Статик аниқ системалардан ташкил топган қурилиш конструкцияларининг деформацияси меъёридан ортиб кетмаслиги зарур. Бу масала ҳам кўчишлар орқали ҳал этилади. Шундай қилиб, кўчишларни аниқлаш масаласи қурилиш механикасининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

Бирор нуктанинг кўчиши деганда, иншоотнинг деформацияси жарғенида унинг (нуктанинг) координаталарининг ўзгариши тушунилади. Кўчишларни биз Гук конуни чегарасида аниқлаймиз, яъни кўчиши аниқланаётган кесимнинг кучланишлари пропорционаллик чегарасида ётади, деб фараз этамиз.

Кўчишларни аниқлашда кучлар таъсирининг мустикаллиги коидаси амал килади. Бу коидага кўра бир неча кучларнинг бир йўла қўйилгандаги натижаси ҳар бир кучни алоҳида қўйилгандаги натижалар йиғиндисига тенг бўлади.

Ташки кучлар иши. Кўчишларни аниқлашнинг умумий усули ташки кучлар иши назариясига асосланади, яъни ишлар орқали кўчишларни аниқласа бўлади.

Эластик системага аста-секин (статик равишда) қўйилган ташки куч P нинг бажарган ишини аниқлаймиз (6.1-расм, а). Деформациянинг кичик микдорларида эластик системага кучлар таъсирининг мустикаллиги коидасини қўллаш мумкин, бинобарин, алоҳида нукталарнинг кўчишлари уларни вужудга келтирувчи кучларга тўғри пропорционал бўлади. Гук конунига кўра бу боғланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta = \alpha P.$$

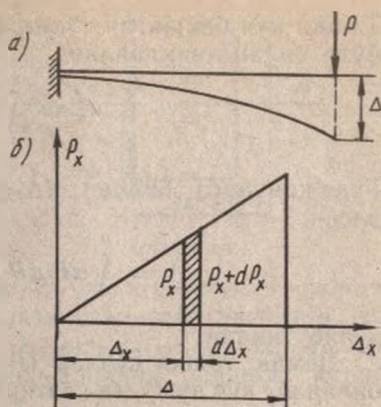
Бу ерда Δ — таъсир этувчи куч P йўналишидаги кўчиш;

α — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, иншоотнинг материали, тарҳи ва ўлчамларига боғлиқ микдордир.

P кучининг оралик қийматини P_x , унга мос бўлган кўчишни Δ_x деб белгилаймиз, (6.1-расм, б).

P кучини чексиз кичик микдор dP_x га орттирамиз. Натижада кўчиш ҳам $d\Delta_x$ масофага ортади. Бунда ташки куч қуйидаги элементар ишни бажаради:

$$dA = (P_x + dP_x)d\Delta_x = P_x d\Delta_x.$$



6.1-расм

Ташки куч бажарган тўлиқ иш бу ифодани интеграллаш йўли билан аникланади.

$$A = \int_0^P P_x d\Delta_x.$$

Гук конунига биноан $d\Delta_x = \alpha dP_x$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$A = \int_0^P \alpha P_x dP_x = \frac{\alpha P^2}{2} = \frac{1}{2} P\Delta$$

келиб чиқади.

Демак, ташки кучлар (P) бажарган ҳақиқий иш куч билан шу куч вужудга келтирган кўчишнинг кўпайтмасини ярмига тенг экан. Бу Клапейрон теоремаси деб аталади. Агар иншоотга бир неча кучлар $P_1, P_2, \dots, P_n$ қўйилган бўлса, ташки кучлар бажарган тўлиқ иш қуйидагича бўлади:

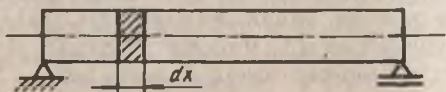
$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i.$$

Ташки кучларнинг бу иши иншоотда потенциал энергия тарзида тўпланади.

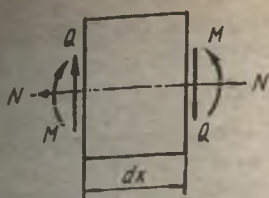
Ҳарчи Клапейрон теоремаси биргина куч мисолида берилган бўлса-да, аслида унинг қўлланиш чегараси жуда кенг. Ташки куч деганда биргина йиғиқ куч эмас, балки турли кучлар системаси тушунилади. Кўчишлар ҳам факат чизикли эмас, балки бурчакли бўлиши ҳам мумкин. Ҳўлоса қилиб айтганда, куч деганда эластик системага таъсир этувчи ҳар қандай кучлар мажмуаси тушунилади ва «умумлашган куч» деб аталади. Бу куч таъсирида вужудга келган кўчиш «умумлашган кўчиш» деб юритилди.

Ички кучлар иши. Кўчишларнинг вужудга келишида ташки кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этса ҳам бўлади. Ички кучлар деганда конструкция элементларида вужудга келадиган эгувчи момент M кўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

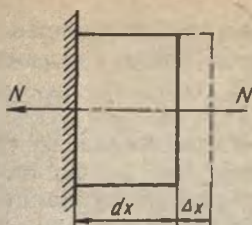
Балкадан (6.2-расм) чексиз кичик dx элементини ажратиб оламиз (6.3-расм). Ажратилган элементга M ,



6.2-расм



6.3- расм



6.4- расм

Q ва N кучлари таъсир этади. Бу кучлар бутун стерженга нисбатан ички куч, ажратилган элементга нисбатан эса ташқи куч деб қаралади. Буларнинг ҳар бирини dx элементига бўлган таъсирини алоҳида равишда қуриб ўтамыз.

Энг аввал ажратилган элементга бўйлама куч N нинг таъсири билан танишамиз (6.4- расм). Элементнинг чап томондаги кесими қўзғалмас деб фараз этсак, бўйлама куч таъсирида элементнинг ўнг томондаги кесими

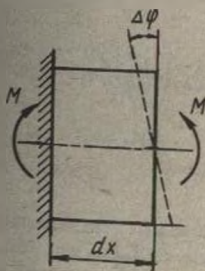
$$\Delta x = Ndx - EF$$

масофага кўчади. Бу ерда EF — стержень қўндаланг кесимининг сиқилиши ёки чўзилишдаги бикирлигидир.

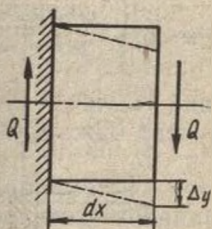
$\Delta \varphi$ бурчакли кўчишнинг вужудга келишида аста ортиб боровчи эгувчи момент қуйидаги миқдорда иш бажаради (6.5- расм):

$$dA_M = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = M \frac{M dx}{2EI}$$

Ниҳоят ажратилган элементга қўндаланг куч Q нинг таъсирини қуриб ўтамыз (6.6- расм). Агар элементнинг чап



6.5- расм



6.6- расм

кесимини маҳкамланган деб карасак, кўндаланг куч таъсирида унинг ўнг томондаги кесими

$$\Delta_v = \eta Q dx / GF$$

масофага силжийди. Бу ерда GF — кесимнинг силжишдаги бикирлиги. Δ_v силжишнинг вужудга келишида аста ортиб боровчи кўндаланг куч куйидаги микдорда иш бажаради:

$$dA_o = \frac{1}{2} Q \Delta_v = Q \frac{Q dx}{2GF} \eta$$

Бу ерда η — стерженнинг кўндаланг кесими шаклига боғлиқ коэффициент бўлиб, куйидаги формуладан топилади:

$$\eta = \frac{F}{J^2} \int \frac{S^2}{b^2} dF.$$

Тўғри тўртбурчакли кесим учун $\eta = 1,2$. Айлана учун $\eta = 10/9$.

Ажратилган dx элементга учала куч (N , M , Q) бир вақтнинг ўзида таъсир этса, тўлиқ иш куйидагича топилади:

$$dA = dA_n + dA_m + dA_o = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EI} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right).$$

Стерженларнинг барча участкалари бўйича бажарилган тўлиқ ишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$A = \frac{1}{2} \left(\sum \int_0^l M \frac{M dx}{EI} + \sum \int_0^l N \frac{N dx}{EF} + \sum \int_0^l Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right) \quad (6.1)$$

ёки

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta \quad (6.2)$$

Шундай қилиб, қучишларнинг вужудга келишида ташки қучлар бажарган ишни ички қучлар орқали ифода этдик.

Эластик системаларда ташки қучлар бажарган иш деформациянинг потенциал энергияси сифатида тўпланади. Ҳар қандай эластик жисм ташки қучлар вужудга келтирган энергияни ўзида жамлаш хусусиятига эга. Жисмни юқдан бўшатиш жараёнида потенциал энергия

иш бажаради. Мана шу ишни жисмдаги ички кучлар (M , Q , N) бажаради. Энергиянинг сакланиш қонунига биноан ташки кучлар бажарган иш система деформациясининг потенциал энергиясига (демак, ички кучлар бажарган ишга) тенг бўлади.

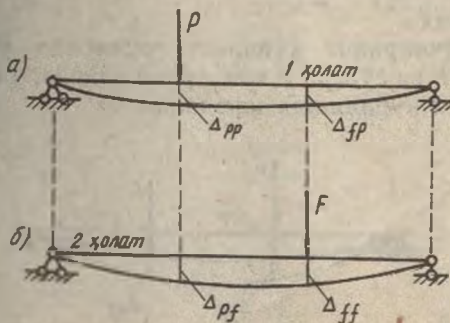
6.2. ИШЛАР ВА КЎЧИШЛАРНИНГ ЎЗАРО БОҒЛАНИШИ ҲАКИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

Икки хил куч таъсирида мувозанатда бўлган эластик системанинг икки ҳолатини кўриб ўтамыз. Биринчи ҳолатда системага P кучи, иккинчи ҳолатда F кучи таъсир этади дейлик (6.7-расм).

Системанинг кўчишларини Δ_{pf} тарзида белгилаймиз. Бунда биринчи индекс кўчаётган нукта ва унинг йўналишини, иккинчи индекс эса кўчишни вужудга келтираётган сабабни англатади. Ўқилиши бундай: P кучи қўйилган нуктанинг шу куч (яъни P кучи) йўналишида F кучи таъсирида вужудга келган кўчиш.

Δ_{pp} — P кучи йўналишида шу куч таъсирида вужудга келган кўчиш дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи бажарган иш A_{pp} бўлсин. Худди шунингдек, Δ_{ff} кўчишнинг вужудга келишида F кучи бажарган ишни A_{ff} деб белгилайлик. Агар ҳар иккала куч балкага статик таъсир этса, бу кучлар бажарган иш қуйидаги формуладан топилади:

$$A_{pp} = \frac{1}{2} P \Delta_{pp} \text{ ва } A_{ff} = \frac{1}{2} F \Delta_{ff}.$$



6.7-расм

Агар ҳар иккала ишни ички кучлар орқали ифодаласак

$$A_{pp} = \sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N_p^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_p^2 dx}{2GF} \eta;$$

$$A_{ff} = \sum \int_0^l \frac{M_f^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N_f^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_f^2 dx}{2GF} \eta$$

келиб чиқади.

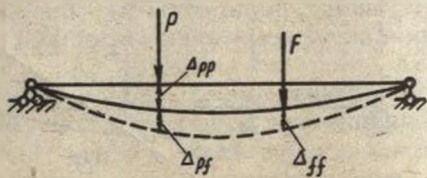
Энди ўша (6.7- расм) системага P ва F кучларининг олдинма-кейин қўйилиш жараёнини кўриб ўтайлик.

Аввал системага статик ортиб борувчи P кучи қўйилади, дейлик (6.8- расм). P кучи ўзининг тугал қийматига эришганда, системада 6.7- расм, a — да кўрсатилгандек вазият вужудга келади, яъни P кучи остида Δ_{pp} қўчиш ҳосил бўлади. Бу қўчишнинг вужудга келишида P кучи $A_{pp} = P\Delta_{pp}/2$ га тенг бўлган иш бажаради. Шундан сўнг солки системага F кучи қўйилади. Бу куч таъсирида система солқиланишда давом этиб, 6.7- расм, b — да кўрсатилган вазият вужудга келади. Бунда P кучи остида Δ_{pf} га тенг бўлган қўшимча солқилик ҳосил бўлади. F кучининг қиймати нолдан ўзининг тугал қийматига қадар ортиб борганда, P кучининг қиймати ўзгармасдан, $A_{pf} = P\Delta_{pf}$ га тенг бўлган қўшимча иш бажаради. F кучининг ўзи эса $A_{ff} = F\Delta_{ff}/2$ миқдорида иш бажаради. Шундай қилиб, системага кетма-кет равишда P ва F кучлари қўйилса, уларнинг бажарган тўлиқ иши

$$A = A_{pp} + A_{pf} + A_{ff} = \frac{1}{2}P\Delta_{pp} + P\Delta_{pf} + \frac{1}{2}F\Delta_{ff} \quad (a)$$

га тенг бўлади.

Агар кучларнинг қўйилиш тартибини ўзгартирсак, яъни аввал F ва сўнгра P кучларини қўйсак, у ҳолда тўлиқ иш қуйидаги кўринишда ифодаланади:



6.8- расм

$$A = \frac{1}{2} F \Delta_{II} + F \Delta_{Ip} + \frac{1}{2} P \Delta_{pp}.$$

Бирок кучларнинг қўйилиш тартиби ўзгариши билан бажарилган тўлик ишнинг миқдори ўзгармайди. Шунга кўра (а) ва (б) ифодаларни тенглаштириб, қуйидаги хулосага эга бўламиз:

$$P \Delta_{pf} = F \Delta_{Ip}.$$

Бу ерда $P \Delta_{pf}$ биринчи ҳолатдаги P кучининг шу йўналишда, иккинчи ҳолатдаги F кучидан ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир. $F \Delta_{Ip}$ эса иккинчи ҳолатдаги F кучининг шу куч йўналишида, биринчи ҳолатдаги P кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир (6.7-расм).

Шундай қилиб, биринчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида иккинчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган иш иккинчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида биринчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган ишига тенгдир.

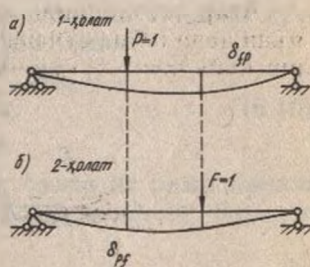
Бу хулоса ишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки унинг муаллифи Италия олими Энрико Бетти (1823—1892) теоремаси номи билан машҳурдир.

Энди кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема билан танишиб чиқамиз.

Бунинг учун яна балканинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз. Биринчи ҳолатда балкага $P=1$ кучи, иккинчи ҳолатда эса $F=1$ кучи қўйилган (6.9-расм).

Балкага қўйилган кучларнинг қиймати бирга тенг бўлганлиги сабабли балканинг ҳолатини бирлик ҳолат деб айтаміз.

Бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар δ ҳарфи билан, бирдан фаркли кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар эса Δ ҳарфи билан белгиланади. Шунга биноан биринчи ҳолатдаги кўчишни δ_{Ip} , иккинчи ҳолатдаги кўчишни эса δ_{pf}



6.9-расм

тарзида белгиладик. Ҳар иккаласи ҳам бирлик кучлардан ҳосил бўлган бирлик кўчишлардир.

Бу икки ҳолат учун Бетти теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$P\delta_{pf} = F\delta_{fp}$$

Агар $P=F=1$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\delta_{pf} = \delta_{fp} \text{ келиб чиқади.} \quad (6.5)$$

Бу тенглик кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки Максвелл теоремаси деб аталади.

Мазкур тенглик $P=F \neq 1$ бўлганда ҳам ўз кучини сақлайди ва қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta_{pf} = \Delta_{fp}. \quad (6.6)$$

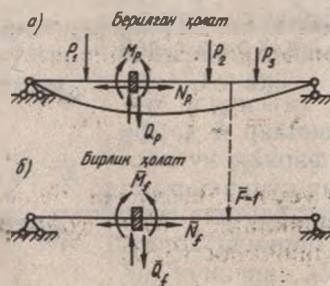
6.3. КўЧИШЛАРНИ АНИҚЛАШ УЧУН МОР ФОРМУЛАСИ ВА ВЕРЕШЧАГИН УСУЛИ

Кўчишларни аниқлайдиган формулани келтириб чиқаришда бевосита ишлар учун чиқарилган формулалардан фойдаланамиз.

Бирор эластик системанинг, масалан, балканинг икки ҳолатини кўриб чиқамиз. Биринчи, яъни берилган ҳолатда балкага исталганча кучлар қўйилиши мумкин (6.10- расм, а). Иккинчи ҳолатда балкага бирлик куч $\bar{F}=1$ қўйилади (6.10- расм, б).

Берилган кучлар таъсирида ҳосил бўлган Δ_{fp} кўчишнинг вужудга келишида иккинчи ҳолатдаги $\bar{F}=1$ кучи қуйидаги ишни бажаради:

$$A_{fp} = \bar{F}\Delta_{fp} = 1\Delta_{fp} = \Delta_{fp}.$$



6.10- расм

Δ_{ip} ни ички кучлар оркали ифода этсак,

$$\Delta_{ip} = \Delta_{ip} = \sum_0^l \bar{M}_i \frac{M_p dx}{EI} + \sum_0^l \bar{N}_i \frac{N_p dx}{EF} + \sum_0^l \bar{Q}_i \frac{Q_p dx}{GF} \quad (6.7)$$

кўринишдаги кўчишларни аниклаш формуласига, яъни Мор формуласига эга бўламиз.

Бу ерда M_p , N_p ва Q_p — берилган кучлардан ҳосил бўлган, $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$ ва $\bar{Q}_i$ — бирлик кучдан ҳосил бўлган ички кучлардир.

Бирлик куч одатда кўчиши аникланаётган нуктага қўйилади. Агар чизикли кўчиш (масалан, бирор нуктанинг соқилиги) аникланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғик куч қабул қилинади, агар бурчакли кўчиш (масалан, бирор кесимнинг оғиш бурчаги) аникланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғик момент қабул қилинади. Ҳар иккала ҳолда ҳам бирлик куч кўчиши изланаётган нуктага қўйилади.

Балка ва рамаларнинг кўчишларини аниклашда бўйлама ва кўндаланг кучлар таъсирини эътиборга олмасамиз ҳам бўлади:

$$\Delta_{ip} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (6.8)$$

Оддий аркаларнинг кўчишларини аниклашда эгувчи момент билан бўйлама кучнинг таъсири эътиборга олинмаскифоя

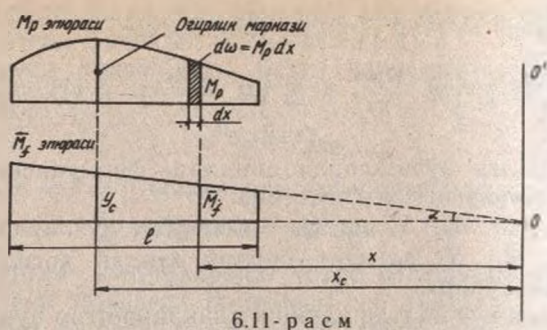
$$\Delta_{ip} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum_0^l \int \frac{\bar{N}_i N_p}{EF} dx. \quad (6.9)$$

Фермаларнинг кўчишларини аниклашда бўйлама кучларнинг таъсири эътиборга олинади, ҳолос

$$\Delta_{ip} = \sum_0^l \int \frac{\bar{N}_i N_p}{EF} dx. \quad (6.10)$$

Вертикалги усули. Маълумки, балка ва рамаларнинг кўчишларини аниклашда Мор формуласининг биринчи ҳадидан фойдаланилади (6.8):

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (a)$$



6.11-расм

Интеграл чегарасида кесим ўзгармас бўлса, эгилишдаги бикирликни интегралдан ташқарига чиқариш мумкин

$$\Delta_{sp} = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_l M_p dx. \quad (6)$$

Бу ерда M_p ва $\bar{M}_l$ — берилган ва бирлик кучлардан ҳосил бўлган эгувчи моментлар (6.11-расм). Қўпинча икки эпюранинг бири тўғри чизикли бўлади. Бундай ҳолларда

$\int_0^l \bar{M}_l M_p dx$ интегрални осонгина ечилади; аниқроғи мазкур интегрални интегралсиз ифода билан алмаштириш имкони туғилади.

Шаклдан (6.11-расм):

$$\bar{M}_l = x t_q \alpha \text{ ва } d\omega = M_p dx$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l \bar{M}_l M_p dx = t_q \alpha \int_0^l x M_p dx = t_q \alpha \int_0^l x d\omega$$

келиб чиқади.

Бу ерда $\int_0^l x d\omega$ интегрални M_p эпюрасининг юзаси ω_p дан $0-0'$ ўқига нисбатан олинган статик моментдир, яъни

$$\int_0^l x d\omega = \omega_p \cdot x_e.$$

Урнига кўямиз

$$\int_0^l \bar{M}_r M_p dx = x_c \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega_p; \quad (\text{a})$$

бирок $x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$ эканлигини назарда тутсак,

$$\int_0^l \bar{M}_r M_p dx = \omega_p y_c \quad (\text{b})$$

келиб чиқади, натижада интеграл функция интегралсиз ифода билан алмашади.

(в) ифодасини (б) га қўйсак, қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\Delta_{fp} = \frac{1}{EI} \sum \omega_p y_c \quad (\text{г})$$

Бу ерда ω_p — эгувчи моментлар эпюрасининг юзаси;

y_c — биринчи эпюранинг оғирлик марказига мос келган иккинчи эпюрадаги ордината.

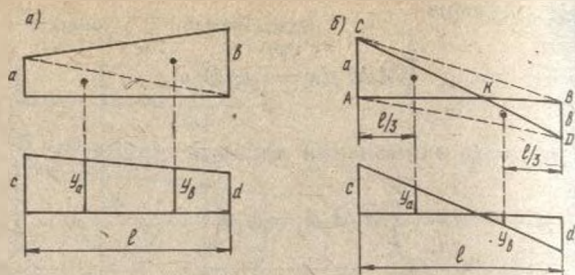
Кўчишларни аниқлашнинг бу усулини 1925 йилда Москва темирйўллар транспорти мухандислари институти-нинг толиби А. Н. Верещагин таклиф этган.

(г) дан кўринадики, ҳар иккала эпюра ўқнинг бир томонида жойлашса, кўчишнинг ишораси мусбат, ўқнинг турли томонларида жойлашса, ишора манфий бўлади. Шунинг ҳам қайд этиш лозимки, y_c ординатаси албатта тўғри чизикли эпюрадан олинган зарур. Агар ҳар иккала эпюра тўғри чизикли бўлса, у ҳолда ординатани қайси эпюрадан олинганнинг фарқи йўқ.

Трапеция шаклли икки эпюра қўпайтириладиган бўлса, улардан бирининг оғирлик марказини топиш ўрнига трапециялардан бирини иккита учбурчакка ажратган қулай. Бунда ажратилган учбурчаклардан юза олинган трапециядан шу учбурчакларнинг оғирлик марказларига мос бўлган ординаталар олинади (6.12- расм, а). Бу ҳол учун тайёр формула бор:

$$\frac{a l}{2} y_c + \frac{b l}{2} y_b = \frac{l}{b} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

Қавс ичида қуйидаги микдорларнинг йиғиндиси берилган: эпюралар чап ординаталари қўпайтмасининг иккилангани, ўнг ординаталар қўпайтмасининг иккилангани, биринчи эпюра чап ординатасини иккинчи эпюра ўнг ординатасига қўпайтмаси, шунингдек биринчи эпюра ўнг



6.12-расм

ординатасини иккинчи эпюра чап ординатасига кўпайтмаси.

Кўпайтириладиган эпюралардан бири ёки ҳар иккаласи турли ишорали учбурчаклардан ташкил топса, яна юқоридаги усулдан фойдаланилса бўлади (6.12-расм, б). Бунинг учун эпюралардан бирини ABC ва ABD учбурчакларига тўлдирамиз. Ҳосил бўлган СВК ва АКД учбурчакларининг ординаталари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлганлиги учун ҳисоб натижаларига таъсир этмайди.

Эпюралар кўпайтмаси (6.12-расм, б) қуйидаги формуладан топилади:

$$\frac{al}{2}y_a + \left(-\frac{bl}{2}\right)(-y_b) = \frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b.$$

Қучишларни Верешчагин усулида аниқлаганда, турли шаклларнинг юзалари ва оғирлик марказларини топишга тўғри келади.

Оддий геометрик шаклларнинг юза ва оғирлик марказларини аниқлаш ўқувчига ўрта мактабдан маълум. 6.13-расмда параболик эпюранинг юзаси ва оғирлик марказлари берилган.



6.13-расм

Верешчагин усулини бикирлиги ўзгармас бўлган балка ва рамаларда қўллаш мақсадга мувофиқдир. Агар бикирлик элементнинг узунлиги бўйлаб ўзгарувчан бўлса, у ҳолда EJ ни интегралдан ташқарига чиқариб бўлмайди, шу сабабли Верешчагин формуласидан фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда кўчишлар Мор интегралини бевосита ечиш йўли билан аниқланади.

6.4. ҲАРОРАТНИНГ ЎЗГАРИШИДАН ВА ТАЯНЧЛАРНИНГ ЧЎКИШИДАН ҲОСИЛ БЎЛАДИГАН КЎЧИШЛАР

Статик аниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши стерженда кўчишлар пайдо бўлишига олиб келади. Масалан, ҳарорат таъсирида стержень узайиши, қисқариши ва қийшайиши мумкин. Ҳароратнинг ўзгариши статик аниқ системаларда қўшимча зуриқишлар пайдо қилмайди.

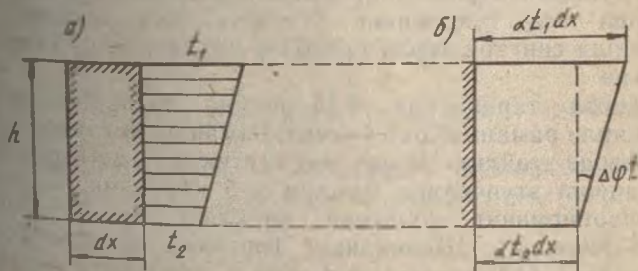
Юқорида кўриб ўтилган Мор формуласини (6.7) ҳарорат таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни аниқлаш масаласига татбиқ этамиз.

Ҳарорат таъсирида бўлган иншоотдан бирор dx бўлакчани ажратиб олайлик. Бўлакчанинг устки толаларининг ҳарорати t_1 пастки толаларининг ҳарорати эса t_2 бўлсин. Ҳарорат бўлакчанинг кўндаланг кесимида бир текисда тўғри чизик қонуни бўйича тарқалган дейлик (6.14- расм, а).

Ҳарорат таъсиридаги чизикли кенгайиш коэффициентини α бўлса, бўлакчанинг устки толаси $\alpha t_1 dx$ га, пастки толаси эса $\alpha t_2 dx$ масофага узаяди (6.14- расм, б).

Агар кесим горизонтал ўққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бўлакчанинг ҳарорат таъсирида ўртача узайиши

$$\Delta_{\text{ср}} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx$$



6.14- расм

бўлади. Бўлакчанинг кўндаланг кесимлари бир-бирига нисбатан

$$\Delta_{\varphi} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$$

бурчакка оғади.

Харорат таъсирида силжиш деформацияси рўй бермайди.

Буларни эътиборга олсак, Мор формуласи (6.7) қуйидаги кўринишга келади:

$$\Delta_{\rho l} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_{\rho} dx + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_{\rho} dx \quad (6.11)$$

Агар стерженларнинг кўндаланг кесимлари ўзгармас бўлса, интеграллар бирлик эпюраларининг юзалари сифатида ҳисоблаб топилиши мумкин, у ҳолда харорат таъсирида вужудга келган кўчишларни аниқлаш формуласи қуйидаги содда кўринишни олади:

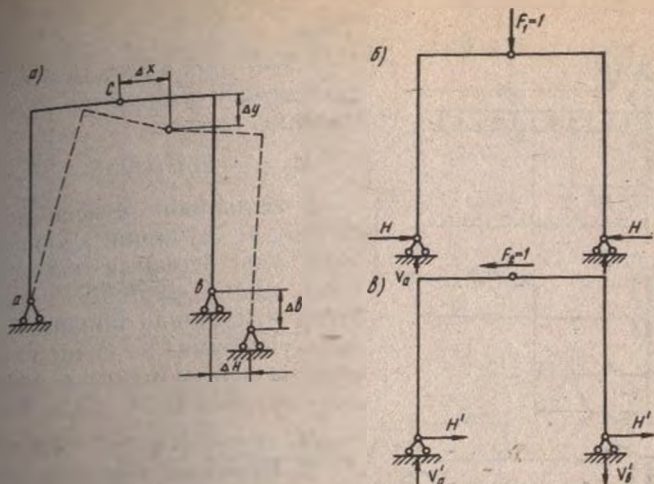
$$\Delta_{\rho l} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\bar{M}} + \Sigma \alpha + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{\bar{N}} \quad (6.12)$$

Бу ерда $\omega_{\bar{M}}$ ва $\omega_{\bar{N}}$ — бирлик эпюралар $\bar{M}$ ва $\bar{N}$ нинг юзалари.

(6.12) формула таркибидаги ҳадларнинг ишораси деформациянинг йўналишига боғлиқ: агар харорат таъсирида вужудга келган кўчишнинг йўналиши бирлик куч таъсирида вужудга келган кўчиш йўналиши билан бир хил бўлса, ишора мусбат, акс ҳолда манфий олинади.

Таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар. Статик аниқ системаларда таянчларнинг чўкиши иншоотда кўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди. Таянчларнинг кўчиши эса тупрокнинг ўтириши, сув босиши ёки силжиши сингари турли сабаблар таъсирида рўй бериши мумкин.

Мисол тариқасида 6.15-расмда тасвирланган уч шарнирли рамани кўриб ўтамиз. Раманинг В таянчи чўкди деб фараз этайлик. Чўкишнинг вертикал Δ_b ва горизонтал Δ_n ташкил этувчилари маълум деб қарайлик. Ўртадаги С шарнирининг ҳолатини аниқлаш талаб этилади (6.15-расм, а). Шарнирнинг вертикал кўчишини Мор формуласи бўйича аниқлаш учун С нуктасига вертикал йўналишда бирлик куч $F_1=1$ ни қўямиз. (6.15-расм,



6.15-расм

б). Бирлик ҳолат кучларининг ҳақиқий ҳолат кўчишларини вужудга келишида бажариши мумкин бўлган ишлари йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

$$1\Delta_y - V_b\Delta_b - H\Delta_H = 0.$$

Бу тенгламадан изланаётган кўчиш аниқланади

$$\Delta_y = V_b\Delta_b + H\Delta_H$$

Демак, мазкур кўчиш таянчларнинг ҳуқишига бевосита боғлиқ экан.

Горизонтал кўчиш Δ_x ни аниқлаш учун C шарнирига $F_2 = 1$ кучини қўямиз (6.15-расм, в). Мор теоремаси асосида қуйидаги ишлар тенгламасини тузамиз:

$$1 \cdot \Delta_x + V'_b \cdot \Delta_b + H' \Delta_H = 0, :$$

бу ердан

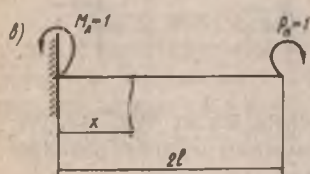
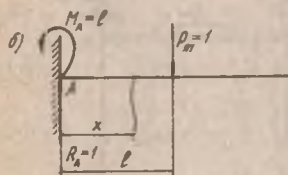
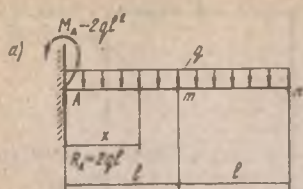
$$\Delta_x = -V'_b \Delta_b - H' \Delta_H$$

келиб чиқади.

Қуйида кўчишларни аниқлашга доир мисолларни кўриб ўтамиз.

1-мисол. Балканинг m кесимидаги қизикли кўчиш ва n кесимидаги бурчакли кўчиш Мор формуласи ёрдамида аниқлансин (6.16-расм, а).

Ечиш. Кўчишлар Мор формуласи (6.8) ёрдамида қуйидаги тартибда аниқланади:



6.16-расм

1. Энг аввал исталган кесим учун эгувчи моментлар тенгламасини тузамиз:

$$M_p = -2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2}$$

2. Балканинг m кесимидаги вертикал кўчишни аниклаш учун уни берилган юклардан озод қилиб, ўрнига изланаётган йўналишда бирлик $P_m = 1$ куч қўямиз ва унинг таъсирида эгувчи моментлар ифодасини тузамиз (6.16- расм, б):

$$\bar{M}_m = -P_m l + x = -l + x$$

3. Бурчакли кўчишни аниклаш учун балканинг n кесимида бирлик $P_n = 1$ момент қўямиз ҳамда эгувчи моментлар ифодасини тузамиз (6.16- расм, в);

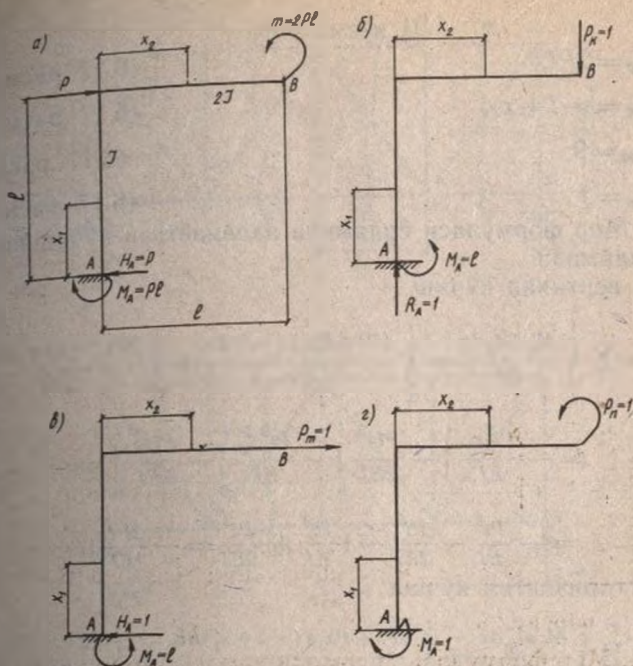
$$\bar{M}_n = -1$$

4. Мор формуласи ёрдамида « m » кесимининг вертикал Δ_{mp} кўчишини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \Delta_{mp} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_m dx}{EI} = \int_0^l \frac{(-2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2})(-l + x) dx}{Ey} = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l (2ql^3 - 2ql^2x + \frac{qex^2}{2} - 2qe^2x + 2qlx^2 - \frac{qx^3}{2}) dx = \\ &= \frac{1}{EI} (2ql^3x \Big|_0^l - ql^2x^2 \Big|_0^l + \frac{qlx^3}{6} \Big|_0^l - ql^2x \Big|_0^l + \\ &\quad + \frac{2qlx^3}{3} \Big|_0^l - \frac{qx^4}{4} \Big|_0^l) = \\ &= \frac{1}{EI} (2ql^4 - ql^4 + \frac{ql^4}{6} - ql^4 + \frac{2ql^4}{3} - \frac{ql^4}{8}) = \frac{17}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI} \end{aligned}$$

5. Мор формуласи ёрдамида « n » кесимининг бурчакли кўчишини аниқлаймиз:

$$\Delta_{np} = \int_0^{2l} \frac{M_p \bar{M}_n dx}{EI} = \int_0^{2l} \frac{(-2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2})(-1) dx}{EI} =$$



6.17-расм

$$= \frac{1}{EI} \left(2ql^2 x \Big|_0^{2l} - 2ql \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2l} + \frac{qx^3}{6} \Big|_0^{2l} \right) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(4ql^3 - 4ql^3 + \frac{8ql^3}{6} \right) = \frac{4}{3} \frac{ql^3}{EI}$$

2- мисол. Берилган юklar таъсирида раманинг «В» кесимидаги вертикал, горизонтал ва бурчакли қучишлар Мор формуласи ёрдамида аниқлансин (6.17- расм, а).

Ечиш.

1. Рамани алоҳида участкаларга (кесмаларга) ажратамиз. Ҳар бир кесма учун ташқи юк ва бирлик кучлардан эгувчи моментлар ифодаларини тузамиз:

I кесма учун:

$$M_p = Pl + Px_1;$$

$$M_k = -l;$$

$$M_m = -l + x_1;$$

$$M_n = 1;$$

(6.17- расм, а)

(6.17- расм б)

(6.17- расм в)

(6.17- расм, г)

II кесма учун

$$M_p = 2Pl; \quad (6.17- \text{расм, а})$$

$$\bar{M}_k = -l + x_2; \quad (6.17- \text{расм, б})$$

$$\bar{M}_m = 9; \quad (6.17- \text{расм, в})$$

$$\bar{M}_n = 1 \quad (6.17- \text{расм, г})$$

2. Мор формуласи ёрдамида изланаётган кўчишларни аниқлаймиз:

а) вертикал кўчиш

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{вер}} &= \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_k dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1)(-l) dx}{EJ} + \int_0^l \frac{2Pl(-l + x_2) dx_2}{2EJ} = \\ &= -\frac{Pl^2 x_1}{EJ} \Big|_0^l - \frac{Plx_1^2}{2EJ} \Big|_0^l - \frac{Pl^2 x_2^2}{EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_2^2}{2EJ} \Big|_0^l = \\ &= -\frac{Pl^3}{EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ} - \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ} = -\frac{2Pl^3}{EJ}; \end{aligned}$$

б) горизонтал кўчиш

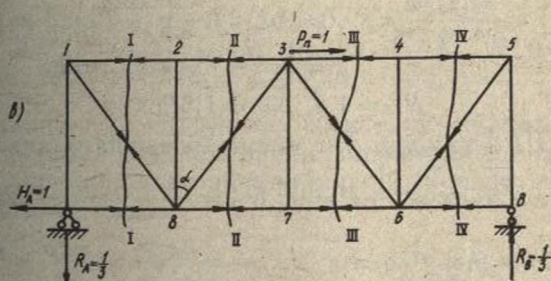
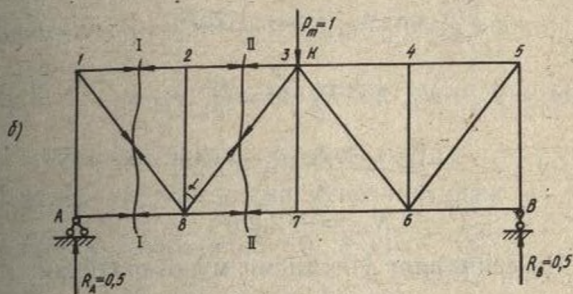
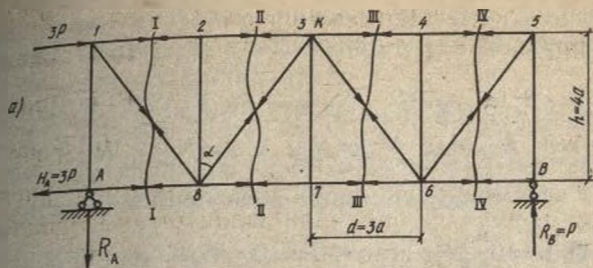
$$\begin{aligned} \Delta_{\text{гор}} &= \sum \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_m dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1)(-l + x_1) dx_1}{EJ} + \int_0^l \frac{2Pl \cdot 0 \cdot dx_2}{2EJ} = \\ &= -\frac{Pl^2 x_1}{EJ} \Big|_0^l - \frac{Plx_1^2}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_1}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Px_1}{3EJ} \Big|_0^l = \\ &= \frac{Pl^3}{EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}; \end{aligned}$$

в) бурчакли кўчиш

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{бур}} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1) \cdot 1}{EJ} dx_1 + \int_0^l \frac{2Pl \cdot 1}{2EJ} dx_2 = \\ &= \frac{Plx_1}{EJ} \Big|_0^l + \frac{Px_1^2}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_2}{EJ} \Big|_0^l = \frac{Pl^2}{EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{Pl^2}{EJ} = \frac{5Pl^2}{2EJ}. \end{aligned}$$

3- мисол. 6.18- расм, а да берилган ферманинг «К» тугунидаги вертикал ва горизонтал кўчишлар аниқлансин. Стерженлар биқирлиги ўзаро тенг деб қабул қилинсин.

Ечиш. Мор формуласи $\Delta_{ip} = \sum \frac{N_i^0 \cdot \bar{N}_i^k l_i}{EJ}$ га кўра қуйидаги амалларни бажаришимиз зарур:



6.18-расм

1. Ташки кучдан ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Таянч реакциялари $R_A = P$; $R_B = P$; ва $H_A = 3P$ қийматларига эга. Ҳисоблаш учун зарур бўладиган ферманинг геометрик параметрлари:

$$l_{18} = l_{38} = l_{36} = l_{56} = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha = \frac{l_{28}}{l_{38}} = \frac{4a}{5a} = 0,8.$$

А, 2, 7, 4 ва В тугунларнинг мувозанат шартларидан фойдаланиб, куйидаги зўриқишлар топилади:

$$N_{1A}=P; N_{8A}=3P; N_{5B}=-P; N_{28}=0; N_{37}=0; \\ N_{46}=0; N_{6B}=0; N_{12}=N_{23}; N_{78}=N_{6-7}; N_{34}=N_{45}.$$

I — I кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{18} \cdot \cos \alpha + P=0; N_{18}=-\frac{P}{\cos \alpha}= \\ =-\frac{P}{0,8}=-1,25P;$$

$$\Sigma m_8=0; -N_{12} \cdot h - R_b \cdot 3d=0; N_{12}=-\frac{-R_b \cdot 3d}{h}= \\ =-\frac{3 \cdot 3a}{4a}P=2,25P; \\ N_{23}=-2,25P.$$

II — II кесимининг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{35} - \cos \alpha - a=0; N_{38}=\frac{P}{\cos \alpha}=1,25P; \\ \Sigma m_3=0; N_{78} \cdot h - P \cdot 2d=0; N_{78}=\frac{2Pd}{h}=\frac{2P \cdot 3a}{4a}=1,5P; \\ N_{78}=1,5; N_{67}=1,5P.$$

III — III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{36} \cdot \cos \alpha + P=0; N_{36}=-\frac{P}{\cos \alpha}=-1,25P; \\ \Sigma m_0=0; N_{34}h + P \cdot d=0; N_{34}=-\frac{Pd}{h}=-\frac{P \cdot 3a}{4a}=0,75P; \\ N_{45}=-0,75P.$$

IV — IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{56} \cdot \cos \alpha - P=0; N_{56}=\frac{P}{\cos \alpha}=1,25P.$$

2. Ферманинг К тугунига вертикал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18-расм, б).

Таянч реакциялари $R_A=R_B=\frac{1}{2}=0,5$; $H_A=0$ бўлади.

Бу ерда ферма ва юкнинг симметриклиги эътиборга олинади. А. 2, 7, 4 тугунлар мувозанатидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар аниқланади: •

$$N_{5A} = N_{5B} = -0,5; N_{8A} = N_{6B} = 0; N_{28} = 0; N_{37} = 0; N_{46} = 0; \\ N_{12} = N_{23} = N_{34} = N_{45}; N_{78} = N_{67}; N_{18} = N_{56}; N_{38} = N_{36}.$$

I — I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; N_{18} \cos \alpha - 0,5 = 0; N_{18} = \frac{0,5}{\cos \alpha} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625;$$

$$\Sigma m_8 = 0; N_{12} \cdot h + 0,5 \cdot d = 0; N_{12} = \frac{0,5d}{h} =$$

$$= -\frac{0,53a}{4a} = -0,375;$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{12} = -0,375.$$

II — II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; N_{38} \cdot \cos \alpha + 0,5 = 0; N_{38} = -\frac{0,5}{\cos \alpha} =$$

$$= -0,625; N_{38} = -0,625;$$

$$\Sigma m_3 = 0; N_{7-8} \cdot n - 0,5 \cdot 2d = 0; N_{78} = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 39}{4a} =$$

$$= 0,75; N_{76} = 0,75.$$

3. Ферманинг К тугунига горизонтал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18- расм, в).

Таянч реакциялари:

$$\Sigma x = 0; H_A - 1 = 0; H_A = 1,$$

$$\Sigma m_A = 0; R_B \cdot 4d - P_1 \cdot h = 0; R_B = \frac{P_1 h}{Hd} = \frac{Pn4a}{4 \cdot 3a} = \frac{Pn}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\Sigma y = 0; R_A - R_B = 0; R_A = R_B = \frac{1}{3}.$$

А. 2, 7, 4, В тугунлар мувозанатидан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$N_{1-A} = R_A = \frac{1}{3}; N_{5-B} = -R_B = -\frac{1}{3}; N_{8-A} = H_1 = 1;$$

$$N_{6-B} = 0.$$

$$N_{28}=0; N_{3-7}=0; N_{46}=0;$$

$$N_{12}=N_{23}; N_{34}=N_{45}; N_{7-8}=N_{6-7}.$$

I — I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\begin{aligned} \Sigma y &= 0; N_{18} \cos \alpha + \frac{1}{3} = 0; N_{18} = -\frac{1}{3 \cos \alpha} = - \\ &= -\frac{1}{3 \cdot 0,8} = -\frac{1,25}{3} = -\frac{1,25}{3} = -0,417; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_8 &= 0; N_{12} \cdot h - \frac{1}{3} d = 0; N_{12} = \frac{d}{3h} = \frac{3a}{3 \cdot 4a} = \\ &= 0,25; N_{23} = 0,25. \end{aligned}$$

II — II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\begin{aligned} \Sigma y &= 0; N_{38} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0; N_{38} = \frac{1}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3 \cdot 0,8} = \\ &= \frac{1,25}{3} = 0,417. \end{aligned}$$

III — III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\begin{aligned} \Sigma y &= 0; N_{36} \cos \alpha + \frac{1}{3} = 0; N_{36} = -\frac{1}{3 \cos \alpha} = \\ &= -\frac{1}{3 \cdot 0,8} = -0,417; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_6 &= 0; N_{34} \cdot h + \frac{1}{3} d = 0; N_{34} = -\frac{d}{3h} = -\frac{3a}{3 \cdot 4a} = \\ &= -0,25; N_{45} = -0,25; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_8 &= 0; N_{67} \cdot h - \frac{1}{3} 2d = 0; N_{67} = \frac{2d}{3h} = \\ &= \frac{2 \cdot 3a}{3 \cdot 4a} = 0,5; N_{78} = 0,5. \end{aligned}$$

IV — IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; N_{56} \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0; N_{56} = \frac{1}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3 \cdot 0,8} = 0,417.$$

4. Ҳисобнинг давоми 6.1-жадвалда келтирилган:

6.1- жадвал

	N_{Pi}	l_i	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_n$	$N_{ip}N_{im}l_i$	$N_{ip}N_{in}l_i$
N_{12}	-2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53Pa	1,69Pa
N_{23}	-2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53Pa	1,69Pa
N_{34}	-0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84Pa	0,56Pa
N_{45}	-0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84Pa	0,56Pa
N_{8A}	3P	3a	0	1	0	9Pa
N_{78}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375Pa	2,25Pa
N_{67}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375Pa	2,25Pa
N_{6B}	0	3a	0	0	0	0
N_{1A}	P	4a	-0,5	1/3	-2Pa	1,33Pa
N_{28}	0	4a	0	0	0	0
N_{37}	0	4a	0	0	0	0
N_{46}	0	4a	0	0	0	0
N_{5B}	-P	4a	0,5	-1/3	2Pa	1,33Pa
N_{18}	-1,25P	5a	0,625	-0,417	-3,9Pa	2,6Pa
N_{38}	-1,25P	5a	-0,625	0,417	-3,9Pa	2,6Pa
N_{36}	-1,25P	5a	-0,625	-0,417	3,9Pa	1,6Pa
N_{56}	1,25P	5a	0,625	0,417	3,9Pa	2,6Pa
					13,49Pa	24,3Pa

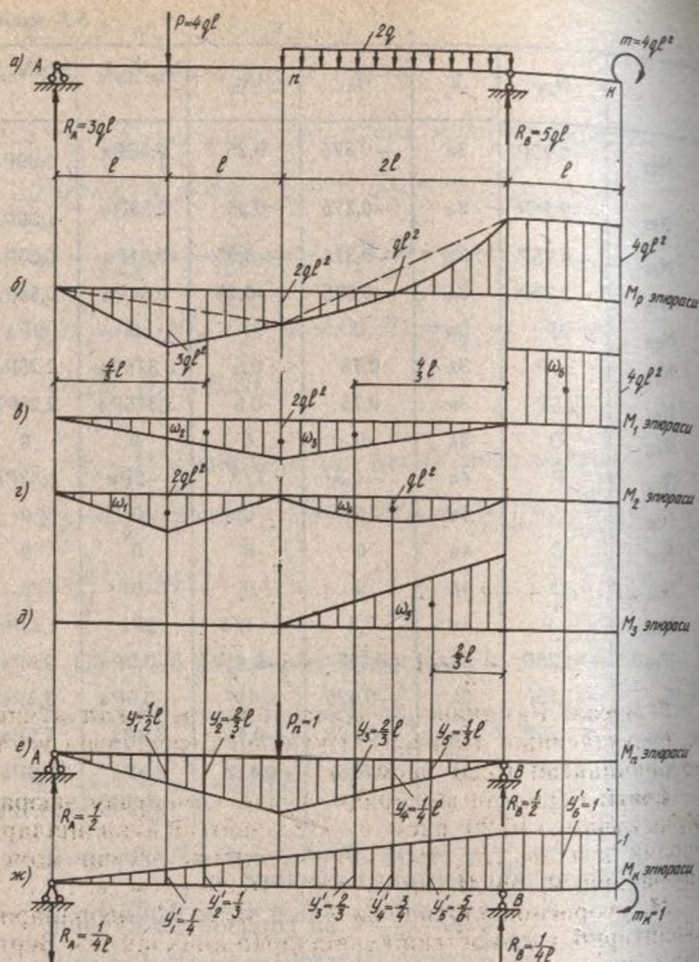
Ферма тугунининг вертикал кўчиши

$$\Delta_{np} = \sum \frac{N_{pi}N_{mi}l_i}{EF} = \frac{13,49Pa}{EF} \text{ ва горизонтал кўчиши}$$

$$\Delta_{np} = \sum \frac{N_{pi}N_{ni}b_i}{EF} = \frac{24,3Pa}{EF} \text{ бўлади.}$$

4- мисол. Берилган юklar таъсирида балканинг n кесимининг вертикал кўчиши ва «К» кесимининг бурчакли кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин. Балканинг бикирлиги унинг бутун узунлиги бўйича ўзгармас (6.19- расм, а).

Ечиш. 1. Берилган юklar таъсирида балканинг эгувчи моментлар эпюраси M_p ни курамыз (6.19- расм, б). M_p эпюрасини оғирлик маркази аниқ бўлган ва юзаларини



6.19-расм

хисоблаш осон бўлган одий эпюралар (M_{12} , M_{23} , M_3) га ажратамиз (6.19-расм, в, г, д).

2. Юкланмаган балкаларнинг бирига вертикал йўналишда бирлик куч ($P_n=1$), иккинчисига бирлик момент ($m_k=1$) қўямиз ҳамда M_n ва M_k эпюраларини курамиз. M_n ва M_k эпюраларининг эпюрасидаги оддий юзаларнинг оғирлик марказларига мос келадиган (y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5 , y_6 ва

$y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6$) ординаталарни аниқлаймиз (6.19- расм е, ж).

3. Верешчагин қондасига (6.11) амал қилиб, қўчишларни аниқлаймиз. Балканинг l кесимидаги вертикал қўчиш

$$\Delta_{\text{вк}} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} \sum \omega_{\text{вк}} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{q}{3} l + \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} ql^2 2l \cdot \frac{1}{2} l - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l \right) = \frac{ql^3}{EI} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3ql^3}{EI};$$

Балканинг K кесимидаги бурчакли қўчиш

$$\Delta_{\text{кр}} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EI} dx = \frac{1}{EI} \sum \omega_{y_i} = \\ = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{5}{6} + 4ql^2 \cdot l \cdot l \right) = \frac{ql^3}{EI} \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \right. \\ \left. - \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3} + 4 \right) = \frac{23}{6} \frac{ql^3}{EI}.$$

5- мисол. Раманинг K нуктасининг вертикал қўчиши ва l нуктасининг горизонтал қўчиши Верешчагин усулида аниқлансин (6.20- расм, а).

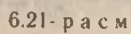
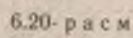
Ечиш. Берилган юклардан эгувчи моментлар эпюраси M_p ни курамиз (6.20- расм, б). Изланаётган йўналишларда бирлик кучлар (P_k, P_n) қўйиб, бирлик эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ ни курамиз (6.20- расм, в, г).

$\bar{M}_p$ эпюрасини алоҳида равишда $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ эпюраларига қўпайтириб, изланаётган қўчишларни аниқлаймиз. Вертикал қўчиш

$$\Delta_{\text{вк}} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EI} dx = \frac{1}{EI} \sum \omega_{y_i} = \frac{1}{2EI} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l + \\ + \frac{1}{2EI} 2ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = \frac{2ql^3}{EI} + \frac{ql^3}{2EI} = \frac{5}{2} \frac{ql^3}{EI}.$$

Горизонтал қўчиш

$$\Delta_{\text{гк}} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} \sum \omega_{y_i} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l +$$



$$+ \frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} 2l =$$

$$= \frac{16}{3} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{8ql^4}{EJ} + \frac{4ql^4}{EJ} = \frac{52}{3} \frac{ql^4}{EJ}.$$

6- мисол. «К» нуктасининг вертикал кучиши аниқлансин. Балка А нуктада шарнирли қўзғалмас таянч ва С нуктада ВС стержень (торткич) ёрдамида маҳкамланган. Балканинг бикирлиги EJ , стерженнинг бикирлиги EF (6.21- расм, а).

Ечиш. Балка эгилишга, стержень эса чўзилишга ишлайди. Кўчишни аниқлашда Мор формуласининг икки ҳадидан фойдаланамиз:

$$\Delta_{kp} = \int_0^{2l} \frac{M_p \bar{M}_k dx}{EJ} + \int_0^l \frac{N_p \bar{N}_k dx}{EF}.$$

Берилган кучдан эгувчи момент (M_p) ва бўйлама кучлар (N_p) эпюраларини курамиз (6.21- расм, б, в).

Изланаётган кўчиш йўналишида балкага бирлик куч ($P_k=1$) қўйиб бирлик эгувчи моментлар ($\bar{M}_k$) ва бирлик бўйлама кучлар ($\bar{N}_k$) эпюраларини курамиз: (6.21- расм, в).

Кўчишни Верешчагин коидаси ёрдамида аниқлаймиз:

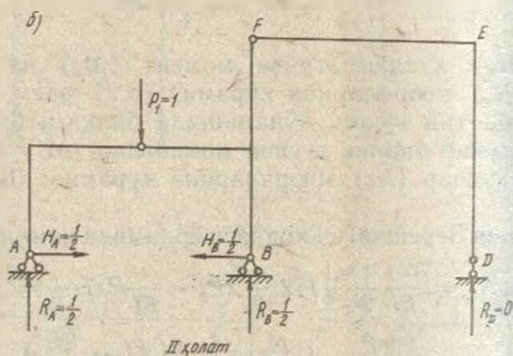
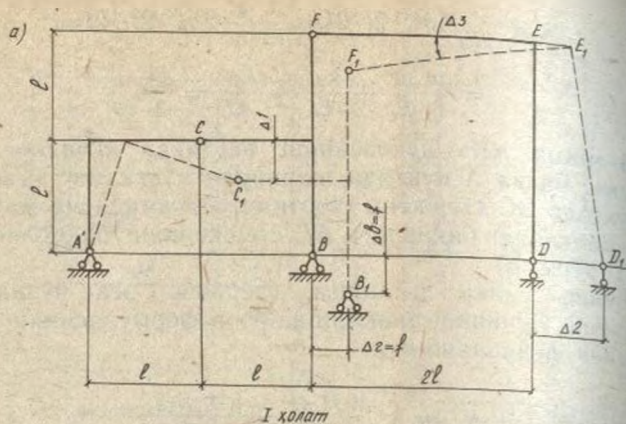
$$\Delta_{kp} = \frac{-1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} 2Pl - \frac{1}{EJ} P \cdot l \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{Pl^3}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl}{EF} \right)$$

Демак, К кесимининг кўчиши икки хил деформациянинг йиғиндисидан ташкил топар экан. Буларнинг биринчиси ригелнинг эгилиши (қавсдаги биринчи ҳад), иккинчиси эса устуннинг чўзилиши (қавсдаги иккинчи ҳад).

7- мисол. 6.22- расм, а — да кўрсатилган рама «В» таянчининг горизонтал Δ_2 ва вертикал Δ_6 силжишидан ҳосил бўлган С шарнирнинг вертикал кўчиши, Д таянчининг горизонтал кўчиши ва Е тугуннинг буралиш бурчаги аниқлансин. Рама В таянчининг силжишидан кейинги ҳолат пунктир чизик билан кўрсатилган.

Ечиш. Мисолни ечишда ишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги теоремага, яъни Бетти теоремасига асосланамиз. Бу теорема бўйича системанинг икки ҳолати кўриб ўтилади.

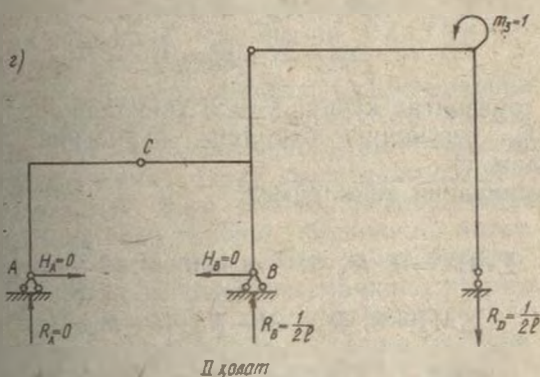
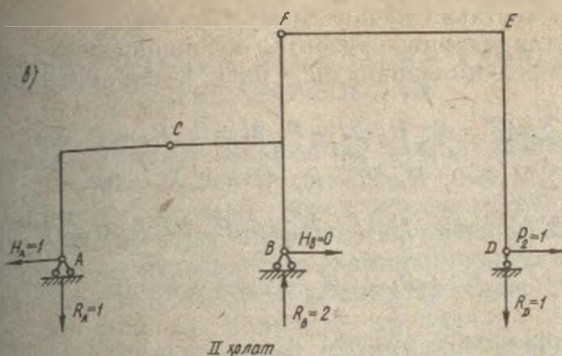


6.22- расм

Раманинг биринчи ҳолатида ташқи кучлар нолга тенг бўлишига қарамай, кўчишлар мавжуд (6.22- расм. а). II ҳолатлар сони аниқланаётган кўчишлар сонига тенг бўлиб, барчасида таянчлари силжимаган рама тасвирланган. С шарнирининг вертикал кўчишини аниқлашда шуну нуктага вертикал бирлик куч қўйилади (6.22- расм. б). Д таянчнинг горизонтал кўчишини аниқлашда раманинг Д нуктасига горизонтал бирлик куч қўйилади (6.22- расм, в).

Е тугуннинг бурилиш бурчагини аниқлашда раманинг Е нуктасига бирлик момент қўйилади (6.22- расм. г).

Барча II ҳолатларда В таянчдаги вертикал ва горизонтал реакция кучлари аниқланади.



1. С шарнирининг вертикал кўчишини аниқлаш.
Ишни таянч реакцияларини аниқлашдан бошлаймиз
(6.22- расм, а):

$$\Sigma M_F^{\text{ни}} = 0; R_D \cdot l = 0; R_D = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; R_B \cdot 2l - 1 \cdot l = 0; R_B = \frac{1}{2};$$

$$\Sigma M_C^{\text{ни}} = 0; R_B \cdot l - H_B \cdot l = 0; H_B = R_B = \frac{1}{2}.$$

Бетти теоремасига асосан

$$P_1 \Delta_1 - R_D f - H_B \cdot f = 0;$$

$$1 \cdot \Delta_1 - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f = 0;$$

бу ердан вертикал кўчиш $\Delta_1 = f$ топилади.

2. Д таянчининг горизонтал кўчишини аниқлаш.

Таянч реакцияларини 6.22- расм, в-дан аниқлаймиз:

$$\Sigma M_F^{\text{ўнг}} = 0; R_P \cdot 2l - P_L \cdot 2l = 0; R_P = P_2 = 1;$$

$$\Sigma M_A = 0; R_B \cdot 2l - R_P \cdot 4l = 0; R_B = 2R_D = 2;$$

$$\Sigma M_C^{\text{ўнг}} = 0; H_B \cdot l - R_B \cdot l - P_2 \cdot l + R_D 3l = 0;$$

$$H_B + P_2 - 3R_D = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Бетти теоремасига асосан

$$\Delta_2 P_2 - R_B f - H_B f = 0;$$

$$\Delta_2 l - 2f - 0f = 0;$$

бундан горизонтал кўчиш $\Delta_2 = 2f$ топилади.

3. Е тугуннинг бурилиш бурчагини аниқлаш (6.22- расм, г).

Реакцияларни аниқлаймиз:

$$\Sigma M_F^{\text{ўнг}} = 0; R_D \cdot 2l - m_3 = 0; R_A = \frac{m_3}{2l} = \frac{1}{2l};$$

$$\Sigma M_A = 0; R_B - 2l - R_D \cdot 4l + m_3 = 0;$$

$$2R_B l - \frac{1}{2l} 4l + 1 = 0; R_B = \frac{2-1}{2l} = \frac{1}{2l};$$

$$\Sigma M_C^{\text{ўнг}} = 0; H_B \cdot l - R_B \cdot l + R_D \cdot 3b - m_3 = 0;$$

$$H_B \cdot l - \frac{1}{2l} l + \frac{1}{2l} 3b - 1 = 0;$$

$$H_B \cdot l - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 0; H_B = 0.$$

Бетти теоремасига асосан

$$m_3 \Delta_3 - R_B \cdot f = 0;$$

$$1 \cdot \Delta_3 - \frac{1}{2l} f = 0;$$

бундан Е тугуннинг бурилиш бурчаги топилади:

$$\Delta_3 = \frac{f}{2b}.$$

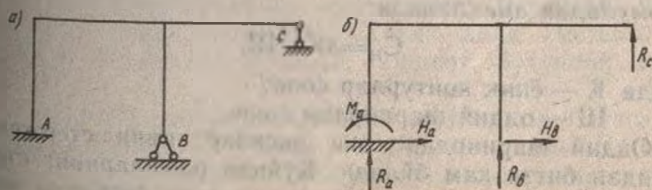
СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

7.1. СТАТИК НОАНИҚ СИСТЕМАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

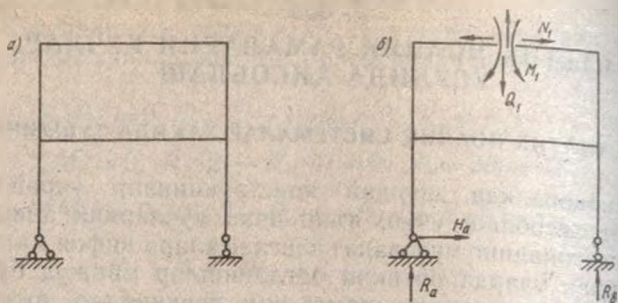
Бинокорликда шундай конструкциялар учрайдики, уларни ҳисоблаш учун, яъни ички кучларини аниқлаш учун статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя қилмайди. Чунки уларда ортиқча боғланишлар мавжуд бўлиб, ҳар бир боғланишда номаълум реакциялар вужудга келади. Номаълумлар сонини тенгламалар сонига тенглаштириш учун қўшимча тенгламалар тузиш талаб этилади. Ана шундай системалар статик ноаниқ системалар деб аталади.

Боғланиш деганда нукталар ва кесимларнинг ўзаро қўзғалишига қаршилик кўрсатувчи ҳар қандай тўсик тушунилади. «Ортиқча» боғланиш атамаси боғланишнинг «кераксизлигини» эмас, балки «керагидан ортиқча» эканлигини англатади. Агар статик ноаниқ системадаги ортиқча боғланишлар ташлаб юборилса, у ҳолда статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлади. Демак, ортиқча боғланишлар сони системанинг статик ноаниқлик даражасини белгилар экан.

Системалар шартли равишда ташки ва ички статик ноаниқ системаларга ажратилади. (7.1-расмда ташки, 7.2-расмда ички статик ноаниқ рама тасвирланган.) Буларнинг фарқига етиш учун ҳар иккала раманинг номаълум реакцияларини таҳлил этамиз. 7.1-расм, б-да олти номаълум таянч реакциялари кўрсатилган. Шундан ўқитаси статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилса, қолган ўқитаси статика учун «ортиқча» бўлиб қолади. Раманинг В ва С таянчларини ортиқча боғланиш деб қабул қилиб, уларни ташлаб юборилиши раманинг



7.1-расм



7.2- расм

геометрик ўзгармаслигига путур етказмайди, айти пайтда статик аник система ҳосил бўлади. Ортикча боғланишлар ўрнига реакция кучлари (H_b , R_b , R_c) ни қўямиз. Бу номаълум реакция кучларини аниқлаш учун қўшимча тенгламалар тузиш тақозо этилади. Хуллас бу раманинг статик ноаниқлиги ташқаридан кўзга ташланиб турибди.

7.2- расмдаги раманинг статик ноаниқлиги кўзга яққол ташланмайди. Бир қарашда статик аник рамадай туюлади. Аслида бу рама ҳам статик ноаниқдир.

Геометрик ўзгармас, статик аник система ҳосил қилиш учун берилган раманинг бирор еридан қирқамиз (яъни ортикча боғланишларни ташлаб юборамиз). Қирқимга тушган кесимнинг кўзғолмаслигини таъминлаш учун шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучларни ташқи реакция кучлари кўринишида тасвирлаймиз (7.2- расм, б). Бу учала куч (M_1 , Q_1 , N_1) ҳам номаълум. Номаълум таянч реакциялари (H_a , R_a , R_b) статика тенгламаларидан топилса, номаълум ички кучлар қўшимча тенгламалардан топилади. Демак, шарнирларга эга бўлмаган ҳар бир ёпик контур уч марта статик ноаниқ булар экан.

Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$C_H = 3K - \text{Ш},$$

бунда K — ёпик контурлар сони;

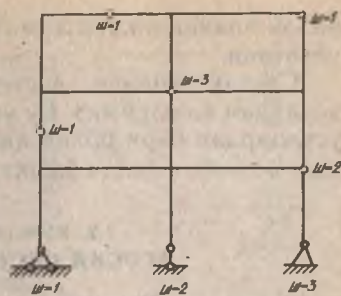
Ш — оддий шарнирлар сони.

Оддий шарнирлар сони дисклар, яъни стерженлар сонидан битта кам бўлади. Қуйида рамаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашга доир бир неча мисол кўриб ўтамиз.

1- мисол. 7.1- расм, а-да берилган раманинг статик ноаниклик даражаси аниқлансин.

Контурлар сонини белгилашда А, В, С таянчлари ҳаёлан туташтирилади. У ҳолда $K=2$ бўлади.

Шарнирлар сонини белгилашда шарнирли кўзгалмас таянчда $Ш=1$ деб, кўзгалувчи таянчда эса $Ш=2$ деб олинади:



7.3- расм

$$C_H = 3 \cdot 2 - 3 = 3.$$

Демак, мазкур рама уч марта статик ноаниқ экан.

2- мисол. 7.2- расм, а-да тасвирланган раманинг статик ноаниклик даражаси аниқлансин.

Епик контурлар сони $K=2$; оддий шарнирлар сони $Ш=2+1=3$; $C_H=3 \cdot 2 - 3 = 0$.

Демак, бу рама ҳам уч марта статик ноаниқ экан.

3- мисол. 7.3- расмда кўрсатилган раманинг статик ноаниклик даражаси аниқлансин.

Епик контурлар сони $K=6$; оддий шарнирлар сони (шаклда кўрсатилган) $Ш=12$;

$$C_H = 3 \cdot 6 - 12 = 6.$$

Демак, рама олти марта статик ноаниқ экан.

