A.R. XASHIMOV, G.S. XUJANIYOZOVA

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

A.R.Xashimov, G.S.Xujaniyozova

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining Muvofiqlashtiruvchi kengashi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya qilingan

TOSHKENT
«IQTISOD-MOLIYA»
2017

UO‘K: 372.851.001.76 (063)
KBK: 66.4 (0)

Taqrizchilar:

Abdullayev O. – O‘zMU, “Differensial tenglamalar va matematik fizika” kafedrasi dotsenti, fizika-matematika.f.n;

Adizov A. – Toshkent moliya instituti “Oliy va amaliy matematika” kafedrasi dotsenti, fizika-matematika.f.n.

Iqtisodchilar uchun matematika: O‘quv qo‘llanma / A.R.Xashimov, G.S.Xujaniyozova; – T.: “Iqtisod-Moliya”, 2017. – 388 b.

O‘quv qo‘llanmada chiziqli algebra asoslari, analitik geometriya elementlari, matematik tahlilning odatdagi bo‘limlari hamda differensial va chekll ayirmali tenglamalarga kirish iqtisodiyotdagi tatbiqlari bilan bog‘liq holda bayon etilgan. Keltirilgan misollar, iqtisodiy modellar va amaliy xarakterga ega bo‘lgan mashqlar iqtisodchi-bakalavr ta’limida xorijiy tajribani qo‘liash talablariga javob beradi.

Qo‘llanma “Iqtisodiyot” ta’lim sohasidagi barcha yo‘nalishlarga mo‘ljallangan bo‘lib, davlat ta’lim standartlari asosida yozilgan.

UO‘K: 372.851.001.76 (063)
KBK: 66.4 (0)

ISBN 978-9913-13-707-3

KIRISH

Matematika – miqdoriy munosabatlar va fazoviy shakllar haqidagi fan. Matematika termini yunoncha "bilim", "fan"ni anglatuvchi "matema" so'zidan olingan.

Matematika qadim zamonlarda insonlarning amaliy zaruratlaridan vujudga keldi. Matematik bilimlar hozirgi kungacha saqlangan olamning yetti mo'jizalaridan biri hisoblangan mashhur Misr ehromlarini yaratishga yordam berdi. Sirakuza qo'rg'oni uzoq vaqt davomida buyuk matematik va mexanik Arximedning kashfiyotlari yordamida himoyalandi. Hozirgi kunda nafaqat kosmik apparatlarni uchirish, eng so'nggi texnikani modellashtirish, balki iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishni ham matematikasiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Matematika tushunchalari konkret hodisa va predmetlardan ajratilgan. Bu hol matematika ilovalari uchun juda ham muhim. Masalan, 7 soni biror-bir aniq mazmun bilan uzluksiz bog'liq emas. U yetti sayyoraga ham, 7 so'mga ham, yetti ijtimoiy guruhga ham taalluqli bo'lishi mumkin. Xuddi shu kabi matematik usullar fizikada ham, iqtisodda ham qo'llaniladi. Ular oy va quyosh tutilishlarini ham, inflyatsiyani ham, aholining o'sishini ham oldindan bilishga yordam beradi.

Matematika amaliy masalalarni yechishning asosiy vositasi bo'lib qolmasdan, fanning universal tili, dunyoqarashning ajralmas qismi ham hisoblanadi. Evklidning "Negizlar" kitobi klassik geometriyaga asos solgan va bizning dunyoning tuzilishi haqidagi tasavvurlarimizga kuchli ta'sir etgan. Noevklid geometriyaning va nisbiylik nazariyasining vujudga kelishi esa u haqidagi tasavvurlarni butunlay o'zgartirdi. Eynshteyn ham tabiatni o'rganishda matematikaning muhimligini ta'kidlab o'tgan. U quyidagicha yozgan edi: "Butun orttirilgan tajriba bizni shunga ishontiradiki, tabiat eng sodda matematik fikr yurituvchi elementlarni amalga oshirishni ifodalaydi". Shunday ekan matematika aniq, optimal va samarali amal qilishga undaydigan fikrlash usuli.

Jamiyat va iqtisodiyot qonuniyatlarini matematikasiz o'rganish mumkin emas. Masalan, Nobel mukofoti olgan deyarli barcha iqtisodchilarning (L.Kantorovich, V.Leontov, P.Samuel'son, R.Solou, D.Xiks, D.Nesh, R.Zel'ten) ishlari matematik metodlardan foydalanish bilan bog'liqdir.

Ushbu o'quv qo'llanma iqtisodiy oliy ta'lim muassasalari bakalavriat ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, "Iqtisodchilar uchun matematika" fan dasturiga mos yozilgan. O'quv qo‘llanma sakkiz bobdan - chiziqli algebra, analitik geometriya elementlari, matematik analiz va oddiy differensial tenglamalar va qatorlar nazariyasiddan tashkil topgan. Qo‘llanmada yuqorida aytilgan bo‘limlar bo‘yicha ko‘rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va qisman amaliy materiallar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanmani tayyorlashda ta’lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta’limning kasbiy yo‘nalganlik tamoyillariga hamda mualliflar o‘zining Toshkent moliya institutida ko‘p yillar davomida oliy matematika bo‘yicha o‘qigan ma’ruzalari va olib borgan amaliy mashg‘ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandi. Qo‘llanmaning tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo‘lib, shunimgdek, shu paytgacha o‘zbek tilida mavjud bo‘lgan darslik va o‘quv qo‘llanmalardan, xorijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalanildi.

Nazariy va qisman amaliy materiallarni mukammal o‘zlashtirishni ta’minlash maqsadida har bir bobdan so‘ng bobga doir savollar va mustaqil yechish uchun misol va masalalar berildi.

Qo‘llanmani tayyorlashda qimmatli maslahatlarini bergan dotsent A.Adizovga, O‘zMU dotsenti O.Abdullayevga o‘z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

I bob. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

1.1. Matritsalar ustida amallar. Texnologik matritsa

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning "Matritsalar algebrasi" bo'limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy obyekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko'rinishida tasvirlanadi.

Matritsa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805-1865-y.y.) va A.Kel (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matritsa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim vosita sifatida qo'llaniladi.

1-ta'rif. Matritsa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo'lgan qavslar ichiga olingan to'rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsa o'lchami $m\times n$ kabi yozlladi. Matritsaning i – satr, j – ustun kesishmasidagi element a_{ij} kabi belgilangan. Demak, a_{34} – 3 - satr va 4 - ustin kesishmasida joylashgan elementdir.

Ba'zida matritsalarni yozishda (...) qavslar o'rniga [...] qavslar yoki $\|...\|$ kabi belgilardan foydalaniladi.

Aytaylik quyidagi jadvalda iqtisodiyotning tarmoqlari bo'yicha resurslarning taqsimlanishi berilgan bo'lsin:

Resurslar	Iqtisodiyot tarmoqlari	
	Sanoat	Qishloq xo'jaligi
Elektr energiyasi resurslari	7,3	5,2
Mehnat resurslari	4.6	3,1
Suv resurslari	4.8	6,1

Bu resurslar taqsimotini matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin: $A=\begin{pmatrix} 7{,}3 & 5{,}2 \\ 4{,}6 & 3{,}1 \\ 4{,}8 & 6{,}1 \end{pmatrix}$. Bu matritsaning o'lchami 3×2 bo'lib, satrlari resurs turlariga ustunlari esa tarmoqlarga mos keladi.

$(1\times n)$ o'lchamli matritsaga satr matritsa, $(m\times 1)$ o'lchamli matritsaga esa ustun matritsa, deyiladi, ya'ni

$$K=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari ba'zida bu matritsalar mos ravishda satr-vektor va ustun-vektor deb ham ataladi. Matritsaning elementlari esa vektorlarning komponentlari, deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo'lgan, ixtiyoriy o'lchamli matritsaga nol matritsa deb aytiladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2-ta'rif. A va B matritsalar bir xil o'lchamga ega bo'lib, ularning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bunday matritsalar teng matritsalar deyiladi va $A=B$ ko'rinishda yoziladi.

1-misol. Quyidagi matritsaviy tenglikdan x va y noma'lumlarning qiymatlarini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalarnimg mos elementlarini taqqoslab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y=2,\quad x+y=2 \Rightarrow x=0.$$

3-ta'rif. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matritsa B matritsa bilan zanjirlangan matritsa, deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsalar zanjirlangan matritsalar bo'ladi. Chunki, A matritsaning o'lchami 3×3 ga, B matritsaning o'lchami 3×2 ga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki B va A matritsalar zanjirlangan emas. Chunki, B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni 3 ga teng bo'lib, o'zaro bir xil emas.

4-ta'rif. Ham satrlar soni, ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $n\times n$ o'lchamli matritsa n – tartibli kvadrat matritsa, deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ matritsa 4-tartibli kvadrat matritsadir.

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ elementlarning tartiblangan to'plami kvadrat matritsaning asosiy diagonali deyiladi. Agar $A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i>j$ $(i<j)$ munosabat bajarilganda $a_{ij}=0$ bo'lsa, u holda A matritsa yuqori (quyi) uchburchakli matritsa, deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(yuqori uchburchakli matritsa)}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(quyi uchburchakli matritsa)}$$

$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i\neq j$ bo'lganda, $a_{ij}=0$, $i=j$ bo'lganda, $a_{ij}\neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsaga diagonal matritsa deyiladi ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agar diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix}.$$

Agar skalyar matritsada $a=1$ bo'lsa, u holda bunday matritsaga birlik matritsa deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya'ni

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

O'lchamlari aynan teng bo'lgan matritsalar ustidagina algebraik qo'shish amali bajariladi.

O'lchamlari aynan teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qo'shish uchun, ularning mos elementlari qo'shiladi, y'ani

$$A+B=C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani biror haqiqiy λ songa ko'paytirish uchun bu son matritsaning har bir elementiga ko'paytiriladi, y'ani

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ikkita matritsa ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$A-B=D=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2-misol. Quyidagi matritsalarning yig'indisi va ayirmasini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalarning o'lchamlari 2×4 ga teng. Shu sababli bu matritsalarni qo'shish va ayirish mumkin. Ta'rifga asosan

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-misol. Quyidagi A matritsani $\lambda=2$ soniga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $\lambda\cdot A=2A=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 4 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}.$

4-misol. Firma 5 turdagi mahsulotni ikkita korxonada ishlab chiqaradi. Firmaning ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
1-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	139	160	205	340	430
2-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	122	130	145	162	152

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilash natijasida ishlab chiqarishni 17% ga oshirdi. Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti qanday bo'ladi?

Yechish. Firmaning ishlab chiqarish uskunalarini yangilamasdan oldingi ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini quyidagi matritsa ko'rinishda yozish mumkin:

$$P=\begin{pmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152\end{pmatrix}.$$

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangllagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini topish uchun. bu ishlab chiqarish matritsasini 1,17 ga ko'paytirish zarur bo'ladi:

$$1{,}17\cdot P=1{,}17\cdot\begin{pmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}162{,}63 & 187{,}2 & 239{,}85 & 397{,}8 & 503{,}1\\ 142{,}74 & 152{,}1 & 169{,}65 & 189{,}54 & 177{,}84\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shlsh. ayirish, ya'ni algebraik qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallariga matritsalar ustida chiziqli amallar deyiladi.

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $k(A+B)=kA+kB$;

4) $k(nA)=(kn)A$;

5) $(k+n)A=kA+nA$;

6) $A+\Theta=A$;

7) $A+(-A)=\Theta$;

8) $1\cdot A=A$.

Bu erda $A,B,C-$bir xil o'lchamli matritsalar, Θ matritsa A,B,C matritsalar bilan bir xll o'lchamli nol matritsa, $k,n-$ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faqat va faqat zanjirlangan matritsalar ustida ko'paytirish amali bajariladi. $m\times p$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ matritsaning $p\times n$ o'lchamli $B=(b_{jk})$ matritsaga ko'paytmasi deb elementlari $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m\times n$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi. Bu formuladan ko'rish mumkinki, A va B matritsalarning ko'paytmasi C matritsadagi c_{ik} element A matritsaning $i-$ satrida joylashgan har bir elementni B matritsaning $k-$ ustunida joylashgan mos o'rindagi elementga ko'paytirish va hosll bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish natijasida aniqlanadi.

Masalan, bizga umumiy holda $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalar berilgan bo'lsin. Bu matritsalarni ko'paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Endi buni aniq misollarda ko'rib chiqamiz.

5-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. Izlanayotgan $C=AB$ matritsanіng c_{11} elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning birinchi ustun mos elementlari bilan ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{11}=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1=6.$$

2. Izlanayotgan $C=AB$ matritsaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$c_{12}=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0=2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13}=(3\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1=-1$$

kabi aniqlanadi.

4. Izlanayotgan matritsaning ikkinchi satr elementlari A matritsaning ikkinchi satr elementlarining B matritsaning mos ravishda 1-,2-,3-ustun elementlari bilan ko'paytmalarining yig'indisi sifatida topiladi:

$$c_{21} = 2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1=6;$$
$$c_{22} = 2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0=1;$$
$$c_{23} = 2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 1=1.$$

5. C matritsaning uchinchi satr elementlari ham shunga o'xshash topiladi:

$$c_{31} = 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1=8;$$
$$c_{32} = 1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 0=-1;$$
$$c_{33} = 1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 1=4.$$

Shunday qilib,

$$C=AB=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsalar zanjirlangan bo'lganligi sababli ular ustida ko'paytirish amali bajariladi.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+4+9+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko'rinib turibdiki, A va B matritsalarning ko'paytmasi kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasiga ega emas, ya'ni $AB \neq BA$. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa, AB va BA ko'paytmalarini topish mumkin. Agar A va B matritsalar uchun $AB=BA$ $(AB=-BA)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A va B matritsalar kommutativ (antikommutativ) matritsalar deyiladi. Masalan, E birlik matritsa ixtiyoriy A kvadrat matritsa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE=EA=A.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1) $(kA)B = k(AB) = A(kB)$;

2) $(A+B)C = AC + BC$;

3) $A(B+C) = AB + AC$;

4) $A(BC) = (AB)C$.

Keltirilgan xossalardan to‘rtinchisini quyidagi misol yordamida tekshiramiz.

7-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin:

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix},$$

2. $BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ikki xil hisoblash usulida ham natija bir xil.

A kvadrat matritsani $m\,(m>1)$ butun musbat darajaga ko‘tarish quyidagicha amalga oshiriladi: $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ marta}}$.

Agar A matritsada barcha satrlari matritsaning mos ustunlari bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matritsa A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.

Transponirlangan matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1) $\left(A^T\right)^T = A$,

2) $(kA)^T = kA^T$,

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

Agar A kvadrat matritsa uchun $A = A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu matritsaga simmetrik matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ simmetrik matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

$n-$tartibli simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko'pi bilan $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda $n-$natural son.

Agar A kvadrat matritsada $A=-A^T$ munosabat o'rinli bo'lsa, bunday matritsaga qiya simmetrik matritsa deb ataladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$n-$tartibli qiya simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko'pi bilan n^2-n+1 formula yordamida toplladi, bunda $n-$natural son.

5-ta'rif. Nohnas satrlarga ega A matritsada har qanday $k-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementi $(k-1)-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementidan o'ngda tursa, u holda A pog'onasimon matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa pog'onasimon matritsadir.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya'ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matritsalardan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matritsa tushunchasidir. Bu matritsa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmalashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o'ynaydi.

Faraz qilaylik o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo'lsin. $i-$mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun $j-$turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m\times n$ o'lchamli A matritsa texnologik matritsa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., $n-$turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun vektor ($n\times 1$ o‘lchamli matritsa) shaklida ifodalaymiz. U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n$ ga, ikkinchi turdagi resurs sarfi $a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n$ ga teng. Umumlashtiradigan bo‘lsak, ishiab chiqarish rejasini bajarish uchun zarur bo‘lgan $j-$turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni ustun vektor sifatida yozsak aynan AX ko‘paytmani hosil qilamiz.

$j-$mahsulotning bir birligining narxi c_j bo‘lsin. Narxlar vektorini $C=(c_1,\ldots,c_n)$ ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko‘paytma, matritsalarni ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, skalyar miqdor, ya'ni sondan iborat. Bu son ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

$i-$ turdagi resurs zahirasi miqdori b_i birlikka teng bo‘lsin. Resurs zahiralari vektorini ustun vektor shaklida ifodalaymiz: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. U holda $AX\le B$ tengsizlik ishlab chiqarishda resurs zahiralari hisobga olinishi zarurligini bildiradi. Bu vektor tengsizlik AX vektorning har bir elementi B vektorning mos elementidan katta emasligini bildiradi. $AX\le B$ shartni qanoatlantiruvchl X rejani joiz reja, deb ataymiz. Ma'nosidan kelib chiqadigan bo‘lsak, har qanday X rejaning elementlari musbat sonlardan iborat bo‘lishi zarur.

8-misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud. Texnologik matritsa, narxlar vektori va resurs zahirasini ifodalovchi vektorni tuzing. $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejalar joiz reja bo'la oladimi?

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Narxlar vektori $C=(6,5)$. Resurs zahiralari vektori $B=\begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix}$. Texnologik (resurs sarfi normasi) matritsa $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs sarfi

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_1+3x_2\\3x_1+2x_2\end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zahiradan oshib ketmasligi kerak, ya'ni $AX\le B$ yoki

$$5x_1+3x_2\le 4500,$$
$$3x_1+2x_2\le 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur.

1) $X=\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4300\\2700\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}4500\\3000\end{pmatrix},$$

ya'ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daromad miqdori $CX=(6\quad 5)\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}=(6000)$ sh.p.b. ga teng.

2) $X=\begin{pmatrix}600\\600\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4800\\3000\end{pmatrix}.$$

Bundan ko'rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga teng bo'lib, resurs zahirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz reja emas.

9-misol. Korxona m turdagi resurslarni qo'llab, n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. j – turdagi mahsulot birligini ishlab chlqarishga ketgan i – xom ashyo resurslari harajatlarining normalari $A_{m\times n}$ matritsa bilan berilgan. Vaqtning ma'lum oralig'ida korxona har bir turdagi mahsulotdan x_{ij} miqdorini ishlab chiqargan bo'lsin. Uni $X_{n\times 1}$ matritsa bilan ifodalaymiz.

Vaqtning berilgan davrida barcha mahsulotning har bir turini ishlab chiqarishga ketgan resurslarning to'la harajatlar matritsasi S ni aniqlang. Berilgan

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\quad X_{3\times 1}=\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}.$$

Yechish. Resurslarning to'la harajatlar matritsasi S A va X matritsalarning ko'paytmasi sifatida aniqlanadi, ya'ni $S=AX$.

Berilgan masalaning sharti bo‘yicha

$$S=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}930\\960\\450\\690\end{pmatrix}.$$

Berilgan vaqt orlig'ida 930 birlik I turdagi resurs, 960 birlik II turdagi resurs, 450 birlik III turdagi resurs, 690 birlik IV turdagi resurs sarf qilingan.

10-misol. Korxona mahsulotning n turini ishlab chiqaradi. ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari $A_{1\times n}$ matritsa bilan berilgan. j –mintaqada mahsulotning i –turi birligining sotilish narxi $B_{n\times k}$ matritsa bilan berilgan, bu yerda k –mahsulot sotllayotgan mintaqalar soni.

Mintaqalar bo‘yicha daromad matritsasi C ni toping.

$$A_{1\times 3}=(100,200,100);\ B_{n\times k}=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}\text{bo'lsin.}$$

Yechish. Daromad $C_{1\times k}=A_{1\times n}\cdot B_{n\times k}$ matritsa bilan aniqlanadi, $c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\cdot b_{ij}$ –bu j –mintaqada korxonanmg daromadi quyidagicha:

$$C=(100,200,100)\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}=(600,1300,700,1300).$$

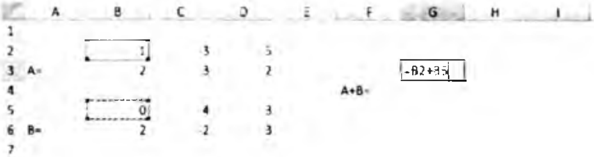
MS Excel dasturida matritsalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va matritsalarni ko‘paytirishga misollar keltiramiz.

1) $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&3&2\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&-2&3\end{pmatrix}$ matritsalarni qo'shish talab qilinsin.

I) Matritsalarni quyidagi ko‘rsatilgan jadvallar shaklida MS Excelga kiritamiz.

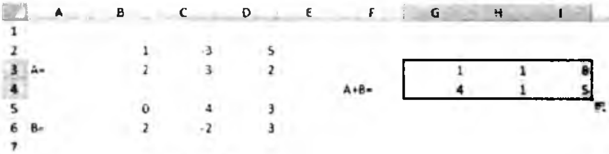
	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		0	4	3
6	B=	2	-2	3

II) Biror katakka matritsalarning 1-elementlari yig’indisini topish uchun formula kiritamiz.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			=B2+B5		
4						A+B=			
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

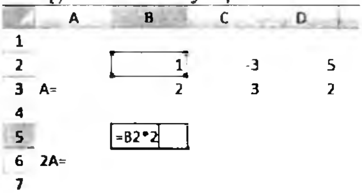
III) 2x3 o‘lchamli jadvalni bu katakdagi formulani avtomatik ko‘chirish usuli bilan to‘ldiramiz. Buning uchun sichqonchani bu katakning pastki o‘ng burchagiga keltiramiz. Qalin qora kursor (krestik) paydo bo‘lganda sichqonchaning chap tugmasini bosamiz va oldin satr bo‘yicha uch katakka, keyin ustun bo‘yicha ikki kattakka tortamiz.



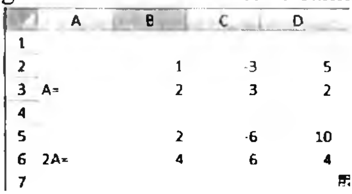
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			1	1	8
4						A+B=	4	1	5
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

Natijada matritsalarning yig’indisi hosil bo‘ladi.

2) Yuqoridagi A matritsani 2 ga ko‘paytiramiz. Buning uchun A matritsani 2 ga ko‘paytirish formulasini biror katakka kiritamiz. Bu katakdagi formulani yuqorida tushuntirilgan usulda avtomatik to‘ldiramiz.



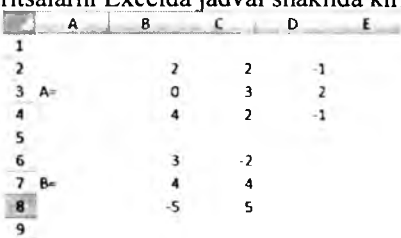
	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		=B2*2		
6	2A=			
7				



	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		2	-6	10
6	2A=	4	6	4
7				

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. AB ko‘paytmani topamiz. A matritsa o‘lchamlari 3×3 va B matritsa o‘lchamlari 3×2 bo‘lganligi sababli, ko‘paytmaning o‘lchamlari 3×2 bo‘ladi.

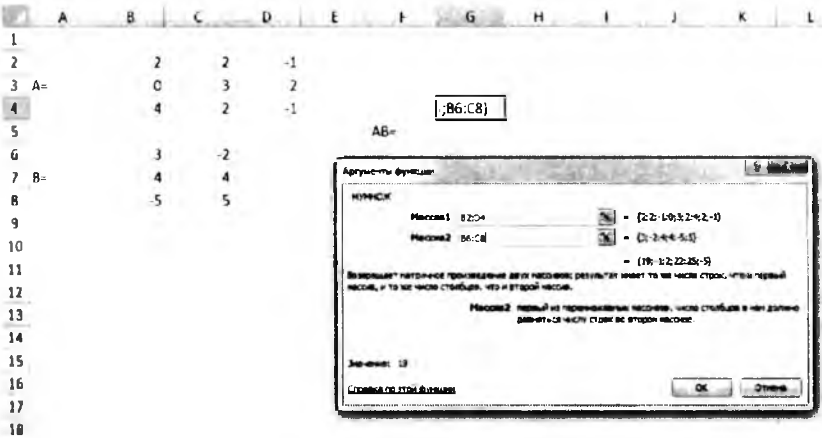
I) A va B matritsalarni Excelda jadval shaklida kiritamiz.



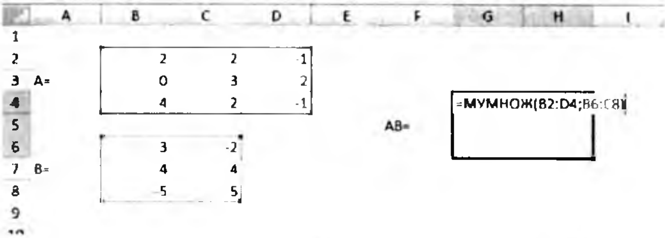
	A	B	C	D	E
1					
2		2	2	-1	
3	A=	0	3	2	
4		4	2	-1	
5					
6		3	-2		
7	B=	4	4		
8		-5	5		
9					

II) Excel funksiyalari ro‘yxatidan matematik funksiyalar ro‘yxatini topamiz. bu ro‘yxatdan "МУМНОЖ" funksiyani tanlaymiz.

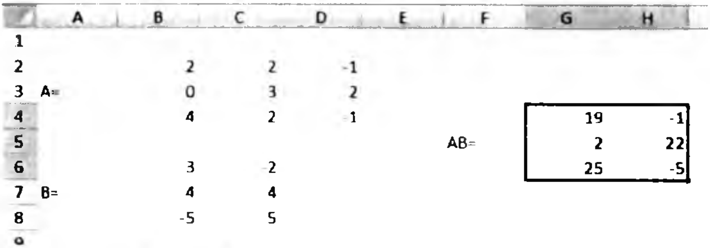
III) Hosil bo‘lgan yangi oynachada 'Массив1' qatoriga A matritsa koordinatalarini, 'Массив2' qatoriga B matritsa koordinatalarini kiritamiz. Enter tugmasini bosamiz.



IV) Bunda funksiya kiritilgan katakda ko‘paytmaning faqat bitta elementi hosil bo‘ladi. Boshqa elementlarni topish uchun ko‘paytma o‘lchovlariga mos uchta satr va uchta ustunli jadvalni rasmdagiday belgilaymiz va F2 tugmasini bosamiz.



v) Ctrl+Shift+Enter tugmalarni bir paytda bosamiz. Belgilangan kataklarda matritsalar ko'paytmasi hosil bo'ladi.



Demak, $AB=\begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 22 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}$.

1.2. Determinantlar

A kvadrat matritsaning skalyar (sonli) miqdorni aniqlovchi determinant tushunchasining kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan chambarchas bog'liq.

$n-$tartibli o'rin almashtirish tushunchasini kiritamiz. $1,2,3,...,n$ sonlarning biror bir tartibda yozilishi $n-$tartibli o'rin almashtirish deb ataladi.

Masalan $\{1,2,3,4\}$ to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi o'rin almashtirishlar $P_1=(2,3,1,4)$, $P_2=(3,2,4,1)$, $P_3=(3,1,2,4)$ va hakozo.

Umuman olganda har qanday n ta elementdan tuzilgan to'plamda o'rin almashtirish tushunchasini kiritish mumkin. Bu jarayonni to'plam elementlarini 1 dan boshlab ketma-ket natural sonlar bilan nomerlaymiz va $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirishga keltiramiz. Ya'ni, $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirish tushunchasini qarash umumiylikni buzmaydi.

6-ta'rif. Agar $m>k$ bo'lib, m soni k dan chaproqda joylashgan bo'lsa, u holda P o'rin almashtirishda m va k sonlar inversiyani tashkil qiladi deyiladi.

7-ta'rif. P o'rin almashtirishdagi barcha elementlar tashkil etgan umumiy inversiyalar soni P o'rin almashtirishning inversiyalar soni, deb ataladi va $inv\,P$ kabi belgilanadi.

$inv\,P$ sonning juft yoki toq bo'lishlga qarab, mos ravishda, P o'rin almashtirish juft yoki toq deb ataladi.

Masalan, $P=(1,4,3,2)$ o'rin almashtirishda 1 va 4 sonlari inversiya tashkil qilmaydi. 3 soniga mos inversiyalar 1 ta, 2 soniga mos inversiyalar 2 ta. Demak, $inv\,P=1+2=3$. P o'rin almashtirish toq.

O'rin almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1) $\{1,2,3,...,n\}$ to'plamdagi barcha o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng;

2) juft va toq o'rin almashtirishlar soni o'zaro teng, ya'ni har biri $\frac{n!}{2}$ tadan;

3) o'rin almashtirishda ikkita elementning o'rni almashtirilsa uning juft-toqligi o'zgaradi.

8-ta'rif. $\{1,2,3,...,n\}$ sonlar to'plamini o'ziga akslantiruvchi o'zaro bir qiymatli akslantirish o'rinlashtirish deb ataladi.

O'rinlashtirishni ikkita o'rin almashtirish bilan berishlmiz mumkin. Ikkita P_1 va P_2 $n-$ tartibli o'rin almashtirishlardan tuzilgan F o'rinlashtirish quyidagicha belgilanadi: $F=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

Masalan, $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $F_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ o'rinlashtirishlar o'zaro teng. Chunki bu o'rinlashtirishlarning har biri 1 ga 2 ni, 2 ga 3 ni va 3 ga 1 ni mos qo'yadi.

O'rinlashtirishni har doim $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i_1 & i_2 & i_3 ... & & i_n \end{pmatrix}$ ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda $P_2=(i_1,i_2,...,i_n)$ biror $n-$ tartibli o'rin almashtirish. P_2 almashtirish juft bo'lsa, F o'rinlashtirish juft, P_2 toq bo'lsa, F ham toq deyiladi. $h(F)=(-1)^{inv\,P_2}$ miqdorga F o'rinlashtirishning signaturasi deyiladi. $n-$ tartibli barcha o'rinlashtirishlar to'plamini S_n bilan belgilaymiz.

Endi $n-$ tartibli determinant tushunchasini kiritamiz.

Bizga n – tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa berilgan bo'lsin.

9-ta'rif. Barcha mumkin bo'lgan turli $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ o'rinlashtirishiarga mos $h(F)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\dots a_{ni_n}$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning yig'indisidan iborat songa n – tartibli determinant deyiladi.

n – tartibli determinant $\det(A)$, $|A|$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi.

O'rinlashtirish va o'rin almashtirishlarning xossalariga asosan, bu ta'rifdan

1) n – tartibli determinant $n!$ ta hadning yig'indisidan iborat;

2) bu yig'indining har bir hadi matritsaning turli satrlari va turli ustunlarida joylashgan n ta elementi ko'paytmasidan iborat;

3) yuqorida aytilgan ko'paytmalarning yarmi ($n!/2$ tasi) o'z ishorasi bilan, qolgan yarmi qarama-qarshi ishora bilan olingan.

Bundan ko'rinib turibdiki, determinantni ta'rif bo'yicha hisoblash juda ko'p amallardan iborat bo'lib, ma'lum noqulayliklarga ega. Misol uchun 4-tartibli determinant $4!=24$ ta haddan iborat. Har bir hadi matritsaning turli satr va ustunlaridan olingan 4 ta elementi ko'paytmasidan iborat. Bu hadlarning har birining ishorasini topish uchun 24 ta o'rinlashtirishning juft-toqligi aniqlanishi talab qilinadi.

Shu sababdan determinantni uning ba'zi xossalaridan foydalanib hisoblash qulayroq. Bu xossalarni berishdan oldin ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni alohida qarab o'tamiz.

2 – tartibli kvadrat matritsaning determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Haqiqatan, ikkinchi tartibli turli o'rinlashtirishlar soni $2!=2$ ta. Bular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bulardan birinchisi juft, ikkinchisi esa toq. Shu sababli determinant $a_{11}a_{22}$ va $-a_{12}a_{21}$ sonlarning yig'indisidan iborat.

11-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 10 \cdot 9 = 48 - 90 = -42.$

12-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Yechish. Yuqoridagi ta'rifga asosan

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Endi uchinchi tartibli determinantni qaraymiz. Uchinchi tartibli turli o'rinlashtirishlar soni $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ta. Bular

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

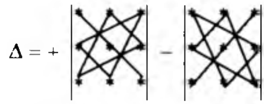
Bu o'rinlashtirishlarning ikkinchi satridagi o'rin almashtirishlarni qaraymiz. S_1 da $P_1 = (1,2,3)$ bo'lib, $inv\,P_1 = 0$, S_2 da $P_2 = (2,3,1)$ bo'lib, $inv\,P_2 = 0 + 0 + 2 = 2$, S_3 da $P_3 = (3,1,2)$ bo'lib, $inv\,P_3 = 0 + 1 + 1 = 2$. Demak, S_1, S_2 va S_3 lar juft bo'lib, ularga mos signaturalar 1 ga teng. Shu sababli determinantni ifodalovchi yig'indida bu uchta o'rinlashtirishga mos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ va $a_{13}a_{21}a_{32}$ ko'paytmalar o'z ishorasi bilan olinadi. Juft va toq o'rin almashtirishlar soni teng bo'lganligi sababli, qolgan uchta S_4, S_5 va S_6 lar toq va ularga mos $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ va $a_{11}a_{23}a_{32}$ ko'paytmalar qarama-qarshi ishora bilan olinishi kerak.

Yuqoridagilarni umumlashtirsak, uchinchi tartibli determinant uchun quyidagi ifodani olamiz:

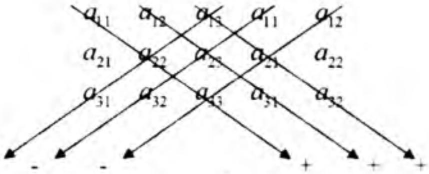
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Uchinchi tartibli determinantda o'z ishorasi va qarama-qarshi ishora bilan olinadigan hadlarni eslab qolish uchun odatda ikki xil usuldan foydalaniladi. Bular uchburchak va Sarrus usullari deb nomlanadi.

Uchburchak usuli. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak usuli quyidagicha sxematik ko'rinishda amalga oshiriladi:



Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining o'ng yoniga chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar ko'chirib yoziladi. Hosil bo'lgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal yo'nalishida joylashgan elementlar ko'paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo'nalishidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinib yig'indi tuziladi. Bu yig'indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko'rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



13-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 = 27.$$

Determinant quyidagi xossalarga ega:

1. Agar determinant biror satri (ustuni) ning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 4\cdot 0 - 7\cdot 0\cdot 2 = 0.$$

2. Diagonal matritsaning determinanti diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. Yuqori (quyi) uchburchakli matritsalarning determinantlari uning bosh diagonal elementlari ko'paytmasiga teng, ya'ni $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$

4. Determinantning biror satri (ustuni) elementlarini $k \neq 0$ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir yoki biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Masalan, $3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (24 + 60 + 56 - 18 - 70 - 64) = -36.$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3 \cdot 2 & 7 & 3 \\ 3 \cdot 5 & 6 & 8 \\ 3 \cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72 + 180 + 168 - 54 - 192 - 210 = -36.$$

5. $n-$tartibli determinant uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$

6. Determinantda ikkita satr (ustun) o'rinlari almashtirilsa, determinantning ishorasi o'zgaradi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 39.$

Endi bu matritsada birinchi va uchinchi ustunlarining o'rinlarini almashtiramiz, u holda

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3-12-20-2-20+18=-39.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, determinantlar faqat ishorasi bilan farq qiladi.

7. Agar determinant ikkita bir xil satr (ustun)ga ega bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 45+36+150-36-150-45=0.$

8. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun)ning mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Haqiqatan ham, tenglikning chap tarafi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4+30+30-36-4-25=-1.$$

tenglikning o‘ng tarafi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8+66+60-72-55-8=-1.$$

Demak tenglik o‘rinli.

9. Agar determinant ikki satri (ustuni)ning mos elementlari proporsional bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+192+192-72-192-192=0.$$

10. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

11. Agar determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikki qo'shiluvchi yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisiga teng bo'lib, ulardan birinmg tegishli satri (ustuni) birinchi qo'shiluvchilaridan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) ikkinchi qo'shiluvchilaridan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

12. Agar determinant satr (ustun)laridan biri uning qolgan satr (ustun) larining chiziqli kombinatsiyasldan iborat bo'lsa, determinant nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\cdot 2+4\cdot 3 \\ -2 & 1 & -2\cdot 2+4\cdot 1 \\ 3 & -2 & 3\cdot 2-4\cdot 2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Toq tartibli har qanday qiya simmetrik matritsaning determinanti nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0+60-60+0+0+0=0.$$

14. Bir xil tartibli ikkita matritsalar ko‘paytmasining determinanti, bu matritsalar determinantlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Bizga n – tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin.

10-ta’rif. n – tartibli A kvadrat matritsaning $1 \le k \le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k ta satrlari va k ta ustunlari kesishgan joyda turgan elementlardan tashkil topgan k – tartibli matritsaning determinanti d determinantning k – tartibli minori deb ataladi.

k – tartibli minor sifatida A kvadrat matritsaning $n-k$ ta satr va $n-k$ ta ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinant, deb ham qarash mumkin.

11-ta’rif. Matritsaning diagonal elementlari yordamida hosil bo‘lgan minorlar bosh minorlar deb ataladi.

12-ta’rif. n – tartibli A kvadrat matritsada k – tartibli M minor turgan satrlar va ustunlar o‘chirib tashlangandan so‘ng qolgan $(n-k)$ – tartibli M' mimorga M minorning to‘ldiruvchisi deyiladi va aksincha.

M minor va uning M' to‘ldiruvchi minorini sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \boxed{M} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, determmantning o‘zaro to‘ldiruvchi minorlar jufti haqida gapirish mumkin. Xususiy holda, a_{ij} element va determinantning i – satri va j – ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $(n-1)$ – tartibli mimor o‘zaro to‘ldiruvchi minorlar juftini hosil qiladi.

13-ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ songa aytiladi.

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

14-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2A_{11}+A_{12}+3A_{13}=2(-1)^{1+1}\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}\cdot M_{12}+3(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2(9-8)-(15-2)+3(20-3)=2-13+51=40.$$

15-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo'lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo'ladi.

$$\Delta = -1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}.$$

Yoki avval $a_{32} = 2$elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko'paytirib 3-satrga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

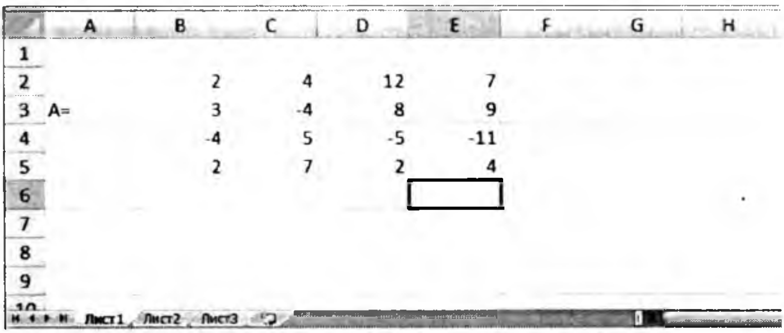
$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 7 & 0 & 9 & 7\\ 1 & 0 & 6 & 2\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 7 & 9 & 7\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix} = -21.$$

Ko'rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo'ladi. So'ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

Determinantni Excelda hisoblash usuli bilan tanishib chiqamiz.

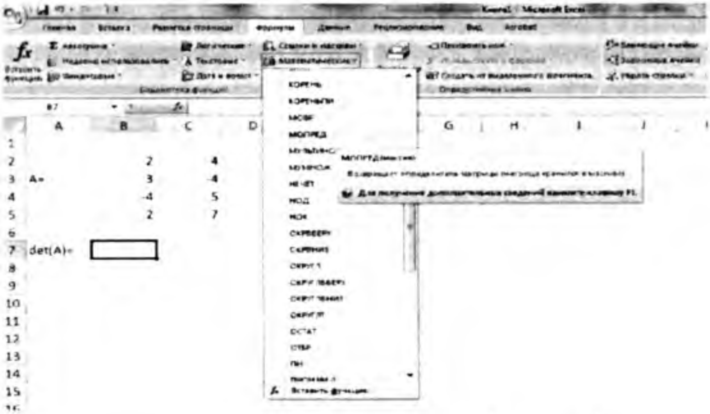
16-misol. $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 12 & 7\\ 3 & -4 & 8 & 9\\ -4 & 5 & -5 & -11\\ 2 & 7 & 2 & 4\end{pmatrix}$ matritsaning determinantini hisoblang.

I. Matritsani Excel dasturida jadval shaklida kiritamiz;

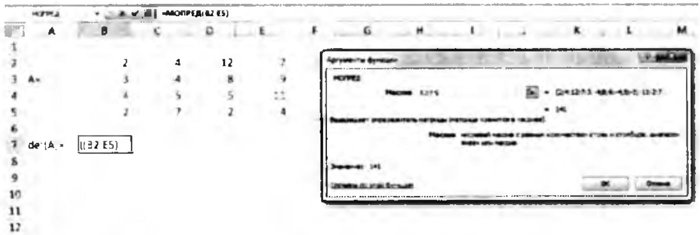


	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		2	4	12	7			
3	A=	3	-4	8	9			
4		-4	5	-5	-11			
5		2	7	2	4			
6								
7								
8								
9								

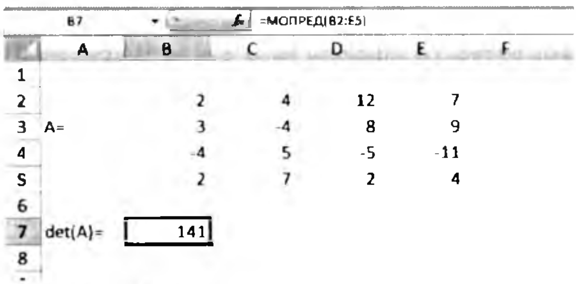
II. Biror katakni tanlaymiz. Matematik funksiyalar ro'yxatidan "МОПРЕД" funksiyasini tanlaymiz.



III. Hosil bo‘lgan oynada massiv qatoriga matritsa joylashgan koordinatalarni kiritamiz.



Enter tugmasi bosilsa, determinant qiymati hosil bo‘ladi.



Determinant qiymati 141 ga teng ekan.

1.3. Matritsa rangi. Teskari matritsa

Ixtiyoriy o‘lchamli matritsaning bir necha satr yoki ustunlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan kvadrat matritsa determinantiga matritsa osti minori deyiladi. Bu kvadrat matritsa tartibi matritsa osti minorning tartibi deyiladi. Agar berilgan matritsa kvadrat shaklda bo'lsa, uning eng katta tartibli minori o'ziga teng.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning 1-satr va 1-ustunini o'chirishdan 2-tartibli minor $M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$, 2-satr va 3-ustunini o'chirishdan 2-tartibli minor $M_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ va hokazo minorlarni hosil qilish mumkin.

14-ta'rif. A matritsaning rangi, deb noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $rang(A)=r(A)$ ko'rinishida ifodalanadi.

Matritsa rangining xossalari:

1) agar A matritsa $m\times n$ o'lchovli bo'lsa, u holda $rangA\le\min(m;n)$;

2) A matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda $rangA=0$;

3) agar A matritsa $n-$tartibli kvadrat matritsa va $|A|\ne 0$ bo'lsa, u holda $rangA=n$.

17-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsa (3×2) o'lchamli bo'lgani uchun satrlar va ustunlar sonini taqqoslaymiz va kichigini, ya'ni 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning qiymatini hisoblaymiz. Bu jarayonni noldan farqli ikkinchi tartibli minor topilguncha davom ettiramiz:

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=-1\ne 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng, ya'ni $rang(A)=2$.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi almashtirishlar bajarganda o'zgarmaydi:

1) matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;

2) matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;

3) matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror noldan farqli songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;

4) barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashiab yuborganda;

5) matritsa transponirlanganda.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matritsada birinchi satrni 2 ga va ikkinchi satrni -3 ga ko'paytirib, birinchini ikkinchiga qo'shsak, so'ngra yana birinchi satrni 5 ga, uchunchi satrni 3 ga ko'paytirib, natijalarni qo'shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

Bu matritsada ikkinchi satrni 1 ga, uchunchi satrni 5 ga ko'paytirib, ikkinchi satrni uchunchi satrga qo'shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Yana

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsani olib, yuqoridagi singari almashtirishlarni bajarsak,

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi.

A va B matritsaga qo'llanilgan almashtirishiarning mohiyati quyidagidan iborat: m satrli matritsa berilgan holda birinchi va ikkinchi satrlarni, undan keyin birinchi va uchinchi satrlarni, ..., nihoyat, birinchi va $m-$ satrlarni shunday sonlarga ko'paytiramizki, tegishli songa ko'paytirilgan birinchi satrni navbat bilan boshqa hamma satrlarga qo'shganimizda ikkinchi satrdan boshiab birinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. So'ngra ikkinchi satr yordamida keyingi hamma satrlar bilan yana shunday almashtirishlarni bajaramizki, uchinchi satrdan boshlab, ikkinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. Undan keyin to'rtinchi satrdan boshlab uchinchi ustun elementlari nollarga aylanadi va hokazo. Shu tariqa bu jarayon oxirigacha davom ettiriladi.

Agar matritsaning qandaydir satrlari boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'lsa, u holda shu almashtirishlar natijasida, bunday satrlarning hamma elementlari nollarga (ya'ni bunday satrlar nol satrlarga) aylanadi.

Birorta elementi noldan farqli satrni nolmas satr, deb atasak, yuqoridagi almashtirishlardan keyin hosil bo'lgan matritsaning rangi nolmas satrlar soniga teng bo'ladi, chunki bunday satrlar chiziqli erkli satrlarni bildiradi.

Yuqorida qo'llaniladigan almashtirishlar matritsani elementar almashtirishlardan iborat bo'lgani uchun, ular matritsaning rangini o'zgartirmaydi.

Teorema. Pog'onasimon matritsaning rangi uning nolmas satrlari soniga teng.

Ixtiyoriy matritsaning rangini aniqlash uchun yuqorida ko'rsatilgan qoida bo'yicha elementar almashtirishlar yordamida matritsa pog'onasimon matritsaga keltiriladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{ii} \neq 0, \quad i=1,\dots,r, \quad r \leq k.$

Pog'onasimon matritsaning rangi r ga teng.

Masalan, yuqoridagi misollarda $r(A)=3, r(B)=2$ bo'ladi.

18-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matritsa pog'onasimon matritsaga keltirildi. Uchinchi satr barcha elementlari nollardan iborat bo'lganligi sababli, berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

Matritsa yordamida vektorlar sistemasining rangi bilan tanishib chiqamiz: o'lchamlari teng bir necha vektorlardan tuzilgan $A_i = (a_{1i}, a_{2i}, ... a_{mi})^T$, $i = 1,2,...,n$, ustun vektorlar sistemasini qaraymiz.

15-ta'rif. Vektorlar sistemasining rangi, deb shu vektorlar koordinatalari yordamida tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga aytiladi va $r(A_1, A_2, ..., A_n)$ ko'rinishida belgilanadi.

Izoh. Xuddi shuningdak, satr vektorlar sistemasi ham qarallshi mumkin.

19-misol. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasining rangini hisoblang.

Yechish. Berilgan vektor koordinatalari yordamida matritsa quramiz va martitsa rangini elementar almashtirish yordamida topamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$ bo'lgani uchun $r(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3$ bo'ladi.

16-ta'rif. Kvadrat matritsa elementlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, u holda bunday matritsa aynimagan yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Aks holda, ya'ni agar determinant nolga teng bo'lsa, bu matritsa aynigan yoki maxsus matritsa deyiladi.

20-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ va $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalarning aynigan yoki aynimaganligini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsalarning determinantlarini hisoblaymiz:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=10-60=-50.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{vmatrix}=10-10=0.$$

$$|E|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Demak, A va E matritsalar – aynimagan, B matritsa esa aynigan matritsa. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ixtiyoriy sonlar va $A_1,A_2,...,A_n$ vektorlar berilgan bo'lsin.

17-ta'rif. $B=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+...+\alpha_nA_n$ vektorga $A_1,A_2,...,A_n$ vectorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

18-ta'rif. Agar A matritsaning r tartibli minoridan katta barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda matritsaning noldan farqli r tartibli minori bazis minor deb ataladi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, bazis minorning tartibi matritsa rangiga teng.

Bazis minorlar haqldagi quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Matritsaning ixtiyoriy ustuni (satri) bazis minor joylashgan ustunlar (satrlar) chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. Umumiylikni buzmasdan bazis minor birinchi r ta satr va birinchi r ta ustunlar kesishmasida joylashgan, deb olamiz. $r+1$ tartibli quyidagi minorni ko'rib chiqamiz.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk}\\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & a_{sk}\end{vmatrix}$$

Bu minor bazis minorga $s-$ satr va $k-$ ustun elementlarini qo'shishdan hosil bo'lgan. Ta'rifga asosan $D=0$. Determinantni Laplas teoremasidan foydalangan holda oxirgi satri bo'yicha yoysak,

$$a_{s1}D_{s1}+...+a_{sr}D_{sr}+a_{sk}D_{sk}=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bunda D_{sj} son a_{sj} elementning algebraik to'ldiruvchisi. Teorema shartiga ko'ra $D_{sk}\neq 0$. Bundan:

$$a_{sk}=\alpha_1a_{s1}+\alpha_2a_{s2}+...+\alpha_ra_{sr},$$

bu erda $\alpha_j=\frac{D_{sj}}{D_{sk}}, j=1,2,...,r$. Bu tenglikda k ni 1 dan m gacha o'zgartirib, ixtiyoriy $k-$ ustun α_j, $j=1,2,...,r$ koeffitsiyentlar bilan bazis minorga mos ustunlar chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodasini olamiz.

19-ta'rif. A kvadrat matritsaning har bir a_{ik} elementini unga mos algebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirish natijasida hosil qilingan matritsa ustida transponirlash amalini bajarishdan hosil bo'lgan $\overline{A}$ matritsa berilgan matritsaga qo'shma matritsa deyiladi.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga qo'shma

matritsa $\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{i1} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{i2} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1j} & A_{2j} & ... & A_{ij} & ... & A_{nj} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{in} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

21-misol. Quyidagi $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun qo'shma matritsa topilsin.

Yechish. Matritsaning barcha elementlariga mos algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-20,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-15.$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-10.$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

Shunday qilib, berilgan A kvadrat matritsaga qo'shma bo'lgan $\overline{A}$ matritsa

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0 & -5 & -20\\ 0 & -15 & -10\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & -10\\ -5 & -15 & 1\\ -20 & -10 & 4\end{pmatrix}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

20-ta'rif. Agar A kvadrat matritsa uchun $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Ta'rifga asosan, $\det(A)\det(A^{-1})=\det(AA^{-1})=\det(E)=1$ bo'lganligi sababli, agar teskari matritsa mavjud bo'lsa $\det(A)\neq 0$ ekanligini hosil qilamiz. Agar $\det(A)=0$ bo'lsa, teskari matritsa mavjud emas.

Odatda matritsaga teskari matritsa topishning 2 xil usulidan foydalanamiz:

1. Agar A matritsa aynimagan bo'lsa, u holda uning uchun yagona A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi va u quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\overline{A},$$

bunda $\overline{A}$ matritsa A ga qo'shma matritsa.

22-misol. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

Yechish. 1) A matritsaning determinantini topamiz:

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} =$$

$$= -48 - 2\cdot(-42) + 3\cdot(32-35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$ demak A^{-1} mavjud.

2) A matritsa barcha elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 6\cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix} = -(4\cdot 0 - 6\cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} = 4\cdot 8 - 5\cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix} = 24;\quad A_{22} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix} = 6;\quad A_{31} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 6;\quad A_{33} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -3;$$

3) $\bar{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$ matritsani yozamiz.

4) A^{-1} matritsani topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\bar{A} = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Tekshiramiz: $A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9}&-\frac{7}{9}&\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Teskari matritsani topishning Gauss-Jordan usulida maxsusmas matritsani shu tartibdagi birlik matritsa bilan kengaytiriladi, kengaytirilgan matritsa satrlari ustida elementar almashtirish to kengaytirilgan matritsa birinchi qismida birlik matritsa hosil bo'lguncha olib boriladi, natijada kengaytirilgan matritsaning ikkinchi qismida berilgan matritsaga teskari bo'lgan matritsa hosil bo'ladi. Bu jarayonni Gauss-Jordan modifikatsiyasi (yoki formulasi) ko'rinishida yozishimiz mumkin: $(A|E)\sim(E|A^{-1})$

23-misol. Gauss-Jordan usulida berilgan matritsaga teskari matritsani toping. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}$.

Yechish. (3×6) o'lchamli $\Gamma=(A/E)$ kengaytirilgan matritsani yozamiz. Avval matritsaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib uni pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz $\Gamma_1=(A_1/B)$, keyin $\Gamma_2=(E/A^{-1})$ ko'rinishga keltiramiz.

$$\Gamma=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&-1&0&1&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II-I\\ III-2\cdot I\end{array}\sim$$

$$\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&2&-2&0&1\end{array}\right)II+III\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&2&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III\div2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&1&-1&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}I-II-III\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \Gamma_2$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Tekshiramiz: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

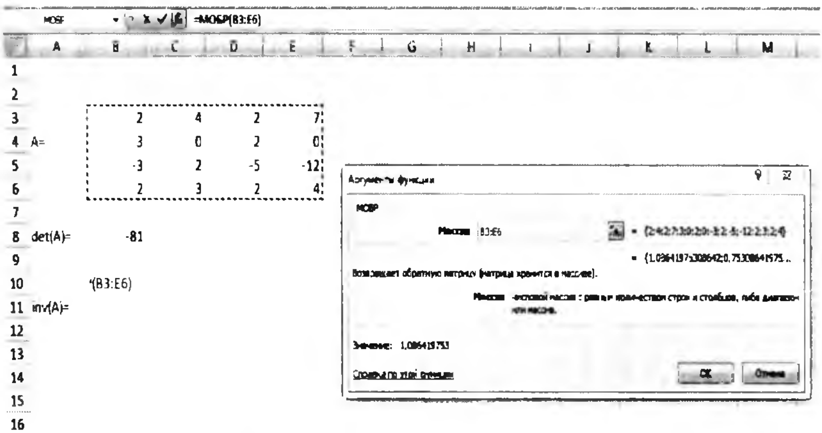
$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Endi teskari matritsani Excelda qurish bilan tanishib chiqamiz.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini topamiz. Birinchi navbatda matritsaning determinantini hisoblaymiz. $\det(A) = -81 \neq 0$. Demak, teskari matritsa mavjud.

I. Bo'sh katakni belgilaymiz. Matematik funksiyalardan 'МОБР' funksiyasini tanlaymiz.

II. Dialog oynasida A matritsa joylashgan o'rni koordinatalarini kiritamiz.



III. Enter tugmasini bosamiz. Belgilangan katakda teskari matritsaning birinchi elementi paydo bo'ladi. Boshqa elementlarni hosil qilish uchun shu katakdan boshiab 4 ga 4 jadvalni belgilaymiz va $F2$ tugmasini bosamiz. Keyin Ctrl+Shift+Enter tugmalari birgalikda boslladi. Shu bilan teskari matritsani hosil qilamiz.