Статик ноаниқ системалар қуйидаги хоссаларга эга-дир:

1. Статик ноаниқ системалар таркибида ортиқча боғланишларнинг мавжудлиги туфайли ўзига мос статик аниқ системага нисбатан биқирлиги юқорирок бўлади.

2. Статик ноаниқ системалар ўзига мос статик аниқ системаларга нисбатан тежамлироқ бўлади.

3. Статик ноаниқ системаларда бирор ортиқча боғланишнинг шикастланиши иншоотнинг бутунлай ишдан чиқишига олиб келмайди. Статик аниқ системаларда бирорта боғланиш бузилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади.

4. Статик ноаниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши ва таянчларнинг чуқиши натижасида кўшимча зўриқишлар пайдо бўлади. Система элементларининг узунлигидаги фарқлари, элементларни йиғишда йўл қўйилган

баъзи ноаникликлар ҳам системада қўшимча зўриқишлар уйғотади.

Статик ноаник системаларни ҳисоблашни кучлар усулидан бошлаймиз. Бу усул қадимий ва пухта ишланган усуллардан бири бўлиб, камровининг кенглиги, ўзлашувининг осонлиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради.

7.2. КУЧЛАР УСУЛИНИНГ АСОСИЙ СИСТЕМАСИНИ ТАНЛАШ

Ҳар қандай статик ноаник системанинг ҳисоби унинг ноаниклик даражасини аниқлашдан бошланади. Шундан сўнг асосий система танланади. Берилган системанинг асосий системалари бир нечта бўлиши мумкин. Ҳисоблаш учун шуларнинг ичидан энг қулайи танлаб олинади. Кейинги ҳисоблар ана шу танланган система устида олиб борилади.

Хўш, асосий системанинг ўзи нима ва у қандай ҳосил қилинади?

Асосий система статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлиб, у берилган системадаги ортикча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинади.

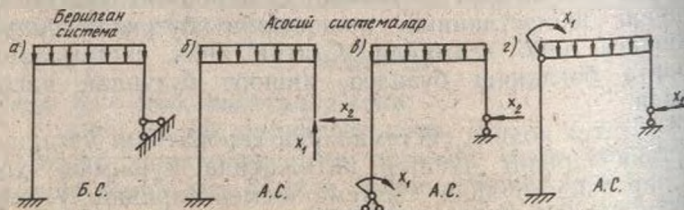
Асосий система ҳосил қилишнинг уч хил йўли бор:

а) ортикча деб қабул қилинган таянчлар ёки таянч стерженлари ташлаб юборилади;

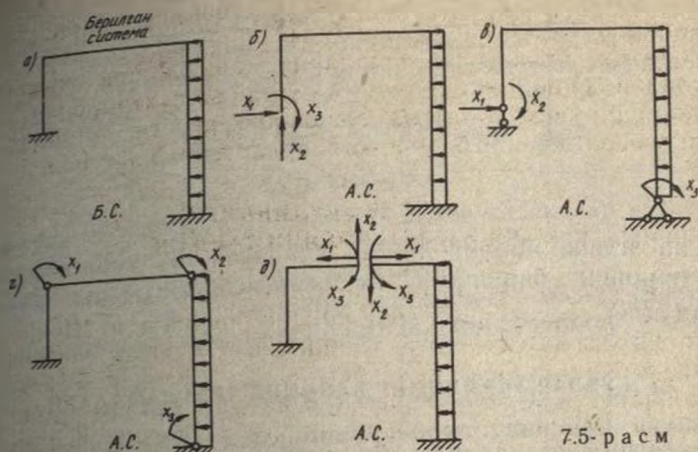
б) берилган системага шарнирлар киритилади;

в) берилган системанинг бирор қесими қиркилади.

Ҳар учала ҳолда ҳам амалда ортикча боғланишлар ташлаб юборилган деб ҳисобланади. Шундан сўнг, берилган системанинг дастлабки мувозанат ҳолатини тиклаш мақсадида йўқотилган боғланишлар ўрнига уларнинг вазифасини бажарувчи номаълум кучлар (X_1 , X_2 , X_3 ва ҳ. к.) қўйилади. 7.4-расмда икки номаълумли, 7.5-расмда уч номаълумли раманинг турли асосий системалари акс эттирилган.



7.4-расм

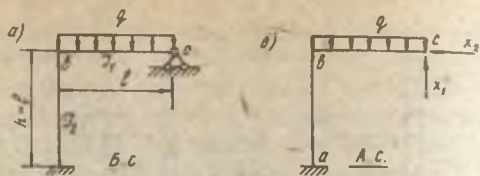


7.5-расм

Расмларга изох берамиз. 7.4-расм, б, в, г-да 7.4-расм, а-да берилган раманинг уч хил асосий системаси тасвирланган. Расм б-да шарнирли кўзгалмас таянч ташлаб юборилиб, унинг ўрнига таянч реакциялари X_1 ва X_2 қўйилган. Расм в-да чапдаги шарнирсиз таянч шарнирли кўзгалмас таянч билан, ўнгдагиси эса шарнирли кўзгалувчи таянч билан алмаштирилган. Инкор этилган боғланишлар ўрнига реакция кучлари тасвирланган. Расм г-да раманинг чапки бикир тугунига шарнир киритилган ва шарнир туфайли йўқотилган боғланиш ўрнига момент X_1 қўйилган. Раманинг ўнг таянчидаги горизонтал стержень ташлаб юборилиб, ўрнига реакция кучи X_2 қўйилган.

Учала асосий система ҳам геометрик ўзгармас, статик аниқдир. Ҳисоб ишлари учун улар ичидан исталган системани танлаб олиш мумкин. Учала ҳолда ҳам ҳисоб натижалари бир хил чиқаверади. Бирок, 7.4-расм, б-да тасвирланган асосий система булар ичида энг мақбулдир. Чунки бундай системанинг М эпюраларини қуриш ва кўчишларини аниқлаш бошқаларига нисбатан бирмунча қулай.

7.5-расмда уч номаълумли раманинг тўрт хил асосий системаси тасвирланган. Буларнинг дастлабки учтаси (7.5-расм, б, в, г) аввалги раманикига ўхшаш. Охиргиси (7.5-расм, д) қирқиш усулида ҳосил қилинган. Қирқилган кесимга ташқи кучлар таъсирида шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучлар — бўйлама куч X_1 , қўндаланг куч



7.6- расм

X_2 ва эгувчи момент X_3 лар куйилган. Бу тўрт асосий системанинг биринчиси ва охиригиси ҳисоблаш учун қулайдир.

7.3. КУЧЛАР УСУЛИНИНГ КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

Асосий системаларда ортиқча боғланишлар номаълум кучлар билан алмаштирилишини олдинги параграфда кўриб ўтдик. Эндиги вазифа ана шу номаълум кучларни аниқлашдан иборат. Бунинг учун статика тенгламаларига кўшимча равишда к а н о н и к¹ деб аталувчи тенгламалар тузамиз. Каноник тенгламаларни тузиш тартибини икки номаълумли рама мисолида кўриб ўтамиз. Берилган раманинг (7.6- расм, а) асосий системасини синик консол кўринишида (7.6- расм, б) танлаймиз. Ташлаб юборилган таянч ўрнига номаълум кучлар қўямиз, сўнгра куч усулининг каноник тенгламаларини тузамиз.

Берилган рамада шарнирли қўзғалмас таянчнинг маркази С вертикал ва горизонтал йўналишларда қўзғалмасдир, яъни унинг шу йўналишлардаги кўчишлари нолга тенгдир. Бундай шарт асосий системада ҳам сақланиб қолиши лозим, яъни С нуктасининг вертикал ва горизонтал кўчишлари нолга тенг бўлиши зарур. Бу шартни қисқа кўринишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\Delta_{x_1} = 0; \quad \Delta_{x_2} = 0; \quad (7.1)$$

бу ерда Δ_{x_1} — стержень учи С нинг X_1 куч йўналишидаги кўчиши;

Δ_{x_2} — шу нуктанинг X_2 кучи йўналишидаги кўчиши.

¹ Канон — қонуни, қоида, каноник тенглама — маълум қонуният асосида тузилган тенглама.

Хар иккала кўчиш x_1 ва x_2 кучлари ҳамда ташқи юклар таъсирида вужудга келади.

Кучлар таъсирининг мустиқиллиги коидасидан фойдаланиб, (7.1)ни алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида ифодалаймиз.

$$\Delta_{x_1 x_1} + \Delta_{x_1 x_2} + \Delta_{x_1 P} = 0;$$

$$\Delta_{x_2 x_1} + \Delta_{x_2 x_2} + \Delta_{x_2 P} = 0. \quad (7.2)$$

Бу ерда кўчишларга қўйилган биринчи индекслар кўчишнинг йўналишини, иккинчи индекслар эса шу кўчишни юзага келтирувчи сабабни билдиради.

Энди x_1 ва x_2 кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни Гук конунига асосан бирлик кўчишлар оркали ифода этамиз.

$$\Delta_{x_1 x_1} = x_1 \delta_{11}; \quad \Delta_{x_1 x_2} = x_2 \delta_{12}; \quad \Delta_{x_2 x_1} = x_1 \delta_{21}; \quad \Delta_{x_2 x_2} = x_2 \delta_{22}$$

Буларни (7.2) тенгламага қўйсак, икки номаълумли система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари келиб чиқади;

$$x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0; \quad (7.3)$$

Бу ерда δ_{11} — x_1 кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_1 = 1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

δ_{12} — x_1 кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_2 = 1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

Δ_{1P} — x_1 кучи йўналишида, Δ_{2P} — x_2 кучи йўналишида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Агар (7.3) да ифодаланган каноник тенгламаларнинг тузилишига жиддий эътибор берсак, унинг ёзилишида маълум конуният борлигини пайкаш қийин эмас. Шу конуниятдан фойдаланиб системанинг статик ноаниклик даражасига қараб, каноник тенгламаларни керагича туза оламиз. Бинобарин, система (масалан, рама) неча номаълумли бўлса, тенгламалар сони ўшанча бўлади. Масалан, уч номаълумли рама учун каноник тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2P} = 0;$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} = 0 \text{ ва х.к.} \quad (7.4)$$

(7.3) ва (7.4) да ифодаланган каноник тенгламаларда номаълум сифатида кучлар ($X_1, X_2, X_3 \dots$) турибди. Мазкур усулнинг «кучлар» усули деб аталишининг сабаби ҳам айнан ана шунда. Ушбу тенгламалардаги бирлик кўчишлар (δ_{ik}) — коэффициент, ташки кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар (Δ_{ip}) эса озод ҳад вазифасини ўтайди. Кўчишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги Максвелл теоремасига биноан $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ бўлади.

Бир хил индексли бирлик кўчишлар (δ_{11}, δ_{22}) нинг ишоралари ҳамиша мусбат бўлади. Шу сабабли улар ҳеч қачон нолга айланмайди ва ҳамма вақт тенглама таркибида иштирок этади. Шу сабабли улар бош кўчишлар деб аталади.

Турли индексли кўчишлар ($\delta_{12}, \delta_{13} \dots$) эса мусбат ва манфий ишораларга эга бўлиши ва демак, ноль бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун булар иккинчи даражали кўчишлар деб аталади.

7.4. КАНОНИК ТЕНГЛАМА КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ ВА ОЗОД ҲАДЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Кучлар усулининг каноник тенгламаларини ечиш учун, яъни улардаги номаълум кучлар ва моментларни аниқлаш учун аввал тенгламаларнинг коэффицентлари ва озод ҳадлари топилади.

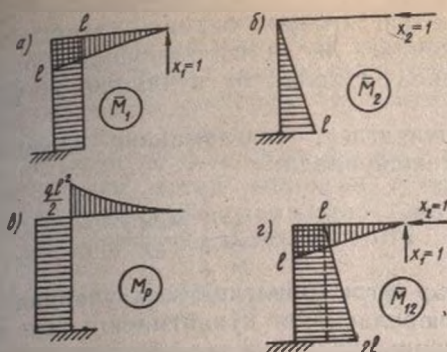
Маълумки, каноник тенгламаларнинг коэффицент ва озод ҳадлари кўчишлардир. Шунинг учун уларни аниқлашда 6-бобда баён этилган кўчишлар назариясидан фойдаланамиз.

7.6-расмдаги раманинг кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун бирлик кучлар таъсирида эгувчи моментларнинг бирлик эпюраларини (7.7-расм, а, б) қуриб оламиз. Ташки кучлар таъсиридаги Мр эпюраси 7.7-расм, в-да акс эттирилган.

Бирлик кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\delta_{11} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx;$$

$$\delta_{22} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx.$$



7.7- расм

Бу ерда $\bar{M}_1$ — асосий системанинг исталган кесимда бирлик куч $x_1=1$ дан ҳосил бўлган момент;

$\bar{M}_2$ — ўша кесимда $x_2=1$ кучидан ҳосил бўлган момент;

n — рама стерженлари сони.

Ташки юклардан ҳосил бўлган кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\Delta_{1P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx \quad \delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dx.$$

Верешчагин формуласидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюраларидан (7.7- расм, а, б) қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EI}; \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EI}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5ql^4}{8EI}; \quad \Delta_{2P} = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

Бу ерда $J_1 = J_2 = J$ деб олинган.

Тўғри ечимга эга бўлиш учун кўчишлар тўғри топилган бўлиши керак. Буларнинг тўғри ёки нотўғри топилганлигини текшириб кўрса бўлади. Икки хил текшириш бор: каторма-катор текшириш ва ялпи текшириш.

Текшириш учун бирлик эпюраларни қўшиб, йиғинди эпюра ($\bar{M}_{12}$) қурилади (7.7- расм, г). Каторма-катор текшириш қуйидаги формула асосида амалга оширилади:

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EI} dx; \quad (7.7)$$

яъни каноник тенгламанинг биринчи қаторидаги коэффициентлар йиғиндиси $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг чикса, у ҳолда бу кўчишлар тўғри топилган бўлади.

Худди шунингдек, тенгламанинг иккинчи қатори куйидагича текширилади:

$$(\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_{12}}{EI} dx \quad (7.8)$$

яъни кўчишлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Ялпи текширишда барча коэффициентлар йиғиндиси, $(\bar{M}_{12}) \cdot (\bar{M}_{12})$ кўпайтмасига тенг бўлиши зарур, яъни

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) + (\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EI} dx \quad (7.9)$$

Топилган коэффициентларни тўлиқ текшираимиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l^2 \cdot \frac{3}{2} l + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{5}{3} l \right) = \frac{8l^3}{3EI}$$

Бирлик кўчишлар йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} l^3 + \frac{1}{3} l^3 + l^3 \right) = \frac{8l^3}{3EI}$$

Кўпайтма йиғиндига тенг чикди. Демак, кўчишлар тўғри топилган.

Энди биринчи қатор коэффициентларини текшираимиз:

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{11l^3}{6EI}$$

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l^2 \cdot \frac{23}{2} l \right) = \frac{11l^3}{6EI}$$

Бу ерда ҳам йиғинди кўпайтмага тенг чикди. Шундай бўлиши ҳам керак эди.

Ниҳоят озод ҳадларни текшираимиз:

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12} \bar{M}_P}{EI} dx; \quad (7.10)$$

яъни озод ҳадлар йиғиндиси $\bar{M}_{12}$ эпюраси билан M_p эпюрасининг кўпайтмасига тенг бўлиши керак. Бу шартнинг бажарилиши озод ҳадларнинг тўғри топилганлигини англатади.

Кўчишлар, яъни коэффициент ва озод ҳадлар тўғри топилганига ишонч ҳосил қилинганча, уларни каноник тенгламаларга қўямиз. Тенгламаларни биргаликда ечиб, номаълум кучларни аниқлаймиз:

$$X_1 \cdot \frac{4l^3}{3} + X_2 \cdot \frac{l^3}{2} - \frac{5ql^4}{8} = 0;$$

$$X_1 \cdot \frac{l^3}{2} + X_2 \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{4} = 0.$$

Бу ердан

$$X_1 = \frac{3ql}{7} \text{ ва } X_2 = \frac{3ql}{28}$$

келиб чиқади.

7.5. СТАТИК НОАНИК РАМАЛАРНИНГ MQ ВА N ЭПЮРАЛАРИНИ ҚУРИШ

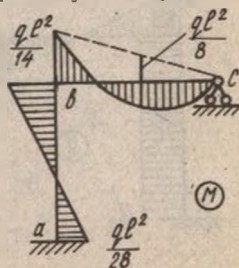
Каноник тенгламалардан ортикча номаълумлар ($X_1, X_2, \dots$) аниқланганча, раманинг натижавий, яъни тугал M эпюраси қурилади. Исталган кесимдаги моментнинг қиймати қўшиш усулида аниқланади:

$$M = M_p + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n \quad (7.11)$$

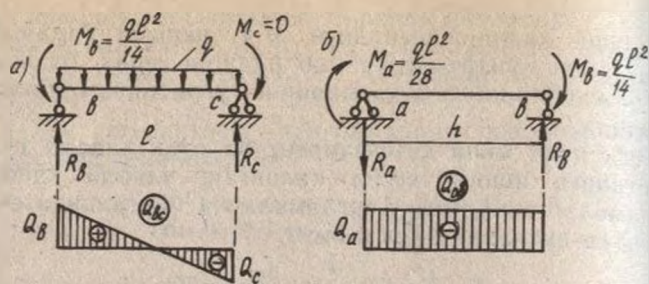
Бу ерда M_p — статик аник асосий системада ташки юклардан ҳосил бўлган момент; M_1 — асосий системада $X_1 = 1$ кучидан ҳосил бўлган момент.

X_1 кучининг ҳақиқий қиймати таъсирида ҳосил бўлган моментни топиш учун M_1 моментини X_1 га кўпайтирамиз, яъни X_1 таъсиридаги ҳақиқий момент $X_1 \bar{M}_1$ бўлади. Бу қоида бошқа номаълумлар ($X_2, X_3, \dots, X_n$) га ҳам тегишлидир.

7.6-расмда берилган икки номаълумли раманинг мазкур усулда қурилган M эпюраси 7.8-расмда акс этган. Расмда ригелнинг ўртасидаги момент ҳам кўрсатилган. Раманинг эғувчи моментлар эпюраси ҳамма вақт стержен-



7.8-расм



7.9- расм

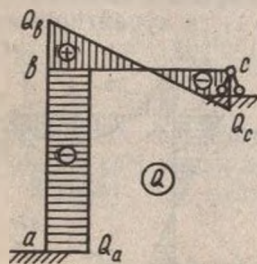
нинг толалари чўзилган томонга чизилишини эслатиб ўтамиз.

Статик ноаниқ раманинг якунловчи M эпюрасини куриб бўлдик. Бу билан ҳисобнинг энг муҳим ва мураккаб қисми тугади. Энди кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраларини куришга киришсак бўлади. Нега деганда M эпюраси асосида Q эпюраси, Q эпюраси асосида N эпюраси курилади.

Q эпюрасини куриш учун раманинг стерженларини алоҳида бўлақларга ажратамиз ва уларни бир ораликли статик аниқ балкалар сифатида ҳисоблаймиз. Бунда балкаларга ташқи кучлардан ташқари раманинг M эпюрасидан олинган тугун моментлари ҳам қўйилади. 7.9- расмда 7.6- расм, а-да берилган раманинг алоҳида балкаларга ажратилиши ва тегишли эпюралари тасвирланган. 7.9- расм, а-да bc ригели, 7.9- расм, б-да ab устунни балка кўринишида акс эттирилган ҳамда ташқи куч ва тугун моментлари кўрсатилган. Оддий балканинг Q эпюраси материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар

асосида курилади. Ишнинг охирида алоҳида балкалар учун курилган Q эпюраси рама ўкига тупланadi (7.10- расм).

Энди Q эпюраси асосида N эпюрасини курамиз. Бунда ригелга қўйилган кўндаланг кучлар устун учун бўйлама куч, устунга қўйилган кўндаланг кучлар эса ригел учун бўйлама куч бўлади деган қоидага асосланамиз. Бўйлама куч



7.10- расм

стерженни чўзса — мусбат, сикса — манфий ишора олинади.

Бўйлама кучларни аниқлаш учун Q эпюраси қурилган раманинг тугунлари бирин-кетин қирқиб олинади ва тугуннинг мувозанати текширилади. Энг аввал икки стерженли, кейин ундан ортиқ стерженли тугунлар қирқилади. Икки стерженли тугуннинг (7.11- расм, а) мувозанат шартларидан N_1 ва N_2 бўйлама кучлари аниқланади:

$$\sum Y = N_1 - Q_1 = 0; N_1 = Q_1;$$

$$\sum X = P + Q_2 - N_2 = 0; N_2 = -(P + Q_2).$$

Уч стерженли тугуннинг (7.11- расм, б) мувозанат шартидан N_3 аниқланади:

$$\sum Y = Q_3 - Q_1 - N_3 = 0; N_3 = Q_1 - Q_3.$$

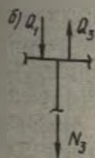
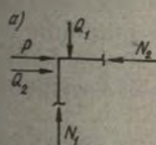
Қолган стерженлардаги бўйлама кучлар ҳам шу тартибда аниқланади.

Биз текшираётган раманинг (7.6- расм) бўйлама кучлар эпюрасини қуриш учун унинг Q эпюрасидан b тугунни қирқиб оламиз (7.12- расм, а) ва мувозанат шартларини ёзамиз:

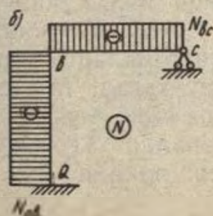
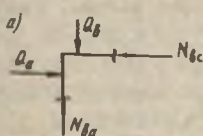
$$\sum X = Q_a - N_{bc} = 0; \text{бу ердан } N_{bc} = Q_a;$$

$$\sum Y = N_{ba} - Q_b = 0; \text{бу ердан } N_{ba} = Q_b.$$

Аниқланган қийматлар бўйича раманинг N эпюраси қурилади (7.12- расм, б).



7.11-расм



7.12-расм

Текшириш. Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси ортган сари ҳисоблаш ишлари мураккаблашиб бораверади. Бундай ҳолларда ҳисоб натижаларини текшириш муҳим аҳамият касб этади. Олдинги параграфда каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини текширишни ўрганган эдик. Бу сафар тугал M , Q ва N эпюраларини текширишни ўрганамиз. M , Q , N эпюраларини текширишнинг икки усули бор: статик текшириш ва деформацион текшириш. Эпюраларни статик текширган-да, яхлит рама ёки унинг айрим қисмлари ва тугунлари учун мувозанат шартлари тузилади. Бунда раманинг барча таянч реакцияларини вертикал ўққа бўлган проекциялари йиғиндиси ташқи юкларнинг вертикал проекциялари билан мувозанатда бўлиши лозим: бирор нуктага нисбатан таянч реакцияларидан олинган моментлар йиғиндиси шу нуктага нисбатан ташқи кучлардан олинган моментлар йиғиндисига тенг бўлиши зарур.

Раманинг ҳар бир тугуни эгувчи моментлар таъсирида мувозанатда ётиши керак, бунинг учун бир тугунга туташган ригель ва устундаги ординаталар ўзаро тенг бўлиши лозим. Тугунлардаги кўндаланг ва бўйлама кучлар алоҳида қаралганда, мувозанатда бўлмайди, бироқ биргаликда қаралганда тугун мувозанатда ётиши зарур. M , Q ва N эпюраларини статик текшириш уларнинг тўғри қурилганига кафолат бўлаолмайди, чунки статик мувозанат шартлари номаълумлар хато топилган тақдирда ҳам бажарилаверади. Бунинг сабаби шундаки, раманинг тугал M эпюраси статик аниқ асосий система учун қурилган. Агар ташқи юк ва аниқланган номаълумлар таъсирида эпюра тўғри қурилса, у ҳолда номаълумларнинг исталган қийматида рама статик мувозанат ҳолатида бўлаверади. Натижада номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хато очилмай қолаверади.

Деформацион текшириш ортикча номаълумларини аниқлашда йўл қўйилган хатоларни пайкаш имконини беради. Ҳисоб натижаларини деформацион текширишда асосий системаларга қурилган бирлик эпюралар (M_1 , M_2) раманинг тугал M эпюраси билан навбатма-навбат кўпайтирилади. Агар ортикча номаълумлар тўғри аниқланиб, эпюралар тўғри қурилган бўлса, бундай кўпайтма нолга тенг чиқади.

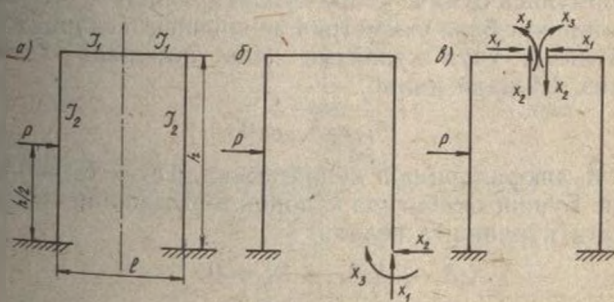
7.6. СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА СОДДАЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

Каноник тенгламалар сони системадаги ортиқча номаълумлар сонига тенг бўлишини илгари айтиб ўтган эдик. Демак, системанинг статик ноаниқлик даражаси ортгани сари каноник тенгламалар ҳам ортиб боради, уларни биргаликда ечиш учун тобора кўпроқ вақт ва меҳнат талаб этилади. Аниқ усулларда берилган системадаги номаълумлар сонини камайтириб бўлмайди, бироқ ҳисоблаш ишларини бирмунча осонлаштириш имконини берадиган соддалаштириш усуллари мавжуддир. Қуйида ана шу усулларнинг баъзилари билан танишиб чикамиз.

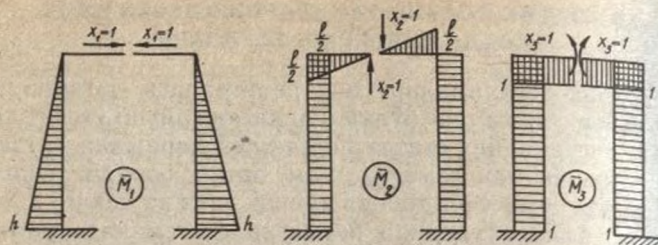
Системаларнинг симметриклигидан фойдаланиш

Симметрик рамалар фақат геометрик шаклига кўра эмас, балки таянчлари ва бикирликлари бўйича ҳам симметрик бўлиши лозим. Шунда уларнинг симметриклигидан фойдаланиб баъзи соддалаштиришларга эришиш мумкин. 7.13-расм, а-да симметрик статик ноаниқ рама тасвирланган. Рама битта вертикал симметрия ўқига эга. Раманинг чап ва ўнг таянчлари бир хил. Раманинг ҳар иккала устуни, шунингдек ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бир хил инерция моментига эга, бу ҳар иккала устун бир хил бикирликка эга, ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бикирликлари ўзаро тенг демакдир.

Агар раманинг асосий системасини 7.13-расм, б-да кўрсатилгандек олсак, ҳисоб жараёнида ҳеч қандай



7.13-расм



7.14-расм

соддалашувга эришмаймиз, уч номаълумли учта каноник тенгламалар системаси ўзгаришсиз қолаверади:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Агар раманинг асосий системасини 7.13-расм, в-даги кўринишда олсак, каноник тенгламалар системаси анча ихчамлашади. Раманинг асосий системасини ҳосил қилишда уни симметрия ўқи ўтган кесимдан қирқдик. Бу асосий системанинг бирлик эпюраларини курсак, симметрик ($\bar{M}_1, \bar{M}_3$) ва тескари симметрик ($\bar{M}_2$) эпюралар ҳосил бўлади (7.14-расм).

Тўғри ва тескари симметрик эпюраларнинг кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Бу қоида каноник тенглама коэффициентларини аниқлашда жуда қўл келади. Чунончи, δ_{12} коэффициентини аниқлашда $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралар Верещагин формуласи бўйича ўзаро кўпайтирилиши керак. Бирок эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлгани учун кўпайтма ноль чиқишини олдиндан биламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0.$$

$\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_3$ эпюраларининг кўпайтмасидан $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ келиб чиқади. Бунинг оқибатида каноник тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0; \end{aligned}$$

яъни яхлит тенгламалар системаси (7.12) иккита мустақил тенгламалар системасига ажралиб кетди: булардан бири

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0; \end{aligned} \quad (7.13)$$

иккинчиси

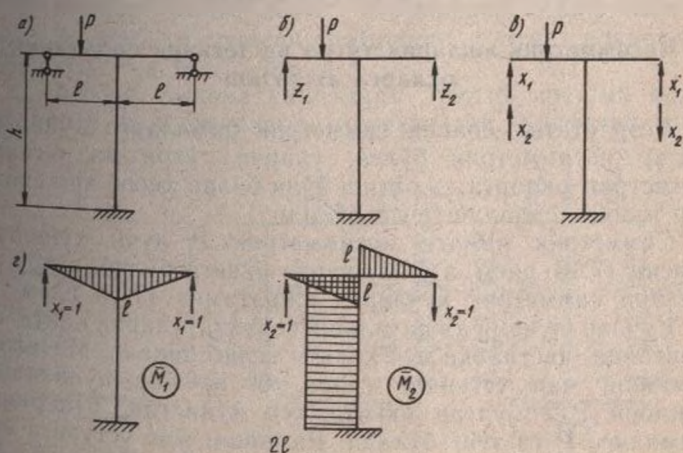
$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0. \quad (7.14)$$

Шундай қилиб, асосий система танлаш жараёнида раманинг симметриклик хусусиятларидан фойдаланиб, уч номаълумли яхлит тенгламалар системасини иккита мустақил тенгламалар системасига ажратдик, буларнинг бири икки номаълумли иккита тенглама, иккинчиси бир номаълумли битта тенглама. Натижада ҳисоб ишларини анча қисқартириш имкониятига эга бўлдик.

Номаълумларни гуруҳлаш

Кўп ораликли симметрик рамаларни ҳисоблашда тўғри ва тескари симметрик бўлган эпюралар ҳосил-қилиш учун номаълумлар сифатида алоҳида кучлар эмас, балки кучлар гуруҳи қабул қилинади. Икки номаълумли рама мисолида усулнинг моҳиятини баён этамиз (7.15-расм, а).

Берилган рама икки ораликли бўлиб, шарнирли кўзгалувчан таянчлар устунга нисбатан симметрик жой-



7.15-расм

лашган. Раманинг асосий системасини таянчларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қиламиз. Йўкотилган боғла-нишлар ўрнига номаълум реакция кучларини қўямиз (7.15- расм, б). Бирок асосий системани бундай олиниши ҳисоб ишларини соддалаштиришга олиб келмайди, кано-ник тенгламалар системаси яхлитлигича қолаверади:

$$Z_1\delta_{11} + Z_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$Z_1\delta_{21} + Z_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Ҳисоб жараёнида маълум даражада соддалашувга эришиш мақсадида Z_1 реакциясини X_1 ва X_2 номаълумла-рининг йиғиндиси билан, Z_2 реакция кучини эса X_1 ва X_2 номаълумларининг айирмаси билан алмаштирамиз (7.15- расм, в). Натижада якка кучлар кучлар гуруҳи билан алмашади. Бунинг оқибатида тўғри (M_1) ва тескари (M_2) симметрик эпюраларга эга бўламиз (7.15- расм, г). Маълумки, бундай эпюралар қўпайтмаси нолга тенг бўлади, Шунга кўра $\delta_{12} = 0$. Каноник тенгламалар система-си эса алоҳида иккита мустақил тенгламаларга ажралиб кетади:

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1p} = 0; \quad X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

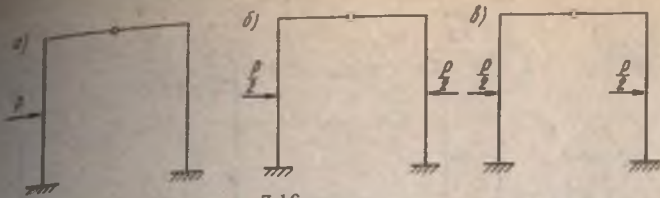
Мазкур тенгламалардан X_1 ва X_2 номаълумлари аниқланади, сўнгра яқунловчи M эпюраси қурилади.

$$M = M_p + X_1M_1 + X_2M_2.$$

Носимметрик юкларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш

Агар статик ноаник симметрик рамаларга қўйилган юклар носимметрик бўлса, уларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли билан ҳисоб ишларини бир мунча соддалаштирса бўлади.

Симметрик рамага носимметрик P кучи қўйилган бўлсин (7.16- расм, а). Шу кучни иккига бўлиб, тўғри ва тескари симметрик кучларга ажратамиз (7.16- расм, б, в). Кучлар шундай ажратилиши керакки, уларни қайтадан қўшганда, дастлабки куч ҳолати келиб чиксин. Масалан, раманинг чап устунига (расм, б, в) бир йўналишда микдори $P/2$ бўлган иккита куч қўйилган, буларнинг йиғиндиси P га тенг бўлади. Раманинг ўнг устунига эса ўша кучлар карама-қарши йўналишда қўйилган, бу



7.16-расм

кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади, натижада дастлабки куч ҳолати келиб чиқади.

Шундай қилиб, тўғри ва тескари симметрик кучлар қўйилган иккита рамага эга бўлди (7.16-расм, б, в). Энди бу рамалар алоҳида равишда ҳисобланади, тўғри симметрик кучлардан $M_{\text{тўғ}}$ эпюраси, тескари симметрик кучлардан $M_{\text{тес}}$ эпюраси курилади. Раманинг берилган кучдан ҳосил бўладиган ҳақиқий M эпюраси тўғри ва тескари симметрик эпюралар йиғиндисидан иборат бўлади.

Носимметрик равишда жойлашган турли хил ташки кучларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли 7.17-расмда кўрсатилган.

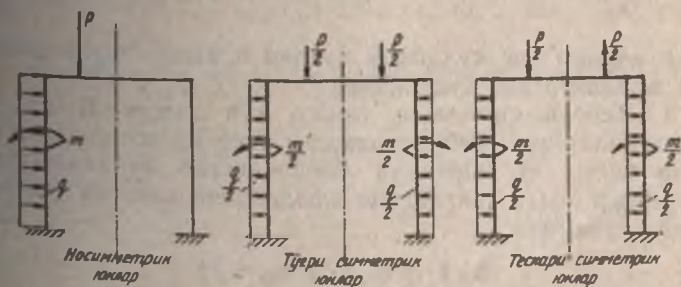
Мисол. 7.18-расм, а-да кўрсатилган рама куч усулида ҳисоблансин. Рама элементларининг ўлчамлари шаклда кўрсатилган.

Ечиш. Статик ноаник рамани куч усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

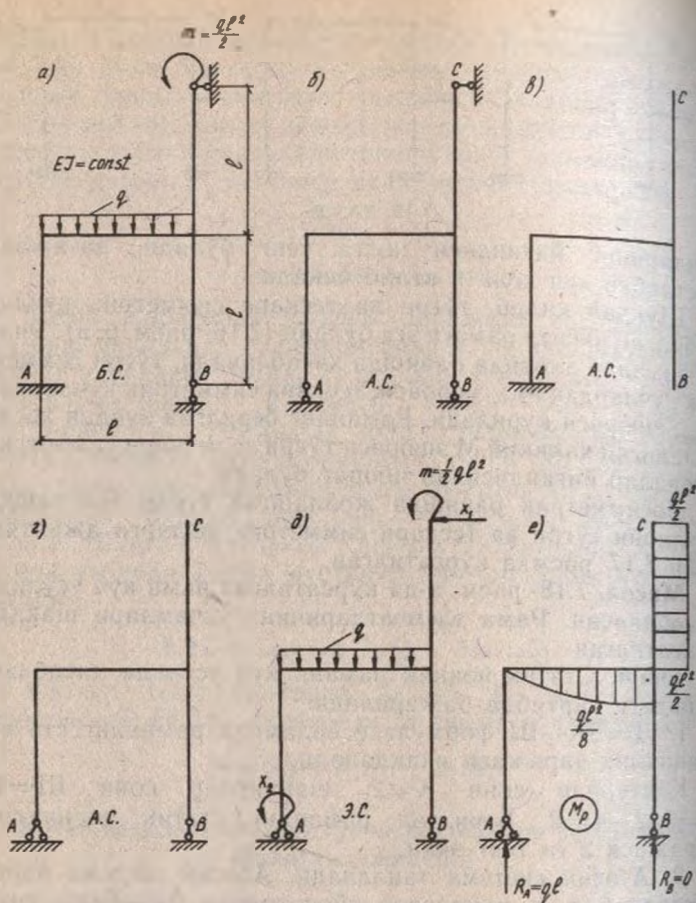
1. $L=3K-\text{Ш}$ формуласи ёрдамида раманинг статик ноаниклик даражаси аниқланади.

Контурлар сони $K=2$, шарнирлар сони $\text{Ш}=4$, $L=3 \cdot 2 - 4 = 2$. Берилган раманинг статик ноаниклик даражаси 2 га тенг экан.

2. Асосий система танланади. Асосий система вариантлари б, в, г шаклларда кўрсатилган. Ҳисоблаш учун



7.17-расм

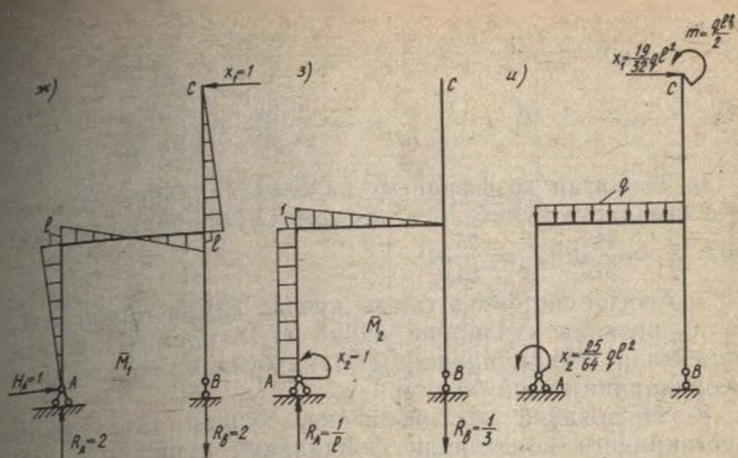


улар ичидан энг қулайини танлаб оламиз. Булар ичида «Г» варианты энг қулайидир.

3. Асосий системага ташки куч ҳамда X_1 ва X_2 зўриқишларни қўйиб, эквивалент система ҳосил қиламиз (7.18- расм, д). Ортиқча боғланишлар йўналишидаги қўчишлар нолга тенглигини ифодаловчи каноник тенгламалар тузамиз:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$



7.18-расм

4. Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод хадларини аниқлаш учун асосий системада ташки куч ва бирлик кучлардан эгувчи моментлар эпюраларини курамиз (е, ж, з шакллар).

5. Кўчишларни аниқлашда Верещагин коидасидан фойдаланамиз (6.11).

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot 2 =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} = \frac{l^3}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot l \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l}{EI} + \frac{l}{3EI} = \frac{4l}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l^3}{EI} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} - \frac{1}{6} \frac{l^3}{EI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l^3}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^3}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l =$$

$$= 0 = \frac{1}{2} \frac{ql^4}{EI} + \frac{ql^4}{12EI} + 0 = \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EI} = \frac{1}{3} \frac{ql^4}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \frac{-1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= -\frac{1}{12} \frac{ql^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI} = -\frac{3}{24} \frac{ql^3}{EI} = -\frac{1}{8} \frac{ql^3}{EI}.$$

6. Топилган коэффициент ва озод хадларни каноник тенгламаларга қўйиб, X_1 ва X_2 номаълумларини аниқлаймиз: $X_1 = \frac{19}{32} ql^2$; $X_2 = \frac{25}{64} ql^2$.

7. Асосий системага ташки кучлар ҳамда топилган X_1 ва X_2 реакция кучларини қўйиб (7.18- расм, и) эгувчи моментлар (M), кўндаланг (Q) ва бўйлама (N) кучлар эпюраларини қурса бўлади.

8. Натижавий M эпюрасини, кучлар таъсирининг мустикаллиги коидасидан фойдаланиб куришимиз ҳам мумкин:

$$M = M_p + M_{x1} + M_{x2} = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Формуланинг иккинчи ва учинчи хадларини ҳосил қилиш учун $\bar{M}_1$ эпюра ординаталарини X_1 га кўпайтирамиз. Ҳосил бўлган эпюралар тузатилган эпюралар деб аталади (7.19- расм, а, б). Натижавий M эпюраси 7.19- расм, в да берилган.

9. Кўндаланг кучлар эпюраси Q ни қуйидаги формула асосида курамиз:

$$Q = Q_x^0 + \frac{M_{\text{ўнг}} - M_{\text{чап}}}{l}.$$

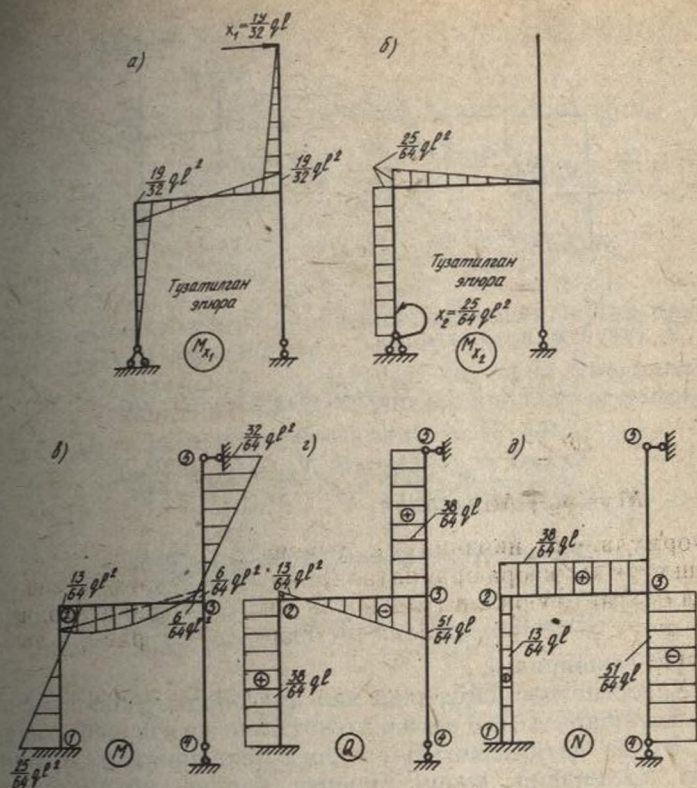
Бу ерда Q_x^0 — оддий балканинг ихтиёрий кесимидаги кўндаланг куч;

$M_{\text{ўнг}}$, $M_{\text{чап}}$ — M_p эпюрасидаги ораликнинг ўнг ва чап ординаталари.

$$Q_{12} = \frac{\frac{13}{64} ql^2 - \left(-\frac{25}{64} ql^2 \right)}{l} = \frac{38}{64} ql;$$

$$Q_2 = \frac{ql}{2} + \frac{-\frac{6}{64} ql^3 - \frac{13}{64} ql^2}{l} = \frac{13}{64} ql;$$

$$Q_3 = -\frac{ql}{2} + \frac{-\frac{6}{64} ql^3 - \frac{13}{64} ql^2}{2} = -\frac{51}{64} ql;$$



7.19-расм

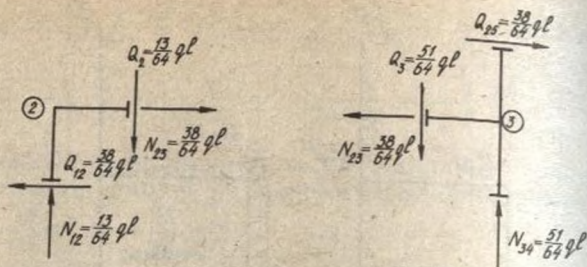
$$Q_{34} = 0;$$

$$Q_{35} = \frac{\frac{32}{64}ql^2 - \left(-\frac{6}{64}ql^2\right)}{l} = \frac{38}{64}ql;$$

Топилган ординаталар бўйича аввал Q , сўнг N эпюралари қурилади (7.19-расм, г, д).

10. Бўйлама кучлар эпюраси N ни қуришда тугунлар мувозанатидан фойдаланамиз. Биринчи навбатда икки элементни бириктирувчи тугуннинг мувозанати қурилади.

Мусбат ишорали кўндаланг кучлар тугунни соат стрелкаси йўналишида айлантиради (7.20-расм).



7.20-расм

2- тугун мувозанатидан

$$\Sigma y = 0; N_{12} - Q_2 = 0; N_{12} = Q_2 = \frac{13}{64} ql;$$

$$\Sigma x = 0; N_{23} - Q_{12} = 0; N_{23} = Q_{12} = \frac{38}{64} ql.$$

3- тугун мувозанатидан

$$\Sigma y = 0; N_{34} - Q_3 = 0; N_{34} = Q_3 = \frac{51}{64} ql;$$

$$\Sigma x = 0; N_{23} - Q_{35} = 0; N_{23} = Q_{35} = \frac{38}{64} ql.$$

11. Текшириш.

Хисоб натижалари икки хил йўл билан текширилади. Улардан бири деформацион текшириш деб аталади. Бунда натижавий М эпюраси текширилади. Бунинг учун натижавий эпюра бирорта бирлик эпюра билан кўпайтирилади. Агар кўпайтма ноль чикса, демак хисоб тўғри бажарилган бўлади.

Верешчагини формуласидан (6.11) фойдаланиб, натижавий М эпюрасини аввал M_1 , сўнг M_2 бирлик эпюралари билан кўпайтирамиз.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = (M\bar{M}_1) &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{25}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot \\ &\cdot l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{6}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{2}{3} \frac{8}{64} ql^2 \cdot l \cdot 0 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{6}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{32}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{ql^4}{64EI} \left(\frac{125}{6} - \frac{25}{6} - \frac{13}{6} - \frac{6}{6} + \right. \\ &\left. + 0 - \frac{12}{6} + \frac{32}{6} \right) = \frac{ql^4(57-57)}{384EI} = 0; \end{aligned}$$

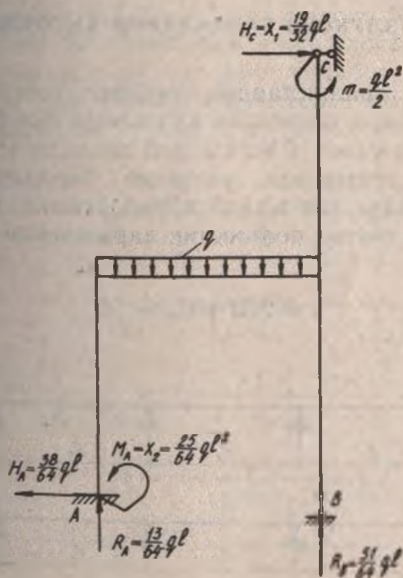
$$\Delta_2 = (M \cdot \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{25}{64} ql^2 \cdot l \cdot 1 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot l \cdot 1 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{1}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EI} \frac{2}{3} \frac{8}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{ql^3}{64EI} \left(\frac{25}{2} - \frac{13}{2} - \frac{13}{2} - \frac{13}{3} + 1 - \frac{8}{3} \right) = \frac{ql^3 (75 - 39 - 26 + 6 - 16)}{384EI} = \frac{ql^3 (81 - 81)}{384EI} = 0.$$

Кўчишларнинг нолга тенг келиши ҳисобнинг тўғри бажарилганлигини ифодалайди.

Энди системанинг мувозанат ҳолатини текшираемиз (статик текшириш). M , Q , N эпюраларидан системанинг таянч реакцияларини аниқлаймиз (7.21-расм):

$$M_A = X_2 \frac{25}{64} ql^2; R_A = \frac{13}{64} ql; H_A = \frac{38}{64} ql;$$

$$R_B = \frac{51}{64} ql; H_C = -X_1 = -\frac{19}{32} ql.$$



7.21-расм

$$1. \Sigma X = 0; H_A - H_c = 0; \frac{38}{64}ql - \frac{19}{32}ql = \frac{(38-38)ql}{64} = 0;$$

$$2. \Sigma Y = 0; R_A + R_B - ql = 0; \frac{13}{64}ql + \frac{51}{64}ql - ql = 0;$$

$$3. \Sigma m_A = 0; M_A + m - N_c \cdot 2l + R_B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\frac{25}{64}ql^2 + \frac{ql^2}{2} - \frac{19}{32}ql \cdot 2l + \frac{51}{64}ql \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0;$$

$$\frac{ql^2}{64} (25 + 32 - 76 + 51 - 32) = 0.$$

Мувозанат тенгламаларининг каноатлантирилиши системанинг мувозанатда эканлигини билдиради. Бу эса ҳисобнинг тўғрилигини тасдиқлайди.

8- боб

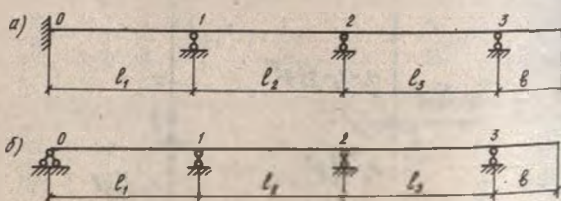
КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИҚ БАЛҚА, ФЕРМА ВА АРҚАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. УЗЛУКСИЗ БАЛҚАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Бир неча оралиқлардан ташкил топган ва чекка таянчлардан бири шарнирли қўзғалмас ёки биқир бўлган балка — узлуксиз балка деб аталади (8.1- расм.)

Мазкур параграфда узлуксиз балкалар ҳисобига кучлар усулининг тадбиқини кўриб ўтамиз. Иш узлуксиз балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади:

$$n = 2Ш + C_m - 3D$$



8.1- расм

Бу ерда Ш — дискларни туташтирувчи оддий шарнирлар сони;

C — таянч стерженлари сони.

Узлуксиз балка яхлит балкадан ташкил топганлиги сабабли $D=1$; $Ш=0$ бўлади. У ҳолда юқоридаги формула куйидаги кўринишга келади

$$n = C - 3 \quad (8.1)$$

8.1-расмда кўрсатилган балкалар статик аниқмасдир, чунки уларнинг ҳар бири учун номаълум таянч реакцияларининг сони статиканинг мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ.

Расмдаги балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини (8.1) формула ёрдамида аниқлаймиз:

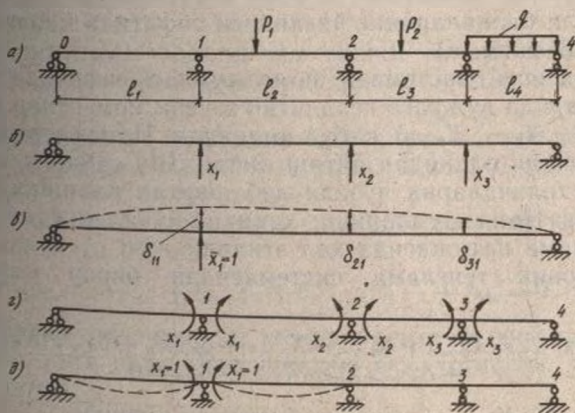
$$n = 6 - 3 = 3, \quad n = 5 - 3 = 2.$$

Демак, а-расмдаги балка уч марта, б-расмдагиси эса икки марта статик ноаниқ экан.

Узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражаси аниқланганидан сўнг асосий системаси танланади.

8.2-расм, б-да тавсия этилган асосий система ташки таянчларига кўра 8.2-расм, г-да тавсия этилган асосий система эса ички боғланишларига кўра ҳосил қилинган.

Ҳар иккала асосий система талабга тўлиқ жавоб беради, чунки ҳар иккаласи ҳам геометрик ўзгармас ва статик аниқдир.



8.2-расм

Узлуксиз балкаларни ҳар иккала асосий система бўйича ҳисобласа бўлади.

Умуман асосий системани шундай танлаш керакки, каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга айлансин ва танланган асосий система ҳар томонлама қулай бўлсин. Чунки асосий система ҳар томонлама қулай танланса, кейинги ҳисоб ишлари анча соддалашади. Шу нуктаи назардан юқоридаги икки асосий системани таҳлил қилиб кўрайлик.

Биринчи вариантда ифодааланган асосий системада номаълумларнинг йўналиши бўйича мавжуд бўладиган чизиқли кўчишлар нолга тенг бўлмайди, шу сабабли каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари ҳам нуллик сакланади.

Иккинчи вариант асосида танланган асосий система мустақил оддий статик аниқ балкалардан иборат бўлиб, айрим бурчакли кўчишлар нолга тенг бўлиши туфайли каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга тенг бўлишига олиб келади.

Юқорида бажарилган таҳлил узлуксиз балкаларни ҳисоблашда иккинчи вариант мақсадга мувофиқ эканлигини кўрсатади.

Уч моментлар тенгламаси

Узлуксиз балканинг асосий системасини оддий бир ораликли балкаларнинг йиғиндисини сифатида қабул қиламиз (8.3-расм, а).

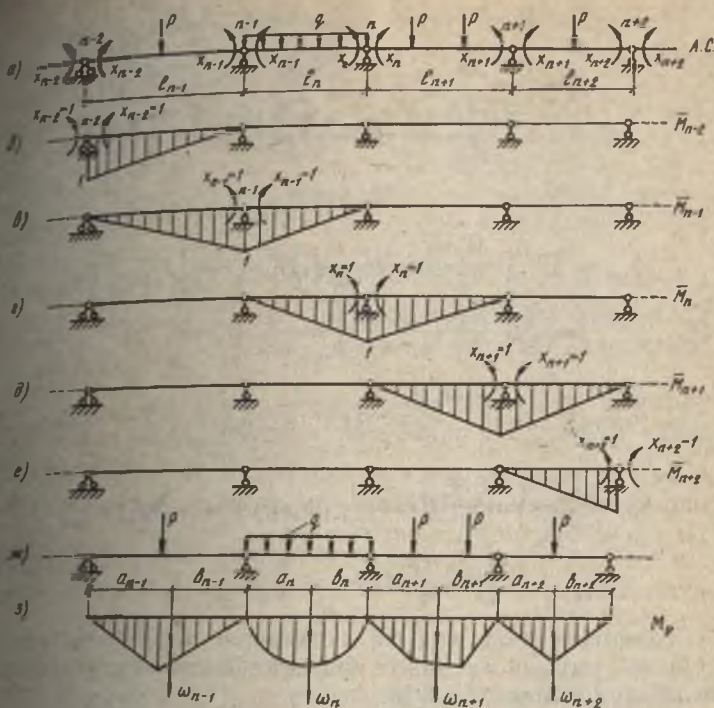
Бу асосий системада номаълумлар сифатида таянч кесимларида вужудга келадиган эгувчи моментлар (X_{n-2} , X_{n-1} , X_n , X_{n+1} , X_{n+2}) қабул қилинади. Номаълумларнинг йўналишини олдиндан айтиш қийин. Шу сабабли уларни пастки толачаларни чўзади деб шартли равишда қабул қиламиз. Номаълумларнинг ҳақиқий йўналиши тенгламанинг ечими натижасида ҳал этилади.

Каноник тенглама системасидан бирор қаторини ёзамиз:

$$\dots + \delta_{n,n-2} \cdot X_{n-2} + \delta_{n,n-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \delta_{n,n+2} X_{n+2} + \dots + \Delta_{np} = 0.$$

Бу ерда $\delta_{n,n} X_n$ — таянчнинг бурчакли кўчиши.

Каноник тенгламанинг коэффициент ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системани бирлик ва ташки қучлар



8.3- расм

билан юклаймиз. Бирлик ва ташки кучлар таъсирида эгувчи момент эюралари курилади (8.4- расм, б, в, г, д, е, ж, з).

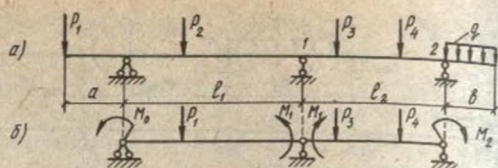
Эюралардан фойдаланиб, каноник тенгламанинг айрим коэффициентлари (масалан, $\delta_{n,n-2}$, $\delta_{n,n+2}$) нолга тенг эканлигини билиб оламиз.

У ҳолда n — таянч учун каноник тенглама куйидаги курунишга эга булади:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{np} = 0.$$

Каноник тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳадларини Мор интегралли, Верешчагин ёки Симпсон усулида аниқлаймиз.

$$\delta_{n,n-1} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n-1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \ln \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{\ln}{6EI},$$



8.4-расм

$$\delta_{n,n} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \right] = \\ = \frac{1}{EI} \left[\frac{2l_n}{6} + \frac{2l_{n+1}}{6} \right] = \frac{2}{6EI} [l_n + l_{n+1}];$$

$$\delta_{n,n+1} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n+1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6EI};$$

$$\Delta_{np} = \Sigma \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} [\omega_n \cdot y_c + \omega_{n+1} \cdot y_c] = \frac{1}{EI} \\ \left[\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} \right];$$

Топилган озод ҳад ва коэффициентлар тенгламага қўйилиб, умумий маҳражга келтирилгандан сўнг у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_{n-1} \cdot l_n + 2x_n (l_n + l_{n+1}) + x_{n+1} l_{n+1} = \\ = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

Агар $x_{n-1} = M_{n-1}$, $x_n = M_n$, $x_{n+1} = M_{n+1}$ тарзида алмаштирилса, у ҳолда қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = \\ = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (8.2)$$

(8.2) уч моментлар тенгласи деб аталиб, ҳар бир оралик таянчи учун алоҳида равишда тузилади. Тузиладиган тенгламалар сони узлуксиз балканинг статик ноаниклик даражасига тенг бўлади.

Уч моментлар тенгласининг ўнг қисмини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n^{\Phi} \quad (8.3)$$

Бу ерда $R_n^{\Phi} = A_n^{\Phi} + B_n^{\Phi}$,

$$A_n^{\Phi} = \frac{\omega_n a_n}{l_n}, \quad B_{n+1}^{\Phi} = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}};$$

белгилари қабул қилинган.

Хусусий ҳоллар

1. Агар берилган узлуксиз балканинг консол қисми бўлса, у ҳолда консол таянч моментлари билан алмаштирилади.

Масалан, 8.4-расм, а-да берилган бир номаълумли узлуксиз балка учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6R_1^{\Phi}.$$

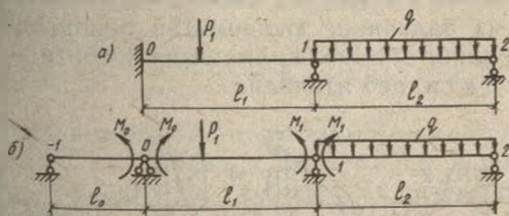
Шаклдан: $M_0 = -R_1 \cdot a$

$$M_2 = -\frac{qb^2}{2}$$

эканлиги кўриниб турибди.

Узлуксиз балканинг асосий системаси 8.4-расм, б-да тасвирланган.

2. Агар берилган балканинг чекка таянчларидан бири шарнирсиз бикир бўлса, (8.5-расм, а), у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча сохта оралик қўшилади. Бу ораликнинг узунлиги нолга тенг ва бикирлиги чексиз деб қабул қилинади (8.5-расм, б).



8.5-расм

Уч моментлар тенгламасидан номаълум таянч моментлари аниқлангандан сўнг берилган балканинг эгувчи момент ва қирқувчи куч эпюралари қурилади.

Эпюраларни қуриш учун асосий системадан ҳар бир оддий балка ажратиб олинади, ажратилган балкалар ташки куч ва аниқланган таянч моментлар билан юкланади, сўнгра эгувчи момент ва қўндаланг куч эпюралари қурилади.

Алоҳида қурилган эпюралар ягона ўқ устига жойлаштирилади. Натижада узлуксиз балканинг эгувчи момент ва қўндаланг куч эпюралари ҳосил бўлади.

8.2. УЗЛУКСИЗ БАЛКАЛАРНИ МОМЕНТ ФОКУСЛАРИ УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

Ораликлари сони уч ва ундан ортиқ бўлиб, айрим ораликлари ташки кучлар билан юкланган бўлса, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш анча қулай бўлади.

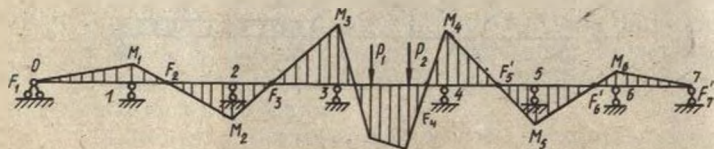
Бу усулни амалга ошириш учун уч моментлар тенгламасидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюрасини қурамыз (8.6-расм).

Бу эпюра асосида қуйидаги хулосаларни келтириш мумкин: юк қўйилмаган ораликларда эгувчи момент оғма чизиқлардан иборат бўлиб, балканинг ўқини кесиб ўтади ва ноль нукталарни ҳосил қилади. Бу нукталар момент фокуслари деб аталади.

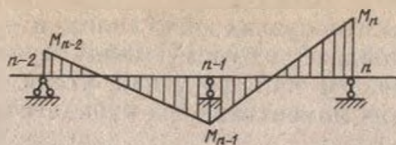
Агар ноль нукталар юк қўйилган ораликка нисбатан чап томонда жойлашган бўлса — чап момент фокуси деб аталади ва $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ деб белгиланади.

Агар ноль нукталар юк қўйилган оралиқнинг ўнг томонида жойлашган бўлса — ўнг момент фокуси деб аталади ва $F'_1, F'_2, F'_3 \dots F'_n$ билан белгиланади.

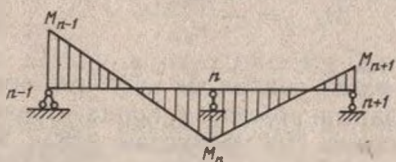
Узлуксиз балканинг юкланмаган оралиғидаги таянч моментларининг абсолют қийматлари нисбати — фокуслар нисбати деб аталади.



8.6-расм



8.7- расм



8.8- расм

Юк қўйилган оралиқларда фокусларнинг ҳолати фокуслар нисбатлари орқали аниқланади. Фокус нисбатлари ўз навбатида чап ва ўнг нисбатларга бўлинади.

Масалан, 8.6- расмда тасвирланган эгувчи момент эпюрасидан чап ва ўнг фокус нисбатлари қуйидагича аниқланади:

Чап фокус нисбатлари, яъни

$$\frac{M_1}{M_0} = -K_1, \frac{M_2}{M_1} = -K_2, \frac{M_3}{M_2} = -K_3 \quad \text{бўлади.}$$

Ўнг фокус нисбатлари:

$$\frac{M_4}{M_5} = -K_5^1, \frac{M_5}{M_6} = -K_6^1, \frac{M_6}{M_7} = -K_7^1 \quad \text{бўлади.}$$

Таянч моментлари ҳар хил ишорали бўлгани учун фокус нисбатлари манфий ишорага эга бўлади.

Шунга ўхшаш узлуксиз балканинг юкланмаган n — оралиғи учун чап фокус нисбати қуйидагича аниқланади (8.7- расм):

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = -K_n \quad (8.4)$$

Агар узлуксиз балканинг юкланмаган « n » оралиғи юк қўйилган оралиққа нисбатан ўнг томонда бўлса, у ҳолда шу оралиқ учун ўнг фокус нисбати қуйидагича ифодаланади (8.8- расм):

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -K_n^1 \quad (8.5)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган n — ораликнинг чап томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи чап фокусдан ўтади: юкланмаган ораликнинг таянч моментлари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} \quad (8.6)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган ораликнинг ўнг томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи ўнг фокусдан ўтади ва номаълум таянч моментлари қуйидаги ифодадан аниқланади:

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}} \quad (8.7)$$

Демак, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш учун биринчи навбатда, фокус нисбатлари ва юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари аниқланган бўлиши керак. Чап фокус нисбатларини аниқлаш учун юк қўйилган ораликдан чап томонда жойлашган ораликлар учун уч моментлар тенгламасини тузамиз. Узлуксиз балканинг биринчи таянчи учун (8.7- расм) уч моментлар тенгламаси (8.2- расм) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0.$$

Шаклдан $M_0 = 0$ ва тенгламанинг ўнг қисми ноль эканлиги кўриниб турибди. У ҳолда:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad \text{бўлади.}$$

(8.4) формулага асосан $\frac{M_2}{M_1} = -K_2$ деб белгиласак,

$$K_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad (8.8) \text{ келиб чиқади.}$$

Энди иккинчи таянч учун ($n=2$) уч моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0.$$

Тенгламанинг барча ҳадларини M_2 га бўлсак,

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0.$$

келиб чиқади.

Бу тенгламадаги таянч моменти нисбатларини (8.6) формулага асосан чап фокус нисбатлари орқали ифодаalayмиз:

$$-\frac{i}{K_1} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) - K_2 l_3 = 0.$$

Бу тенгламадан иккинчи оралик учун чап фокус нисбати аникланади:

$$K_2 = \left[2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_1} \right) \right] \quad (8.9)$$

Буларни умумлаштириб, n — нчи оралик учун фокуслар нисбати K_n ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$K_n = \left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right]. \quad (8.10)$$

Шу тартибда ўнг фокус нисбатлари аникланади:

$$K_n^1 = \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1} \right) \right]. \quad (8.11)$$

Чап фокус нисбатларини аниқлаш узлуксиз балканинг биринчи оралиғидан, ўнг фокус нисбатларини ҳисоблаш эса охириги оралиғидан бошланади.

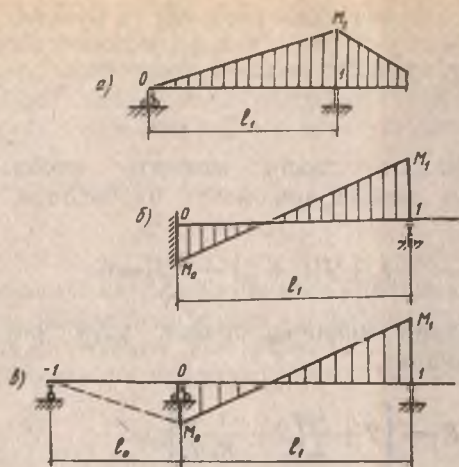
Биринчи ва сўнги ораликларнинг фокус нисбатлари таянчлар хилига боғлиқ ҳолда аникланади.

Агар балканинг биринчи таянчи шарнирли бўлса, у ҳолда биринчи оралик учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишга эга бўлади (8.9- расм, а):

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty.$$

Шаклдан $M_0 = 0$ эканлиги кўриниб турибди.

Агар берилган балканинг биринчи таянчи шарнирсиз биқир бўлса, (8.9- расм, б) у ҳолда шу биқир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча



8.9- расм

сохта оралик қўшилади (8.9- расм, в) ва шу оралик учун чап фокуслар нисбати куйидаги кўринишда аникланади:

$$K_0 = -\frac{M_0}{M_1} = -\frac{M_0}{0} = \infty.$$

(8.10) формулага кўра биринчи оралик учун фокуслар нисбати $K_1 = 2 + l_0/l_1 \left(2 - \frac{1}{K_0}\right)$ бўлгани учун $K_1 = 2$ бўлади. Бу ерда $l_0 = 0$ ва $K_0 = \infty$.

Демак, балканинг биринчи таянчи шарнирли кўзгалмас бўлса, биринчи оралик учун чап фокуслар нисбати $K_1 = \infty$; шарнирсиз бикир бўлса, $K_1 = 2$ га тенг бўлади.

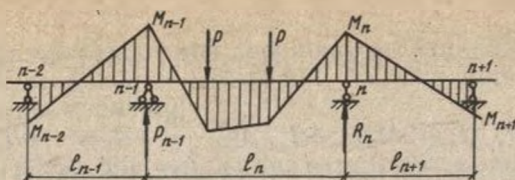
Узлуксиз балканинг чап ва ўнг фокус нисбатлари аниклангандан сўнг юк қўйилган ораликдаги таянч моментлар аникланади.

Узлуксиз балканинг « n » оралиғи ташки юклар таъсирида деб фарз қиламиз (8.10- расм).

Юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари M_{n-1} , M_n ларни аниклаш учун балканинг $n-1$ ва n — нчи таянчларига тегишли уч моментлар тенгламасини ёзамиз (8.10- расм):

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6R_{n-1};$$

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n. \quad (8.12).$$



8.10-расм

Тузилган тенгламалар каторида тўртта таянч моментлари M_{n-2} , M_{n-1} , M_n , M_{n+1} мавжуддир. Булардан икkitаси (M_{n-1} , M_n) изланаётган моментлар, қолган икkitаси (M_{n-2} , M_{n+1}) фокуслар нисбати оркали аниқланадиган таянч моментларидир.