B10   fx {=МОБР(B3:E6)}

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		2	4	2	7
4	A=	3	0	2	0
5		-3	2	-5	-12
6		2	3	2	4
7					
8	det(A)=	-81			
9					
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383
14					

Matritsalarni ko'paytirish usuli bilan tekshirib, natija to'g'riligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

G6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		2	4	2	7						
4	A=	3	0	2	0						
5		-3	2	5	12						
6		2	3	2	4			1	0	0	0
7								0	1	0	0
8	det(A)=	-81				A*inv(A)=		0	0	1	0
9								0	0	0	1
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086						
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148						
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963						
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383						
14											

I bobga doir savollar

1. Matritsa, deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa, deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Matritsalarni qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallari bo'ysunadigan xossalarni sanab o'ting.
4. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
5. O'zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko'paytiriladi?
6. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga bo'ysunadi?
7. $n-$tartibli kvadratik matritsa, deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash Sarrus qoidasi nimadan iborat?
9. Juft yoki toq o'rin almashtirish tizimi, deb qanday o'rin almashtirishga aytiladi?
10. $n-$tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
11. Algebraik to'ldiruvchi deb nimaga aytiladi?

12. Determinantni transpomirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishiar bajarganda uning qiymati o'zgarmaydi?
13. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
14. Aynigan matritsa, deb qanday kvadrat matritsaga aytiladi?
15. Nima uchun aynigan matritsaning teskarisi mavjud emas?

I bobga doir misol va masalalar

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan $C=7A-4B$ matritsani toping.

2. AB va BA matritsalarni toping (agar ular mavjud bo'lsa):

a) $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ bo'lsa, AA^T va A^TA ko'paytmani hisoblang.

4. Matritsali ayniyatning to'g'riligini isbotlang.

a) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c) $(AB)^T = B^T A^T$.

d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

5. Matritsalarni hisoblang.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k$. c) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^k$, $k \in N$.

6. Matritsali ayniyatning to'g'riligini tekshiring.

a) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$, b) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

c) $(A-E)^3 = A^3-3A^2+3A-E$.

7. $f(x)=2x^2-5x+3E$ ko'phad, $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $f(A)$ matritsali ko'phadning qiymatini toping. Bu yerda $E-$ birlik matritsa.

8. $f(x)=x^2-5x+6$ ko‘phad. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $f(A)$ matritsali ko‘phadning qiymatini toping.

9. Ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & \sin\beta \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ (a-b) & (a+b) \end{vmatrix}$.

10. Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 50 & 10 & -10 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$

11. Ayniyatni isbotlang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

c) $\begin{vmatrix} a_{11}x^3 & a_{12}x^2 & a_{13}x & a_{14} \\ a_{21}x & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31}x^2 & a_{32}x & a_{33} & 0 \\ a_{41}x^3 & a_{42}x^2 & a_{43}x & a_{44} \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$

12. Tenglama(tengsizlik)ni yeching.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$

13. Determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

14. a parametrning qanday qiymatida A matritsaning rangi 3 ga teng bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

15. Matritsa rangini toping.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

16. λ parametrnimg turli qiymatlarida matritsa rangini toping.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

17. Teskari matritsani toping.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$ ($n \times n$ o'lchamli).

18. Matritsali tenglamani yeching.

a) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 7\end{pmatrix}$.

c) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

19. Uchta zavod to‘rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Agar oyma-oy ishlab chiqarilgan

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 3 & 1\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

mahsulot hajmlari matritsalari berilgan bo‘lsa: a) kvartalda ishlab chiqarilgan mahsulot matritsasini toping; b) har bir oyda ishlab chiqarilgan mahsulotlarining B_1 va B_2 orttirma matritsasini toping va natijalarni tahlil qiling.

20. Korxona uch turdagi mebel ishlab chiqarib, uni to‘rtta mintaqada sotadi. Mebelning i–turdagi bir birligini j - mintaqada sotilish narxi $B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 8 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ matritsa bilan ifodalangan. Agar bir oyda mebel (turlari bo‘yicha) sotilishi $A=\begin{pmatrix}200\\ 80\\ 100\end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan bo‘lsa, korxonaning har bir mintaqadagi daromadini aniqlang.

21. Ikki xil sifatdagi o‘simlik yog‘lari uchta do‘konda sotiladi. Do‘konlarda birinchi kvartalda sotilgan mahsulotlar hajmi A matritsa (ming so‘m hisobida) va ikkinchi kvartaldagisi B matritsa bo‘lsin.

Agar $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ bo‘lsa, 1) ikki kvartalda sotilgan mahsulot hajmi; 2) ikkinchi kvartalda birinchisiga nisbatan qancha ko‘p sotilganligini aniqlang.

22. Korxona ikki turdagi resurslardan foydalanib, uch turdagi mahsulotni ishlab chiqaradi. A harajatlar matritsasi j - turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan i–turdagi resurslar normasini, X matritsa kvartal bo‘yicha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini, P matritsa esa har bir turdagi resurs birligining bahosini ifodalasin.

Agar $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\20\\10\end{pmatrix}$, $P=(5\quad 2)$ matritsalar berilgan bo'lsa, a) har bir turdagi resurslarning S matritsasi; b) sarf etilgan barcha resurslarning to'la narxini aniqlang.

Javoblar: 1. $C=\begin{pmatrix}-11&-8&1\\-13&-6&-1\\-11&-9&-3\end{pmatrix}$

2. a) $AB=\begin{pmatrix}7&3&9\\14&6&18\\21&9&27\end{pmatrix}$, $BA=40$.

b) AB mavjud emas, $BA=\begin{pmatrix}3&4&5\\8&14&5\end{pmatrix}$

3. $AA^T=\begin{pmatrix}26&37\\37&62\end{pmatrix}$. $\quad A^TA=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\-1&41&42\\-3&42&45\end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2^{k-1}&2^{k-1}\\2^{k-1}&2^{k-1}\end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix}a^k&0&0\\0&b^k&0\\0&0&c^k\end{pmatrix}$.

6. a) Yo'q. **b)** Yo'q. **c)** Ha.

7. $f(A)=\begin{pmatrix}9&-4\\-1&11\end{pmatrix}$. **8.** $f(A)=\begin{pmatrix}9&0&-7\\7&-2&-5\\-21&6&13\end{pmatrix}$

9. a) -2. **b)** $-\cos(\alpha+\beta)$. **c)** $6a^2b+2b^3$.

10. a) 1. **b)** 200. **c)** 0.

12. a) $x_1=0, x_2=1$. **b)** $x\geq-\frac{41}{21}$.

13. a) 10. **b)** $8a+15b+12c-19d$.

c) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **d)** $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$.

14. $a\neq 2$. **15. a)** 2. **b)** 2. **c)** 3.

16. a) $\lambda=3$ da $r=3$, $\lambda\neq3$ da $r=4$. **b)** $\lambda=0$ da $r=2$, $\lambda\neq0$ da $r=3$.

17. a) $\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. **b)** A^{-1} mavjud emas. **c)** $\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\\\frac{1}{26}&\frac{2}{13}&\frac{3}{26}\\-\frac{7}{104}&\frac{1}{52}&\frac{31}{104}\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

19.a) $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 4 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}$; b) $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. $(6800 \quad 3040 \quad 540 \quad 1020)$. **21.** $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **22.** 1) $\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix}$; 2) 410

Tayanch so'z va iboralar: matritsa, satr matritsa, ustun matritsa, satr-vektor, ustun-vektor, nol matritsa, teng matritsa, kvadrat matritsa, zanjirlangan matritsalar, diagonal matritsa, skalyar matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, simmetrik matritsa, qiya simmetrik matritsa, determinant, aniqlovchi, ikkinchi tartibli determinant, uchinchi tartibli determinant, n-tartibli determinant, Sarrus qoidasi, matritsa osti minori, matritsa rangi, aynigan matritsa, aynimagan matritsa, qo'shma matritsa, teskari matritsa.

II bob. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI

2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi nazariyasi va asosiy tushunchalar

Ma'lumki, bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

sistemaga n noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sonlar (2.1) sistemaning koeffitsiyentlari, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \dots, b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Noma'lumlar vektorini $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matritsa shaklida yozilishi mumkin:

$$AX = B.$$

1-ta'rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning o'rniga qo'yilganda (2.1) sistemadagi tenglamalarni to'g'ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (2.1) sistemaning yechimlari tizimi, deb aytiladi va $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ sistema birgalikda, chunki sistema $x=3, y=1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo'lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, aniq sistema va cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa aniqmas sistema deyiladi.

3-misol. $\begin{cases} x-y=1. \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas, chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega, bunda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

4-misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1.1)$.

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini noldan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi.

5-misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b) natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning A asosiy matritsasi va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilamiz (2.1) sistema birgalikda bo'lsin. U holda uning biror yechimi mavjud va $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2,\dots,x_n=\xi_n$ dan iborat bo'lsin.

Bu yechimni (2.1) chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga qo'ysak:

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{in}\xi_n=b_i,\qquad i=1,2,\dots,m \tag{2.2}$$

ega bo'lamiz.

Bu tengliklar majmuasi quyidagi tenglikka ekvivalent:

$$\xi_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+\xi_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\qquad i=1,2,\dots,m \tag{2.2'}$$

Bundan (2.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasi oxirgi ustuni asosiy matritsa ustunlari kombinatsiyasidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki matritsaning rangi ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ustunni tashiab yuborilganda o'zgarmaydi. Kengaytirilgan matritsadan ozod hadlar ustunini olib tashlasak sistemaning asosiy matritsasiga ega bo'lamiz. Demak, asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Yetarliligi. Aytaylik asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng.

$$r(A)=r(A/B)$$

A (asosiy) matritsaning r ta bazis ustunlarini ajratamiz, bular (A/B) (kengaytirilgan) matritsaning ham bazis ustunlari bo'ladi. Faraz qilamiz birinchi r ta ustun bazis bo'lsin.

Bazis minor haqidagi teoremaga asosan A matritsaning oxirgi ustuni bazis ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlanishi mumkin. Bu esa:

$$\xi_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+\xi_r\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r$ lar mavjudligini bildiradi. Oxirgi munosabat quyidagi m ta tenglamalarga ekvivalent:

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{ir}\xi_r=b_i,\qquad i=1,2,\dots,m$$

Agar (2.1) tenglamalar sistemasiga

$$x_1=\xi_1, x_2=\xi_2,\dots,x_r=\xi_r, x_{r+1}=0,\dots,x_n=0, \tag{2.3}$$

qo'ysak, u hoida tenglamalar sistemasi (2.2) ga aylanadi. Bundan noma'lumlarning (2.3) qiymati (2.1) sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiradi, ya'ni sistema yechimga ega bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Kroneker - Kapelli teoremasiga ko'ra birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasining asosiy A matritsasi rangi bilan uning kengaytirilgan (A/B) matritsasinimg ranglari teng. $r = r(A) = r(A/B)$ qiymatni berilgan sistemaning rangi deb ataymiz. A matritsaning biror bazis minorini belgilab olamiz. Bazis satrlarga mos bo'lgan tenglamalarni berilgan sistemaning bazis tenglamalari deb ataymiz. Bazis tenglamalar bazis sistemani tashkil etadi. Bazis ustunlarda qatnashgan noma'lumlarni bazis o'zgaruvchilar, qolganlarini ozod o'zgaruvchilar, deb ataymiz.

Oldmgi mavzularda berilgan bazis minor haqidagi teoremadan quyidagi tasdiq o'rinliligi kelib chiqadi.

Teorema. Chlziqli tenglamalar sistemasi o'zining bazis tenglamalar sistemasiga ekvivalent.

Soddalik uchun (2.1) sistemada birinchi r ta tenglama bazis tenglama bo'lsin. Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{2.4}$$

bazis tenglamalar sistemasi berilgan (2.1) sistemaga ekvivalent. Shuning uchun (2.1) tenglamalar sistemasi o'rniga uning rangiga teng bo'lgan (2.4) sistemam tadqiq etish yetarli.

O'z-o'zidan ko'rinadiki matritsaning rangi ustunlar sonidan katta emas, ya'ni $r \le n$. Boshqacha aytganda birgalikdagi sistemaning rangi noma'lumlar sonidan oshmaydi.

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $r = n$;

$r = n$, ya'ni bazis sistemada tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lsin. Bazis sistemani quyidagicha ifodalaymiz $A_b X = B_b$. Bunda A_b bazis minorga mos matritsa. $\det(A_b) \ne 0$ bo'lganligi sababli, A_b^{-1} mavjud va

$$X = EX = A_b^{-1}A_b X = A_b^{-1}(A_b X) = A_b^{-1}B$$

tenglik yagona yechimni ifodalaydi.

2) $r < n$ bo'lsin. Tenglamalarda $x_1, x_2, \dots, x_r$ bazis noma'lumlar qatnashmagan barcha hadlarni uning o'ng tomoniga o'tkazamiz. U holda (2.4) sistema:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \dots - a_{in}x_n. \tag{2.4'}$$

ko'rinishni oladi.

Agar erki $x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ noma'lumlarga biror $\xi_{r+1}, \dots, \xi_n$ sonli qiymatlarni bersak, u holda $x_1, \dots, x_r$ o'zgaruvchilarga nisbatan tenglamalar sistemasini olamiz va bu sistemada noma'lumlar soni asosiy matritsa rangiga teng bo‘lganligi sababli u yagona yechimga ega. Erkli noma’lumlar qiymati ixtiyoriy tanlanganligi sistemaning umumiy yechimlari soni cheksiz ko‘p.

Fan va texnikadaning ko‘p sohalarida bo‘lganidek, iqtisodiyotning ham ko‘p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

6-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi
	A	B	C	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasi to‘la sarflansa, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlashning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Bir birlik A turdagi mahsulotga, 1-xil xom ashyo sarfi 5 birlik bo‘lganligi uchun $5x_1$ A turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil- xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday B va C turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o‘xshash 2-, 3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu masalaning matematik modeli quyidagi uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Ikki bozor muvozanati masalasi. Ko‘p bozorli muvozanat modelida tenglamalar sistemasi har bir bozordagi talab, taklifning muvozanatini ifodalaydi. Bunda talab va taklif har bir bozorda, boshqa bozordagi narxlarga bog‘liq. Masalan, kofega bo‘lgan talab, faqat kofening narxiga bog‘liq emas shuningdek o‘rin bosuvchi tovar bo‘lgan choyning ham narxiga bog'liq. Mashinaga talab uning narxiga bog'liq va shuningdek, to'ldiruvchi tovar bo'lgan uning yoqilg'isiga ham bog'liq. Korxonalarning taklifi turli ko'rinishdagi tovarlar narxiga bog'liq. Masalan, biror firma ishlab chiqargan mahsulot, boshqasi uchun xom ashyo material bo'lishi mumkin.

Ikki tovar bog'liqligi modeli masalasi.

$$\left.\begin{aligned} q_1^s &= \alpha_1 + \beta_{11}p_1 + \beta_{12}p_2 \\ q_2^s &= \alpha_2 + \beta_{21}p_1 + \beta_{22}p_2 \end{aligned}\right\} \text{taklif}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1^d &= a_1 + b_{11}p_1 + b_{12}p_2 \\ q_2^d &= a_2 + b_{21}p_1 + b_{22}p_2 \end{aligned}\right\} \text{talab}$$

Natijada masalan, $\beta_{12} < 0$ ikkinchi firmadagi materiallar narxi o'sishi, birinchi firmani material sarfini kamaytiradi, natijada esa birinchi firma ishiab chiqarishni kamaytiradi. Har bir bozordagi talab va taklifning tengligining o'rnatilishi muvozanat narxlar bo'lgan p_1 va p_2 larni aniqlash uchun ikki tenglamalar sistemasini beradi. $b_{ij} \cdot s$ va $\beta_{ij} \cdot s$ lar nolga teng ham bo'lishi mumkin.

Bu tenglamalar modelning asosini tashkil etadi va strukturali tenglik, deb ataladi.

$$(b_{11} - \beta_{11}) \cdot p_1 + (b_{12} - \beta_{12}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$(b_{21} - \beta_{21}) \cdot p_1 + (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Ikkinchi tenglamadan p_1 ni topsak:

$$p_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) - (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2}{(b_{21} - \beta_{21})}$$

Endi buni birinchi tenglikka qo'yamiz

$$p_2 = \frac{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (\alpha_2 - a_2) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (\alpha_1 - a_1)}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 ni topsak:

$$p_2 = \frac{(b_{22} - \beta_{22}) \cdot (\alpha_1 - a_1) - (b_{12} - \beta_{12}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 va p_2 larni bunday ta'riflash kamaytirilgan forma deb ataladi. Chunki ular faqat modelning ko'rsatkichlariga bo'g'liq. $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ $i, j = 1,2$ larning alohida parametrlari uchun biz p_i nmg qiymatlarini topa olamiz. Keyingi misollarda bu qiymatni qanday topish ko'rsatilgan.

To'ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati. Faraz qilaylik iste'molchilar bozorida o'rin bosadigan tovarlarga talab, taklif tengligi quyidagicha:

$$q_1^s = -1 + p_1, \quad q_1^d = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad \text{1-tovar}$$

$$q_2^s = p_2,\ q_2^d = 40 - 2p_2 - p_1 \qquad \text{2-tovar}$$

Bu yerda q_i^s va q_i^d talab va taklif miqdori. p_i tovar narxlari bu tovarlarning o‘rinbosar ekanligidan agar birinchi tovarga talab kamaysa, ikkinchi tovar narxi ko‘tariladi. Endi muvozanat narxni toping (ikki tovar uchun).

Yechish. $q_i^s = q_i^d$ tengligidan ikkita tenglik kelib chiqadi

$$3p_1 + p_2 = 21$$

$$p_1 + 3p_2 = 40$$

Ikkinchi tenglikdan $p_1 = 40 - 3p_2$ topib, birinchisiga qo‘ysak:

$$3\cdot(40 - 3p_2) + p_2 = 21 \Rightarrow 8p_2 = 99 \Rightarrow p_2 = 12{,}375$$

va $p_1 = 2{,}875$ ekanligi keladi. Natijada bu narx bozordagi muvozanat narxni beradi.

2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda (dastlab chapdan o‘ngga, so‘ngra o‘ngdan chapga qarab) amalga oshiriladi.

1-bosqich. (2.5) sistemani uchburchak ko‘rinishga keltirishdan iborat.

Buning uchun, $a_{11} \neq 0$, deb (agar $a_{11} = 0$ bo‘lsa, 1- tenglamani $a_{i1} \neq 0$ bo‘lgan i-tenglama bilan o‘rin almashtiriladi) birinchi tenglamaning chap va o‘ng tomoni a_{11} ga bo‘linadi. So‘ngra, 1 tenglama $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ga ko‘paytirilib, i-tenglamaga qo‘shiladi. Bunda, sistemaning 2-tenglamasidan boshlab x_1 noma’lum yo‘qotiladi. Bu jarayonni $n-1$ marotaba takrorlab quyidagi uchburchaksimon sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

2-bosqich. Oxirgi sistemani yechishdan iborat. Bunda, dastlab sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n topilib, undan oldingi tenglamaga qo'yiladi va undan x_{n-1} topiladi. Shu jarayon davom ettirilib, nihoyat 1-tenglamadan x_1 topiladi.

Sistema Gauss usuli bilan yechilganda uchburchaksimon shaklga kelsa u yagona yechimga ega bo'ladi. Agar sistema pog'onasimon shaklga kelsa u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli, deb ham ataladi. Bu jarayonni kattaroq teglamalar sistemasiga qo'llash mumkin. chunki bu juda samarali. Quyidagi misolni ko'rib chiqamiz:

7-misol. Tenglamalar sistemasining barcha mumkin bo'lgan yechimlarini toping.

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Yechish. Dastlab ikkinchi va uchinchi tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'q qilinadi va keyin x_2 noma'lumni uchinchi tenglamadan yo'qotamiz. Keyin faqat x_3 noma'lum qoladi. Lekin biz dastlabki 2 ta tenglamaning o'rnini almashtirishdan boshlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

2-tenglamada x_1 yo'q. Keyingi qadamda 1-tenglamani ishiatib 3-tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Bu jarayon 1-tenglamani 3 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shish orqali bajariladi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Keyingi bosqichda 2-tenglamani $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirib, x_2 ning koeffitsiyentini 1 ga aylantiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasidagi 2-tenglamani -5 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz. x_2 ni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{27}{2}x_3 = \dfrac{27}{2}. \end{cases}$$

So‘ng, oxirgi tenglamani $\frac{2}{27}$ ga ko‘paytirib $x_3 = 1$ qiymatni topamiz. Bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo‘yib, $x_2 = -3$ qiymatni hosil qilamiz. $x_3 = 1$ va $x_2 = -3$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo‘yib $x_1 = 2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(2;-3;1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotib yechimni topamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 9x_2 = 9, \\ 14x_2 - 7x_3 = 21. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_3 - 2x_2 = -3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$x_2 = 1$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo‘yib, $x_3 = -1$ qiymatni hosil qilamiz. $x_2 = 1$ va $x_3 = -1$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo‘yib $x_1 = -2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(-2;1;-1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+5x_2+2x_3=8.\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20.\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6.\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+3x_2+2x_3=12.\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenlamalar sonidan ko'p bo'lsa ham. ya'ni sistema birgalikda bo'lib aniq bo'lmasa ham uning yechimini Gauss usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

9-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=10.\\ 7x_1+2x_2+8x_3-6x_4=44.\\ 5x_1+2x_2+5x_3-6x_4=30.\end{cases}$$

Yechish. Birinchi qadamda sistemadagi birinchi tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, qolganlaridan ketma-ket x_1 noma'lumni yo'qotamiz, ikkinchi qadamda ikkinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_2 noma'lumni yo'qotamiz. uchinchi qadamda uchinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_3 noma'lumni yo'qotamiz. Soddalik uchun tenglamalar sistemasi o'rniga kengaytirilgan matritsa ustida ish olib boramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10\\ 7 & 2 & 8 & -6 & 44\\ 5 & 2 & 5 & -6 & 30\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 9 & -6 & 1 & 16\\ 0 & 7 & -5 & 1 & 10\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22\\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22\end{array}\right)$$

Hosil bo'lgan sistemada ikkita bir hil tenglamadan bittasini qoldirib, ikkinchisini tashlab yuboramiz. Shu yerda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning chapdan o'ngga qarab bosqichi tugadi. Tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik. Endi x_4 erkli o'zgaruvchini o'ng tomonga o'tkazamiz. So'ngra o'ngdan chapga qarab harakat yordamida sistemaning barcha yechimlari topiladi.

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=4.\\ \quad 2x_2-x_3+2x_4=6,\\ \quad\quad 3x_3+16x_4=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=8x_4-34/3\\ x_2=-(11x_4+2)/3\\ x_3=-(16x_4-22)/3\end{cases}\Rightarrow$$

Javob: $\left(8x_4-\dfrac{34}{3};-\dfrac{11x_4+2}{3};-\dfrac{16x_4-22}{3};x_4\right)$. $x_4\in R$.

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1)\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-x_4=5,\\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-1.\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x_1-x_2-3x_3=6,\\ -2x_1+2x_2+6x_3=-9.\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x_1-3x_2=-5,\\ -x_1+x_2=1.\\ 4x_1-x_2=2.\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss – Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A|B)$ matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda birlik matritsadan o'ngda yechimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss - Jordan usulni quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B)\sim(E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o'ng ustunda bir yo'la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko'paytmasi-yechimlar ustuni quriladi.

10-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4.\end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\3&-1&-1&-2&-4\\2&3&-1&-1&-6\\1&2&3&-1&-4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&4&7&11&7\\0&-1&5&7&8\\0&1&1&-4&-5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&-5\\0&-1&5&7&8\\0&4&7&11&7\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&7&6\\0&1&1&-4&-5\\0&0&6&3&3\\0&0&3&27&27\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&7&6\\0&1&1&-4&-5\\0&0&1&9&9\\0&0&2&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&-3\\0&1&0&-13&-14\\0&0&1&9&9\\0&0&0&-17&-17\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&-3\\0&1&0&-13&-14\\0&0&1&9&9\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

11-misol. Tenglamalar sistemasini Gauss – Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1,\\2x_1-2x_2+5x_3+2x_4=4,\\3x_1+4x_2+2x_3+2x_4=-2.\end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemada kengaytirilgan matritsani ajratib olamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&2&3&3&1\\2&-2&5&2&4\\3&4&2&2&-2\end{array}\right)$$

va unga Gauss – Jordan usulini tatbiq etamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2/5&3/5&3/5&1/5\\0&-14/5&19/5&4/5&18/5\\0&14/5&1/5&1/5&-13/5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&8/7&5/7&5/7\\0&1&-19/14&-2/7&-9/7\\0&0&4&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3/7&3/7\\0&1&0&3/56&-53/56\\0&0&1&1/4&1/4\end{array}\right)$$

Sistema trapetsiyasimon ko‘rinishiga keldi:

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{3}{7}\\x_2+\dfrac{3}{56}x_4=-\dfrac{53}{56}\\x_3+\dfrac{1}{4}x_4=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Bu yerda x_1, x_2 va x_3 o‘zgaruvchilarni bazis sifatida qabul qilamiz, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$. Bu determinant oxirgi sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan asosiy matritsaning ham bazis minori bo'ladi. Erkli o'zgaruvchi bo'lib x_4 xizmat qiladi.

Oxirgi sistemadan quyidagi yechimga

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4,$$

$$x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4,$$

$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy X yechimini

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Agar $x_4 = 2$, deb olsak, u holda berilgan sistemaning

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishdagi xususiy yechimini topamiz.

Agar $x_4 = 0$ ni olsak berilgan sistemaning quyidagi bazis yechimiga ega bo'lamiz:

$$X_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iqtisodiy masalalarning chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanadigan modellarida odatda noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'ladi. Bu holat bir tomondan erkli o'zgaruvchilarni tanlash hisobiga bizga qo'shimcha erkinlik beradi. Biroq sistema yechimlari cheksiz ko'p bo'lgani sababli mumkin bo'lgan barcha holatlarni ko'rish mumkin bo'lmay qoladi va buning oqibatida iqtisodiy jihatdan optimal yechimni topishning imkoniyati bo'lmaydi.

Bunday holatlarda odatda bazis yechim tushunchasidan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

2-ta'rif. Faqat bazis o'zgaruvchilari noldan farqli bo'lishi mumkin bo'lgan yechim tenglamalar sistemasining bazis yechimi deyiladi.

Bazis yechimda erkli o'zgaruvchilarning qiymatlari nolga teng. deb olinadi. Tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p bo'lsada, bazis yechimlar soni chekli bo'ladi. Bazis yechimlar soni bazis minorlar soniga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik sistemaning rangi r ga, noma'lumlar soni n ga teng bo'lsin. $n>r$ bo'lganda bazis minorlar soni (bazis yechimlar soni) ko'pi bilan $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ga teng.

Tasdiq. Agar $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar $AX=B$ tenglamalar sistemasining bazis yechimlari bo'lsa, $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=1$ shartni qanoatiantiruvchi ixtiyoriy $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ sonlar uchun $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+...+\alpha_kX_k$ chiziqli kombinatsiya ham $AX=B$ tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$A(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+...+\alpha_kX_k)=\alpha_1AX_1+\alpha_2AX_2+...+\alpha_kAX_k=$$
$$=\alpha_1B+\alpha_2B+...+\alpha_kB=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)B=B.$$

Umuman olganda, sistemaning ixtiyoriy yechimini bazis yechimlarning koeffitsiyentlari yig'indisi birga teng bo'lgan chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin.

12-misol. Ushbu

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3+6x_4+6x_5=3,\\3x_1-4x_2+6x_3+8x_4+9x_5=5.\end{cases}$$

sistemada:

a) noma'lumlarni bazis va erkin o'zgaruvchilarga ajratish usuli sonini aniqlang:

b) bazis yechimlarini toping.

Yechish. a) mazkur sistemada ikkita tenglama va beshta noma'lum qatnashmoqda $(m=2,\ \ n=5)$. Ko'rinib turibdiki, $r=2$. Demak, noma'lumlarning bazis guruhlari ikkita noma'lumdan iborat. Bunda:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{3!4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10.$$

Bunda guruhlar:

x_1,x_2; x_1,x_3; x_1,x_4; x_1,x_5; x_2,x_3; x_2,x_4; x_2,x_5; x_3,x_4; x_3,x_5; x_4,x_5.

Bu juftliklarning qaysi birida no'malumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, o'sha juftlik noma'lumlari bazis o'zgaruvchi bo'la oladi. Shuning uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Bundan ko'rinib turibdiki 2-, 4-,6-,9- juftliklar bazis o'zgaruvchilar bo'la olmaydi. Chunki bu juftliklarga mos bazis minorlar nolga teng. Demak, sistemani bazis va erkin o'zgaruvchilarga oltita usul bilan ajratish mumkin:

1) x_1 va x_2 - bazis, x_3,x_4,x_5 - erkli;

2) x_1 va x_4 - bazis, x_2,x_3,x_5 - erkli;

3) x_2 va x_3 - bazis, x_1,x_4,x_5 - erkli;

4) x_2 va x_5 - bazis, x_1,x_3,x_4 - erkli;

5) x_3 va x_4 - bazis, x_1,x_2,x_5 - erkli;

6) x_4 va x_5 - bazis, x_1,x_2,x_3 - erkli.

b) berilgan sistemaning bazis yechimlarini topamiz. Yuqoridagi a) punktda sistema oltita bazis yechimga ega ekanligini ko'rgan edik. Birinchi bazis yechimni topish uchun x_1 va x_2 bazis o'zgaruvchilarni o'zgarishsiz qoldirib, x_3,x_4,x_5 erkli o'zgaruvchilarni nolga tenglaymiz. Natijada $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$

Shunday qilib, birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ikkinchi bazis yechimni topamiz. x_1 va x_4 - bazis, u holda x_2,x_3,x_5 erkli o'zgaruvchilarni nolga tenglab

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz va $x_1=3$, $x_4=-\frac{1}{2}$ yechimi topamiz.

Shunday qilib, ikkinchi bazis yechim $X_{2b}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-0.5\\0\end{pmatrix}$.

Xuddi shu usul bilan qolgan bazis yechimlarni ham topamiz:

$$X_{3b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1.5\\0\\0\end{pmatrix};\quad X_{4b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\quad X_{5b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1,5\\-0.5\\0\end{pmatrix};\quad X_{6b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-0,5\\1\end{pmatrix}.$$

Aniq r ta noldan farqli noma'lumdan tashkil topgan bazis yechimga xosmas bazis yechim deyiladi, bunda r - sistemaning rangi.

Yuqorida qaralgan misoldagi barcha oltita yechim ham xosmas bazis yechim bo‘ladi.

Ta'rifga ko‘ra bazis yechimda erkli o'zgaruvchilar nolga teng, bazis yechimlar esa odatda noldan farqli. Lekin, bazis yechimning bazis o‘zgaruvchilari ham nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bunday bazis yechimlar xos (maxsus) bazis yechimlar deb ataladi.

13-misol. Ushbu

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=2,\\3x_1+4x_2-8x_3=3\end{cases}$$

tenglamalar sistemasining bazis yechimlari topilsin.

Yechish. Sistema ikkita tenglama va uchta noma'lumdan iborat $(m=2,\ \ n=3)$ va $r=2$. Demak, bazis o‘zgaruvchilar guruhi ikkita noma'lumdan tashkil topgan. Bazis yechimlar soni $C_3^2=\frac{3!}{2!\cdot1!}=3$ dan katta emas.

x_1 va x_2 - bazis o‘zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=5\neq0$. U holda x_3 - erkli o‘zgaruvchi. Tenglamalarga $x_3=0$ qiymatni qo‘yib.

$$\begin{cases}2x_1+x_2=2.\\3x_1+4x_2=3.\end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1 = 1,\quad x_2 = 0$. Topilgan birinchi bazis yechim $X_{1t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_2 = 0$.

x_1 va x_3 - ham bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. U holda x_2 - erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_2 = 0$ qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz, uning yechimi $x_1 = 1$, $x_3 = 0$. Ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_3 = 0$.

x_2 va x_3 lar bazis o'zgaruvchilar emas, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant nolga teng: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$. Demak, uchinchi bazis yechim mavjud emas.

14-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi (tonna)
	1	2	3	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil-xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2-,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20 .$$

Yuqoridagiga o'xshash 2-,3-xil xom ashyolar uchun

$$2x_1+6x_2+8x_3=16,$$
$$9x_1+7x_2+4x_3=20$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20,\\2x_1+6x_2+8x_3=16,\\9x_1+7x_2+4x_3=20\end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20,\\2x_1+6x_2+8x_3=16,\\9x_1+7x_2+4x_3=20\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20.\\2x_1+6x_2+8x_3=16,\\9x_1+7x_2+4x_3=20\end{cases}\sim\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20,\\\frac{6}{5}x_2+\frac{34}{5}x_3=8,\\-\frac{73}{5}x_2-\frac{7}{5}x_3=-16\end{cases}\sim\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20.\\6x_2+34x_3=40,\\-\frac{1220}{3}x_3=-\frac{1220}{3}\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}5x_1+12x_2+3x_3=20,\\6x_2+34x_3=16,\\x_3=1.\end{cases}$$

15-misol. Korxona to'rt xildagai xom ashyo ishlatib to'rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari				Xom ashyo zahirasi (tonna)
	1	2	3	4	
1	1	2	1	0	8
2	0	1	3	1	15
3	4	0	1	1	11
4	1	1	0	23	23

Matematik modelini tuzamiz.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\x_2+3x_3+x_4=15.\\4x_1+x_3+x_4=11,\\x_1+x_2+5x_4=23\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz.

Yechish. 1-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun 1-tenglamani ketma-ket (-4), (-1) ga ko‘paytirib mos ravishda 3, 4-tenglamalarga hadma-had qo‘shish orqali ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2), (8), (1) larga ketma-ket ko‘paytirib, mos ravishda 1, 3, 4 – tenglamalarga hadma-had qo‘shamiz va ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22. \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan $x_3$noma’lumm yo‘qotamiz, buning uchun 3-tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{5}{21}\right), \left(-\frac{3}{21}\right), \left(-\frac{2}{21}\right)$ larga ko‘paytirib mos ravishda 1, 2, 4 – tenglamalarga hadma-had qo‘shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x4 noma’lumni yo‘qotamiz, bunimg uchun 4 - tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{21}{3}\right), \left(-\frac{21}{6}\right), (-9)$ larga ko‘paytirib, mos ravishda 1, 2, 3 - tenglamalarga hadma-had qo‘shamiz natijada, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ yechimni olamiz.

2.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi va teskari matritsa usuli

Kramer qoidasi. Agar n ta noma'lumli n ta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

chiziqli tenglamalar sistemaning Δ determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda (2.6) sistema yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \\ x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta} \end{cases} \tag{2.7}$$

bu yerda Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n determinantlar Δ determinantda noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlarni mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirish orqali hosil qilinadi. (2.7) formulalarga Kramer formulalari deyiladi.

16-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasinmg yechlmini Kramer formulalari yordamida topmg.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27. \ \Delta \neq 0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkll qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: (-3; 2; 1).

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30. \end{cases}$

Agar $\Delta = 0$ bo'lib, Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda (2.6) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

17-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Tenglamalar sistemasining asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \ \Delta = 0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistemadan Δx_1, Δx_2, Δx_3 larni hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha toplladi:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}3&1&3\\5&2&6\\2&2&0\end{vmatrix}=-6,\qquad \Delta x_2=\begin{vmatrix}2&3&3\\4&5&6\\3&2&0\end{vmatrix}=9,\quad \Delta x_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&5\\3&2&2\end{vmatrix}=1.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimga ega emas, chunki $\Delta=0$ va $\Delta x_1\neq 0$, $\Delta x_2\neq 0$, $\Delta x_3\neq 0$.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\4x_1+2x_2+6x_3=5,\\3x_1+2x_2+x_3=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x_1+x_2+3x_3=3,\\8x_1+2x_2+6x_3=5,\\3x_1+2x_2+2x_3=2.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=3,\\2x_1+2x_2+6x_3=5,\\3x_1+2x_2+3x_3=2.\end{cases}$

Agar $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta x_1=\Delta x_2=....=\Delta x_n=0$ bo'lsa, u holda (2.6) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

18-misol. Quyidagi

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\4x_1+2x_2+6x_3=6,\\6x_1+3x_2+9x_3=9.\end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{vmatrix}=0.\ \Delta=0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistemaning $\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3$ determinantlarini hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}3&1&3\\6&2&6\\9&3&9\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta x_2=\begin{vmatrix}2&3&3\\4&6&6\\6&9&9\end{vmatrix}=0,\quad \Delta x_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{vmatrix}=0.$$

Demak, tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega chunki $\Delta=0$ va $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2=0$, $\Delta x_3=0$.

Agar sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lsa, u holda uning umumiy yechimini Kramer qoidasi bilan ham topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\4x_1+2x_2+6x_3=6,\\6x_1+4x_2+5x_3=9.\end{cases}$$

sistemaning yechimini toping.

Yechish. Sistemaga ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -3x_3 + 3, \\ 6x_1 + 4x_2 = -5x_3 + 9. \end{cases}$$

Sistemaning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -3x_3 + 3 & 1 \\ -5x_3 + 9 & 4 \end{vmatrix} = -7x_3 + 3, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3x_3 + 3 \\ 6 & -5x_3 + 9 \end{vmatrix} = 8x_3.$$

U holda Kramer formulalari yordamida quyidagi yechimni hosil qilamiz va undan sistemaning yechimi cheksiz ko'p ekanligini ko'rishimiz mumkin:

$$x_1 = \frac{-7x_3 + 3}{2} = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{8x_3}{2} = 4x_3.$$

$$x_3 = \alpha \Rightarrow X\left(-\frac{7}{2}\alpha + \frac{3}{2}, 4\alpha\right)$$

Shuni ta'kidlashimiz kerakki, bu yerda biz asosiy determinant sifatida $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni oldik. Agar sistemaning yechimini topishda asosiy determinant sifatida $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ yoki $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantlarni olib sistema yechimining boshqa ko'rinishlarini ham hosil qllishimiz mumkin.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 12x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12. \end{cases}$

Kramer formulalari asosan nazariy jihatdan ahamiyatga ega. Agar sistemada noma'lumlar soni ko'p bo'lsa, bu qoida yordamida yechilganda katta va og'ir hisoblashiarni bajarishga olib keladi. Lekin, bu formulalar muhim afzallikka ega, ular barcha noma'lumlarning qiymatlarini aniq ifodalaydi.

Ushbu n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.8) tenglamalar sistemada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Bu yerda, A – noma'lumlar oldida turgan koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa;

X – noma'lumlardan tuzilgan matritsa; B – ozod hadlardan tuzilgan matritsa.

U holda (2.8) tenglamalar sistemasini

$$AX=B$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Faraz qilamiz $\det|A|\neq 0$ bo'lsin. U holda A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud. $AX=B$ tenglikning har ikkala tomonini A^{-1} ga chapdan ko'paytiramiz:

$A^{-1}AX=A^{-1}B,\qquad EX=A^{-1}B,\qquad X=A^{-1}B.$

Hosil bo'lgan $X=A^{-1}B$ ifoda chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yechish formulasidan iborat.

19-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=5, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$$

Yechish. A, X, B matritsalarni tuzib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A|=-12\neq 0$.

Teskari matritsani topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=11,\ A_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\ A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-10+0-2\\ 10+0-10\\ 20+0-8\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-12\\ 0\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

Demak, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$ yoki $(1;0;-1)$.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=6,\\ 3x_1+2x_3=8,\\ x_1+x_2-x_3=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_2+2x_3=5,\\ 2x_1+x_2-x_3=4,\\ -x_2+2x_3=1.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_3=5,\\ 3x_1-x_2=9,\\ x_1+x_2-2x_3=1.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\ 2x_2+x_3=3,\\ x_1-x_2=2.\end{cases}$

Agar sistema matritsasining rangi tenglama noma'lumlari sonidan kichik bo'lsa ham uning yechimini teskari matritsa usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

20-misol. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-5x_4=2,\\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=-3,\\ 3x_1-3x_2+8x_3-2x_4=-1,\\ 2x_1-2x_2+5x_3-12x_4=4\end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasi matritsasi A va kengaytirilgan matritsasi $(A|B)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -5\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -3 & 8 & -2\\ 2 & -2 & 5 & -12\end{pmatrix},\quad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4\end{array}\right)$$

larning rangini topib

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -1 & 13 & -7\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14\\ 0 & 0 & -1 & -32 & 14\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A) = r\left(A|B\right) = 3$ ekanligini ko'ramiz. Uning minori

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -3 & 8\end{vmatrix} = 8 - 18 - 24 - 9 + 32 + 12 = 1$$

noldan farqli. Shuning uchun to'rtinchi tenglamani tashlab yuboramiz, qolgan tenglamalarda x_4 qatnashgan hadlarni o'ng tomonga o'tkazamiz.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 + 5x_4. \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 - x_4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1 + 2x_4. \end{cases}$$

Bu sistemani teskari matritsa usuli bilan yechamiz. Avval asosiy matritsa teskarisini Gauss – Jordan usulida topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 7 & 0 & -8 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 20 & 7 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 5\end{array}\right),\quad A^{-1} = \begin{pmatrix}20 & 7 & -11\\ -4 & -1 & 2\\ -9 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

Tenglamalar sistemasining umumiy yechimni topish uchun $X = A^{-1} \cdot B$ amalni bajaramiz:

$$X = \begin{pmatrix}20 & 7 & -11\\ -4 & -1 & 2\\ -9 & -3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 + 5x_4\\ -3 - x_4\\ -1 + 2x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 + 71x_4\\ -7 - 15x_4\\ -14 - 32x_4\end{pmatrix}$$

Javob: $\left(30 + 71x_4; -7 - 15x_4; -14 - 32x_4; x_4\right)$, $x_4 \in R$

x_4 ga ixtiyoriy qiymatlar berib x_1, x_2, x_3 noma'lumlarning mos qiymatlarini topamiz. Sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

Mashqni bajaring. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$

21-misol. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Yechish. Tenglamaga quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

U holda berilgan tenglama

$$A \cdot X \cdot B = C$$

ko'rinishni oladi.

Agar AXB ifodaning chap tomondan A^{-1} va o'ng tomondan B^{-1} ga ko'paytirsak, hamda $A^{-1}A = E$, $EX = X$, $BB^{-1} = E$ va $XE = X$ ekanligini hisobga olsak quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{6} \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalarni yeching:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Agar sistemada $m \neq n$ va $r(A) \neq m$ bo'lib, $r(A) = r(A|B)$ bo'lgan holda ham teskari matritsa usulidan foydalanib uning yechimini topsa bo'ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo'llanilishiga doir misollar keltiramiz.

Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bir birlik A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 hirlik 2-tur xom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlik berilgan bo'lsa, ishiab chiqarilgan A va B mahsulot miqdorini toping.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishiab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chlqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1+3x_2$ A va B mahsulotni ishiab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorinni ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1+3x_2=62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1+5x_2=73$ tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2=62. \\ 4x_1+5x_2=73. \end{cases}$$

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Yechish. Kramer usulidan foydalanib yechimini topamiz.

$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\det|A|=25-12=13\neq 0$. Bunda

$\det|A|\neq 0$ bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 73 & 5 \end{vmatrix}}{13}=\frac{91}{13}=7,$$

$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 4 & 73 \end{vmatrix}}{13}=\frac{117}{13}=9.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: $(x_1,x_2)=(7.9)$.

22-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishiatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi (tonna)
	1	**2**	**3**	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xom ashyo zahirasini ishiatib, mahsulot turlari bo'yicha ishiab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1,x_2,x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2, 3-tur mahsulotlarni ishlah chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$. Yuqoridagiga o‘xshash 2, 3-xil xom ashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$

$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}.$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechlshda teskari matritsalar usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A| = 488 \neq 0$. Teskari matritsani topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -32, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 64, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -40,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -27, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 73,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 78, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{495}\begin{pmatrix} -36 & -27 & 81 \\ 64 & -7 & -34 \\ -31 & 73 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{495}\begin{pmatrix} -640-432+1560 \\ 1280-112-680 \\ -800+1168+120 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{488}\begin{pmatrix} 488 \\ 488 \\ 488 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ yoki $(1;1;1)$.

II bobga doir savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemaning yechimi, deb nimaga aytiladi?

2. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo'lmagan sistemalar deyiladi?

3. Birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi nima bilan xarakterlanadi va erkli noma'lumlar deb nimaga aytiladi?

4. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?

5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?

6. Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?

7. Chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini topish o'rniga uning umumiy yechimini qurish yetarlimi?

8. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechish mumkinmi?

9. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkinmi va qanday?

10. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi matritsa ko'rinishida qanday yoziladi?

11. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish yoki teskari matritsa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?

II bobga doir misol va masalalar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring, birgalikda bo'lgan sistema uchun umumiy va bitta xususiy yechimini toping:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -7 \\ -x_1 - 2x_2 \qquad = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 20x_3 - 10x_4 = 4 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = -1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7 \end{cases}$

2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer va teskari matritsa metodida yeching:

a) $\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + \ 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 + \ 2x_2 + \ x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + \ 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss metodida yeching:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss - Jordan metodida yeching:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

5. Korxona xom ashyoning 3 turidan foydalanib, mahsulotning 3 turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xom ashyoning berilgan zahiralarida mahsulotning har bir turini ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Xom ashyo turi	Mahsulot turlarida xom ashyo sarfi, og'.bir.mah			Xom ashyo zahirasi og'. bir
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

6. Tikuv fabrikasi uch kun davomida kastyumlar, plashlar va kurtkalar tikdi. Uch kun ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari va bu kunlarda ishlab chiqarishga ketgan pul harajatlari ma'lum.

Kun	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari (birlik)			Xarajatlar (ming.shart bir.)
	Kostyumlar	Plashlar	Kurtkalar	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir turdagi mahsulot birligining tannarxini toping.

7. Korxona 3 turdagi *A*, *B* va *C* mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xom ashyodan, foydalanadi: I, II, III. Har bir turdagi mahsulotdan 1birlik ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori ham keltirilgan.

Xom ashyo turi	1ta mahsulot uchun sarflanadigan xom ashyo normasi			Xom ashyoning umumiy miqdori
	A	B	C	
I	2	1	1	45
II	1	1	2	40
III	1	0	1	15

Korxona har bir turdagi mahsulotdan qancha birlikdan ishlab chiqarishi mumkin?

8. Uch guruh dalaning uch maydonini tozaladi. Maydonlar yuzasi va uni tozalashga ketgan vaqt jadvalda keltirilgan.

Maydon	Guruhlarning ish vaqti (soat)			Maydon yuzasi (ga)
	I	II	III	
1	2	3	1	10
2	1	5	4	19
3	4	1	3	18

Har bir brigadaning mehnat unumdorligini toping.

9. Xom ashyo zahiralari bo'yicha mahsulotni ishlab chiqarish prognozi. Korxona xom ashyoning 3 turini qo'llab, mahsulotning 3 turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xom ashyonig berilgan zahiralarida mahsulotning har bir turini ishiab chiqarish hajmini aniqlang.

Xom ashyo turi	Mahsulot turlarida xom ashyo sarfi. og'.bir.mah			Xom ashyo zahirasi og'. bir
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Javoblar: 1. a) Birgalikda va aniqmas sistema; umumiy yechim $(3-t_1-t_2;t_1;t_2)$. xususiy yechim $(3;0;0)$. **b)** Birgalikda va aniqmas sistema; umumiy yechim $(2-2\alpha;-2+\alpha;1+\alpha;\alpha)$; xususiy yechim $(0;-1;2,1)$. **c)** Birgalikda va aniqmas sistema; umumiy yecbim $(-1-2\alpha+\beta;1-2\alpha+\beta;\alpha;\beta)$. xususiy yechim $(-1;1;1,2)$. **d)** Birgalikda va aniqmas sistema; umumiy yechim $(1+2t_1+t_2-3t_3;t_1;1;t_2;t_3)$; xususiy yechim $(1;0;1;0;0)$. **2. a)** $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. **c)** $(-2,1,-1)$. **d)** $(0,1,-2)$. **3. a)** $(1,1,1)$. **b)** $(1,-1,2,0)$. **c)** Sistema birgalikda emas. **4. a)** $(1,2,3)$. **b)** $x_1=-\frac{2}{11}+\frac{c_1}{11}-\frac{9c_2}{11}, x_2=\frac{10}{11}+\frac{5c_1}{11}+\frac{c_2}{11}, x_3=c_1$. **c)** Sistema birgalikda emas. **5.** $(150;250;100)$. **6.** Kostyumning tannarxi $1{,}8$ (ming.shart bir.); plash-2.6 (ming.shart bir.); kurtka - 2 (ming.shart bir.). **7.** A mahsulotdan 10 birlik, B mahsulotdan 20 birlik va C mahsulotlarni 5 birllk. **8.** $2;1$ va 3 *za/c*. **9.** $(70, 120, 30)$.

Tayanch so'z va iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), tenglamalar sistemasini yechish usullari, yagona yecbim, birgalikda bo'lgan sistema, aniqmas sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo'lianilishi, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss – Jordan modifikatsiyasi, chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari, Kramer teoremasi, Kramer formulalari, teskari matritsa.

III bob. CHIZIQLI FAZO

3.1. Arifmetik vektor fazo

Bizga ma'lumki, yo'nalgan kesmalar vektorlar, deb atalib. ular $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},...$ ko'rinishda belgilangan va bu vektorlar ustida amallar aniqlangan. Yuqoridagi aniqlangan vektor tushunchasidan tekislikda va R^3 fazoda foydalanish mumkin. Biz bu paragrafda umumiyroq vektor, ya'ni n o'lchovli arifmetik vektor tushunchasini kiritib, vektorlar ustida bajariladigan amallarni aniqlaymiz va bu amallar yordamida arifmetik vektor fazo tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. n ta sonning tartiblangan tizimiga n o'lchovli vektor deyiladi.

Vektorlarni lotin alifbosining bosh harflari bilan $A, B, ..., X, Y,...$ ko'rinishda belgilaymiz va quyidagi bir ustundan iborat matritsa ko'rinishida yozamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Izoh. 1. Amaliyotda $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ shakldagi satr matritsa vektorlardan ham foydalaniladi.

2. Ba'zida vektorlar matritsalardan farq qilishi uchun lotin alifbosining kichik harflari bilan ham belgilanishi mumkin.

3. Elementar geometriya kurslarida ikki va uch o'lchovli geometrik vektorlar o'rganilgan. Bu mavzuda o'rganiladigan vektorlar bu vektorlarning umumlashmasidan iboratdir.

n o'lchovli vektorlar ustida qo'shish va songa ko'paytirish amallari xuddi matritsalardagi kabi aniqlanadi.

1) X va Y vektorlarning yig'indisi, deb shunday bir $C = X + Y$ vektorga aytiladiki, bu vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$C = X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

2) X vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Aniqlanishiga ko'ra ikkita n o'lchovli vektorlar yig'indisi, shuningdek, vektorni songa ko'paytirish natijasida yana n o'lchovli vektor hosil bo'ladi, ya'ni n o'lchovli vektorlar to'plami kiritilgan bu amallarga nisbatan yopiq to'plam bo'ladi. Ya'ni, bu amallar natijasida yana n o'lchovli vektor hosil bo'ladi.

1-misol. Quyidagi vektorlar yig'indisini va $5A$ ni toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad 5A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 15 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega:

1) $X+Y=Y+X$;

2) $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$;

3) $X+\Theta=X$, bunda $\Theta=(0,0,\ldots,0)^T$;

4) $X+(-X)=\Theta$;

5) $1\cdot X=X$;

6) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$, bunda α va β ixtiyoriy sonlar;

7) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$;

8) $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$.

bu yerda, X,Y va Z n o'lchovli vektorlar.

2-ta'rif. Barcha n o'lchovli vektorlar to'plami yuqorida kiritilgan chiziqli amallar bilan birgalikda n o'lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.

Agar vektorlarning komponentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa bu arifmetik vektor fazoga haqiqiy arifmetik vektor fazo deyiladi, agar vektorlarning komponentlari kompleks sonlardan iborat bo'lsa bu arifmetik vektor fazoga kompleks arifmetik vektor fazo deyiladi.

Haqiqiy arifmetik vektor fazo R^n, kompleks arifmetik vektor fazo esa C^n bilan belgilanadi.

Biz faqat haqiqiy arifmetik vektor fazo bilan ish ko'ramiz va uni oddiy qilib arifmetik fazo deb ataymiz hamda R^n kabi belgilaymiz.

Izoh. Vektor tushunchasining umumlashtirilishi vektor komponentlarini turlicha talqin qilishga imkon beradi.

2-misol. Korxona o'zining ishlab chiqarish jarayonida n turdagi xom ashyodan foydalanib m xildagi mahsulot ishlab chiqarsin. Korxonaning bir sutkada xom ashyoga bo'lgan ehtiyojini va bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlarini ifodalovchi vektorlarni yozing.

Yechish. Agar x_k kattalik k – xom ashyoga bo'lgan korxonaning bir sutkalik ehtiyojini, y_i kattalik esa bir sutkada ishlab chiqarilgan i – mahsulot miqdorini bildirsa, u holda quyidagi $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ va $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ vektorlar mos ravishda korxonaning barcha xom ashyoga bo'lgan bir sutkalik ehtiyojini va bir kunda, ishlab chiqarilgan mahsulotning turlari miqdorini bildiradi.

3-misol. Ikkita korxona bir xil 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonalarning har bir mahsulotdan bir sutkada qanchadan ishlab chiqarishi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4
1-korxona	24	36	50	80
2-korxona	30	25	20	10

Birinchi korxona bir oyda 22 kun, ikkinchi korxona esa 20 kun ishlaydi. Bir oyda ikkala korxona har bir turdagi mahsulotlardan birgalikda qancha miqdorda ishlab chiqaradi.

Yechish. Korxonalarning bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlari vektorlarini quyidagicha yozamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \quad va \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

U holda ikkala korxonaning birgalikdagi bir oyda ishlab chiqarish vektori quyidagicha topiladi:

$$22A+20B=22\begin{pmatrix}24\\36\\50\\80\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}30\\25\\20\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}528\\792\\1100\\1760\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}600\\500\\400\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1128\\1292\\1500\\1960\end{pmatrix}.$$

3-ta'rif. Ikkita bir xll o'lchovll

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad va\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb shu vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng songa aytiladi va

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

shaklda yoziladi.

Skalyar ko'paytınani matritsalar ko'paytmasi shaklida quyidagicha ifodalasbimiz ınumkin:

$$(X.Y)=X^TY=Y^TX.$$

4-misol. Quyidagi vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping:

$$X=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}.$$

Yechish. $(X.Y)=X^TY=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}=$

$$=2\cdot(-1)+5\cdot5+3\cdot6+(-4)\cdot7=-2+25+18-28=13.$$

5-misol. Korxona 5 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonanimg bir sutkada har bir turdagi mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarganligi va har bir mahsulotning bir birligining narxi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
Korxonaning bir sutkada i/ch.mahsuloti miqdori	23	54	26	46	68
Bir birlik mahsulot narxı(sh.p.b)	32	56	36	65	35

Korxonaning bir sutkalik daromadi qancha bo'ladi?