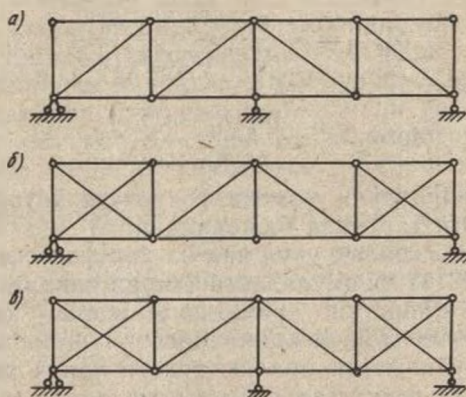
$$(8.6) \text{ формулага асосан } M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}};$$

$$(8.7) \text{ формулага асосан } M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}^I}.$$

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмидаги сохта таянч реакциялари қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$R_{n-1}^\Phi = A_n^\Phi, R_n^\Phi = B_n^\Phi.$$

Чунки бу ерда 8.10-расмга асосан $B_{n-1}^\Phi = 0, A_{n+1}^\Phi = 0$ тенгдир. M_{n-2} , M_{n+1} ва R_{n-1} , R_n ларнинг қийматларини (8.12) тенгламага қўямиз:



8.11-расм

$$-\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} \cdot l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6A_n^\Phi$$

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{M_n}{K_{n+1}^1} \cdot l_n = -6B_n^\Phi.$$

Бу тенгламаларнинг барча ҳадларини l_n га бўлиб юбор-
сак,

$$M_{n-1} \left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right] + M_n = -\frac{6A_n^\Phi}{l_n};$$

$$M_{n-1} + M_n \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1} \right) \right] + M_n = -\frac{6B_n^\Phi}{l_n}$$

келиб чиқади.

(8.10) ва (8.11) формулаларга асосан тенгламалар
қуйидаги кўринишга келади:

$$M_{n-1} \cdot K_n + M_n = -\frac{6A_n^\Phi}{l_n};$$

$$M_n + M_{n+1} K_n^1 = -\frac{6B_n^\Phi}{l_n}.$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, юк қўйилган оралик-
нинг таянч моментларини аниқлаймиз:

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(A_n^\Phi \cdot K_n^1 - B_n^\Phi)}{(K_n K_n^1 - 1)};$$

$$M_n = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(B_n^\Phi \cdot K_n - A_n^\Phi)}{(K_n K_n^1 - 1)}. \quad (8.13)$$

Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоб-
лаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Ҳар бир оралик учун чап-ва ўнг фокус нисбатлари
(8.10) ва (8.11) формулаларга асосан топилади.

2. Юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари
(8.13) формула бўйича аниқланади.

3. Юк қўйилмаган ораликлардаги таянч моментлари
(8.6) ва (8.7) формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар узлуксиз балканинг бир неча оралиги ташки
юклар таъсирида бўлса, у ҳолда ҳар бир юк қўйилган

оралиқ учун балка алохида равишда ҳисобланади, сўнгра таянч моментларининг алгебраик йиғиндилари бўйича умумий эпюра қурилади.

8.3. СТАТИК НОАНИК ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Статик ноаник фермаларни ҳисоблашда ҳам статик аниқ фермаларни ҳисоблашда қабул қилинган айрим чекланишлардан фойдаланилади. Масалан, кўзгалмас юклар ферма тугунларига қўйилган стерженлар фақат сикилиш ёки қўзилишга ишлайди, деб қаралади.

Статик ноаник фермаларни асосан уч гуруҳга ажратиш мумкин:

1. Таянч реакциялари сонига кўра статик ноаник фермалар (8.11- расм, а).

2. Ферма стерженларидаги зуриқишларга кўра статик ноаник фермалар (8.11- расм, б).

3. Таянч реакциялари сони ва стерженлардаги зуриқишларга кўра статик ноаник фермалар (8.11- расм, в).

Фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$n = C + C_0 - 2Y. \quad (8.14)$$

Бу ерда n — ферманинг статик ноаниқлик даражаси;

C — фермани ташкил этувчи стерженлар сони;

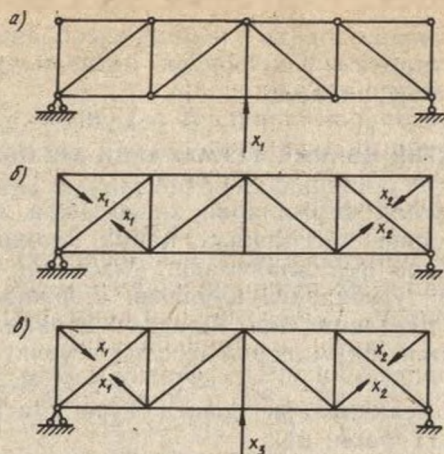
C_0 — таянч стерженлари сони;

Y — тугунлар сони.

Статик ноаник фермаларни ҳисоблаш тартиби статик ноаник рамаларни ҳисоблашдан кам фарқ қилади. Бу ерда ҳам биринчи навбатда, (8.11- расм) фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси аниқланади ва ундан сўнг асосий система қабул қилинади. Бунинг учун ортикча боғланишлар ташлаб юборилади. Ташлаб юборилган ортикча боғланишлар номуъом зуриқишлар билан алмаштирилади (8.12- расм, а, б, в). Сўнгра каноник тенгламалар тузилади. Каноник тенгламалар сони берилган ферманинг статик ноаниқлик даражаси сонига тенг бўлади. 8.12- расм, а-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\delta_{1j} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

8.12- расм, б-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари иккита тузилади:



8.12-расм

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$

8.12-расм, в-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари куйидаги кўри-нишга эга бўлади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Тенгламаларнинг ҳар бири ўз навбатида, асосий системада ташқи юк ва номатълум зўриқишлар таъсирида ҳосил бўладиган кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлишини ифодалайди.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари куйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\delta_{ii} = \sum \frac{N_k N_i}{EF} \cdot S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k N_i}{F} S;$$

$$\delta_{kk} = \sum \frac{N_k^2}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k^2}{F} S; \quad (8.15)$$

$$\Delta_{kp} = \sum \frac{N_k N_p}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k N_p}{F} S.$$

Бу ерда:

N_i — ферма стерженларида $X_i = 1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар:

$\bar{N}_k$ — ферма стерженларида $X_k = 1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар:

N_p — ташки кучлар таъсирида асосий системада ҳосил бўладиган зўриқишлар;

S — ферма стерженининг узунлиги;

E — ферма материалининг эластиклик модули;

F — ферма стерженининг кўндаланг кесим юзаси.

Зўриқишлар N_p , $\bar{N}_k$ ва $\bar{N}_i$ ларнинг қийматлари аналитик ёки график усуллар орқали аниқланади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадларини жадвал ёрдамида аниқлаш тавсия этилади.

Номатълумлар (X_1 , X_2 , X_3) топилгандан кейин ферма стерженларидаги зўриқишларнинг якуновчи қийматлари осонлик билан топилади:

$$N = N_p + \bar{N}_1 \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n$$

Бу ерда N_p — ташки кучлар таъсирида ферма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқиш:

$\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$ — бирлик кучларнинг таъсирида ($X_1 = 1$; $X_2 = 1$; ... $X_n = 1$) шу элементларда мавжуд бўладиган зўриқишлар.

Мисол. 8.13. расмда берилган статик ноаник ферманинг стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин. Ферма стерженларининг биқирлиги EF ўзгармас.

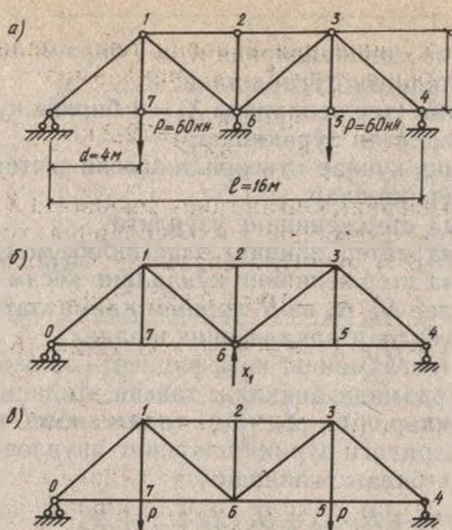
Ечиш. Ферманинг статик ноаниқлик даражасини (8.14) формулага асосан белгилаб оламиз. У бир марта статик ноаник бўлиб, битта ортикча таянч боғланишига эга.

Ферманинг ўртадаги таянчини ташлаб юбориб, асосий системани танлаймиз (8.13-расм, б). Номатълум таянч реакциясини аниқлаш учун кучлар усулининг каноник тенгламасини тузамиз:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Бу тенгламадаги δ_{11} ва Δ_{1p} кўчишлар (8.15) формула ёрдамида аниқланади. Ферма стерженларида бирлик куч $X_1 = 1$ ва ташки юклар таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар 4-бобда баён этилган усуллардан фойдаланиб аниқланади (8.13-расм, в).

Ферма ва унга қўйилган юклар симметрик бўлганлиги сабабли ферманинг ярмини ҳисоблаш kifоя, чунки,



8.13-расм

0—7 стержендаги зўриқиш 5—4 стержендаги зўриқишга тенг ($N_{70}=N_{45}$), шунга ўхшаш $N_{12}=N_{23}$, $N_{10}=N_{34}$, $N_{76}=N_{65}$, $N_{16}=N_{63}$ бўлади. Фермани ҳисоблаш натижалари 8.1-жадвалда келтирилган.

8.1-жадвал

Стер- жен- лар	Стер- жень узун- лиги l_k (см)	Зўри- қиш	$\frac{N_1^2 l}{EF}$	N_p кн	$\frac{N_1 N_p l}{EF}$	N кн	$\frac{N_1 N l}{EF}$ тек- шириш
1	2	3	4	5	6	7	8
01	500	0,825	1,74	100	-208	39,8	-82,3
1—2	400	1,333	3,56	-80	-213	16,2	43
0—7	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
7—6	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
1—6	500	-0,825	1,74	0	0	60,1	124
1—7	300	0,00	0	60	60	60	0
		$\delta_{11} = 8,82,$		$\Delta_{1P} = -635$		$167 - 167,3 = 0$	

Топилган кўчишларни каноник тенгламаларга қўйиб, номаълум реакция кучи X_1 ни аниқлаймиз:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{635}{8,82} = 72,2 \text{ кН.}$$

Ташки юк ва аниқланган таянч реакцияси X_1 таъсирида статик ноаниқ ферманинг стерженларида ҳосил бўлган зўриқишлар (8.4) формула ёрдамида ҳисобланади.

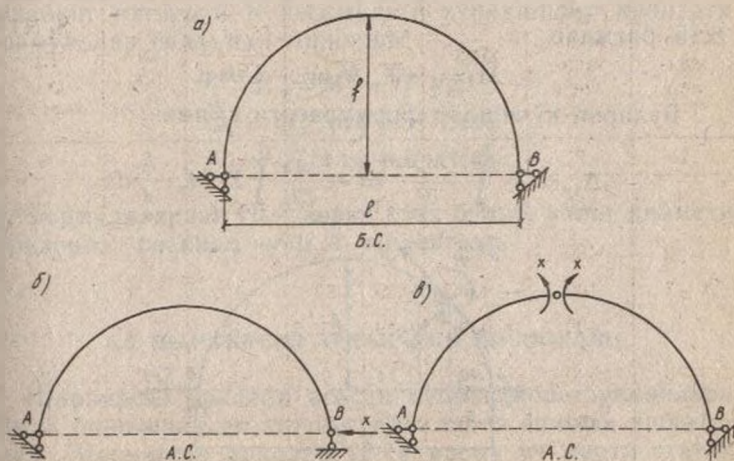
$$N_{01} = N_p + \overline{N}_{01} X_1 = -100 + 0,825 \cdot 72,2 = -40,44 \text{ кН;}$$

$$N_{12} = N_p + \overline{N}_{12} \cdot X_1 = -80 + 1,33 \cdot 72,2 = 16,24 \text{ кН.}$$

8.4. ИККИ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Икки шарнирли аркалар асосан кўприк конструкцияларида ва иморатлар томини ёпишда ишлатилади.

Икки шарнирли арка (8.14- расм, а) бир марта статик ноаниқдир. Асосий система танлашда унинг битта ортикча боғланиши ташлаб юборилади. 8.14- расм, б, в-да асосий система икки хил нусхада тавсия этилган. Асосий системанинг бирида В таянчининг горизонтал стержени номаълум реакция кучи X билан алмаштирилган. Иккинчи асосий система эса қўшимча шарнир киритиш йўли билан ҳосил қилинган.



8.14- расм

Номаълум X_1 ни аниқлаш учун куч усулининг каноник тенгламасини тузамиз

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0; X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Бу ерда δ_{11} — бирлик куч йўналиши бўйича ва шу бирлик куч ($P=1$) таъсиридан ҳосил бўлган бирлик кўчиш;

Δ_{1p} — асосий системага қўйилган ташки юклардан ҳосил бўладиган горизонтал кўчиш.

Кўчишлар қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_1 M_p}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_p}{EF} ds + \int \eta \frac{Q_1 Q_p}{GF} ds;$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{N_1^2}{EF} ds + \int \eta \frac{Q_1^2}{GF} ds.$$

Қиёсий ҳисоблар қуйидаги хулосага келиш имконини беради: а) агар $f < \frac{1}{3}l$ ва $\kappa < \frac{1}{10}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг кучни, Δ_{1p} ни аниқлашда эса бўйлама ва кўндаланг кучларни инобатга олмаса бўлади, яъни

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_1 M_p}{EI} ds;$$

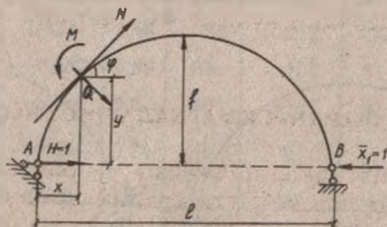
$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{N_1^2}{EF} ds.$$

8.15- расмдан

$$\bar{M}_1 = -Y, \bar{N}_1 = -\cos\varphi.$$

Буларни кўчишлар формуласига қўямиз:

$$\Delta_{1p} = - \int_A^B \frac{Y M_p ds}{EI} = - \frac{1}{EI_0} \int_A^B Y \cdot M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds.$$



8.15- расм

Бу ерда J_0 — кўндаланг кесимнинг энг кичик инерция моменти:

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{y^2 ds}{EI} + \int_A^B \frac{\cos^2 \varphi}{EI} ds = \frac{1}{EI_0} \left[\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds \right];$$

$$x_1 = \frac{\int_A^B y \cdot M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds};$$

б) агар $\frac{1}{3}l > f > \frac{1}{5}l$ ва $k < \frac{1}{10}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг ва бўйлама кучлар инobatга олинмайди:

$$x_1 = \frac{\int_A^B y M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds}.$$

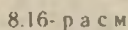
Горизонтал реакция кучи X_1 аниқлангандан сўнг арканинг ихтиёрий К кесимидаги зўриқишлар куйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$\begin{aligned} M_K &= M_K^0 - H \cdot y_K; \\ Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi; \\ N_K &= Q_K^0 \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

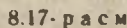
Бу формулалардан H — керки кучи бўлиб, унинг қиймати горизонтал реакция кучи X_1 га тенгдир.

8.5. ШАРНИРСИЗ АРКАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Шарнирсиз аркалар асосан кўприк конструкциялари ҳамда бинокорликда катта ораликларни ёпишда ишлатилади. Шарнирсиз аркалар (8.16-расм) уч марта статик ноаник бўлади. Асосий система ҳосил қилиш учун аркадан



Асосий системадаги номаълум ички кучлар (X_1, X_2, X_3) куч усулининг каноник тенгламаларидан топилади:



$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари-ни аниқлаш учун бирлик кучлардан эгувчи момент эпюралари қурилади (8.17- расм).

Бу ерда $\bar{M}_1$, $\bar{M}_3$ симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюрадир (8.17- расм, а, б, в). Шунинг учун $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ва $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ бўлади. У ҳолда кучлар усулининг каноник тенгламалари икки мустақил тизимга ажралиб, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0 \}$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0 \}$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Каноник тенгламаларнинг биричи гуруҳида симметрик номаълумлар (X_1 , X_3), иккинчи гуруҳида эса тескари симметрик номаълум (X_2) иштирок этади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари Мор формуласи ёрдамида аниқланади.

$$\delta_{\kappa\pi} = \sum \int \frac{M_{\kappa} M_{\pi}}{EI} ds + \sum \int \frac{N_{\kappa} N_{\pi}}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_{\kappa} Q_{\pi}}{GF} ds$$

Каноник тенгламанинг нолга тенг бўлмаган ёрдамчи коэффициентларини ($\delta_{13} = \delta_{31}$) нолга тенглаш учун асосий системани бироз ўзгартириб, номаълум зўриқишларни биқир консоллар учига кўчирамиз (8.18- расм).

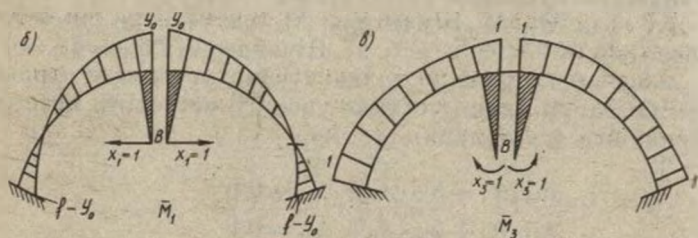
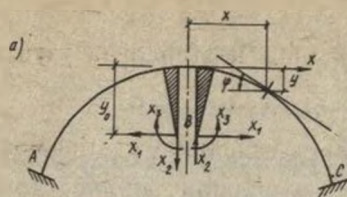
Абсолют биқир консолнинг учи эластик марказга жойлашган бўлиши лозим. Биқир консол узунлиги, яъни эластик марказнинг ўрни арканинг геометрик ўлчамларига боғлиқдир.

Асосий системанинг ихтиёрий кесими учун моментлар тенгламасини ёзамиз (8.18- расм, а):

$$M_1 = 1(y_0 - y);$$

$$M_3 = -1 \cdot x.$$

Бу ерда y_0 — консол узунлиги.



8.18-расм

Бўйлама ва кўндаланг кучлар тенгламаси:

$$N_1 = -\cos\varphi; N_2 = \sin\varphi; N_3 = 0;$$

$$Q_1 = \sin\varphi; Q_2 = \cos\varphi; Q_3 = 0.$$

Энди консол узунлиги y_0 кийматини аниқлаймиз. Бунинг учун δ_{13} ни нолга тенглаштирамиз:

$$\begin{aligned} \delta_{13} &= \int \frac{M_1 M_3}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_3}{EF} ds + \int \eta \frac{Q_1 Q_3}{GF} ds = \\ &= \int \frac{M_1 M_3}{EJ} ds = 0. \end{aligned}$$

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_3$ нинг кийматларини тенгламага жойлаштирамиз:

$$2 \int_A^B \frac{1(y_0 - y)}{EJ} ds = 0 \quad \text{ёки} \quad y_0 \int_A^B \frac{ds}{J} - \int_A^B \frac{y ds}{J} = 0;$$

бундан

$$y_0 = \frac{\int_A^B \frac{y ds}{J}}{\int_A^B \frac{ds}{J}} = \frac{\int_A^B y \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B \frac{J_0}{J} ds}$$

Бу ерда $\int_A^B y \cdot \frac{J_0}{J} ds$ — арканинг келтирилган узунлиги

десак, $\int_A^B \frac{J_0}{J} \cdot y$ — келтирилган узунликнинг статик момен-

ти, y_0 эса келтирилган контур оғирлик марказининг координати бўлади. Шунга асосан, В нукта эластик марказ деб аталади.

Эластик марказнинг текисликдаги ўрнини график равишда аниқласа ҳам бўлади. Бўнинг учун интеграл кўринишдаги формула йиғинди орқали ифодаланади:

$$y_0 = \frac{\sum_A^B y \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S}{\sum_A^B \frac{J_0}{J} \Delta S}$$

Арка симметрик бўлганлиги сабабли ҳисоб ишларини унинг бир бўлаги учун амалга оширса бўлади. Арканинг ўки тенг бўлақларга бўлиниб, бўлақларнинг оғирлик марказига горизонтал сохта юклар жойлаштирилади (8.19-расм).

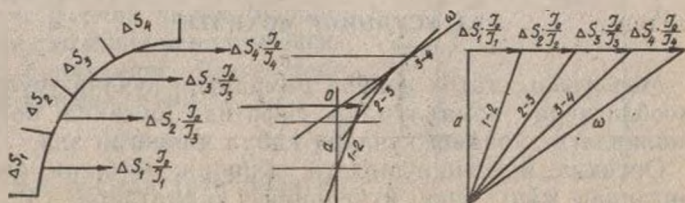
Куч ва аркон кўпбурчаги қурилади ҳамда уларнинг ёрдамида сохта юкларнинг тенг таъсир этувчиси аниқланади. Арканинг симметрия ўки билан тенг таъсир этувчи юкнинг кесишган нуктаси «В» эластик марказ деб аталади.

Бикир консол учларини шу нуктага жойлаштирилса, каноник тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$



8.19-расм

Бунда ҳар бир тенглама мустақил бўлиб, номаълумлар осонлик билан аниқланади:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Агар координата бошини эластик марказга жойлаштирилса, бош кўчишлар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C \frac{J_0}{J} \Delta S;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_0} \left[\sum_A^C y^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \sum_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \right. \\ \left. + \mu \cdot \frac{E}{G} \sum_A^C \sin^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S \right];$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_0} \left[\sum_A^C x^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \sum_A^B \sin^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S + \right. \\ \left. + \mu \cdot \frac{E}{G} \sum_A^C \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S \right];$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C \frac{J_0}{J} \Delta S; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C y^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S;$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C x^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S.$$

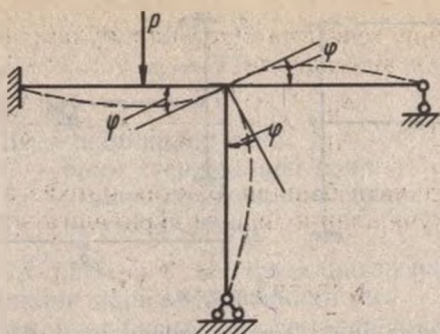
9-606

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КҶУЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. УСУЛНИНГ МОҲИАТИ

Маълумки, статик ноаниқ рамаларни кучлар усулида ҳисоблаганда, номаълумлар сифатида ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари қабул қилинган эди.

Ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари аниқлангандан сўнг ички кучларнинг қийматлари (M , Q , N) ва кўчишлар осонлик билан аниқланади.



9.1-расм

Демак, статик ноаник рамаларни куч усулида ҳисоблашда аввал зўриқиш кучлари аниқланади, ундан сўнг кўчишлар аниқланади.

Бу масалани бошқа йўл билан ҳам ечиш мумкин. Бунда аввал статик ноаник рамалардаги кўчишлар топилади, ундан сўнг ихтиёрий кесимдаги ички кучлар аниқланади. Статик ноаник рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда, айнан шундай қилинади.

Бу усулга кўра номаълумлар сифатида рама тугунларидаги қизикли ва бурчакли эластик кўчишлар қабул қилинади.

Кўчиш усули қуйидаги фаразларга асосланади:

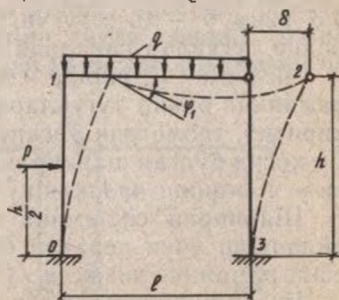
1. Икки ва ундан ортиқ стерженлар келиб туташган раманинг бикири тугуни бир хил бурчакка бурилади (9.1-расм).

2. Рама деформацияларини ҳисоблашда Q ва N нинг таъсири ҳисобга олинмайди.

3. Деформация натижа-сида тугунлар орасидаги ма-софа ўзгаришсиз қолади.

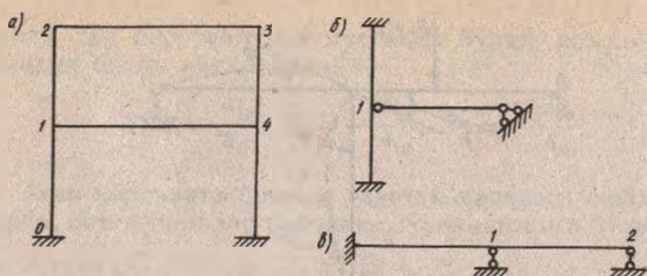
4. Бурчак кичик бўлган-лиги сабабли унинг танген-сини бурчакнинг ўзига тенг деб оламиз, яъни

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi$$



9.2-расм

9.2-расмда тасвирланган рама ташки кучлар таъсири-



9.3-расм

да деформацияланиб, унинг тугунлари бурчакли ва чизикли кўчишлар олади.

Раманинг 1 тугуни ϕ бурчакка бурилади ва горизонтал йўналишда δ масофага кўчади.

Кўчишлар усулида номаълум сифатида рама тугунларининг чизикли (δ) ва бурчакли (ϕ) эластик кўчишлари қабул қилинади.

Кўчишлар усулида рамаларнинг кинематик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан топилади:

$$n = n_0 + n_1$$

Бу ерда

n_0 — бикир тугунлар сони ёки бикир тугунларнинг бурчакли кўчишлари сони;

n_1 — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони.

Номаълум деб қабул қилинган бурчакли кўчишлар сони « n_0 », раманинг таркибидаги бикир тугунлар сонига тенг деб қабул қилинади. Икки ва ундаи ортиқ стерженларнинг мустақкам туташган жойи бикир тугун деб аталади.

Мисол: 9.3-расм, а — да 1, 2, 3, 4 — тугунлар, 9.3-расм, б — да 1-тугун, 9.3-расм, в — да 1, 2 — тугунлар бикир тугунлар саналади.

Чизикли кўчишлар сонини аниқлаш учун берилган раманинг бикир тугунларига ва таянчларига шарнирлар киритиб, геометрик ўзгарувчан система ҳосил қилинади. Бу ҳосил бўлган шарнирли системанинг эркинлик даражаси — раманинг чизикли кўчишлари сонига тенг бўлади.

Шарнирли системани геометрик ўзгармас системага айланиши учун керакли бўлган кинематик боғланишлар сони раманинг чизикли кўчишлар сонини ифодалайди.

Чизикли кўчишлар сони қуйидаги формулалар ёрдамида ҳам аниқланади:

$$n_q = 2Ш - С - С_m;$$

$$n_q = 2Т - С.$$

Бу ерда:

Ш — шарнирлар сони;

С — рама стерженлари сони;

Ст — таянч стерженлари сони;

Т — тугунлар сони.

Мисол. 9.4- расм, а — да ифодаланган раманинг кинематик ноаниклик даражаси аниклансин.

Ечиш. Раманинг бурчакли кўчишлар сони $n_6 = 2$. Рама тугунларининг чизикли кўчишлари сонини аниклаш учун унинг бикир тугунларига шарнир киритиб, геометрик ўзгарувчан шарнирли системага келтирилади (9.4- расм, б) ва шу схеманинг эркинлик даражаси аникланади. Бу схеманинг эркинлик даражаси $n_q = 1$, чунки унинг геометрик ўзгармас бўлиши учун унга битта кўшимча стержень — боғловчи киритилса kifоя (9.4- расм, в).

Берилган раманинг жами номаълумлари сони

$$n = n_6 + n_q = 2 + 1 = 3.$$

Демак раманинг кинематик ноаниклик даражаси учга тенг экан.

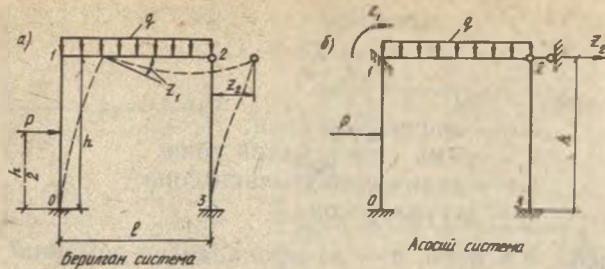
9.2. КЎЧИШЛАР УСУЛИНИНГ АСОСИЙ СИСТЕМАСИ ВА КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

Куч усулининг асосий системаси берилган системадаги ортикча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинлар эди. Асосий система — статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлади.

Кўчишлар усулида асосий система, аксинча, рамага кўшимча боғланишлар киритиш йўли билан ҳосил қилинади. Кўшимча боғланишлар икки хил (бурчакли ва чизикли) бўлади.



9.4- расм



9.5-расм

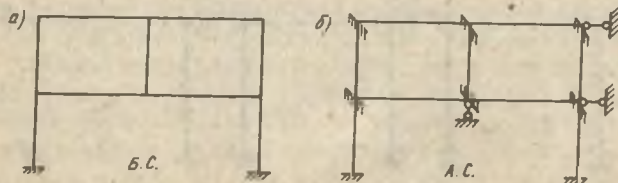
Рама тугунларининг бурчакли кўчишларига қаршилик курсатувчи боғланишлар — бурчакли боғланишлар деб аталади. Рама тугунларини чизикли кўчишларига қаршилик курсатувчи боғланишлар — чизикли боғланишлар деб аталади.

Рамага қўшимча боғланишлар киритилиши натижасида рама алоҳида бир ораликли статик ноаник балкаларнинг йиғиндисига айланиб қолади.

9.5-расм, а — да тасвирланган раманинг кинематик ноаниклик даражаси 2 га тенг. У битта бурчакли (Z_1), битта чизикли (Z_2) кўчишга эга. Бу кўчишларга чек қўйиш учун рамага битта бурчакли боғланиш (биринчи тугун) ҳамда битта чизикли боғланиш (иккинчи тугун) киритилди. Бу раманинг асосий системаси 9.5-расм, б — да берилган. 9 марта кинематик ноаник раманинг (9.6-расм, а) асосий системаси (9.6-расм, б) тасвирланган. Раманинг бурчакли кўчишлари сони олтига тенг ($n_6=6$), чизикли кўчишлари сони эса учга тенг ($n_3=3$).

Кўчишлар усулининг каноник тенгламалари. Каноник тенгламалар тизимини тузиш қоидаси берилган система билан асосий система орасидаги фаркни йўқотишга асосланган.

Асосий системалар берилган системадан қўшимча боғланишлари борлиги билан фарк қилади. Маълумки,



9.6-расм

бурчакли боғланишларда реактив момент, чизикли боғланишларда эса реактив кучлар ҳосил бўлади.

Реактив момент ва кучларни нолга тенглаш мумкин. Бунинг учун қўшимча боғланишларга берилган системада вужудга келадиган микдорда чизикли ва бурчакли кўчишлар берамиз.

Бурчакли ва чизикли боғланишлардаги реактив момент ва кучларни инкор этиш кўчиш усули каноник тенгламасининг асосини ташкил этади.

Умумий кўринишда кўчиш усулининг каноник тенгламалари қуйидагича ёзилади (9.7- расм);

$$R_1 = 0; R_2 = 0$$

Бу ерда R_1 ва R_2 — қўшимча боғланишларда ташқи кучлар ҳамда боғланишларнинг бурчакли ва чизикли кўчишлари натижасида ҳосил бўладиган реактив момент ва реактив кучларнинг алгебраик йиғиндисидир.

Тузиладиган тенгламалар сони берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Каноник тенгламалар системасини тузиш тартибини 9.7- расмда тасвирланган рама мисолида қуриб ўтамиз.

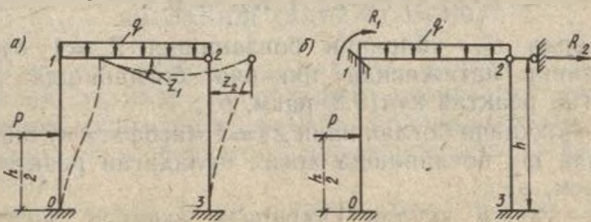
Биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда вужудга келадиган тўлиқ момент R_1 қуйидаги ҳадлардан ташкил топади:

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}.$$

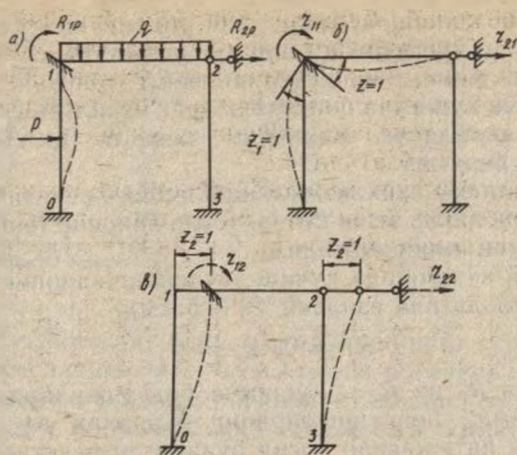
Бу ерда R_{1p} — қўшимча боғланишда ташқи юклар таъсирида вужудга келадиган реактив момент (9.8- расм, а);

R_{11} — биринчи боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурилиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент;

R_{12} — раманинг 1,2— тугунларини $Z_2=1$ масофага кўчиши натижасида биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент.



9.7- расм



9.8- расм

R_{11} ва R_{12} реактив моментларни бирлик кучиш натижасида вужудга келадиган реактив моментлар орқали ифодалаймиз:

$$R_{11} = r_{11} \cdot Z_1 \text{ ва } R_{12} = r_{12} \cdot Z_2.$$

Бу ерда: r_{11} — биринчи боғланишни бир бирликка ($Z_1 = 1$) бурганимизда шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, б); r_{12} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага силжитганимизда биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, а);

У ҳолда дастлабки тенглама куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0. \quad (9.4)$$

Шу тарзда иккинчи тенгламани ҳам тузса бўлади:

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \quad (9.4)$$

Бу ерда r_{21} — биринчи боғланишни $Z_1 = 1$ бурчакка кучиши натижасида иккинчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8- расм, б);

r_{22} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага кучиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8- расм, а);

R_{2p} — ташки кучлар таъсирида иккинчи боғланишда вужудга келадиган реактив куч (9.8- расм, а).

Шундай қилиб, биринчи тенглама биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда реактив моментнинг нолга тенглигини, иккинчи тенглама эса иккинчи боғланишдаги реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Ҳар икки тенглама қўчиш усулининг каноник тенгламаси деб аталади.

Агар система тўрт маротаба кинематик ноаник бўлса, у ҳолда юқорида баён этилган тартиб асосида тўртта каноник тенглама тузилади ва у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{14} \cdot Z_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{34} \cdot Z_4 + R_{3p} = 0;$$

$$r_{41} \cdot Z_1 + r_{42} \cdot Z_2 + r_{43} \cdot Z_3 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4p} = 0.$$

Бош диагонал бўйича жойлашган коэффициентлар (r_{11} , r_{22} , r_{33} , r_{44}) бош коэффициентлар, колганлари ёрдамчи коэффициентлар деб аталади; озод ҳадлар R_{1p} , R_{2p} , R_{3p} , R_{4p} — юк реакциялари деб аталади.

Бу тенгламаларда ҳам куч усулидаги сингари бош диагоналга нисбатан симметрик равишда жойлашган коэффициентлар ўзаро тенг бўлади, яъни $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$.

Бош коэффициентлар ҳамма вақт нолдан катта бўлади $r_{ii} > 0$.

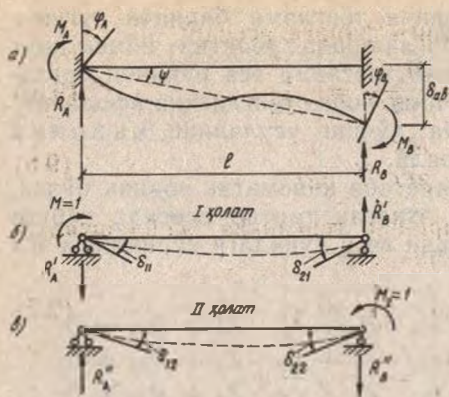
Ёрдамчи коэффициентлар эса $r_{ki} \geq 0$ бўлиши мумкин.

Куч усулининг каноник тенгламалари қўчишларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Қўчиш усулининг каноник тенгламалари эса рама тугунларига киритилган қўшимча боғланишлардаги реактив момент ва реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди.

9.3. РЕАКЦИЯЛАР ВА ҚЎЧИШЛАР ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

Тўғри стерженлардан ташкил топган рамаларни қўчишлар усулида ҳисоблашда киритилган қўшимча боғланишлардаги реакциялар бир ораликли статик ноаник балкалар учун берилган формулалардан фойдаланиб аниқланади.

Бир ораликли биқир таянчли статик ноаник балкани мисол тариқасида кўриб чиқамиз (9.9- расм).



9.9-расм

Фараз қиламиз, чекка кесимлар φ_A ва φ_B бурчакларга бурилган бўлсин. AB туғри чизик ψ бурчакка бурилган дейлик.

9.9-расм, а — да кўрсатилган M_A , M_B , φ_A , φ_B , R_A , R_B ларнинг йуналишлари мусбат ишорага мос келади деб қабул қилайлик. M_A ва M_B таянч моментларини аниқлаш учун куч усули бўйича асосий системалар ку-

рилади (9.9-расм, в) сўнггра ишлар ҳақидаги Бетти теоремасидан фойдаланиб, куйидаги тенгламалар ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} M_A \cdot \delta_{11} - X_2 \delta_{21} &= 1 \cdot \varphi_A - \frac{1}{l} \delta_{ab} \\ M_A \cdot \delta_{12} - X_2 \delta_{22} &= -1 \cdot \varphi_B + \frac{1}{l} \delta_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Берилган система ва ҳар икки бирлик ҳолат бўйича аниқланган кўчиш ва зўриқишларнинг қийматлари 9.1-жадвалда ифодаланган.

9.1-жадвал

Ҳолат	Моментлар	Кучлар	Кўчишлар	
			Бурилиш бурчаклари	Оғиш бурчагн
Берилган	M_A, M_B	R_A, R_B	φ_A, φ_B	$0; \delta$
I ҳолат	$M_1=1, M_2=0$	$R_A^I = \frac{1}{e}, R_B^I = \frac{1}{e}$	$\delta_{11}, -\delta_{21}$	$0; 0$
II ҳолат	$M_1=0, M_2=-1$	$R_A^{II} = \frac{1}{e}, R_B^{II} = \frac{1}{e}$	$\delta_{12}, -\delta_{22}$	$0; 0$

Материаллар қаршилиги фанига асосан

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{M_1 \cdot l}{6EJ} = \frac{l}{6EJ}; \quad (9.5.)$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{M_2 l}{3EJ} = \frac{l}{3EJ}. \quad (9.6)$$

Бу қийматларни биринчи тенгликка жойлаштириб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$M_A \cdot \frac{l}{3EJ} - M_{B3} \cdot \frac{l}{6EJ} = \varphi_A - \psi; \quad (9.7)$$

$$M_A \cdot \frac{l}{6EJ} - \frac{l}{3EJ} = -\varphi_B + \psi.$$

Бундан

$$M_B = 2 \cdot \frac{EJ}{l} (2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi);$$

$$M_B = 2 \cdot \frac{EJ}{l} (\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \quad (9.8)$$

Агар $\frac{EJ}{l} = i$ деб белгиласак, у ҳолда

$$M_A = 2i(2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi);$$

$$M_B = 2i(\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \quad (9.10.)$$

бўлади. Бу ерда i — стерженнинг нисбий бирлиги.

Хусусий ҳоллар:

Агар $\varphi_A = \varphi_B = 0$ бўлса, (9.10) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_B = M_A = -6i\psi \quad (9.11.)$$

Агар $\varphi_A = \psi = 0$ бўлса,

$$M_A = 2i\varphi_A;$$

$$M_B = 4i \cdot \varphi_B \quad \text{бўлади.} \quad (9.12.)$$

Агар $\varphi_B = \psi = 0$ бўлса, у ҳолда формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_A = 4i\varphi_A;$$

$$M_B = 2i\varphi_B. \quad (9.13.)$$

Турли хил таъсирлар остида бўлган стерженларнинг чекка кесимларидаги таянч моментлари ва реакцияларини аниқлаш формулалари 9.2-жадвалда берилган.

Балка ва чига таъсир қилувчи оғия	Эзувчи момент эпюраси	Таянч реактив моментлари	Таянч реакциялари
		$M_{ab} = 4i_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ba}$	$R_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $M_{ba} = -\frac{6i_{ba}}{l}$	$R_{ab} = \frac{12i_{ab}}{l}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{ba} = \frac{ql^2}{12}$	$R_{ab} = \frac{ql}{2}$ $R_{ba} = \frac{ql}{2}$
		$M_{ab} = -\frac{Pl^2}{l^2}(1+\frac{2a}{l})$ $M_{ba} = \frac{Pl^2}{l^2}(1+\frac{2b}{l})$	$R_{ab} = -\frac{Pl}{l^2}(1+\frac{2a}{l})$ $R_{ba} = \frac{Pl}{l^2}(1+\frac{2b}{l})$
		$M_{ab} = \frac{M}{l^2}(2l-3b)$ $M_{ba} = \frac{M}{l^2}(2l-3a)$	$R_{ab} = -\frac{6ab}{l^2} \cdot M$ $R_{ba} = \frac{6ab}{l^2} \cdot M$
		$M_{ab} = 3i_{ab}$	$R_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$ $R_{ba} = \frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$
		$M_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l}$	$R_{ab} = -R_{ba} = \frac{3i_{ab}}{l^2}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{8}$	$R_{ab} = \frac{5}{8}ql$ $R_{ba} = \frac{3}{8}ql$
		$M_{ab} = -\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
		$M_{ab} = \frac{M(l^2-3b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = -\frac{3M(l^2-b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{3M(l^2-b^2)}{2l^3}$

9.4. КАНОНИК ТЕНГЛАМА КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ ВА ОЗОД ҲАДЛАРИНИ АНИҚЛАШ. СТАТИК УСУЛ

Каноник тенгламанинг коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системада бирлик кўчишлар ва ташки кучлар таъсиридан ҳосил буладиган момент эпюралари қурилади.

Эгувчи момент эпюраларини қуриш ва каноник тенгламаларнинг коэффицентларини аниқлаш тартибини 9.10- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтамиз.

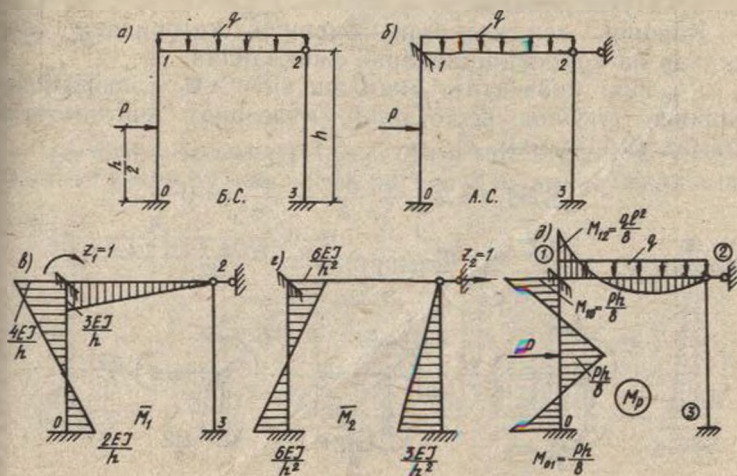
Берилган раманинг кинематик ноаниклик даражаси $n=2$ бўлгани учун иккита каноник тенглама тузилади:

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} &= 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Каноник тенгламани ечиш учун аввал унинг коэффицентлари ва озод ҳадларини топиб олишимиз керак.

M_1 эпюрасини ҳосил қилиш учун биринчи тугунга киритилган боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурамиз (9.10- расм, в). Шаклда келтирилган моментларнинг қиймати 9.2- жадвалдан олинади.

M_2 эпюраси иккинчи боғланишнинг $Z_2=1$ масофага кўчишидан ҳосил бўлган (9.10- расм, г). Бу ерда ҳам стержень учларидаги моментларнинг қиймати 9.2- жадвалдан олинган.



9.10- расм

M_p эпюраси ташки кучлардан қурилган (9.10-расм, д). Табиийки бу эпюрада ҳам моментларнинг қийматлари ўша жадвалдан олинган.

Эгувчи момент эпюралари қурилгандан сўнг каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлашга ўтилади.

Каноник тенгламаларнинг коэффициент ва озод ҳадлари иккита гуруҳга бўлинади:

1) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив моментлар;

2) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив кучлар.

Аниқланаётган коэффициент ёки озод ҳад реактив момент бўлса, у ҳолда асосий системадан тегишли қўшимча боғланиш кесиб олинади ҳамда мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\Sigma M = 0.$$

Агар аниқланаётган коэффициент ва озод ҳадлар реактив куч бўлса, у ҳолда асосий системанинг устунлари ва иккинчи боғланиш орқали кесим ўтказилади. Шундан сўнг тенглама тузилади:

$$\Sigma T = 0.$$

T — ўқнинг йўналиши тенгламалар тузишга қулай ҳолатда ўтказилади.

Каноник тенгламанинг биринчи қаторидаги озод ҳадлар ва коэффициентларни аниқлайлик.

R_{1p} нинг қийматини аниқлаш учун « M_p » эпюрасидан биринчи тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламасини ёзамиз (9.11-расм, а):

$$\Sigma M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{ph}{8} = 0.$$

$$\text{Бундан } R_{1p} = \frac{ph}{8} - \frac{ql^2}{8}.$$



9.11-расм

r_{11} , r_{12} ларни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ бирлик эгувчи момент эпюраларидан 1-туғунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаси ёзилади (9.11-расм, в, б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0; \quad \sum M_1 = r_{12} + \frac{6EJ}{h^2} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}; \quad r_{12} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Каноник тенгламанинг иккинчи каторидаги r_{21} , r_{22} , R_{2p} лар реактив кучлардан иборатдир.

Иккинчи боғланишдаги реактив куч R_{2p} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланиш ажратиб олилади (9.12-расм, а). Бу ажратилган бўлак учун статиканинг мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$\sum X = P + R_{2p} - \frac{P}{2} = 0.$$

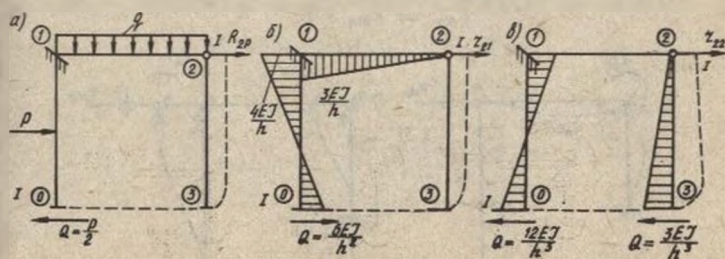
Бундан
$$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$

r_{21} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригелни ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текширамыз (9.12-расм, б):

$$\sum X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0;$$

бундан
$$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

r_{22} ни аниқлаш учун ҳам асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланишни



9.12-расм

ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текшираемиз (9.12-расм, в);

$$\sum X = r_{22} - \frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} = 0;$$

бундан

$$r_{22} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

Эпюраларни кўпайтириш усули

Агар берилган раманинг устунлари ўзаро параллел бўлмаса, у ҳолда статик усул анча мураккаб тус олади. Чунки оғма устунли раманинг асосий системаси учун мувозанат тенгламаси тузилганда, унинг горизонтал ўқида кўндаланг кучлар билан биргаликда бўйлама кучлар ҳам проекцияланади.

Бу усул билан коэффициентлар ва озод ҳадларни ҳисоблаш мураккаблашади. Бундай ҳолларда эпюраларни кўпайтириш усулидан фойдаланилади. Бу усул ташқи ва ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган ишлар ҳақидаги Бетти теоремасига асосланади:

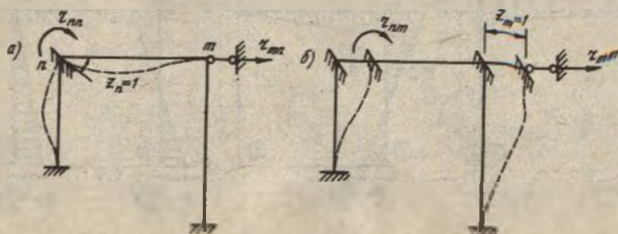
$$T_{nm} = U_{mn}. \quad (a)$$

T_{nm} « m » ҳолатдаги ташқи кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши;

U_{mn} « n » ҳолатдаги ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши.

Статик ноаниқ рамани икки ҳолатда тасвирлаймиз: биринчи ҳолатда « n » тугунни $Z_n = 1$ бурчакка бураемиз (9.13-расм, а) иккинчи ҳолатда « m » тугунни $Z_m = 1$ масофага кўчираемиз (9.13-расм, б). Шакллардан фойдаланиб, ташқи кучлар бажариши мумкин бўлган иш ифодасини ёзамиз:

$$T_{nm} = r_{mn} \cdot 1. \quad (б)$$



9.13-расм

Маълумки, ички кучлар бажариши мумкин бўлган иш куйидаги формуладан аниқланади:

$$r_{mn} = \sum \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EI} dx, \quad (в)$$

(а) ифодага кўра

$$r_{mn} = \sum \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EI} dx. \quad (г)$$

Демак, кўчиш усули каноник тенгламаларнинг коэффициентларини аниқлаш учун куч усулидаги сингари иккита бирлик эпюрани бир-бирига кўпайтирилса kifоя экан.

Кўчиш усули каноник тенгламаларининг озод ҳадларини ҳам эпюраларни кўпайтириш усулида топса бўлади. Бунинг учун куйидаги формуладан фойдаланилади:

$$R_{np} = - \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p}{EI} dx$$

Бу ерда $\bar{M}_n$ — бирлик эгувчи момент эпюраси;

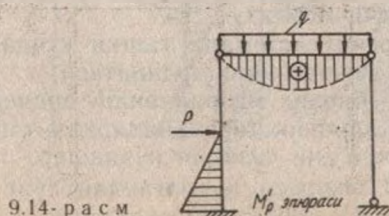
M'_p — статик аниқ системада ташки кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси.

Масалан, 9.10-расм, а — да берилган статик ноаник рама учун M'_p эпюраси 9.14-расмда кўрсатилгандек бўлади. M_1 ва M_2 бирлик эпюралари ўзгарйшсиз қолади (9.10-расм, в, г). R_{1p} ни аниқлаш учун M'_p билан M_1 эпюраси, R_{2p} ни аниқлаш учун эса M'_p билан M_2 эпюралари кўпайтирилади. Кўпайтириш ишлари Верешчагин қонидаси бўйича амалга оширилади.

Кўчиш усули каноник тенгламалари системасининг коэффициентлари ва озод ҳадлари куч усулидаги каби текширилади.

Бунинг учун аввал $\bar{M}_s$ йиғинди эпюраси чизиб олинади:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n,$$



Бу эпюра билан истаган бирлик эпюранинг кўпайтмаси, куч усулидаги сингари, тегишли қатор коэффициентларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\begin{aligned} r_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EJ} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) dx}{EJ} = \\ &= \sum \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} + \dots + \\ &+ \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n dx}{EJ} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}. \end{aligned}$$

Каноник тенгламанинг озод ҳадлари куйидагича текширилади:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}'_p}{EJ} dx &= - \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \bar{M}'_p}{EJ} dx = \\ &= \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}'_p dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}'_p dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}'_p dx}{EJ} \right) = \\ &= R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}. \end{aligned}$$

Демак, озод ҳадлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси икки эпюранинг ($\bar{M}_s$ ва $\bar{M}'_p$ эпюраларининг) кўпайтмасига тенг бўлади.

9.5. РАМАНИНГ М, Q ВА N ЭПЮРАЛАРИНИ ҚУРИШ

Каноник тенглама коэффициентлари тўғри топилганига ишонч ҳосил қилганимиздан сўнг коэффициентларни тенгламага қўйиб, ундаги номатълумлар ($z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$) ни аниқлаймиз ва ундан сўнг «М» эпюрасини қуришга ўтамыз. Эпюра қуйидаги қоида асосида қурилади:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n;$$

бу ерда M — статик ноаниқ раманинг исталган кесимидаги эгувчи момент;

M_p — асосий системада ташки кучдан қурилган M эпюрасининг ординатаси;

$\bar{M}_1, \bar{M}_2$ — бирлик эпюраларининг ординаталари;

Z_1, Z_2 — каноник тенгламалардан топилган бурчакли ёки чизикли кўчишлар.

Якунловчи M эпюраси қурилгандан сўнг шу эпюра асосида «Q» ва «N» эпюралари қурилади.

9.6. КҶЧИШЛАР УСУЛИДА СОДДАЛАШТИРИШЛАР

Симметрик рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда ҳам куч усулидаги сингари номаълумларни гуруҳлаш йулидан фойдаланса бўлади.

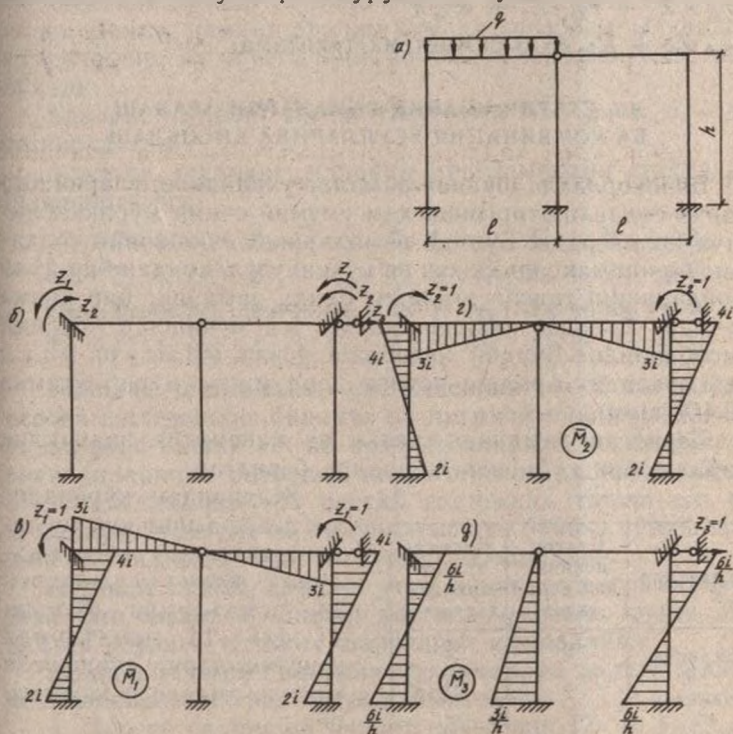
Мисол тариқасида 9.15-расм, а — да тасвирланган рамани кўриб ўтамиз. Рама иккита бурчакли ва битта чизикли кўчишга эга, яъни унинг кинематик ноаниклик даражаси $n=3$. Раманинг тулик каноник тенгламаси куйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0.$$

Берилган рама симметрия ўкига эга бўлганлиги сабабли номаълумларни гуруҳлаш йўли билан каноник



9.15-расм

тенгламанинг айрим коэффициентларини нолга тенглаштириш мумкин.

Номаълумларни гуруҳлаш натижасида икки хил: тўғри симметрик ва тескари симметрик эпюралар ҳосил бўлади. Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси 0 га тенг бўлади. Натижада каноник тенглама иккита системага ажралиб кетади. Бу эса ҳисоблаш ишларини анча енгиллаштиради.

Номаълумларни гуруҳлаш 9.15- расм, б — да кўрсатилган шаклда амалга оширилади. Бирлик M эпюралари 9.15- расм, в, г, д — да тасвирланган. Бу ерда $\bar{M}_1$ тескари, $\bar{M}_2$ эса тўғри симметрик эпюра бўлиб, буларнинг кўпайтмасидан топиладиган $r_{12} = r_{21} = 0$ бўлади, Шунингдек $r_{23} = r_{32}$ ҳам нолга тенгдир. У ҳолда юқоридаги каноник тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1q} \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3q} \end{aligned} \right\} \text{ тескари симметрик тенглама,}$$

$$r_{22} \cdot Z_2 + R_{2q} = 0 \text{ симметрик тенглама.}$$

9.7. СТАТИК НОАНИК РАМАЛАРНИ АРАЛАШ ВА КОМБИНАЦИЯ УСУЛЛАРИДА ҲИСОБЛАШ

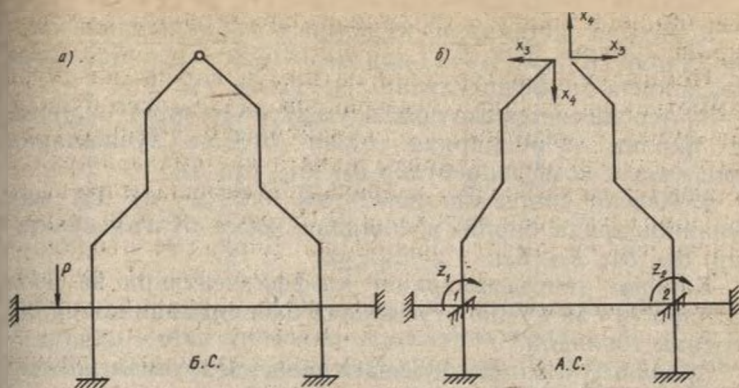
Бинокорликда шундай рамалар учрайдики, уларни ҳар қанча соддалаштирганда ҳам умумий ечими мураккаблигича қолаверади. Бундай рамаларнинг ечилишини соддалаштириш мақсадида куч ва кўчиш усулларидан бир йўла фойдаланиш тавсия этилади. Бунда раманинг бир қисми кучлар усулида, иккинчи қисми эса кўчишлар усулида ҳисобланади. Бундай ҳисоблаш усули аралаш усул деб аталади. Аралаш усулга доир мисол кўриб ўтамиз (9.16- расм).

Берилган раманинг статик ва кинематик ноаниклик даражалари қуйидаги жадвалда берилган:

Қаватлар	Статик ноаник- лик дара- жаси	Кинема- тик но- аниклик даражаси
Биринчи	9	2
Иккинчи	2	12
Жами	11	14

Жадвалдан кўринадик, агар рамани куч усулида ишласак, у 11 номаълумли, кўчиш усулида эса 14 номаълумли бўлади. 11 ёки 14 номаълумли тенгламаларни ечиш осон масала эмаслиги ҳаммага аён.

Агар раманинг биринчи қаватини кўчиш, иккин-



9.16-расм

чи каватини кучлар усулида ечилса, ҳисоб анча енгиллашади. Демак, рамани аралаш усулда ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир. Бу усулга кўра номаълумлар сони 4 га тенг бўлади.

Аралаш усулнинг асосий системаси 9.16-расм, б — да тесвиранган.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot X_3 + r_{14} \cdot X_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot X_3 + r_{24} \cdot X_4 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41} \cdot Z_1 + \delta_{42} \cdot Z_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Каноник тенгламалар системасининг 1—2 қаторлари асосий системанинг биринчи ва иккинчи қўшимча боғланишларида ташқи юк ва номаълумлардан ҳосил бўлган реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди. 3—4 тенгламалар эса асосий системада ташқи юк ва номаълумлардан X_3 ва X_4 йўналишлари бўйича кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди.

Шундай қилиб, аралаш усул каноник тенгламаларининг бир қисми кўчишлар усулига, иккинчи қисми эса кучлар усулига тегишли шартларни ифодалайди.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари системасидаги коэффициентлар тўрт гуруҳга бўлинади:

1. Асосий системада бирлик кўчишлар ($Z_1 = 1, Z_2 = 1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар $r_{11}, r_{12}; r_{21}, r_{22}$.

2. Асосий системанинг қўшимча боғланишларида бирлик кучлар ($X_3=1$, $X_4=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар r_{13} , r_{13} , r_{23} , r_{24} .

3. Асосий системада номаълум зўриқишлар йўналишида бирлик кўчишлардан ҳосил бўлган кўчишларни ифодаловчи коэффициентлар δ_{31} , δ_{32} , δ_{41} , δ_{42} .

4. Асосий системада номаълум куч (X_3 ва X_4) лар йўналишларида бирлик кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар: δ_{33} , δ_{34} , δ_{43} , δ_{44} .

Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари куч ва кўчиш усулларида баён этилган коидалар асосида топилади.

Аралаш усулда ҳам қуйидаги теоремалар амал қилади:

$$r_{mn} = r_{nm};$$

$$\delta_{mn} = \delta_{nm};$$

$$r_{mn} = -\delta_{np}.$$

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари биргаликда ечилади ва z_1 , z_2 , x_3 ва x_4 номаълумлар аниқланади. Эгувчи моментлар эпюрасини қуриш учун қуйидаги формулалардан фойдаланамиз:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \bar{M}_4 \cdot X_4.$$

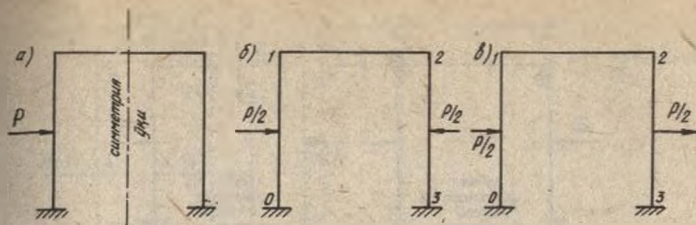
Статик ноаник рамаларни комбинация усулида ҳисоблаш ҳам симметрик рамалар ҳисобини осонлаштириш мақсадини кўзда тутди. Бу усулга кўра рамага юklar тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратилади.

Симметрик юкланган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки бунда симметрик тугунларнинг бурилиш бурчаклари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескари бўлади, уларнинг чизикли кўчишлари эса нолга тенг бўлади.

Тескари симметрик юкланган рамаларни куч усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки куч усулининг асосий системасида симметрик номаълумлар нолга тенг бўлади. Симметрик рамаларни ҳисоблашда уларга қўйилган ташки юкларни симметрик ва тескари симметрик юкларга ажратилади (9.17-расм, б, в).

9.18-расмда симметрик юкланган раманинг кўчиш (а) ва куч (б) усули бўйича танланган асосий системалари тасвирланган. 9.19-расмда худди шунинг ўзи тескари симметрик юкланган рама учун бажарилган.

Ҳар иккала ҳол учун раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражаси, яъни номаълумлар сони аниқланиб, у



9.17-расм

9.2 а — жадвалда акс эттирилган. Шу жадвалнинг охириги устунида қабул қилинган усул кўрсатилган.

Жадвалга кўра симметрик юкланган рама — кўчиш, тескари симметрик юкланган рама — куч усулида ишланиши мақсадга мувофиқ экан.

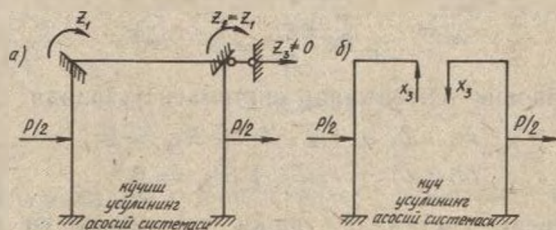
9.2.а-жадвал

Юкланиш тартиби	Номаълумлар сони		Қабул қилинадиган усул
	Куч усули	Кўчиш усули	
Симметрик	2	1	кўчиш усули
Носимметрик	1	2	куч усули

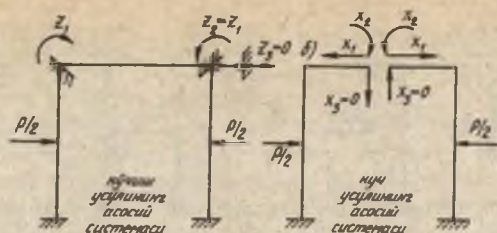
Рамаларни ҳисоблашнинг бу йўли комбинация усули деб ном олган.

Энди статик ноаниқ рамани кўчиш усулида ҳисоблашга доир бир мисол ечамиз. Раманинг юкланиши ва ўлчамлари 9.20-расм, а — да кўрсатилган.

Рама қуйидаги тартибда ҳисобланади:



9.18-расм



9.19-расм

1. Раманинг кинематик ноаниклик даражаси аниқланади:

$$n = n_6 + n_4;$$

n_6 — рама тугунларининг бурчакли кўчишлари сони;

n_4 — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони;
(бу сон бикир тугунларни шарнир билан алмаштирилганда раманинг эркинлик даражасига тенг бўлади);

$$n_4 = 1.$$

Раманинг кинематик ноаниклик даражаси

$$n = 1 + 1 = 2 \text{ бўлади.}$$

2. Асосий система тузилади (9.20-расм, б) ва рама элементларининг нисбий бикирликлари аниқланади:

$$i_{13} = \frac{EJ}{2l} = 0,5 \frac{EJ}{l} = 0,5i; \frac{EJ}{l} = i;$$

$$i_{24} = \frac{EJ}{l} = i;$$

$$i_{45} = \frac{EJ}{l} = i;$$

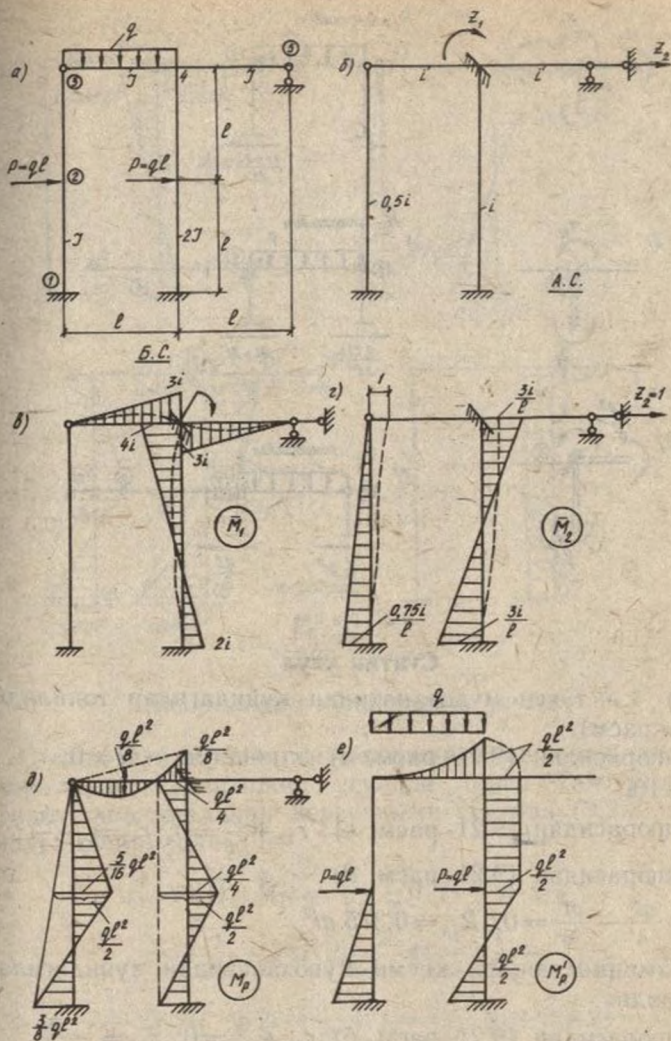
$$i_{47} = \frac{2EJ}{2l} = i.$$

3. Каноник тенгламалар системаси тузилади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0.$$

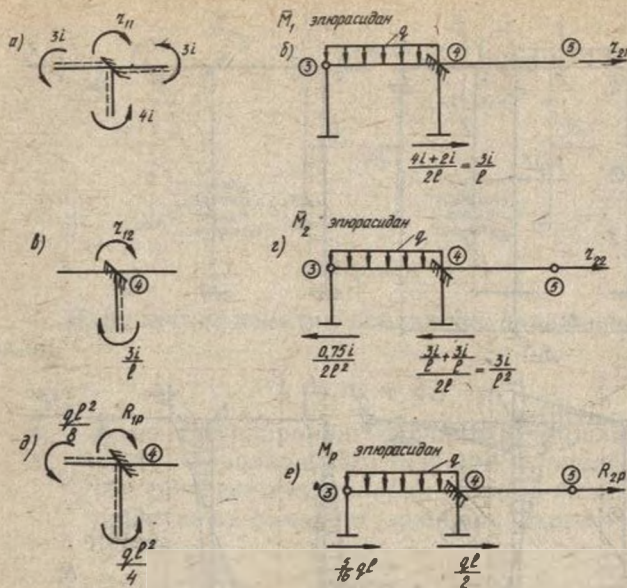
4. Асосий системада ташқи кучлардан ва бирлик кучишлардан алоҳида-алоҳида эгувчи моментлар эпюралари курилади (9.20-расм, в, г, д).