Yechish. Agar korxonaning ishlab chiqarish vektorini X va narx vektorini P bilan belgilasak, u holda

$$X=\begin{pmatrix}23\\54\\26\\46\\68\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}32\\56\\36\\65\\35\end{pmatrix}$$

bo'ladi. Korxonaning bir sutkalik daromadini topish uchun bu vectorlarni skalyar ko'paytiramiz:

$$(X,P)=X^TP=\begin{pmatrix}23 & 54 & 26 & 46 & 68\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\56\\36\\65\\35\end{pmatrix}=10066.$$

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $(X,X)\geq 0;$

2) $(X,X)=0 \Leftrightarrow X=O;$

3) $(X,Y)=(Y,X);$

4) $(X,Y+Z)=(X,Y)+(X,Z);$

5) $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y).$

bu yerda X,Y , Z n o'lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

4-ta'rif. Vektor komponentlari kvadratlari yig'indisining kvadrat ildiziga teng bo'lgan $|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ songa n o'lchovli X vektor uzunligi (moduli, normasi) deyiladi.

Vektor uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) $|X|\geq 0;$

2) $|\lambda X|=|\lambda|\cdot|X|;;$

3) $|X+Y|\leq|X|+|Y|$ (uchburchak tengsizligi)

bu yerda, X,Y , Z n o'lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

6-misol. Quyidagi vektorlarning uzunliklarini toping:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix};\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\3\end{pmatrix};\quad 3)\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\\-3\end{pmatrix}.$$

Yechish. 1) $|A|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

2) $|B|=\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+25+4+9}=\sqrt{42}$

3) $|C|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9+16+9}=\sqrt{39}.$

5-ta'rif. Agar ikkita noldan farqli vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda bunday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

7-misol. a parametrning qanday qiymatida quyidagi vektorlar ortogonal bo'ladi:

$$X=\begin{pmatrix}3\\0\\a\\-1\end{pmatrix}\quad va\quad Y=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\\0\end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblaymiz

$$(X,Y)=3\cdot(-2)+0\cdot 5+a\cdot 6+(-1)\cdot 0=6a-6.$$

Masala shartiga ko'ra, $6a-6=0$, $a=1$.

R^n arifmetik fazoda kiritilgan skalyar ko'paytma xossalaridan foydalanib quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. R^n arifmetik fazodan olingan ixtiyoriy X va Y vektorlar uchun

$$|(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|\quad yoki\quad \left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Isbot. Ixtiyoriy $\lambda\in R$ uchun

$$0\le(X+\lambda Y,X+\lambda Y)=(X,X)+2\lambda(X,Y)+\lambda^2(Y,Y)$$

Ixtiyoriy $\lambda\in R$ ga nisbatan hosil bo'lgan bu kvadrat uchhad nomanfiyligidan bu kvadrat uchhadning diskriminanti manfiy bo'lmasligini bilamiz. Bundan

$$4(X,Y)^2-4(X,X)(Y,Y)\le 0\quad \text{yoki}\quad |(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|.$$

Bu teorema asosida R^n arifmetik fazo vektorlari orasidagi burchak tushunchasini kiritamiz.

6-ta'rif. Ikkita n o'lchovli noldan farqli X va Y vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{(X,Y)}{|X|\cdot|Y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}, \quad \varphi\in[0;\pi]$$

formula bilan aniqlanadi.

R^n arifmetik fazodagi n o'lchovli vektorlar orasidagi burchak ta'rifining korrektligi yuqorida isbotlangan Koshi – Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi.

8-misol. $X(3;-4;2;5)$ *va* $Y(-1;3;-7;2)$ vektorlar berilgan:

$a)$ $3X+2Y$ vektorni toping;

$b)$ (X,Y) skalyar ko'paytmani toping;

$c)$ X *va* Y vektorlar orasidagi burchakni toping;

$d)$ Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini tekshiring.

Yechish. $a)$ $3X+2Y = 3\begin{pmatrix}3\\-4\\2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\3\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\\-8\\19\end{pmatrix}.$

$b)$ $(X,Y)=-3-12-14+10=-19.$

$c)$ $|X|=\sqrt{9+16+4+25}=\sqrt{54};\quad |Y|=\sqrt{1+9+49+4}=\sqrt{63}.$

$$\cos\varphi=\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}};\quad \varphi=\arccos\left(\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{19}{9\sqrt{42}}\right).$$

$d)$ $|-19|<\sqrt{54}\cdot\sqrt{63}\qquad 19<9\sqrt{42}\qquad 9\sqrt{42}\approx 58{,}33.$

3.2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi

n ta noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini vektor shakldagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$AX=\Theta$$

Bu yerda $\Theta=(0,0,...,0)^T$ -nol vektor, A – $m\times n$ o'lchovli matritsa, $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ - noma'lumlar vektori.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki $X=\Theta$ har doim sistemaning yechimi bo'ladi. Bir jinsli sistema uchun $rang(A)=n$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema aniq bo'lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $rang(A)<n$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo'ladi. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

9-misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4=0. \\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

Yechish. Bu sistemadan

$$\begin{cases} \quad\;\; 2x_2- \qquad 2x_4=0, \\ \quad\;\; 7x_2+5x_3-11x_4=0, \\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Agar ozod had sifatida x_4 noma'lumni olib, $x_4=\alpha$,, deb qarasak. U holda

$$x_1=\frac{3}{5}\alpha, \quad x_2=\alpha, \quad x_3=\frac{4}{5}\alpha, \quad x_4=\alpha$$

ko'rinishdagi yechimlarni hosil qilamiz.

Ushbu holda har bir nolmas yechim n o'lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $X_0=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektor $AX=\Theta$ sistemaning yechimi bo'lsa, u holda k ixtiyoriy son bo'lganda ham $kX_0=(kb_1,kb_2,...,kb_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo'ladi.

2) Agar $X_0=(b_1,b_2,...,b_n)$ va $X_1=(c_1,c_2,...,c_n)$ vektorlar $AX=\Theta$ sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda $X_0+X_1=(b_1+c_1,b_2+c_2,...,b_n+c_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo'ladi.

Shuning uchun bir jinsli sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham uning yechimi bo'la oladi.

Bir jinsli bo'lmagan sistema yechimlari uchun yuqoridagi da'vo o'rinli emas.

$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \ldots,\ A_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}$ n o'lchovli vektorlar sistemasini ko'rib chiqamiz.

7-ta'rif. Agar $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_kA_k=\Theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bittasi noldan farqli $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sonlar mavjud bo'lsa, u holda $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deb ataladi.

Aks holda, yani faqat $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$ bo'lgandagina $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_kA_k=\Theta$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi deb ataladi.

Izoh. $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_kA_k=\Theta$ vektor bir jinsli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Masalan, $A_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ vektorlar sistemasini qaraymiz.

$$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3=\Theta$$

vektordan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\2x_1+3x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlarini Gauss usulida topamiz.

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\-x_2+4x_3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-7x_3,\\x_2=4x_3,\\x_3\in R.\end{cases}$$

Ko'rinib turibdiki, tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega. $x_3=1$, deb olsak, $x_1=-7,\ x_2=4$ qiymatlarni topamiz. Ya'ni,

$$-7A_1+4A_2+A_3=\Theta.$$

Demak, ta'rifga asosan, qaralayotgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Yuqorida aytib o'tilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining xossalari va Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

Tasdiq. Agar $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasining rangi $r(A_1,\ldots,A_k)$ vektorlar soni k dan kichik bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Agar $r=k$ bo‘lsa, u holda $A_1,A_2,...,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘ladi.

Xususan, bu tasdiqdan, bir xil o‘lchovli vektorlar sistemasidagi vektorlar soni bu vektorlarning o‘lchovidan, ya'ni rangidan katta bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bo‘gliq bo‘lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $A_1,A_2,...,A_k$ vektorlar sistemasining rangi, ta’rifga asosan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga teng. Shartga asosan $k>n$. $r(A)\le \min(n,k)=n<k$. U holda $AX=\Theta$ tenglamada noma'lumlar soni tenglamalar sistemasi rangidan katta. Demak, sistema trivial bo‘lmagan (noldan farqli) yechimga ega, ya’ni, vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq.

8-ta’rif. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday maksimal sondagi chiziqli erkli sistemasi bu tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

Teorema. $AX=\Theta$ tenglamalar sistemasining har qanday yechimi fundamental yechimlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. $X_1,X_2,...,X_k$ vektorlar sistemasi $AX=\Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi bo‘lsin. X_0 vektor esa tenglamalar sistemasining boshqa ixtiyoriy yechimi bo‘lsin. U holda, ta’rifga asosan, $X_0,X_1,X_2,...,X_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq. Ya’ni shunday kamida bittasi noldan farqli $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k$ sonlar mavjudki,

$$\alpha_0X_0+\alpha_1X_1+...+\alpha_kX_k=\Theta.$$

Agar bu tenglikda $\alpha_0=0$ bo‘lsa, $\alpha_1X_1+...+\alpha_kX_k=0$, ya’ni, $X_1,X_2,...,X_k$ vektorlar chiziqli bog‘liq. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $\alpha_0\neq 0$. Shu sababli $X_0=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}X_1-...-\frac{\alpha_k}{\alpha_0}X_k$.

Bu teoremadan muhim bo‘lgan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq. Agar $F_1,F_2,...,F_k$ n o‘lchovli vektorlar sistemasi $AX=\Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$X=c_1F_1+...+c_kF_k$$

shaklda ifodalanadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining rangi r ga teng bo'lib, sistema noma'lumlari soni n dan kichik bo'lsin. U holda tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta nolmas vektorlardan iborat bo'ladi.

Teoremadan ko'rinib turibdiki, fundamental yechimlar sistemasidagi vektorlar soni bu sistemaga mos erkli o'zgaruvchilar soniga teng ekan.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasini quyidagicha qurishimiz mumkin:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi topiladi;

2. $n-r$ ta erkli o'zgaruvchilarga qiymat beramiz. Buning uchun $n-r$ o'lchovli $n-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Bunda masalan, har bir vektori $n-r$ o'lchovli $A_1=(1,0,\ldots,0)^T$, $A_2=(0,1,\ldots,0)^T,\ldots,A_{n-r}=(0,0,\ldots,1)^T$ sistemani tanlash mumkin;

3. Erkli noma'lumlar o'rniga yuqorida tanlangan A_1 vektorning mos koordinatalarini qo'yib, bazis noma'lumlar aniqlanadi va F_1 quriladi. Xuddi shunday usulda $A_2,A_3,\ldots,A_{n-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda $F_2,F_3,\ldots,F_{n-r}$ yechimlar quriladi.

$F_1,F_2,\ldots,F_{n-r}$ vektorlar sistemasining rangi ularning qismi bo'lgan $A_1,\ldots,A_{n-r}$ vektorlar rangidan kichik emas. $A_1,\ldots,A_{n-r}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani sababli bu vektorlar sistemasi rangi maksimal, ya'ni $n-r$ ga teng. Shu sababli, $F_1,F_2,\ldots,F_{n-r}$ vektorlar sistemasi rangi ham maksimal, ya'ni $n-r$ ga teng, ya'ni bu yechimlar sistemasi chiziqli erkli.

10-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada $r=2$, $n=5$. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n-r=3$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

1. Bu yerda x_3,x_4,x_5 noma'lumlarni ozod noma'lumlar, deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

2. So'ngra uchta chiziqli erkli uch o'lchovli vektor olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bu vektorlarning har birining komponentlarini umumiy yechimga ozod noma'lumlarning qiymatlari sifatida keltirib qo'yib, x_1, x_2 larning qiymatlarini hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasining quyidagi fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$F_1 = \left(\frac{19}{8}, \ \frac{7}{8}, \ 1, \ 0, \ 0\right)^T.$$

$$F_2 = \left(\frac{3}{8}, \ -\frac{25}{8}, \ 0, \ 1, \ 0\right)^T,$$

$$F_3 = \left(-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ 0, \ 0, \ 1\right)^T.$$

Sistemaning umumiy yechimi $X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3$, yoki

$$F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda $c_1.c_2$ va c_3 ixtiyoriy sonlar.

n noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi matritsalar yordamida $AX = B$ ko'rinishda ifodalangan bo'lsin. Bunda A - $m \times n$ o'lchovli matritsa, X - n o'lchovli noma'lumlardan iborat ustun vektor. B - m o'lchovli ozod hadlar vektori.

$AX = \Theta$ tenglamalar sistemasi $AX = B$ bir jinsli bo'lmagan sistemaning bir jinsli qismi deyiladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$X = F_0 + c_1F_1 + ... + c_{n-r}F_{n-r}$$

Bu yerda, F_0 – dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri (F_0 ni aniqlash uchun erkli o'zgaruvchilarning xususiy qiymatlarida bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi yechiladi); F_1, F_2, ..., F_{n-r} – bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi; c_1, c_2, ..., c_{n-r} – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

11-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlarini toping.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Bu yerda x_2, x_3 – basis o'zgaruvchilar, x_1 – erkli o'zgaruvchidir. $n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$. Oxirgi sistemada $x_1 = 0$, deb olsak, $F_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ xususiy yechimni olamiz.

Endi bir jinsli bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib fundamental yechimlar sistemasini topamiz. Bir jinsli sistema quyidagi sistemaga ekvivalent

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemada $x_1 = 1$, deb olsak, $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimni olamiz. Demak, umumiy yechim

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

bu yerda c - ixtiyoriy son.

12-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining umumiy yechimini vektor shaklda yozing.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1,2 & 1 & 0,8 \\ 1 & 0 & 2,6 & -1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$F_0 = (0.6;0,8;0;0)$ sistemaning xususiy yechimlaridan biri. Bundan foydalanib sistemaning umumiy yechimini vektor shaklida yozamiz:

$$X = F_0 + c_1F_1 + c_2F_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2,6 \\ 1.2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bu yerda c_1, c_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3.3. Chiziqli fazo

Elementar matematika, analitik geometriya, algebra va matematik analiz kurslarida turli tabiatli elementlar to‘plamlarini uchratish mumkin. Bular-haqiqiy va kompleks sonlar to‘plamlari; to‘gri chiziqdagi, tekislikdagi va fazodagi vektorlar to‘plamlari; oldingi mavzularda biz tanishgan n o‘lchovli vektorlar to‘plamlari; bizga tanish bo‘lgan matritsalar to‘plamlari; biror $[a, \ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar to‘plamlari va hakozo. Bu to‘plamlar turli tabiatli bo‘lsada, bu to‘plamlarning har birining elementlari orasida ularni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallarini kiritish mumkin va bu to‘plamlar turli tabiatli bo‘llshiga qaramasdan ular ustida kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari juda ko‘p umumiy xossalarga ega bo‘ladi. Biz quyida to‘plam elementlarining tabiatini hisobga olmasdan bu to‘plamlar uchun umumiy bo‘lgan nazariya bilan tanishamiz. Bu ob’ektlardan biri chiziqli fazo bo‘lib, iqtisodiy masalalarni yechishda juda muhim ahamiyatga ega.

9-ta'rif. Agar elementlari ixtiyoriy tabiatli bo'lgan L to'plam berilgan va bu toplam elementlari orasida qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan, ya'ni

1) ixtiyoriy $x \in L$ va $y \in L$ elementlar juftiga x va y elementlarning yig'indisi, deb ataluvchi yagona $z = x + y \in L$ element mos qo'yilgan;

2) $x \in L$ element va $\lambda \in K$ (K-haqiqiy yoki kompleks sonlar to'plami) songa x vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $z = \lambda x \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, aniqlangan bu qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi 8 ta aksiomani bajarsa, u holda L to'plam chiziqli (yoki vektor) fazo deyiladi:

1. Qo'shish kommutativ, $x + y = y + x$;
2. Qo'shish assotsiativ, $(x + y) + z = x + (y + x)$;
3. L to'plamda barcha x elementlar uchun $x + \theta = x$ shartni qanoatlantiradigan nol element θ mavjud;
4. L to'plamda har qanday x element uchun $x + (-x) = \theta$ shartni qanoatlantiradigan $-x$ qarama-qarshi element mavjud;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1 \cdot x = x$.

Bundan keyin biz chiziqli fazo elementlarini vektorlar deb aytamiz. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun kompleks songa ko'paytirish amali aniqlangan bo'lsa, u holda bunday fazoga kompleks chiziqli fazo deyiladi. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun faqat haqiqiy songa ko'paytirish amali aniqlangan bo'lsa, u holda bunday fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi.

Chiziqli fazoni aniqlovchi aksiomalardan, quyidagi xossalarni ajratish mumkin:

1) Har qanday chiziqli fazo uchun yagona θ-nol vektor mavjud.

2) Har qanday chiziqli fazoda har bir x vektor uchun unga qarama-qarshi bo'lgan yagona $(-x)$ vektor mavjud.

3) Har qanday chiziqli fazoda har bir vektor uchun $0 \cdot x = 0$ tenglik o'rinli.

Izoh. $y - x$ vektorlar ayirmasi deb, y va $-x$ vektorlar yig'indisi tushuniladi.

Yuqoridagi aniqlashimizga ko'ra chiziqli fazo elementlari turli tabiatli bo'lishi mumkin. Quyida biz chiziqli fazolarni aniq misollarda ko'rib chiqamiz.

Misollar. 1. Barcha haqiqiy sonlar to'plami - haqiqiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

2. Barcha kompleks sonlar to'plami kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

3. Oldingi mavzularda ko'rgan $R^n\,(n=1,2,3,...,k)$ fazolar vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

4. Elementlari $n\times m$-tartibli matritsalardan iborat bo'lgan $M^{n\times m}$ matritsalar to'plami matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

5. $C[a,b]-[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy $f\equiv f(t)$ funksiyalar to'plami funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish $(f+g)t\equiv f(t)+g(t),\ \lambda f(t)$ amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qlladi.

6. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan barcha ko'phadlar to'plami ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

7. Darajasi roppa-rosa n ga teng bo'lgan barcha ko'phadlar to'plami ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilmaydi. Haqiqatan ham

$$P\equiv P_n(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_1t+a_0$$

va $Q\equiv Q_n(t)=a_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0$ n – darajali ko'phad lekin $P_n(x)-Q_n(x)$ ko'phadning darajasi n dan kichik.

Chiziqli fazoda elementlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli bog'liqligi va erkliligi vektorlarga o'xshab kiritiladi.

10-ta'rif. L chiziqli fazodan olingan $x_1,x_2,...,x_n$ elementlar va $\lambda_i\in R\ (i=1...n)$ sonlar yordamida qurilgan $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+...+\lambda_nx_n$ ifodaga $x_1,x_2,...,x_n$ - elementlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

11-ta'rif. Agar $y=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda y element $x_1,x_2,...,x_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

12-ta'rif. Agar $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lganda

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $x_1,x_2,...,x_n$ elementlar chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$$

tenglik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ koeffitsiyentlardan barchasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - elementlar chiziqli erkli deyiladi. Bu yerda, θ -chiziqli fazoning nol elementi.

13-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli elementlar mavjud bo'lib, har qanday $n+1$ ta element chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda L chiziqli fazoning o'lchovi n ga teng deyiladi.

14-ta'rif. n o'lchovli L chiziqli fazoda har qanday n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi bu fazoning bazisi deyiladi.

Odatda bazis vektorlar sistemasi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ kabi belgilanadi.

Masalan, darajasi n dan oshmaydigan barcha ko'phadlar to'plami chekli o'lchovli, ya'ni $(n+1)$ o'lchovli chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoning bazisini $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ vektorlar sistemasi tashkil qiladi.

13-misol. Barcha ikkinchi tartibli matritsalarning chiziqli fazosini qaraymiz

$$M^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$$

Bu chiziqli fazoning bazisi va o'lchamini toping.

Yechish. Bu fazoning bazislaridan biri sifatida quyidagi matritsalar sistemasini olish mumkin.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chunki ixtiyoriy 2-tartibli matritsani bu matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi orqali quyidagicha yozish mumkin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar sistemasining chiziqli erkliligini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu tenglik faqat va faqat $a_{11} = 0, \ a_{12} = 0, \ a_{21} = 0, \ a_{22} = 0$ bajarilsagina o'rinli bo'lgani uchun

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

matritsalar sistemasi M^2 fazoning bazisi hisoblanadi. Bundan M^2 fazoning o‘lchovi 4 ga tengligi ham kelib chiqadi.

Teorema. n o‘lchovli L chiziqli fazoning har bir elementi bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida bir qiymatli yoziladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\{e_1,e_2,...,e_n\}$-elementlar sistemasi L fazoning bazisi va $x\in L$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $\{e_1,e_2,...,e_n,x\}$ elementlar sistemasi L fazoda chiziqli bog‘liq bo‘ladi. U holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,\lambda\}$ sonlar ketma-ketligi mavjudki,

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n+\lambda x=\theta \tag{3.1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\lambda\neq 0$ bo‘ladi, aks holda $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$ tenglikda $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ sonlarning hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak, ammo bu $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ elementlar sistemasinmg bazisligiga ziddir. Chunki $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n=\theta\Rightarrow\lambda_1=...=\lambda_n=0$. (3.1) tenglikdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x=-\frac{\lambda_1}{\lambda}e_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}e_2+...+\frac{\lambda_n}{\lambda}e_n$$

yoki $\mu_i=-\dfrac{\lambda_i}{\lambda}(i=1,2,...,n)$ belgilashdan,

$$x=\mu_1e_1+\mu_2e_2+...+\mu_ne_n, \qquad 3.2)$$

ya’ni L fazoning ixtiyoriy elementi bazis elementlarining kombinatsiyasi, ko‘rinishida ifodalanadi.

Endi (3.2) yoyilma bir qiymatli yo‘zilishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik bu x elementni boshqa ko‘rinishda ham ifodalash mumkin bo‘lsin:

$$x=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+...+\gamma_ne_n \tag{3.3}$$

(3.2) va (3.3) ifodalarni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz

$$(\mu_1-\gamma_1)e_1+(\mu_2-\gamma_2)e_2+...+(\mu_n-\gamma_n)e_n=\theta.$$

Bu tenglikdan va $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ elementlar sistemasining bazisligidan $\mu_1 - \gamma_1 = \mu_2 - \gamma_2 = ... = \mu_n - \gamma_n = 0$ yani $\mu_1 = \gamma_1 . \mu_2 = \gamma_2, ..., \mu_n = \gamma_n$. Demak (3.2) yo'yilma yagona bo'ladi.

15-ta'rif. (3.2) tenglik $x \in L$ elementning $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sonlarga esa x elementning bu bazis vektorlar bo'yicha koordinatalari deyiladi.

Chiziqli fazo elementlari uchun chiziqli bog'liqlik va erklilik tushunchalariga misollar ko'ramiz.

14-misol. $C[a,b]$ fazoda $x_1 = e^t$ va $x_2 = 3e^t$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'ladimi?

Yechish. Bu vektorlarning quyidagicha chiziqli kombinatsiyasini tuzamiz va uni nolga tenglaymiz

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 e^t + 3\lambda_2 e^t = 0, \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Demak, bu funksiyalar chiziqli bog'liq.

Xuddi shunga o'xshab ko'rsatish mumkinki $C[a,b]$ fazoda $y_1 = sin^2 t$, $y_2 = cos^2 t$, $y_3 = \frac{1}{2}$ funksiyalar ham chiziqli bog'liq bo'ladi. Chunki

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \equiv 0.$$

16-ta'rif. Agar chiziqli fazo cheksiz sondagi chiziqli erkli vektorlar sistemasiga ega bo'lsa, u holda bunday chiziqli fazoga cheksiz o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

Yuqorida ko'rilgan $C[a,b]$ fazo cheksiz o'lchovli chiziqli fazo bo'ladi, chunki $\{1, t, t^2, ..., t^n ...\}$ funksiyalar barcha $n \in N$ lar uchun chiziqli erkli bo'ladi.

17-ta'rif. L chiziqli fazoning V qism to'plamining o'zi ham L da aniqlangan elementlarni qo'shish va elementlarni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo'lsa, u holda V fazo L fazoning chiziqli qism fazosi deyiladi.

Teorema. L fazoning bo'sh bo'lmagan V qism to'plami uning chiziqli qism fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli:

1. Agar x va y vektorlar V ga tegishii bo'lsa, u holda $x+y$ vektor ham V ga tegishli bo'lishi;

2. Agar x vektor V ga tegishli bo'lsa, u holda αx vektor ham α sonning istalgan qiymatida V ga tegishli bo'lishi.

15-misol. Barcha n-tartibli kvadrat matritsalar chiziqli fazosini qaraymiz. Bu fazo uchun barcha n-tartibli diagonal matritsalar fazosi chiziqli qism fazo bo‘ladimi?

Yechish. Ixtiyoriy

$$D_1=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & ,,, & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D_2=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qaraymiz. Ma’lumki bunda

$$D_1+D_2=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

ya’ni ikkita diagonal matritsaning yig‘indisi yana diagonal matritsa bo‘ladi.

Endi diagonal matritsaning λ songa ko‘paytmasini tekshiramiz:

$$\lambda D_1=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & ,,, & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

ya’ni diagonal matritsani λ songa ko‘paytirsak yana diagonal matritsa hosil bo‘ladi. Bundan tashqari bizga ma’lumki, $n-$tartibli matritsalar uchun chiziqli fazo uchun o‘rinli bo‘lgan yuqoridagi 8 ta aksioma bajariladi. Demak, n-tartibli diagonal matritsalar fazosi $n-$tartibli matritsalar fazosining qism fazosi bo‘lganligi sababli yuqoridagi teoremaga asosan barcha n-tartibli diagonal matritsalar to‘plami chiziqli qism fazo tashkil qiladi.

Mashqni bajaring.

1. Barcha n-tartibli kvadrat matritsalar fazosini va barcha n-tartibli simmetrik matritsalar to‘plamini qaraymiz. Agar barcha n-tartibli simmetrik matritsalar to‘plami barcha n-tartibli kvadrat matritsalar fazosining chiziqli qism fazosi bo‘lsa, chiziqli qism fazoning o‘lchovini toping.

18-ta'rif. n o'lchovli haqiqiy L chiziqli fazoning har bir x va y vektorlar juftligi uchun mos ravishda skalyar ko'paytma, deb ataluvchi (x, y) haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, L chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan, deyiladi:

1) $(x, x) \geq 0$, ixtiyoriy $x \in L$ uchun $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

19-ta'rif. Agar n o'lchovli haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, bu fazo n o'lchovli Yevklid fazosi deyiladi va E^n ko'rinishda belgilanadi.

18-ta'rif. n o'lchovli haqiqiy L chiziqli fazoning har bir x va y vektorlar juftligi uchun mos ravishda skalyar ko'paytma, deb ataluvchi (x, y) haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, L chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan, deyiladi:

1) $(x, x) \geq 0$, ixtiyoriy $x \in L$ uchun $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

19-ta'rif. Agar n o'lchovli haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, bu fazo n o'lchovli Yevklid fazosi deyiladi va E^n ko'rinishda belgilanadi.

Har qanday n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda skalyar ko'paytmani aniqlash orqali uni Yevklid fazosiga aylantirish mumkin.

16-misol. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3	B_4
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
Bir birlik mahsulot uchun xom ashyo sarfi	7	3.5	10	4
Mahsulot hajmining o'zgarishi	+5	-4	-2	+10

Mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy xom ashyo miqdori va mahsulot hajmining o'zgarishidagi uning o'zgarishini toping.

Yechish. Umumiy xom ashyo miqdori S $x = (50; 80; 20; 120)$ va $y = (7; 3,5; 10; 4)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ladi:

$$S=(x,y)=50\cdot 7+80\cdot 3{,}5+20\cdot 10+120\cdot 4=1310(kg)$$

Skalyar ko'paytmaning xossasidan, umumiy xom ashyo miqdorining o'zgarishini topamiz.

$$\Delta S=(x+\Delta x,y)-(x,y)=(\Delta x,y)=+5\cdot 7-4\cdot 3{,}5-2\cdot 10+10\cdot 4=41(kg).$$

Yevklid fazosida x vektorning uzunligi (normasi) deb uning skalyar kvadratidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$$

Vektorning uzunligi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1. $|x|=0$ bo'ladi faqat va faqat $x=0$ bo'lsagina;
2. $|\lambda x|=|\lambda|\cdot|x|$, bunda $\lambda\in R$;
3. $|(x,y)|\le|x|\cdot|y|$ (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi);
4. $|x+y|\le|x|+|y|$ (uchburchak tengsizligi).

Noldan farqli vektorlardan tashkil topgan vektorlar sistemasidagi vektorlarning har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistema ortogonal vektorlar sistemasi deb ataladi.

Teng o'lchovli $a_1,a_2,...,a_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish, ya'ni uni $b_1,b_2,...,b_k$ ortogonal vektorlar sistemasi bilan almashtirish mumkin. Buning uchun Shmidt formulalaridan foydalanamiz:

1) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, deb olib keyingi qadamda

2) $\boldsymbol{b}_t=\boldsymbol{a}_t-\sum\limits_{i=1}^{t-1}\frac{(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{a}_t)}{(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)}\boldsymbol{b}_i,\quad t=2,3,...,k$

Masalan, $\vec{a}_1(1,1,1)$, $\vec{a}_2(0,1,1)$, $\vec{a}_3(0,0,1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini quramiz.

Birinchi navbatda $\vec{a}_1(1,1,1)$, $\vec{a}_2(0,1,1)$, $\vec{a}_3(0,0,1)$ vektorlar sistemasining rangini aniqlab olamiz

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

$rang(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3)=3$ bo'lganligi sababli bu sistemadagi vektorlar chiziqli erkli. Sistemani ortogonal sistemaga aylantirish uchun Shmidt formulasidan foydalanamiz:

1) $\vec{b}_1=\vec{a}_1(1,1,1)$;

$$2)\ \vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{b}_1,\vec{a}_2)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\vec{b}_1=(0,1,1)-\frac{2}{3}(1,1,1)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);$$

$$3)\vec{b}_3=\vec{a}_3-\frac{(\vec{b}_1,\vec{a}_3)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\vec{b}_1-\frac{(\vec{b}_2\,\vec{a}_3)}{(\vec{b}_2\vec{b}_2)}\vec{b}_2=\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirish uchun $\vec{c}_1=\vec{b}_1(1,1,1);\ \vec{b}_2=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ ni unga kollinear bo'lgan $\vec{c}_2(-2,1,1)=\frac{1}{3}\vec{b}_2$ bilan; $\vec{b}_3=\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ni esa unga kollinear bo'lgan $\vec{c}_3(0,-1,1)=\frac{1}{2}\vec{b}_3$ bilan almashtirib va $\vec{c}_1=\vec{b}_1(1,1,1)$ belgilash kiritib: $\vec{c}_1(1,1,1)$, $\vec{c}_2(-2,1,1)$, $\vec{c}_3(0,-1,1)$ ortogonal vektorlar sistemasini hosll qilamiz.

Nol bo'lmagan b vektorning birlik vektori, deb $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori birlik vektorga keltirilgan ortoganal sistemaga ortonormal vektorlar sistemasi deylladi.

Yuqoridagi misolda topilgan ortogonal $\vec{c}_1(1,1,1)$, $\vec{c}_2(-2,1,1)$, $\vec{c}_3(0,-1,1)$ vektorlar sistemasini ortonormal vektorlar sistemasiga keltiramiz.

$$\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}=\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2,1,1)=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0,-1,1)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

n o'lchovli Yevklid fazosida $e_1,e_2,\ldots,e_n$ vektorlar $i\neq j$ da $(e_i,e_j)=0$ bo'lsa ortogonal bazis, $i=1,2,\ldots,n$ da $|e_i|=1$ bo'lsa ortonormallangan bazis tashkil qiladi.

Mashqlarni bajaring.

1) Tekislikda boshi koordinatalar boshida uchi I chorakda bo'lgan vektorlar to'plami vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

2) Tekislikda birorta vektorga parallel bo‘lgan vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

3) R_+^1 – barcha musbat haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamda quyidagicha amal kiritamiz: ikki son yig‘ndisi sifatida ularning oddiy ko‘paytmasini, $r \in R_+^1$ ning λ songa ko‘paytmasi sifatida esa r^λ ni tushunamiz. Bu kiritilgan amallarga nisbatan R_+^1 chiziqli fazo tashkil qiladimi?

4) $P(t) = 5 - 2(t+1) + 3(t+1)^2 + (t+1)^3$ ko‘phadning quyidagi bazisga nisbatan koordinatalarini toping.

a) $e_1 = 1, e_1 = t, e_1 = t^2, \ e_1 = t^3$;

b) $e_1 = 1, e_2 = t+1, e_3 = (t+1)^2, \ e_4 = (t+1)^3$.

3.4. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Matritsalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri – chiziqli operatorlar tushunchasidir. Faraz qilaylik bizga L, L_1 chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin.

20-ta’rif. Agar biror $\tilde{A}$ qolda yoki qonun bo‘yicha har bir $x \in L$ elementga $y \in L_1$ element mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda L fazoni L_1 fazoga o‘tkazuvchi $\tilde{A}$ operator (almashtirish, akslantirish) aniqlangan deyiladi va $y = \tilde{A}(x)$ ko‘rinishda belgilanadi.

21-ta’rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$, $\lambda \in R$ uchun:

1) $\bar{A}(x+y) = \bar{A}(x) + \bar{A}(y)$ (operatorning additivligi);

2) $\bar{A}(\lambda x) = \lambda \bar{A}(x)$ (operatorning bir jinsliligi) munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda bu operator chiziqli operator deyiladi.

17-misol. $\bar{A}$ operator $\bar{A}: R^2 \to R^3$ almashtirishni amalga oshiradi. Agar bu operator almashtirishni $\bar{A}(x,y) = (x, y, x+y)$, $(x,y) \in R^2$, $(x, y, x+y) \in R^3$ formula yordamida amalga oshirsa, u holda bu operatorning chiziqli operator ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Ma’lumki, $a_1 = (x_1, y_1)$ va $a_2 = (x_2, y_2)$ vektor uchun $a_1 + a_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. U holda $a_1 + a_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ elementga $\tilde{A}$ operatorni ta’sir ettirsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{A}(a_1+a_2)=\tilde{A}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)=$$
$$=(x_1,y_1,x_1+y_1)+(x_2,y_2,x_2+y_2)=\tilde{A}(a_1)+\tilde{A}(a_2).$$

Bu esa $\tilde{A}$ operatorning additivligini ko'rsatadi.

Endi operatorning bir jinsli ekanligini tekshiramiz. Ma'lumki, $ka_1=(kx_1,ky_1)$. U holda

$$\tilde{A}(ka_1)=\tilde{A}(kx_1,ky_1)=(kx_1,ky_1,kx_1+ky_1)=k(x_1,y_1,x_1+y_1)=k\tilde{A}(a_1).$$

Demak, biz o'rganayotgan operator chiziqli operatordir.

Mashqlarni bajaring.

1) $T:R^2\to R^2,\ T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-3x_1+2x_2)$ operator berilgan. Bu operatorning chiziqli isbotlang.

2) $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3)=\left(4x_2,\ x_1-2x_2+x_3,\ 5x_1-x_2+4x_3\right)$ operator berilgan. Bu operatorlarnimg chiziqli ekanligini isbotlang.

3) $\tilde{A}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2),\ \tilde{B}(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$ operatorlar berilgan. Bu operatorlarning chiziqli ekanligini isbotlang.

$y=\mathring{A}(x)\in L_1$ element $x\in L$ elementning aksi, $x\in L$ elementning o'zi esa $y\in L_1$ elementning proobrazi deyiladi. Agar $L=L_1$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}$ operator L fazoni o'zini o'ziga akslantiruvchi operator bo'ladi. Biz ko'proq fazoni o'zini o'ziga akslantiruvchi operatorlarni o'rganamiz.

Teorema. Har bir $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operatorga berilgan bazisda $n-$tartibli matritsa mos keladi va aksincha har bir $n-$tartibli matritsaga n o'lchovli chiziqli fazoni, n o'lchovli chiziqli fazoga akslantiruvchi $\tilde{A}$ chiziqli operator mos keladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $\{e_1,e_2,...,e_n\}\subseteq L^n$ vektorlar sistemasi L^n fazoning bazisi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x\in L^n$ elementni bu bazis elementlari orqali yozish mumkin:

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n. \tag{3.4}$$

Bu yerda biz $\tilde{A}$ operatorning chiziqliligidan foydalanib, $\tilde{A}(x)$ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\tilde{A}(x)=\tilde{A}\left(x_1e_1+...+x_ne_n\right)=x_1\tilde{A}(e_1)+...+x_n\tilde{A}(e_n). \tag{3.5}$$

Bu yerda har bir $\mathring{A}(e_i)\ (i=\overline{1,n})$ elementlar o'z navbatida L^n fazoning elementlari bo'lganligi sababli, bu elementlarni ham $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazis orqali yozish mumkin:

$$\tilde{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ni}e_n. \tag{3.6}$$

U holda (3.6) dan foydalanib (3.5) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(x) &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \ldots \\
&+ x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \\
&+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)e_2 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ikkinchi tomondan $y = \overset{\circ}{A}(x)$ element ham $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazis elementlari bo'yicha quyidagi yoyilmaga ega:

$$y = \overset{\circ}{A}(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n. \tag{3.8}$$

Vektorning bitta bazis bo'yicha yoyilmasi yagonaligidan (3.7) va (3.8) tengliklarning o'ng tomonlarini tenglashtirib, quyidagini olamiz.

$$\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{cases}$$

yoki matritsa ko'rinishida $Y = AX$, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

22-ta'rif. $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ matritsa $\overset{\circ}{A}$ operatorning $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazisdagi matritsasi, $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ matritsaning rangi esa $\overset{\circ}{A}$ operatorning rangi deyiladi.
L fazoning barcha vektorlarini θ nol vektorga akslantiruvchi $\theta(x) = \theta$ operator nol operator, $\overset{\circ}{E}(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi operator birlik operatori deb ataladi.

18-misol. R^3 fazoda $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. $x = 4e_1 - 3e_2 + e_3$ vektorning $y = \tilde{A}(x)$ aksini toping.

Yechish. Yuqorida qayd qilingan formulaga ko'ra

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Demak, $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$.

19-misol. $T : R^3 \to R^4$; $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ operatorning matritsasini toping.

Yechish. $A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)]$ matritsaning har bir elementini topamiz:

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T(e_3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0-0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U holda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring.

1) R^4 fazoning $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bazisida $\mathring{A}$ chiziqli operator matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $x = 3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4$ vektorning aksini toping.

2) R^4 fazoning $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bazisida $\mathring{A}$ chiziqli operator matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $x = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3 - e_4$ vektorning aksini toping.

Chiziqli operatorlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz. R^n chiziqli fazoda $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ chiziqli operatorlar berilgan bo‘lsin.

23-ta’rif. $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(x) = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorni $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarning yig‘indisi deb ataladi.

$\mathring{A} + \mathring{B}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x, y \in R^n$ vektorlar va $\alpha \in R$ son uchun:

1) $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(x + y) = \tilde{A}(x + y) + \tilde{B}(x + y) =$

$= \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y) + \tilde{B}(x) + \tilde{B}(y) = \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(x) + \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(y);$

2) $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)(\alpha x) = \tilde{A}(\alpha x) + \tilde{B}(\alpha x) = \alpha(\tilde{A}(x)) + \alpha(\tilde{B}(x)) =$

$= \alpha(\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)) = \alpha\left[(\tilde{A} + \tilde{B})(x)\right]$

munosabatlar o‘rinli. Bu esa $\mathring{A} + \mathring{B}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

24-ta’rif. $\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(x) = \tilde{B}\left(\tilde{A}(x)\right)$ tenglik bilan aniqlanadigan, ya’ni $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarni ketma-ket bajarishdan hosil bo‘lgan $\mathring{A}\mathring{B}$ operator $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarning ko‘paytmasi deyiladi.

$\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x, y \in R^n$ vektorlar va $\alpha \in R$ son uchun:

1) $\left(\bar{A}\bar{B}\right)(x+y)=\bar{B}[\bar{A}(x+y)]=\bar{B}(\bar{A}(x)+\bar{A}(y))=\left(\bar{A}\bar{B}\right)(x)+\left(\bar{A}\bar{B}\right)(y);$

2) $\left(\bar{A}\bar{B}\right)(\alpha x)=\bar{B}[\bar{A}(\alpha x)]=\bar{B}[\alpha(\bar{A}(x))]=\alpha[\bar{B}(\bar{A}(x))]=\alpha[(\bar{A}\bar{B})(x)]$

munosabat o‘rinli. Bu esa $\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

25-ta’rif. $\left(\alpha\bar{A}\right)(x)=\alpha\left(\bar{A}(x)\right)$ tenglik bilan aniqlanadigan $\alpha\overset{\circ}{A}$ operator $\overset{\circ}{A}$ operatorlarning α songa ko‘paytmasi deyiladi.

$\alpha\overset{\circ}{A}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x, y \in R^n$ vektorlar va $\alpha, \beta \in R$ sonlar uchun:

1) $\left(\alpha\bar{A}\right)(x+y)=\alpha[\bar{A}(x+y)]=\alpha(\bar{A}(x)+\bar{A}(y))=$

$=\alpha(\bar{A}(x))+\alpha(\bar{A}(y))=\left(\alpha\bar{A}\right)(x)+\left(\alpha\bar{A}\right)(y);$

2) $\left(\alpha\bar{A}\right)(\beta x)=\alpha[\bar{A}(\beta x)]=\alpha[\beta(\bar{A}(x))]=\beta[\alpha(\bar{A}(x))]=\beta[(\alpha\bar{A})(x)]$

munosabat o‘rinli. Bu esa $\alpha\overset{\circ}{A}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

Yuqoridagllardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

I. Ixtiyoriy bazisda chiziqli operatorlar yig‘indisining matritsasi bu operatorlarning o‘sha bazisdagi matritsalari yig‘indisiga teng.

II. Ixtiyoriy bazisda chiziqll operatorlar ko‘paytmasining matritsasi bu operatorlarning o‘sha bazisdagi matritsalari ko‘paytmasiga teng.

III. Biror bir bazisda $\overset{\circ}{A}$ chiziqli operatorning α songa ko‘paytmasini beruvchi matritsa bu operatorning shu bazisdagi matritsasini α songa ko‘paytirilganiga teng.

26-ta’rif. $\bar{A}(x)$ operator uchun $\bar{A}\bar{A}^{-1}=\bar{A}^{-1}\bar{A}=\tilde{E}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\overset{\circ}{A}^{-1}$ operator $\overset{\circ}{A}$ operatorga teskari operator deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $\bar{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun (bu holda $\bar{A}(x)$ operator aynimagan operator, deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matritsasi aynigan bo‘lmasligi zarur va etarlidir.

20-misol. Berilgan $\bar{A}(x_1,x_2,x_3)=\left(2x_2,-2x_1+3x_2+2x_3,4x_1-x_2+5x_3\right)$ va $\bar{B}(x_1,x_2,x_3)=\left(-3x_1+x_2,2x_2+x_3,-x_2+3x_3\right)$ operatorlar berilgan. $\overset{\circ}{C}=\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B}$ operator va uning matritsasi topilsin.

Yechish. Avval A va B matritsalarni topib olamiz:

$$\bar{A}(e_1)=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \bar{A}(e_2)=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \bar{A}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},$$

$$\bar{B}(e_1)=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix},\quad B(e_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \bar{B}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&3&2\\4&-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}0&4&2\\6&2&9\\-12&-3&14\end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\bar{C}(e_1)=\begin{pmatrix}0\\6\\-12\end{pmatrix},\quad \bar{C}(e_2)=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix},\quad \bar{C}(e_3)=\begin{pmatrix}2\\9\\14\end{pmatrix}.$$

$$\bar{C}(x)=\left(4x_2+2x_3,\ 6x_1+2x_2+9x_3,\ -12x_1-3x_2+14x_3\right).$$

Mashqni bajaring.

1. $\bar{A}(x_1,x_2,x_3)=\left(x_2-x_3,\ 4x_1+3x_2-x_3,\ -3x_1-x_2+6x_3\right)$ va $\bar{B}(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-3x_2,\ 4x_2+x_3,\ -5x_2+3x_3\right)$ operatorlar berilgan. $\tilde{C}=\tilde{A}\tilde{B}$ operator va uning matritsasi topilsin.

Bitta chiziqli operatorning turli bazislardagi matritsalari orasidagi bog'lanish haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\mathring{A}$ chiziqli operatorning $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ va $\{e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*\}$ bazislardagi matrisalari mos ravishda A va A^* matrisalardan iborat bo'lsa, u holda $A^*=C^{-1}AC$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu yerda C o'tish matritsasi deb ataladi.

21-misol. $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi $A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ berilgan bo‘lsin. Yangi $\begin{cases} e_1^* = e_1 - 2e_2 \\ e_1^* = 2e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisdagi chiziqli operator matritsasini toping.

Yechish. O‘tish matritsasi $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, unga teskari matritsa $C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Demak, yangi bazisda operatorning matritsasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$A^* = C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring.

1) $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operator $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.

Yangi $\begin{cases} e_1^* = e_1 - e_2 \\ e_2^* = e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasini toping.

2) $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasi $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.Yangi $\begin{cases} e_1^* = 2e_1 - e_2 \\ e_2^* = e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasini toping.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $\tilde{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun (bu holda $\tilde{A}(x)$ operator aynimagan operator, deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matritsasi aynigan bo‘lmasligi zarur va etarlidir.

Agar $\mathring{A}$ chiziqli operator va λ son uchun

$$\tilde{A}(x) = \lambda x$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda λ son $\tilde{A}(x)$ operatorning xos soni, unga mos x vektorga esa operatorning xos vektori deb ataladi.

Yuqoridagi tenglikni operatorning matritsasidan foydalanib yozsak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda \cdot x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda \cdot x_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda \cdot x_n \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right|.$$

Bundan

$$[A - \lambda E] \cdot X = 0.$$

Ma'lumki bir jinsli sistema har doim nol yechimga ega. Sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun esa uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinantning qiymati nolga teng bo'lishi zarur va etarli, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9)$$

$|A - \lambda E|$ determinant λ ga nisbatan n darajali ko'phaddir. Bu ko'phad $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi. (3.9) tenglama $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi bazisni tanlashga bog'liq emas.

22-misol. $\tilde{A}(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3,\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 2x_3)$ operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.

Yechish. Avval $\tilde{A}$ operatorning matritsasini tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3 + \lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - (2 + \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3.$$

Demak, xos son $\lambda=-1$ ekan. Bu sonni sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=0,\\ 5x_1-2x_2+3x_3=0,\\ -x_1-x_3=0.\end{cases}$$

Bundan $x_1=x_2,\ x_1=-x_3$. Demak, $X=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Mashqlarni bajaring.

1) $A=\begin{pmatrix}6 & 24\\ 54 & 6\end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan chiziqli operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.

2) $\bar{A}(x)=(4x_1-2x_2+4x_3,10x_1-6x_2+6x_3,-2x_1-4x_3)$ operatorning xos soni va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.

23-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning xos soni va xos vektorlarini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzib yechamiz:

$$\begin{Vmatrix}7-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 6-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 5-\lambda\end{Vmatrix}=0;$$

$$-\lambda^3+18\lambda^2-99\lambda+162=0,$$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=9.$$

$\lambda_1=3$ xos son uchun xos vektor

$$\left.\begin{aligned}4x_1-2x_2&=0\\ -2x_1+3x_2-2x_3&=0\\ -2x_2+2x_3&=0\end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi. $x_1 = m$, deb qabul qilib, $x_2 = 2m$, $x_3 = 2m$ ni hosil qilamiz. Xos vektor:

$$\vec{\tau}_1 = m\vec{i} + 2m\vec{j} + 2m\vec{k}.$$

Shunga o‘xshash

$$\vec{\tau}_2 = m\vec{i} + \frac{1}{2}m\vec{j} - m\vec{k}; \qquad \vec{\tau}_3 = -m\vec{i} + m\vec{j} - \frac{1}{2}m\vec{k}$$

xos vektorlarni topamiz.

Izoh. Yuqorida keltirilgan misollardan ko‘rinib turibdiki, chiziqli operatorning xarakteristik tenglamasi ko‘p hollarda yuqori darajali tenglamalarga keltiriladi. Shu sababli biz quyida 3 va undan yuqori darajali tenglamalarning ildizlari haqidagi ba’zi tushunchalarni keltiramiz. Ma’lumki, tenglamaning ildizlar soni tenglama darajasi bilan aniqlanadi.

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

tenglamaning ildizlarini topish uchun uni $y = x - \frac{a}{3}$ almashtirish yordamida

$$x^3 + px + q = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz va uning uchta ildizini Kardano formulasi:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

yordamida topamiz.

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

tenglamaning ildizini topish uchun uni $y = x - \frac{a}{4}$ almashtirish yordamida

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz va uning to‘rtta ildizini

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}\,x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}\,x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0. \end{cases}$$

sistemaning ildizlari sifatida aniqlaymiz. Bu yerda α_0

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0$$

tenglama ildizlaridan biri.

XIX asrning yigirmanchi yillarida Abel $n\geq 5$ bo'lganda n - darajali tenglamalarning ildizlari uchun yuqoridagi kabi formulalar topish mumkin emasligini isbotlab uch asr davom etgan befoyda urinishlarga nuqta qo'ydi. XIX asrning 30-yillarida esa Galua qanday shartlar bajarilganda tenglamani yechish mumkinligi haqidagi masalani to'liq tekshirib masalaga nuqta qo'ydi.

Xalqaro savdo modeli. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modell chiziqli modellarga keltirillshi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodiyotda o'zining muhim o'rnini egallagan.

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1,S_2,\cdots,S_n$ n ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1,x_2,\ldots,x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j -mamlakatning S_i - mamlakatdan sotib olgan mahsulotlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan mahsulot xarid uchun sarf bo'ladi, deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1,\quad j=1,2,\ldots,n$$

tenglik o'rinlí bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi, deb nomlanadi. Istalgan $S_i\ (i=\overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushimi $P_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun, har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i\geq x_i,\quad i=\overline{1,n}$$

Agar $P_i>x_i$, deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosll qilamiz,

$$Pi=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k>x_i,\quad i=\overline{1,n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n}P_i>\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

ya'ni,

$$\sum_{i=1}^{n}P_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right)x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k>\sum_{k=1}^{n}x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak $P_i\geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i=x_i$ tenglik o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i=x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=x_i$, $i=\overline{1,n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $AX=X$, ya'ni, qaralayotgan masala A-matritsaning $\lambda=1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

24-misol. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A=\begin{pmatrix}0,2&0,3&0,2\\0,6&0,4&0,6\\0,2&0,3&0,2\end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Yechish. $(A-E)x=0$ tenglamani yechib yoki

$$\begin{pmatrix}-0,8&0,3&0,2\\0.6&-0,6&0,6\\0,2&0,3&-0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

sistemani Gauss metodida yechib, $\lambda=1$ xos songa mos x xos vektorni topamiz. Demak $x=(c;2c;c)$. Olingan natijadan balanslangan savdo uchun bu uch mamlakatlarning milliy daromadlari nisbati $1:2:1$ bo'ladi.

3.5. Kvadratik formalar

Kvadratik formalar nazariyasining manbalari ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyasida yotadi. Ma'lumki, markazi koordinata boshida bo'lgan

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \tag{3.10}$$

egri chiziqda

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{3.11}$$

almashtirish bajarib, ya'ni koordinata o'qlarini α burchakka burib, (3.10) egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D' \tag{3.12}$$

"kanonik" ko'rinishga keltirish mumkin. (3.11) almashtirish xosmas chiziqli almashtirish, deb ataladi, chunki

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

27-ta'rif. n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarning $f(x)$ kvadratik formasi, deb har bir hadi bu no'malumlarning kvadrati yoki ikkita noma'lumning ko'paytmasidan iborat bo'lgan

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{3.13}$$

yig'indiga aytiladi.

Kvadratik formaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan foydalanib

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsani tuzish mumkin. Bu yerda A matritsaning barcha xarakteristik ildizlari haqiqiy bo'lishi uchun $a_{ij} = a_{ji}$, deb faraz qilinadi. A matritsaning rangi (3.13) kvadratik formaning rangi, deyiladi. A matritsa aynimagan bo'lsa, (3.13) kvadratik forma xosmas deyiladi.

Kvadratik formaning koeffitsiyentlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bo'lishiga bo'g'liq holda, kvadratik forma haqiqiy yoki kompleks deyiladi.

(3.13) ni matritsa formada quyidagicha yozish mumkin

$$f = X^T AX \tag{3.14}$$

Bu yerda X va X' o‘zaro transponirlangan matritsalar bo‘lib,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ikki no‘malumli kvadratik forma quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \ (a_{12} = a_{21})$$

Uchta no‘malumning kvadratik formasi esa

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad (a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32})$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Simmetrik matritsalar uchun ba’zi xossalarini keltirib o‘tamiz:

1) $(AB)^T = B^T A^T$;

2) $A^T = A$.

Bu xossalardan foydalanib quyidagi teoremani sxematik isbotlaymiz.

Teorema. A matritsali n noma’lumli kvadratik forma ustida Q matritsali chiziqli almashtirish bajarilgandan so‘ng u $Q^T AQ$ matritsali yangi n noma’lumli kvadratik formaga aylanadi.

Isbot. (3.13) formaga nisbatan

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k$$

ya’ni $X = QY$ chiziqli almashtirishni bajaramiz. U holda 1- xossaga ko‘ra $X^T = Y^T Q^T$ tenglikni hosil qilamiz. U holda (3.13) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$f = Y^T (Q^T AQ)Y \quad \text{yoki} \quad f = Y^T BY.$$

Bu yerda B matritsa simmetrik bo'ladi.

25-misol. $f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yechish. Bu yerda kvadratik formaning matritsasi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

chiziqli almashtirishning matritsasi esa $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi. U holda teoremaga asosan

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bundan quyidagi kvadratik formani hosil qilamiz:

$$L = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_1^2.$$

Mashqlarni bajaring.

1) $f = x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

2) $f = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 5y_2, \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

Chiziqli almashtirish bajarilgandan so'ng kvadratik formaning rangi o'zgarmaydi.

28-ta'rif. Agar (3.13) kvadratik formada turli noma'lumlarning ko'paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa, u holda bu forma kvadratik formaning kanonik ko'rinishi deb ataladi.

Shunday qilib, quyidagi

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_n y_n^2$$

ifoda (3.13) formaning kanonik ko'rinishi deyiladi.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, kanonik ko'rinishda noldan farqli koeffitsiyentlar soni (3.13) kvadratik formaning rangiga teng bo'lishi kerak. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Har qanday kvadratik forma biror xosmas chiziqli almashtirish orqali kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin.

Bu teoremani matematik induksiya metodi yordamida isbotlash mumkin. Demak, matematik induksiya metodi yordamida kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Berilgan kvadratik forma keltiriladigan kanonik ko'rinish bir qiymatli aniqlangan emas, ya'ni har qanday kvadratik forma turli usullar bilan turli ko'rinishdagi kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin.