9.20-расм

Эпюраларни куришда махсус жадвалдан фойдаланилади (9.2- жадвал).

5. Каноник тенгламалар тизими коэффициентлари ва озод ҳадлари аниқланади.



9.21- расм

Статик усул

а) 4 — тугун мувозанатидан қуйдагилар топилади: (9.21- расм).

$$\bar{M}_1 \text{ эпюрасидан (9.21- расм, а): } r_{11} - 2(3i) - 4i = 0; \\ r_{11} = 10i.$$

$$\bar{M}_2 \text{ эпюрасидан (9.21- расм, в): } r_{12} + \frac{3i}{l} = 0; \quad r_{12} = -\frac{3i}{l};$$

$\bar{M}_p$ эпюрасидан (9.21- расм, д):

$$R_{1p} - \frac{q l^2}{4} - \frac{q l^2}{8} = 0; \quad R_{1p} = 0,375 q l^2.$$

б) рамнинг юқори қисми мувозанатидан қуйдагилар топилади:

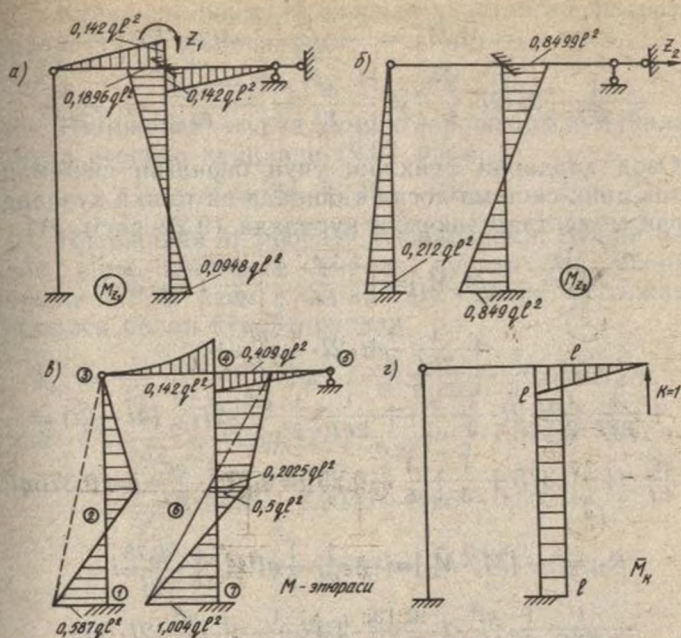
$$\bar{M}_1 \text{ эпюрасидан (9.21- расм, б) } r_{21} + \frac{3i}{l} = 0; \quad r_{21} = -\frac{3i}{l};$$

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21- расм, з)

$$r_{22} - \frac{0,75i}{2l^2} - \frac{3i}{l^2} = 0; \quad r_{22} = 3,375i \cdot l^2;$$

$\bar{M}_p$ эпюрасидан (9.21- расм, е)

$$R_{2p} + \frac{5}{16} q l + \frac{q l}{2} = 0; \quad R_{2p} = -\frac{13 q l}{16} = -0,81 q l.$$



9.22- расм

Эпюраларни кўпайтириш усули

Статик усулда топилган коэффициент ва овоз хадларни эпюраларни кўпайтириш усулида топса ҳам бўлади. Кўпайтириш амаллари Верешчагин усулида (9.22- расм) амалга оширилади:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3i \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i \cdot 2 + \\
 &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 4i \cdot \frac{1}{3} \cdot 2i \right) + \\
 &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 2i - \frac{1}{3} \cdot 4i \right) = \frac{l \cdot i^2}{EI} (6 + 2 + 2) = 10i; \\
 r_{22} &= (\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0.75i}{l} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0.75i}{l} + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \times \\
 &\times \frac{3i}{l} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 = \frac{l^2}{EI \cdot l} (0.375 + 3) = \frac{3.375l^2}{l \cdot EI} = \\
 &= \frac{3.375i \cdot \frac{EI}{l}}{l \cdot EI} = \frac{3.375i}{l};
 \end{aligned}$$

$$r_{21} = r_{12} = \bar{M}_1 \bar{M}_2 = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} - \\ - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} = -\frac{3i^2}{EI} = -\frac{3i \cdot EJ}{EI \cdot l} = -\frac{3i}{l};$$

Озод хадларни аниклаш учун берилган системадан статик аниқ система ҳосил қилинади ва ташқи кучлардан эгувчи моментлар эпюраси курилади (9.20- расм, е):

$$R_{1p} = -[M'_p \bar{M}_1] = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot 3i + \\ + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \\ + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} (4i - 2i) = \\ = \frac{ql^3}{EI} \cdot i [-0,375 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0,25] = 0,375 \cdot \frac{ql^3}{EI} \cdot i = 0,375ql^2.$$

$$R_{2p} = -[M'_p \bar{M}_2] = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{0,75}{l} i - \\ - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot 0 = \\ = -\frac{ql^2}{EI} \cdot i \left[\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \right] = -\frac{13}{16} ql = -0,8125ql.$$

Ҳар иккала усулда топилган коэффицент ва озод хадлар мос равишда бир-бирига тенг чикди.

6. Номатълумлар аникланади. Бунинг учун топилган коэффицент ва озод хадлар каноник тенгламага қўйилади:

$$10i \cdot Z_1 - \frac{3i}{l} \cdot Z_2 + 0,375 ql^2 = 0;$$

$$-\frac{3i}{l} \cdot Z_1 + \frac{3,375i}{l^2} \cdot Z_2 - 0,8125ql = 0.$$

Тенгламалар биргаликда ечилиб, номатълум бурчакли ва чизикли кучишлар аникланади:

$$Z_1 = 0,0474 \frac{ql^2}{i}; \quad Z_2 = 0,283 \cdot \frac{ql^3}{i};$$

7. Қуйидаги формула асосида тузатилган эпюралар қурилади (9.22-расм, а, б):

$$M_{z_1} = \bar{M}_1 \cdot Z_1; M_{z_2} = \bar{M}_2 \cdot z_2$$

8. Натижавий эгувчи моментлар эпюраси қуйидаги формула асосида қурилади (9.22-расм, в):

$$M = M_p + M_{z_1} + M_{z_2}$$

9. Натижавий M эпюраси текширилади. Бунинг учун статик аниқ системага бирлик кучдан $\bar{M}_k$ эпюраси қурилади (9.22-расм, г) ва шу эпюра натижавий M эпюраси билан кўпайтирилади:

$$\begin{aligned} \Delta_{kp} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,142ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,409ql^2 \times \\ &\times 2l \cdot l + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5ql^2 \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,004ql^2 \cdot 2l \cdot l = \\ &= \frac{ql^4}{EI} [0,0473 + 0,2045 + 0,25 - 0,502] = \\ &= \frac{ql^4}{EI} [0,5018 - 0,502] = -\frac{0,0002}{EI} ql^4. \end{aligned}$$

$$\text{Хатоси } \delta\% = \frac{0,0002 \cdot 100}{0,502} = 0,04\% < 1\%$$

Рухсат этилган чегарада.

10. Қундаланг кучлар эпюраси Q қурилади. Буцинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{\text{яв}} - M_{\text{қаз}}}{l};$$

$$Q_{12} = \frac{0,2065ql^2 - (+0,582ql^2)}{l} = 0,7935ql;$$

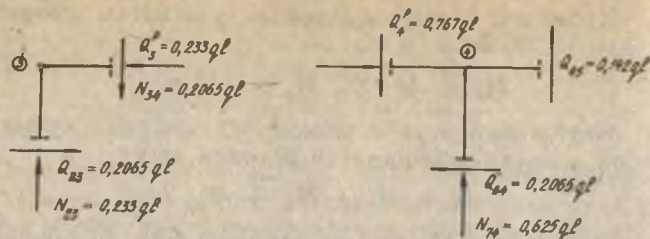
$$Q_3^{pu2} = \frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = 0,233ql;$$

$$Q_4^{pu2} = -\frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = -0,767ql;$$

$$Q_{45} = \frac{0 - 0,142ql^2}{l} = -0,142ql;$$

$$Q_{64} = \frac{0,409ql^2 - 0,2025ql^2}{l} = 0,2065ql;$$

$$Q_{76} = \frac{0,2025ql^2 - (-1,004ql^2)}{l} = 1,2065ql.$$



9.23- расм

11. Бўйлама кучлар эпюраси N қурилади. Бунинг учун раманинг 3 ва 4 тугунлари мувозанати кўриб чиқилади (9.23- расм). 3 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma x = 0; \quad N_{34} - Q_{23} = 0; \quad N_{34} = Q_{23} = 0,2065 \, ql;$$

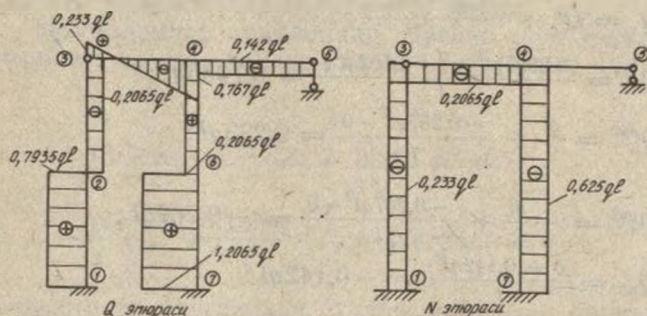
$$\Sigma y = 0; \quad N_{13} - Q_{31}^l = 0; \quad N_{13} = Q_{31}^l = 0,233 \, ql.$$

4 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; \quad N_{74} - Q_4^l + Q_{45} = 0;$$

$$N_{74} = Q_4^l - Q_{45} = 0,767 \, ql - 0,142 \, ql = 0,625 \, ql.$$

Топилган ординаталар бўйича кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраси қурилади (9.24- расм).



9.24- расм

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАР ҲАКИДА ТУШУНЧА

Ҳисоблаш усулларини аниқ ва тақрибий усулларга бўлишнинг ўзи шартлидир. Негаки, «аниқ» усулларда ҳам айрим фаразларга йўл қўйилади. Масалан, материални идеал эластик ва бир жинсли деб қаралади, бунда раманинг фазовий иши ҳамда таянчларининг қайишқоклиги эътиборга олинмайди ва ҳ.к. Тақрибий усулларда эса ҳисобни енгиллаштирадиган фараз ва соддалаштиришга кўпроқ ўрин берилади.

Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда тақрибий усуллар кенг қўлланилади. Маълумки, қурилиш конструкцияларининг ҳисоби уларнинг кўндаланг кесимини дастлабки танловдан бошланади. Бу ишларни тез ва сод амалга оширишда муҳандисга тақрибий усуллар жуда қўл келади.

Тақрибий усулларнинг қўшимча фаразлари иншоотнинг тарҳини янада соддалаштиришга, ички кучлар тақсимотига, берилган юкларни соддарок юклар билан алмаштиришга ва шунинг сингари қатор амалларга асосланади.

Бу борада ҳисоблаш тарҳини янада соддалаштириш асосий йўллардан бири ҳисобланади. Агар ҳисоблаш тарҳи кўпол фаразларга асосланса, у ҳолда ҳисоб натижалари биринчи яқинлашув учун тўғри деб қабул қилинади, танланган кесим эса дастлабки нусха сифатида қаралади, зарурат туғилса, кейинчалик аниқроқ тарҳи бўйича қайта ҳисобланади.

Масалан, рама ригелининг кўндаланг кесими ўлчамларини дастлабки танлашда уни оддий балка кўринишида олиш мумкин: бунда ригель моменти балка моменти M_0 нинг $0,6—0,7$ улушини ташкил этади:

$$M = (0,6—0,7) M_0$$

Рама устунларининг кесимини танлашда ригеллар устунга шарнирли бириккан деб фараз этилади ва шу асосда устунга таъсир этувчи бўйлама кучлар аниқланади. Бунинг ҳисобга олиб, ҳисобий қаршиликлар $20—50$ фоизга камайтирилади.

Аниқроқ ҳисоблаш тарҳлари бўйича бажарилган ҳисоб дастлабки танланган кесимни ойдинлаштириш имконини беради. Баъзан қайта аниқланган кесим кейинги аниқ ҳисобларга асос қилиб олинади.

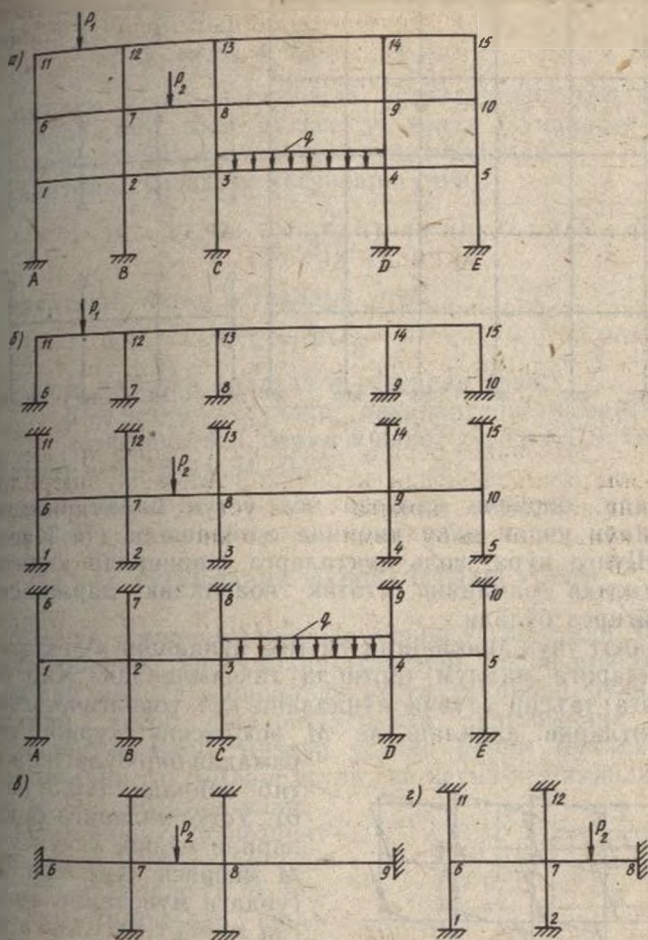
Амалий ишларда тақрибий усулларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир.

10.2. РАМАЛАРНИ ВЕРТИКАЛ ЮКЛАР ТАЪСИРИГА ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Аниқ ҳисобларнинг далолат беришича, бирор каватнинг ригелига қўйилган юк бошқа кават ригелларида вужудга келадиган эгувчи моментларга айтарли таъсир этмайди. Бу ҳол 10.1-расм, *а* — да берилган рамани 10.1-расм, *б* — да кўрсатилган тарзда алоҳида рамаларга ажратиш имконини беради. Раманинг ҳар бир қисми мустақил рама сифатида қурилади. Алоҳида эпюралар раманинг дастлабки тарҳига устма-уст жойлаштирилади, сўнгра кўндаланг ва бўйлама кучлар ҳисобланади. Ҳисоб тақрибий бўлганлиги сабабли рама тугунлари тўлиқ мувозанатга эга бўлмайди.

Ҳисобни бундан ҳам соддалаштирса бўлади. Бунинг учун раманинг уч ригелдан иборат бўлган бўлаги ажратиб олинади (10.1-расм, *в*) ва мустақил равишда ҳисобланади. Раманинг чекка қисми 10.1-расм, *г* — да кўрсатилган тарзда ажратилади.

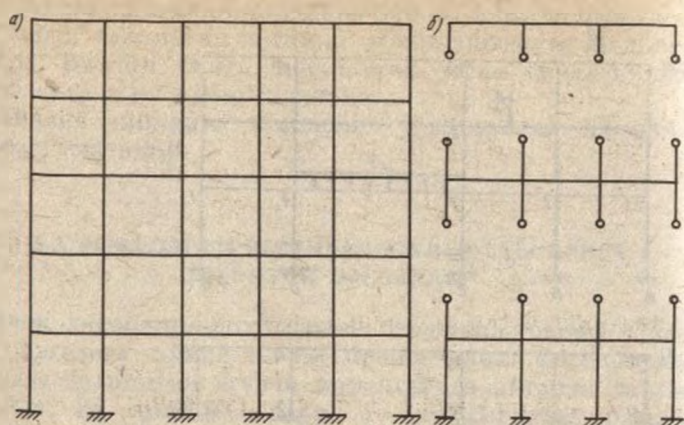
Бинокорликда ораликлари тенг ҳамда бир хил юкланган кўп каватли рамалар кўп учрайди. Бундай рамаларни вертикал юклар таъсирига ҳисоблаганда янада соддарок тарҳлар танлаш мумкин. Масалан, 10.2-расм, *а* — да тасвирланган кўп каватли кўп ораликли рамалар ҳисоби, 10.2-расм, *б* — да кўрсатилганидек учта уч ораликли рамалар ҳисобига келтирилиши мумкин, яъни берилган раманинг ички кучлари ҳақида тақрибий маълумотга эга бўлиш учун юкори, ўрта ва биринчи кават рамалари ҳисобланса кифоя. Рама устунчасининг баландлиги кават баландлигининг ярмига тенг бўлиб, учлари шарнирли деб қабул қилинади. Бунга сабаб шуки, горизонтал кўчишлар йўқ деб фараз этилса, бир ўк устида жойлашган тугунлар деярли бир хил бурчакка бурилади. Бинобарин, устунларнинг тугундаги моментлари ҳам ўзаро тенг бўлади, натижада ноль нукталар устуннинг ўрталарида ҳосил бўлади.



10.1-расм

10.3. РАМАЛАРНИ ГОРИЗОНТАЛ ЮКЛАР ТАЪСИРИГА ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Рамаларни горизонтал юklar (шамол ва сейсмик кучлар) таъсирига тақрибий ҳисоблаганда, юklar йиғик куч сифатида тугунларга қўйилган деб қаралади. Аниқ ҳисобларнинг кўрсатишича, юklar тугунларга қўйилса, эгувчи моментларнинг ноль қийматлари устуннинг ўрта



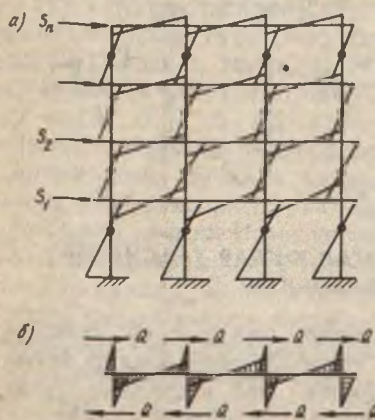
10.2-расм

кисмида, биринчи каватда эса устун баландлигининг тахминан учдан икки қисмида жойлашади (10.3-расм, а). Шунга кўра, ноль нукталарга шарнирлар киритиш воситасида раманинг статик ноаниклик даражасини пасайтирса бўлади.

Кават учун аниқланган умумий кўндаланг куч Q рама устунларига маълум тартибда тақсимланади. Ҳар бир устунга таъсир этувчи кўндаланг куч топилгач, эғувчи моментларни аниқлаш ва M эпюрасини қуриш учун рамадан бир бўлаги ажратиб олинади (10.3-расм, б). Устун учларига Q кучларини қўйиб, устун учун M эпюраси қурилади. Тугундаги мувозанатлашмаган момент ригелдаги момент билан мувозанатлаштирилади. M эпюраси асосида Q ва N эпюралари қурилади.

Каватлар кўндаланг кучлари қуйидаги тартибда аниқланади: биринчи кават учун

$$Q_1 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n;$$



10.3-расм

иккинчи қават учун

$$Q_2 = S_2 + S_3 + \dots + S_n \quad (10.1)$$

Маълум қават чегарасида устунларнинг қўндаланг кесимлари бир хил бўлса, у ҳолда қўндаланг куч устунларга қуйидаги тартибда тақсимланади:
каватнинг ўртадаги устунлари учун

$$Q_{\text{ор}} = \frac{Q}{m-2(1-\beta)}; \quad (10.2)$$

каватнинг четки устунлари учун

$$Q_{\text{чет}} = \beta Q_{\text{ор}} \quad (10.3)$$

Бу ерда m — битта қаватдаги устунлар сони;

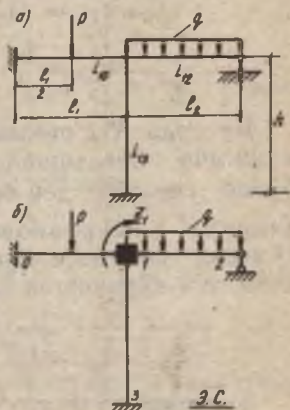
β — четки устунлар биқирлигини камайтириш коэффициентини; биринчи қават учун $\beta = 0,9$; қолган қаватлар учун $\beta = 0,54 \dots 0,79$.

10.4. ТУГУНЛАРНИ МУВОЗАНАТЛАШ УСУЛИ

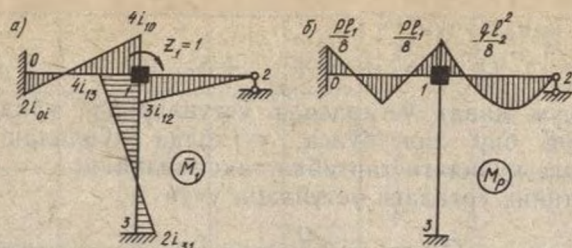
Мазкур усулнинг замирида қўчиш усули ётади. Бирок бунда каноник тенгламалар тузилмай, оддий арифметик ҳисоблар амалга оширилади. Усул тақрибий бўлишига қарамай, ҳисоб ишлари керакли аниқликкача олиб борилиши мумкин. Мазкур усулни айрим муаллифлар моментларни тақсимлаш усули ёки кетма-кет яқинлаштириш усули деб атайдилар.

Тугунларни мувозанатлаш усули 1929 йилда Тошкентлик муҳандис Н. М. Бернадский томонидан ишлаб чиқилган. Шунга ўхшаш усулни 1930 йилда америка олими Харди Кросс ҳам тақлиф этган.

Тугунларни мувозанатлаш усулида рамалар озод ва озодмас рамаларга ажратилади. Чизикли қўчиш имкониятига эга бўлган рамалар озод, эга бўлмаганлари — озодмас рамалар деб аталади.



10.4-расм



10.5-расм

Усулнинг моҳияти билан 10.4-расм, а — да тасвирланган озодмас рама мисолида танишиб ўтамиз. Берилган рамага эквивалент бўлган система кўчиш усулида 10.4-расм, б — да кўрсатилган. Кўчиш усулининг каноник тенгламаси эса қуйидаги кўринишга эга:

$$Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0. \quad (10.4)$$

Бу тенгламадан номаълум бурчакли кўчиш z_1 аниқланади:

$$Z_1 = -R_{1p} : r_{11}. \quad (10.5)$$

Раманинг биринчи тугунида ҳосил бўладиган реактив моментлар r_{11} ва R_{1p} бирлик кўчиш ва ташқи кучлардан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюралари M_1 ва M_p дан топилади. (10.5-расм, а, б):

$$r_{11} = 4 \left(i_{10} + i_{13} + \frac{3}{4} i_{12} \right); \quad i_{12} = \frac{3}{4} i_{12} \text{ деб олсак};$$

$$r_{11} = 4(i_{10} + i_{13} + i_{12}); \quad (10.6)$$

$$R_{1p} = \frac{pl}{8} - \frac{pl^2}{8} \text{ бўлади.} \quad (10.7)$$

Бу ерда R_{1p} раманинг биринчи тугунига киритилган қўшимча боғланишдаги мувозанатлашмаган момент бўлиб, уни $M_1^{\text{неур}}$ деб белгилаймиз, яъни $R_{1p} = M_1^{\text{неур}}$

(«неур» — неуровновешанный — мувозанатлашмаган сўздан олинган). Буни инобатга олсак, (10.5) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$Z_1 = -\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}}. \quad (10.8)$$

Бурчакли кўчиш z_1 аниқлангач, қуйидаги формуладан фойдаланиб, стержень учларидаги моментлар аниқланади:

$$M_{ki} = M_{ki}^0 + \bar{M}_{ki} z_1. \quad (10.9)$$

Раманинг 0—1 стерженини чап учидаги момент

$$\begin{aligned} M_{01} &= -\frac{Pl_1}{8} + 2i_{01} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \\ &= \frac{Pl_1}{8} - \frac{2i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{Pl_1}{8} - \frac{1}{2} K_{01} \cdot M_1^{\text{неур}} \end{aligned}$$

бўлади. Шу стерженнинг ўнг учидаги момент куйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} M_{10} &= \frac{Pl_1}{8} + 4i_{10} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \\ &= \frac{Pl_1}{8} - \frac{4i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{Pl_1}{8} - K_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}. \end{aligned}$$

Бу ерда куйидаги белгилаш қабул қилинган:

$$K_0 = K_{10} = \frac{i_{10}}{i_{10} + i_{13} + i_{12}}$$

ва унга таксимлаш коэффиценти деб ном берилган. Таксимлаш коэффиценти умумий кўринишда

$$K_{ki} = \frac{i_{ki}}{\sum_{k=1}^n i_{ki}} \quad (10.10)$$

тарзида ифодаланади.

Қолган стерженлардаги моментлар ҳам шу тарика аниқланади:

$$M_{12} = -\frac{ql_2^2}{8} - K_{12} \cdot M_1^{\text{неур}};$$

$$M_{21} = 0;$$

$$M_{13} = 0 - K_{13} \cdot M_1^{\text{неур}};$$

$$M_{31} = 0 - \frac{1}{2} K_{13} \cdot M_1^{\text{неур}}.$$

Бир тугунда учрашувчи стерженларнинг таксимлаш коэффицентлари йиғиндиси бирга тенг бўлади.

$$K_{10} + K_{12} + K_{13} = 1. \quad (10.11)$$

Биринчи тугуннинг мувозанатини текшираимиз. Бунинг учун шу тугундаги моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - K_{01}M_1^{\text{неур}} \right) + \left(-\frac{ql_2^2}{8} - K_{12}M_1^{\text{неур}} \right) + (-K_{13}M_1^{\text{неур}}).$$

Кавсларни очиб, гуруҳлаймиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - \frac{ql_2^2}{8} \right) - (K_{10} + K_{12} + K_{13})M_1^{\text{неур}}. \quad (10.12)$$

Биринчи кавсдаги ифода $M_1^{\text{неур}}$ га, иккинчи кавс эса бирга тенг эканлигини ҳисобга олсак, тугуннинг мувозанатини белгилловчи тенгламага эга бўламиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = 0. \quad (10.13)$$

(10.12) тенгламадаги биринчи кавснинг ўрнига $M^{\text{неур}}$ ни қўйиб иккинчи кавсни очиб ёзамиз:

$$\begin{aligned} M_{10} + M_{12} + M_{13} &= M_1^{\text{неур}} + (-K_{10}M_1^{\text{неур}}) + \\ &+ (-K_{12}M_1^{\text{неур}}) + (-K_{13}M_1^{\text{неур}}) = \\ &= M_1^{\text{неур}} + M_{10}^{\text{ур}} + M_{12}^{\text{ур}} + M_{13}^{\text{ур}} = 0. \end{aligned}$$

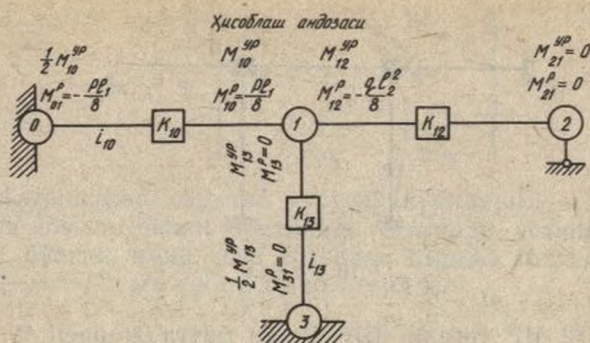
Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинди:

$$M_{ki}^{\text{ур}} = -K_{ki} \cdot M_1^{\text{неур}} \quad (10.14)$$

$M_{ki}^{\text{ур}}$ — ki стерженнинг «К» учидаги мувозанатлашган момент («ур» — урновешанный сўзидан олинган)

(10.14) формуланинг маъноси: бикир тугунга киририлган қўшимча боғланиш олиб ташланса, яъни тугун бўшатилса, у z_1 бурчакка бурилади. Натижада тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_1^{\text{неур}}$ шу тугунга келиб туташган стерженларга уларнинг тақсимлаш коэффициентларига пропорционал равишда тақсимланиб кетади. Манфий ишора мувозанатлашган момент билан мувозанатлашмаган моментнинг йўналиши қарама-қарши эканлигини билдиради.

(10.14) формула ёрдамида топилган мувозанатлашган моментларнинг қийматини берилган рама шаклида чи-



10.6-расм

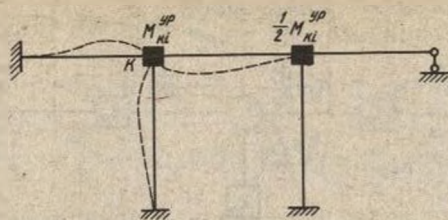
зилган ҳисоблаш андозасига жойлаштирамиз (10.6-расм). Ҳар қайси стержен учигаги натижавий моментнинг қиймати ҳисоблаш андозасига ёзилган тегишли моментларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

Мазкур мисолда бикир тугуни битта бўлган рама, яъни бир номаълумли рама кўриб ўтилди. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент стерженларга тўла тўкис ва қолдиқсиз тақсимланиб кетди. Шу сабабли ҳисоб аниқ бўлди. Агар бикир тугунлар сони бирдан ортиқ бўлса, у ҳолда ечим тақрибий бўлади.

Раманинг бикир тугуни бирдан ортиқ бўлган ҳол

Юқорида раманинг бикир тугуни битта бўлган ҳолни кўриб ўтдик. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг тўла ва аниқ тақсимланганининг гувоҳи бўлдик. Агар раманинг бикир тугунлари иккита ва ундан ортиқ бўлса, у ҳолда вазият бироз бошқача бўлади.

Мисол тариқасида бикир тугуни иккита бўлган статик ноаниқ рамани (10.7-расм) кўриб ўтайлик. Раманинг «К» ва «i» тугунлари қўшимча боғланиш билан маҳкамланган. Ҳисобни исталган тугундан бошлаш мумкин. Раманинг «К» тугунидаги мувозанатлашмаган момент $M_k^{суп}$ ни аниқладик, дейлик. Энди «К» тугунини бўшатамиз. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_k^{суп}$ шу тугунга туташган стерженларга тақсимланиб кетади. Тақсимот натижасида $k-i$ стерженининг «К» учига $M_{ki}^{суп}$ momenti тегади, «i» учига эса шу моментнинг ярми,



10.7- расм

яъни $1/2 M_K^{up}$ тегади. Шу билан битта жараён тугайди. Шундан кейин «К» тугунини қайта маҳкамлаб, «i» тугунини бушатамиз. Бунда стерженнинг «i» учига M_K^{up} моменти, «К» учига эса шунинг ярми, яъни $1/2 M_K^{up}$ тегади. Шу йўсинда «К» тугунига бошқа қарама-қарши тугунлардан ҳам (агар мавжуд бўлса) яримталиқ моментлар келиб қўшилади, натижада «К» тугунининг дастлабки мувозанати бузилади. Бироқ энди бу сафар «К» тугунидаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати аввалгисидан кичикроқ бўлади. Ҳисобнинг навбатдаги жараёнида бу моментни яна қайта тақсимлаймиз. Қайта тақсимлаш амали бир неча марта такрорланганда, тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати тобора нолга яқинлашиб боради. Қайта тақсимлаш амали тугагач, стержень учигаги моментлар йиғиндиси топилади. Ана шу йиғинди момент натижавий момент ҳисобланади.

Тугунларни бирин-кетин мувозанатлаш усулининг моҳияти ана шундан иборат.

1- боб

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНING ТАДБИҚИ

11.1. МАТРИЦАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Устун ва қаторлари сони m ва n бўлган жадвал кўринишидаги ифодаalar тизими матрица A деб аталади.

Ўлчами $m \times n$ бўлган матрица A қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрицалар ҳар хил хусусий кўринишга эга бўлиб, турли номлар билан юритилади. Масалан, устунлар сони $n=1$ бўлган, яъни якка устундан ташкил топган матрица — устун матрица деб аталади.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Қаторлари сони $m=1$ бўлган матрица эса қатор матрица деб юритилади:

$$A_1 = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

Элементлар устун ва қаторлар тартиби $m=n$ бўлган матрицалар m тартибли квадрат матрица деб юритилади. Квадрат матрица тартибига тенг бўлган аникловчи матрица аникловчиси деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$[A] \rightarrow D(A) \quad (11.1)$$

Агарда $D(A)=0$ бўлса, A матрицани хусусий, бошқа ҳолларида нохусусий, яъни расмий матрица деб юритилади. Олий математика курсида баён этилган тушунчага биноан аникловчи қуйидаги формуладан топилади:

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \quad (11.2)$$

бу ерда

$$a_{ii}^{(i-1)} = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} a_{ji}^{(j-1)}$$

$$a_{ij}^{(j-1)} = a_{ij} - \sum_{R=1}^{j-1} \frac{a_{RR}^{(R-1)}}{a_{RR}^{(R-1)}} a_{Ri}^{(R-1)}$$

$$a_{ji}^{(j-1)} = a_{ji} - \sum_{R=1}^{j-1} \frac{a_{iR}^{(R-1)}}{a_{RR}^{(R-1)}} a_{Ri}^{(R-1)}$$

Масалан, иккинчи ва учинчи тартибли аниқловчилар куйидагича ёйилади:

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{matrix}$$

Агар тўртбурчакли матрица ($m \times n$) нинг баъзи қатор ҳамда устунларини ўчирсак, ҳар хил тартибли квадрат матрицалар ҳосил бўлади.

Масалан, берилган A матрицадан ($m=3, n=4$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

тўртта III — тартибли, ўн саккизта II — тартибли ва ўн иккита I — тартибли матрицалар ҳосил қилиш мумкин.

Матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчи си деб, $D(A)$ аниқловчидан a_{ij} элементли қатор ва устунларни ўчириб, топилган $(-1)^{i+j}$ ишорали аниқловчига айтилади.

Агар иккита бир хил тартибли A ва B матрицаларнинг бир хил жойлашган ҳар бир элементи ўзаро тенг бўлса, яъни

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = B$$

бу ерда $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n}$)

у ҳолда бу матрицаларни тенг матрицалар дейиш мумкин.

Агар A матрицанинг қаторларини устунга, устунларини эса қаторга айлантириб ёзсак, у ҳолда A матрицага нисбатан A' — транспонирланган матрица ҳосил бўлади, яъни

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Устун матрица A нинг транспонирланган кўриниши қатор матрица бўлади:

$$A' = [a_1 \ a_2 \dots a_m]$$

11.2. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИДА УЧРАЙДИГАН МАТРИЦА ВА ВЕКТОРЛАР

Қурилиш механикасида матрицалар статик аник ва ноаниқ балка, ферма, арка, рама ва бошқа конструкцияларни ҳисоблашда кенг қўлланилади.

Матрицалар энг мураккаб ҳисобларни ЭХМ га программалаштиришда ўзининг ихчам ва яхлитлиги ҳамда универсаллиги билан ажралиб туради. ЭХМ ва ҳисоблаш математикаси ривожланган сари матрицалар қурилиш механикасининг барча бўлимларига жадал суръатда кириб бормокда.

Юқорида келтирилган кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги Максвел теоремасига асосан қурилиш механикаси масалаларида учрайдиган матрицаларнинг кўшни элементлари $a_{ij} = a_{ji}$ бўлади. Натижада бу матрица симметрик бўлиб, квадрат кўринишига эга бўлади.

Қурилиш механикасида диагональ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

лентасимон

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & a_{m-1, m-2} & a_{m-1, m-1} & a_{m-1, m} \\ & & & & & & a_{mm} & a_{m, m-1} \end{bmatrix}$$

бирлик ва ноллик

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad A=0 \quad a_{ij}=0 \quad i=\overline{1, m}$$

матрицалардан кенг фойдаланилади.

Ундан ташқари юқори ёки пастки учбурчак матрицалардан

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \dots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ҳам фойдаланилади.

Юқори тартибли статик ноаниқ масалаларни умуман катта тартибли тенгламаларни ЭХМ да ечишни осонлаштириш учун блоксимон ва квази матрицалар қўлланилади.

Блоксимон матрица ҳосил қилиш учун матрица A дан горизонтал ва вертикал чизиклар ўтказиб бир неча блокларга бўлинади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} & A_{12} &= \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix} & A_{13} &= \begin{bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{bmatrix} \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix} & A_{22} &= \begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{bmatrix} & A_{23} &= \begin{bmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

У ҳолда матрица A нинг элементларини матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Бундай матрица блоксимон матрица деб қабул қилинган.

Агар блоксимон матрицанинг қўшни элементлари ноль бўлса, бундай матрицалар квазидиагонал:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{12} & & & \\ & & A_{13} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_{RR} \end{bmatrix}$$

баъзилари ноль бўлса,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ & A_{21} & A_{22} & & \\ & & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ & & & \dots & \\ & & & & A_{R-1} & A_{RR} \end{bmatrix}$$

квазилентасимон матрица деб юритилади.

Илгари кўриб ўтилган куч ёки кўчишлар усулининг каноник тенгламалари тизимини матрица кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Ax + B = 0 \text{ ёки } Kz + P = 0 \quad (11.3)$$

бу ерда A, K — тенгламалардаги коэффициентлар матрицаси;

x, z — номаълум куч ва кўчишлар матрицаси;

B, P — озод ҳадлар матрицалари.

Шу кўринишга эга бўлган тенгламаларни ЭХМ да матрицалар ёрдамида ҳисоблаш кенг имкониятларга эга. Бу имкониятлар қуйидагилардан иборат:

- юқори тартибли статик ноаниқ масалаларни ечиш;
- иншоотга бир неча хил ташки кучлар таъсир этса, тенгламаларни тескари матрицалар орқали бир марта ечиш;
- ҳисоб ишларини соддалаштириш ҳамда натижасини ҳақиқатга яқинлаштириш каби имкониятларга эга.

Бунинг учун, яъни номаълум векторларни

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ёки} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

топиш учун, қуйидаги матрица амаллари бажарилади:

$$x = -A^{-1}B \quad \text{ёки} \quad z = -K^{-1}P \quad (11.4)$$

A^{-1}, K^{-1} кўринишига эга бўлган тескари матрицадан фойдаланилади.

Тескари матрицаларни топиш ёки математик ибора билан айтганда, матрицаларни алмаштириш — чизикли алгебранинг энг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

11.3. МАТРИЦАЛАР УСТИДАГИ АМАЛЛАР

A ва B матрицаларни қўшиш ёки айириш амалларини фақат уларнинг тартиблари бир хил, яъни қатор ва устунлари сони тенг бўлгандагина бажариш мумкин:

$$C = A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

бу ерда $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$

Матрица устидаги қўшиш ва айириш амаллари қуйидаги алгебрик боғланишларга эга:

$$A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C); A + 0 = A$$

$A(m \times p)$ матричасини $B(p \times n)$ матричасига қўпайтириш учун A матрицанинг устунлар сони B матрицанинг қаторлар сонига тенг бўлиши шарт. Буларнинг қўпайтмасидан ҳосил бўлган $C = A \cdot B$ матрица элементлари қуйидаги қўпайтмалар йиғиндисига тенгдир:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

Яна шунга эътибор бериш керакки, A ва B матрицалар ўзаро мос бўлгандагина қўпайтириш мумкин.

Масалан:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ва } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

бу ерда

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{31} \text{ ва х.к.}$$

Агарда A ва B матрицаларининг тааллуқли тартиблари тенг бўлмаса, уларни қўпайтириб бўлмайди ва бундай матрицалар мос бўлмаган матрицалар дейилади.

Масалан, юқоридаги B ва A матрицалар ўзаро мос эмас, чунки уларни $B \cdot A$ кетма-кетликда қўпайтириб бўлмайди. Аксинча, икки матрица A ва B ўзаро мос бўлиб, уларнинг қўпайтмалари мавжуд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Чунки матрица амалларида $AB \neq BA$ бўлади.

Бу тенгсизлик икки матрица квадрат ва тенг тартибли (мос матрицалар) бўлганда ҳам сақланади.

Квадрат матрицалар учун қуйидаги кўпайтмалар бўлиши мумкин:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1} = A, \quad R - \text{бутун сон}$$

A матричасини α микдорга кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

$$C = \alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} \dots \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

Умуман матрицаларни кўпайтиришда қуйидаги алгебрικ боғланишлардан фойдаланиш мумкин:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = (\alpha B)A$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$AE = A$$

Матрицаларни кўпайтиришда қуйидаги хусусий ҳолатлар бўлиши мумкин:

1. Ҳадлари бир хил бўлса, ҳосил бўлган матрица қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$c = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \dots 0 \\ 0 & \beta \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \beta \end{bmatrix} = \beta A = BA$$

2. Икки диагонал матрицалар кўпайтмаси

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \dots \\ & & \beta_n \end{bmatrix} = BA$$

коммутацион хусусиятга эга.

3. Тенг тартибли устун матрица A ни қатор матрица B га кўпайтмасы шу тартибга тенг квадрат матрица ҳосил қилади:

$$c = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

4. Тенг тартибли қатор матрица A ни устун матрица B га кўпайтмасы скаляр C га тенгдир,

$$c = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

5. Квадрат матрица A нинг вектор устун B матрицага кўпайтмасы устун матрица C га тенгдир:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$$

Қурилиш механикасида қўлланиладиган матрицаларнинг аксарияти тенгламалар тизимиңи тузиш ва уларни ечишга қаратилган. Агар A ва B матрица уларнинг кўпайтмасы AB ва BA бирлик матрицага тенг бўлса, улар тескари матрица ҳисобланади: $AB = BA = E$

Чизикли математикада A матрицасининг тескари курунишини A^{-1} деб, ёки $B=A^{-1}$ деб қабул қилинган.

Ҳар қандай тўлиқ квадрат матрица ўзининг тескари матрицасига эгадир ва у қуйидагича ифодаланади:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad (11.5)$$

Бу ерда A_{ij} — A матрица аниқловчисининг алгебрик тўлдирувчиси.

A_{ij} — матрицасининг элементлари A матрицасининг аниқловчисига i — қатор ва j — устунларни ўчирганда ҳосил бўлган аниқловчига (-1) ни қўпайтириб ҳисобланади.

Шунга эътибор бериш керакки, қурилиш механикаси масалаларини ечаётганда ва текшираётганда, қуйидаги боғланишлардан фойдаланиш мумкин:

$x = -A^{-1}AE$ бу эса $A^{-1}A = E$ — бирлик матрицасидир.

Юқорида кўрсатилганидек, помаълум ҳадлар матрицаси $x = -A^{-1}B$ (11.4) тескари A^{-1} матрицаси орқали топилади.

A матрица $D(A) = 0$ бўлгандагина тескари A^{-1} матрицасига эга бўла олади.

Мисол. A матрицанинг тескари қиймати алгебрик тўлдирувчилар орқали топилсин.

Берилган:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Алгебрик тўлдирувчилар қуйидагича аниқланади:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Демак, тескари матрица A нинг тулдирувчиси

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{vmatrix}$$

куйидаги аникловчига эга бўлиб:

$$D(A) = 16 + 6 + 4 - 30 = -4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{vmatrix} \text{ га тенгдир.}$$

Тўртинчи ва ундан юкори тартибли матрицаларни алмаштириш ва уларни тескари кийматларини аниклаш анча мураккаб масала ҳисобланади.

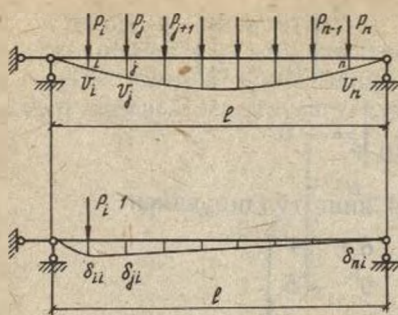
Шунинг учун бундай масалаларни ечишда ЭХМ ва матрица амалларидан фойдаланилади. Замонавий ЭХМларда тартиби 50—100, ҳаттоки 500—700 ва ундан юкори бўлган матрицаларнинг тескари кийматларини аниклаш имкониятига эга бўлган стандарт дастурлар мавжуддир.

11.4. МАТРИЦАЛАРНИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

Конструкцияларни матрицалар ёрдамида ҳисоблашда барча бўлангич ахборот матрица кўринишига келтирилади.

Масалан, элементнинг ва элементлар йиғиндисининг эластиклик хусусияти мойиллик ёки бикирлик матрицалари орқали ифодаланади. Бу матрицалар ташки куч билан шу кучлар йўналиши бўйлаб элементда ҳосил бўлувчи кўчишларнинг ўзаро боғлиқлигини ифодалайди.

Агар кўчишлар кучлар орқали ифодаланса, у ҳолда бу матрица мойиллик, аксинча, кучлар кўчишлар орқали ифодаланса, бикирлик матрицаси деб аталади.



11.1-расм

Содда балка ёрдамида (11.1-расм) мойиллик матричасини келтириб чиқаришни кўрсатамиз. Балканинг $i, j \dots n$ кесимларига қўйилган P_i, P_j ва P_n ташки кучлардан балканинг кесимларида $v_i, v_j, \dots v_n$ қўчишлар ҳосил бўлади ва улар P_i ларнинг миқдорига боғлиқ бўлади.

Агарда кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасидан фойдалансак, ихтиёрий кесимнинг P_i йўналиши бўйича қўчиши барча ташки кучларнинг шу йўналиш бўйича қўчишлари йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$v_i = \delta_{ii}P_i + \delta_{ij}P_j + \dots + \delta_{in}P_n;$$

бу ерда δ_{ii} — i кесимнинг $P=1$ йўналиши бўйлаб қўчиши;
 δ_{ij} — i кесимнинг P_j йўналиши бўйлаб $P_j=1$ кучидан ҳосил бўлган қўчиши.

Қолган j ва n кесимларининг қўчишлари айнан юқоридагидек топилади:

$$\begin{aligned} v_j &= \delta_{ji}P_i + \delta_{jj}P_j + \dots + \delta_{jn}P_n; \\ v_n &= \delta_{ni}P_i + \delta_{nj}P_j + \dots + \delta_{nn}P_n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Агарда матрица кўринишида ёзсак:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} & \dots & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & \dots & \delta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

бу ерда $\delta_{ii} = \delta_{ji}$ бўлиб, матрицанинг қаторлар сони устунлар сонига тенг.

(11.7) ифоданинг содда кўриниши қуйидагича:

$$v_q = \delta_q \cdot P_q \quad (11.8)$$

бу ерда v_q — q — элементнинг қўчишлар матричаси;
 P_q — ташки куч матричаси;
 δ_q — элементнинг мойиллик матричаси.

Элементлар йиғиндисидан ташкил топган конструкциянинг кесимларидаги қўчишларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \delta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & \delta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_R \end{bmatrix}$$

ёки қисқа қилиб ёзганда,

$$v = f \cdot P$$

бу ерда v — элемент тугунларининг кўчиш матрицаси;

f — квазидиагонал мойиллик матрицаси;

P — куч матрицаси.

11.5. ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИНИНГ МАТРИЦА ИФОДАСИ. ТАЪСИР МАТРИЦАСИ

Таъсир чизиклари орқали ички кучларни топишда матрица ифодаларидан фойдаланиш бирмунча қулайликларга эга.

Агар балканинг ихтиёрий ($r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$) кесимларида ташки кучлардан ҳосил бўлган ички куч S_k (M_k ва Q_k) ларни топиш зарур бўлса, у ҳолда куч матрицасини қуйдагича аниқлаш мумкин:

$$\bar{S}_k = b \bar{P} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1R} & b_{2R} & \dots & b_{nR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_R \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

бу ерда b — таъсир матрицаси ҳисобланиб, ҳаракатланувчи бирлик кучдан R кесими учун чизилган таъсир чизиклари ординаталарини ифодалайди.

$P = [P_1, P_2 \dots P]$ — юк матрицаси.

Таъсир матрицаси эгувчи момент, киркувчи куч ёки таянч реакцияларига тааллуқли бўлиши мумкин.

Масалан, берилган балка $k = (1, 2, 3, 4) \frac{l}{5}$ масофадаги кесимларга бўлиниб, $n = 1, 2, 3, 4$ нуқталарга ташки кучлар қўйилган бўлсин. Ҳар бир кесим учун таъсир чизиклари (11.2-расм) чизилиб, улардан ҳосил бўлган ординаталар қуйидаги матрицаларни ташкил қилади:

$$\begin{aligned} b_{1i} &= [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1] & b_{2i} &= [3 \quad 6 \quad 4 \quad 2] \\ b_{3i} &= [2 \quad 4 \quad 6 \quad 3] & b_{4i} &= [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \end{aligned}$$

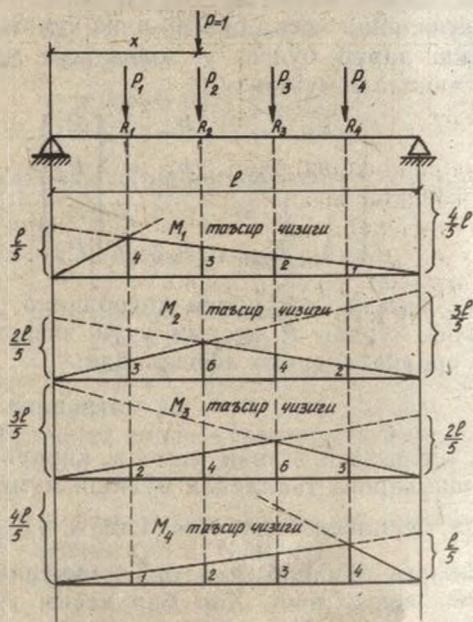
Бунинг маъноси шуки, биринчи кесимда эгувчи момент куйидагига тенг бўлса:

$$M_1 = \frac{l}{25} (4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4)$$

матрица кўринишида куйидагича аниқланади:

$$M_1 = \frac{l}{25} [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} P \\ P \\ P \\ P \end{bmatrix}$$

Кўрилаётган мисол учун эгувчи моментнинг таъсир матрицаси куйидагича бўлади:



11.2-расм

$$L_M = \frac{l}{h^2} L = \frac{l}{25} L = \frac{l}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

бу ерда m — тенг бўлақлар сони.

Таъсир матрицаси симметрик бўлса, ЭХМ ёрдамида бир нечта ҳаракатланувчи кучлар таъсир чизиклари чизмасидан бир йўла M_k ва Q_k ларни топиш мумкин.

Мисол. 11.2-расмда кўрсатилган балкага $P_1=50$ кН, $P_2=2P_1$, $P_3=3P_1$, $P_4=P_1$ ташки кучлар таъсир этиб, $l=10$ м бўлса, $k=1,2,3,4$ кесимлардаги ички куч M_i топилсин.

Юкорида келтирилган умумий формуладан фойдалансак, қуйидаги келиб чиқади:

$$M = \frac{10}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 50 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 100 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 150 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 590 \\ 620 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ кН}$$

Кўриниб, турибдики, таъсир матрицаси ички кучларни аниқлашда талай қулайликларга эга.

11.6. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗҲРИКИШЛАРНИ МАТРИЦАЛАР ЁРДАМИДА АНИҚЛАШ

Электрон ҳисоблаш машиналарининг кенг қўлланилиши конструкцияларни матрицалар ёрдамида ҳисоблашни чуқур ўрганишга олиб келади. Айниқса, мураккаб, юкори тартибли статик ноаниқ масалаларнинг матрица кўринишида ЭХМ ёрдамида ҳисобланиши ниҳоятда самарали бўлади.

Ихтиёрий n — та стержень ва q — та тугундан ташкил топган статик аниқ ясси ферма берилган бўлсин. Бу ферманинг элементларидаги зўриқишларни топиш учун ферманинг ҳар бир тугунига алоҳида, кетма-кет $P_1=1$, $P_2=1 \dots P_i=1 \dots P_q=1$ бирлик кучлар қўямиз ва ҳар бирдан ферманинг ҳамма элементларида ҳосил бўладиган кучларни аниқлаймиз. Ферманинг ихтиёрий i — элементида бирлик $P_i=1$ кучидан ҳосил бўлган ички кучни b_{ij} деб белгилаймиз. У ҳолда катори q — га ва устуни n —

га тенг бўлган бирлик кучлар матрицаси b ни ҳосил қиламиз:

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Агарда тугунларга қўйилган ташки кучларни q — тартибли устун матрица ёрдамида ифодаласак,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

у ҳолда ферманинг ҳамма стерженларидаги ички кучлар матрицаси қуйидаги қўринишда ифодаланади:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Ички кучларнинг ўзи қуйидаги матрица амалидан келиб чиқади:

$$S = b \cdot p \quad (11.10)$$

Агар фермага бир неча ташки куч таъсир этса, ташки куч ва ички куч матрицалари қуйидаги қўринишга эга бўлади:

$$P^{qk} = \begin{bmatrix} P_1^I & P_1^{II} & \dots & P_1^k \\ P_2^I & P_2^{II} & \dots & P_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_q^I & P_q^{II} & \dots & P_q^k \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1^I & S_1^{II} & \dots & S_1^k \\ S_2^I & S_2^{II} & \dots & S_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n^I & S_n^{II} & \dots & S_n^k \end{bmatrix} = b P^{qk}$$

Ферма элементларининг чўзилиши ёки сиқилиш деформациясини z_i деб белгиласак, у ҳолда ихтиёрий i — элементнинг деформацияси куйидагича аниқланади:

$$z_i = S_i l_i / E_i F_i = \delta_i S_i$$

бу ерда $\delta_i = \frac{l_i}{E_i F_i}$ — элементнинг мойиллиги.

Ферманинг ҳамма элементларидаги чўзилишлар куйидагича аниқланади:

$$z_1 = \delta_1 S_1$$

$$z_2 = \delta_2 S_2$$

$$z_n = \delta_n S_n$$

ёки матрица кўринишида

$$z = \delta S_p$$

бу ерда

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

матрица устун — ферма стерженларидаги чўзилишлар.

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \delta_n \end{bmatrix}$$

диагонал матрица, ферманинг мойиллик матричаси.

Агар фермага турли хил ташки куч таъсир этса, у ҳолда

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1^I & z_1^{II} & \dots & z_1^k \\ z_2^I & z_2^{II} & \dots & z_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n^I & z_n^{II} & \dots & z_n^k \end{bmatrix}$$

бўлади.

Ферма тугунларининг деформацияси, яъни кўчишини топиш учун Мор ёки Верешчагин усулларида фойдаланиб, шу тугунда изланаётган кўчиш z_i йўналиши бўйлаб $P_i = 1$ куч қўйилади.

Кўчиш z_i қуйидаги амалдан фойдаланиб топилади:

$$z_i = \sum_{i=1}^n \frac{S_{ij} S_{ip} l_i}{E_i \Delta_i} = \sum_{i=1}^n S_{ij} v_{ip} \quad (11.11).$$

бу ерда S_{ij} — ферманинг i — элементида j — йўналиши бўйлаб $P_i = 1$ кучидан ҳосил бўлган куч;

v_{ip} — ферманинг i — элементидаги ташки кучдан ҳосил бўлган кўчиш.

Бу формуланинг матрица кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$z_i = S^I \bar{v}_p,$$

бу ерда S^I юқоридаги S_i матрицанинг транспонирланган кўриниши.

Агарда $\bar{v}_p$ — учун юқорида топилган матрицадан фойдаланилса,

$$z = S^I \delta S_p$$

келиб чиқади.

Агар ферманинг ҳар бир тугунининг кўчиши аниқкланилиши зарур бўлса, у ҳолда ҳар бир тугунга изланаётган кўчиш йўналиши бўйлаб $P_k = 1$ кучи қўйилади. Сўнгра ҳар қайси куч таъсирида ферманинг барча элементларида ҳосил бўладиган ички кучлар топилади.

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{i1} & S_{i2} & \dots & S_{ik} \\ S_{i2} & S_{i2} & \dots & S_{i2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{in1} & S_{in2} & \dots & S_{ink} \end{bmatrix}$$

Бу матрицанинг ҳар бир устуни ферманинг элементларида i — тугунга қўйилган $P_i=1$ кучдан ҳосил бўлган кучларни ифодалайди.

Демак, ферманинг барча тугунларида кўчишлар қуйидагича топилади:

$$\bar{z} = S' \delta S_p$$

бу ерда

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_i \end{bmatrix}$$

— ферма тугунларидаги изланаётган кўчишлар матрицаси; $S'_i = S_i$ нинг транспонирланган кўриниши.

Агар тугун кўчишларини ташки кучларга боғласак, у ҳолда

$$\bar{z} = S_i \delta b P$$

бўлади.

Шуни айтиш керакки, кўчишлар йўналиши ташки куч йўналишларига мос келса,

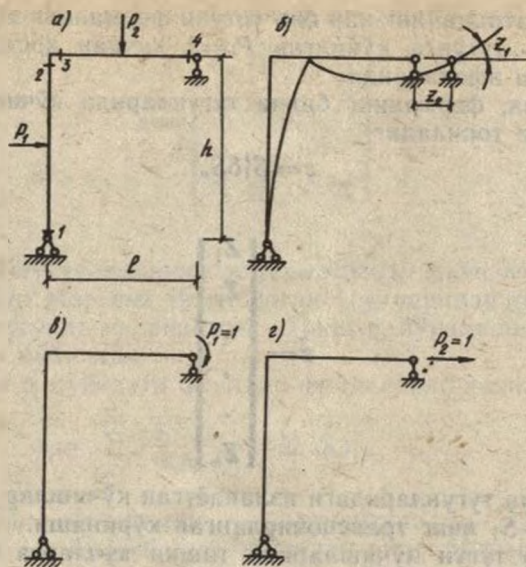
$$\bar{z} = b' \delta b P$$

кўринишда осон топилади.

11.7. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули

Мураккаб конструкциялардаги кўчишларни топиш матрицалар ёрдамида бажарилгани маъқулроқдир, чунки бу амал бир мунча осон, аниқ ва ЭХМ га ниҳоятда мосдир. Статик аниқ рамалар мисолида (11.3- расм, а) ташки P_k кучидан ҳосил бўлган кўчишларни аниқлашни қўриб чиқамиз. Системанинг деформацияси тугунларнинг кўчиши орқали ифодаланади (11.3- расм, б).

Чизмада келтирилган раманинг В нуктасидаги бурилиш бурчаги ҳамда шу нуктанинг чизикли кўчиши (Z_1, Z_2) ни аниқлаш талаб этилади. Бунинг учун рамага ҳар бир изланаётган кўчиш йўналиши бўйлаб бирлик ($P=1$) кучларни қўямиз (11.3- расм, в, г).



11.3-расм

Кучишлар юкорида келтирилган (11.8) формула

$$v = fP$$

оркали топилади.

Келтирилган конструкциянинг мойиллик матрицаси унинг таркибий элементларининг мойиллик матрицалари δ_i оркали ифодаланади. Бунда туташтирилган элементларнинг квазидиагонал кўринишига эга бўлган мойиллик матрицасидан фойдаланилади:

$$F = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \delta_i \end{bmatrix}$$

Бу ерда

$\delta_i = \frac{l_i}{6EI_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — раманинг i — элементи учун мойиллик матрицасидир.

Икки хил мойиллик матрицаларининг боғланишини таъминловчи куч матрицаси b — дан фойдаланамиз:

$$F = b'Db \quad (11.12).$$

бу ерда b — характерли кесимлардаги бирлик кучлардан ҳосил бўлган куч матрицаси;

b' — характерли кесимдаги изланаётган йўналишда қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган куч матрицаси.

Агар конструкцияга бир хил ташки куч таъсир этса,

$$S_p = bP$$

кўчиш матрицаси матрица устун кўринишига

$$v = b'DS_p \quad (11.13)$$

ҳар хил ташки кучлар таъсир этса, кўчиш матрицаси туртбурчак матрица кўринишига эга бўлади:

$$v = b'DbP.$$

Агарда кўчишлар фақат ташки куч қўйилган нуктада шу куч йўналиши бўйлаб топилаётган бўлса, у ҳолда $b' = b$ бўлади.

Юкорида кўрсатилган чизмадаги рама учун эса

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = b'DbP = [b'_1 b'_2 b'_3 b'_4] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Ясси рама, ферма ҳамда балкалардаги кўчишларни аниқлашни осонлаштириш учун қуйида уларга мос мойиллик матрицаларини келтирамиз.

1. Рама элементининг мойиллик матрицаси:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EF} \\ 0 & \frac{l}{3EI_y} & \frac{l}{6EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{3EI_y} & -\frac{l}{6EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_z} & 0 \\ \frac{l}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{6EI_x} \end{bmatrix}$$

2. Ферма элементининг мойиллик матрицаси:

$$\delta_k = \frac{l_k}{EF_k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Балка элементининг эгилишга доир мойиллик матрицаси:

$$\delta_k = \frac{l_k}{6EI^k} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, элементнинг мойиллик матрицасининг тескари киймати шу элементнинг бикирлик матрицасини ифодалайди:

$$\delta^{-1} = \frac{\delta}{|\delta|} = \frac{\frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{3 \left[\frac{l}{EI} \right]^2} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = k$$

11.8. СТАТИК НОАНИҚ СИСТЕМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИ БИЛАН ХИСОБЛАШНИНГ МАТРИЦА КЎРИНИШИ

Кучлар усулининг матрица кўриниши, асосан шу усулнинг ҳамма амалларини матрица амаллари орқали ифодалашдан иборатдир.

Куч усулидаги каноник тенгламалар системасини матрица кўринишида ёзсак, қуйидаги матрица кўринишидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$Ax + B = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{bmatrix}$$

Бу ерда A — конструкциянинг мойиллик матрицаси;

x — номаълум кучлар матрицаси;

B — ташқи юкдан ҳосил бўлган кучишлар матрицаси.

Кучлар усулида бирлик кўчишлар δ_{ij} ҳар хил усуллар ёрдамида (Верешчагин, Мор, Костельяно ва бошқалар)

топилган бўлса; матрица кўринишида шу кўчишларни ифодаловчи мойиллик матрицаси куйидагича аникланади:

$$A = b'Db \quad (11.14)$$

бу ерда: b — таъсир матрицаси;

D — туташтирилган элементларнинг мойиллик матрицаси;

b' — транспонирланган таъсир матрицаси.

Раманинг таъсир матрицаси асосий системада бирлик кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси ординаталарини ифодалайди:

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

бу ерда b_{ij} — асосий системанинг i кесимидаги j кесимга қўйилган бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган ички кучлар. Бу матрицанинг устунлар тартиби ноаниклик даражаси n — га, қаторлар тартиби эса характерли кесимлар ($k = 1, 2, \dots, m$) га тенгдир.

Раманинг туташтирилмаган элементларининг мойиллик матрицаси квазидиагонал матрицадир:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & D_n \end{bmatrix}$$

Бу ерда D_k k — элементнинг мойиллик матрицаси.

Элементнинг мойиллик матрицаси бирлик кучдан ҳосил бўлган элемент учларининг кўчишларини ифодаловчи матрицадир. Узунлиги l , бикирлиги ўзгармас EI бўлган балканинг мойиллик матрицаси куйидагича ифодаланади:

$$D_i = \frac{l}{6EI_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Бунинг маъноси шуки, агар балканинг бир учига бирлик куч қўйилган бўлса, шу учида $\frac{l}{3EI}$ ва иккинчи учида $\frac{l}{6EI}$ га тенг бўлган кўчиш ҳосил бўлади.

Асосий системада ташки кучдан ҳосил бўлган кўчишлар матричасини қуйидагича топиш мумкин:

$$B = B_p P = b' D P$$

Бу ерда: B_p — асосий системада бирлик кучдан ҳосил бўлган кўчиш

$$B_p = b' D$$

P — ташки куч матричаси.

Юқоридаги матрица қўринишидаги тенгламадан номаълум куч матричаси қуйидагича топилади:

$$x = -A^{-1} B = -(b' D b)^{-1} B_p P = -(b' D b)^{-1} b' D P \quad (11.17)$$

Бу ерда $A^{-1} - A$ матричасига нисбатан тескари матрица.

Раманинг характерли кесимларида ҳосил бўлган ички куч матричаси қуйидагича аниқланади:

$$S = P + b x \quad (11.18)$$

Мазкур ифода (11.17)-ни эътиборга олинса; қуйидаги қўринишга келади:

$$S = P - b (b' D b)^{-1} B_p P = [1 - b (b' D b)^{-1} B_p] P$$

Матрица ҳисоби натижаларини қуйидагича текшириш мумкин:

$$b' D S = 0 \quad (11.19)$$

Агар конструкцияга таъсир этувчи ташки кучларни t гуруҳларга бўлинса, у ҳолда D матричаси ўзгармай $b_1 x$ ва S матрицаларида ҳар бир ташки куч учун устунлар ҳосил бўлади. Бунга сабаб каноник тенгламада ҳар бир ташки кучнинг озод ҳади ($\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$) ва номаълум кучлари ($x_1, x_2, \dots, x_n$) бордир. Шунинг учун умумий ҳолда кучлар усулининг каноник тенгламаси қуйидаги матрица қўринишига келтирилган:

$$A x = -B_p P$$

Бу ерда

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(t)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(t)} \end{bmatrix}; B_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p}^{(1)} & \Delta_{1p}^{(2)} & \dots & \Delta_{1p}^{(t)} \\ \Delta_{2p}^{(1)} & \Delta_{2p}^{(2)} & \dots & \Delta_{2p}^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{np}^{(1)} & \Delta_{np}^{(2)} & \dots & \Delta_{np}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$x_1^{(s)}, x_2^{(s)} \dots x_n^{(s)}$ — ташки кучдан ҳосил бўлган
ортикча номаълум куч;

$\Delta_{1p}^{(s)}, \Delta_{2p}^{(s)} \dots \Delta_{np}^{(s)}$ — ташки кучнинг бирлик
кийматидан ҳосил бўлган озод ҳадлар.

Агарда ташки кучлар алоҳида таъсир этса,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & P_t \end{bmatrix}$$

бир вақтда таъсир этса,

$$P = [P_1 P_2 \dots P]$$

кўринишда ёзилади.

Кучлар усулининг матрица кўринишида ҳисоблаш тартиби қуйидагилардан иборат:

1. Асосий система танланиб, номаълум кучларнинг йўналишлари белгиланади.

2. Ҳар қайси ортикча номаълум кучларнинг бирлик кийматларидан M эпюраси қурилади.

3. Асосий системага нисбатан таъсир матрицаси b тузилади.

4. Таъсир матрицаси транспонирланади — b'

5. Ташки юк матрицаси P тузилади, кучлар бир нечта (t) бўлганда P^t матрицаси тузилади.

6. Асосий системага нисбатан бирлик ташки кучдан B_p матрицаси тузилади.

7. Конструкциянинг туташтирилмаган элементлари учун мойиллик матрицаси тузилади.

8. Агар D матрицани b' матрицага кўпайтириш жараёнида уларнинг тартиблари мос келмаса, у ҳолда D ёки B матрицаларнинг тартиблари келтирилади.

9. Раманинг мойиллик матрицаси аниқланади:

$$A = b'Db$$

10. Мойиллик матрицасига тескари бўлган матрица A^{-1} аниқланади:

$$A^{-1} = (b'Db)^{-1}$$

11. Ташки юк матрицаси аниқланади:

$$B' = B_p P' = b' D P'$$

бу ерда t — матрицанинг устунлар тартибини билдириб, 1, 2 ... t хил ташки юкларни ифодалайди.