Masalan, $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ kvadratik formani

a) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3, \\ x_3 = t_3. \end{cases}$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$ kanonik ko'rinishga keltirish mumkin;

b) $\begin{cases} x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_2. \end{cases}$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$ kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

(3.13) krvadratik formani kanonik ko'rinishda yozish uchun A matritsaning xarakteristik ildizlarini, ya'ni $|A - \lambda E|$ ko'phadning ildizlarini topamiz. Bu ildizlar esa kanonik ko'rinishning koeffitsiyentlari bo'ladi.

26-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Bu kvadratik formaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. Uning xarakteristik ko'phadini topamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)$$

Shunday qilib, A matritsaning uch karrali xarakteristik ildizi: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ va bitta oddiy xarakteristik ildizi: $\lambda_4 = -3$ mavjud.

Demak, bu kvadratik formaning kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Ba'zi hollarda faqat kanonik ko'rinishini emas, balki bu ko'rinishga keltiruvchi almashtirishni bilish kerak bo'llb qoladi.

Buning uchun berilgan A simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi Q ortogonal matritsani yoki uning teskari matritsasi Q^{-1} ni topish va A matritsaning λ_0 xarakteristik ildizlaridan foydalanib tuzilgan

$$(A - \lambda_0 E)X = 0$$

sistemaning fundamental yechimlarini ortonormallash kifoya.

Yuqoridagi 26-misolda buning amalga oshirish algoritimini ko'rib chiqamiz.

27-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Yechish. $\lambda_0 = 1$ bo'lsin. U holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 1 ga teng. Demak, uning 3 ta chiziqli erkli yechimini topish mumkin. Masalan:

$$b_1 = (1,1,0,0),$$
$$b_2 = (1,0,1,0),$$
$$b_3 = (-1,0,0,1)$$

vektorlar sistemaning chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi.

Bu vektorlar sistemasini ortogonallab, quyidagi

$$c_1 = b_1 = (1,1,0,0),$$
$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$
$$c_3 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

$\lambda_0 = -3$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 3 ga teng. Uning noldan farqli yechimi $c_4 = (1,-1,-1,1)$ ko‘rinishda bo‘ladi. c_1, c_2, c_3, c_4 vektorlar ortogonal sistemani tashkil etadi. Uni normalab

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \qquad c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ortonormalangan vektorlar sistemasini hosil qilamiz. Shunday qilib, f ni kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishiardan biri

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3, \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4, \\ y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Mashqni bajaring. $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Agar kvadratik formaning kanonik ko'rinishida $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ bo'lsa, u holda bu formani kvadratik formaning normal ko'rinishi deyiladi.

Agar haqiqiy kvadratik forma qaralayotgan bo'lsa, uni normal ko'rinishga keltirish masalasi anchagina murakkab masalalardan biri hisoblanadi. Chunki bunda manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish talab qilinishi mumkin.

Teorema. Berilgan haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formaning haqiqiy xosmas chiziqli almashtirish yordamida hosil qilingan normal ko'rinishdagi musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishning tanlab olinishiga bo'g'liq emas.

Berilgan f kvadratik formaning keltirilgan kanonik ko'rinishidagi musbat ishorali kvadratlar soni bu forma inersiyasining musbat indeksi, deb manfiy ishorali kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi, deb musbat va manfiy indekslar ayirmasi esa f kvadratik formaning signaturasi deb ataladi.

Bu tushunchalardan foydalanib quyidagi teoremani keltirish mumkin.

Teorema. n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli ikkita kvadratik formasi bir xil rangga va bir xil signaturaga ega bo'lgandagina va faqat shundagina, ular xosmas chiziqli almashtirish orqali bir-biriga o'tkaziladi.

Teorema. Agarda (3.13) kvadratik formada o'zgaruvchining kvadrati ishtirok etmasa, u holda chiziqli almashtirish yordamida uni hech bo'lmaganda bitta o'zgaruvchining kvadrati qatnashgan kvadratik formaga keltirish mumkin.

Kvadratik formalarni o'rganishda ularning kanonik ko'rinishlarini klassifikatsiyaga ajratib o'rganish kerak bo'ladi.

Biz quyida ularning bir necha turlarini keltirib o'tamiz.

29-ta'rif. Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formani n ta musbat kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa, u holda bu forma musbat aniqlangan deyiladi.

30-ta'rif. Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formasi n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa, u holda bu forma manfiy aniqlangan deyiladi.

31-ta'rif. Agar haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formaning normal ko'rinishida ham musbat, ham manfiy kvadratlardan iborat bo'lsa, u holda bu forma ishorasi aniqlanmagan forma deyiladi.

32-ta'rif. Agar haqiqiy koeffitsiyentli f xos kvadratik formalarning normal ko'rinishi bir xil ishorali kvadratlardan iborat bo'lsa, u holda bu forma ishorasi yarim aniqlangan formalar deyiladi.

Masalan,

1. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ kvadratik forma musbat aniqlangan;
2. $\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ kvadratik forma manfiy aniqlangan;
3. $\varphi_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2-x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan;
4. $\varphi_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi yarim aniqlangan.

Amaliyotda va iqtisodiyotda eng ko'p uchraydigan kvadratik formalar ishorasi aniqlangan kvadratik formalar bo'lganligi sababli biz asosiy e'tiborni ishorasi aniqlangan kvadratik formalarga beramiz.

Koeffitsiyentlar bo'yicha formaning musbat aniqlangan ekanligini bilish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

n ta noma'lumning matritsasi $A=(a_{ij})$ bo'lgan f kvadratik forma berilgan bo'lsin. Bu matritsaning yuqori chap burchagiga joylashgan $1,2,\dots,n-$tartibli minorlari, ya'ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \dots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlari f kvadratik formaning $A=(a_{ij})$ matritsaning) bosh minorlari deyiladi.

Teorema. n ta $x_1,x_2,\dots,x_n$ noma'lumlarning haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ kvadratik formasi uning bosh minorlari qat'iy musbat bo'lganda va faqat shundagina, musbat aniqlangan bo'ladi.

Bu teoremani matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.

Isbot. $n=1$ bo'lganda $f=a_{11}x^2$. Bu forma $a_{11}>0$ bo'lgandagina musbat aniqlangan.

Teoremani $n-1$ noma'lum uchun isbotlangan, deb faraz qilamiz va n ta noma'lum uchun isbotlaymiz.

Koeffitsiyentlari haqiqiy $f(x)$ kvadratik forma berilgan bo'lib, uning matritsasi $A=(a_{ij})$ bo'lsin. Ma'lumki, agar $f(x)$ kvadratik forma ustida matritsasi Q bo'lgan xosmas chiziqli almashtirish bajarilsa, u holda forma determinantining ishorasi o'zgarmaydi.

Haqiqatan ham, almashtirishdan so'ng matritsasi Q^TAQ bo'lgan kvadratik forma hosil bo'ladi. Bu yerda

$$|Q^T|=|Q| \Rightarrow |Q^TAQ|=|Q^T||A||Q|=|A||Q|^2.$$

Endi $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ bo'lsin. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$f=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2.$$

f forma musbat aniqlangan bo'lsin. U holda induktiv farazga ko'ra φ formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat. f formaning oxirgi bosh minori, ya'ni A matritsa determinantining qat'iy musbatligi quyidagi mulohazadan kelib chiqadi: f forma musbat aniqlanganligi sababli u xosmas chiziqli almashtirish yordamida n ta musbat kvadratlardan tuzilgan normal ko'rinishga keladi. Bu normal ko'rinishning determinanti qat'iy musbat, shu sababli f formaning determinanti ham qat'iy musbat.

Endi f formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat bo'lsin. U holda φ formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat bo'lgani uchun induktiv farazga ko'ra φ forma musbat aniqlanganligi kelib chiqadi, ya'ni $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ noma'lumlarning shunday chiziqli almashtirishi mavjudki, u yangi φ formani $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ noma'lumlarning $n-1$ kvadratlari yig'indisi formasiga keltiradi. Bu chiziqli almashtirishni, $x_n=y_n$, deb faraz qilib, barcha $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlarning chiziqli almashtirishigacha to'ldirish mumkin. Bu chiziqli almashtirishdan so'ng quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2.$$

b_{in} ning aniq ko'rinshi biz uchun muhim emas.

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=\left(y_i+b_{in}y_n\right)^2-b_{in}^2y_n^2$$

bo'lgani uchun $z_i=y_i+b_{in}y_n$, $i=1,2,\ldots,n-1$, $z_n=y_n$
chiziqli almashtirish f formani

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}z_i^2+cz_n^2 \tag{3.15}$$

kanonik ko'rinishga keltiradi.

f formaning musbat aniqlanganligini ko'rsatish uchun c sonning musbatligini ko'rsatish yetarli. Ko'rinib turibdiki, (3.15) formaning determinanti c ga teng. Bu determinant esa musbat. Chunki farazga asosan f formaning bosh determinanti musbat va xosmas chiziqli almashtirishlarda forma determinantining ishorasi o'zgarmaydi.

Masalan, $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki uning bosh minorlari musbat:

$$5,\quad \begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}=1.$$

$f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan emas, chunki uning ikkinchi minori manfiy:

$$\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}=-1$$

Kvadratik formalarning ko'pdan-ko'p tadbiqlari mavjud bo'lib bu tadbiqlaridan biri sifatida ikkinchi tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{3.16}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o'rnini ko'rib chiqamiz.

Buning uchun (3.16) tenglamaning koeffitsiyentlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta=\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda $\Delta-$(3.16) tenglamaning diskriminanti, δ-uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (3.16) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to'g'ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum)

28-misol. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ tenglamada qaysi turdagi egri chiziq berilgan.

Yechish.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -26.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

29-misol. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 3 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A = 5,\ B = 4,\ C = 5, D = -9,\ E = -9, F = 3$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$. u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

3.6. Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari. Leontev modeli

Matritsalar algebrasi elementlarining qo'llanilishi ko'plab iqtisodiy masalalarni hal etishning asosiy usullaridan biri hisoblanadi. Matritsalar nazariyasining asoslari nemis olimlari K. Veyershtras va G.Frobeniuslar tomonidan IXX asrning oxiri XX asrning boshlarida yaratilgan. Aksariyat iqtisodiy ob'yekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko'rinishda tasvirlanadi. Hozirgi kunda matritsalar tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim apparat sifatida qo'llanilmoqda.Ushbu masala ma'lumotlar bazasini ishlab chiqishda va qo'llashda dolzarb masalaga aylangan. Ular bilan ishlashda deyarli barcha ma'lumotlar matritsali shaklda saqlanadi va qayta ishlanadi. Shuning uchun ma'lumotlar bazasi bilan ishlash dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Matritsali hisoblar. Quyida korxonalar ish faoliyatini o‘rganish va tahlil qilishda matritsaviy hlsoblardan foydalanishga misollar ko‘rib chiqamiz.

30-misol. Jadvalda 3 xil xom ashyo turidan foydalangan holda 4 xil mahsulotni ishlab chiqaruvchi 5 ta korxonaning kunlik ishlab chiqarishl haqida ma’lumot berilgan, hamda bir yilda har bir korxonaning ish muddati va har bir xom-ashyoning narxi keltirilgan.

Mahsulot turi	**Korxonalarning mehnat unumdorligi (bir kunda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori)**					**Xom ashyo sarfi (bir birlik mahsulot uchun)**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
Bir yildagi ish kunlari soni						**Xom ashyo bahosi**		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Topshiriqlar:

1. Har bir korxonaning har bir turdagi mahsulot bo‘yicha yilllk ishlab chiqarish unumdorligini toping.

2. Har bir korxonaning xom ashyoning har bir turi bo‘yicha yillik talabini toping.

3. Jadval asosida ko‘rsatilgan turlarda va miqdorda mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo‘lgan xom ashyolarni sotib olish uchun har bir korxonaning yillik kreditini toping.

Yechish. Ushbu misolda bizni qiziqtirayotgan ishlab chiqarishning butun iqtisodiy spektrni xarakterlovchi matritsalarni tuzishimiz kerak, so‘ngra esa ular ustida bajariladigan amallar yordamida berilgan masalaning yechimini olishimiz mumkin. Eng avvalo korxonalarning mahsulotning barcha turlari bo‘yicha ishlab chiqarish unumdorligi matritsasini keltiramiz.

Ishlab chiqarish

unumdorligi

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

max *sulot*

turi

↓

Bu matritsaning har bir ustuni alohida korxonaning mahsulotning har bir turi bo‘yicha kunlik ishlab chiqarish unumdorligiga mos keladi. Bundan kelib chiqadiki $j-$ korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligi A matritsada $j-$ustunning har bir korxona uchun yildagi ish kunlari soniga $(j=1,2,3,4,5)$ ko'paytirishdan kelib chiqadi. Shunday qilib har bir korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi matritsa bilan tavsiflanadi.

$$A_{yil}=\begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}$$

Mahsulot birligiga ketadigan xom ashyo xarajatlari matritsasi (bu ko'rsatgichlar shartga ko'ra har bir korxona uchun bir xil) quyidagi ko'rinishga ega.

Mahsulot turi

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1\ xom\,ashyo \\ 2\quad turi \\ 3\quad\downarrow \end{matrix} \end{array}$$

Korxonalardagi xom ashyoning har bir turi bo'yicha kunlik xarajat B matritsani A matritsaga ko'paytirish bilan aniqlanadi:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda $i-$ satr xom ashyo turidan nomeriga mos keladigan j- ustun esa korxonaning nomeriga mos keladi $(i=1,2,3\ j=1,2,3,4,5)$. Masalaning 2-savoliga javobni A_{yil} matritsa kabi, ya'ni $B.A$ matritsa ustunlarini korxonaning yillik ish kunlari soniga ko'paytirish orqali olamiz bu har bir korxonaning xom ashyoning har bir turiga yillik talabini beradi.

$$B\cdot A_{yil}=\begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Xom ashyo narxi matritsasini kiritamiz $Q=(40 \quad 50 \quad 60)$. U holda har bir korxona uchun xom ashyoning umumiy yillik zahirasi Q narx matritsasini BA matritsaga ko‘paytirish orqali hosil qilinadi.

$$P = QBA_{yil} = \begin{pmatrix} 2008000 & 3496500 & 1878500 & 1494000 & 1552600 \end{pmatrix}.$$

Demak xom ashyoni sotib olish uchun korxonalarning kreditlashtirish summasi P matritsaning elementlari bilan aniqlanadi.

31-misol. Korxona 4 xil xom ashyo turini qo‘llab 4 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xom ashyo xarajatlarinmg normalari A matritsaning elementlari sifatida berilgan:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Xom - ashyo turi} & & \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & & \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \textit{mahsulot} \\ \textit{turi} \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

a) mahsulotning har bir turi uchun ketgan xom ashyo va uni tashishga ketgan umumiy xarajatlarni toping; b) agar har bir xom ashyo turining va uni yetkazishning tannarxlari ma’lum bo‘lsa, (mos ravishda 4, 6, 5, 8 va 2, 1, 3, 2 pul birligi) mahsulot chiqarishning berilgan rejasi (mos ravishda 60, 50, 35, 40 birlik.) shartlari bo‘yicha xom ashyo va uni tashishga ketgan umumiy xarajatlarni toping.

Yechish. Xom ashyo va uni yetkazishning tannarxi matritsasini tuzamiz.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

U holda masalaning birinchi savoliga javob A matritsaning transpornirlangan C matritsaga ko‘paytmasi sifatida beriladi:

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

Xom ashyo va uni yetkazishga ketgan umumiy xarajatlar $\vec{q} = (60;50;35;40)$ mahsulot ishlab chiqarishning vektor rejasida $\vec{q}$ vektorning AC^T matritsaga ko‘paytmasi bilan aniqlanadi:

$$\vec{q}\cdot A\cdot C^T=(60,\quad 50,\quad 35,\quad 40)\cdot\begin{pmatrix}86 & 29\\ 89 & 31\\ 71 & 29\\ 140 & 47\end{pmatrix}=(17695,\quad 6185).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalanish. Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga va yechishga olib keluvchi masalalarni ko'rib chiqamiz.

32-misol. Korxona xom ashyoning uch turini qo'llab, mahsulotning uch turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xom ashyoning berilgan zaxiralarida mahsulotning har bir turini ishlab chiqarish hajmini aniqlash talab etiladi.

Xom ashyo turi	Mahsulot turlari uchun xom ashyo sarfi			Xom ashyo hajmi
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Yechish. Mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini $x_1,\ x_2,\ x_3$ orqali belgilaymiz. U holda hom ashyoning har bir turi uchun zahiralarining to'liq ishlatilishi shartida balans munosabatlarini yozish mumkin. Ular uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.

$$\begin{cases}6x_1+4x_2+5x_3=2400\\ 4x_1+3x_2+x_3=1450\\ 5x_1+2x_2+3x_3=1550\end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini ixtiyoriy usul bilan yechib, hom ashyoning berilgan zahiralarida mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini topamiz. Har bir tnr bo'yicha mos ravishda $x_1=150,\ x_2=250,\ x_3=100$ ni tashkil qiladi.

Mashqlarni bajaring.

1) Tikuv fabrikasi uch kun davomida kastyumlar, plashiar va kurtkalar tikdi. Uch kun ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari va bu kunlarda ishlab chiqarishga ketgan pul xarajatlari ma'lum.

Kun	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari (birlik)			Xarajatlar (ming.shart bir.)
	Kostyumlar	Plashlar	Kurtkalar	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir turdagi mahsulot birligining tannarxini toping.

2) Jadvalda 3 xil xom ashyo turidan foydalangan holda 4 xil mahsulotni ishlab chiqaruvchi 5 ta korxonaning kunlik ishlab chiqarishi haqlda ma'lumot berilgan, hamda bir yilda har bir korxonaning ish muddati va har bir xom ashyoning narxi keltirilgan.

Mahsulot turi	Korxonalarning mehnat unumdorligi (bir kunda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori)					Xom ashyo sarfi (bir birlik mahsulot uchun)		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**
1	5	4	3	3	6	8	3	4
2	1	12	5	3	5	3	5	6
3	7	5	0	4	6	5	4	5
4	3	5	8	5	4	2	3	5
Bir yildagi ish kunlari soni						Xom-ashyo bahosi		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	250	200	180	190	150	70	80	60

Topshiriqlar:

1. Har bir korxonaning har bir turdagi mahsulot bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligini toping.

2. Har bir korxonaning xom ashyoning har bir turi bo'yicha yillik talabini toping.

3. Jadval asosida ko'rsatilgan turlarda va miqdorda mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan xom ashyolarni sotib olish uchun har bir korxonaning yillik kreditini toping.

Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Chiziqli algebra usullari masalan, chiziqli tenglamalar sistemasi nazariyasi keng ko'lamda iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etish bilan bog'liq masalalarni yechishda qo'llaniladi. Biz quyida asosan tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiyotni sonli tahlil qilish xususan, ijtimoiy mahsulot ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish masalasi o'zaro ishlab chiqarish mahsulotlari va xizmatlar oqimlarini o'rganishga keltirlladi.

Shu nuqtai-nazardan iqtisodiy sistema har biri biror-bir turdagi mahsulot ishiab chiqarishga moslashgan tarmoqlardan iborat, deb qarallshi mumkin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar o'zaro ayirboshlanadi va natijada tarmoqlar orasida mahsulot oqimlari vujudga keladi. O'zaro mahsulot oqimlarining vujudga kelishi muqarrardir, chunki har bir tarmoq o'z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida o'zga tarmoq mahsulotidan foydalanadi yoki uni sarflaydi.

Iqtisodiyotni normal rivojlanishining asosiy shartlaridan biri barcha tarmoqlar bo'yicha ishlab chiqarish sarflari va umumiy yig'indi mahsulot orasida balansning mavjudligidir. Bunda ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ishlab chiqarish tarmoqlari sohasiga qaytmasligini va shaxsiy ehtiyojni qondirishga, jamg'arishga sarflanishini yoki eksportga chiqarilishini e'tiborga olish talab etiladi.

Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o‘zaro bog‘liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishiab chiqarish sikli yakunlanadigan vaqtni o‘z ichiga olgan davrni qaraymiz.

x_1, x_2, ..., x_n – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ..., n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo‘lsin. Aytaylik, qaralayotgan davrda x_1 – metallurgiya tarmog‘ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, x_2 – kimyo tarmog‘inmg ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, x_3 – avtomobilsozlik tarmog‘ining ishlab chiqaradigan yengil avtomobillari soni bo‘lsin va hokazo.

$x(x_1, x_2, ..., x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi.

k – tarmoqning x_k birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini x_{ik} orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda x_3 dona avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti, ya’ni metallning sarfi miqdorini x_{13} bilan belgilaymiz. i-tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori y_i bo‘lsin. U holda $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i-tarmog‘i mahsuloti x_i uchun moddiy balans sxemasini «mahsulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash» prinsipi bo‘yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.

Ishlab chiqarish iste’moli	Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
x_{11} x_{12} L x_{1n}	y_1	x_1
x_{21} x_{22} L x_{2n}	y_2	x_2
L L L L	K	L
x_{n1} x_{n2} L x_{nn}	y_n	x_n

Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i, \quad i = 1,2,...,n$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Yuqoridagilarni quyidagi jadvaida tasvirlash mumkin

$i \backslash k$		1	2	...	n	$\sum x$
1		x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\sum_{k=1}^{n} x_{1k}$
2		x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum_{k=1}^{n} x_{2k}$
...		...	...	...	...	...
n		x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum_{k=1}^{n} x_{nk}$
yalpi	*mahsulot*	x_1	x_2	...	x_n	
yakuniy	*mahsulot*	y_1	y_2	...	y_n	

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i-mahsulotning bevosita sarfi miqdori a_{ik} bo'lsin. a_{ik} kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsiyentlari yoki texnologik koeffitsiyentlar, deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, a_{13} – 1 dona avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, i – mahsulotning k-tarmoqqa jami sarfi x_{ik} k–tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i–mahsulotning bevosita sarfi a_{ik} ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori x_k ga ko'paytirilganiga teng.

$x_{ik} = a_{ik}x_k$ ya'ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik prinsipi o'rinli bo'lsin. U holda

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + y_i, \quad i = 1,2,...,n$$

Oxirgi sistemani, o'z navbatida, vektor-matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$X - AX = Y \quad \text{yoki} \quad (E - A)X = Y \tag{L}$$

Bu yerda, E – n – tartibli birlik matritsa, $A = (a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi yoki texnologik matritsa deb ataladi. a_{ik} kattaliklarni o'zgarmas deb qaraymiz.

(L) tenglamaga Leontevning chiziqli modeli deyiladi. Agar $Y = \theta$ bo'lsa, Leontev modeli yopiq, $Y \neq \theta$ bo'lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko'rinishida qo'yilishi mumkin:

1. Yakuniy mahsulot hajmlari vektori Y ga qarab sistema yalpi mahsulot hajmi vektori X ni hisoblash;
2. X ga qarab Y ni hisoblash.

Rejalashtirishning asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya'ni Y vektorning berilishiga qarab, X vektorni hisoblashdir. Leontevning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj Y ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma'nosiga ko'ra X nomanfiy bo'lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo'lganda nomanfiy yechimga ega bo'lishini tekshirishdan iborat.

$X_0 - AX_0$ vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas X_0 vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model), deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralillk zaruriy va yetarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (L) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi yetarli.

Agar (2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy Y vektor uchun (L) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas X yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy Y vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi X vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala yechimi

$$X = (E-A)^{-1}Y$$

formula bo'yicha toplladi.

33-misol. Quyidagi

Ishlab chiqarish sohasi	Iste'mol qilish		Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish
	energetika	mashinasozlik		
energetika	7	21	72	100
mashinasozlik	12	15	123	150

jadvaldan foydalanib, agar energetika tarmog'ni ikki marta oshirib mashinasozlikni o'zgartirmasak, har bir tarmoqdagi zaruriy yalpi ishiab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Bu yerda

$x_1 = 100, \quad x_2 = 150, \quad x_{11} = 7, \quad x_{12} = 21, \quad x_{21} = 12, \quad x_{22} = 15, \quad y_1 = 72, \quad y_2 = 123.$

U holda

$$a_{11} = 0{,}07, \quad a_{12} = 0{,}14, \quad a_{21} = 0{,}12. \quad a_{22} = 0{,}1.$$

Yani

$$A = \begin{pmatrix} 0.07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Bundan foydalanib

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.8202}\begin{pmatrix}0.9 & 0.14\\ 0.12 & 0,93\end{pmatrix}$$

matritsani topamiz.

Shart bo‘yicha $Y=\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}$. $X=(E-A)^{-1}Y$ formuladan foydalansak

$$X=\frac{1}{0.8202}\begin{pmatrix}0,9 & 0.14\\ 0,12 & 0,93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179,0\\ 160,5\end{pmatrix}.$$

Demak, energetika tarmog‘idagi yalpi ishlab chiqarishni 179,0 sh. b. gacha, mashinasozlikda esa 160,5 sh. b. gacha orttirish kerak.

Mashqlarni bajaring.

1) a) Agar yakuniy mahsulotni 1-sohada 12%, 2-sohada 10% ko‘paytirish kerak bo‘lsa, har bir soha bo‘yicha yalpi ishlab chiqarish uchun kerakli hajmni hisoblang;

b) Agar yalpi ishlab chiqarishni 1-sohada 15%, 2-sohada 20% ko‘paytirish kerak bo‘lsa, har bir soha bo‘yicha yakuniy mahsulot hajmni hisoblang:

Ishlab chiqarish sohasi	Iste'mol qilish		Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish
	1	2		
1	120	160	230	500
2	270	50	100	450

2) a) Agar yakuniy mahsulotni 1-sohada 10%, 2-sohada 1,5 marta ko‘paytirish kerak bo‘lsa, har bir soha bo‘yicha yalpi ishlab chiqarish uchun kerakli hajmni hisoblang;

b) Agar yalpi ishlab chiqarishni 1-sohada 15%, 2-sohada 1,2 marta ko‘paytirish kerak bo‘lsa, har bir soha bo‘yicha yakuniy mahsulot hajmni hisoblang:

Ishlab chiqarish sohasi	Iste’mol qilish		Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish
	1	2		
1	25	20	120	180
2	32	15	150	200

III bobga doir savollar

1. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
2. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, deb nimaga aytiladi?
3. Arifmetik vektor uzunligi, deb nimaga aytiladi?
4. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini yozing.

5. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, deb nimaga aytiladi?

6. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?

7. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?

8. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi, deb nimaga aytiladi?

9. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo'lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?

10. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?

11. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

12. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?

13. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

14. n o'lchovli chiziqli fazo deb qanday chiziqli fazoga aytiladi?

15. Chiziqli fazo o'lchovi deb nimaga aytiladi?

16. n o'lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?

17. Har qanday $x \in L^n$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?

18. Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?

19. Qanday chiziqli fazoga Yevklid fazo deyiladi?

20. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?

21. Chiziqli operator ustida bajariladigan qanday amallarni bilasiz?

22. Chiziqli operatorning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?

23. Xos vektorlarning qanday xossalarini bilasiz?

24. Matritsaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'liqmi?

25. Qanday bazisda matritsa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi?

26. Kvadratik formani matritsa ko'rinishida yozish mumkinmi va qanday?

27. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi deb uning qanday shakliga aytiladi?

28. Kvadratik forma matritsasini diagonal ko'rinishga keltiruvchi ortogonal matritsa mavjudmi va nima uchun?

29. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?

30. Kvadratik formaning xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari deb nimalarga aytiladi?

31. Kvadratik forma rangi deb nimaga aytiladi?
32. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik formalar.
33. Kvadratik forma matritsasining bosh yoki burchak minorlari, deb nimalarga aytiladi?