12. Номатълум кучлар матрицаси аниқланади:

$$x' = -A^{-1}B' = -(b'Db)^{-1}B_p P' = -(b'Db)^{-1}b'DP$$

13. Раманинг характерли кесимларидаги ички кучлар матрицаси аниқланади:

$$S' = (1 - bx')P'$$

14. Топилган матрицалар текширилади:

$$b'DS = 0$$

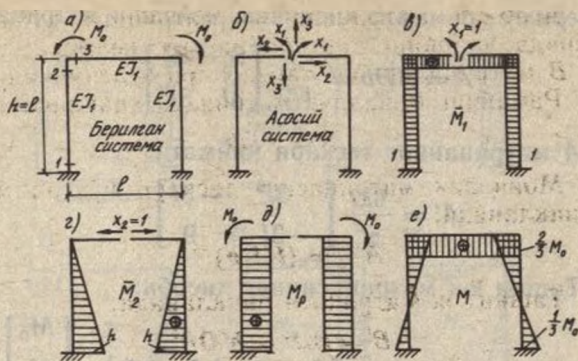
Демак, агар рамага ўзгармас вақтинча ва бошқа t хил ташки кучлар таъсир этса, у ҳолда ички куч матрицаси S' тескари A^{-1} матрицадан фойдаланиб топилади. Келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, рамаларни ЭХМда ҳисоблаш дастури тузилади.

Ҳисоблаш намунаси

1- мисол. Юкорида келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, содда раманинг ҳисобини кўриб ўтамиз (11.4- расм, а).

1. Асосий система танлашда берилган раманинг ва ташки юкларнинг симметриклигини инобатга олиб, ўхшаш икки қисмга бўламиз (11.4- расм, б). Номатълумларни асосий системанинг бир қисми учун аниқлаймиз.

2. Номатълум кучларнинг бирлик қийматларидан M , эпюраларини курамиз (11.4- расм в, г). Берилган рамада $X_3=0$ эканлиги эпюралардан кўриниб турибди.



11.4-расм

3.4. Эпюралардан фойдаланиб, характерли кесимлар учун таъсир матрицалари b , b' ни аниқлаймиз:

$$b = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6. Факат биргина M_0 ташки юк таъсир этаётгани учун:

$$P = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Туташтирилган элементларнинг мойиллик матрицаси:

$$D = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0,5 \\ \cdot & \cdot & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

8. D матрицанинг тартиби b матрицанинг тартибига мос келганлиги учун унинг тартибини ўзгартириш, яъни камайтириш талаб этилмайди.

9. Берилган рама бир қисмининг мойиллик матрицаси:

$$A = b'Db = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 9 & 3l \\ 3l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

10. A матрицанинг тескари қиймати:

$$A' = \frac{6EI}{ql^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -3l \\ -3l & 9 \end{bmatrix}$$

11. Ташки юк матрицасининг ҳисоби:

$$\begin{aligned} B = B'P = b'DP &= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1,5 & 1,5 \\ 2l & l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{M_0 l}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12. Номаълум куч вектор матрицаси:

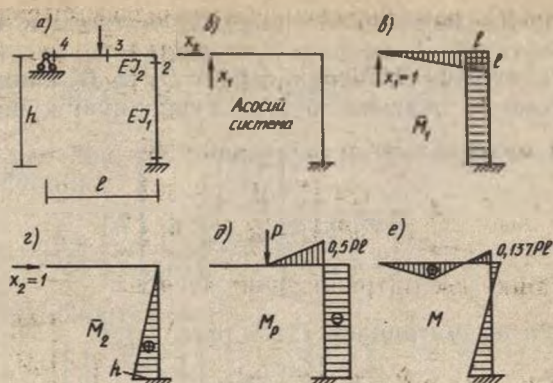
$$x = -\frac{6EI}{ql^3} \begin{bmatrix} -2l^3 & -3l \\ -3l & 9 \end{bmatrix} \frac{M_0 l}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5l \end{bmatrix} = \frac{M_0}{ql} \begin{bmatrix} 3l \\ 9 \end{bmatrix}$$

13. Рама элементлари учун изланаётган ички куч матрицаси:

$$S = \frac{M_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

14. Топилган қийматларни текшириш:

$$\begin{aligned} b'DS &= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1,5 & 1,5 \\ 2l & l & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_0}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{M_0 l}{18EI} \begin{bmatrix} -3+6-1,5-1,5 \\ -2l+2l-0-0 \end{bmatrix} = \frac{M_0 l}{18EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$



11.5-расм

2- мисол. Матрица кўринишидаги баъзи хусусий ҳолларни кўрсатиш мақсадида 11.5-расмда келтирилган рамани ҳисоблаймиз.

Раманинг таъсир матрицаси:

$$b = \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 0,5l & 0 \end{bmatrix}.$$

Туташган элементларнинг мойиллик матрицаси 1—4 кесими орасидаги характерли элементлардан тузилган:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad D_1 = \frac{l}{6EI_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ D_2 = D_3 = \frac{l}{12EI_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Агар $h = 0,5l$ $EI = EI_1 = EI_2$ бўлса, у ҳолда

$$D = \frac{0,5l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Юкорида зикр килинганидек, D матрицаси тартиби-ни камайтириб, b матрицанинг тартибига мос келтира-миз. Бунинг учун D матрицасининг D_2 ва D_3 қийматлари-ни D_1 томонга диагонал бўйлаб суриб, сўнг қўшамиз:

$$D = \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ташки юк матрицаси (11.5- расм, д).

$$P = 0,5p \begin{bmatrix} -l \\ -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ташки юк оркали B ни топамиз:

$$\begin{aligned} B &= b'DP = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 0,5l & 0 \end{bmatrix} \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h & h & 0 & 0 \\ 3l & 5,5l & 3l & 0 \end{bmatrix} 0,5Pl \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Pl^2}{24EI} \begin{bmatrix} -3h \\ -8,5l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Раманинг мойиллик матрицаси (11.5- расм, в, г) куйидагига тенг:

$$\begin{aligned} A &= b'Db = \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h & h & 0 & 0 \\ 3l & 5,5l & 3l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h^2 & 3hl \\ 3hl & 10l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Агарда $h=0,5$ лигини инобатга олсак, у ҳолда

$$B = -\frac{Pl^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix} \quad A = \frac{l^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Демак, тенгламалар системасининг матрица кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{l^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} x = \frac{Pl^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix}$$

Агарда соддалаштирилса:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix}$$

келиб чиқади:

Матрица A нинг тескари қийматини топиш учун, яъни

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\text{Det}A}$$

аниқлаш учун алгебрик тўлдирувчи A ҳамда аниқловчи $\text{Det}A$ нинг қийматидан фойдаланамиз.

Маълумки,

$$\bar{A} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

бўлиб, M_{ij} аниқловчи минорлар қуйидагиларга тенг:

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} = 20 \quad M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} = -3$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} = -3 \quad M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} = 1$$

Аниқловчининг

$$\text{Det}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} = 11$$

эканлиги ҳам бизга маълум. У ҳолда A матрицанинг тескариси

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

бўлади.

Номатълум кучлар эса куйидагича топилади:

$$x = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix} = \frac{P}{11} \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

Характерли кесимлардаги эгувчи моментлар матрицаси куйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} M &= 0,5 Pl \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{P}{11} \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix} = \\ &= 0,5 Pl \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{Pl}{11} \begin{bmatrix} 6,25 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = Pl \begin{bmatrix} 1,160 \\ -0,137 \\ 0,181 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Топилган қийматлар асосида қурилган эгувчи момент эпюраси (11.5- расм, е) да кўрсатилган.

11.9. РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШНИНГ МАТРИЦА КЎРИНИШИ

Кўчишлар усулининг матрица кўриниши ўзининг соддалиги билан куч усулидан фарк қилади. Кўчиш усулининг матрица кўринишида ҳеч қандай эпюралардан фойдаланилмайди.

Матрица кўринишида ҳам кўчишлар усулидаги ғоя сақланиб, берилган рамани қўзғалмайдиган ҳолга келтирувчи асосий система танланади.

Матрица кўринишидаги кўчишлар усулининг тенгламалар системаси куйидагича ифодаланади:

$$k \cdot z + R_p = 0 \quad (11.20)$$

Бу ерда

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad R_p = \begin{bmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \vdots \\ R_{mp} \end{bmatrix}$$

K — асосий системадаги рама тугунларида бирлик кучишдан ҳосил бўлган реакциялар матрицаси ёки раманинг бикирлик матрицаси;

z — шу тугунлардаги ҳақиқий кучишлар ёки номаълумлар матрицаси;

R_p — асосий системада ташки юклардан рама тугунларида ҳосил бўладиган реакциялар матрицаси.

Умуман K — матрицаси бикирлик матрицаси деб аталиб, қуйидаги матрица амаллари орқали топилади:

$$K = d'Rd \quad (11.21)$$

Бу ерда d — реакция матрицаси;

R — раманинг туташтирилмаган элементларининг бикирлик матрицаси;

d' — транспонирланган реакция матрицаси.

d — матрицасининг элементлари асосий системадаги тугунларда ҳосил бўлган реакциялардан ташкил топади:

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{R1} & d_{R2} & \dots & d_{Rm} \end{bmatrix}$$

бу ерда d_{ij} — i кесимда j йўналишда қўшимча боғланишларнинг бирлик кучишларидан ҳосил бўлган реакциялардир. Устунлар тартиби ноаниклик даражасига, қаторларники эса кесим $R=1,2,\dots$ лар сонига тенгдир.

Туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матрицаси квазидиагонал матрица бўлиб, қуйидаги кўринишга эгадир:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix}$$

бу ерда R_i — i элементнинг бикирлик матрицаси;

n — элементлар сони.

Элементнинг бикирлик матрицаси куч усулидаги мойиллик матрицасидан фарк қилади, яъни:

$$K = D^{-1}$$

Элементнинг учидаги бикирлик кучишлардан ҳосил бўлган реакциялар матрицасидир. Узунлиги l , бикирлиги

EI бўлган, икки учи мустаҳкам балканинг бикирлик матрицаси:

$$R_i = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Бир учи мустаҳкам иккинчи учи эса шарнирли қўзғолмас таянчга таянган балканинг бикирлик матрицаси:

$$R_{io} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

Қўчиш усулининг тенгламалар системаси (11.20) худди куч усулидагидек ечилади:

$$z = -K^{-1}R_p = -(d'Rd)^{-1}R_p \quad (11.24)$$

Ички кучлар матрицаси қуйидагича топилади:

$$S = Rdz = -RdK^{-1}R_p = -Rd(d'Rd)^{-1}R_p \quad (11.25)$$

Аниқланган миқдорларни текшириш учун қуйидаги матрица қўринишидаги тенгламадан фойдаланиш мумкин:

$$K_z = d'S \quad (11.26)$$

Ҳисоблаш алгоритми

Рамаларни ЭХМда қўчишлар усулининг матрица қўринишида ҳисоблаш алгоритми қуйидагилардан иборат:

1. Раманинг асосий системаси танланади.
2. Ҳар бир киритилган қўшимча боғланишга алоҳида бирлик қўчишлар берилади.
3. Бирлик қўчишлардан ҳосил бўлган реакция матрицаси d — ни аниқланади.
4. d — матрицани транспонирланади.
5. Ҳар қайси t — хил ташки юклардан озод ҳад матрицалари топилади.
6. Туташтирилмаган элементлар бикирлик матрицасини келтириб чиқарилади:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix}$$

бу ерда $R_i = \frac{2EI_i}{l_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — икки учи мустаҳкам элементнинг бикирлиги.

$R_{io} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$ — бир учи мустаҳкам, иккинчи учи шарнирли бўлган балканинг бикирлиги.

7. Раманинг бикирлик матрицаси ҳисобланади:

$$K = d' R d$$

8. Бикирлик матрицасининг тескари киймати топилади:

$$K K^{-1} = E$$

9. Номаълум кўчишлар матрицаси ҳисобланади:

$$z' = -K^{-1} R_p'$$

бу ерда z — номаълумлар матрицасининг устунлар тартиби l — га, қаторлар тартиби ноаниқлик даражаси m — га тенгдир.

10. Раманинг ҳарактерли кесимларида ҳосил бўлаётган ички куч матрицаси аниқланади:

$$S' = R d z' = -R d K^{-1} R_p'$$

11. Топилган микдорлар текширилади:

$$K_z = d' S$$

Кўчишлар усулининг матрица кўриниши кучлар усулидаги матрица кўринишидан анча соддалиги кўриниб турибди.

Лойиҳалаш тажрибасида кенг қўлланилаётган ЭХМ даги дастурларнинг куплари айнан шу усулга асосланган.

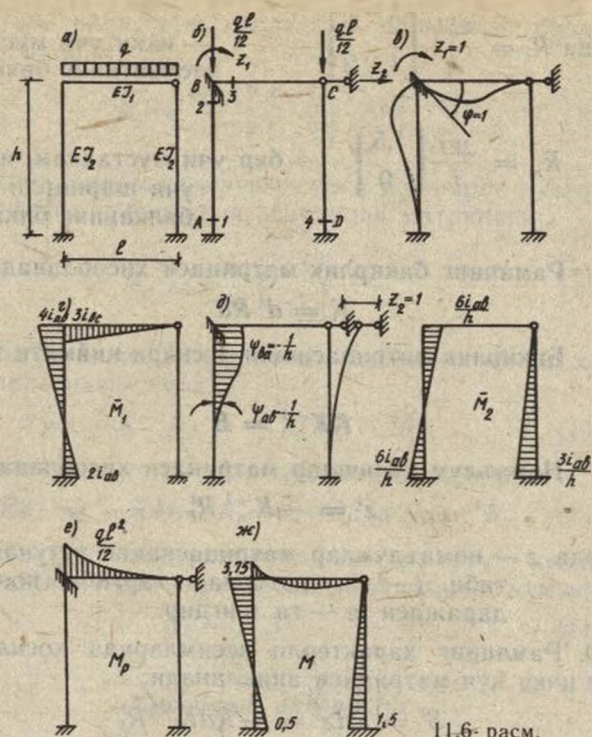
Ҳисоблаш намунаси:

3- мисол: 11.6- расмда кўрсатилган рама ҳисоблансин.

Юкорида кўрсатилган тартибдан фойдаланиб, масаланинг ечимини кидирамиз.

1. Асосий система танлаб, бурчакли ва чизикли боғланишларни киритамиз.

2. В тугунга бирлик бурчакли кўчиш, С тугунга эса бирлик чизикли кўчиш берамиз.



11.6- расм.

3. Тугунларнинг бирлик кучишлардан (11.6- расм, з, д) элемент кесимларида ҳосил бўлган кучишлар матрицаси d — ни тузамиз:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ -1 & -\frac{1}{l} \\ -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

4. Матрица d' — нинг қийматини аниқлаймиз:

$$d' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

5. Факат бир ташки куч таъсир этаётгани учун $t = 1$ бўлади.

6. Туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матричасини тузамиз:

$$R = \begin{bmatrix} R_I & & \\ & R_{II} & \\ & & R_{III} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

чунки

$$R_I = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_{II} = R_{III} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Раманинг бикирлик матричасини аниқлаймиз

$$\begin{aligned} K &= d'Rd = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \frac{2EI}{l} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} d = \\ &= \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{l} & -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{3}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ 1 & -\frac{1}{l} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3,5 & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{1,5}{2l^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. Матрица K — пинг тескари кийматини аниклай-
миз:

$$K^{-1} = \frac{l^2}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} & 1 \\ 1 & \frac{2}{8}l \end{bmatrix}$$

9. Номатълум кўчиш z — яъни устун матрица қуйида-
гича аникланади:

$$\begin{aligned} z = -K^{-1}R_0 &= -\frac{l^2}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} & 1 \\ 1 & \frac{7}{8}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l^2 C_0}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

бу ерда $C_0 = \frac{ql^2}{12}$

10. Икки куч матричасини бир муңча енгил топиш
мумкин. (11.6-расм, ж).

$$S = Rdz$$

11. Топилган кийматлар $K = d'Rd$ ҳақиқатдан ҳам
(11,26) тенгламани

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3,5 & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{1,5}{2l^2} \end{bmatrix} (-1) \frac{l^2 C_0}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \frac{2C_0}{11,5l} \begin{bmatrix} (8,75l - 3l) \\ -7,5 + 7,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

қаноатлантиради.

ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ (ЧЭУ) ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашда юқорида кўрсатилган усуллардан ташқари аралаш, тақрибий ва бошқа усуллар ҳам мавжуд. Бу усуллар қурилиш механикаси масалаларини аниқроқ ечиш вазифасини ўзида мужассамлаштирган бўлиб, улар ичида чекли элементлар усули (ЧЭУ) ўзининг самарадорлиги билан бошқалардан ажралиб туради. ЧЭУ бир катор қулайликларга эга бўлгани учун ҳозирги кунда кенг қўлланилмоқда.

ЧЭУ нинг асосий афзалликларидан бири унинг кенг миқёслилигидир. Агар ҳар хил қурилиш конструкцияларини ЭХМда ҳисоблаш учун ҳар қайсисига алоҳида дастурлар тузилган бўлса (масалан, ферма учун алоҳида, балка учун алоҳида) ЧЭУ деярли ҳамма қурилиш конструкцияларини ЭХМда ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури асосида ҳисоблаш имконини беради. Бу лойиҳачи — муҳандиснинг ишини анча енгиллаштиради. Ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури ҳисоблаш вақтини тежайди, ҳисобнинг аниқлик даражасини оширади. Бу усулнинг афзаллиги ҳам шунда.

Умуман конструкцияларни ЭХМда ҳисоблашда ўта аниқлик ва универсал усуллардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Олдинги усуллар ҳамма вақт ҳам бу талабларга жавоб бермайди. Шунинг учун ҳам машинабоп усуллар яратилишига эҳтиёж туғилди. Айниқса, ҳисоблашдаги бир неча хил мураккабликларни, яъни конструкцияларнинг чизикли ва чизиксиз ишлаш хусусиятларини, ерга эластик таяниши, устуворлик ва бошқа шартларни бир йўла ҳисобга оладиган усул керак эди. Чекли элементлар усули (ЧЭУ) шундай самарали усуллардан бири сифатида юзага келди.

ЧЭУ ғояси берилган системани, хусусан, рамани чекли элемент деб аталувчи алоҳида содда элементларга ажратишдан иборатдир. Чекли элементлар аниқ геометрик, физик ва механик ўлчамларга эга бўлиши шарт.

Пластина ва қобик конструкцияларини ҳисоблашда чекли элемент сифатида учбурчак, кўпбурчак ва тўғри бурчакли пластиналар қабул қилиниши мумкин, массив

конструкциялардан кичик ҳажмий булак тетраэдр ва х.к. чекли элемент деб қабул қилинади.

Стерженлар системасида чекли элемент сифатида доимий бикирликка эга бўлган стержень қабул қилинади. Шундай қилиб ЧЭУ берилган конструкцияларни содда, чекли элементларга бўлиб, қурилиш механикаси қоидалари асосида ҳисоблайди.

Содда кўринишга эга бўлган чекли элементнинг ташқи таъсирларга қаршилиқ кўрсатиш имкониятлари олдиндан аниқланади. ЧЭУ куч усули ёки кўчиш усулларига асосланиши мумкин. Чекли элементлар усулида ҳам асосий система танланиб, тенгламалар тизими тузилади. Асосий система — берилган раманинг энг содда чекли элементлари йиғиндисидир. Тенгламалар тизими чекли элементларнинг узлуксизлигини таъминловчи шартни ифодалайди.

Демак, системани содда булакларга бўлиш ғояси, мураккаб конструкцияни содда «чекли» элементлар орқали ифодалаш имконини беради. Қиритилувчи узлуксизлик ва бошқа статик шартлар эса чекли элементларнинг берилган система қаби ишлашини таъминлайди. Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда номаълум сифатида куч ёки кўчиш усулларидагидек ички кучлар ёки кўчишлар қабул қилинади.

Ҳисоб куч усули асосида бажарилса, чекли элементларнинг уланиш жойида номаълум сифатида куч қабул қилинади, агарда кўчиш усули асосида олиб борилса, у ҳолда номаълум сифатида тугунларнинг кўчиши қабул қилинади. Умумий ҳолда аралаш усулдан фойдаланса ҳам бўлади. ЧЭУ бўйича ҳисоблашда асосий ролни мойиллик матрицаси ёки бикирлик матрицаси ўйнайди. Агар ҳисоб куч усулида бажарилса мойиллик матрицасидан, кўчиш усулида бажарилганда эса бикирлик матрицасидан фойдаланилади.

Куч усулида номаълум кучлар чекли элементларнинг уланиш жойидаги кўчишларнинг тенглигини ифодаласа, кўчиш усулидаги номаълум кўчишлар — тугунларнинг мувозанатини ифодалайди.

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблаганда бир вақтнинг ўзида ҳар бир элементнинг икки учигаги ички кучлар M , Q , N ларни аниқлаш мумкин. ЧЭУ ни матрица кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқ бўлиб, ҳисоб охирида кўчишлар ҳамда ички кучлар ҳам матрица кўринишида аниқланади.

Чекли элементнинг кўчиш усулига асосланган умумлаштирилган тенгламаси куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R \cdot Z + R_p = 0 \quad (12.1)$$

бу ерда $\bar{R}$ — конструкциянинг, хусусан, раманинг бикирлик матрицаси;

R_p — юк матрицаси.

Бу тенглама асосий системага киритилган ҳар бир қўшимча боғланишда бирлик буралиш, силжиш ва чўзилиш, шунингдек, ташки кучлар таъсиридан ҳосил бўлган тугунлардаги реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ифодалайди.

Номаълум кўчиш матрицасини аниқлаш учун худди кўчиш усулида кўриб ўтганимиздек, куйидаги амалдан фойдаланамиз:

$$z = -\bar{R}^{-1}R_p = (\Pi^1 R \Pi) R_p, \quad (12.2)$$

бу ерда Π — косинуслар матрицаси элементнинг координата ўқларига нисбатан бурчагини ифодалайди;

R — туташтирилмаган элементлар матрицаси.

Агарда ички куч матрицасини аниқлаш зарур бўлса, у ҳолда куйидаги амалдан фойдаланамиз:

$$S = Q \cdot Z = R \Pi (\Pi^1 R \Pi)^{-1} R_p. \quad (12.3)$$

Чекли элементлар усулининг кўчиш усулидан асосий фарқи шундан иборатки, бу усулда деформацияларнинг барча тури иноватга олинади ва ҳар бир тугунда умумлаштирилган кўчишлар аниқланади. Шунинг учун ҳам бу фарқлар бикирлик матрицаларида яққол кўзга ташланади.

12.2. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИ ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ ТАРТИБИ

Чекли элементлар усули ёрдамида статик ноаниқ системаларни хусусан, рамаларни ҳисоблаш бошқа усулларга нисбатан қулайдир.

ЧЭУ ёрдамида стерженли системаларни ҳисоблаш тартиби куйидагича:

— асосий система танлаш, номаълум кўчишларни белгилаш;

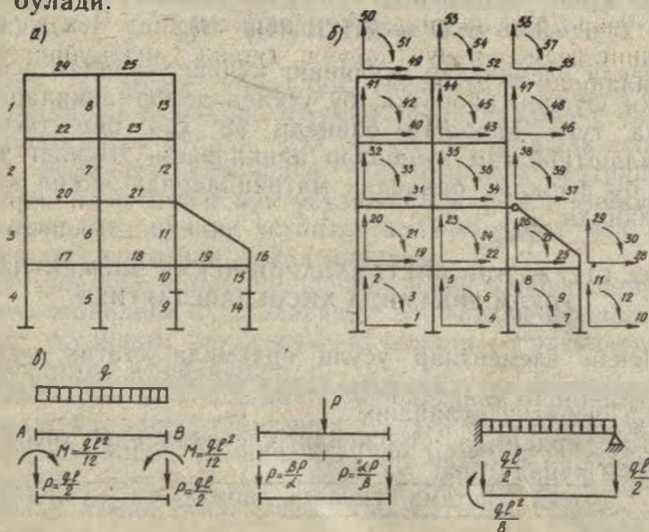
— бикирлик матрицасини аниқлаш;

- куч матричасини аниқлаш;
- тенгламалар тизимини тузиш;
- тенгламалар тизимини ечиш, тугунлардаги кўчиш-ларни аниқлаш, умумий ички куч матрицаларини топиш.

Асосий система танлаш, номатълум кўчишларни киритиш

Асосий система конструкциянинг кўринишига, унинг элементларининг сонига, ташқи куч ҳамда зарурий аниқликларга боғлиқдир.

Рамаларни ҳисоблашда чекли элемент сифатида кўндаланг кесими ўзгармас бўлган алоҳида стержень қабул қилинади. 12.1- расм, а да келтирилган асосий тизми раманинг тугун ва кўндаланг кесими ўзгарган жойларига нисбатан танланган. Шартли равишда киритилган квадратлар берилган рамани чекли элементларга бўлиб, ҳар икки учда учтадан кўчишлар кўрсатилган (12.1- расм, б). Агар бирор ерда рама элементининг кўндаланг кесими ўзгарса ёки элемент оралиғида йиғиқ куч қўйилган бўлса, у ҳолда кесимларга ҳам квадратлар киритилади. Раманинг ноаниқлик даражаси ҳар бир тугунга ва кесимга киритилган кўчишлар сонига тенг. Аксарият мунтазам рамаларда ҳар бир квадрат учтадан номатълум кўчишларга эга бўлади.



Рамага қўйилган ҳар бир ташки куч унинг квадратлар киритилган тугунларига келтирилади.

Демак, раманинг асосий системаси бикирликлари ўзгармас бўлган IM — та чекли элементларга бўлиниб, MM та номаълум — умумий кучишларга эга бўлади.

12.3. СТЕРЖЕННИНГ БИКИРЛИК МАТРИЦАСИНИ АНИҚЛАШ

Бикирлик матрицаси (БМ) чекли элемент учларидаги бирлик кўчишлардан вужудга келувчи реактив кучларни ифодалайди.

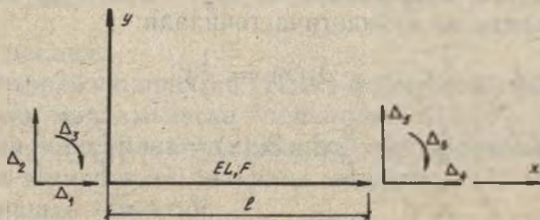
Умуман, бикирлик матрицасининг формуласини бир марта аниқлаб олинса kifoya. БМ тартиби ҳисобга олиниши зарур бўлган чекли элемент учларидаги кўчишлар сонига ҳамда ҳисобга олинаётган бошқа омилларга боғлиқ. Агар кўндаланг ва бўйлама кўчишлар ҳисобга олинса, текисликдаги элементнинг БМ тартиби олтига тенг бўлади.

Аввало чекли элементнинг хусусий ўқларга нисбатан БМ ни келтириб чиқарамиз. Ўзгармас кўндаланг кесимли элементнинг БМ си бош координата ўқларига нисбатан 12.2- расмда кўрсатилгандек топилади.

Маълумки, стержень учларининг кўчишлари унинг узунлиги ва бикирлигига боғлиқдир. Шунинг учун уларнинг ўзаро боғлиқликларини аниқлаймиз. Чекли элементнинг ихтиёрий нуктасининг тутган ўрни қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v(x) &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{aligned} \quad (12.4)$$

бу ерда $u(x)$, $v(x)$ — бўйлама ва кўндаланг кўчишлар;
 α_i — киритилган боғланишни ифодаловчи тенглама коэффиценти.



12.2- расм

12.2- расмда кўрсатилган элемент учун чегара шартлари куйидагича белгиланади:

$$\begin{aligned}x = 0; u(0) &= \alpha_1 = \Delta_1 \\v(0) &= \alpha_3 = \Delta_3 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_4 = \Delta_4\end{aligned}\quad (12.5)$$

$$\begin{aligned}x = l; u(l) &= \alpha_1 + \alpha_2 l = \Delta_2 \\v(l) &= \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \Delta_3 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2 = \Delta_6\end{aligned}$$

Бу тенгламалардан коэффициентлар топилади:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \Delta_1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{l} (\Delta_2 - \Delta_1) \\ \alpha_3 &= \Delta_3 \\ \alpha_4 &= \Delta_4 \\ \alpha_5 &= \frac{1}{l^2} (-3\Delta_3 - 2\Delta_4 l + 3\Delta_5 - \Delta_6 l) \\ \alpha_6 &= \frac{1}{l^3} (2\Delta_3 + \Delta_4 l - 2\Delta_5 + \Delta_6 l)\end{aligned}\quad (12.6)$$

Топилган кийматларни (12.5) формулага қўйсақ ва соддалаштирсак, куйидаги функцияларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{s=1,4} \mathfrak{E}_s(x) \Delta_s; \\ v(x) &= \sum_{s=2,3,5,6} \mathfrak{E}_s(x) \Delta_s.\end{aligned}\quad (12.7)$$

Кирилган коэффициент $\mathfrak{E}_s(x)$ — Эрмит функцияси деб юритилади ва куйидагича топилади:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_1(x) &= 1 - \frac{1}{l}x & \mathfrak{E}_2(x) &= \frac{1}{l}x \\ \mathfrak{E}_3(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3 & \mathfrak{E}_4(x) &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ \mathfrak{E}_5(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} & \mathfrak{E}_6(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\end{aligned}\quad (12.8)$$

Чекли элементлар учун керак бўлган БМни потенциал энергия ифодасидан фойдаланиб топамиз.

Потенциал энергиянинг мумкин бўлган кўчишлар орқали ифодаси

$$U = \frac{1}{2}EF \int_0^l (u'(x))' dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l (v'(x))' dx \quad (12.9)$$

бўлади.

Агар кўчишлар кийматини (12.7) формуладан (12.9) формулага кўйсак.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum R_{ik} \Delta_i \Delta_k \quad (12.10)$$

энергия формуласи келиб чиқади.

Бу ерда

$$K_{ik} = \begin{cases} EF \int_0^l \mathcal{E}_i''(x) \mathcal{E}_k''(x) dx; & i, k = 1, 4 \\ EI \int_0^l \mathcal{E}_i''(x) \mathcal{E}_k''(x) dx; & i, k = 2, 3, 5, 6 \end{cases} \quad (12.11)$$

K_{ik} — чекли элементнинг бикирлик матрицаси.

Агар топилган (12.11) формулага (12.8) да кўрсатилган ифодадорни киритсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} K_{11} &= EF \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' dx \\ K_{14} &= EI \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' \left(\frac{x}{l}\right)'' dx \end{aligned} \quad (12.12)$$

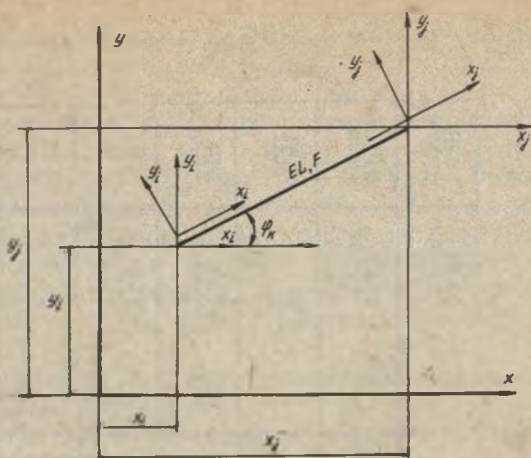
келиб чиқади.

Келтириб чиқарилган (12.12) формуладан фойдаланиб, икки учи маҳкамланган элементнинг (12.13), шунингдек бир учи маҳкамланган, иккинчи учи шарнирли бириктирилган элементнинг бикирлик матрицаси (12.14) жадвал кўринишида берилган.

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad (12.14)$$



12.3- расм

Бикирлик матричасининг физик маъноси: икки учи маҳкамланган балкага уч йўналиш бўйлаб бирлик кўчишлар Δ ; берилганда, таянчларда ҳосил бўладиган реакциялар БМ нинг элементларини ташкил этади.

Лойиҳалаш амалиётида ҳар доим ҳам рама элементлари координата ўқларига мос келавермайди, баъзи элементлар ўққа нисбатан оғма ҳолатда жойлашуви мумкин. Бундай ҳолларда ОХ ўқига нисбатан ҳосил бўлган бурчакни — m , ОУ ўқига нисбатан ҳосил бўлган бурчакни — n деб белгиласак (12.3- расм), қуйидаги янги боғловчи косинус матричаси келиб чиқади:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \Pi_0 \end{bmatrix} \quad \Pi_0 = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Π — квазидиагонал матрица бўлиб, ихтиёрый равишда учраши мумкин бўлган чекли элементнинг БМ сини тузишда фойдаланилади. Бунинг учун хусусий ўқларга нисбатан топилган БМ ни боғланиш матричасига кўпайтириб, умумий ўқларга нисбатан бикирлик матричаси топилади:

$$\bar{R} = \bar{\Pi}^T R \Pi \quad (12.15)$$

Матрица R ; Π қийматларини (12.15) формулага қўйиб, қуйидаги кўринишга эга бўлган БМ ни ҳосил қиламиз:

R=

(12.16)

$\frac{12EI}{l^3}n^2 + \frac{EF}{l}m^2$	$\left(\frac{EF}{l}n^2 - \frac{12EI}{l^3}mn \right)$	$-\frac{6EI}{l^2}m^2 - \frac{12EI}{l^3}$	$\frac{EF}{l}m^2 + \frac{12EI}{l^3}n^2$	$-\frac{EF}{l}mn + \frac{12EI}{l^3}mn$	$-\frac{6EI}{l^2}n$
	$\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$\frac{6EI}{l^2}m$	$-\frac{EF}{l}mn + \frac{12EI}{l^3}mn$	$-\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$\frac{6EI}{l^2}m$
		$\frac{4EI}{l}$	$\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$
			$\frac{EF}{l}m^2 + \frac{12EI}{l^3}n^2$	$\frac{EF}{l}mn - \frac{12EI}{l^3}mn$	$\frac{6EI}{l^2}n$
				$\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$-\frac{6EI}{l^2}m$
					$\frac{4EI}{l}$

Юкорида келтирилган ЧЭУ нинг умумий формуласи (12.1) яхлит система ёки рама учун берилган бўлса, топилган R , R_0 Q лар фақат биргина чекли элементга тегишлидир. Агар (12.2) боғланишини топилган БМ ва КМ оркали ифодаласак, (12.3) формулага эга бўламиз.

R — квазидиагонал квадрат матрица бўлиб, унинг тартиби рама элементларининг сони — IM га тенг бўлади; уни раманинг бикирлик матрицаси деб ҳам юритилади. Конструкция чекли элемент усули бўйича ЭХМ да ҳисобланадиган бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси автоматик равишда махсус индекс матрицаси ёрдамида тузилади.

Тенгламалар системаси қуйидаги шартларни қаноатлантириши зарур:

1. Тугун ва элементларнинг мувозанат шarti;
2. Тугунларнинг узлуксизлик шarti.
3. Кўчиш ва кучлар боғланишини ифодаловчи шартлар.

Тенгламалар системасини тузиш учун қуйидаги маълумотлар керак:

- конструкция элементларининг ўзаро боғланиши;
- конструкциянинг геометрик, физик ва механик кўрсаткичлари.

12.4. РАМАЛАРНИ ЧЭУ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда ички кучлар матрицасини қуйидаги матрица амали оркали топамиз:

$$S = Q \cdot Z = -Q \cdot \bar{R}^{-1} R_p.$$

Бу ерда Q — куч матрицаси.

Умумий координата ўқларига нисбатан куч матрицаси қуйидагича аниқланади:

$$Q_0 = RII_z.$$

Элементнинг хусусий ўқиға нисбатан куч матрицаси унинг бикирлик матрицасига тенг. Умумий координата ўқларига нисбатан куч матрицаси (12.17) -жадвал кўринишига эга:

- ташки кучнинг қўйилиш жойи, йўналиши ва сон қиймати.

$$Q_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{EF}{l^m} & \frac{EF}{l^n} & 0 & -\frac{EF}{l^m} & -\frac{EF}{l^n} & 0 \\ \hline -\frac{12EI}{l^3n} & \frac{12EI}{l^3m} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3n} & -\frac{12EI}{l^3m} & \frac{6EI}{l^2} \\ \hline \frac{6EI}{l^2n} & \frac{6EI}{l^2m} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2n} & -\frac{6EI}{l^2m} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EF}{l^m} & -\frac{EF}{l^n} & 0 & \frac{EF}{l^m} & \frac{EF}{l^n} & 0 \\ \hline -\frac{12EI}{l^3n} & -\frac{12EI}{l^3n} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3n} & \frac{12EI}{l^3m} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \hline -\frac{6EI}{l^2n} & \frac{6EI}{l^2m} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2n} & -\frac{6EI}{l^2m} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array} \quad (12.17)$$

Бу маълумотлар махсус матрицалар орқали ифодаланиб, индекс матрицаси $\{TT\}$, конструкция параметр матрицаларини ифодаловчи $\{PP\}$ матрицаси ва ташки кучларни ифодаловчи $\{ЮК\}$ матрицаси деб номланади.

Аввало статик ноаниқ конструкциянинг асосий системасида қабул қилинган кетма-кетлик бўйича $\{TT\}$ матрицаси, кейин $\{PP\}$ ҳамда $\{ЮК\}$ матрицалари тузилади. Сўнгра қабул қилинган тартиб бўйича ҳар бир элемент учун параметр матрицаси $\{PP\}$ дан фойдаланиб БМ — топилади. $\{TT\}$ матрицаси ёрдамида R_0 массивидан керакли ҳадларни танлаб олиб, қолган элементларнинг тегишли ҳадларига қўшиш йўли билан (12.11) тенгламалар тизими тузилади.

ЧЭУ да тенгламалар системасини тузиш қўчиш усулидаги каби бўлиб, бу усулда бурчакли қўчишдан ташқари бўйлама ва кўндаланг қўчишлар ҳам ҳисобга олинади.

Тенгламалар системасининг озод ҳадлари осон топилади. Берилган барча ташки кучлар тугунларга тупланиб, номаълум қўчишлар йўналишига келтирилади (12.1-расм, в).

$\{ЮК\}$ матрицасида ташки кучларнинг қиймати ва йўналиши ифодаланади. Тенгламаларни тузганда, шу йўналиш бўйлаб тенгламада жой ажратилади.

Тенгламаларнинг тартиби киритилган квадратлар, шарнирлар ва талаб қилинган қўчишлар сонига қараб

аникланади. Тенгламанинг кўриниши лентасимон бўлиб, унинг симметриклиги ҳисобга олинса, диагоналнинг бир томонини аниклаш кифоя қилади.

Тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$(II'RII)z + R_p = 0. \quad (12.18)$$

Тенгламалар системасини ечиш — тугунлардаги кўчишларни аниклаш, умумий ички куч матрицаларини топишдан иборат. Лентасимон диагональ тенгламаси очилса, ҳақиқий кўчиш матрицаси топилади. Агар лента тузилишини ҳисобга олсак, юқори даражали тенгламалар системасини ечиш учун Гаусс ёки бошқа тақрибий усулни қўллаш мақсадга мувофиқдир.

Ечишни R^{-1} матрицасига алмаштириш усулидан фойдаланиб, амалга ошириш мумкин.

$$R^{-1} = (II^{-1}RII)^{-1} \quad (12.19)$$

Тенгламалар системасининг ечими кўчиш матрицасини ифодалайди. Номатрица — z аниқлангандан сўнг элементнинг учларидаги ички кўчларнинг қиймати аниқлаш қийин эмас. Агар БМ ва КМ эгувчи момент, қирқувчи ва бўйлама кўчларни ҳисобга олиб тузилган бўлса, у ҳолда охириги элементнинг иккала учлари учун M , Q , N ички кўчларини аниқлаб олиш мумкин:

$$S = Q \cdot z.$$

Юқорида айтилганидек, раманинг элементлари мунтазам, яъни қатъий горизонтал ва вертикал бўлганида, ички кўчлар қуйидагича топилади:

$$S = R \cdot z.$$

12.5. Ҳисоблаш намунаси

Умуман ЧЭУ ЭХМ га мослашган бўлгани учун конструкцияларни қўлда шу усул бўйича ҳисоблаш бошқа усулларга нисбатан бирмунча мураккабдир. Шунинг учун ҳам оддий мисолларда усулнинг барча имкониятларини тўлалигича очиб бериш қийин. Қуйида ЧЭУ нинг баъзи имкониятларини ва кетма-кетлигини кўрсатиш мақсадида энг содда мисоллар келтирилган.

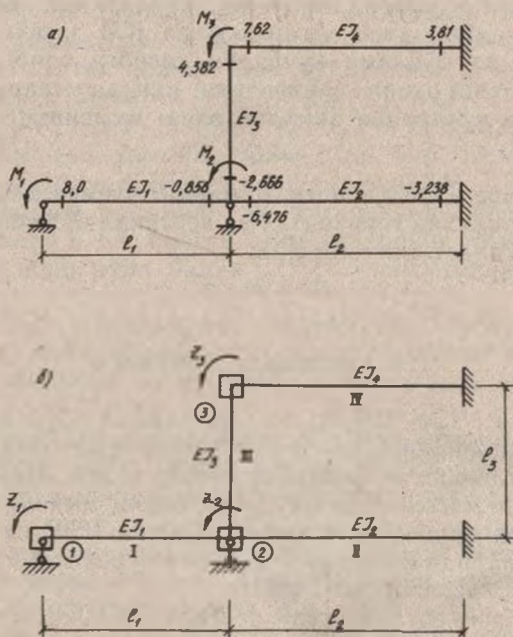
Чекли элементлар усули асосида ЭХМларга бир неча ҳисоблаш дастурлари яратилган. Бу усул асосида Тошкент архитектура ва қурилиш институтининг мутахассислари

томонидан эластик конструкцияларни ҳисоблаш ва оптималлаштириш дастури КРОУС — IV яратилган ва ЕС — ЭХМ машиналарига ва шахсий компьютер IBM га мослаштирилган. Бу КРОУС дастури турли даражада мураккабликка эга бўлган стерженлардан ташкил топган конструкцияларни ҳисоблаш ва лойиҳалаш имконини беради.

1- мисол.

12.4- расм, а да кўрсатилган раманинг тугунларига таъсир этаётган эгувчи моментлардан ҳосил бўлган тугунлардаги кўчишлар аниқлансин.

Ҳисобни асосий система танлашдан бошлаймиз. (12.4- расм, б), тугунлардаги бурчакли кўчишлар сони 3- га, чекли элементлар сони 1М — 4- га тенг. Элементлар тартибини рим рақами (I, II, ... IV) билан, номаълум кўчишларни 1, 2, 3 орқали белгиласак, индекс матрицаси {ТТ} куйидаги кўринишда бўлади:



12.4- расм

$$\{TT\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметр матрицаси ҳар бир элементнинг бикирлигини EI_i , узунлигини l_i ва n орқали XOY ўқларига боғлиқликларини ифодалайди.

$$\{PAR\} = \begin{bmatrix} EI_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ EI_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ EI_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ EI_4 & l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix}$$

Юк матрицасини $\{ЮК\}$ ташкил қилиш учун тугунлардаги номаълум кўчишлар йўналишидан фойдаланилади.

$$\{ЮК\} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Раманинг бикирлик матрицасини аниқлашда $\{TT\}$ ҳамда $\{PAR\}$ матрицаларидан фойдаланилади, яъни $R = \Pi K \Pi$. Тенгламалар системасини тузишда эса юк матрицаси озод ҳад сифатида катнашади:

$$R_p = \{ЮК\}.$$

Бу ерда Π — косинус матрицаси бўлиб, $\{PAR\}$ матрицасидан келтириб чиқарилади.

ЭҳМ да ҳисоб аввало ҳар бир чекли элементнинг бикирлик матрицасини R_1 , R_2 , R_3 ва R_4 аниқлашдан бошланиб, сўнгра раманинг туташтирилмаган элементлари бикирлик матрицаси тузилади.

Умумий туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матрицалари қуйидагича бўлиб,

$$K = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & R_3 & \\ & & & R_4 \end{bmatrix}$$

тенгламалар системаси тузилади:

$$\begin{aligned} \frac{4EF_1}{l_1} z_1 + \left(\frac{2EI}{l_1} \right) Z_2 &= M_1 \\ \frac{2EI}{l_1} z_1 + \left(\frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3} \right) Z_2 + \frac{2EI_3}{l_3} Z_3 &= -M_2 \\ \frac{2EI_3}{l_3} z_2 + \left(\frac{4EI_3}{l_3} + \frac{4EI_4}{l_4} \right) Z_3 &= M_3. \end{aligned}$$

Тенгламаларни очиб, номатълум Z_i кўчишларни аниқлаймиз;

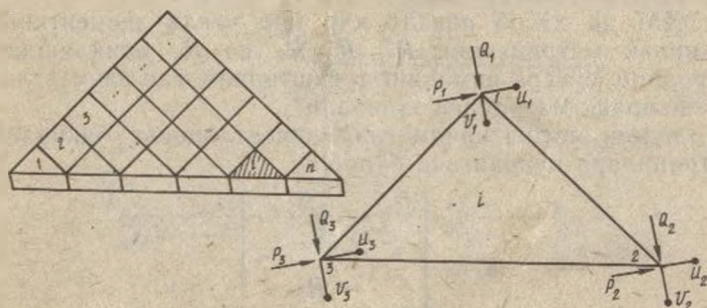
$$z_1 = \frac{1}{l} 2.809; z_2 = -\frac{1}{l} 1.619; z_3 = \frac{1}{l} 1.905.$$

Бўйлама ва кўндаланг деформациялар ҳам худди уқорида кўрсатилгандек ҳисобга олиниши мумкин.

12.6. ПЛАСТИНАСИМОН КОНСТРУКЦИЯЛАРНИ ЧЭУ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Икки ўлчамли ясси жисмлар учбурчак ёки тўртбурчак шаклидаги чекли элементларга бўлинади. Ҳар бир учбурчак ёки тўртбурчак чекли элемент ҳисобланади (12.5, 12.6-расмлар).

Унинг бажарган ишини тақрибий формула орқали ифодалаш мумкин. Масалан, учбурчак учларини 1, 2, 3 рақамлари билан белгилаб, шу рақам орқали ҳар бир учбурчакдаги микдорни белгилаб оламиз. Учбурчак учларида X ва Y ўқлари йуналиши бўйича u ва v кўчишла-



12.5-расм

ри содир бўлиши ёки шу йўналишларда P ва Q ташки кучлари таъсир қилиши мумкин (12.5-расм).

Юқорида қабул қилинганидек, (12.4), кучишларни ифодаловчи чизикли функциялар киритамиз.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (12.20)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ коэффициентларни шундай олиш керакки, учбурчак учларидаги кучишларнинг қиймати масаланинг шартини қаноатлантирсин.

Кучишлар векторини матрица ифодасига келтирсак

$$\vec{z}(x, y) = N(x, y)\alpha, \quad (12.21)$$

бу ерда

$$\vec{z}(x, y) = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}; \quad N(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Эластиклик назариясидаги Коши формуласи

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots \quad (12.22)$$

ҳисобга олинса, деформациялар қуйидаги боғланишга эга бўлади:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{\alpha}$$

ёки

$$\vec{\varepsilon} = B\vec{\alpha}.$$

(12.23)

Пластина учун Гук қонуни

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon}$$

(12.24)

эканлигини ҳисобга олиб, (12.23) ни (12.24) га қўйсак,

$$\vec{\sigma} = DB\vec{\alpha}$$

келиб чиқади.

Потенциал энергияни пластинадаги мумкин бўлган кўчишлар орқали ифодаси куйидаги кўринишга эга.

$$U = \frac{1}{2} \iint_F \sigma_{\varepsilon} dx dy = \frac{1}{2} a R^* \bar{a} \quad (12.25)$$

булиб, R^* — биз кидирган бикирлик матричасидир.

$$R^* = h \iint B^T D B dx dy. \quad (12.26)$$

Учбурчак кўринишига эга бўлган чекли элементнинг (12.5- расм) бикирлик матричасининг энг содда кўриниши куйидагичадир:

$$R^* = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}$$

бу ерда h — пластина қалинлиги

$$\beta = b/a.$$

Умуман пластинанинг бикирлик матричаси

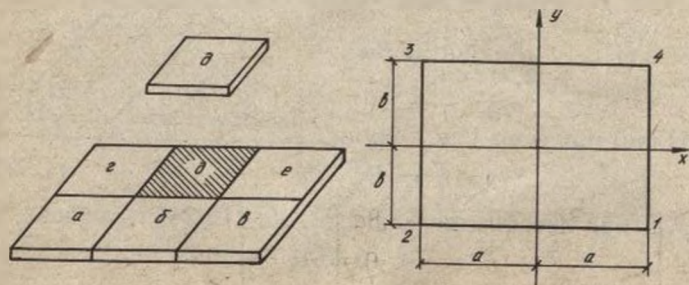
$$R = \Pi^T R^* \Pi$$

кўринишда аниқланади.

Пластиналарни ҳисоблашда чекли элемент тўғри бурчакли тўртбурчак кўринишида бўлиши ҳам мумкин (12.6- расм). Бундай ҳолатдаги кўчишларни куйидагича белгилаймиз:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$



12.6- расм

Буни матрица кўринишида ёзамиз:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Ораликдаги амалларни ташлаб утилса, чекли пластининг бикирлик матричаси куйидаги умумий кўринишга эга бўлади:

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & C_{13} & D_{14} \\ B_{21} & A_{22} & D_{23} & C_{24} \\ C_{31} & D_{32} & A_{33} & B_{34} \\ D_{41} & C_{42} & B_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Энг содда квадрат кўринишга эга бўлган чекли пластина учун

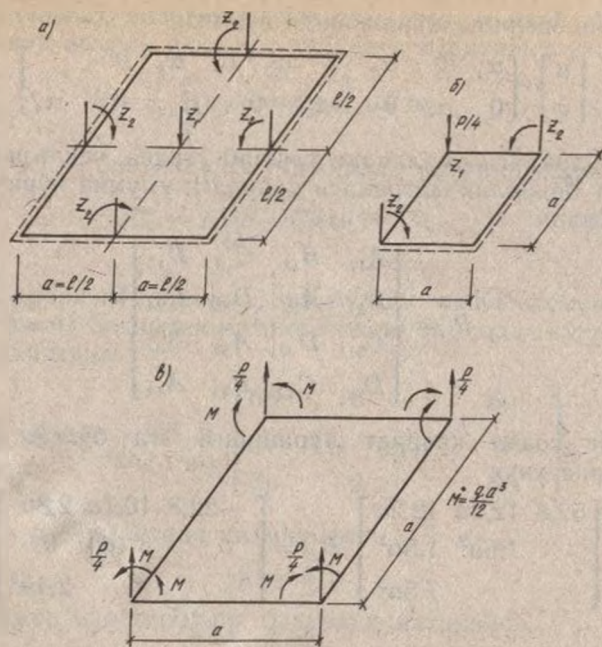
$$A_{11} = \begin{bmatrix} 52,8 & 12,2a & 12,2a \\ & 7,6a^2 & 1,5a^2 \\ & & 7,5a^2 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} -22,8 & 10,7a & 2,8a \\ & 3,1a^2 & 0 \\ & & 2,4a^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} -7,2a & 4,3a & 4,3a \\ & 1,9a^2 & 0 \\ & & 1,9a^2 \end{bmatrix} \quad D_{14} = \begin{bmatrix} -22,8 & -2,8a & 10,7a \\ & 2,4a^2 & 0 \\ & & 3,1a^2 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 52,8 & -42,2a & 12,2a \\ & 7,6a^2 & -1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix} \quad D_{23} = \begin{bmatrix} -22,8 & -2,8a & 10,7a \\ & 2,4a^2 & 0 \\ & & 3,1a^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{24} = \begin{bmatrix} -7,2a & 4,3a & 4,3a \\ & 1,9a^2 & 0 \\ & & 1,9a^2 \end{bmatrix} \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 52,8 & -12,2a & -12,2a \\ & 7,6a^2 & 1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix}$$

$$B_{34} = \begin{bmatrix} -22,8 & -10,7a & -2,8a \\ & 3,1a^2 & 0 \\ & & 2,4a^2 \end{bmatrix} \quad A_{44} = \begin{bmatrix} 52,8 & 12,2a & -12,2a \\ & 7,6a^2 & -1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix}$$



12.7- расм

Юкорида келтирилган учбурчак ва тўртбурчак шаклидаги чекли элементлар бикирлик матрицалари ҳар хил кўриниш ва ўлчамга эга бўлган текис юзалик плита — пластиналарни ҳисоблаш учун асос бўла олади.

Чекли элементнинг хили, уларнинг ҳисоб жараёнидаги қабул қилинган сонлари масалани аниқлик даражасини белгилайди. Берилган конструкция қанча кўп чекли элементларга бўлинса, ҳисобнинг аниқлиги шунча юқори бўлади.

Мисол. Квадрат (12.7- расм) кўринишига эга бўлган, шарнирли таянган пластинани текис ёйиқ куч таъсирига ҳисоблансин.

Берилган мисолнинг асосий системаси 12.7- расм, а да кўрсатилган бўлиб, пластина симметрик бўлганлиги учун у иккита номаълум кўчишга эга: z_1 — пластина ўртасидаги солкилик, z_2 — чеккадаги бурилиш бурчаги. Демак, тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Rz + R_p = 0; \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Юкоридаги квадрат матрица БМ дан фойдалансак,

$$R_{11}=52.8 \quad D/5a^2 R_{12}=R_{21}=-21.4D/5a$$

$$R_{22}=15.2D/5$$

келиб чиқади.

Юк матричасини тузиш учун текис ёйик ташки кучни тугунларга тўплаймиз. Бунда юк матричаси куйидаги кўринишга келиб,

$$R_p = \begin{bmatrix} -\frac{5qa^4}{4D} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

тенгламалар системасининг ечими

$$W_{\max}=Z_1=0,003446 \frac{ql^4}{D}; \quad M_{\max}=0,0572 \quad ql^2;$$

$$Z_2=0,00970 \frac{ql^3}{D}.$$

бўлади.

Агар берилган пластинани $a=\frac{l}{4}$ деб, тўртга бўлганда $W_{\max}=Z_1=0,003939 \frac{ql^4}{D}$, $M=0,04873ql^2$ кийматига эга бўлардик. Бу солкиликнинг аниқ миқдори $W_{\max}=0,004062 \frac{ql^2}{D}$, $M_{\max}=0,0479ql^2$ ни инобатга олсак, юкоридаги хулоса тасдиqlанади. Агарда бу пластинани $a=\frac{l}{2}$ деб, тугунлардаги моментларни $(M=-\frac{qa^2}{12})$ ҳам инобатга олиб ҳисобланса, у ҳолда $W_{\max}=0,004259 \frac{ql^2}{D}$

бўлиб, аниқлик 4,75 фоизга тенг бўлади.

Шундай қилиб, чекли элемент усули бошқа ҳамма усулларга нисбатан ўзининг универсаллиги, машинабоплиги ва самарадорлиги билан ажралиб туради. Бу усул кўп омилларни ҳисобга олиш имконини беради. Ҳозир кенг қўлланилаётган дастурлар шу усулга асосланган.

12.7. МУРАККАБ КОНСТРУКЦИЯЛАРНИ СУПЕР ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШГА ДОИР ТУШУНЧАЛАР

Электрон ҳисоблаш машиналарининг, хусусан, ўрта имкониятли кичик ва микро ЭХМ ларнинг хотиралари чегараланган бўлгани учун юкори даражада мураккаб конструкцияларни ҳисоблаш имконияти ҳам чегаралангандир.

Бундай мураккаб масалаларни ечиш учун «диокоптика» усулидан, яъни мураккаб конструкцияларни содда бўлакларга бўлиш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Ҳисобнинг бу йўли супер элемент усули деб юритилади. Бу усулга кўра мураккаб статик ноаниқ конструкция соддарок ноаниқ конструкцияларга ажратилади.

Супер элемент усулининг ҳисоблаш коидаси юкорида кўриб ўтилган ЧЭУ га ўхшашдир, бу ерда чекли элемент ўрнига супер элемент, яъни содда статик ноаниқ элемент қабул қилинади.

Супер элемент усулининг математик талқини қуйидагича бўлиши мумкин:

$$[R] \{ \Delta \} = \{ P \} \quad (12.27)$$

Бу ерда $\{ \Delta \}$, $\{ P \}$ — кўчиш ва куч матрицалари.

Конструкциянинг бикирлик матрицаси $[R]$ ни блок матрицаси кўринишида ёзамиз:

$$[R] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{in} \\ K_{ni} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

Бу ерда: K_{ii} , K_{nn} — супер элементларнинг хусусий бикирликларини ифодаловчи матрицалар;

K_{in} , K_{ni} — элементларнинг ўзаро муносабатини ифодаловчи бикирлик матрицалари.

Агарда умумий тенгламани соддарок кўринишда ёзсак:

$$\begin{aligned} [K_{ii}] \{ \Delta_i \} + [K_{in}] \{ \Delta_n \} &= \{ P \} \\ [K_{ni}] \{ \Delta_i \} + [K_{nn}] \{ \Delta_n \} &= \{ P \} \end{aligned} \quad (12.29)$$

келиб чиқади.

Бу ерда Δ_i — супер элементларнинг туташган нукталаридаги кўчишлар матрицаси;

Δ_n — конструкция тугунларидаги ташки кўчишлар матрицаси.

Уларни аниклаш учун қуйидаги амалларни бажариш кифоя:

$$\begin{aligned}\{\Delta_i\} &= ([K_{ii}] - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} [K_{ni}]) (\{P_i\} - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} \{P_n\}) \\ \{\Delta_n\} &= ([K_{nn}] - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} [K_{in}]) (\{P_n\} - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} \{P_i\})\end{aligned}\quad (12.30)$$

Агарда қуйидаги белгилашлар киритилса:

$$\begin{aligned}[K_{nn}^*] &= [K_{nn}] - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} [K_{in}]^{-1} \\ \{P_n^*\} &= \{P_n\} - [K_{in}] [K_{ii}]^{-1} \{P_i\} \\ [K_{ii}^*] &= [K_{ii}] - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} [K_{ni}]^{-1} \\ \{P_i^*\} &= \{P_i\} - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} \{P_n\}\end{aligned}\quad (12.31)$$

у ҳолда супер элемент усулининг хусусий тенгламаси келиб чиқади:

$$\begin{aligned}[K_{nn}^*] \{\Delta_n\} &= \{P_n^*\}; \\ [K_{ii}^*] \{\Delta_i\} &= \{P_i^*\}\end{aligned}\quad (12.32)$$

Кўриниб турибдики, иккита тенгламанинг тартиби умумий тенглама (12.27) дан анча кам бўлиб, Δ_i ва Δ_n кўчишларни алоҳида, бир-бирига боғланмаган ҳолда аниклаш имконини беради.

Шундай қилиб, супер элемент — бу бикирлиги аник бўлган кичик система бўлиб, берилган мураккаб системанинг таркибий қисми ҳисобланади.

Супер элемент усулининг ҳисоблаш тартиби қуйидагича:

1. Берилган конструкцияни супер элемент усулига мос бўлақларга бўлувчи ҳисоблаш тарҳи танланади.

2. Қабул қилинган ҳисоблаш тарҳига доир системани бир чеккадан содда супер элемент (СЭЛ) ларга бўлинади.

3. Икки хил кўчишларга доир тенгламалар тизими тузилади ва ечилади.

4. Топилган ички Δ_i ва ташқи Δ_n кўчишлар орқали ички кучлар аниқланади:

$$\{S\}^t = [K_i] \{\Delta_i\}^{pt}$$

Бу ерда

$$\{\Delta_i\}^{pt} = C \{\Delta_n\}^{pt} = C ([K_n]^{pt})^{-1} \{P\}^{pt}$$

Матрица С — бирлаштириш матрицаси бўлиб, конструкция элементларининг ўзаро боғланишларини ифода-лайди.

Супер элемент усули машинабоп усул бўлиб, энг мураккаб конструкцияларни ЭХМда ҳисоблаш имконини беради. Бу усул қуйидаги имкониятларга эга:

- ҳар хил конструкциядан (ферма, рама, арка ва б) ташкил топган мураккаб иморат ва иншоотларни ҳисоблаш;

- устуворлик, мустаҳкамлик ва динамика масалалари-ни ҳал қилиш;

- конструкциянинг ўзига хос хусусиятларини, чи-зиксиз деформацияларни ва бошқа омилларни инobatга олиш;

- ер ости ва устидаги конструкцияларнинг бирга ишлашини инobatга олиш;

- ҳар хил мураккабликдаги конструкцияларнинг чидамлилигини аниқлаш;

- конструкция параметрларининг энг мақбул — опти-мал ечимларини топиш;

Умуман супер элемент усули кема, тайёра ва космик кемалар каби жуда мураккаб конструкцияларни ҳисоб-лашда кенг қўлланилади.

13-боб

СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ

13.1. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Устуворлик деганда, иншоотнинг ташки кучлар таъси-рида ўзининг дастлабки ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туриш хоссаси тушунилади.

Иншоотларнинг устуворлиги ҳам мустаҳкамлиги синга-ри ташки кучларнинг микдорига боғлиқ. Куч маълум микдорга етгунча иншоот ўзининг устувор ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туради. Куч маълум микдордан ошганда, иншоотнинг устуворлиги бузилади, яъни дастлабки ҳолати ёки деформация шакли ўзгаради.

Фикримизни мисоллар ёрдамида равшанлаштирамиз. 13.1-расмда ботик, кабарик ва текис сиртга ўрнатилган оғир шарча тасвирланган. Агар шарчани бироз оғдириб, сўнг ўз холига қўйсақ, қуйидаги вазият юзага келади: биринчи ҳолда шарча ўзининг дастлабки ҳолатига қайтиб



13.1-расм

келади. Унинг бу ҳолати устувор мувозанат ҳолати деб аталади. Бу ҳолда шарча энг кичик потенциал энергияга эга бўлади. Иккинчи ҳолда шарча дастлабки ҳолатига қайтмайди. Бу ҳол ноустувор мувозанат ҳолатига киради. Бунда шарчанинг потенциал энергияси энг катта қийматга эга бўлади. Учинчи ҳолда шарча озгина юриб тўхтайти, дастлабки ҳолатига қайтмайди. Бундай ҳолат бефарк мувозанат деб юритилади. Бунда потенциал энергия ўзгармас бўлади.

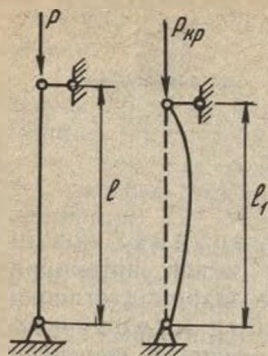
Келтирилган мисол қаттиқ жисм ҳолатининг устуворлигига доир. Биз бу мисол ёрдамида устувор, ноустувор ва бефарк мувозанатлар қандай бўлишини билиб олдик. Энди мана шу вазиятлар эластик системаларда қай тарика содир бўлишини кўриб ўтайлик.

Маълумки, ташқи кучлар таъсирида эластик системаларда эластик деформациялар ҳосил бўлади. Ташқи кучларнинг миқдори орта бориб, маълум қийматга етганда, деформация шакли ноустувор бўлиб қолади; бошқача қилиб айтганда, ташқи кучларнинг маълум қийматида эластик системанинг дастлабки деформация шакли ўз устуворлигини йўқотади. Система устуворлиги йўқолганда, ташқи ва ички кучлар орасидаги мувозанат ҳам бузилади.

Устувор ва ноустувор ҳолат орасидаги чегара системанинг бефарк ҳолати деб аталади.

Устувор мувозанат ҳолатидаги системани кичик масофага оғдирилса, оғдирувчи сабаб йўқолгач, система дастлабки ҳолатига қайтади. Ноустувор мувозанатда кўшимча юк қўйилмаса ҳам деформация давом этади. Бефарк мувозанатда эса система оғанича қолаверади.

Амалда устуворлик бузилиши (йўқолиши)нинг икки тури мавжуд. Устуворлик бузилишининг биринчи турида, яъни куч аста ортиб борганда, деформациянинг дастлабки шакли йўқолиб, унинг ўрнига янги шакли ҳосил бўлади ва ривожланиб боради.



13.2-расм

Деформацияни бир шаклдан иккинчи шаклга ўтказувчи куч критик куч¹ деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи турига мисол келтирамиз (13.2-расм). Агар $P < P_{кр}$ бўлса, устун тўғри чизикли ҳолатини сақлайди. Мувозанатнинг бу кўрилиши устувор мувозанат саналади. Агар устунни тўғри чизикли ҳолатидан чиқарилса (масалан, озгина туртки берилса), стержень тефрана бошлайди ва ички кучларнинг қаршилиги туфайли яна дастлабки тўғри чизикли ҳолатига қайтади.

Сиқувчи куч P нинг қиймати орта бориб, критик қийматга етганда мувозанатнинг тўғри чизикли шакли ноустувор бўлиб қолади. Кучнинг бу қийматида берилган озгина туртки устунда деформациянинг янги шаклини — эгилиш деформациясини ҳосил қилади.

$P = P_{кр}$ бўлганда, устуннинг тўғри чизикли деформацияси ноустувор, эгри чизикли деформацияси эса устувор бўлади. Кучнинг қиймати критик қийматдан яна бироз ошса, эгилиш деформацияси тез ўсиб бориб, устун бутунлай ишдан чиқади.

Устуворликнинг бузилиши (йўқолиши)нинг иккинчи турини кўриб ўтамиз. Устуворлик бузилишининг иккинчи турида деформациянинг янги шакли пайдо бўлмай, дастлабки деформация кескин равишда ўсиб боради (13.3-расм, а).

Маълум чегарада C шарнирга қўйилган P кучининг ортиши билан солқилик u_c ҳам мос равишда ортиб боради. Бунда ташки ва ички кучлар орасидаги мувозанат сақланади. Бирок бу жараён давомида шундай ҳолат вужудга келадик, бунда ташки куч P нинг қиймати ортмаса ҳам солқилик u_c ортиб бораверади (13.3-расм, б). Деформациянинг узлуксиз равишда ўсиб боришига олиб келувчи ўзгармас куч критик куч деб аталади. $P = P_{кр}$ бўлганда, ташки ва ички кучлар орасидаги мувозанат ноустувор бўлади. $P > P_{кр}$ бўлганда, мувозанат

¹ Критик куч — танг ҳолатда вужудга келтирувчи куч.



13.3-расм

умуман мавжуд бўлмайди. Бу ходиса устуворлик бузилишининг иккинчи тури деб аталади.

Иншоотларни устуворликка ҳисоблашда баъзи чекла-нишлар ва фаразларга йўл қўйилади. Масалан, рамаларни ҳисоблашда система мутлақ тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган деб фараз этилади.

Устуворлик бузилганда стержендаги силжиш ва бўла-ма деформациялар ҳисобга олинмай, фақат эгилиш деформацияси текширилади. Бунда стержень эгилган ўқининг куйидаги тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланилади:

$$EIy'' = -M_x.$$

Ваҳоланки, дифференциал тенгламанинг аниқ ифодаси куйидаги кўринишга эга:

$$EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -M_x.$$

Икки учи шарнирли маҳкамланган стерженнинг усту-ворлиги масаласини биринчи бўлиб 1744 йилда Леонард Эйлер ҳал этган. Ўша даврлардан буён иншоотлар устуворлиги масаласи ривожлана бориб, ҳозирги даврда қурилиш механикасининг катта соҳасига айланди.

Критик кучларни аниқлашда статик, динамик ва энергетик деб аталувчи асосий усуллар қўлланилмоқда.

Статик усул замирида стерженли системанинг устуворлиги йўқолгандан кейинги деформацияланган ҳолати ётади, яъни стерженнинг эгилган ҳолати учун мувозанат тенгламалари тузилади ва улардан системани шу ҳолатда ушлаб тура оладиган кучнинг қиймати аниқланади. Бу куч критик куч бўлади.

Динамик усулга кўра берилган система учун хусусий тебраниш тенгламаси тузилади ва бу тенгламадан

хусусий тебранишлар частотаси нолга тенглиги шартидан фойдаланиб, критик кучнинг киймати $P_{кр}$ аникланади.

Энергетик усул Дирихле коидасига асосланади. Бу койдага биноан устувор мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси Π минимал кийматга эга бўлади, бeфapж мувозанат ҳолатида эса потенциал энергиянинг икки қўшни кийматлари орасидаги фарк $\Delta\Pi$ нолга тенг бўлади:

$$\Delta\Pi = \Delta v - \Delta E = 0,$$

бу ерда v — ички кучлар потенциал энергияси;

E — тaшки кучлар потенциал энергияси.

Бундан $\Delta^e = \Delta E$ келиб чиқади.

Бу койдага асосланиб системалар учун аниқ тенгламалар тузилади ва улардан критик кучнинг киймати аникланади.

Иншоотга таъсир этувчи юк орта бориб, ўзининг критик кийматига эришганда, иншоотда танг (критик) ҳолат вужудга келади, юк яна бироз оширилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади (бузилади). Тарихда сиқилган стерженлар устуворлигининг йўқолиши оқибатида иншоотларнинг қулаб тушиш ҳолати кўп учрайди. Масалан, 1907 йили АҚШнинг Шимолий Лаврентия дарёсига қурилган металл кўприк қулаб тушиб, 74 киши ҳалок бўлган. Бу фожиага сиқилишга ишлайдиган стерженлар устуворлигининг нотўғри ҳисобланганлиги сабаб бўлган.

Шунга ўхшаш фалокат 1891 йили Швейцарияда рўй берган, 12 вагонли пассажир поезда кўприкдан ўтаётганда, кўприк босиб қолган. Фалокат натижасида 74 киши ўлиб, 200 киши тан жароҳати олган. Кўприк фермасининг сиқилувчи ховонларидан бирининг устуворлигини йўқолиши кўприкни ҳалокатга олиб келган.

Бинокорлик ва кўприксозлик тарихида бунга ўхшаш мисоллар оз эмас. Бирок иншоотлар устуворлиги масаласини тўғри ҳал этилиши инсонлар учун нақадар катта аҳамиятга эга эканлиги юқоридаги икки мисолдан яққол кўриниб турибди.

13.2. СИҚИЛГАН СТЕРЖЕНЛАР УЧУН ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСИ

Икки учи шарнирли маҳкамланган стерженга марказий P кучи қўйилган (13.4-расм). Сиқувчи кучнинг киймати $P_{кр}$ дан кичик бўлса, стержень бирдан-бир тўғри чизикли

мувозанат шаклига эга бўлади. $P = P_{кр}$ бўлганда, стержень икки хил: тўғри чизикли ва эгри чизикли мувозанат шаклига эга. Бунда тўғри чизикли мувозанат — ноустовор, эгри чизиклиси — устувор ҳисобланади. Критик кучни аниклаш учун солкиликнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EI_{\min} y'' = -M_x, \quad (13.1)$$

бу ерда x — стержендаги ихтиёрий нуктанинг координати;

y — шу нуктанинг солкилиги;

E — эластиклик модули;

$J_{\min}$ — стержень кўндаланг кесимининг минимал инерция моменти;

$EJ_{\min}$ — стерженнинг эгилишга бўлган минимал бикирлиги;

M — ташки кучлар эгувчи моменти.

Бизнинг ҳолда $M_x = P_y$.

Моментнинг қийматини (13.1) га қўямиз

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_{\min}} = -\frac{P_y}{EI_{\min}}.$$

Қуйдаги белгилашни қабул қилсак:

$$\alpha^2 = -\frac{P}{EI_{\min}}, \quad (13.2)$$

тенглама ихчамлашади

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \quad (13.3)$$

Мазкур тенгламанинг ечими қуйдаги қўринишга эга:

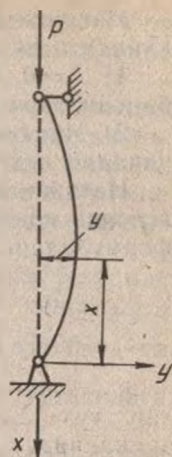
$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Ихтиёрий ўзгармаслар A ва B қуйдаги чегаравий шартлардан топилади: $x=0$ бўлганда, $y=0$ ҳамда $x=l$ бўлганда, $y=0$.

Биринчи шартдан $B=0$ келиб чиқади. Бинобарин стержень эгилган ўқининг тенгламаси қуйдаги қўринишни олади:

$$y = A \sin \alpha x. \quad (13.4)$$

Демак, стержень синусоида шаклида эгилар экан.



13.4-расм

Иккинчи шартдан $A \sin \alpha l = 0$ ҳосил бўлади. Бу шарт куйидаги икки ҳолга тўғри келади:

1) $A = 0$, бунда стержень эгилмайди, чунки (13.4) га биноан барча кесимлардаги солкилик нолга тенг.

2) $\sin \alpha l = 0$, бундан $\alpha l = \pi; 2\pi; \dots n\pi$ эканлиги келиб чиқади.

Натижада αl нинг бу қийматлари ҳамда (13.2) ифода асосида критик кучларни аниқлаш учун куйидаги катор формулаларга эга бўламиз:

$$P_{1kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2};$$

$$P_{2kp} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2};$$

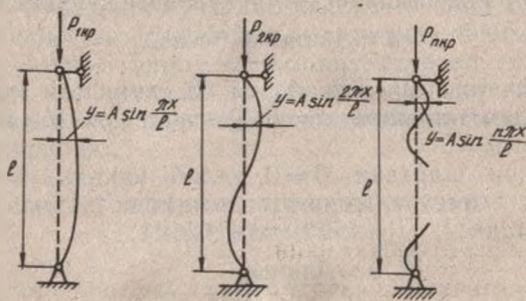
$$P_{nkp} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}$$

Критик кучнинг ҳар бир қиймати ўзининг эгилиш шаклига эга. Биринчи ҳолда стержень синусоиданинг битта ярим тўлкини бўйлаб, иккинчи ҳолда иккита ярим тўлқин бўйлаб эгилади ва ҳоказо (13.5- расм).

Амалда критик кучларнинг энг кичиги (биринчиси) қўлланилади, қолганлари фақат назарий аҳамиятга эга:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (13.5)$$

Бу формула ўз муаллифи номи билан — Эйлер формуласи деб аталади.



13.5- расм

Демак, критик куч стерженнинг бикирлигига тўғри пропорционал, стержень узунлиги квадратига тескари пропорционал.

Критик ҳолатдаги стерженнинг эгилиши тўсатдан содир бўлади, шунинг учун ҳам унинг олдини олиш кийин. Чўзилган стерженларнинг узилишини олдиндан пайкаса бўлади, бироқ сиқилган стерженнинг устуворлиги йўқолишини олдиндан илғаб бўлмайди. Унинг хавфли томони ҳам айнан шундан иборат.

Эгилган ўқ тенгламаси (13.4) даги ихтиёрий ўзгармас A нинг физик моҳиятини аниқлаш учун тенгламага $\alpha = \frac{\pi}{l}$ ва $x = \frac{l}{2}$ қийматларни қўямиз. Бунда $\sin 90 = 1$ ва $y_{\max} = A$ келиб чиқади. Демак, A стерженнинг ўртасидаги солқилик экан.

Агар критик куч P_{kp} ни стерженнинг кўндаланг кесим юзаси F га бўлсак, устуворлик йўқоладиган даражадаги критик кучланиш келиб чиқади:

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E r_{\min}^2}{l^2},$$

бу ерда $r_{\min}^2 = \frac{J_{\min}}{F}$ кесимнинг минимал инерция радиусининг квадрати.

$\frac{l}{r_{\min}} = \lambda$ деб белгиласак (буни стерженнинг эгилувчанлиги деб аталади), критик кучланиш формуласи куйидаги кўринишга келади:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Шуни назарда тутиш керакки, Эйлер формуласини чиқараётганда кучланиш пропорционаллик чегараси σ_n дан ортиб кетмайди, деб қабул қилинган, акс ҳолда эгилган ўқ эластик чизик бўлмас эди.

Шундай қилиб, Эйлер формуласи куйидаги чегарада қўлланиши мумкин:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_n.$$

Бу формуладан стержень эгилувчанлигининг чегаравий қийматини аниқлаш мумкин:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}.$$

Мисол. Ст.3 маркали пулат учун $E=2,1 \cdot 10^6$ кгк/см², пропорционаллик чегараси $\sigma_n=2000$ кгк/см². Бу кийматларни формулага куйиб, эгилувчанликни аниқлаймиз:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2100000}{2000}} = 100.$$

Ст. 5 маркали пулат учун $\lambda=90$ бўлади.

Ёғоч учун $E=100000$ кгк/см² ва $\sigma_n=175$ кгк/см².

Биобарин ёғоч стерженлар учун чегаравий эгилувчанлик куйидаги кийматга тенг бўлади:

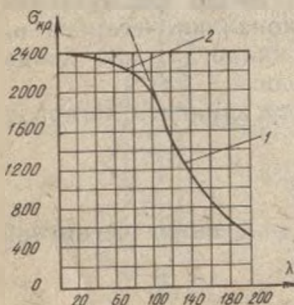
$$\lambda = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 100000}{175}} = 75.$$

Шундай қилиб, эгилувчанлик пулат стерженлар учун 100 дан, ёғоч стерженлар учун 75 дан кам бўлмаса, Эйлер формуласидан фойдаланиш мумкин.

Ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган стерженлар учун, яъни эластиклик чегарасидан ташқарида ишлайдиган стерженлар учун олимлар тажрибалар асосида критик кучни аниқлайдиган катор формулалар таклиф этганлар.

Критик кучланиш $\sigma_{кр}$ ни топадиган формулани чизмада тасвирласак (13.6- расм), эластиклик чегарасида ишловчи сикилган стерженларнинг критик кучланишларини аниқлаш имкониятига эга бўламиз.

Расмда эгилувчанлиги $\lambda \geq 100$ бўлган стерженлар учун Эйлер эгри чизиги 1 рақамли туташ чизик билан берилган.



13.6- расм

Эгилувчанлик $\lambda < 100$ бўлган ҳолларни ўзида акс эттирган нуқтир чизик тўғри натижа бермайди. Шунинг учун ҳам ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган пулат стерженларда критик кучланишларни аниқлаш учун бир катор тажрибалар асосида (расмда 2 рақами билан белгиланган) ёрдамчи эгри чизик ўтказилган. Бу чизик Эйлер эгри чизигининг узвий давоми сифатида акс этган.

13.3. УЧЛАРИ ТУРЛИЧА МАҲКАМЛАНГАН СТЕРЖЕНЛАР УЧУН КРИТИК КУЧ ИФОДАСИ

Курилиш конструкцияларида стержень учларини маҳкамлаш (бириктириш)нинг 13.7- расмда тасвирланган тўрт тури кенг қўлланилади. Олдинги параграфда икки учи шарнирли бириктирилган стержень учун критик кучни аниқлаб, бунда чегаравий шартларни танлашда стержень учларининг бириктирилиш тури муҳим роль ўйнашининг гувоҳи бўлдик. Агар ўша усулда қолган схемалар учун ҳам критик кучларни аниқласак, тузилиши жиҳатидан умумий бўлган қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$P_{кр} = m \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

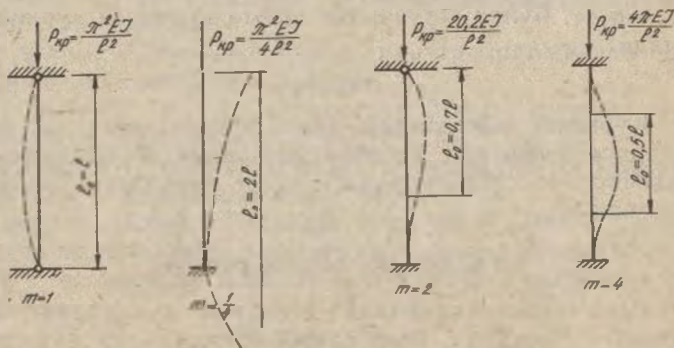
Тўрт хил схема учун чиқарилган критик куч ифодалари бир-биридан тузатувчи коэффициент m билан фарқ қилиб, биринчи схема учун $m=1$, иккинчиси учун $m=1/4$, учинчиси учун $m=2$ ва тўртинчи схема учун $m=4$.

Формула шаклини ўзгартирамиз:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{\sqrt{m}}\right)^2}.$$

$\frac{l}{\sqrt{m}} = l_0$ — стерженнинг келтирилган (эркин) узунлиги дейилади. Бунини формулага қўйсак, Эйлер формуласининг дастлабки кўринишига эга бўламиз.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$



13.7- расм

Келтирилган узунликлар тўрттала ҳол учун қуйидаги қийматларга эга:

$$\text{биринчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{1}} = l;$$

$$\text{иккинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2l;$$

$$\text{учинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{2}} \approx 0,7l;$$

$$\text{тўртинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{4}} = 0,5l.$$

13.4. СИҚИЛГАН СТЕРЖЕНЛАРНИ АМАЛИЙ ҲИСОБЛАШ

Сикилишга ишлайдиган пўлат стерженлар икки сабабга кўра ишдан чиқади: биринчидан, материалдаги кучланиш σ оқиш чегараси σ_T га етганда мустаҳкамлик бузилади; иккинчидан, материалдаги кучланиш критик қиймат σ_{kr} га етганда устуворлик йўқолади. Ҳар иккала сабаб стерженнинг ишдан чиқишига олиб келади. Шунга кўра сиқилган стерженларнинг ҳисобий чегаравий юк кўтариш қобилияти қуйидаги икки шарт бўйича ифодаланади:

а) мустаҳкамлик шarti $\sigma \leq \sigma_T$;

б) устуворлик шarti $\sigma \leq \sigma_{kr}$.

Критик кучланиш σ_{kr} оқиш чегараси σ_T дан кичик бўлганлиги сабабли, уларни бирдан кичик бўлган мослаштирувчи коэффициент φ_1 ёрдамида ўзаро боғлаш мумкин: $\sigma_{kr} = \sigma_T \varphi_1$. Бунда устуворлик шarti қуйидаги кўринишни олади:

$$\sigma \leq \sigma_T \varphi_1.$$

Қурилиш нормаларида оқиш чегарасининг энг кичик миқдори сифатида ҳисобий қаршилиқ R қўлланишини эътиборга олсак, юқоридаги шарт қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sigma \leq R \varphi_1, \text{ бу ерда } \varphi_1 = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_T}.$$

Реал конструкцияларда сиқувчи кучларнинг аниқ маркази бўлмайди, улар ҳамма вақт маълум елкага эга бўлади, бу эса критик кучланишнинг камайишига олиб

келади. Буни эътиборга олиб, нормаларда яна бир коэффициент киритилган:

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}},$$

бу ерда σ_{kp}^e — тасодифий елка «е» оркали кўйилган сикувчи кучдан ҳосил бўлган критик кучланиш. Унинг қиймати назарий ёки тажриба йўли билан аниқланади.

Натижада бўйлама эгилиш коэффициенти қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}}{\sigma_T} \cdot \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}} = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_T}.$$

Шундай қилиб, сиқилган стерженларнинг устуворлик шарти қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq R\varphi;$$

бу ерда P — ҳисобий сикувчи куч;

F — стерженнинг кўндаланг юзаси;

R — материалнинг сиқилишга бўлган ҳисобий қаршилиги.

Металл конструкцияларида қўлланиладиган пўлатнинг турли маркалари учун бўйлама эгилиш коэффициенти φ нинг қиймати эгилувчанлик λ га боғлиқ ҳолда 13.1-жадвалда берилган.

Темир-бетон, ёғоч, гишт каби бошқа материаллар учун ҳам φ коэффициенти ҳисоблаб чиқилган.

Стерженли системаларни устуворликка ҳисоблашда уч масала ҳал этилади:

1) агар R , φ , F маълум бўлса, сиқилган стерженнинг юк кўтариш қобилияти аниқланади;

2) агар P , F , R , φ маълум бўлса, стерженнинг устуворлиги текширилади; $\sigma = P/F \leq R\varphi$;

3) агар P , R , φ маълум бўлса, стерженнинг кўндаланг кесим юзаси аниқланади $F \geq P/R\varphi$.

Юқорида айтиб ўтилгандек, φ коэффициенти жадвалдан эгилувчанлик λ оркали топилади. λ нинг ўзи эса кесим юзаси F ва инерция моменти J га боғлиқ микдордир:

$$\lambda = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{F}}}.$$

Марказий сиқилган стерженлар учун
бўйлама эгилиш коэффициентлари

Эгилувчан- лик λ	Турли маркали пўлат элементлар учун ф нинг қийматлари			
	Ст. 3 ва Ст. 4	Ст. 5	14Г2, 15ТС, 10Г2С, 10Г2СД 15ХСНД	10 ХСНД
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,98
20	0,97	0,96	0,95	0,95
30	0,95	0,93	0,92	0,92
40	0,92	0,89	0,89	0,88
50	0,89	0,85	0,84	0,82
60	0,86	0,80	0,78	0,77
70	0,81	0,74	0,71	0,68
80	0,75	0,67	0,63	0,59
90	0,69	0,69	0,54	0,50
100	0,60	0,50	0,46	0,43
110	0,52	0,43	0,39	0,36
120	0,45	0,37	0,33	0,31
130	0,40	0,32	0,29	0,27
140	0,36	0,28	0,25	0,23
150	0,32	0,25	0,23	0,20
160	0,29	0,23	0,21	0,18
170	0,26	0,21	0,19	0,16
180	0,23	0,19	0,17	0,14
190	0,21	0,17	0,15	0,12
200	0,19	0,15	0,13	0,11
210	0,17	0,14	0,12	0,10
220	0,16	0,13	0,11	0,09

Шу боисдан изланаётган юзани аниқлашдан илгари бирор юзани тусмоллаб қабул қилинади ҳамда шу юза бўйича λ ва φ топилади, сўнгра қабул қилинган юза шарт бўйича текширилади. Агар шарт каноатлантирилса, ўша юза қолдирилади, каноатлантирилмаса, шу жараён яна такрорланади.

Металл конструкцияларини ҳисоблашда кўпинча φ коэффиценти аввал тусмоллаб танланади, кейин юза аниқланади ва шарт бўйича текширилади.

Элементнинг кўндаланг кесимини танлашда мустаҳкамлик шarti билан бир қаторда бикирлик шартини ҳам каноатлантириш талаб этилади. Шу муносабат билан қурилиш конструкцияларининг турли элементлари учун чегаравий эгилувчанликлар белгиланган. Масалан, ферманинг ҳовонлари, устунчалари ва асосий устунлар учун рухсат этилган энг юқори эгилувчанлик $\lambda = 120$. Ферманинг бошка элементлари ва иккинчи даражали устунлар учун чегаравий эгилувчанлик $\lambda = 150$. Металл конструкцияларининг қолган элементлари учун $\lambda = 200$.

13.5. СИҚИЛГАН СТЕРЖЕНЛАРДА БИРЛИК КЎЧИШДАН ҲОСИЛ БЎЛГАН РЕАКЦИЯЛАРНИ АНИҚЛАШ

Бундан кейинги параграфда рамалар устуворлигини ҳисоблашда кўчишлар усулининг татбиқини кўриб ўтамыз. Тўққизинчи бобда танишиб ўтганимиздек, статик ноаниқ системаларни бу усулда ҳисоблаганда, қўшимча равишда киритилган боғланишларда бирлик кўчишлар натижасида вужудга келадиган реакцияларни аниқлай билиш талаб этилади. Қуйида ана шундай реакциялар аниқланади.

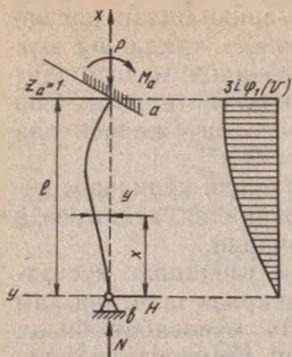
Бу масалани ҳал этишда ҳам солқиликнинг тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EIy'' = -M_x.$$

Бир учи мустаҳкам, иккинчи учи шарнирли бириктирилган стерженни кўриб ўтамыз. 13.8-расмда тасвирланган ҳол учун таянч реакцияларини аниқлаб, эгувчи момент M эпюрасини курамыз.

Агар горизонтал реакция кучи H маълум бўлса, а таянчини бир бирликка буришдан ҳосил бўлган реактив момент

$$M_0 = HI \quad (13.6)$$



13.8-расм

лама куч N стерженни олинади. Сикса мусбат, чўзса,

манфий олинади. Шу кесим учун солкиликнинг дифференциал тенгламаси куйидагича бўлади:

$$EIy'' = -(Hx + Ny),$$

$$\text{ёки } y'' + \frac{N}{EI}y = -\frac{H}{EI}x.$$

$\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{H}{EI}x \quad (13.7)$$

келиб чиқади. Бу тенгламанинг ечими куйидаги кўринишга эга:

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{H}{\alpha^2 EI}x. \quad (13.8)$$

A ва B ўзгармаслари чегаравий шартлардан топилади: $x=0$; $y=0$ бўлса, $B=0$ бўлади. $x=l$ бўлса, $y=0$ ва

$$A = \frac{H \cdot l}{\alpha^2 EI} - \frac{1}{\sin \alpha l}$$

бўлади.

Натижада стержень эгилган ўқининг тенгламаси куйидаги кўринишга келади:

$$y = \frac{Hl}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} = \frac{Hl}{\alpha^2 EI} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} - \frac{x}{l} \right) \quad (13.9)$$

бўлар эди. Бирок, N нинг ўзи номатълум. Эндиги вазифа унинг кийматини топишдан иборат.

Элементнинг исталган кесимидаги эгувчи момент

$$M_x = Hx + Ny.$$

Ишорага изох: y ўқи чапга йўналган, стерженнинг кабариги ўқнинг мусбат томонига қараган. Шунинг учун Hx мусбат олинди. Иккинчи ҳаднинг мусбат олинишига сабаб, бўй-

сиқади. Сикса мусбат, чўзса,

Энди $y' = Za = -1$ эканлигини назарда тутиб, (13.9) тенгламадан x бўйича ҳосила оламиз ва чиққан натижани -1 га тенглаймиз:

$$-1 = \frac{Hl}{\alpha EI} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha l} - \frac{1}{\alpha l} \right). \quad (13.10)$$

(13.10) ифодани ихчамлаштириш мақсадида қуйидаги белгилашларни қабул қиламиз:

$$v = \alpha l \quad \text{ва} \quad i = \frac{EI}{l}.$$

Буларни (13.10) га қўйиб, ундан изланаётган горизонтал реакция H ни топамиз:

$$H = \frac{i}{l} - \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} v - v}$$

H нинг бу қийматини (13.6) ифодага қўямиз:

$$M_a = Hl = 3i \cdot \varphi_1(v),$$

бу ерда $\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ — сиқилган стерженларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларга бўйлама кучнинг таъсирини ҳисобга олувчи коэффицент.

Бўйлама куч бўлмаса $\varphi_1(v) = 1$ бўлади. Буларга тегишли эгувчи момент M эпюраси 13.8- расмда берилган.

Стержень учларининг бошқача маҳкамланган ҳоллари учун $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\eta(v)$ ва ҳ.к. функциялар қўринишида тузатувчи купайтувчилар киритилади. 13.2- жадвалда сиқилиб-эрилган стерженлар учун эластик реакцияларнинг қийматлари ҳамда тузатувчи функциялар берилган. Тузатувчи функциялар $\varphi(v)$ ва $\eta(v)$ нинг қийматлари 13.3- жадвалдан аниқланади.

Шу нарсага эътиборни алоҳида жалб этиш лозимки, тузатувчи функциялар фақат сиқилган стерженларда қўлланилади. Асосий системада сиқувчи куч қўйилмаган стерженларда тузатувчи коэффицентлар ишлатилмайди. 13.2- жадвалнинг охири каторида икки учи шарнирли маҳкамланган стержень берилган бўлиб, таянчлардан бири силжиганда, стерженга қўйилган бўйлама куч туфайли вужудга келган горизонтал реакциянинг қиймати берилган.

Ўқиминиң турі ба Π элласи	Тузатувчи функциялар
	$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\lg v}\right)}$
	$\varphi_2(v) = \frac{v(\lg v - v)}{8 \lg v \left(\lg \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}$ $\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\lg \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}$
	$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}$
	$\varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right)$ $\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) - \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12}$
	$v = \sqrt[3]{\frac{P}{EJ}}$

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9326	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,95,90	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0805	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7531	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5991	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457

V	$\Phi_1(V)$	$\Phi_2(V)$	$\Phi_3(V)$	$\Phi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4256	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-0,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-0,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	0,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2,0	0,0000	—	—	0,0000	-13,033	-3,2898

13.6. РАМАЛАР УСТУВОРЛИГИ

Рамаларни устуворликка хисоблашда кучлар ёки кўчишлар усулидан фойдаланилади. Булардан кейингиси ўзининг кулайлиги ва соддалиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради. Қуйида рамалар устуворлигини хисоблашда кўчишлар усулидан фойдаланишни кўриб чиқамиз.

Аввало бинокорликда кенг тарқалган тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган раманинг тугунларига бўйлама кучлар қўйилган ҳолни кўриб ўтамиз. Кучларнинг критик қийматида рамада критик (танг) ҳолат вужудга келади. Бунда раманинг тўғри чизиқли мувозанати ноустувор ва эгри чизиқли мувозанати устувор бўлиб қолади. Ҳисобни соддалаштириш мақсадида стерженлардаги бўйлама деформацияларни эътиборга олмаймиз.

Раманинг асосий системаси аввалгисидан, яъни муштакамликка ҳисоблашдаги схемадан фарқ қилмайди.

Каноник тенгламалар тизими раманинг деформацияланган ҳолати учун тузилади. Тугунларга қўйилган ташқи кучлар асосий системага киритилган қўшимча боғланишларда ҳеч қандай реакция уйғотмайди, шунинг учун ҳам тенгламалар бир жинсли бўлади:

[illegible]

Бу ерда $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — номаълум эгилиш бурчаклари ва чизикли кўчишлардир.

Тенгламаларнинг физик маъноси ҳам ўша-ўша, яъни исталган қўшимча боғланишдаги реакциялар йигиндиси нолга тенг.

Бирок (13.11) тенгламанинг коэффицентлари r_{ik} — реактив момент ва реактив кучлар кўчиш усулининг аввалги оддий коэффицентларидан биров фарқ қилади. Аввалги коэффицентлар ташқи кучларга боғлиқ бўлмас эди. Устуворлик масаласидаги коэффицентлар эса бўйлама кучларга боғлиқ: олдинги параграфда кўриб ўтганимиздек, коэффицентларнинг киймати аниқлашда туғунларга қўйилган бўйлама кучларнинг таъсири ҳам ҳисобга олинади.

Яъа шуни ҳам эслатиб ўтиш лозимки, устуворлик тенгламаларида ҳам Релей теоремаси ўз кучига эга, яъни $r_{ik} = r_{ki}$.

Каноник тенгламалар системаси нолдан фаркли ечимга эга бўлишлиги учун, яъни рама тўғри чизикли мувозанатдан ташқари эгри чизикли мувозанатга ҳам эга бўлишлиги учун (13.11) системанинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$D = \begin{bmatrix} r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n} \\ r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n} \\ \dots r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nn} \end{bmatrix} = 0. \quad (13.12)$$

Аниқловчини очиб, устуворлик тенгламасини ҳосил қиламиз. Сўнгра ундан критик куч топилади. Бирлик эластик реакциялар бўйлама кучнинг функцияси бўлиб, v параметрига боғлиқдир. Шунинг учун ҳам аниқловчини очганда, v га нисбатан трансцендент тенглама ҳосил бўлади. Тенглама қатор илдизларга эга бўлиб, уларнинг ичидан энг кичиги танлаб олинади. Тенгламанинг ўзи эса танлаш ёки кетма-кет яқинлашув усулида ечилади.

Умуман рамада канча сиқилган стержень бўлса, ўшанча $v = l \sqrt{N/EJ}$ бўлади. Бироқ, $v_1, v_2 \dots$ ларни бирорта v_n орқали ифодалаб олса бўлади. Бунда барча r_{ik} битта параметрнинг функциясига айланиб қолади:

$$r_{ik} = f_{ik}(v_n),$$

критик ҳолат тенгламаси эса қуйидаги кўринишни олади:

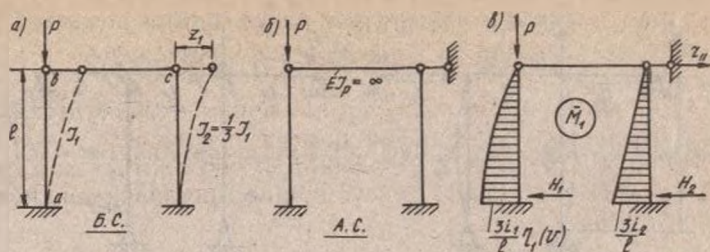
$$D = (v_n) = |f_{ik}(v_n)| = 0.$$

Маъкур аниқловчи тенгламанинг энг кичик илдизи $v_{n,kr}$ ни аниқлаш имконини беради. Параметр $v_{n,kr}$ асосида n -, стержендаги бўйлама кучнинг критик қиймати аниқланади:

$$N_{n,kr} = v_{n,kr}^2 \frac{EJ_n}{l_n^2}. \quad (13.13)$$

Шу стерженнинг ҳисобий узунлиги қуйидаги формуладан топилади:

$$l_{0,n} = \pi \sqrt{\frac{EJ_n}{N_{n,kr}}} = \frac{\pi}{v_{n,kr}} l_n. \quad (13.14)$$



13.9- расм

Кейин v лар орасидаги боғланишлардан фойдаланиб, раманинг қолган стерженлари учун v_{kp} ва N_{kp} аниқланади.

Баён этилган умумий мулоҳазаларни аниқ мисоллар асосида тушунтирамиз.

1- мисол. Раманинг ab устунчаси учун критик куч ва ҳисобий узунлик аниқлансин (13.9- расм, а). Ригель чексиз катта биқирликка эга. $J_2 = J_1/3$.

Номаълумлар сони бирга тенг. Асосий система ва бирлик эпюра $\bar{M}_1$ 13.9- расм, б, в да тасвирланган. P кучидан $P \cdot y$ моменти келиб қўшилганлиги сабабли сиқилган стерженнинг эпюраси эгри чизикли кўринишга эга. Реакцияларни аниқлашда бу эгрилик тузатувчи коэффициент $\eta_1(v)$ орқали ҳисобга олинади. $\bar{M}_1$ эпюрасини қуришда 13.2- жадвалдан фойдаланилади.

Тугунлардаги кучлар учун v параметрлари:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = v,$$

$v_2 = 0$, чунки иккинчи тугунда куч йўқ.

Берилган рама учун устуворлик каноник тенгламаси Z $r_{11} = 0$ бўлади. $Z_1 \neq 0$ бўлгани учун критик ҳолат тенгламаси куйидагича ифодаланади: $r_{11} = 0$.

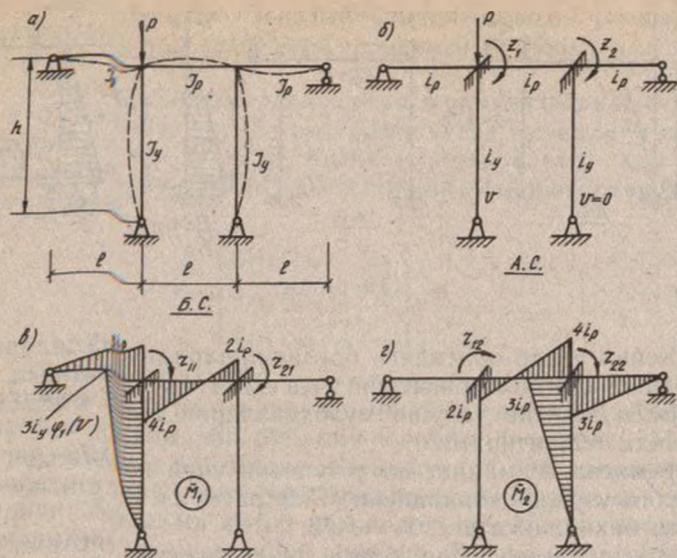
$\bar{M}_1$ эпюрасидан реакциянинг қийматини топамиз:

$$r_{11} = H_1 + H_2 = \frac{3i_1}{l} \eta(v) + \frac{3i_2}{l} = 0; i_2 = \frac{1}{2}i_1.$$

Бу ердан $\eta_1(v) = -0,333$; 13.3- жадвалдан $v_{kp} = 1,81$.

Критик куч

$$P_{kp} = v_{kp}^2 \frac{EJ_1}{l^2} = 3,28 \frac{EJ_1}{l^2}.$$



13.10- расм

Ҳисобии узунлик

$$l_0 = \frac{\pi}{v_{kp}} l = \frac{3,14}{1,81} l = 1,73l.$$

2- мисол. Шаклда кўрсатилган озодмас рама учун критик қўи ва ҳисобий узунлик аниқланиши керак (13.10- расм, а).

Раманинг устунчаси, ригели ҳамда инерция моментлари орасидаги боғланиш қуйидагича: $l = 2/3 h$; $J_p = 2J_y$; $i_p = 3i_y$. Асосий система ва бирлик эпюралар 13.10- расм, б, в, г да тасвирланган. Раманинг критик ҳолат тенгламаси

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Бирлик эпюралардан фойдаланиб, эластик реакция-ларни аниқлаймиз:

$$r_{11} = 3i_y \varphi_1(v) + 3i_p + 4i_p = 3i_y [\varphi_1(v) + 7];$$

$$r_{12} = 3i_y + 3i_p + 4i_p = 24i_y;$$

$$r_{12} = r_{21} = 2i_p = 6i_y; \quad v = h \sqrt{p/EI_y}.$$

Топилган кийматларни тенгламага қўямиз:

$$D = 3i_y [\varphi_1(v) + 7] \cdot 24i_y - 6 \cdot 6i_y^2 = 0,$$

бу ердан $\varphi_1(v) = -6,5$.

13.3- жадвалдан $v_{kp} = 4,29$. Бунга мос бўлган критик куч $P_{kp} = v_{kp}^2 \frac{EJ_y}{h^2} = 18,4 \frac{EJ_y}{h^2}$,

ҳисобий узунлик

$$h_0 = \frac{\pi}{v_{kp}} h = \frac{3,14}{4,29} h = 0,732h$$

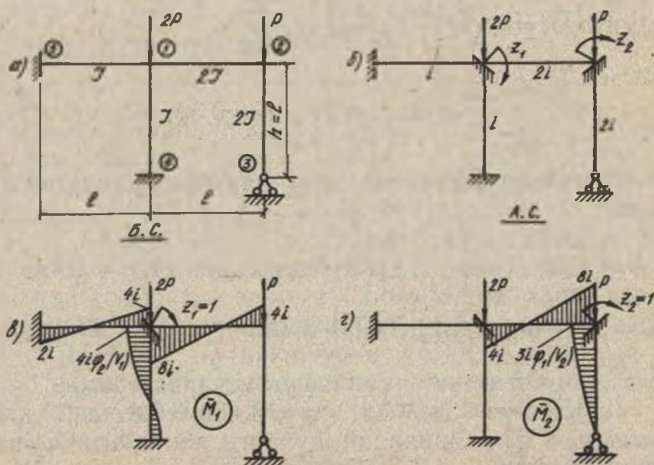
бўлади.

3- мисол. 13.11- расм, а да тасвирланган раманинг устунларига қўйилган кучнинг критик киймати аниқлансин.

Мазкур раманинг асосий системаси ва бирлик эпюралари (M_1, M_2) 13.11- расм, б, в, г да кўрсатилган. Тугунларга қўйилган куч рамада эгувчи момент ҳосил қилмайди, шунинг учун $M_p = 0$ бўлади. У ҳолда кўчиш усулининг каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$z_1 r_{11} + z_2 r_{12} = 0;$$

$$z_1 r_{12} + z_2 r_{22} = 0.$$



13.11- расм

Ушбу тенгламалар системаси икки ечимга эга:

а) $z_1=0; z_2=0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йукотмайди.

б) $z_1 \neq 0; z_2 \neq 0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йукотади.

Ана шу шартдан келиб чикиб критик кучнинг қиймати-ни аниқлаймиз. Бу шарт қаноатлантирилиши учун юкоридаги тенглама коэффициентларидан тузилган аниқловчи нолга тенг бўлиши керак:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Охирги тенглама устуворлик тенгламаси деб аталади.

M_1 ва M_2 эпюраларидан каноник тенглама коэффициентларини аниқлаймиз:

$$r_{11} = 4i + 8i + 4i\varphi_2(v_1) = 12i + 4i\varphi_2(v_1);$$

$$r_{12} = r_{21} = 4i;$$

$$r_{22} = 8i + 3i\varphi_1(v_2).$$

$\varphi_2(v_1)$ ва $\varphi_1(v_2)$ сингари мураккаб функциялар махсус китобларда бериладиган жадваллардан топилади (бизда 13.3- жадвал), v_2 параметрини v_1 оркали ифодалаймиз:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{2P}{EI}}; v_2 = l \sqrt{\frac{P}{2EI}};$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 2; v_1 = 2v_2; v_2 = 0,5v_1.$$

Топилган коэффициентларни устуворлик тенгламасига қўямиз:

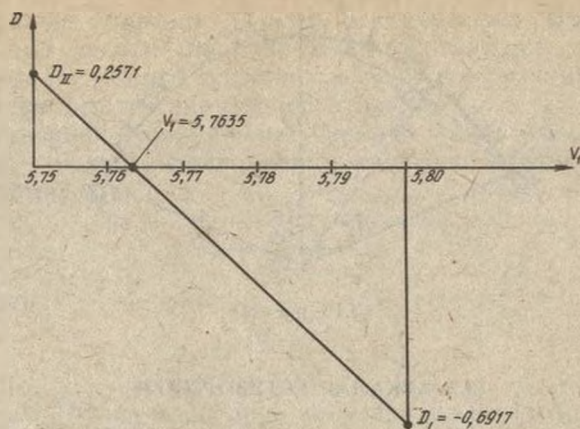
$$D = [12i + 4i\varphi_2(v_1)] [8i + 3i\varphi_1(v_2)] - (4i)^2 = 0 \text{ ёки}$$

$$D = [3 + \varphi_2(v_1)] [2,6667 + \varphi_1(0,5 - v_1)] - 1,3333 = 0.$$

Тенгламани кетма-кет яқинлашув усулида ечамиз.

1 яқинлашув. $v_2 = 2,9$; $v_1 = 2 \cdot 2,9 = 5,8$ деб қабул қиламиз ва 13.3- жадвалдан шуларга мос бўлган φ_1 ва φ_2 ни аниқлаймиз:

$$\varphi_1(2,9) = 0,2195; \varphi_2(5,8) = -2,7777.$$



13.12- расм

Буларни устуворлик тенгласига кўямиз:

$$D_1 = (3 - 2,7777) \cdot (2,6667 + 0,2195) - 1,3333 = -0,6917.$$

Чиккан киймат нолдан анча фарк килади. Шунинг учун иккинчи яқинлашувни бажарамиз.

II яқинлашув. $v_2 = 2,875$; $v_1 = 2,875 \cdot 2 = 5,75$ деб қабул киламиз.

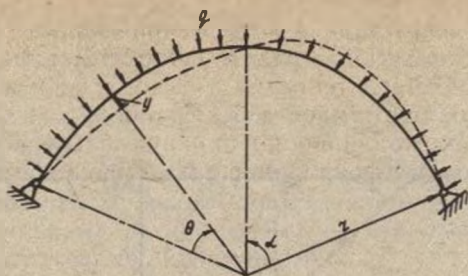
13.3- жадвалдан $\varphi_1(2,875) = 0,2388$; $\varphi_2(5,75) = -2,4526$. Устуворлик тенгласи.

$$D_{II} = (3 - 2,4526) \cdot (2,6667 + 0,2388) - 1,3333 = 0,2571.$$

Иккита яқинлашувдан кўриниб турибдики, устуворлик тенгласининг ечими (илдизи) $v_1 = 5,75$ билан $v_1 = 5,8$ оралиғида ётади. Масофа кичик бўлгани учун бу ораликда $D(v_1)$ функциясини чизикли деб қабул қилса бўлади. Бундай вазият тенглама ечимини график усулда аниқлаш имконини беради (13.12- расм). Маълум масштабда горизонтал ўққа v_1 нинг кийматлари, вертикал ўққа D_1 ва D_{II} нинг кийматлари ўлчаб қўйилади ва ўзаро туташтирилади. Туташтирувчи чизик горизонтал ўқни кесиб ўтган нукта тенгламанинг илдизи бўлади, яъни v_1 нинг биз излаётган киймати бўлади: $v_1 = 5,7635$.

Критик куч

$$P_{кр} = \frac{5,7635^2 EJ}{l^2} = 33,218 \frac{EJ}{l^2}$$



13.13- расм

13.7. АРКАЛАР УСТУВОРЛИГИ

Аркаларнинг энг содда вакили — айлана бўйлаб чизилган икки шарнирли аркани кўриб ўтамиз. Аркага текис ёйилган, радиус бўйлаб йўналган юк қўйилган (13.13- расм). Биқирлиги EI — ўзгармас. Агар $q < q_{кр}$ бўлса, арканинг барча кесимларида бир хил кийматга эга бўлган бўйлама куч N ҳосил бўлади. Арка ўкига тик йўналган кўчишни y деб белгиласак, устуворлик бўзилганда бўйлама кучдан ҳосил бўладиган момент $M = Ny$ бўлади. Бўйлама куч билан радиал юк орасидаги боғланиш $N = qr$ кўринишида ифодаланади.

Арка эгилган ўкининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + k^2 y = 0;$$

бу ерда

$$k^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI}.$$

Дифференциал тенгламанинг ечими

$$y = A \cos k\theta + B \sin k\theta$$

бўлади. Бу ерда θ — радиал бурчак.

Устуворлик тенгламасига эга бўлиш учун қуйидаги чегаравий шартларни қабул қиламиз:

$$\theta = 0; y = 0;$$

$$\theta = \alpha; y = 0.$$

Биринчи шартдан $A=0$, иккинчисидан $B\sin k\alpha = 0$ келиб чиқади. Бу ерда $B \neq 0$ бўлганидан, $\sin k\alpha = 0$ бўлади. Охириги тенглама устуворлик бузилишининг характеристик тенгламаси деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи шакли учун $k\alpha = \pi$ бўлади. Бундан фойдаланиб минимал критик юкни аниқлаймиз:

$$1 + \frac{qr^3}{EI} = \frac{\pi^2}{\alpha^2},$$

бу ердан

$$q_{кр} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right).$$

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, яъни арка ярим айлана шаклида бўлса,

$$q_{кр} = \frac{3EI}{r^3} \text{ бўлади.}$$

Аркаларнинг бошқача турларини текширганда ҳам мувозанатнинг тегишли дифференциал тенгламасига эга бўлиш мумкин. Аммо уларнинг ечими бирмунча мураккаброк бўлади. Шунинг учун ҳам уларни ечишда тақрибий усулларни қўллаш мақсадга мувофиқдир.

14- бoб

ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ АСОСЛАРИ

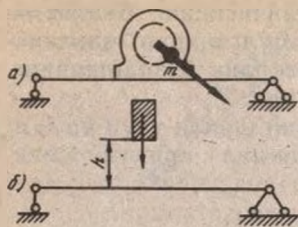
14.1. ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИНING ВАЗИФАЛАРИ ВА АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Иншоотлар динамикаси қурилиш механикасининг махсус бўлими бўлиб, унда иншоотларга динамик кучларнинг таъсири кўриб ўтилади.

Иншоот массаларида тезланиш уйғотадиган кучлар динамик кучлар деб аталади. Иншоот қисмларига аста-секин қўйиладиган кучлар статик кучларни ташкил этади. Динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган кучланиш, деформация ва кўчишлар вақт ўтиши билан ўзгариб туради. Статик кучлар таъсирида эса бундай ўзгаришлар содир бўлмайди.

Динамик кучларнинг қуйидаги хиллари мавжуд:

1. **Қўзғалмас даврий кучлар.** Бундай кучлар иншоотнинг бирор ерига ўрнатилган, айланувчи қисмида



14.1-расм

мувозанатлашмаган массаси бўлган механизмлар таъсирида вужудга келади (14.1-расм, а).

Агар даврий кучлар синус ёки косинус қонуни бўйича бетўхтов таъсир этса, у ҳолда бундай кучлар вибрацион ёки гармоник кучлар деб аталади.

2. **Зарбий куч.** Иншоотга (14.1-расм, б) зарб билан

урилувчи механизмлар бундай кучга мисол бўла олади.

3. **Киска муддат таъсир этувчи кучлар (импульслар).** Бундай кучлар бирдан пайдо бўлиб, бирдан сўнади. Портлаш натижасида ҳосил бўладиган куч киска муддат таъсир этувчи куч ҳисобланади.

4. **Қўзғалувчи кучлар.** Иншоот устида ҳаракатланувчи транспорт воситалари қўзғалувчи кучларни ҳосил қилади.

5. **Сейсмик кучлар.** Зилзила жараёнида бино ва иншоотларга таъсир этувчи кучлардир.

Сейсмик кучлар катталигини тўғри аниқлай билиш иншоотларнинг сейсмик мустаҳкамлигини таъминлашда катта аҳамиятга эга.

Динамик кучлар ўз табиатига кўра статик кучларга нисбатан бирмунча мураккаб бўлади, чунки бундай кучлар катталиги, йўналиши ва қўйилиш нуктаси билангина эмас, вақт бўйича ўзгариши билан ҳам характерлидир. Шунинг учун ҳам иншоотларни динамик кучлар таъсирига ҳисоблаш мураккаб жараён саналади.

Иншоотлар динамикаси қуйидаги икки асосий масала:

- 1) динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган максимал деформация ва кучланишларни аниқлаш;
- 2) иншоотда етарли даражада кичик деформация ва кучланиш ҳосил бўлишини таъминлидиган геометрик ўлчамлар танлаш масаласи билан шуғулланади.

Тебраниш турлари. Тебраниш турлари бениҳоя кўп бўлиб, инсон юрагининг уриши, ўпканинг нафас олиши, совукдан калтираш, ёруғлик ва товуш тўлқинлари, кадам ташлаб юришимиз, электр қўнғироғининг жиринглаши, автомобиль ҳаракати, ер кимирлаш каби ҳодисаларнинг барчаси тебранишга жонли мисол бўла олади.

Бироқ мазкур курсимизнинг мақсади тебраниш ҳодисаларини тўлиқ, ҳар тарафлама ўрганиш эмас, балки муҳандиснинг меҳнат фаолиятида кўп учрайдиган механик тебранишларни таҳлил этишдан иборатдир.

Тинч турган механик системага (масалан, балка ёки математик тебрангичга) ташкаридан куч таъсир эттири-
либ, шу захоти олинса, система тебранма ҳаракатланади.
Системанинг бундай тебраниши эркин ёки хусусий
тебраниш деб аталади.

Агар тебранаётган система доим қўзғатувчи куч
таъсири остида бўлса (14.1-расм, а), системанинг бундай
тебраниши мажбурий тебраниш деб аталади.

Системанинг эркин тебранишига тикловчи (эластик)
кучлар билан бирга қаршилик кўрсатувчи (диссипатив¹)
кучлар ҳам таъсир этади. Диссипатив кучлар тебра-
нишнинг сўнишига сабаб бўлади. Системаларнинг бу хил
тебранишлари сўнувчи тебранишлар деб аталади.
Муҳитнинг қаршилиги, ички ишқаланиш кучлари, та-
янчлардаги қуруқ ишқаланиш диссипатив кучлардир.

Айрим масалаларни тақрибан ечишда диссипатив
кучлар эътиборга олинмайди. Тебранишнинг бундай тури
сўнмайдиган эркин тебраниш деб ном олган.

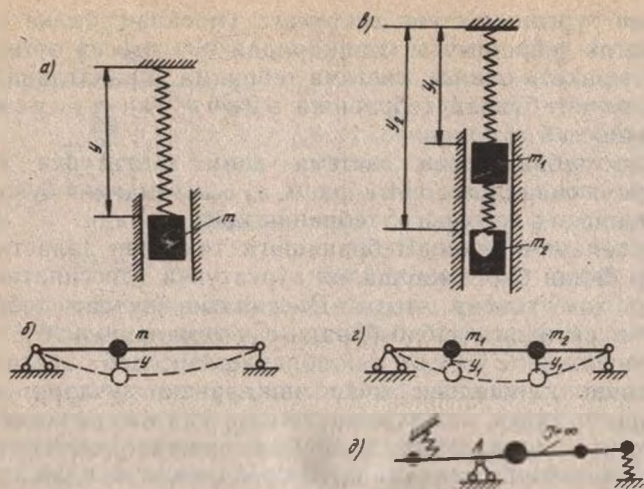
Маълум вақт ичида узлуксиз такрорланиб турадиган
тебранишлар даврий тебранишлар деб аталади. Тўла
тебраниш учун кетган вақт тебраниш даври (Т) дейила-
ди.

Системанинг эркинлик даражаси. Иншоотлар статика-
сидаги каби динамикасида ҳам «система» деганда стер-
женли системалар, яъни иншоотлар тушунилади. Динамик
ҳисоблаш жараёнида иншоотнинг динамик ҳисоблаш
тарҳидан фойдаланилади. Динамик ҳисоблаш тарҳларида
иншоот массаси айрим нукталарга тупланган ёки система
бўйлаб тарқалган деб қаралади. Массаларнинг қандай
олинишига қараб системанинг эркинлик даражаси турлича
бўлади.

Система деформацияланганда барча массаларнинг
ҳолатини (ўрнини) белгиловчи геометрик параметрлар
сони системанинг эркинлик даражаси деб аталади.

Вазнсиз пружинага осилган m массанинг (14.2-расм,
а) эркинлик даражаси бирга тенг, чунки унинг ҳолатини
биргина параметр (y — координатаси) билан аниқлаш
мумкин. Худди шундай бир массали балканинг (14.2-расм,
б) эркинлик даражаси ҳам бирга тенг. 12-расм, в ва
г, ларда эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системалар

¹ *Диссипатив* — латинча сочилиш деган маънони англатади.

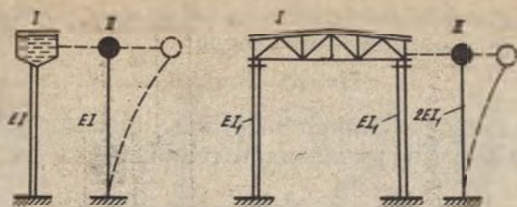


14.2- расм

тасвирланган. Тўпланма (йиғиқ) массалар бикирлиги чексиз катта стержень устида жойлашган бўлса, системанинг ҳолати стерженьнинг ҳолати билан белгиланади. Масалан, 14.2- расм, д даги системанинг эркинлик даражаси, масса ва пружиналарнинг сонидан катъи назар, бирга тенг бўлади. Чунки массаларнинг ҳолатини стерженьнинг А таянчи атрофида оғиш бурчаги билан белгилаш мумкин.

Аслида реал конструкцияларда масса бутун элемент ҳажми бўйлаб ёйилган бўлади. Бу эса массаларнинг сони чексиз кўп демакдир. Шундай экан, массаларнинг ҳолатини белгиловчи параметрлар ҳам чексиз кўп бўлади. Шунга кўра гап реал конструкциялар устида борганда, уларнинг эркинлик даражаси чексиз кўп деб юритилади. Бироқ, системанинг эркинлик даражаси канча кўп бўлса, ҳисоб ишлари шунча мураккаблашади. Шу сабабли кўпинча техник ҳисобларда, унча жузъий бўлмаган хатоликка йўл қўйилган ҳолда, системанинг эркинлик даражаси чекли равишда олинади. Бунда массалар системанинг айрим нукталарига, масалан, иншоотдаги оғир юклар жойлашган ерларга тўпланади.

14.3- расмда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг конструкцияси ва ҳисоблаш тарҳи тасвирланган. Шаклдаги сув босими минораси ва бир каватли рамада масса асосий юк жойлашган ерга тўпланган.



14.3-расм

14.2. ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ УСУЛЛАРИ

Иншоотлар динамикасида статик ва энергетик усул деб аталувчи икки асосий усул кенг қўлланилади.

Статик усулнинг моҳияти шундан иборатки, бунда динамика масалалари Даламбер қондаси асосида шаклан статика масалаларига келтирилади, яъни динамика тенгламалари статика тенгламаларига келтирилади.

Даламбер қондасига кўра динамиканинг мувозанат тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X + \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= 0 \\ \Sigma Y + \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= 0 \\ \Sigma Z + \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14.1)$$

бу ерда m — мувозанати текширилатган жисмнинг массаси; x, y, z — жисмнинг координата ўқлари бўйлаб қизиқли қўчишлари; $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ — жисмга таъсир этаётган кучлар проекцияларининг йиғиндиси, қавсдаги ҳадлар массанинг инерция кучини ифодалайди.

Вакт бўйича олинган ҳосилани нуқта билан белгиласак, тенглама қуйидаги содда кўринишни олади:

$$\Sigma X - m\ddot{x} = 0; \Sigma Y - m\ddot{y} = 0; \Sigma Z - m\ddot{z} = 0. \quad (14.2)$$

Динамика масалаларини ҳал этишда энергетик усулдан кенг фойдаланилади. Бу усул системанинг тебранма ҳаракатида энергиянинг сақланиш қонунига асосланади.

Мазкур конунга биноан потенциал Π ва кинетик K энергиялар йиғиндиси ўзгармас микдордир.

$$\Pi = K = \text{const.}$$

Системанинг потенциал энергияси қурилиш механикасининг қуйидаги формуласидан топилади:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{EF} + \sum \int_0^l \mu \frac{Q^2 dx}{GF} \right], \quad (14.4)$$

бу ерда M, N, Q — эгувчи момент, бўйлама ва кўндаланг кучлар; J, F — инерция моменти ва кўндаланг кесим юзи; E, G — сиқилиш (чўзилиш) ва силжийшдаги эластиклик модули; μ — кўндаланг кесимнинг шаклига боғлиқ бўлган коэффициент (бу коэффициент уринма кучланишларни кесим бўйлаб нотекис тарқалишини ҳисобга олади).

Системанинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$K = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \sum \int m(x) dx \frac{v^2}{2}, \quad (14.5)$$

бу ерда v — тезлик; m_i — йиғиқ массалар; $m(x)$ — ёйиқ массалар.

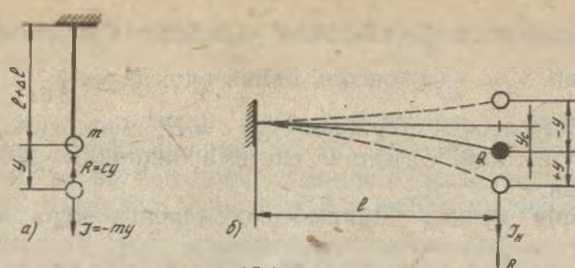
Формуланинг биринчи хади йиғиқ массаларга, иккинчи хади эса ёйиқ массаларга тегишлидир.

15- боб

ЭРКИНЛИҚ ДАРАЖАСИ БИРГА ТЕНГ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

15.1. СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Системанинг эркин тебранишини абстракт ва реал ҳоллар учун қуриб ўтамиз. Абстракт ҳолда система тебранишига қаршилик кўрсатувчи кучлар эътиборга олинмайди, реал ҳолда эса тебранма ҳаракатни сўнишга олиб келувчи қаршилик кучлари ҳисобга олинади.



15.1-расм

Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол. Бир массали эластик системаларнинг (15.1-расм, а ва б) вертикал йўналишдаги эркин тебранишини кўриб ўтамиз. Эластик системаларнинг мувозанати бир зумга қўйиб олинган ташқи куч таъсири остида бузилди деб фараз этайлик. Бунинг оқибатида стерженли системалар эркин тебранма ҳаракатга келади.

Стерженлар учига вазни $Q = mg$ бўлган юк қўйилган. m — юк массаси, g — эркин тушиш тезланиши. Юк Q таъсирида балка $y_{ст}$ масофага солкиланади (15.1-расм, б) Вертикал стержень эса Δl масофага оғади, натижада улар **тикловчи** (қайтарувчи) куч R ва **инерция** кучи J_n таъсирида бўлади. Мувозанат тенгламасини тузишда пастга йўналган куч, кўчиш, тезлик ва тезланишнинг ишорасини мусбат деб қабул қиламиз.

Тикловчи куч R системанинг эластик реакция кучи бўлиб, масса m статик мувозанат ҳолатдан четга чиққанда, уни дастлабки вазиятига қайтаришга интилади. Бу куч кўчишга нисбатан тескари йўналганлиги учун унинг ишораси манфий бўлади. Тикловчи куч масса тўпланган нуктанинг солқилиги y га пропорционал бўлади, яъни.

$$R = -cy. \quad (15.1)$$

Пропорционаллик коэффициент c масса тўпланган нукта бирлик кўчиш олганда балкада ҳосил бўладиган реакция кучидир. Бу кучнинг микдори системанинг эластик ва геометрик характеристикаларига боғлиқ бўлиб, кўчиш тенгламасидан фойдаланиб аниқланади:

$$c\delta_{11} = 1, c = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (15.2)$$

бу ерда δ_{11} — масса тўпланган нуктанинг бирлик куч таъсирида кўчиши.

Масалан, вертикал стержень учун бирлик куч таъсири-
да кўчиши $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l}{EF}$; консоль балка учун $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{3EI}$ бўла-
ди. (15.2) га асосан стержень учун $c = EF:l$ ва балка учун
 $c = 3EI:l^3$ бўлади. Баъзан c система бикирлиги деб ҳам
юртилади.

Инерция кучи J Даламбер қондасига кўра масса
 m билан тезланишнинг кўпайтмасига тенг. Тезланишни
аниқлаш учун эса кўчиш y дан вақт t бўйича икки марта
хосила олинади. Инерция кучи тезланишга нисбатан
тескари йўналганлиги учун ишораси манфий олинади:

$$J_n = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \ddot{y}. \quad (15.3)$$

Бир массали системанинг динамик мувозанат шартини
ёзамиз

$$\Sigma Y = J_n + R = 0.$$

Кўчишлар нолдан эмас, статик мувозанат ҳолатидан
бошлаб ҳисобланганлиги (15.1-расм, б га қаранг)
сабабли Q куч тенгламага киритилмаган. R ва J_n нинг
(15.1) ва (15.3) да келтирилган ифодасини тенгламага
қўямиз, тенглама ҳадларини m га бўлиб, ишорасини
ўзгартирамиз:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0. \quad (15.4)$$

Ҳосил бўлган иккинчи тартибли чизикли бир жинсли
дифференциал тенглама қаршилик ҳисобга олинмаганда
бир массали системанинг сўнмайдиған эркин тебранишини
ифодалайди.

$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

деб олсак, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (15.5)$$

Бу ерда $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ система тебранишининг доиравий
такрорлиги (частотаси).

(15.5) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (15.6)$$

унинг ҳосиласи тебраниш тезлигини ифодалайди:

$$\dot{y} = v = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (15.7)$$

C_1 ва C_2 доимий сонлар бошланғич шартлардан топилади. Тебранишнинг $t=0$ лаҳзасида бошланғич солкилик y_0 ва бошланғич тезлик v_0 маълум деб фараз этайлик. У ҳолда (15.6) ва (15.7) тенглама асосида

$$C_1 = y_0 \text{ ва } C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

топилади.

Буларни (15.6) га қўйсак, тебранишнинг исталган лаҳзаси учун, яъни t нинг ихтиёрий қиймати учун дифференциал тенгламанинг ечимига эга бўламиз:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (15.8)$$

Қуйидаги белгилашни киритиб

$$y_0 = A \sin \lambda; \quad \frac{v_0}{\omega} = A \cos \lambda$$

тенгламани янада ихчамлаштирамиз:

$$y_0 = A \sin \lambda \cos \omega t + A \cos \lambda \sin \omega t \quad (15.9)$$

ёки

$$y_0 = A \sin(\omega t + \lambda), \quad (15.10)$$

бу ерда A — амплитуда, α — бошланғич фаза.

(15.10) тенглама эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг даврий хусусий (эркин) тебранишини ифодалайди. Унинг графиги 15.3-расм, а да тасвирланган.

Давр ва такрорлик орасидаги боғланишни кўриб чиқамиз. Агар вақтнинг t лаҳзасида солкилик y бўлса,

$$t_1 = t + \frac{2\pi}{\omega}$$

ёки

$$\omega t_1 = \omega t + 2\pi$$

дақиқада ҳам (15.10) га биноан ушанча солкилик ҳосил бўлади. Бундан кўринадики, тебраниш даври, яъни тебранишнинг бир цикли учун кетадиган вақт

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15.11)$$

бўлади.

Агар T вақт ичида система битта тебрана, 2π с ичида ω марта тебранади; ω нинг доиравий такрорлик деб

аталишининг сабаби ҳам шунда. Бир секунддаги тебранишлар сони t техник такрорлик деб аталади:

$$t = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{c} \right) \quad (15.12)$$

Кўриб ўтилган тенгламалар асосида такрорлик ва давр учун қуйидаги формулаларни берамиз: доиравий такрорлик

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_n}} = \sqrt{\frac{a}{my_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} \left(\frac{1}{c} \right); \quad (15.13)$$

давр

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m\delta_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_{\text{ст}}}{g}} (c). \quad (15.14)$$

Бир минутдаги тебранишлар сони қуйидаги формуладан аниқланади:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}}.$$

Агар $g = 981 \approx (10\pi)^2$ деб олсак, амалда кенг қўлланиладиган

$$n = \frac{300}{\sqrt{y_{\text{ст}}}} \quad (15.15)$$

формула келиб чиқади. Бунда $y_{\text{ст}}$ см да ўлчанади.

Қаршилик кучлари ҳисобга олинган ҳол

Абстракт ҳолда системанинг эркин тебраниши ўзгармас амплитудада бетўхтов давом этишини кўриб ўтдик. Бирок амалда эркин тебранишлар сўнувчан бўлади, яъни тебраниш амплитудаси тўхтовсиз камая бориб, нолга интилади. Реал конструкцияларнинг тебранишига тикловчи R ва инерция кучлари J_n дан ташқари қаршилик кучлари F ҳам таъсир этади (15.2-расм).

Қаршилик кучи турли ташки ва ички сабаблар: ташки муҳит қаршилиги, элементларнинг туталиш жойлари ва таянчлардаги ишқаланишлар, материалнинг ички ноэластик қаршилиги каби сабаблар таъсирида вужудга келади.

Қаршилик кучи тебраниш тезлиги y га пропорционал (бу фаразни 1890 йилда Фойгт киритган) ва ҳаракатга

карама-карши йўналган деб олинади: $F = -\beta y$. Бу ерда β — пропорционаллик коэффициент.

Қаршилик кучи ҳисобга олинганда системанинг динамик мувозанати тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$\Sigma y = C_y + F + R = 0.$$



15.2-расм

1. J , F ва R нинг қийматларини ўрнига қўйсақ,

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}y + \frac{c}{m}\dot{y} = 0 \quad (15.16)$$

келиб чиқади. Бу дифференциал тенглама қаршилик ҳисобга олинган ҳол учун системанинг эркин тебранишини ифодалайди.

$$2\alpha = \frac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \quad (15.16)'$$

деб белгилаб,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (15.17)$$

га эга бўламиз. Бу тенгламага мос характеристик тенглама

$$z^2 + 2\alpha z + \omega^2 = 0$$

қўринишида бўлиб, унинг илдизлари

$$z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad z_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

бўлади. Бу ерда $\alpha \geq \omega$ бўлиши мумкин.

1-ҳол: $\omega > \alpha$. Бу ҳолда илдизлар комплекс сонлар бўлиб:

$$z_1 = -\alpha + i\omega_1; \quad z_2 = -\alpha - i\omega_1; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

бўлади.

(15.17) тенгламанинг ечими қуйидаги қўринишга эга бўлади:

$$y = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t). \quad (15.18)$$

Бу ерда

$$\alpha = \frac{\beta}{2m} = \frac{\beta \delta_1 \omega^2}{2}.$$

(15.18) да келтирилган кавсдаги ифода даврий функциядир, чунки t га $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ микдорнинг кўшилиши

билан функциянинг киймати ўзгармайди.

Демак, сўнувчи эркин тебранишларни

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$$

даврили даврий тебранишлар деб аташ мумкин экан.

Агар $\alpha \rightarrow 0$ бўлса, яъни қаршилиқ кучи камая бориб нолга айланса, қаршилиқ ҳисобга олинмаган ҳолдаги давр келиб чиқади:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} < T_1.$$

Аввалгига ўхшаб, $A = C \cdot \cos \alpha$ ва $B = C \cdot \sin \alpha$ деб белгилаб олсак, (15.18) тенглама куйидаги ихчам кўринишга келади:

$$y = e^{-\alpha t} C \sin(\omega_1 t + \lambda), \quad (15.19)$$

бу ерда λ — бошланғич фаза бўлиб, массанинг ҳаракат бошидаги ғишини ҳисобга олади; $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ — бошланғич амплитуда;

$$tg \lambda = \frac{B}{A}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}}. \quad (15.20)$$

Курилиш конструкцияларида α доиравий такрорлик ω дан анча кичик бўлади. Шу сабабли (15.20) ни куйидагича олиш мумкин:

$$\omega_1 \approx \omega.$$

Сўнувчи эркин тебранишлар графиги 15.3-расм, б да тасвирланган.

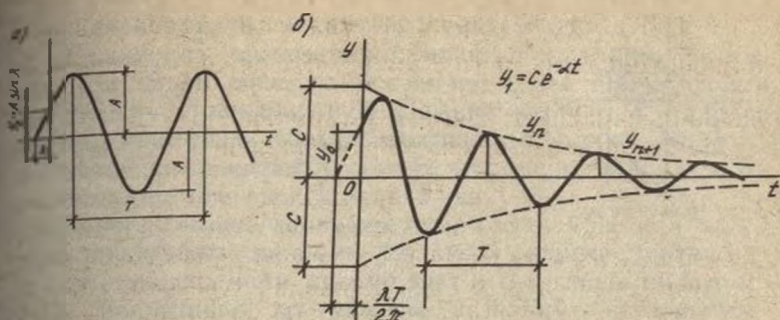
Сўниш жараёни амалда тебранишнинг логарифмик декременти ёки энергиянинг ютилиш коэффициенти ψ орқали ҳисобга олинади.

2-ҳол. $\alpha > \omega$ Характеристик тенгламанинг илдизлари хақиқий ва ҳар хил:

$$z_1 = -\alpha + CO_2 < 0; \quad z_2 = -\alpha - \omega_2 < 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Бу ҳол учун 15.17 тенгламанинг ечими

$$y = l^{-\alpha t} (A \sinh \omega_2 t + B \cosh \omega_2 t)$$



15.3-расм

бўлади. Бундай ҳолда ҳаракат тебранма характерга эга бўлмайди. Оғдирилган масса аста-секин ўзининг дастлабки вазиятига қайтади.

3- ҳол: $\alpha = \omega$.

Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг:

$$z_1 = -\alpha; z_2 = -\alpha.$$

(15.17) тенгламанинг интегралли

$$y = e^{-\alpha t} (A + Bt)$$

бўлади. Бу ҳолда ҳам ҳаракат нодаврий характерга эга.

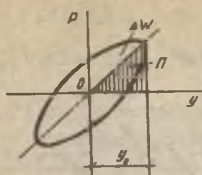
Умуман, тебраниш чекланиши зарур бўлган система-ларда $\alpha \geq \omega$ олинади.

Кетма-кет қўшни амплитудалар нисбатининг логарифми тебранишларнинг логарифмик декременти деб аталади ва қуйидагича ифодаланади:

$$\delta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha T_1. \quad (15.21)$$

$\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ нисбат сўниш коэффициентини деб аталиб, тебранишнинг сўниш тезлигини характерлайди.

Тебранишнинг сўнишини характерлайдиган микдорлардан яна бири энергиянинг ютилиш коэффициенти ёки сочилиш (диссипация) коэффициенти деб аталади ва ψ ҳарфи билан белгиланади. Бу коэффициент гистерезис сиртмоғи номи билан юритилади.



15.4- расм

ган графикдан аникланади (15.4-расм). Гистерезис сиртмоги ташки куч P ва деформация y орасидаги муносабатни ифодаловчи график бўлиб, системани юклаш ва юкдан бўшатиш жараёнида ҳосил бўлади. Идеал эластик материалларда юкланиш чизиги билан юкдан

бўшатиш чизиги устма-уст тушади, гистерезис сиртмогининг юзаси полга тенг бўлади, яъни юкланиш чоғида материалда тўпланган энергия юк олингандан кейин системани дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла-тўқис сарф бўлади. Ҳақиқатда эса юклаш чоғида реал материалларда тўпланган энергия юк олингандан сўнг тўла қайтмасдан, яъни материални дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла сарф бўлмасдан, энергиянинг бир қисми эластик бўлмаган (қолдик) деформацияга сарф бўлади. Натижада юкланиш ва юкни олиш чизиклари орасида юза ҳосил бўлади. Қолдик деформацияга сарф бўлган энергиянинг миқдори гистерезис сиртмогининг юзи ($\Delta\Pi$) га тенг бўлади. OAB учбурчагининг юзи эса тебраниш чоғидаги системанинг потенциал энергияси Π га тенгдир. Қуйидаги нисбат:

$$\psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi} \quad (15.22)$$

энергиянинг ютилиш коэффициенти деб аталади.

Чексиз қисқа вақт dt мобайнида энергиянинг ютилиши $d\Pi$, T вақт ичида эса

$$\psi = - \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{d\Pi}{\Pi}$$

бўлади. Бундан

$$\psi = \ln\Pi(t_1) - \ln\Pi(t_1+T) = \ln \frac{\Pi_n}{\Pi_{n+1}}$$

келиб чиқади.

$$\Pi_n = \frac{cy_n^2}{2} \text{ ва } \Pi_{n+1} = \frac{cy_{n+1}^2}{2}$$

экан.нинг ҳисобга олсак,

$$\psi = 2 \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} \text{ ёки}$$

$$\psi = 2\delta \quad (15.23)$$

бўлади.

δ ва ψ тажриба йўли билан аниқланади.

Мисол. 15.1- расм, а да кўрсатилган балканинг ўртасига ўрнатилган двигателнинг вазни $Q=4$ кН. Узунлиги 3 м бўлган пўлат балка ($E=2,1 \cdot 10^8$ кН/м²) 12- номерли кўштаврдан ($J_x=350 \cdot 10^{-8}$ м⁴) ясалган. Балканинг хусусий оғирлигини ҳисобга олмай, тебраниш такрорлиги ва даври аниқлансин.

Ечиш. Двигатель оғирлигидан балка ўртасида ҳосил бўладиган соқкилик:

$$y_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Тебраниш такрорлиги

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 48 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 350 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3^3}} = 56,6 \text{ с}^{-1}.$$

Тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{56,6} = 0,11 \text{ с}.$$

Бир минутдаги тебранишлар сони

$$n = \frac{60}{T} = 545,5.$$

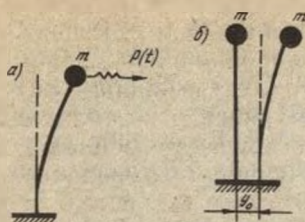
15.2. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР

(Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол)

Олдинги бобда системанинг эркин тебранишларини кўриб ўтган эдик, унда бутун тебраниш жараёнида системага ташки (уйғотувчи) кучлар таъсир этмаслиги қайд этилганди (тебраниш бошидаги таъсир бундан мустасно). Мазкур бобда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системаларга вақтнинг ўтиши билан ўзгариб боровчи кучлар таъсирини кўриб чиқамиз.

Бундай кучлар уйғотувчи кучлар, улар таъсиридаги тебранишлар эса мажбурий тебранишлар деб аталади.

15.5- расмда мажбурий тебранишларнинг икки хили тасвирланган. Уларнинг бирида (15.5- расм, а) m массанинг тебраниши уйғотувчи ташки куч $P(t)$ таъсирида,



15.5-расм

иккинчисиди эса (15.5-расм, б) таянчининг қўзғалиши натижасида ҳосил бўлади. Мажбурий тебраниш масалаларида тебранишнинг амплитудасини аниқлаш асосий вазифа ҳисобланади, чунки тебранаётган иншоотда ҳосил бўладиган кучланишлар ана шу амплитудаларга боғлиқдир.

Мажбурий тебранишларнинг умумий тенгламаси ва унинг ечими. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системага

$$P = P(t)$$

уйғотувчи куч таъсир этаяпти деб фараз қилайлик (15.6-расм).

Вактнинг t лаҳзасида массага таъсир этувчи кучлар шаклда кўрсатилган. Бу ҳол учун ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$-c(y + y_{ct}) + mg + P(t) = m\ddot{y},$$

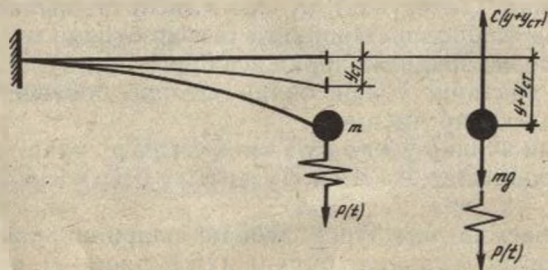
агар $mg = cy_{ct}$ ва $\omega^2 = \frac{c}{m}$ эканлигини ҳисобга олсак, мажбурий тебранишнинг асосий тенгламаси

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m} \quad (15.24)$$

кўринишни олади.

Оғирлик mg ва статик реакция cy_{ct} эътиборга олинмаган тақдирда ҳам, яъни куч ва кучишлар системанинг статик мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобланганида ҳам худди ана шу (15.24) натижага келган бўлур эдик.

Бир жинсли бўлмаган (15.24) тенгламанинг ечимини икки: 1) эркин тебраниш тенгламасининг (бир жинсли



15.6-расм

тенглама) интегралли ва 2) берилган тенглама (15.24) нинг бирор хусусий интегралли йиғиндисини кўринишида излаш зарур. Ҳар бир конкрет ҳол учун тенгламанинг ўнг томонига мос хусусий ечим танлаш ўрнига, ихтиёрий доимийларни вариациялаш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, шу йўл билан уйғутувчи куч исталган конун бўйича ўзгарганда, тегишли ечимга эга бўламиз.

Бу усулга кўра (15.24) тенгламанинг хусусий ечими

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (15.25)$$

кўринишида изланади. Бирок бу ҳолда C_1 ва C_2 нинг қийматлари ўзгарувчи деб қаралиши керак. Шундай қилиб, $y(t)$ функциясини аниқлаш масаласи $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини аниқлаш масаласи билан алмаштирилади. Ихтиёримизда фақат биргина (15.24) тенглама бўлганлиги сабабли $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини яна бир ихтиёрий тенглама билан боғлаймиз. Бунинг учун (15.25) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t + \dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t$$

ҳамда $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ ни қуйидаги ифода билан боғлаймиз:

$$\dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t = 0. \quad (15.26.)$$

У ҳолда юқоридаги тезликни аниқлаш тенгламаси бирмунча соддалашади:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t.$$

Тезланишни топамиз:

$$\ddot{y} = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t + C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t \quad (15.27)$$

(15.25) ва (15.27) ифодаларни (15.24) тенгламага қўйиб,

$$\dot{C}_1 \cos \omega t - \dot{C}_2 \sin \omega t = -\frac{1}{m\omega} P(t) \quad (15.28)$$

ни ҳосил қиламиз.

(15.26) ва (15.28) тенгламалардан қуйидаги ҳосилаларни аниқлаймиз:

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{m\omega} P(t) \cos \omega t; \quad \dot{C}_2 = -\frac{1}{m\omega} P(t) \sin \omega t.$$

Уни интеграллаб:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \cos \omega \tau d\tau + B_1 \\ C_2 &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau + B_2 \end{aligned} \right\} \quad (15.29)$$

ни топамиз. Бу ерда B_1 ва B_2 бошланғич шартларга боғлиқ бўлган доимий сонлардир.

Интеграллаш жараёнида ўзгариб боровчи вақтни o дан t гача, интегралнинг ўзгармас деб қаралувчи, юқори чегараси t дан фарқ қилиш учун τ деб белгиланиш қабул қилинган.

(15.29) ифодани (15.25) тенгламага қўйиб, берилган (15.24) тенгламанинг умумий интегралига эга бўламиз:

$$y = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t P(\tau) \cos \tau d\tau + \cos \omega t \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] + B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$

$\sin \omega t$ ва $\cos \omega t$ ни интеграл остига киритиб ихчамлаштирсак, масаланинг умумий ечими келиб чиқади:

$$y = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.30)$$

Бундан ҳосила олиб, тезлик тенгламасига эга бўламиз:

$$\dot{y} = B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t + \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.31)$$

B_1 ва B_2 доимийларнинг қиймати ҳаракат бошидаги шартларга боғлиқ. Агар ҳаракат бошида, яъни $t = 0$ бўлганда $y = y_0$, $\dot{y} = v_0$ бўлса, (15.30) ва (15.31) тенгламалардан

$$B_1 = \frac{v_0}{\omega} \text{ ва } B_2 = y_0$$

келиб чиқади.

У ҳолда юқоридаги ечим қуйидаги кўринишни олади:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Бу ердаги дастлабки икки хад бошланғич кўчиш y_0 ва бошланғич тезлик v_0 таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди.

Бошланғич шартлар y_0 ва v_0 ноль бўлса, қуйидаги асосий формула келиб чиқади:

$$y = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (15.32)$$

Зарбий куч таъсиридаги мажбурий тебранишлар. Тинч ҳолатдаги системага вақтнинг τ лаҳзасида зарбий куч берилди дейлик. Бу лаҳзада системада кўчиш бўлмайди:

$$y(\tau) = 0,$$

бирок системада, ҳаракат миқдори конунига биноан, зарбий куч таъсирида

$$v(\tau) = \frac{S}{m}$$

тезлик ҳосил бўлади. Вужудга келган тебранишни эркин тебраниш деб қараш мумкин. У ҳолда кўчиш ва тезлик учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$y = A \sin(\omega t + \lambda);$$

$$v = y = A \omega \cos(\omega t + \lambda).$$

Ифодаларнинг чап томонига бошланғич шартларни, унг томонидаги t ҳарфи ўрнига τ ни қўйсак,

$$0 = A \sin(\omega \tau + \lambda),$$

$$\frac{S}{m} = A \omega \cos(\omega \tau + \lambda)$$

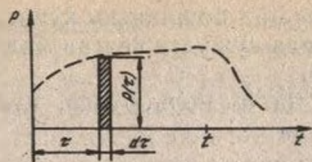
келиб чиқади. Бу тенгламалардан

$$A = \frac{S}{m\omega} \text{ ва } \lambda = -\omega\tau$$

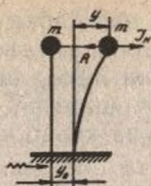
топилади. Буларни ўз ўрнига қўйсак, зарбий куч таъсир этган ҳол учун ҳаракат конуни келиб чиқади:

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (15.33)$$

Бу ҳолни уйғотувчи куч $P(\tau)$ таъсир этган ҳол билан боғлаймиз. Бунинг учун уйғотувчи кучни чексиз кичик



15.7- расм



15.8- расм

зарблар $P(\tau)d\tau$ нинг кетма-кетлиги деб фараз этамиз. (15.7- расм). Битта зарбий куч таъсирида вақтнинг $t \geq \tau$ лаҳзасида (15.33) формулага асосан

$$\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$$

кўчиш ҳосил бўлади.

Вақтнинг $0 \div t$ оралиғида зарбий кучларнинг кетма-кет таъсири остида ҳосил бўладиган кўчишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаш зарур. Бу эса (15.32) формулага олиб келади.

Замин тебранишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишлар. Мажбурий тебранишлар системанинг асоси (таянчи) кўзғалиши натижасида ҳам вужудга келиши мумкин (15.8- расм). Ер (бино замини) кимирлаганда бино ва иншоотларнинг тебраниши бунга мисол бўла олади.

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг таянчи кўзғалганида унга инерция кучи $J_n = -m\ddot{z}$ ва тикловчи куч $R = -cy$ таъсир этади.

Системанинг динамик мувозанат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{z} + cy = 0. \quad (15.34)$$

Система массасининг тўлиқ кўчиши таянчнинг кўчиши $y_0(t)$ ва массанинг таянчга нисбатан кўчиши $y(t)$ дан ташкил топади:

$$z = y_0 + y; \quad \ddot{z} = \ddot{y}_0 + \ddot{y}. \quad (15.35)$$

z нинг қийматини (15.34) тенгламага қўйиб, унинг барча ҳадларини m га бўлсак,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \quad (15.36)$$

келиб чиқади. Бу тенглама замин қўзғалишидан вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди. Бу тенглама ихтиёрий уйғотувчи куч $P(t)$ таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишлар тенгламаси (15.24) га ўхшашидир.

(15.36) тенгламанинг ечими йиғинди кўринишида ($y = y_1 + y_2$) ифодаланиши мумкин. Бунда y_1 бир жинсли тенгламанинг ечимидан топилади, бу эса эркин тебранишлар учун чиқарилган куйидаги ечимдан фойдаланиш имконини беради (15.10):

$$y_1 = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (15.37)$$

(15.36) нинг хусусий интеграли куйидаги кўринишга эга:

$$y_2 = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.38)$$

Шундай қилиб, (15.36) тенгламанинг ечими

$$y = A \sin(\omega t + \lambda) - \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (15.39)$$

бўлади.

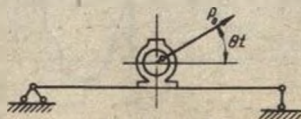
Гармоник куч таъсири. Резонанс. Саноат биноларида баъзан мувозанатлашмаган айланувчи қисми бўлган машиналар ўрнатилади (15.9- расм). Мувозанатлашмаган массанинг ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган марказдан қочма куч P таъсирида балка тебранади. Бу кучнинг вертикал ташкил этувчиси

$$P = P_0 \sin \Theta t \quad (15.40)$$

бўлади. Бу ерда Θ ротор айланишининг бурчак тезлиги. Формуладан кўриниб турибдики, уйғотувчи кучнинг балкага таъсири гармоник конун асосида ўзгаради.

Бундай куч таъсирида вужудга келадиган тебраниш жараёнини математик кўринишда ифодалаш учун (15.32) формуладан фойдаланамиз:

$$y = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin \Theta t \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad (15.41)$$



15.9- расм

$\omega \neq 0$ хол учун интегралнинг ечими

$$y = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

бўлади.

Бу формулага $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ва $y_{\text{ст}} = \frac{P_0}{c}$ белгилаш киритсак,

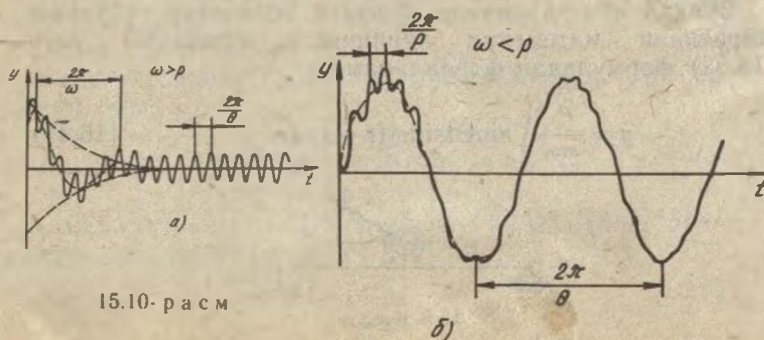
$$y = \frac{y_{\text{ст}}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (15.42)$$

келиб чиқади. Бу ерда $y_{\text{ст}}$ — статик куч P_0 таъсирида ҳосил бўлган солкилик.

(15.42) формуланинг таҳлили, бошланғич шартлар ноль бўлганда, системада икки қисмдан иборат мураккаб тебраниш вужудга келишини кўрсатади: кавс ичидаги биринчи ҳад уйғотувчи куч такрорлиги бўйича бўладиган тебранишни; иккинчи ҳад эса хусусий тебраниш такрорлиги ω билан бўладиган тебранишни ифодалайди. Шунга кўра биринчиси — мажбурий, иккинчиси — эркин тебраниш деб аталади.

Реал конструкцияларда ноэластик қаршилик кучлари таъсирида эркин тебранишлар (иккинчи ҳад) вақт ўтиши билан сўниб боради: мажбурий тебранишлар эса аввалги амплитуда билан давом этаверади.

Вақт ўтиши билан эркин тебранишларнинг сўниб бориши (б) ҳамда икки хил тебранишнинг қўшилиш жараёни (а) 15.10-расмда тасвирланган. Шаклдан кўри-ниб турибдики, $0 < \omega$ ёки $\theta < \omega$ бўлишидан қатъи назар, эркин тебранишлар жараённинг бошидаёқ сўниб қолади. Шунинг учун ечимнинг доимий — сўнмайдиган қисмини таҳлил қилиш билан чегараланамиз:



$$y = \frac{y}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t. \quad (15.43)$$

Бинобарин, мажбурий тебранишлар уйғотувчи куч частотаси билан тебранади ва бу куч гўё система ҳаракатини «ўз амрига бўйсундиргандек» кўринади. Мажбурий тебраниш амплитудаси (динамик солқилик)

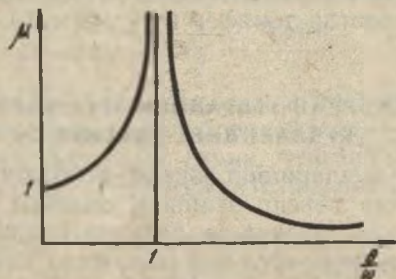
$$A = \frac{y_{\text{ст}}}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|} \quad (15.43')$$

уйғотувчи куч P_0 нинг статик таъсирида ҳосил бўлган солқилик $y_{\text{ст}}$ дан фарк қилади. Уйғотувчи куч таъсирининг динамик эффекти динамик коэффициент деб аталувчи қуйидаги нисбат билан аниқланади:

$$\mu = \frac{A}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|}. \quad (15.44)$$

Динамик коэффициент такрорликлар нисбати $\frac{\theta}{\omega}$ га боғлиқ микдордир. 15.11-расмда μ билан $\frac{\theta}{\omega}$ орасидаги боғланиш график кўринишда тасвирланган.

Уйғотувчи куч такрорлиги θ хусусий тебраниш такрорлиги ω дан анча кичик бўлса, $\mu \rightarrow 1$, динамик солқилик A статик солқилик $y_{\text{ст}}$ га яқинлашади. $\theta < \omega$ чегарада θ нинг ўсиши билан динамик коэффициент μ нинг қиймати тез ўсиб боради; бу ҳол тебраниш амплитудаси A нинг ўсишини билдиради. Агар $\theta > \omega$ бўлса, (15.44) формулага



15.11-расм

биноан $A < 0$ бўлади; бу эса тебраниш амплитудаси уйғотувчи кучга карама-қарши йўналганлигини билдиради.

Уйғотувчи куч такрорлиги билан хусусий тебраниш такрорлиги тенг бўлган ҳол ($\theta = \omega$) резонанс деб аталади. Бунда $\frac{\theta}{\omega} = 1$ бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси чексизликка интилади. Қаршилиқ (диссипатив) кўрсатувчи кучлар ҳисобга олинмаганлиги туфайли шундай ҳулосага келинди. Бирок реал конструкцияларда қаршилиқ кўрсатувчи кучларнинг мавжудлиги амплитуданинг чекли бўлишига олиб келади; амплитуда чекли, айни бир вақтда катта қийматга эга бўлади. Шунинг учун резонанс ҳолати иншоот учун хавфли саналади.

Осма кўприк сингари баъзи реал иншоотларда энергиянинг сочилиши (қаршилиқ кўрсатувчи кучлар) жуда кичик бўлади. Бундай ҳолларда унча катта бўлмаган уйғотувчи куч иншоотда хавфли резонанс тебранишларини уйғотиши мумкин. Масалан, шахдам қадам ташлаб келаётган пиёда аскарлар кўприкка етганда қадамларини ўзгартириб, тартибсиз юра бошлайдилар. Чунки қадам зарби кўприкнинг хусусий тебраниш такрорлиги билан бир хил бўлиб қолса, кўприк резонанс тебранишларига учраб, бузилиши мумкин. Тарихда бундай ҳоллар учраб туради. 1831 йили Манчестрда (Англия) Ирвель дарёсига қурилган осма кўприк 60 кишининг қадами зарбидан бузилиб тушган. 1868 йилда Чатамада Британия денгиз пиёда аскарлари ўтаётганда кўприк босиб қолган. 1850 йилда Анжердаги осма кўприкда катта фожиа рўй берган; 500 кишидан иборат француз пиёда аскарлари батальони ўтаётганда кўприк бузилиб, 226 киши ҳалок бўлган.

Резонанс тебранишларини сўндиришнинг икки хил йўли бор: бири иншоотнинг хусусий тебраниш такрорлигини уйғотувчи куч такрорлигидан фаркли қилиб танлаш, иккинчиси, иншоотда демпфер (сўндиргич) ларни қўпайтириш.

15.3. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАРГА ҚАРШИЛИҚ КУЧЛАРИНИНГ ТАЪСИРИ

Қаршилиқ кучларининг эркин тебранишларга сезиларли даражада таъсир этишини олдинги саҳифаларда кўриб ўтган эдик. Мазкур сарлавҳада қаршилиқ кучлари мажбурий тебранишларга қай даражада таъсир этишини кўриб ўтамиз.

Аввал ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий ечими билан танишиб чиқамиз, сўнгра системага кўрсатиладиган гармоник куч таъсирини батафсил кўриб ўтамиз.

Қаршилиқ кучлари эътиборга олинса, мажбурий тебранишларнинг асосий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}. \quad (15.45)$$

Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишлар тенгламаси (15.17) дан баробарнинг ўнг томони билан, қаршилиқ ҳисобга олинмаган мажбурий тебранишлар тенгламаси (15.24) дан чап томондаги иккинчи ҳад билан фарқ қилади. Система тебранишига қаршилиқ кучларининг таъсири ана шу иккинчи ҳад орқали ҳисобга олинади.

Олдинги параграфдаги сингари уйғотувчи куч $P(t)$ ни чексиз кичик зарблар $P(\tau)d\tau$ кетма-кетлиги деб қабул қилсак, у ҳолда юқоридаги дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишни олади:

$$y(t) = \frac{1}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin [\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} (t - \tau)] d\tau \quad (15.46)$$

Бу формула $P(t)$ ҳар қандай конун бўйича ўзгарганда ўз кучини саклайди; $\alpha=0$ бўлганда (15.32) формула келиб чиқади.

(15.46) формулани уйғотувчи ташки кучнинг гармоник конуни бўйича:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t$$

ўзгарувчи ҳолга татбиқ этамиз.

Бундай ҳол учун дифференциал тенглама

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m} \quad (15.47)$$

кўринишга эга бўлади. Маълумки, бундай тенгламанинг интегрالي икки қисмдан иборат бўлади: 1) бир жинсли тенгламанинг интегрالي (яъни, тенгликнинг ўнг томони ноль бўлган ҳол); 2) умумий тенгламанинг (15.47) хусусий интегрالي.

Бир жинсли тенгламанинг ечимини (15.18) илгари кўриб ўтган эдик. Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишларни ифодалашини ва эркин тебранишлар жараёни-

нинг бошидаёк сўниб қолишини биламиз. Шунга кўра, мажбурий тебранишларнинг стационар қисмини ифода этувчи (15.47) тенгламанинг хусусий ечими билан чекланамиз:

$$y = a \sin \theta t + b \cos \theta t. \quad (15.48)$$

Шуни назарда тутиш керакки, a ва b нинг қийматлари тегишлича танланган тақдирдагина (15.48) ифода (15.47) тенгламанинг ечими бўла олади. Бунинг учун (15.48) дан икки марта ҳосила олиб:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a\theta \cos \theta t - b\theta \sin \theta t; \\ \ddot{y} &= -a\theta^2 \sin \theta t - b\theta^2 \cos \theta t; \end{aligned}$$

(15.47) га қўямиз:

$$\begin{aligned} -a\theta^2 \sin \theta t - b\theta^2 \cos \theta t + 2a\theta\alpha \cos \theta t - 2b\theta\alpha \sin \theta t + a\omega^2 \sin \theta t, \\ + b\omega^2 \cos \theta t = \frac{P_0}{m} \sin \theta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ёки} \quad & \left(-a\theta^2 - 2b\theta\alpha + \theta\omega^2 - \frac{P_0}{m} \right) \sin \theta t + \\ & + \left(-b\theta^2 + 2a\theta\alpha + b\omega^2 \right) \cos \theta t = 0. \end{aligned}$$

Кавс ичидаги ҳадлар алоҳида олинганда нолга тенг бўлсагина ҳосил бўлган тенглама t нинг ҳар қандай қийматида қаноатлантирилади. Бу эса ўз навбатида қуйидаги икки тенгламага олиб келади:

$$a(\omega^2 - \theta^2) - 2b\theta\alpha = \frac{P_0}{m};$$

$$b(\omega^2 - \theta^2) + 2a\theta\alpha = 0;$$

бу ердан

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{P_0(\omega^2 - \theta^2)}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + \theta^2\alpha^2]}, \\ b &= \frac{2P_0\theta\alpha}{m(\omega^2 - \theta^2)^2 + \theta^2\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.49)$$

a ва b доимий сонларнинг мана шу қийматларида (15.48) ифода (15.47) нинг ечими ҳисобланади.

a ва b ни бошқа ўзгармовчилар A ва γ билан алмаштирсак, (15.48) ечим янада ихчамлашади:

$$\left. \begin{aligned} a &= A \cos \gamma \\ b &= -A \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (15.50)$$

Буни (15.48) га қўямиз:

$$y = A \sin \theta t \cos \gamma - A \sin \gamma \cos \theta t = A \sin (\theta t - \gamma) \quad (15.51)$$

(15.49) ва (15.50) ифода­лардан фойдаланиб A ва γ нинг қийматини аниқ­лай­миз:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{y_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{2\theta\alpha}{\omega^2 - \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

Бу ерда γ — бошланғич фаза.

Биринчи формулада $\frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{C} = y_{\text{ст}}$ эканлиги ҳисобга

олинган.

Мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг статик солкилик $y_{\text{ст}}$ га нисбати, аввал (15.44) кўриб ўтганимиздек, динамик коэффициент деб аталади:

$$\mu = \frac{A}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}} \quad (15.53)$$

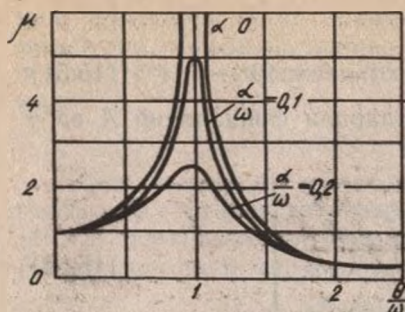
Динамик коэффициент μ нинг бу қиймати билан аввалги (15.44) қийматининг фарқи шундаки, бу қийматда система тебранишига қаршилик килувчи кучларнинг таъсири ҳисобга олинган. Уйғотувчи куч такрорлиги θ га ҳар қандай қиймат берганда ҳам μ ҳеч қачон чексиз бўлмайди. μ нинг қиймати энди θ/ω дан ташқари α/ω га ҳам боғлиқ. Буларнинг ўзаро муносабати 15.12-расмда график кўрнишида тасвирланган.

$\alpha = 0$ бўлганда 15.11-расмдаги ҳол келиб чиқади, яъни $\mu = \infty$ бўлади. Аммо $\alpha \neq 0$ бўлганда μ нинг энг катта қиймати ҳам чекли бўлади. Қаршилик кучлари резонанс зонасида ўзининг таъсирини кучлироқ намоён қилади.

$\omega = 0$ деб олсак, 15.53 формуладан динамик коэффициентнинг юқори қиймати келиб чиқади:

$$\mu_{\text{max}} = \frac{\omega}{2\alpha} \quad (15.54)$$

Бундан маълум бўлишича, динамик коэффициент сўниш коэффициентини α га тесқари пропорционал экан.



15.12-расм

кўриб ўтилган тенгламалар (15.45) ва (15.39) га қаршилик кучларини ифода этувчи ҳадлар ($2\alpha\dot{y}$) ҳамда ($e^{-\alpha t}$) ни киритсак, тебраниш тенгламаси

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \quad (15.55)$$

кўринишни, унинг ечими эса

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \gamma) - \frac{1}{\omega} \int_0^t y_0(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (15.56)$$

кўринишни олади.

Мисол. Узунлиги $l=3$ м бўлган балканинг ўртасига ўрнатилган мувозанатлашмаган двигателнинг вазни $Q=4$ кН, айланишлар сони $n=450$ айл/мин. Двигателдан ҳосил бўладиган марказдан қочма кучнинг вертикал ташкил этувчиси $P \sin \theta t$ бўлиб, $P=1$ кН. Балка 12-номерли пўлат қўштаврдан ясалган. Двигатель тўхтовсиз ишлаганда ҳосил бўладиган мажбурий тебранишлар амплитудаси ва кучланишлар аниқлансин (15.1-расм, а га қаранг).

Ечиш. Шу балканинг хусусий тебранишлари такрорлиги аввалги мисолда топилган эди:

$$\omega = 56,6 \text{ с}^{-1}.$$

Мажбурий куч такрорлиги

$$\theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 450}{30} = 47,1.$$

Динамик коэффицент

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{47,1}{56,6}\right)^2} = 3,25$$

Демак, динамик кучдан ҳосил бўладиган кучланиш ва деформация статик кучланиш ва деформациядан 3,25 марта катта булар экан.

Балка ўртасининг максимал солкилиги

$$y_{\max} = y_{\text{ст}(Q)} + \mu y_{\text{ст}(P)} = \frac{Ql^3}{48EI} + \mu \frac{Pl^3}{48EI} =$$

$$= 0,306 + 3,25 \cdot 0,077 = 0,556 \text{ см.}$$

Балка ўртасидаги максимал кучланиш

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}(a)} + \mu \sigma_{\text{ст}(p)} = \frac{Ql}{4W} + \mu \frac{Pl}{4W} = 93049,1 \text{ кН/м}^2.$$

СГС бирликлар системасида $\sigma_{\max} = 930,5 \text{ кг/см}^2$.

16- боб

ТЕБРАНИШЛАР НАЗАРИЯСИНING ТЕХНИКАГА ТАДБИҚИ

Тебранишларнинг техникадаги ўрни ҳақида гап борганда уларнинг фойдали ва зарарли турлари мавжуд эканлигини таъкидлаб ўтмоқ зарур. Мутахассислар тебранишнинг зарарли кўринишига қарши кураш воситаларини яратиш билан бирга, унинг фойдали томонини инсон манфаатига бўйсундиришга интилиб келадилар. Қуйида ана шулар ҳақида баъзи маълумотларни баён этамиз.

16.1. ТЕБРАНИШНИ ЮТУВЧИ АМОРТИЗАТОРЛАР

Бирор m массага қўйилган вертикал титратувчи кучнинг таъсирини юмшатиш мақсадида масса билан таянч орасига юмшоқ қайишқоқ қатлам (амортизаторлар) жойланади (16.1- расм).

(15.43) формулага кўра массанинг тебраниш амплитудаси кичик бўлиши учун пружинанинг хусусий такрорлиги таъсир



16.1- расм

этаётган куч такрорлигидан анча кичик бўлиши керак.

Масалан, $\frac{\theta}{\omega} = 10$ деб олсак, энг катта амплитуда

$$A = \frac{y_{\text{ст}}}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|} = \frac{y_{\text{ст}}}{|1 - 10^2|} = \frac{y_{\text{ст}}}{99}.$$

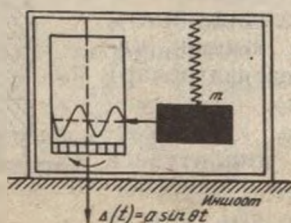
бўлади. Бу эса статик солкиликнинг атиги бир фоизини ташкил этади. Қаршилиқ кучлари ҳисобга олинса, амплитуда янада кичраяди.

16.2. ВИБРОГРАФ

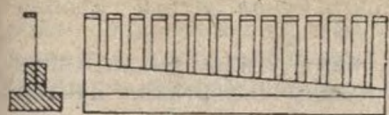
Виброграф иншоотлар тебранишини ёзиб оладиган асбобдир. Назарий жиҳатдан у эркинлик даражаси битта бўлган система бўлиб, унинг тархи 16.2- шаклда тасвирланган. Кути кўринишидаги корпуснинг юқори қисмига юмшоқ пружина ёрдамида осиб қўйилган оғир масса m вибрографнинг асосий элементи ҳисобланади. Массага маҳкамланган қалам айланувчи барабанга тегиб туради. Виброграф тебранувчи иншоотга шундай ўрнатиладики, барабанининг ўқи тебраниш йўналиши билан бир хил бўлсин. Асбоб корпуси иншоот билан бирга тебранади, масса эса пружина бўлганлиги туфайли деярли қўзғалмас, бўлиб тураверади. Шунда қалам барабанга ўралган лентага тебранишнинг эгри чизигини чизади.

Массанинг қўзғалмаслигини таъминлаш учун (15.43) формуладаги θ/ω нисбатни мумкин қадар катта олиш лозим. Агар, аввалгидаги сингари, $\theta/\omega = 10$ деб олинса, у ҳолда асбоб орқали олинган тебраниш ёзувида йўл қўйилган хатолик бир фоизни ташкил этади:

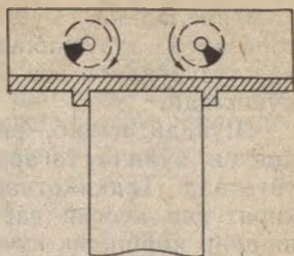
$$A = \frac{1}{99} a \sin \theta t.$$



16.2- расм



16.3-расм



16.4-расм

16.3. ТАКРОРЛИК ЎЛЧАГИЧИ (ЧАСТОТОМЕТР)

16.3-расмда резонанс қондасига асосланган частотометр (такрорлик ўлчагич)нинг тархи тасвирланган. Частотометр асосий корпусга маҳкамланган ҳар хил узунликдаги юпка пластинкачалардан ташкил топган. Пластинкачаларнинг учига қўшимча массалар маҳкамланган. Пластинкачаларнинг узунликлари ҳар хил бўлганлиги сабабли хусусий такрорликлари ҳам ҳар хил бўлади, улар олдиндан ҳисоблаб қўйилади. Частотометрнинг корпуси тебранаётган объектга ўрнатилади. Натижада кинематик таъсир остида пластинкачалар тебранади. Хусусий такрорлиги объект такрорлигига яқин бўлган пластинкача катта амплитуда билан тебрана бошлайди, яъни резонансга тушади. Ўлчанаётган тебраниш такрорлиги шу йўсинда аниқланади.

16.4. ПОЙДЕВОР ҚОЗИҚЛАРИНИ ВИБРАЦИОН УСУЛДА ҚОКИШ

Узунлиги бир неча метр бўлган металл ёки темир-бетон қозикларни ерга зарб билан қоқиш кўп вақт талаб қиладиган мураккаб жараёндир. Тебранма ҳаракатга асосланган вибрацион усул эса қозикни қисқа вақт ичида керакли чуқурликкача осонгина қоқиш имконини беради.

Қозикнинг юқори учига тебраниш уйғотувчи оғир вибратор ўрнатилади (16.4-расм). Вибраторнинг параллел жойлашган иккита вали қарама-қарши йўналишда айланади. Валнинг ҳар бирига дебаланс ўрнатишган. Валлар айланганда марказдан қочма кучлар ҳосил бўлади. Дебаланслар бир-бирига нисбатан шундай жой-

лаштириладики, бунда марказдан қочма кучларнинг горизонтал тузувчилари ўзаро мувозанатлашади, вертикал тузувчилари эса бир томонга йўналганлиги туфайли қўшилади.

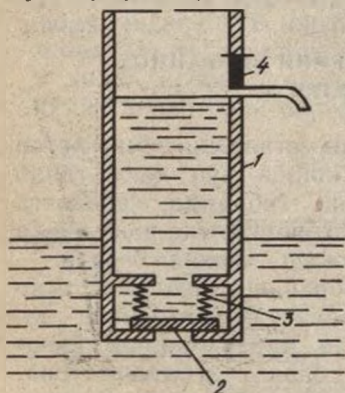
Шундай қилиб, вибратор вақт ўтиши билан синус конуни бўйича ўзгарадиган қўшимча вертикал кучлар уйғотади. Тадқиқотларнинг кўрсатишича, қозикни ерга киритувчи асосий сабаб — оғирлик кучи бўлиб, тебранишлар қаршилик кучини камайтириб беради холос.

16.5. ВИБРАЦИОН СУВ КЎТАРГИЧЛАР

Баъзан чуқур қудуклардан сув тортиб чиқаришда оддий насослар ўрнига вибрацион сув кўтаргич (водоподъемник) лардан фойдаланилади (16.5-расм).

Тик ўрнатилган труба 1 нинг туби қудукдаги сувга ботиб туради. Труба тубидаги тешик пружинали 3 қопқок 2 билан беркитилади. Трубанинг юқори қисмига сув оқиб тушадиган жўмрак 4 ўрнатилади. Шу жўмраккача сув куйилади. Агар трубани катта тезлик билан пастга силжитсак, у ҳолда ташки босим остида қопқок очилади, трубага сув қиради, кўтарилган сув жўмрак орқали ташқарига оқиб тушади.

Сув кўтаргич ўз иши жараёнида узлуксиз равишда юқорига ва пастга кўтарилиб тушиб туради. Кўтарилиш ва тушиш масофаси мумкин қадар қисқа олинади. Ҳар бир циклда остки тешикдан маълум миқдор сув кириб, шунча сув жўмрак орқали ташқарига чиқади. Цикллар даврий равишда такрорлангани сабабли сув жўмракдан тўхтовсиз тушади.



16.5-расм

Трубани ҳаракатга келтириш учун дебалансли ёки электромагнитли вибраторлардан фойдаланилади.

Техникада вибрацион сув кўтаргичларнинг бошқа хиллари ҳам ишлатилади.

Биз вибротехник жараёнларнинг айрим хиллари билан танишиб чикдик. Аммо тебранишларнинг техникада қўлланилиш қўлами анча кенг ва ранг-барангдир. Маса-

лан, улар оғма новдан тушаётган жисмнинг ҳаракатини, шунингдек бетоннинг бункердан тушишини тезлатиш, сочилувчан жисмларни пастдан юқорига ташиш, қаттик жисмларни майдалаш, ҳар хил материалларни навларга ажратиш, турли жисмларни аралаштириш каби ишларда самарали фойдаланилади.

17- боб

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИР НЕЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

17.1. ҚАРШИЛИКСИЗ МУҲИТДА СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Бир неча йиғик массаларга эга бўлган эластик консолнинг эркин тебраниши билан танишиб чикамиз (17.1- расм). Бу масалани ҳал этишда ҳам бир массали системадаги сингари Даламбер қондасидан фойдаланамиз: консол балка тебранганда $m_1, m_2, \dots, m_n$ массалар йўналишида

$$-m_1\ddot{y}_1; -m_2\ddot{y}_2; \dots, -m_n\ddot{y}_n$$

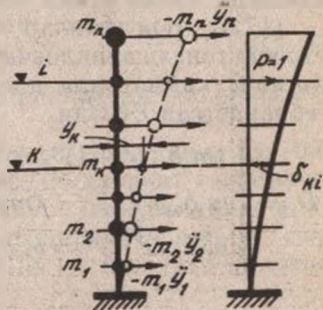
инерция кучлари ҳосил бўлади.

Ҳисоб ишларини осонлаштириш мақсадида, қурилиш механикасида кенг қўлланадиган, бирлик кўчиш δ_{ki} тушунчасидан фойдаланамиз. δ_{ki} — балка k нуктасининг кўчиши бўлиб, бу кўчиш балканинг i нуктасига қўйилган бирлик куч $P=1$ таъсирида ҳосил бўлади. Агар ташки куч $P_i \neq 1$ бўлса, у ҳолда P_i таъсиридаги тўлиқ кўчишни аниқлаш учун бирлик кўчиш ташки кучга кўпайтирилади.

$$y_k = P_i \delta_{ki} \quad (17.1)$$

Бир вақтнинг ўзида балкага бир қанча кучлар $P_1, P_2, \dots, P_n$ қўйилган бўлса, балка k нуктасининг тўлиқ кўчиши алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида аниқланади.

$$y_k = P_1 \delta_{k1} + P_2 \delta_{k2} + \dots + P_n \delta_{kn}. \quad (17.2)$$



17.1- расм

Биз текишираётган системада (17.1-расм) ташқи кучлар P_i ўрнида инерция кучлари ($-m_n \ddot{y}_n$) турибди. Шунга кўра, бу система учун (17.2) формула куйидагича ёзилади:

$$y_k = -m_1 y_1 \delta_{k1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{k2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{kn}; \quad (17.2)'$$

ҳар бир массанинг кўчиши қуйидагича топилади:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_{\bar{y}_1}\delta_{11} - m_{\bar{y}_2}\delta_{12} - \dots - m_{\bar{y}_n}\delta_{1n}; \\ y_2 &= -m_{\bar{y}_1}\delta_{21} - m_{\bar{y}_2}\delta_{22} - \dots - m_{\bar{y}_n}\delta_{2n}; \\ &\vdots \\ y_n &= -m_{\bar{y}_1}\delta_{n1} - m_{\bar{y}_2}\delta_{n2} - \dots - m_{\bar{y}_n}\delta_{nn}. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Бу тенгламалар системасининг хусусий интеграли

$$u_k = A_k \sin(\omega t + \lambda) \quad (17.4)$$

кўринишда қабул қилиниши мумкин.

(17.4) ифодани тенгламалар системаси (17.3) га қўйиб, номаълум амплитуда A_k ва такрорлик (ω) га нисбатан бир жинсли алгебрик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2m_2\delta_{12}\omega^2 + \dots + A_nm_n\delta_{1n}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \dots + A_nm_n\delta_{2n}\omega^2 &= 0; \\ \cdot &\quad \cdot && \cdot \\ A_1m_1\delta_{n1}\omega^2 + A_2m_2\delta_{n2}\omega^2 + \dots + A_n(m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

$A_1=A_2=\dots=A_n=0$ бўлганда (17.5) тенгламалар системаси қаноатланса-да, қўйилган масалага ечим бўла олмайди, чунки бунда балка тинч ҳолатда бўлади.

(17.5) тенгламалар системаси коэффициентларидан ташкил топган аниқловчи (дeterminant) нолга тенг бўлса, A_k нинг қийматлари нолдан фарқ қилади, яъни консол тебранаётган бўлади.

$$D = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) & m_2 \delta_{12} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega^2 & (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) & \dots & m_n \delta_{2n} \omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 \delta_{n1} \omega^2 & m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & (m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (17.6)$$

Аниқловчини очиб чиксак, ω^2 га нисбатан n — тартибли тенглама ҳосил бўлади:

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots + (-1)^n a_n \omega^{2n} = 0. \quad (17.7)$$

Бу тенглама такрорликлар тенгламаси ёки асрий тенглама деб аталиб, n та ҳақиқий ва мусбат илдизга эга бўлади. Илдизларни $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ деб белгилаймиз ва такрорликлар учун куйидаги n та жавобга эга бўламиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_1^2}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_2^2}; \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_n &= \sqrt{\omega_n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Система эркин тебранишларининг барча такрорликлари мажмуаси такрорликлар спектори деб аталади. Буларнинг ичида энг кичиги биринчи ёки асосий такрорлик дейилади. Амалий ишларда дастлабки уч такрорлик муҳим аҳамиятга эга бўлади.

(17.3) тенгламалар системасининг умумий ечими (17.4) кўринишдаги хусусий ечимларнинг йиғиндисидан иборат:

$$y_k = A_{k1} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{k2} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{kn} \sin(\omega_n t + \lambda_n). \quad (17.9)$$

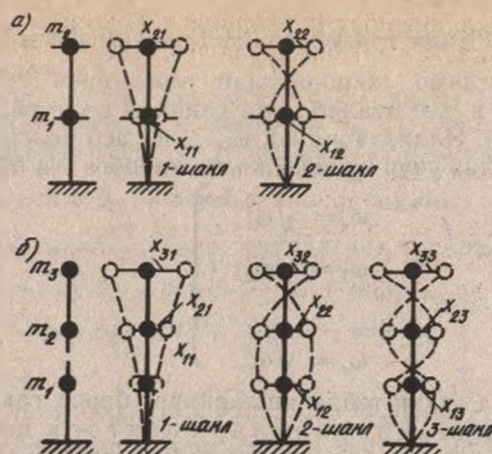
Буни ҳар бир масса кўчиши учун алоҳида ёзамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{1n} \sin(\omega_n t + \lambda_n); \\ y_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{2n} \sin(\omega_n t + \lambda_n); \\ y_n &= A_{n1} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{n2} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{nn} \sin(\omega_n t + \lambda_n). \end{aligned} \quad (17.10)$$

A_{ki} нинг биринчи индекси координатани, иккинчиси — такрорлик номерини билдиради.

(17.10) тенгламалардан кўрииб турибдики, ҳар бир масса мураккаб ҳаракатда бўлиб, бу ҳаракат такрорлиги турлича бўлган тебранишларнинг (синусоидаларнинг) йиғиндисидан ташкил топади. Қўшилувчиларнинг сони хусусий такрорликлар сонига, яъни системанинг эркинлик даражасига тенг.

Умуман олганда система тебранишининг формаси (солкилик шакли) ўзгарувчан бўлиб, амплитудалар



17.2-расм

нисбати узлуксиз равишда ўзгариб боради. Бирок ҳамма вақт система ҳаракатининг бошланғич шартларини, барча массаларни маълум бир такрорлик ω , бўйича тебранадиغان қилиб олиш мумкин. Бундай тебраниш асосий ёки нормал тебраниш деб, тебраниш шакли эса асосий шакл деб аталади. Айрим муаллифлар буни хусусий шакл деб атайдилар.

Тебранишнинг асосий шаклларида исталган массанинг амплитудалари нисбати ҳар доим ўзгармас бўлиб, вақтга боғлиқ бўлмайди. Бинобарин, асосий шакллар амплитудалар ёки уларнинг нисбатлари орқали аниқланади.

Аксарият ҳолда эркин тебранишлар асосий шаклдаги тебранишларнинг комбинациясидан иборат бўлади. Ўз навбатида ҳар бир хусусий такрорлик ўзига мос асосий тебраниш шаклига эга, яъни биринчи такрорликка — биринчи, иккинчи такрорликка — иккинчи шакл ва ҳоказо мос келади (17.2-расм). Системанинг эркинлик даражаси ортган сари тебраниш шаклидаги тўлқинлар сони ҳам ортиб бораверади. Қисқаси, асосий шакллар сони системанинг эркинлик даражаси n га тенг бўлади.

Системанинг мураккаб тебранма ҳаракатига ҳар бир тебраниш шаклининг улуши, эркин тебранишларни вуҷудга келтирган бошланғич шартларга боғлиқ.

Тебраниш асосий шакллариининг муҳим хоссларидан бири уларнинг ортогоналлигидир. Бу хоссага кўра бир

У ҳолда (17.11) тенгламалар бир жинсли системага айланади:

$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= A_{11}\omega_1\cos\lambda_1 + A_{12}\omega_2\cos\lambda_2 + \dots + A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n = 0; \\ y_2(0) &= x_{21}A_{11}\omega_1\cos\lambda_1 + x_{22}A_{12}\omega_2\cos\lambda_2 + \dots + \\ &+ x_{2n}A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(0) &= x_{n1}A_{11}\omega_1\cos\lambda_1 + x_{n2}A_{12}\omega_2\cos\lambda_2 + \dots + \\ &+ x_{nn}A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

$$\cos \lambda_1 = \cos \lambda_2 = \dots = \cos \lambda_n = 0,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{3}{2}.$$
$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \cos \omega_2 t + \dots + A_{1n} \cos \omega_n t; \\ y_2 &= x_{21} A_{11} \cos \omega_1 t + x_{22} A_{12} \cos \omega_2 t + \dots + x_{2n} A_{1n} \cos \omega_n t; \\ y_n &= x_{n1} A_{11} \cos \omega_1 t + x_{n2} A_{12} \cos \omega_2 t + \dots + x_{nn} A_{1n} \cos \omega_n t. \end{aligned} \right\} (17.14)$$
$$\left. \begin{aligned} y_1(0) &= A_{11} + A_{12} + \dots + A_{1n}; \\ y_2(0) &= x_{21}A_{11} + x_{22}A_{12} + \dots + x_{2n}A_{1n}; \\ &\vdots \\ y_n(0) &= x_{n1}A_{11} + x_{n2}A_{12} + \dots + x_{nn}A_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

17.2. ҚАРШИЛИКЛИ МУҲИТДА СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Эркинлик даражаси бир неча бўлган системанинг сўнувчи тебранишларини кўриб чиқамиз. Масса m_k ҳаракатига қаршилиқ қилувчи кучларни ҳаракат тезлигига пропорционал деб оламиз. Тебраниш тенгламаси сифатида (17.2)¹ дан фойдаланамиз; бироқ бу тенгламага қаршилиқ кучларини ҳисобга олувчи $2\alpha_k m_k \dot{y}_k$ ҳад киритамиз:

$$y_k = -m_k \delta_{k1} (\ddot{y}_1 + 2\alpha_1 \dot{y}_1) - m_k \delta_{k2} (\ddot{y}_2 + 2\alpha_2 \dot{y}_2) - \dots - m_n \delta_{kn} (\ddot{y}_n + 2\alpha_n \dot{y}_n). \quad (17.16)$$

Бу ерда (15.16)¹ га биноан

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2m_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\beta}{2m_2}; \quad \dots; \quad \alpha_n = \frac{\beta}{2m_n}.$$

Одатда, сўниш коэффициентлари α_k барча шакллар учун бир хил олинади, шунга кўра $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ бўлади. Буни эътиборга олсак, ҳаракатнинг дифференциал тенгламалар системаси қисқа кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$y_k + m_k \delta_{k1} (\ddot{y}_1 + 2\alpha \dot{y}_1) + m_k \delta_{k2} (\ddot{y}_2 + 2\alpha \dot{y}_2) + \dots + m_n \delta_{kn} (\ddot{y}_n + 2\alpha \dot{y}_n) = 0, \\ (k=1, 2, \dots, n). \quad (17.17)$$

Бу тенгламаларнинг ечими

$$y_k = A_k e^{-\alpha t} \sin(\omega_k t + \lambda_k) \quad (17.18)$$

кўринишда аниқланади.

Бундан кейинги амаллар қаршилиқсиз, муҳитдаги системадаги каби бўлади. Натижада кўп массали система-нинг сўнувчи тебранишлари учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$y_k = A_{k1} e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{k2} e^{-\alpha t} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{kn} e^{-\alpha t} \sin(\omega_n t + \lambda_n). \quad (17.19)$$

Бу ерда

$$\bar{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}. \quad (17.20)$$

17.3. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ИККИТА ВА УЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

Эркинлик даражаси иккита ва учта бўлган системалар эркинлик даражаси бир нечта бўлган системаларнинг хусусий ҳолидир. Аммо бундай системалар учун тузиладиган тенгламалар оддий бўлганлиги туфайли ечимларни тугал кўринишгача етказса бўлади. Шу сабабли бундай системалар устида алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Эркинлик даражаси иккита бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Тебранишлар каноник тенгламаси (17.5) икки массали система учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2m_2\delta_{12}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_1\delta_{22}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Аниқловчи (17.6) эса қуйидагича ифодаланади:

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (17.22)$$

Аниқловчини ёйганда келиб чиқадиган такрорлик тенгламаси биквадрат кўринишда бўлади.

$$\begin{aligned} \omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 - \omega^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 &= 0. \\ \omega^2 &= Z \text{ деб белгиласак,} \end{aligned} \quad (17.23)$$

$$z^2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 - z(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0$$

келиб чиқади. Бунинг ечими

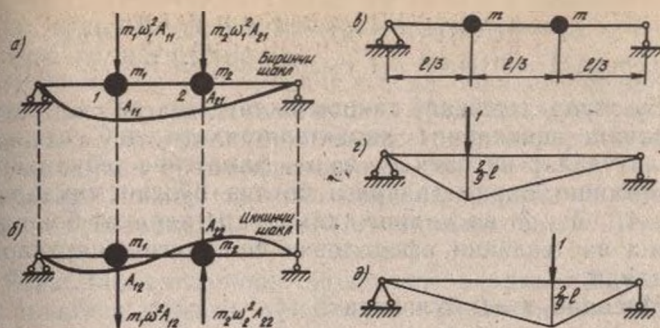
$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

бўлади. Илдиз остини ўзгартирамиз:

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (17.24)$$

Бундан биринчи ва иккинчи такрорлик келиб чиқади:

$$\omega_1 = \sqrt{z_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{z_1}.$$



17.3-расм

z_1 ни аниқлашда (17.24) ифода «минус», z_2 ни аниқлашда эса «плюс» ишора билан олинади.

Эркин тебранишлар дифференциал тенгламаларининг умумий ечими (17.10) га кўра

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_2 &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.25)$$

кўринишга эга.

Хар бир тебраниш шакли ўз такрорлигига эга: A_{11} , A_{21} — такрорлиги ω_1 бўлган биринчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3-расм, а), бу ерда биринчи индекс — координата номерини, иккинчи индекс — такрорлик номерини билдиради. A_{12} , A_{22} — такрорлиги ω_2 бўлган иккинчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3-расм, б).

Тебранишнинг асосий шакли деганда, $\sin(\omega_i t + \lambda_i) = 1$ бўлганда, бирор хусусий такрорлик билан тебранаётган система деформациясининг шакли тушунилади.

Бинобарин, ҳар бир асосий шаклни юкори инерция кучлари таъсирида ҳосил бўладиган солкилик сифатида аниқлаш мумкин: биринчи шакл 17.3-расм, а да, иккинчи шакл эса 17.3-расм, б да тасвирланган кучлар таъсирида ҳосил бўлади. Ҳар иккала асосий шакл ўзаро ортогоналдир, яъни биринчи шакл кучларининг иккинчи шакл кўчишларида бажариши мумкин бўлган иш нолга тенг.

Биринчи гармоника амплитудалари нисбатини $x_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$, $x_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}}$ деб белгиласак, (17.25) тенглама куйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_2 &= x_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + x_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.26)$$

Бу ерда хусусий такрорликлар ω_1 ва ω_2 ҳамда тебраниш шаклининг характеристикаси деб аталувчи амплитудалар нисбати x_{21} ва x_{22} факатгина тебранаётган системанинг параметрларига боғлиқ бўлган микдорлардир. A_{11} , A_{12} , λ_1 ва λ_2 нинг қийматлари ҳаракат бошидаги кўчиш ва тезликни ифодаловчи бошланғич шартлардан топилади.

Масалан, $t=0$ бўлганда

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0; \\ \dot{y}_1(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= v_0; \end{aligned}$$

яъни ҳаракат иккинчи массага зарб берилишдан бошланди, дейлик. У ҳолда (17.26) тенгламадан

$$\begin{aligned} y_1(0) &= A_{11} \sin \lambda_1 + A_{12} \sin \lambda_2 = 0; \\ y_2(0) &= x_{21} A_{11} \sin \lambda_1 + x_{22} A_{12} \sin \lambda_2 = 0; \\ \dot{y}_1(0) &= A_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 + A_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = 0; \\ \dot{y}_2(0) &= x_{21} A_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 + x_{22} A_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = v_0. \end{aligned}$$

келиб чиқади. Юқоридаги икки тенгламадан $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; пастдаги икки тенгламадан эса

$$A_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{x_{21} - x_{22}}; \quad A_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{x_{22} - x_{21}}$$

эканлиги маълум бўлади.

Бошланғич шартларни махсус танлаш йўли билан ҳар иккала массани бир хил такрорликда тебранишига эришиш мумкин. Масалан, $A_{12}=0$ бўлганда тебраниш битта гармоника бўйича содир бўлади:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1); \\ y_{21} &= x_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

ҳамда биринчи асосий тебраниш деб аталади. x_{21} тебранишларнинг биринчи асосий шаклини ифодалайди.

Агар $A_{11}=0$ бўлишига эришилса, иккинчи асосий тебраниш содир бўлади

$$\begin{aligned} y_{12} &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_{22} &= x_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.28)$$

Бу ерда X_{22} тебранишларнинг иккинчи асосий шаклини ифодалайди.

Тебранишларнинг биринчи асосий шаклида ҳар иккала масса ω_1 такрорлик билан бир йўналишда тебранади. Иккинчи асосий шаклда эса массалар ω_2 такрорлик билан қарама-қарши йўналишда тебранади.

Мисол. Иккита бир хил массали вазнсиз балканинг эркин тебранишлари такрорлиги аниқлансин (17.3- расм, в).

Ечиш. Моментларнинг бирлик эпюраларидан Верещагин қондаси бўйича қўпайтириш йўли билан бирлик қўчишларни топамиз (17.3- расм, г, д).

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EI}.$$

(17.24) формула берилган масала учун қуйидаги қўринишни олади:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)_m} [2\delta_{11} \pm \sqrt{4\delta_{11}^2 - 4(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2)}],$$

бундан

$$\omega_1 = 5,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad \text{ва} \quad \omega_2 = 22 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

аниқланади.

Эркинлик даражаси учта бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Уч массали системанинг хусусий тебранишлари тенгламаси (17.5) га асосан қуйидагича бўлади:

$$\left. \begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2m_2\delta_{12}\omega^2 + A_3m_3\delta_{13}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + A_3m_3\delta_{23}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{31}\omega^2 + A_2m_2\delta_{32}\omega^2 + A_3(m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.29)$$

Бу тенгламаларнинг аниқловчиси (17.6) га қўра қуйидагича ифодаланади:

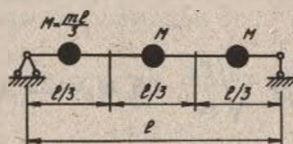
$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 & m_3\delta_{13}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) & m_3\delta_{23}\omega^2 \\ m_1\delta_{31}\omega^2 & m_2\delta_{32}\omega^2 & (m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (17.30)$$

Амплитуда коэффициентлари $X_{kn} = \frac{A_{kn}}{A_{1n}}$ куйидаги тенгламалардан топилади:

$$\left. \begin{aligned} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + x_{2n}m_2\delta_{12}\omega^2 + x_{3n}m_3\delta_{13}\omega^2 &= 0; \\ m_1\delta_{21}\omega^2 + x_{2n}(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + x_{3n}m_3\delta_{23}\omega^2 &= 0; \\ m_1\delta_{31}\omega^2 + x_{2n}m_2\delta_{32}\omega^2 + x_{3n}(m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.31)$$

Бу тенгламалардан бирортаси ташлаб юборилиб, колган иккитасидан x_{2n} ва x_{3n} номаълум коэффициентлар аниқланади.

Уч массали балка тебранишининг такрорликлари ва асосий шаклларини аниқлашга доир мисолни кўриб ўтамиз (17.4-расм).



17.4-расм

Балканинг бирлик кучлар таъсиридаги кўчишлари берилган дейлик:

$$\delta_{11} = \frac{25l^3}{3888EI}; \quad \delta_{22} = \frac{81l^3}{3888EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{39l^3}{3888EI}; \quad \delta_{23} = \delta_{12};$$

$$\delta_{13} = \frac{17l^3}{3888EI}; \quad \delta_{33} = \frac{25l^3}{3888EI}.$$

Балка тебранишларининг каноник тенгламаси (17.29) га кўра

$$\left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EJ}M-1\right)A_1+\frac{39l^3\omega^2}{3888EJ}MA_2+\frac{17l^3\omega^2}{3888EJ}MA_3=0;$$

$$\frac{39l^3\omega^2}{3888EJ}MA_1+\frac{39l^2\omega^2}{3888EJ}MA_2+\left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EJ}M-1\right)A_3=0;$$

$$\frac{17l^3\omega^2}{3888EJ}MA_1+\left(\frac{81l^3\omega^2}{3888EJ}M-1\right)A_2+\frac{39l^3\omega^2}{3888EJ}MA_3=0.$$

$K_n = \frac{3888EJ}{l^3\omega^2 M}$ деб олсак, тенглама ихчамлашади:

$$\left. \begin{aligned} (25-K_n)A_1+39A_2+17A_3 &= 0; \\ 39A_1+(81+K_n)A_2+39A_3 &= 0; \\ 17A_1+39A_2+(25-K_n)A_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Тенгламалар аникловчисини нолга тенглаймиз:

$$D = \begin{vmatrix} (25-K_n) & 39 & 17 \\ 30 & (81-K_n) & 39 \\ 17 & 39 & (25-K_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Бунинг ёйилмаси

$$K_n^3 - 132K_n^2 + 1344K_n - 2880 = 0.$$

Тенгламанинг илдизлари: $K_1=120$, $K_2=8$, $K_3=3$.
Эркин тебраниш такрорликлари

$$\omega_n^2 = \frac{3888EJ}{l^3 MK_n} = \frac{3888EJ}{l^3 \frac{ml}{3} K_n}$$

дан аникланади:

1) биринчи асосий шакл такрорлиги ($K_1=120$)

$$\omega_1 = \sqrt{3888EJ: \frac{1}{3}ml^4 \cdot 120} = \frac{9,859}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

2) иккинчи асосий шакл такрорлиги ($K_2=8$)

$$\omega_2 = \sqrt{3888EJ: \frac{1ml^4}{3} \cdot 8} = \frac{38,184}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

3) учинчи асосий шакл такрорлиги ($K_3=3$)

$$\omega_3 = \sqrt{3888EJ: \frac{1}{3}ml^4 \cdot 3} = \frac{62,354}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Топилган такрорликлар бўйича (17.31) дан фойдаланиб, асосий шаклларни аниқлаймиз. Бунинг учун (а) тенгламанинг барча ҳадларини A_1 га бўлиб, тенгламани қайта ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} (25 - K_n) + 39x_{2n} + 17x_{3n} &= 0; \\ 39 + (81 - K_n)x_{2n} + 39x_{3n} &= 0; \\ 17 + 39x_{2n} + (25 - K_n)x_{3n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Биринчи асосий шаклни аниқлаш учун (б) тенгламада $K_1 = 120$ деб олинади:

$$\begin{aligned} (25 - 120) + 39x_{21} + 17x_{31} &= 0; \\ 39 + (81 - 120)x_{21} + 39x_{31} &= 0; \\ 17 + 39x_{21} + (25 - 120)x_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Тенгламаларнинг биттаси ортикча. Учинчисини ташлаб юбориб, колган иккитасидан

$$x_{21} = \frac{95 \cdot 39 + 39 \cdot 17}{39 \cdot 39 + 39 \cdot 17} = 2 \quad \text{ва} \quad x_{31} = \frac{-39 \cdot 39 + 39 \cdot 95}{39 \cdot 39 + 39 \cdot 17} = 1$$

аниқланади. Шундай қилиб, биринчи асосий шаклни қуйидаги микдорлар белгилайди: $A_{21} = 2A_{11}$; $A_{31} = A_{11}$ (17.5- расм, а).

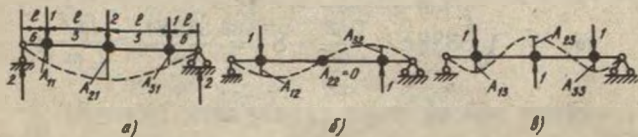
Иккинчи асосий шаклни аниқлашда (б) тенгламадаги K нинг қийматини 8 га тенг деб оламиз:

$$\begin{aligned} (25 - 8) + 39x_{22} + 17x_{32} &= 0; \\ 39 + (81 - 8)x_{22} + 39x_{32} &= 0; \\ 17 + 39x_{22} + (25 - 8)x_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Дастлабки икки тенгламадан

$$x_{22} = \frac{-17 \cdot 39 + 17 \cdot 39}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = 0 \quad \text{ва} \quad x_{32} = \frac{-39 \cdot 39 + 73 \cdot 17}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = -1$$

топилади. Асосий шаклни белгиловчи кучлар тархи 17.5- расм, б да берилган.



17.5- расм

Учинчи асосий шаклни аниқлашда $K_3=3$ деб олинади. Бунда $X_{23}=1$ ва $X_{33}=1$ ҳамда $A_{23}=-A_{13}$; $A_{33}=A_{13}$ келиб чиқади.

Кучлар тарҳи ва учинчи асосий шакл 17.5- расм, в да берилган.

Хулоса: хусусий тебранишларнинг биринчи асосий шаклида иккита четки масса бир хил масофага, ўртадаги масса эса икки барабар кўпроқ масофага кўчади. Хусусий тебранишларнинг иккинчи шаклида ўртадаги масса ўз ўрнида қолиб, четки массалар тенг ва қарама-қарши масофаларга кўчади. Ниҳоят, хусусий тебранишларнинг учинчи асосий шаклида иккита четки масса яна тенг масофага кўчади; ўртадаги масса эса миқдор жihatдан тенг, йўналиш жihatдан қарама-қарши томонга кўчади.

17.4. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИР НЕЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАРНИНГ МАЖБУРИЙ ДАВРИЙ ТЕБРАНИШЛАРИ

Мисол тариқасида n та йигик массага эга бўлган балканинг (17.6- расм) мажбурий тебранишларини кўриб ўтамыз. Балканинг k массасига

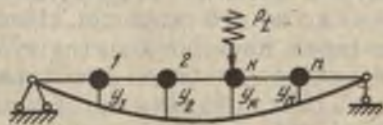
$$P_t = P_k \sin \theta t \quad (17.32)$$

уйғотувчи куч таъсир этяпти дейлик. Бу ерда P_k — куч амплитудаси, θ — унинг такрорлиги.

Бунда (17.3) тенглама таркибида уйғотувчи куч таъсирини ҳисобга олувчи қўшимча ҳад пайдо бўлади:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{1n} + P_k \delta_{1k} \sin \theta t; \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{2n} + P_k \delta_{2k} \sin \theta t; \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{n1} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{n2} - \dots - m_n \ddot{y}_n \delta_{nn} + P_k \delta_{nk} \sin \theta t; \end{aligned} \right\} \quad (17.33)$$

Хар бир массанинг қўчишини қуйидагича ифодалаш мумкин:



17.6- расм

Олдинги бобда баён этилганидек, хусусий такрорликлар сони ва уларга мос бўлган тебранишнинг асосий шакллари системанинг эркинлик даражаси сонига тенг бўлади, бинобарин, массаси узлуксиз тарқалган системаларнинг, яъни эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларнинг хусусий такрорликлари ҳамда тебраниш шакллари сони чексиз бўлади.

Эркин тебранишга оид масалаларда системаларнинг хусусий такрорликлари ва уларга мос бўлган тебраниш шакллари аниқлаш амаллари асосий ўрин тутди.

18.1. БАЛКАЛАРНИНГ КЎНДАЛАНГ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Бинокорликда ишлатиладиган тўсинни кўз олдингизга келтиринг. Унинг массаси тўсин узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Бундай конструкциялар эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларга яққол мисол бўла олади.

Балкалар тебранганда уларнинг солкилиги икки ўзгарувчи: кесим координати z ҳамда вақт t нинг функцияси бўлади, яъни

$$y = F(z, t).$$

Материаллар қаршилиги курсидан маълумки, солкилик y билан эгувчи момент M қуйидаги дифференциал боғланишга эга:

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -M.$$

Бу ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = - \frac{d^2 M}{dz^2} = -P(z, t). \quad (18.1)$$

Бу ерда $P(z, t)$ — балкага таъсир этувчи кўндаланг куч бўлиб, у қуйидаги омиллардан ташкил топади:

- 1) интенсивлиги $q(z, t)$ бўлган актив ёйик куч;
- 2) интенсивлиги my бўлган инерция кучлари;
- 3) интенсивлиги $r(z, t)$ бўлган ҳаракатга қаршилиқ кўрсатувчи кучлар:

$$P(z, t) = q(z, t) + m\ddot{y} + r(z, t). \quad (18.2)$$

(18.2) ни (18.1) га қўйсак, балка тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial y^2}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(z, t) = -q(z, t) \quad (18.3)$$

келиб чиқади.

(18.3) тенгламада $q(z, t) = 0$ деб олинса, эркин тебранишлар дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial y^2}{\partial z^2} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(z, t) = 0. \quad (18.4)$$

Агар балканинг бикирлиги ўзгармас бўлиб, муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса (18.4), тенглама қуйидаги илчам кўринишга келади:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0. \quad (18.5)$$

18.2. БАЛКАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ

1. Эгилиш тебранишлари. Балка эркин тебранишлари дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий ечимини бири z га, иккинчиси t га боғлиқ бўлган, икки хил функциянинг кўпайтмаси кўринишида излаймиз:

$$y(z, t) = Z(z) \cdot T(t). \quad (18.6)$$

(18.6) функциядан ҳосила олиб, (18.5) га кўямиз

$$Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{EJ}{m} T(t) \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} = 0. \quad (18.7)$$

(18.7) тенгламанинг барча ҳадларини $T(t) \cdot Z(z)$ га бўламиз ва ҳадлардан бирини ўнг томонга ўтказамиз:

$$\frac{EJ d^4 Z(z)}{m dz^4} = - = - \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \cdot \frac{Z(z)}{T(t)}. \quad (18.8)$$

Шу йўл билан ўзгарувчиларни икки қисмга ажратдик — чап томондаги функция факат Z га, ўнгдагиси эса факат t га боғлиқ. Ҳар иккала функция маълум бир ўзгармас сонга тенг бўлгандагина улар орасидаги тенглик мавжуд бўлади, ана шу ўзгармас сонни ω^2 деб қабул қиламиз. Бунда иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0; \quad \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} - \omega^2 \frac{m}{EJ} Z(z) = 0. \quad (18.9)$$

Биринчи тенгламининг ечими:

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \lambda) \quad (18.10)$$

бўлиб, балканинг тебранма ҳаракатда эканлигини билдиради. Бу ечимда ω нинг физик маъноси — тебраниш такрорлиги эканлиги ҳам кўриниб турибди. Иккинчи тенгламадан тебраниш шакли аниқланади. Унинг умумий ечими куйидаги кўринишга эга:

$$Z(z) = D_1 \sin uz + D_2 \cos uz + D_3 \sinh uz + D_4 \cosh uz, \quad (18.11)$$

бу ерда

$$u = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{EI}}.$$

D_1, D_2, D_3, D_4 доимийлари балканинг икки учига боғлиқ бўлган чегаравий шартлардан топилади. Чегаравий шартлар эса D_1, D_2, D_3, D_4 ни ўз ичига олган тўртта чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалардан иборат. Бизни системанинг нолдан фарқли бўлган ечими қизиқтиради, чунки $Z(z) = 0$ бўлганда балка тебранмайди. Тенгламалар системасининг аниқловчиси нолга тенг бўлгандагина тенгламаларнинг ечими нолдан фарқли бўлади.

$D_1, \dots, D_4$ ни ўз ичига олган тенгламалар системасининг аниқловчисини нолга тенглаш йўли билан ҳосил қилинган тенглама u га исбатан трансцендент бўлади, яъни тригонометрик ва гиперболик функциялардан ташкил топади. Бу тенгламани ечиб, ҳар бирининг ўзига мос такрорлиги ва шакли бўлган, чексиз кўп илдизлар топилади.

Шундай қилиб, эркинлик даражаси чексиз бўлган системанинг эркин тебраниши дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий интеграл куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_{1n} \sin u_n z + D_{2n} \cos u_n z + D_{3n} \sinh u_n z + D_{4n} \cosh u_n z) \sin(\omega_n t + \lambda). \quad (18.12)$$

Мисол. Икки учи шарнирли бириктирилган балканинг эркин тебранишлари такрорликлари ва шакллари топилсин.

Ечиш. $y(z, t)$ функцияси учун чегаравий шартларни белгилаймиз:

$$y(z, t) \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad y(z, t) \Big|_{z=l} = 0; \quad \frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} \Big|_{z=l} = 0;$$

$Z_n(z)$ функция учун балка учлари шarti куйидагича бўлади:

$$Z_n(z) \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{d^2 Z_n(z)}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad Z_n(z) \Big|_{z=l} = 0; \quad \frac{d^2 Z_n(z)}{dz^2} \Big|_{z=l} = 0;$$

Бу шартлар ёйик кўринишда $z=0$ бўлган ҳол учун

$$D_{2n} + D_{4n} = 0; \quad -D_{2n}U^2 + D_{4n}U^2 = 0$$

бўлади. Бундан

$$D_{2n} = D_{4n} = 0 \quad (a)$$

келиб чиқади.

Чегаравий шартлар, (a) ни эътиборга олганда $z=l$ бўлган ҳол учун, куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} \sin u_n l + D_{3n} \operatorname{sh} u_n l &= 0; \\ -D_{4n} u_n^2 \sin u_n l + D_{3n} u_n^2 \operatorname{sh} u_n l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Системанинг нолдан фаркли ечимига эга бўлиши учун унинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$\left| \begin{array}{cc} \sin u_n l & \operatorname{sh} u_n l \\ -\sin u_n l & \operatorname{sh} u_n l \end{array} \right| = 0; \quad 2 \sin u_n l \cdot \operatorname{sh} u_n l = 0.$$

Бу ўринда $\operatorname{sh} U_n = 0$ шартидан фойдаланиб бўлмайди, чунки мазкур шарт $U=0$ бўлгандагина бажарилиши мумкин. Бу эса такрорлик ω нинг нолга тенг бўлишига, яъни тебранишнинг бўлмаслигига олиб келади. Шу сабабли $\sin U_n l = 0$ деб оламиз, ўз навбатида

$U_n \frac{\pi n}{l}$. Айни вақтда $\sin U_n l = 0$ ва $\operatorname{sh} U_n l \neq 0$ бўлганлиги

сабабли, (б) тенглама шартлари қаноатлантирилиши учун $D_{3n} = 0$ бўлиши зарур. Шундай қилиб нолдан фаркли интеграл доимийси биргина D_{1n} қолди.

Демак,

$$Z_n(z) = D_{1n} \sin U_n z = D_{1n} \sin \frac{\pi n}{l} z.$$

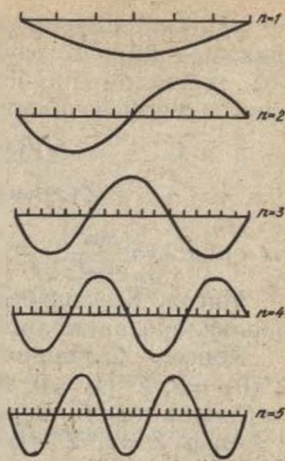
Хусусий тебраниш так-
рорликлари куйидаги форму-
ладан топилади:

$$\omega_n = U_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{m^2}} =$$

$$= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

18.1- расмда $\sin \pi z - l$ функ-
цияси бўйича курилган теб-
раниш шакллари тасвирлан-
ган.

Куйидаги ифода (18.5)
тенгламанинг ечими ҳисобла-
нади:



18.1- расм

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin U_n z \sin(\omega_n t + \lambda).$$

2. Силжиш тебранишлари. Кўпинча реал биноларнинг тебранишида кўндаланг кучлар таъсири эгувчи моментга нисбатан салмокли бўлади. Шу сабабли биноларда силжиш деформацияси вужудга келади. Бундай ҳол учун тебранишнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{\alpha GF} \cdot \frac{dQ(z)}{dz} = - \frac{q(z)}{\alpha GF} \quad (a)$$

кўринишга эга бўлади.

Бу ерда $Q(z)$ — кўндаланг куч; $q(z) = \frac{dQ(z)}{dz}$ — ёйик куч; α — системанинг кўндаланг кесимига боғлиқ бўлган коэффициент; F — кўндаланг кесим юзаси; G — силжиш модули.

Агар $q(z) = -m(z) \frac{d^2 y}{dt^2}$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда (a) тенглама

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{m}{\alpha GF} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (б)$$

кўринишга келади.

Сўнгги тенглама ечимини $y(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$ кўринишида излаймиз. Бу ечимнинг иккинчи тартибли ҳосиласини (б) тенгламага қўйсақ, ечимлари қуйидагича бўлган, иккита дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} T(t) &= A \sin(\omega t + \lambda); \\ Z(z) &= C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

Бу ерда $\lambda = \frac{m\omega^2}{\alpha GF}$.

Мисол. Консол балканинг — силжиш тебраниши такрорликлари аниқлансин.

Консол балканинг чегаравий шартлари: $z(0) = 0$; $Z'(0) = 0$; $Z''(l) = 0$; $Z'''(l) = 0$. Бундан $C_2 = 0$ ва $Z(z) = C_1 \sin \lambda z$ келиб чиқади.

Агар $Z=l$. $Z'''(l) = 0$ бўлса, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$C_1 \lambda^3 \cos \lambda l = 0.$$

C_1 ва λ нолдан фаркли микдорлар бўлганлиги сабабли, $\cos \lambda l = 0$; $\lambda l = \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$ ва ҳоказо бўлади.

Буларга мос такрорликлар

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}};$$

$$\omega_3 = \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}$$

ва ҳоказо.

3. Эгилиш-силжиш тебранишлари. Баъзан бино ва иншоотлар тебранишини ўрганишда эгилиш ва силжиш деформацияларини бир йўла ҳисобга олиш зарурати туғилади. Бундай ҳолда система тебранишининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI} - \frac{q(z)}{\alpha GF} \quad (\text{г})$$

бўлади.

Аввал қўриб ўтганимиздек, $q(z)$ ни инерция кучи орқали ифодаб, (г) тенгламани z бўйича икки марта дифференциалласак,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{m}{EI} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{m}{\alpha GF} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \cdot \partial z^2} = 0$$

келиб чиқади.

Мазкур тенгламанинг ечими тебраниш формулалари ва хусусий такрорликларини аниқлайдиган қуйидаги ифодаларни беради:

$$Z(z) = C_1 \left[\sin \lambda_i z - \frac{C_2}{C_1} (\cos \lambda_i z - ch \bar{\lambda}_i z) - \frac{C_3}{C_1} Sh \bar{\lambda}_i z \right];$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ\lambda_i^4}{m(1+K\lambda_i^2)}} \quad \text{ёки} \quad \omega = \sqrt{\frac{EJ\bar{\lambda}_i^4}{m(1-K\lambda_i^2)}}$$

$$\text{Бу ерда } K = \frac{EJ}{\alpha GF}; \quad (l\bar{\lambda}_i)^2 = \frac{(l\lambda_i)^2}{1+K\lambda_i^2}.$$

Бир учи мустаҳкам бириктирилган, иккинчи учи озод стержень учун

$$\lambda_i = \frac{\pi}{2l}, \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{l}, \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{l}, \dots$$

бўлади.

18.3. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР

Вазнга эга бўлган призма шаклидаги балканинг мажбурий тебранишлари масаласи қуйидаги тенгламани ечиш билан чамбарчас боғлиқдир:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q(z, t) \quad (18.13)$$

Бу ерда $q(z, t)$ — тебраниш уйғотувчи ёйик куч интенсивлиги. (18.13) тенглама чизиқли бўлганлиги сабабли, унинг умумий ечими ўзига мос бир жинсли тенглама (18.5) нинг умумий ечими ва мазкур бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимидан ташкил топади. Бир жинсли тенглама (18.5) нинг умумий ечими аввалги параграфда кўриб ўтилган эди. (18.13) тенгламанинг хусусий ечимига тўхталиб ўтамиз. Шу мақсадда хусусий ечим ва $q(z, t)$ функциясини қуйидаги кўринишда ифода-лаймиз:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) Z_n(z); \quad q(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) \cdot Z_n(z) \quad (18.14)$$

Бу ерда Z_n — балканинг тебраниш шаклини ифода-
ловчи функция. (18.14) ни (18.13) га қўйиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{S}_n(t) + \frac{EJ}{m} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} S_n(t) \right] \sin \frac{n\pi z}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \sin \frac{n\pi z}{l}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$\dot{S}_n = \frac{EJ}{m} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cdot S_n = H_n \quad (18.15)$$

келиб чиқади.

Бир жинсли тенгламанинг бошланғич шартлари хусу-
сий ечимини ҳам қаноатлантиради; шу сабабли унинг,
шунингдек, S_n функциясининг бошланғич шартлари бир
жинсли бўлади.

$$S(0) = 0; \quad \ddot{S}(0) = 0.$$

Шундай қилиб,

$$S_n = \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \int_0^t H_n(\tau) \sin \sqrt{\frac{EJ}{m}} (t - \tau) d\tau. \quad (18.16)$$

$H_n \tau$ функцияси Фурье катори коэффициентларини аник-
лайдиган оддий формуладан топилади.

$$H_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (18.17)$$

Қуйидаги ифодани (18.17) ни (18.16) га қўйиб
топилади:

$$S_n = \frac{2l}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \int_0^t d\tau \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{EJ}{m}} (t - \tau) dx. \quad (18.18)$$

(18.18) ни (18.14) га қўйсак, $y(z, t)$ келиб чиқади.

ИНШООТЛАР ТЕБРАНИШНИ ТАДҚИҚ ЭТИШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

Аввалги бобларда иншоотлар тебранишини тадқиқ этишнинг айрим аниқ усуллари билан танишиб чиққан эдик. Бирок улар кўпинча ҳисоб ишларида математик жиҳатдан анча мураккаб кийинчиликлар туғдиради. Иншоотларни лойиҳалаш жараёнида баъзан уларнинг динамик хоссаларини, тақрибан бўлса ҳам, тезда аниқлаш зарурати учраб туради. Бундай ҳолларда системаларни таҳлил қилишнинг тақрибий усуллари жуда қўл келади. Бунда гап система тебранишининг хусусий тақрорликлари ва шакллари аниқлаш ҳамда иншоотларнинг динамик мустаҳкамлигини текшириш ҳақида боради, албатта. Мазкур бобда ана шундай усуллар билан танишиб чиқамиз.

19.1. ЭНЕРГЕТИК УСУЛ

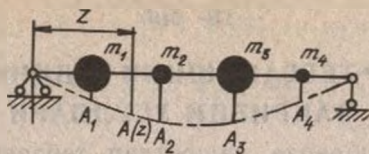
Энергетик усул қаршиликсиз муҳитда эркин тебраниш жараёнида системаларнинг потенциал ва кинетик энергиялари йиғиндиси ўзгармас миқдор эканлигига асосланади. Эркин тебраниш жараёнида системанинг кинетик энергияси эластик потенциал энергияга, потенциал энергия эса кинетик энергияга ўтиб туради. Муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса, энергиянинг сақланиш қонунига биноан

$$K + \Pi = C = \text{const} \quad (19.1)$$

бўлади, бу ерда K — кинетик энергия, Π — потенциал энергия.

Тебранаётган системанинг оғиши юқори бўлганда кинетик энергия нолга тенг бўлади, чунки бу вазиятда тебранаётган массаларнинг тезлиги ноль бўлади, система дастлабки мувозанат вазиятидан ўтаётган лаҳзада потенциал энергия нолга тенг, чунки бунда система деформацияланмаган ҳолатда бўлади. Потенциал энергия ноль бўлганида, кинетик энергия ўзининг энг катта қийматига ($K_{\max}$) эришади. Кинетик энергия ноль бўлганда эса потенциал энергия ($\Pi_{\max}$) максимум бўлади. Бу мулоҳазалардан $K_{\max} = \Pi_{\max}$ (19.2) келиб чиқади.

Кўп массали балка (19.1-расм) қуйидаги қонуният бўйича эркин тебраништи дейлик:



19.1-р а с м

$$y(z, t) = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (19.3)$$

бу ерда $y(z, t)$ — абсиссаси z бўлган нуктанинг t лаҳзадаги кўчиши; $A = A(z)$ — тебраниш шакли, яъни энг катта солқилик.

(19.3) тенглама барча нукталар битта фазада бир хил такрорлик билан тебранишини, яъни барча нукталар статик мувозанат ҳолатини бир вақтда босиб ўтиб, бир вақтнинг ўзида максимал солқиликка эришишини англатади.

Балка тебранаётган пайтда нукталарнинг тезлиги

$$\dot{y}(z, t) = A(z) \omega \cos(\omega t + \lambda)$$

тенгламадан топилади. Юкори кўчиш ва юкори тезлик

$$y_{\max} = A(z) \quad \dot{y}_{\max} = \omega A(z)$$

бўлади.

Балканинг солқилиги (кўчиши) юкори бўлгандаги потенциал энергия:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (A'')^2 dz. \quad (19.4)$$

Тезлик юкори бўлгандаги кинетик энергия:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \sum m_i (A \omega)^2, \quad (19.5)$$

бу ерда A_i — i -масса кўчишининг амплитудаси.

(19.2) га асосан (19.4) ни (19.5) га тенглаштирамиз ва бундан такрорликни аниқлаш формуласини (Рэлей формуласини) келтириб чиқарамиз:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ (A'')^2 dz}{\sum m_i A_i^2}. \quad (19.6)$$

Агар балкага узлуксиз ёйик масса қўйилган бўлса, махраждаги йиғинди интеграл билан алмаштирилади.

Агар тебранишларнинг ҳақиқий шакли $A=A(z)$ маълум бўлса, у ҳолда Релей формуласи аниқ натижа беради. Бирок $A(z)$ олдиндан маълум бўлмаганлиги сабабли, уни ўзимиз ихтиёрий равишда қабул қиламиз. Бунинг оқибатида ҳисоб тақрибий тус олади. (19.6) дан топилган такрорликнинг қиймати ҳамма вақт ҳақиқий қийматдан ортиқроқ юради.

$A(z)$ функциясини шундай танлаш керакки, тахмин қилинган тебраниш шакли ҳақиқий тебраниш шаклига мумкин қадар яқин келсин. Чегаравий шартларга қатъий амал қилиш зарур. Тахминий шакл ҳақиқий шаклга қанча яқин бўлса, ҳисоб шунча аниқ бўлади.

Мисол. Ўзаро тенг учта массага эга бўлган балканинг (19.2- расм) хусусий такрорлиги энергетик усулда аниқлансин.

Ечиш. Тебраниш шаклини

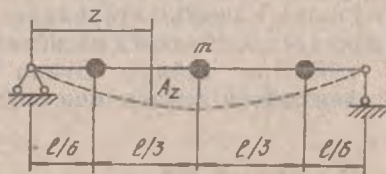
$$A = a \sin \frac{\pi z}{l}$$

қўринишда қабул қиламиз. Бу ифода барча чегаравий шартларни қаноатлантиради. Чунончи, $z=0$; ва $z=l$ бўлганда, $A=0$ ва $A''=0$; айти пайтда $A' \neq 0$; $A''' \neq 0$. Ифодадаги a микдор аниқсизлигича қолаверади, чунки у қасрнинг суратида ҳам махражда ҳам қатнашмаганлиги учун қисқариб кетади, ҳисоб натижасига таъсир этмайди.

Берилган ифодадан икки марта ҳосилла оламиз ва уни квадратга оширамиз:

$$A'' = -a \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l},$$

$$(A'')^2 = a^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l}.$$



19.2- расм

(19.6) формуланинг сурати

$$\int_0^l EJ (A'')^2 dz = \frac{a^2 \pi^4 EI}{2l^3} \text{ га тенг.}$$

Формула махражга кировчи кўчишларни ҳисоблаймиз:

$$A_1 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6} = \frac{a}{2};$$

$$A_2 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = a;$$

$$A_3 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{5l}{6} = \frac{a}{2}.$$

(19.6) формуланинг махражи

$$\sum m A_i^2 = m \left(\frac{a}{2} \right)^2 + m a^2 + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} m a^2.$$

Такрорлик квадрати

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{3ml^3}.$$

Такрорлик

$$\omega = \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}.$$

Такрорлиكنинг бу киймати аниқ усулда топилган

$$\omega = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}$$

кийматидан жуда оз фарк қилади.

(19.6) формуладан фойдаланишнинг бошқача йўллари ҳам бор. Масалан, тебраниш шакли $A(z)$ ни тахминий олмасдан, балкага ихтиёрий статик кучлар қўямиз ва бу кучлардан ҳосил бўлган солкиликни тебраниш шакли деб қабул қиламиз. Бу усулнинг қулайлиги шундаки, чегаравий шартлар ўз-ўзидан қаноатлантирилади.

Такрорлиги изланаётган балкага ихтиёрий $P_1, P_2, \dots$ кучлар системаси қўйилган дейлик. Бунда системанинг потенциал энергияси ташки кучлар иши орқали осонгина топилади:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \sum P A_i \quad (19.7)$$

бу ерда A_i — кабул килинган кучлар системаси таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Потенциал энергиянинг янги ифодасини (19.6) формулага қўйсак:

$$\omega^2 = \frac{\sum P_i A_i}{\sum m_i A_i} \quad (19.8)$$

келиб чиқади. Агар $P_i = m_i g$ эканлиги эътиборга олинса, тақрорлик формуласи янада соддалашади:

$$\omega^2 = g \frac{\sum m_i A_i}{\sum m_i A_i^2} \quad (19.9)$$

Масаланинг шартда берилган ташки кучларни ихтиёрий кучлар сифатида кабул қилса ҳам бўлади.

(19.6) формуладан фойдаланишнинг яна бир йўли билан танишиб ўтамиз. Бунда тебраниш шаклини аниқлаш учун балканинг ихтиёрий бир нуктасига биргина ташки куч қўямиз. A_0 — куч қўйилган нуктанинг («келтирилган нукта») шу куч таъсирида ҳосил бўлган кўчиши дейлик. У ҳолда балкада тўпланган юқори потенциал энергия

$$П_{\max} = \frac{1}{2} c A_0^2 \quad (19.10)$$

бўлади. Бу ерда c — балканинг бикирлик коэффиценти. (19.10) ифодани (19.5) ифодага теглаштириб,

$$\omega^2 = \frac{c A_0^2}{\sum m_i A_i} \quad (19.11)$$

формулага эга бўламиз.

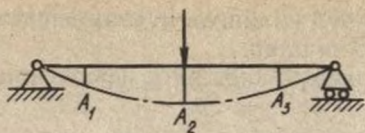
Қуйидаги ифода

$$m_0 = \frac{\sum m_i A_i^2}{A_0^2} \quad (19.12)$$

системанинг келтирилган массаси деб аталади.

Бунга эътиборга олсак, (19.11) формула янада ихчамлашади:

$$\omega^2 = \frac{c}{m_0} \quad (19.13)$$



19.3- расм

Мисол. Юкорида кўриб ўтилган балканинг такрорлигини (19.13) формула ёрдамида аниқлаймиз. Бунинг учун аввал йиғиқ куч таъсирида балканинг кўчишларини топамиз. Келтирилган нукта балканинг ўртасида деб олсак, у ҳолда қуйидаги кўчишларга эга бўламиз (19.3- расм);

$$A_1 = A_3 = \frac{39}{81} A_0, \quad A_2 = A_0;$$

(кучнинг киймати ва A_0 нинг масштаби аҳамиятга эга эмас).

(19.12) формуладан келтирилган массани топамиз:

$$m_0 = m \left(\frac{39}{81} \right)^2 + m + m \left(\frac{39}{81} \right)^2 = 1,4636m.$$

Берилган балканинг бикирлик коэффициенти

$$c = \frac{48EJ}{l^3}.$$

(19.13) формулага биноан такрорлиқнинг квадрати

$$\omega^2 = \frac{48EJ}{1,4636ml^3} = 32,79 \frac{NJ}{ml^3};$$

такрорлик

$$\omega = \frac{5,726}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Такрорлиқнинг бу киймати аниқ ечимдан 0,6 % фарк қилади.

19.2. БУБНОВ — ГАЛЁРКИН УСУЛИ

Агар қуйидаги дифференциал тенглама:

$$(E\tau y^{(1)})'' = m\omega^2 y_i(z) = 0 \quad (19.14)$$

системанинг эркин тебранишини ифодаласа, унинг ечими-ни

$$y_i(z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \quad (19.15)$$

қўринишда олиш мумкин. Бу ерда $\varphi_i(z)$ — барча чегаравий шартларни қаноатлантирувчи, танланувчи функция: a_i — номаълум коэффициентлар. (19.15) ни (19.1) га қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) = 0.$$

Бу айният ҳар қандай ихтиёрий функция $\varphi_k(z)$ га қўпайтирилганда ҳам ўз кучини саклаб қолади:

$$\left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m_i \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) = 0.$$

Тенгламанинг интегралини тузамиз:

$$\int_0^l \left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m_i \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) dz = 0. \quad (19.16)$$

(19.16) тенглама Бубнов—Галёркин усули тенгламаси деб аталади. Мазкур тенглама a_i коэффициентларига нисбатан бир жинслидир. Тенгламанинг нолдан фаркли ечимига эга бўлиши учун унинг аникловчиси нолга тенглаштирилади. Ҳосил бўлган тенгламанинг энг кичик илдизи системанинг хусусий такрорлиги бўлади.

Биринчи яқинлашувда, яъни $n=1$ бўлганда, каноник тенглама $C_{11} a_1=0$ бўлади. $a_1 \neq 0$ бўлгани учун

$$C_{11} = \int_0^l \{ [EJ \varphi_1''(z)]'' \varphi_1(z) - \omega_1^2 m \varphi_1^2(z) \} dz = 0. \quad (19.17)$$

Бу ердан такрорлик квадратини аниклайдиган

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l [EJ \varphi_1''(z)]'' \varphi_1(z) dz}{\int_0^l m \varphi_1^2(z) dz} \quad (19.18)$$

формула келиб чиқади. $\varphi_i(z)$ функция тебранишнинг асосий шаклига қанча яқин танланса, ҳисоб аниқлиги шунча ортади.

Мисол. Бир учи шарнирли қўзғалмас, иккинчи учи шарнирли қўзғалувчан таянчга эга бўлган, текис ёйик массали балканинг биринчи такрорлиги тақрибий усулда аниқлансин ва аниқ ечим билан таққослансин.

1. Танланувчи функцияни $\varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{l}$ кўринишда, яъни тебраниш биринчи шаклининг аниқ ифодаси бўйича оламиз. (19.18) га кўра

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right) \right]'' \sin \frac{\pi z}{l} dz}{\int_0^l m \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}.$$

Биринчи такрорлиқнинг аниқ қийматига эга бўлдик.

2. Танланувчи функцияни балканинг ёйик кучдан ҳосил бўлган солкилиги кўринишида қабул қиламиз:

$$\varphi_1(z) = A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right), \text{ бу ерда } A = \frac{ql^4}{24EJ}.$$

(19.18) формулага кўра

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\int_0^l \left[EJ \frac{A}{l^2} \left(-\frac{12z}{l} + \frac{12z^2}{l^2} \right) \right]'' A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz}{\int_0^l mA^2 \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz} = \\ &= \frac{97,55}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}; \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{9,877}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ аниқ қиймати } \omega_1 = \frac{9,8696}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

19.3. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШУВ УСУЛИ

Бир неча массага эга бўлган система тебранганда ҳар бир массада (система энг катта солкиликка эришганда)

$$J_{ni} = m_i A_i \omega^2$$

инерция кучи ҳосил бўлади. Агар бу кучларнинг микдори маълум бўлганида тебраниш шакли ва такрорлигини осонгина аниқласа бўларди. Бирок кучларнинг микдори такрорликка боғлиқ бўлгани учун номаълумдир. Бундай ҳолларда масалани ҳал этишда кетма-кет яқинлашув усули жуда қўл келади.

Кетма-кет яқинлашув усулининг Стодола таклиф этган вариантыни кўриб ўтамиз. Биринчи яқинлашувда балканинг солкилиги A_1 ни ихтиёрий қабул қиламиз. Бунга мос инерция кучи

$$J_{ni}^{(1)} = m_i A_i \omega_1^2$$

бўлади; ω_1^2 — ҳозирча номаълум микдор.

ω_1^2 марта кичрайтирилган $J_{ni}^{(1)}$ кучидан (яъни $m_i A_i$) кучидан ҳосил бўладиган солкилик A_{12} ни аниқлаймиз; $J_{ni}^{(1)}$ дан ҳосил бўладиган ҳақиқий солкилик ω_1^2 марта катта бўлади:

$$A_{12} \omega_1^2.$$

Агар A_1 солкилик аниқ танланса, у ҳолда A_2 солкилик A_1 га айнан ўхшаш бўлади ва

$$A_{11} = A_{12} \omega_1^2$$

тенглик бажарилади. Бу ердан

$$\omega_1^2 = \frac{A_{11}}{A_{12}}.$$

Тебраниш шакли A_1 тақрибан қабул қилинганлигидан ҳисоб натижаси ҳам тақрибий бўлади. Шу сабабли, A_{11} A_{12} нисбат ҳам турли нуқталар i учун турлича қийматга эга бўлади, такрорлик квадратининг тақрибий қиймати учун эса солкилик энг юқори бўлган нуқтанинг амплитудалари олинади:

$$\omega_1^2 = \frac{A_{1\max}}{A_{2\max}}$$

формула келиб чиқади. $\varphi_1(z)$ функция тебранишнинг асосий шаклига қанча яқин танланса, ҳисоб аниқлиги шунча ортади.

Мисол. Бир учи шарнирли кўзғалмас, иккинчи учи шарнирли кўзғалувчан таянчга эга бўлган, текис ёйик массали балканинг биринчи такрорлиги тақрибий усулда аниқлансин ва аниқ ечим билан таққослансин.

1. Танланувчи функцияни $\varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{l}$ кўринишда, яъни тебраниш биринчи шаклининг аниқ ифодаси бўйича оламиз. (19.18) га кўра

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right) \right]'' \sin \frac{\pi z}{l} dz}{\int_0^l m \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}.$$

Биринчи такрорликнинг аниқ қийматига эга бўлдик.

2. Танланувчи функцияни балканинг ёйик кучдан ҳосил бўлган солкилиги кўринишида қабул қиламиз:

$$\varphi_1(z) = A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right), \text{ бу ерда } A = \frac{ql^4}{24EJ}.$$

(19.18) формулага кўра

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\int_0^l \left[EJ \frac{A}{l^2} \left(-\frac{12z}{l} + \frac{12z^2}{l^2} \right) \right]'' A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz}{\int_0^l mA^2 \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz} = \\ &= \frac{97,55}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}; \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{9,877}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ аниқ қиймати } \omega_1 = \frac{9,8696}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

19.3. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШУВ УСУЛИ

Бир неча массага эга бўлган система тебранганда ҳар бир массада (система энг катта солкиликка эришганда)

$$J_{ni} = m_i A_i \omega^2$$

инерция кучи ҳосил бўлади. Агар бу кучларнинг микдори маълум бўлганида тебраниш шакли ва такрорлигини осонгина аниқласа бўларди. Бирок кучларнинг микдори такрорликка боғлиқ бўлгани учун номаълумдир. Бундай ҳолларда масалани ҳал этишда кетма-кет яқинлашув усули жуда қўл келади.

Кетма-кет яқинлашув усулининг Стодола таклиф этган вариантини кўриб ўтамиз. Биринчи яқинлашувда балканинг солкилиги A_1 ни ихтиёрий қабул қиламиз. Бунга мос инерция кучи

$$J_{ni}^{(1)} = m_i A_i \omega_1^2$$

бўлади; ω_1^2 — ҳозирча номаълум микдор.

ω_1^2 марта кичрайтирилган $J_{ni}^{(1)}$ кучидан (яъни $m_i A_i$) кучидан ҳосил бўладиган солкилик A_{12} ни аниқлаймиз; $J_{ni}^{(1)}$ дан ҳосил бўладиган ҳақиқий солкилик ω_1^2 марта катта бўлади:

$$A_{12} \omega_1^2.$$

Агар A_1 солкилик аниқ танланса, у ҳолда A_2 солкилик A_1 га айнан ўхшаш бўлади ва

$$A_{11} = A_{12} \omega_1^2$$

тенглик бажарилади. Бу ердан

$$\omega_1^2 = \frac{A_{11}}{A_{12}}.$$

Тебраниш шакли A_1 тақрибан қабул қилинганлигидан ҳисоб натижаси ҳам тақрибий бўлади. Шу сабабли, A_{11} A_{12} нисбат ҳам турли нукталар i учун турлича қийматга эга бўлади, такрорлик квадратининг тақрибий қиймати учун эса солкилик энг юқори бўлган нуктанинг амплитудалари олинади:

$$\omega_1^2 = \frac{A_{1\max}}{A_{2\max}}$$

Шундай қилиб, такрорликнинг тақрибий қиймати икки солкиликнинг характерли ординаталари нисбатига тенг экан: солкиликларнинг бири A_1 қабул қилинадиган микдор бўлиб, иккинчиси $m_1 A_{11}$ кучи таъсирида ҳисоблаб топиладиган A_2 солкиликдир. Агар $\frac{A_1}{A_2}$ нисбат барча нук-

талар i учун бир хил қийматга эга бўлса, натижа каноатланарли бўлади, борди-ю нисбат турли қийматга эга бўлса, у ҳолда иккинчи яқинлашувни бажариш зарур. Бунда A_2 ни бошланғич шакл сифатида қабул қилиб, $m_1 A_{12}$ кучи топилади ва унинг таъсирида ҳосил бўладиган солкилик A_3 аниқланади. Иккинчи яқинлашувда такрорлик квадрат

$$\omega_2^2 = \frac{A_{2\max}}{A_{3\max}}$$

нисбатдан топилади.

Яқинлашувлар барча нукталар учун бир хил нисбатлар ҳосил бўлгунга қадар шу йўсинда давом эттирилаверади.

19.4. ДУНКЕРЛАЙ ФОРМУЛАСИ

Дункерлай формуласи эркинлик даражаси бир неча бўлган системаларнинг биринчи такрорлигини тақрибан аниқлашда қўлланилади.

Агар балкага бирич-кетинг массалар юкласак, ҳар бир массага ҳосил бўлган тебраниш такрорлиги

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{m_i \delta_{ii}}}$$

бўлади; бунда

$$\frac{1}{\omega_i^2} = m_i \delta_{ii} \quad (19.19)$$

бу ерда δ_{ii} — йиғиқ масса m_i жойлашган нуктага қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган кўчиш.

Дункерлай формуласига кўра, қолган массаларнинг система тебранишига бўлган таъсири, уларнинг (19.19) формуладан топилган қийматларини қўшиб орқали ҳисобга олинади, яъни

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

ёки

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n m_j \delta_{jj}}} \quad (19.20)$$

Энергетик усулда такрорлик орттирилган кийматда топилган бўлса, Дункерлай формуласи такрорликнинг кичрайган кийматини беради. Такрорликнинг аниқ киймати шу икки киймат орасида ётади. Бирок тақрибий ҳисобларнинг аниқлик даражаси амалий талабларни тўла қаноатлантиради.

Мисол. Энергетик усулда ҳисобланган уч массали балканинг (19.2-расмга қаранг) такрорлиги Дункерлай формуласи ёрдамида аниқлансин.

Бир массали системанинг такрорлиги аввалдан маълум формула $\omega^2 = \frac{c}{m}$ дан топилади. Бизнинг ҳолда бикирлик

коэффициенти $C = \frac{3EI(a+b)}{A^2b^2}$ ифодадан аниқланади. Бу ерда: a — массадан чап таянчгача бўлган масофа, b — массадан ўнг таянчгача бўлган масофа.

Чапдаги ва ўнгдаги массалар учун тебраниш такрорлиги бир хил бўлади:

$$\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{3 \cdot 1296EI}{25ml^3} = 155,5 \frac{EI}{ml^3}$$

Иккита четки массани йўқ деб фараз қилиб, факат ўртадаги массанинг ўзини олсак, тебраниш такрорлиги

$$\omega_2^2 = \frac{48EI}{ml^3}$$

бўлади. Дункерлай формуласига кўра:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{ml^3}{155,5EI} + \frac{ml^3}{48EI} + \frac{ml^3}{155,5EI} = 0,03368 \frac{ml^3}{EI}$$

Бундан

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{0,03368ml^3}} = \frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}$$

Бу натижа такрорликнинг аниқ кийматидан 5,5 % камроқдир.

Шундай қилиб, такрорликнинг аниқ қиймати энергетик усул ва Дункерлай формуласи билан топилган қийматларнинг оралиғида ётишига ишонч ҳосил қилдик, яъни

$$\frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}} < \omega_0 < \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

19.5. СПЕКТРАЛ ФУНКЦИЯ УСУЛИ

С. А. Бернштейн ўзининг бу усулида изланаётган хусусий такрорлик квадратининг юкори ва куйи чегараларини белгилаб беради:

$$\frac{1}{\sqrt{B_{12}}} < \omega_i^2 < \frac{2}{1 \cdot B_{11} + \sqrt{2 \frac{B_{12}^2}{B_{11}^2} - 1}} \quad (19.21)$$

Эркин тебранишларнинг биринчи такрорлигини аниқлашда B_{11} ва B_{12} куйидаги формулалар орқали топилади:

$$B_{11} = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{jj} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{nn};$$

$$B_{12} = \sum_{i=1}^n m_i^2 \delta_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i m_k \delta_{jk}^2 (j \neq k).$$

Хусусий тебранишларнинг иккинчи такрорлиги (ω_2)ни аниқлашда куйидаги формулалардан фойдаланилади:

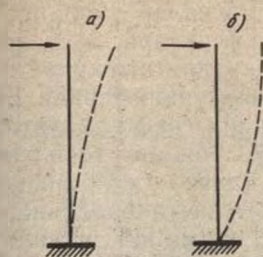
$$B_{21} = B_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}; \quad B_{22} = B_{12} - \frac{1}{\omega_1^4}.$$

Такрорликнинг ҳисобий қиймати сифатида тенгсизликнинг чап ва ўнг томонидаги натижаларнинг ўртача арифметик қиймати олинади.

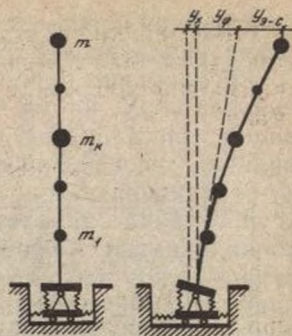
19.6. «ИНШОТ — ЗАМИН» СИСТЕМАСИНING ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ¹

Реал бино ва иншоотларнинг тебранишида ҳар бир нуктанинг умумий кўчиши икки хил кўчишнинг йиғиндисидан — бинонинг эластик деформацияси оқибатидаги

¹ Мазкур параграфда баён этилган усул Б. А. Ҳобилов ва В. П. Цой томонидан ишлаб чиқилган.



19.4- расм



19.5- расм

кўчиш ҳамда заминнинг деформацияланиши натижасида юзага келадиган кўчишлардан ташкил топади. Ўз навбатида, иншоотлар тузилиши, массаси ва ўлчамларига қараб эгилиш (19.4- расм, а) ёки силжиш (19.4- расм, б) деформацияси бўйича тебранади. Кўпинча иншоотлар тебранишида деформациянинг ҳар иккала хили барабар иштирок этади. Бундай тебранишлар эгилиш-силжиш тебранишлари деб аталади.

Иншоот кўчишларида замин (ер)нинг қайишқоклиги (эластиклиги) ҳам сезиларли роль ўйнайди. Ҳар қандай бино тебраниш жараёнида замин устида чайқалиши (оғишма ҳаракатда бўлиши) ҳамда замин бўйлаб силжиши (сирпанма ҳаракатда бўлиши) мумкин. Демак, заминнинг қайишқоклиги ҳам иншоотлар тебранишида икки хил — *чайқалма* ва *сирпанма кўчишлари*ни юзага келтирар экан.

Тебраниш жараёнида ана шу тўрттала омил эътиборга олинadиган ҳисоблаш моделини илмий адабиётда «*иншоот-замин*» системаси деб юритилади.

Ҳозир кўриб ўтиладиган усулда ҳар қандай система-нинг эркин тебраниши такрорлиги ва шаклини аниқлашда юқорида санаб ўтилган тўрттала кўчиш ҳисобга олинади. Бу усулга кўра бинонинг замин устидаги оғишма ва сирпанма тебранишлари аниқланаётганда бино абсолют каттиқ жисм деб фараз этилади. Бинонинг эластик эгилиш-силжиш тебранишлари эса каттиқ жисмга боғланган координата системаси орқали аниқланади. Бундай ҳолатни акс эттирувчи динамик ҳисоблаш тархи 19.5- расмда тасвирланган. Усулнинг замирида тебраниш

шакллариини кетма-кет яқинлаштириш усули билан солкиликни аниқлашнинг графоаналитик усули ётади.

Усулларнинг биринчисига кўра, массалар тўпланган нуқталарнинг қабул қилинган солкиликлари мос равишда, массаларга ва такрорликнинг квадратига кўпайтирилади. Ҳосил бўлган кўпайтма инерция кучини беради. Бу куч таъсирида вужудга келган солкилик графо-аналитик усул бўйича аниқланади. Шу йўл билан топилган солкиликларни биринчи яқинлашувдаги тебраниш шакллари деб қаралади. Изланаётган такрорликларнинг тақрибий қийматлари иккита кетма-кет яқинлашувдаги солкиликларнинг тенглиги шартидан фойдаланиб топилади. Агар қабул қилинган тебраниш шакллари (солкилик) ҳисоблаш натижасида топилган шаклларга етарли даражада яқин бўлса, такрорликларнинг тақрибий қийматлари ҳам бир хил бўлади. Изланаётган такрорлик тақрибий қийматларнинг ўртача арифметик миқдори сифатида аниқланади.

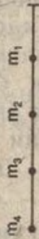
Усулнинг тафсилотини тўрт массали системанинг мисолида баён этамиз. Иншоотнинг ҳисоблаш тарҳи 19.5-расмдаги сингари бўлади. Системанинг асосий (биринчи) тебраниш шакли ва шунга мос такрорлигини аниқлаш талаб этилади, дейлик.

Ҳисоб ишлари жадвал кўринишида бажарилади. 1-жадвалда эгилиш, 2-жадвалда эса силжиш тебранишлари ҳисобланади. Иккала ҳолда ҳам таянч қайишқоқлиги ҳисобга олинмаган.

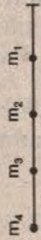
1-жадвалнинг дастлабки устунида механик миқдорлар, охиригида ҳисоблаш алгоритми (тартиби) келтирилган. Охиридан битта олдинги устундаги «кўпайтувчилар» ҳисоб ишларини соддалаштириш мақсадида киритилган. Бу миқдорлар арифметик амалларда қавсдан ташқарига чиқарилган сон вазифасини ўтайди. Ўртадаги устунларда ҳисоблаш тарҳи тасвирланган. Агар берилган система кўп қаватли бино бўлса, у ҳолда массалар қаватлараро ёпмалар сатҳида тўпланади. Массаларни тўплашда бинонинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал элементлари вазни йиғиб чиқилади. Қаватлар вазни йиғиқ куч сифатида жадвалнинг биринчи қаторида келтирилган.

Жадвалнинг иккинчи қаторида иншоот вертикал элементларининг эгилишдаги бикирлиги берилган. Қулайлик учун EJ «кўпайтувчи» устунига чиқарилган. Тебраниш шакллари $z_i^{(0)}$ полинчи яқинлашувда ихтиёрий

ЭГИЛИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик микдорлар						Қўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m_4	m_3	m_2	m_1			
1	Ҳийик куч	300	300	300	300		$18 \cdot 10^6$	кабул килинади (1)(3) $\Sigma(4) \rightarrow$ $\Sigma(5) \rightarrow$ (6)(2)
2	Бикирлик EJ	1	1	1	1		Z_4	
3	Тебраниш шакли $Z_i^{(0)}$	1,0	0,8	0,5	0,1	0,0	$\omega^2 Z_4 \cdot g$	
4	Инерция кучи	300	240	150	30	0,0	— « —	
5	Қўдаланг куч Q	300	540	690	720		$\lambda \omega^2 Z_4 \cdot g$	
6	Эгувчи момент M	0	300	840	1530	2250		M эпюраси юзаси $\rightarrow \Sigma(8)$ $\rightarrow \Sigma(9)$ (y_1)(y_4) $\omega_1^{2p} = 20,45$
7	Фиктив куч интенсивли- ги	0	300	840	1530	2250	$\lambda^2 \omega^2 Z_4 \cdot g EJ$	
8	Ҳийик фиктив куч	0	337,5	840	1530	2250	$\lambda^3 \omega^3 Z_4 \cdot EJ g$	
9	Солкилик бурчаги φ	4957,5	4620	3780	2250		— » —	
10	Солкилик y_i	15607,5	10650	6030	2250	0,0	$\lambda^3 \omega^3 Z_4 \cdot EJ g$	
11	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,68	0,39	0,14	0,0		
12	Тебраниш такрорлиги ω_1	20,5	20,4	20,7	20,2	0,0		

СИЛЖИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик микдорлар						Қўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
1	Йиғиқ куч	300	300	300	300	300	$0,24 \cdot 10^6$	қабул қилинади (1)-(3) $\Sigma(4) \rightarrow$ (5)-(2) Q эпюраси юзаси $\rightarrow \Sigma(7)$ (y ₁)(y ₄) $\omega_{\text{дв}} = 17,2$
2	Бикирлик αGF	1	1	1	1	1	Z_4	
3	Тебраниш шакли $Z_{II}^{(0)}$	1,0	0,9	0,8	0,5	0,0	$\omega^2 Z_4; g$	
4	Инерция кучи	300	270	240	150	0,0	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	
5	Қўндаланг куч Q	300	570	810	960		$\omega^2 Z_4; \alpha GFg$	
6	Фиктив куч интенсивлиги	300	570	810	960		$\lambda \omega^2 Z_4; \alpha GFg$	
7	Йиғиқ фиктив куч	0	300	570	810	960	$\rightarrow \rightarrow$	
8	Солқилық U_{II}	2640	2340	1770	960	0,0		
9	Тебраниш шакли $Z_{II}^{(1)}$	1,0	0,89	0,67	0,36	0,0		
10	Тебраниш тақоррлиги ω_{II}	17,2	17,3	17,2	17,1	0,0		

жойлашган бикир жисм туридаги хусусий система тебранишлари текширилади.

Иншоотнинг оғишма (ω_ϕ) ва сирпанма (ω_x) тебраниши такрорликлари куйидаги формулалардан аникланади:

$$\omega_\phi^2 = \frac{1}{J_0} (c_\phi J_\phi - P J_c);$$

$$\omega_x^2 = \frac{1}{M_c} C_x F_\phi \quad (19.26)$$

бу ерда: J_ϕ — пойдевор ости юзасининг инерция моменти; F_ϕ — пойдевор ости юзаси; P_c — иншоотнинг умумий вазни (пойдевор вазни ҳам кўшилади); M_c — иншоот массаси; C_x — грунтнинг текис эластик сирпаниш коэффиценти; C_ϕ — грунтнинг нотекис эластик сикилиш коэффиценти; J_0 — системанинг кутби 0 дан ўтувчи, тебраниш текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан олинган инерция моменти: $J_0 = \sum r_i^2 m_i$; l_c — пойдевор ости юзасининг оғирлик марказида ўтувчи кутб 0 дан системанинг инерция

марказигача бўлган масофа: $l_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$; r — кутбдан

массаларгача бўлган масофа.

Ҳисоб натижаларининг аниқлик даражаси куп жihatдан C_ϕ ва C_x коэффицентларини тўғри танлашга боғлиқ. Ҳар иккала коэффицент замин тупроғининг физик-механик хоссаларига боғлиқ микдорлар бўлиб, уларни аниқлашда турли усуллар мавжуд. Илмий гадки-котларнинг кўрсатишича, синчли биноларни ҳисоблашда О. А. Савинов¹ усули, синчсиз биноларда эса СН 18-58² қурилиш нормаларида берилган усул жуда қўл келади.

Хусусий системалар такрорлиги ва уларга мос даври аниқлангач, бикир системанинг қайишқок заминдаги эркин тебранишлари даври Дункерлай формуласи билан аникланади:

$$T_{\phi, x} = \sqrt{T_\phi^2 + T_x^2} \quad (19.27)$$

¹ О. А. Савинов, Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Стройиздат, 1964.

² Технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (СН 18-58).

Иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформацияларини, шунингдек замин бўйлаб сирпаниши ва оғишини ҳисобга олувчи эркин тебранишлари даври

$$T_{\text{э.с.ф.х}} = \sqrt{T_{\text{э.с}}^2 + T_{\text{ф.х}}^2} \quad (19.28)$$

қўринишда аникланади.

Қўриб ўтилган учул «иншоот-замин» системасининг эркин тебранишлари даврини аниқлашда, шунингдек иншоотнинг умумий ишида алоҳида омиллар (бино вертикал ўқининг эгилиши ва силжиши, қайишқоқ заминда бинонинг оғиши ва сирпаниши) улушига баҳо беришда катта қулайлик туғдиради. Бирок бу усул «иншоот-замин» системасининг тебранишлари шаклини белгилашда махсус ҳисоб ишлари бажаришни талаб этади. Усулнинг кейинги параграфда қўриб ўтиладиган бошқа варианти системанинг эркин тебранишлари даври ва шаклини, барча омилларни ҳисобга олган ҳолда, бир вақтнинг ўзида аниқлаш имконини беради.

19.7. ИНШООТЛАР ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ ДАВРИ ВА ШАКЛИНИ АНИҚЛАШ¹

Бундан олдинги параграфда «иншоот-замин» системасининг тебранишида алоҳида параметрларни аниқлаш масаласи билан танишиб чиққан эдик. Мазкур параграфда иншоотларнинг эркин тебранишлари даври (такрорлиги) ҳамда шаклини бир йўла аниқлаш усулини қўриб ўтамиз. Бу ерда ҳам усулнинг замирида кетма-кет яқинлашув усули ётади, ҳисоблаш тарҳи ҳам аввалгича қолади (19.5-расмга қаранг).

Усулда қўлланиладиган асосий механик микдорлар: солкилик бурчаги, эгувчи момент ва қўндаланг кучлар қуйидаги формулалардан аникланади:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi_s + \varphi_c \quad (19.29)$$

$$M = -EJ \frac{\partial y}{\partial x}, \quad Q = \alpha GF \varphi_c \quad (19.30)$$

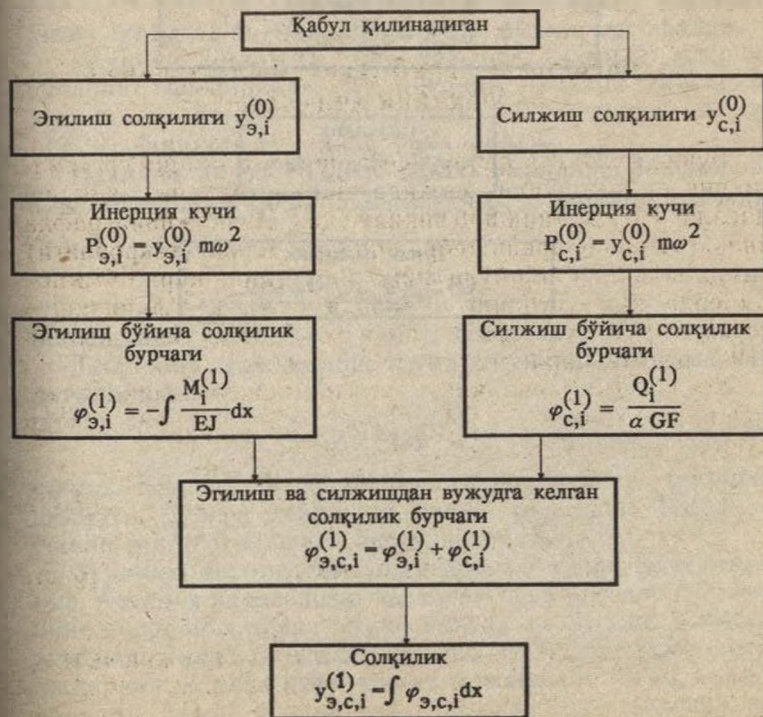
¹ Бу усул К. С. Абдурашидов, Б. А. Хобилов ва В. П. Цой томонидан ишлаб чиқилган.

бу ерда y — иншоот вертикал ўқи нукталарининг эластик оғиши (солкилик); φ , — факат эғувчи моментдан ҳосил бўлган оғиш (солкилик) бурчаги; φ_c — кўндаланг кучдан ҳосил бўлган оғиш бурчаги; EI ва GF эгилиш ва силжишдаги бикирликлар; α — кўндаланг кесим шаклига боғлиқ бўлган коэффициент.

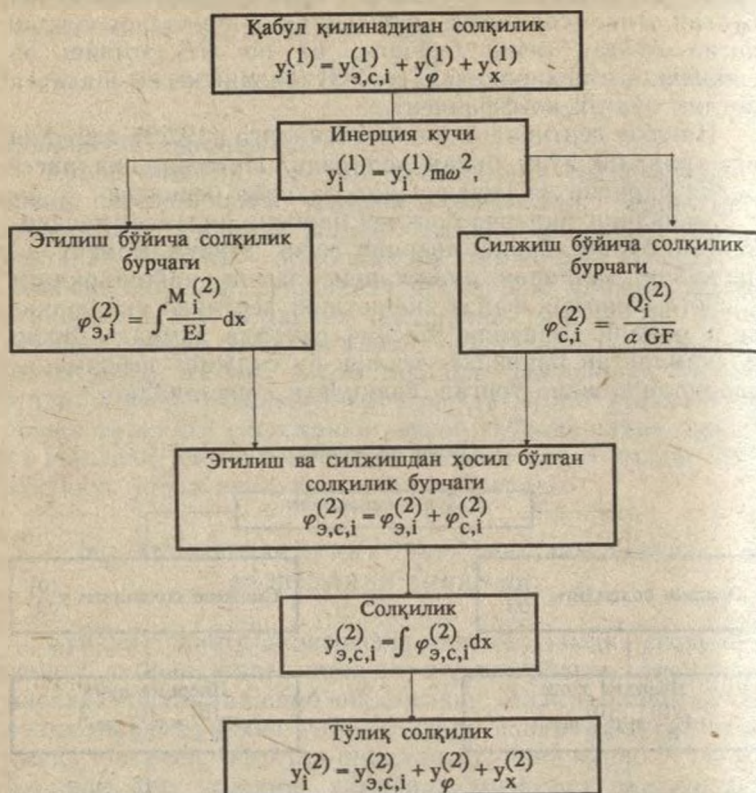
Иншоот вертикал ўқининг солкилиги (19.29) ифодани интеграллаш йўли билан топилади. Интеграллаш алгоритми биринчи ва иккинчи андозаларда берилган.

Ҳисобнинг биринчи боскичи биринчи андозада тасвирланган бўлиб, бунда инерция кучи, эғувчи момент ва қирқувчи кучларни аниқлашда замин қайишқоқлиги ҳисобга олинмай, факат иншоотнинг вертикал ўқи солкилиги орқали топилади. Боскич охирида заминга бикир маҳкамланган бинонинг, эгилиш ва силжиш деформацияларидан ташкил топган, солкилиги аниқланади.

Биринчи андоза



Иккинчи андоза



Ҳисобнинг иккинчи боскичида (2- андоза) биринчи яқинлашув учун иншоотнинг тебраниш шакли сифатида куйидаги ифода кабул қилинади:

$$y_i^{(1)} = y_{\varphi, c, d}^{(1)} + y_{\varphi}^{(1)} + y_x^{(1)}, \quad (a)$$

бу ерда $y_{\varphi, c, d}^{(1)}$ — иншоот вертикал ўқининг эгилиш ва сил-жиш деформацияларидан ташкил топган солкилиги; $y_{\varphi}^{(1)}$ — бинонинг кайишқоқ заминда оғишидан ҳосил бўлган солкилиги; $y_x^{(1)}$ — бинонинг замин бўйлаб сирпаниши.

Ўз навбатида кейинги икки микдор куйидаги формула-лардан топилади:

$$y_{\varphi}^{(1)} = (h_{\varphi} + h_i) \frac{M_{\max}^{(1)}}{c_{\varphi} J_{\varphi}}; \quad y_x^{(1)} = \frac{Q_{\max}^{(1)}}{C_x F_{\varphi}}$$

бу ерда $M_{\max}$ ва $Q_{\max}$ бино асосидаги эғувчи момент ва кўндаланг куч; h_{φ} — пойдевор баландлиги; h_i — пойдевор устки сиртидан йиғик массаларгача бўлган масофалар.

Иккинчи андозада (a) ифодаси асосида инерция кучлари ҳисобланади. Бу инерция кучлари таъсирида вужудга келадиган эғувчи момент ва кўндаланг кучлар (19.30) формула ёрдамида аниқланади.

Иккинчи андоза бўйича ҳисоб амаллари бажарилиб, бино вертикал ўқининг солкилиги $y_{\varphi, c, d}^{(2)}$ кейин бинонинг тўлиқ горизонтал кўчиши

$$y_i^{(2)} = y_{\varphi, c, d}^{(2)} + y_{\varphi}^{(2)} + y_x^{(2)} \quad (б)$$

аниқланади.

Тебраниш шакллари кетма-кет яқинлаштириш усу-лига биноан

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} \quad (в)$$

шарти асосида изланаётган такрорликнинг тақрибий қиймати, сўнгра тебраниш даври топилади. Тебраниш шакли эса (б) ифодаси асосида аниқланади.

Усулнинг моҳиятини тушунтириш учун мисол келтира-миз. Аввалги параграфда берилган тўрт массали система-нинг тебраниш даври (такрорлиги) ва асосий шаклини аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бу сафар ҳам ҳисоб ишларини жадвал кўринишида бажарамиз (3- ва 4- жад-валлар). Қўлай бўлсин учун ҳисоб ишлари андозаларга

мос равишда икки боскичга ажратилган: биринчи боскичда (3- жадвал) замин абсолют бикир деб олиниб, иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформациялари натижа-сида ҳосил бўлган кўчишлар аниқланади, иккинчи боскичда эса (4- жадвал) замин қайишқоқлиги эътиборга олинган ҳолда иншоот тебранишининг такрорлиги ва шакли излаб топилади.

Жадвалларнинг «Ҳисоблаш алгоритми» деб номланган охирги устунда навбатдаги қатор рақамларини аввалги қаторлар рақамлари асосида аниқлаш усули берилган. Масалан, (1) · (3) — биринчи қатор рақамларининг учинчи қатор рақамларига мос равишда кўпайтириш лозимлигини англатади; Σ (4) — тўртинчи қатор рақамларини чапдан ўнгга томон йиғиндиси олиниши зарурлигини билдиради. 4- жадвалда кичик қавс билан шу жадвал қаторлари, ўрта қавс билан эса 3- жадвал қаторлари белгиланган. Масалан, [1] · (15) — учинчи жадвалнинг 1- қатори рақамларини 4- жадвалнинг 15- қатори рақамларига кўпайтириш зарур демакдир. Ҳар иккала жадвалда β^2 коэффиценти қуйидаги ифодадан топилади:

$$\beta^2 = \frac{EJ}{\alpha G F \lambda^2};$$

бу ерда λ — йиғиқ массалар орасидаги масофа.

Масала шарида қўйилган саволларга 4- жадвалнинг 20 ва 21- қаторларидан жавоб топамиз. Чунончи, 20- қатор рақамлари тебраниш шаклини англатади. 21- қатор рақамларининг ўртача арифметик қиймати тебраниш такрорлигининг тақрибий қиймати $\omega^{yp} = 9,37$ ни беради. Такрорлиқнинг бу қиймати асосида тебраниш даври аниқланади:

$$T = 0,67 \text{ с.}$$

№	Механик миқдорлар	$m_4 \quad m_3 \quad m_2 \quad m_1$					Қўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		300	300	300	300	300		
1	Ўнгиқ куч	300	300	300	300			
2	Бикирлик EJ	1	1	1	1		$18 \cdot 10^6$	
3	$y_{3,1}^{(0)} = Z_{11}^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,7	0,4	0,1	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
4	Инерция кучи	300	210	120	30	0,0	$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)-(3)
5	Қўндаланг куч Q	300	510	630	660		$\rightarrow -$	$\Sigma(4) \rightarrow$
6	Эгувчи момент M	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot g$	$\Sigma(5) \rightarrow$
7	Ўнгиқ фиктив куч	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(6)-(2)
8	Ўнгиқ фиктив куч	0,0	337,5	810	1440	2100	$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	M эп. юзаси
9	Солқилик бурчаги $\varphi_{3,1}^{(1)}$	4687,5	4350	3540	2100		$\rightarrow -$	$\leftarrow \Sigma(8)$
10	Бикирлик $\alpha \cdot GF$	1	1	1	1		$0,24 \cdot 10^6$	
11	$y_{1,1}^{(0)} = Z_{11}^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,9	0,7	0,3	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
12	Инерция кучи	300	270	210	90	0,0	$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)-(11)
13	Қўндаланг куч Q	300	570	780	870		$\rightarrow -$	$\Sigma(12) \rightarrow$
14	Солқилик бурчаги $\varphi_{3,1}^{(1)}$	300	570	780	870		$\omega^2 y_4 \cdot \alpha GFg$	(13)-(10)

Ўзлигиш тебраннишлари	Силжиш тебраннишлари	1	Ўнгиқ куч	300	300	300	300			
		2	Бикирлик EJ	1	1	1	1		$18 \cdot 10^6$	
		3	$y_{3,1}^{(0)} = Z_{11}^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,7	0,4	0,1	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
		4	Инерция кучи	300	210	120	30	0,0	$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)-(3)
		5	Қўндаланг куч Q	300	510	630	660		$\rightarrow -$	$\Sigma(4) \rightarrow$
		6	Эгувчи момент M	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot g$	$\Sigma(5) \rightarrow$
		7	Ўнгиқ фиктив куч	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(6)-(2)
		8	Ўнгиқ фиктив куч	0,0	337,5	810	1440	2100	$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	M эп. юзаси
		9	Солқилик бурчаги $\varphi_{3,1}^{(1)}$	4687,5	4350	3540	2100		$\rightarrow -$	$\leftarrow \Sigma(8)$
		10	Бикирлик $\alpha \cdot GF$	1	1	1	1		$0,24 \cdot 10^6$	
		11	$y_{1,1}^{(0)} = Z_{11}^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,9	0,7	0,3	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
		12	Инерция кучи	300	270	210	90	0,0	$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)-(11)
		13	Қўндаланг куч Q	300	570	780	870		$\rightarrow -$	$\Sigma(12) \rightarrow$
		14	Солқилик бурчаги $\varphi_{3,1}^{(1)}$	300	570	780	870		$\omega^2 y_4 \cdot \alpha GFg$	(13)-(10)

Эгилш тебраннишлари

Силжииш тебраннишлари

	№	Механик микдорлар	m_4 m_3 m_2 m_1 					Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
Эгилш-силжиш тебранишлари	15	$\varphi_{\beta}^{(1)} \cdot \beta^2$	2490	4731	6474	7271		$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(14) β^2
	16	Солкилик бурчаги $\varphi_{\beta, c, i}^{(1)}$	7177,5	9081	10014	9371		—»—	(9)+(15)
	17	Солкилик $y_{\beta, c, i}^{(1)}$	35643,5	23466	19385	9371	0,0	$\lambda^3 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	←Σ(16)
	18	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,80	0,54	0,26	0,0		$(y_{\beta, c, i}) \cdot (y_4)$

	№	Механик микдорлар	$m_4$$m_3$$m_2$$m_1$					Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
Тўлиқ кучиш	1	Инерция кучлари	300	240	162	78	0,0	$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)-(18)
	2	Кўндаланг кучлар Q	300	540	702	780		—»—	$\Sigma(1) \rightarrow$
	3	Эгувчи момент M	0,0	300	840	1542	2322	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot g$	$\Sigma(2) \rightarrow$
	4	$y_4^{(1)} = Z^{(1)} \cdot y_4^{(1)}$	1,0	0,84	0,58	0,30	0,04	$y_4^{(1)}$	
Замин қайишқоклиги ҳисобга олинганда эгилиш-силжиш кучишлари	5	Инерция кучи	300	252	174	90	12	$\omega^2 y_4 \cdot g$	[1](4)
	6	Кўндаланг куч Q	300	552	726	816	828	—»—	$\Sigma(5) \rightarrow$
	7	Эгувчи момент M	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot g$	$\Sigma(6) \rightarrow$
	8	Ёйик фиктив куч	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(7){2}
	9	Йиғиқ фиктив куч	0,0	337,2	852	1578	2399 3222	$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	M эп. юзаси
	10	Солқилик бурчаги $\varphi_{\beta, i}^{(2)}$	9393,5	8046	7194	5616	3222	—»—	$\leftarrow \Sigma(9)$
	11	Солқилик бурчаги $\varphi_{\beta, i}^{(2)}$	300	552	726	816	828	$\omega^2 y_4 \cdot a \cdot GFg$	(6){10}
	12	$\varphi_{\beta, i}^{(2)} \cdot \beta^2$	2490	4581,6	6025,8	6772,8	6872,4	$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(11) β^2
	13	Солқилик бурчаги $\varphi_{\beta, c, i}^{(2)}$	10879,5	12627,6	13219,8	12388,8	10094,4	—»—	(10)+(12)
	14	Солқилик $y_{\beta, c, i}^{(2)}$	59210,1	48330,6	35703	22483,2	10094,4	$\lambda^3 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	$\leftarrow \Sigma(13)$
	15	Тебраниш шакли $Z_{\beta, c, i}^{(2)}$	1,0	0,82	0,60	0,38	0,17		$(y_{\beta, c, i}) \cdot (y_4)$

№	Механик миқдорлар	m				Қўлайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m ₁	m ₂	m ₃	m ₄		
16	Инерция кучи	300	246	180	114	$\lambda^3 \omega^2 y_4 E J g$	$[11+(15)$
17	Қўдаланг куч Q	300	546	726	840	$\rightarrow$	$\rightarrow Z(16)$
18	Эгувчи момент M	300	846	1572	2412	$\lambda \omega^2 y_4 g$	$\rightarrow Z(17)$
19	Солқилик $y_1^{(2)}$	74210	59630	43703	26983	$\lambda^3 \omega^2 y_4 E J g$	$(14)+y_6+y_7$
20	Тебраниш шакли $Z_{\lambda, \phi, x}^2$	1.6	0.80	0.59	0.36		$(y_1)^2, (y_4)^2$
21	Такрорликлар $\omega_1^{(2)}$	9.38	9.36	9.39	9.34		$\omega_{\text{гр}}=9.37$

МУНДАРИЖА

Кириш	3
1-б о б. Умумий маълумотлар	5
2-б о б. Таъсир чизиклари назарияси	23
3-б о б. Қўп ораликли статик аник балкалар	40
4-б о б. Статик аник фермалар	47
5-б о б. Уч шарнирли аркалар ва рамалар	70
6-б о б. Қўчишлар назарияси	92
7-б о б. Статик ноаник рамаларни кучлар усулида ҳисоблаш	123
8-б о б. Кучлар усулини статик ноаник балка, ферма ва аркалар ҳисобига тадбики	148
9-б о б. Статик ноаник рамаларни қўчишлар усулида ҳисоблаш	172
10-б о б. Статик ноаник рамаларни ҳисоблашнинг тақрибий усул- лари	201
11-б о б. Қурилиш механикаси масалаларига матрицалар назария- сининг тадбики	210
12-б о б. Чекли элементлар усули	249
13-б о б. Стерженли системаларнинг устуворлиги	272
14-б о б. Иншоотлар динамикаси асослари	299
15-б о б. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системалар	304
16-б о б. Тебранишлар назариясининг техникага тадбики	327
17-б о б. Эркинлик даражаси бир нечта бўлган системалар	331
18-б о б. Эркинлик даражаси чексиз бўлган системалар	346
19-б о б. Иншоотлар тебранишини тадқиқ этишнинг тақрибий усул- лари	355

Абдурашидов Кабул Садыкович,
Хабиров Батыр Абдумаликович,
Тўйчиев Надыр Джамалович,
Раҳимбаев Анвар Гафурович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» 700129,
Ташкент, Навоий, 30.

Бадний муҳаррир Т. Қаноатов
Техник муҳаррир У. Қим
Мусаххих У. Абдуқодирова

Теришга берилди 20.03.96. Босишга рухсат этилди 11.02.99. Бичими
84×108¹/₃₂. «Таймс» гарнитурда офсет босма усулида босилди.
Шартли бос. т. 20,16. Нашр т. 18,36. Нусхаси 1000. Буюртма №.733.
Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриети, 700129, Тошкент, Навоий кучаси, 30.
Нашр № 247—94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг
ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди.
700129. Тошкент, Навоий кучаси, 30.