III bobga doir misol va masalalar

1. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ va $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ bu yerda $\vec{m}$ va $\vec{n}-$ birlik vetorlar ular orasidagi burchak 120^0 ga teng. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. Tekislikda uch vektor joylashgan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, va $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\left|\vec{c}\right| = 5$, $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = 60^0$, $\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = 60^0$. $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ vektorning uzunligini toping.

3. $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchakni toping.

4. Vektorlar uzunliklari berilgan $\left|\vec{a}\right| = 11$; $\left|\vec{b}\right| = 23$; $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 30$. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ ni aniqlang.

5. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar a) kollinear b) ortogonal bo'ladi.

6. Oxy tekisligida $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ va $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ vektorlarni yasang. $\vec{c}$ ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali analitik va geometrik ifodalang.

7. $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (1;-1;2)$, $\vec{c} = (2;2;-1)$ va $\vec{d} = (3;7;-7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ ni $\vec{b}$ $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorlar orqali ifodalang.

8. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ vektor uzunligi va uning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

9. Vektor Oy va Oz o'qlari bilan mos ravishda 60^0 va 120^0 burchak tashkil qiladi. Ox o'qi bilan qanday burchak tashkil qiladi.

10. $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}+5\sqrt{2}\vec{k}$ va $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}-\vec{b}$ vektorning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchakni toping.

11. m ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ vektorlar perpendikulyar.

12. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ vektorning $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektordagi proeksiyasini toping.

13. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{c}$ vektorning $\vec{b}+\vec{c}$ vektordagi proeksiyasini toping.

14. $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektordagi proeksiyasi 1 ga teng bo‘lgan, $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, va $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, vektorlarga perpendikulyar $\vec{d}$ vektorni toping.

15. Chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimini toping toping:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

16. $\vec{b}$ vektor ni $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,... vektorlar orqali chiziqli yoyish mumkin bo‘lgan λ ning barcha qiymatlarini toping:

a) $\vec{a}_1=(4;4;3)$, $\vec{a}_2=(7;2;1)$, $\vec{a}_3=(4;1;6)$, $\vec{b}=(5;9;\lambda)$.

b) $\vec{a}_1=(3;2;5)$, $\vec{a}_2=(2;4;7)$, $\vec{a}_3=(5;6;\lambda)$, $\vec{b}=(1;3;5)$.

c) $\vec{a}_1=(3;2;6)$, $\vec{a}_2=(7;3;9)$, $\vec{a}_3=(5;1;3)$, $\vec{b}=(\lambda;2;5)$.

17. Berilgan vektorlar sistemasining bazisini toping. Vektorlarni bazis vektorlar orqali ifodalang.

a) $\vec{a}_1=(2;-1;3;5)$, $\vec{a}_2=(4;-3;1;3)$, $\vec{a}_3=(4;-1;15;17)$, $\vec{a}_4=(7;-6;-7;0)$, $\vec{a}_5=(3;-2;3;4)$.

b) $\vec{a}_1=(1;2;1;3)$, $\vec{a}_2=(1;1;2;2)$, $\vec{a}_3=(1;1;1;3)$, $\vec{a}_4=(3;-5;7;2)$, $\vec{a}_5=(2;3;1;7)$.

c) $\vec{a}_1=(1;0;1;3)$, $\vec{a}_2=(1;-7;5;-2)$, $\vec{a}_3=(-4;-2;-1;0)$, $\vec{a}_4=(-8;3;-6;5)$.

18. (e_1,e_2) bazisda $a_1=2e_1+e_2,\ a_2=e_1-2e_2$ vektorlar berilgan $a_1\ a_2$ vektorlar bazis tashkil qilishini isbotlang. $a_3=3e_1+2e_2$ vektorning (a_1,a_2) bazisdagi koordinatalarini toping.

19. (e_1,e_2,e_3) bazisda $x=(4;0;-12)$ vektor berilgan. Bu vektorning $(e_1'=e_1+2e_2+e_3;\ e_2'=2e_1+3e_2+4e_3;\ e_3'=3e_1+4e_2+3e_3)$ bazisdagi koordinatalarini toping.

20. (e_1,e_2,e_3) bazisdan $(e_1'=e_2+e_3;\ e_2'=-e_1+2e_3;\ e_3'=e_1+e_2)$ bazisga o‘tish matritsasini toping.

21. $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&5\end{pmatrix}$ (e_1,e_2) bazisdan (e_1',e_2') bazisga o‘tish matritsasi berilgan. e_1,e_2 vektorlarning (e_1',e_2') bazisdagi koordinatalarini toping.

22. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ (e_1,e_2,e_3) bazisdan (e_1,e_2,e_3) bazisga o‘tish matritsasi berilgan. e_2 vektorning (e_1,e_2,e_3) bazisdagi koordinatalarini toping.

23. e_1,e_2,e_3 vektorlar ortogonal bazisni tashkil qiladi. Agar $|e_1|=1,\ |e_2|=2,\ |e_3|=2$ bo‘lsa, $x=2e_1-3e_2+4e_3$ va $y=e_1+e_2-5e_3$ vektorlar uzunliklarini va ularning skalyar ko‘paytmasini toping.

24. e_1,e_2,e_3 vektorlar ortonormallangan bazisni tashkil qiladi. $x=3e_2-e_3$ va $y=4e_1+e_2-2e_3$ vektorlar orasidagi burchakni topıng.

25. $\mathring{a}_1,\mathring{a}_2,\mathring{a}_3$ bazisda chiziqli $\tilde{A}$ operator $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan $x=-e_1+2e_2+e_3$ bo‘lsa, $y=A(x)$ ni toping.

26. (e_1,e_2,e_3) bazisda $\tilde{A}$ operator $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ matritsaga ega. $\mathring{a}_1=2e_1+\mathring{a}_2-\mathring{a}_3,\quad \mathring{a}_2=2\mathring{a}_1-\mathring{a}_2+2e_3,\quad \mathring{a}_3=3e_1+\mathring{a}_3$ bazisda $\tilde{A}$ operatorning matritsasini toping.

27. Chiziqli operatorning xos vektor va xos sonlarini toping

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

28. A matritsani diagonal ko‘rinishga keltirish mumkinmi, agar mumkin bo‘lsa matritsani diagonal ko‘rinishda yozing.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

29. L kvadratik formani matritsali ko‘rinishda yozing

a) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2x_1x_2+5x_1x_3$.

30. L kvadratik formaning rangini toping:

a) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3$.

31. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

a) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

c) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-4x_2x_3$.

32. Kvadratik shakl qanday aniqlanganligini toping.

a) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2$.

c) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$.

33. Korxona jadvalda ko‘rsatilgan miqdorda 3 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3
Mahsulot miqdori (birlik)	15	25	40
Bir birlik mahsulot narxi	30	40	50
Mahsulot narxining o‘zgarishi	+5	-3	+2

Mahsulotni sotishdan olingan daromad va mahsulot narxining o‘zgarishidagi daromadning o‘zgarishini toping.

34. Korxona jadvalda ko‘rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	I	II	III	IV
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
1birlik mahsulot uchun xomashyo sarfi (kg)	7	3,5	10	4
Vaqt normasi (soat)	20	32	40	20
Mahsulot narxi (sh.p.b.)	100	170	160	200

S umumiy xom-ashyo sarfi, T jami mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan vaqt, P mahsulotni sotishdan olingan daromad va mahsulot ishlab chiqarish +5, -4, -2, +10 birlikka o'zgarishidagi S,T va Pning o'zgarishini toping.

35. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,25 & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0,5 & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0,25 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Javoblar: 1. 120^0. **2.** $\sqrt{7}$. **3.** 90^0. **4.** 20. **5.** a) $\alpha=4, \beta=-1$; b) $\alpha=c$, $\beta=c+d$, bu yerda c – ixtiyoriy haqiqiy son. **6.** $\vec{c}=2\vec{b}-2\vec{a}$. **7.** $\vec{a}=\dfrac{3\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{2}$. **8.** $|\vec{a}|=7$; $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$, **9.** 45^0yoki 135^0. **10.** 45^0 **11.** $m=-6$. **12.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **13.** $\dfrac{5}{\sqrt{89}}$. **14.** $\vec{d}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$.

15. a) $\left(\frac{1}{7},\frac{3}{7},1\right)$. **b)** $\left(\frac{1}{7},\frac{3}{7},1,0\right),\left(\frac{1}{7},-\frac{4}{7},0,1\right)$. **16. a)** ixtiyoriy **b)** $\lambda\neq 12$ **c)** mavjud emas. **17.a)** $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5\right\}$, $\vec{a}_3=2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+4\vec{a}_5$, $\vec{a}_4=\vec{a}_1+5\vec{a}_2-5\vec{a}_5$. **b)** $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\right\}$, $\vec{a}_5=\vec{a}_1-\vec{a}_2+2\vec{a}_3$. **c)** $\left\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right\}$, $\vec{a}_4=\vec{a}_1-\vec{a}_2+2\vec{a}_3$. **18.**

$\vec{a}_1 = \left(\frac{8}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **19.** $\vec{x} = (-4;-8;8)$. **20.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **21.** $\vec{e}_1 = \left(\frac{5}{13};-\frac{3}{13}\right)$,

$\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{13};\frac{2}{13}\right)$. **22.** $\vec{e}_2 = (2;1;0)$. **23.** $(x,y) = -90$; $|x| = 2\sqrt{26}, |y| = \sqrt{105}$.

24. $\arccos\sqrt{\frac{5}{42}} \approx 70^0$. **25.** $y = (1;3;4)$. **26.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 11 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$.

27. a) $(4c_1;-c_1), (c_2;-c_2), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. **b)** $(-2c_1;c_1;c_1)$, $(0;c_2;c_2)$, $(6c_3;-7c_3;5c_3)$, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0$. **c)** $(-c_1;0;c_1;0)$, $(c_2;0;0;0)$, $(0;c_3;0;0)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. **28. a)** $A^* = diag(1;4)$. **b)** keltirib bo'lmaydi. **c)** $A^* = diag(-6;2;3)$. **29.a)** $(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. **30. a)** 2. **b)** 2.

31. a) $L = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2$.

Agar $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$.

b) $L = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. agar $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$.

c) $L = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2$. agar $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = -2x_2 + x_3$.

32. a) musbat aniqlangan **b)** manfiy aniqlangan **c)** umumiy ko'rinishda. **33.** 3450 shartli birlik, 80 shartli birlik. **34.** $S = 1310kg$, $T = 6760soat$, $P = 45800sh.p.b.$ $\Delta S = 41kg$, $\Delta T = 92soat$, $\Delta P = 1500sh.p.b.$ **35.** 2:4:3.

Tayanch so'z va iboralar: arifmetik vektor fazo, arifmetik vektor, nol vektor, vektorlar ustida chiziqli amallar, vektorlarning skalyar ko'paytmasi, arifmetik vektor uzunligi, arifmetik vektorlar orasidagi burchak, uchburchak tengsizligi, Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi, fundamental yechimlar sistemasi, aniqlik shartlari, bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi. chiziqli fazo, chiziqli bog'liq va chiziqli erkli elementlar, chiziqli fazo bazisi, chiziqli fazo o'lchami. qism fazo. Yevklid fazosi, operator, chiziqli operator, operatorning matritsasi, operatorning rangi, nol operator, birlik operator, matritsaning xos vektori, matritsanmg xos soni, xarakteristik tenglama, chiziqli operator matritsasining diagonal shakli, kvadratik formalar, kanonik ko'rinish. inersiya qonuni, ortogonal almashtirish, xos va xosmas kvadratik formalar, xos va xosmas chiziqli almashtirishlar, iqtisodiyotda matritsali hisoblardan foydalanish, ishlab chlqarish unumdorligi. talab, xom-ashyo xarajatlari matritsasi, xom-ashyo narxi matritsasi, mahsulot vektori, xarajat vektori, mahsulot hajmi, tarmoqlararo balans, nomanfiy bazis yechimlar.

IV bob. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

4.1. Tekislikda to‘g‘ri chiziq

Mikroiqtisodiyot alohida korxonalar va bozorlarning iqtisodiy nazariyasi va ularning siyosatini tahlil qilish bilan shug‘ullanadi. Bu esa talab va taklif orasidagi muvozanatni aniqlab beruvchi bozor muvozanatini o‘rganishni talab qiladi. Mahsulotni sotish narxi va uni ishlab chiqarish miqdori muvozanatini aniqlash uchun talab va taklif chiziqlarining o‘zaro joylashishini aniqlash zaruriyati tug‘iladi. Biz bu paragrafda talab va taklif chiziqlarini ifodalash uchun zarur bo‘lgan chiziqlarning sodda ko‘rinishi bilan, ya’ni tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning joylashishi bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun biz to‘g‘ri chiziqlarni analitik ifodalashni, ya`ni to‘g‘ri chiziqlarning tenglamasini yozish bilan tanishamiz.

Matematikada chiziqlarning tenglamasi tushunchasi bilan tanishtiradigan bo‘lim analitik geometriya deb ataladi.

1-ta’rif. Agar d chiziqdagi har bir (x,y) nuqta $F(x,y)=0$ $(y=f(x))$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $F(x,y)=0$. tenglama d chiziqning tenglamasi deb ataladi.

Agar d chiziqni to‘g‘ri chiziq, deb qarasak, u holda $F(x,y)=0$ tenglama d to‘g‘ri chiziqning tenglamasi bo‘ladi.

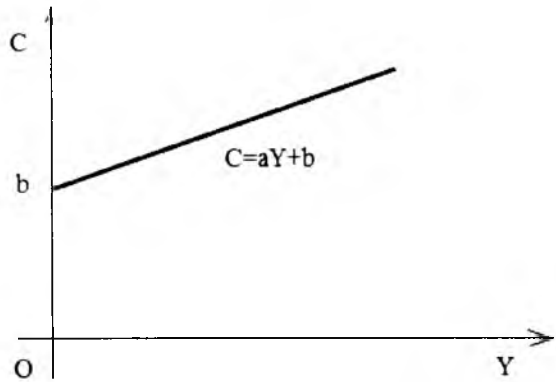
To‘g‘ri chiziqning

$$y=kx+b \tag{4.1}$$

ko‘rinishdagi tenglamasi bilan biz oldindan tanishmiz. Analitik geometriyada bu tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deb ataladi.

Bu kabi tenglamalardan iqtisodiyotda milliy daromadni o‘rganishda foydalanish mumkin. Masalan, milliy daromadni hisoblashda iqtisodning eng sodda modelidan foydalanish maqsadida uni ikki sektordan: xo‘jaliklar (iste’molchilar) va korxonalardan (ishlab chiqaruvchilar) iborat, deb qaraymiz. Korxonalar quyidagi resurslardan masalan, yer, kapital, mehnat resurslari va xom-ashyolardan mahsulotlarni ishlab chiqarishda va iste’molchilarga xizmat ko‘rsatish sohalarida foydalanadi. Bu resurslar ishlab chiqarish ko‘rsatkichiari sifatida korxonalarga tegishli bo‘lishi kerak. Bu ko‘rsatkichlar uchun korxonalardan xo‘jaliklarga to‘lov sifatida jo'natilayotgan pul oqimini milliy daromad sifatida qarash mumkin. Xo'jaliklar bu pullarni ikki maqsad uchun: pulning ma'lim bir qismini korxonalar tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotlarni $C-$iste'mol qilishga (xarid qilishga) va pulning qolgan qismini $S-$iqtisod qilishga (jamg'arma qilishga) sarflaydi, deb qarash mumkin. U holda C va S belgilar $Y-$daromadning funksiyasi sifatida qaraladi: $C=f(Y)$, $S=f(Y)$.

Agar C va Y orasidagi bog'liqlik chiziqli bo'lsa, u holda $C=aY+b$, $a>0$, $b>0$ bo'ladi. Chunki daromad ortishi bilan iste'mol uchun sarf ham oshadi.



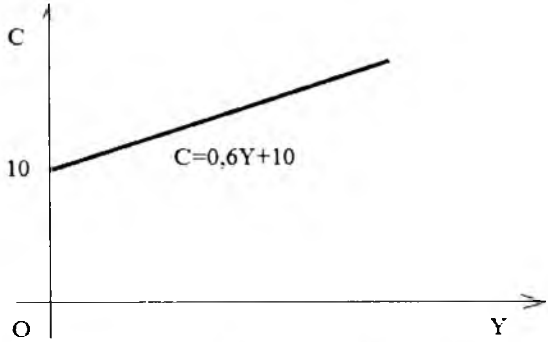
Bu yerda b daromad bo'lmagandagi ($Y=0$) iste'mol darajasini bildiradi va uni ko'p hollarda avtonom iste'mol, deb ham ataladi. a iste'mol o'zgarishining limit qiymati bo'lib, u Y bir birlikka o'zgarganda C belgining qanchaga o'zgarishini bildiradi. Yuqorida aytilganidek, daromad iste'mol uchun va jamg'arma uchun ishlatiladi. U holda

$$Y=C+S.$$

Demak, bir birlik daromadning ma'lum bir qismigina iste'mol uchun sarflanadi va $0<a<1$. $Y=C+S$ munosabat iste'mol funksiyasidan foydalanib jamg'arma funksiyasini aniqlashga yordam beradi.

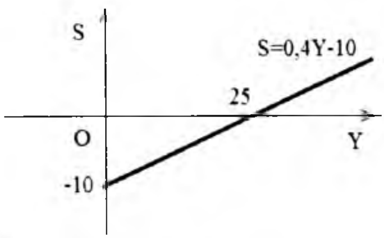
1-misol. Agar iste'mol funksiyasi $C=0,6Y+10$ ko'rinishda bo'lsa, u holda unga mos jamg'arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Yechish. Iste'mol funksiyasining grafigini chizib olamiz.



Bu chiziqqa tegishli bo‘lgan ikkita nuqtani topamiz: $A(0.10)$. $B(10.16)$. Jamg‘arma funksiyasini topish uchun $Y = C + S$ munosabatdan foydalanamiz. U holda $S = Y - C$ bo‘lgani uchun jamg‘arma funksiyasi $D(0.-10)$. $K(10.-6)$ nuqtalardan o‘tadi va bu funksiyaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$S = Y - C = Y - (0.6Y + 10) = 0.4Y - 10$.



Mashq. Agar iste'mol funksiyasi $C = 0,7Y + 15$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda unga mos jamg‘arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Endi biz tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasining turli ko‘rinishlari bilan tanishib chiqamiz.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.2)$$

ko‘rinishdagi tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamadan foydalanib to‘g‘ri chiziqning boshqa ko‘rinishdagi tenglamalarini hosil qilish mumkin yoki aksincha to‘g‘ri chiziqning boshqa ko‘rinishdagi tenglamalarini (4.2) ko‘rininshga keltirish mumkin.

(4.2) tenglamani (4.1) ko‘rinishga keltiramiz:

$$Ax+By+C=0 \overset{(B\neq 0)}{\Rightarrow} By=-Ax-C \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \overset{\left(k=-\frac{A}{B},\, b=-\frac{C}{b}\right)}{\Rightarrow} y=kx+b$$

Endi (4.1) tenglamani (4.2) ko'rinishga keltiramiz:

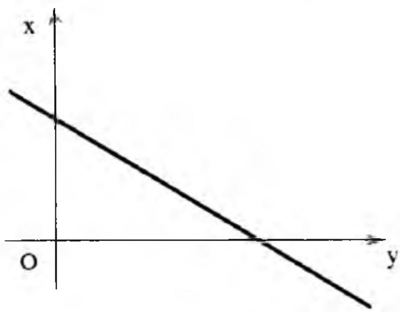
$$y=kx+b \Rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{k}}x+b \Rightarrow \frac{1}{k}y=x+\frac{b}{k} \overset{\left(B=-\frac{1}{k},\, A=1,\, C=\frac{b}{k}\right)}{\Rightarrow} Ax+By+C=0$$

2-misol. $3x+4y-5=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chlziqni burchak koeffitsiyentli tenglama orqali yozing va grafigini chizmg.

Yechish. Birinchi navbatda $3x+4y-5=0$ tenglamani (4.1) ko'rinishga keltirib olamiz:

$$3x+4y-5=0 \Rightarrow 4y=-3x+5 \Rightarrow y=-0{,}75x+1{,}25.$$

Endi to'g'ri chiziqni Dekart koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz:



Endi to'g'ri chiziq tenglamasining boshqa ko'rinishlari bilan ham tanishib chiqamiz.

$M(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{l}(m,n)$ vektorga parallel bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0 \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0) P\vec{l} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (4.3)$$

(4.3) d to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, $\vec{l}$ esa uning yo'naltiruvchi vektori, deb ataladi. (4.2) tenglamani (4.3) ko'rinishga keltiramiz: $d: Ax+By+C=0$ bo'lsin. U holda

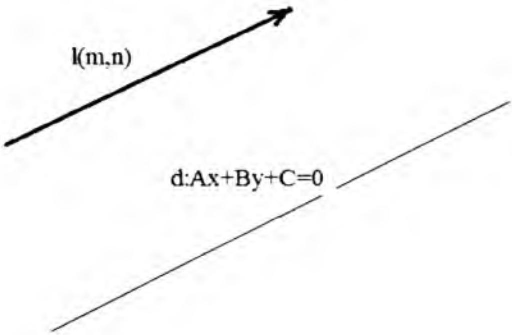
$$\left.\begin{array}{l} M \in d \Rightarrow Ax + By + C = 0, \\ M_0 \in d \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A} \overset{m=-B,\, n=A}{\Rightarrow} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Demak, $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{l}(-B, A)$.

Endi (4.3) tenglamani (4.2) ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0 \overset{(A=n,\, B=-m,\, C=my_0-nx_0)}{\Rightarrow} Ax + By + C = 0.$$



3-misol. $M(3,4)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{l}(-3,7)$ vektorga parallel bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0 \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M}(x-3, y-4) P \vec{l} \Rightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{7} \Rightarrow 7x + 3y - 33 = 0.$$

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidan uning parametrli tenglamasi, deb ataluvchi tenglamasini keltirib chiqaramiz:

$$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0) P \vec{l} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = t = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn. \end{cases}$$

Oxirgi tenglama to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamasi, t esa parametr, deb ataladi va uning har bir parametriga bitta to‘g‘ri chiziq mos keladi.

$M(x_0, y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{n}(a,b)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenlamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0) \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overline{M_0M}, \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (4.4)$$

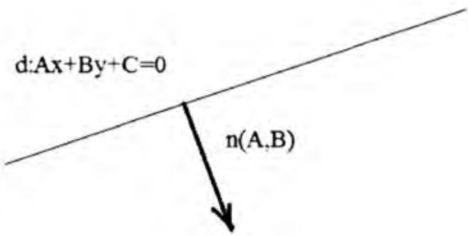
Bu yerda $\vec{n}$ vektor d to‘g‘ri chiziqning normal vektori, deb ataladi. (4.4) tenglamani (4.3) ko‘rinishga keltiramiz: $d: Ax + By + C = 0$ bo‘lsin. U holda

$$\left.\begin{array}{l} M \in d \Rightarrow Ax + By + C = 0, \\ M_0 \in d \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{array}\right\} \overset{A=a,\ B=b}{\Rightarrow} a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Demak, $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektori $\vec{n}(A, B)$.

Endi (4.4) tenglamani (4.2) ko‘rinishga keltiramiz:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \overset{(A=a,\ B=b,\ C=-by_0-ax_0)}{\Rightarrow} Ax + By + C = 0$$



4-misol. $M(-5,4)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{n}(4,3)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0) \neq M(x, y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overline{M_0M}, \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow 4(x + 5) + 3(y - 4) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 8 = 0.$$

To‘g‘ri chiziqning $Ax + By + C = 0$ umumiy tenglamasining shaklini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\frac{Ax + By + C = 0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow \pm\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

Oxirgi tenglama to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi. Bu yerda $\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Bunda: agar $C < 0$ bo‘lsa ishora “+” va agar $C > 0$ bo‘lsa “–“ olinadi.

To‘g‘ri chiziqning $Ax + By + C = 0$ umumiy tenglamasida $C \neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1 \overset{a=-\frac{C}{A},\, b=-\frac{C}{B}}{\Rightarrow} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

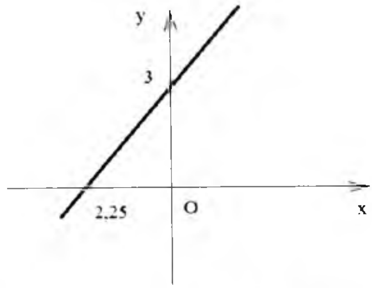
To‘g‘ri chiziqning $a.\ b$ kesmalar bo‘yicha tenglamasini hosil qilamiz.

5-misol. Ushbu $-4x+3y-9=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni yasang.

Yechish. Berilgan tenglamani

$$-4x+3y-9=0 \Rightarrow \frac{x}{-2{,}25}+\frac{y}{3}=1$$

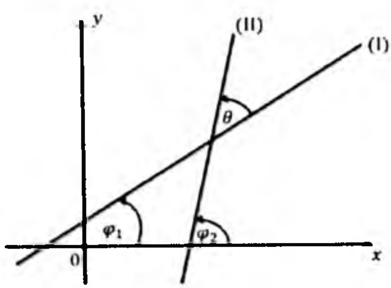
ko‘rinishga keltirib olamiz. Demak, to‘g‘ri chiziq Oy o‘qidan 3 birlik. Ox o‘qidan esa -2,25 birllk kesma ajratadi va unmg grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Ma’lumki, $y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi θ burchak

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$$

formula yordamida topiladi. Bundan $k_1=k_2$ bo‘lsa to‘g‘ri chiziqlar parallel; $k_1k_2=-1$ bo‘lsa to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi.



$I: A_1x+B_1y+C_1=0$, $II: A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning $\vec{n}_1(A_1,B_1)$, $\vec{n}_2(A_2.B_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng, ya'ni $\theta=(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$. Shuning uchun

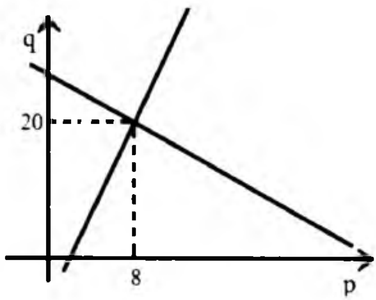
$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

formula o'rinli. Bundan ikkita to'g'ri chiziq uchun parallellik $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=t$ va perpendikulyarlik $A_1A_2+B_1B_2=0$ shartlari kelib chiqadi.

Faraz qilamiz $M_0(x_0,y_0)$ nuqta va $d: Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. U holda M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$\rho(M_0,d)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

formula yordamida topiladi.



Iqtisodiyotdagi muhim tushunchalardan biri bu talab va taklif funksiyalaridir. Odatda bunday funksiyalar mahsulot narxi p va shu narxda sotiladigan mahsulot miqdori q orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba'zi bir cheklovlar ostida bu funksiyalarni chiziqli funksiyalar deb olishimiz mumkin.

Talab va taklif miqdori teng bo'ladigan p narxga muvozanat narxi deyiladi.

Masalan, talab va taklif funksiyalari quyidagi chiziqli funksiyalar bilan ifodalangan bo'lsin $q=-2p+36$, $q=4p-12$. Bu misolda x, y o'zgaruvchilar o'rniga narxni ifodalovchi p o'zgaruvchi va miqdorni ifodalovchi q o'zgaruvchi ishtirok qilmoqda. Talab funksiyasining burchak koeffitsiyenti -2 ga teng bo'lib, narxga nisbatan kamayish tezligini (koeffitsiyentini) ifodalaydi. Taklif funksiyasining burchak koeffitsiyenti 4 ga teng bo'lib, narxga nisbatan taklifning o'sish koeffitsiyentini ifodalaydi. Talab va taklifning muvozanat holatini topish uchun bu ikkita tenglikni birgalikda yechamiz, ya'ni mos to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz.

$$\begin{cases} q=-2p+36, \\ q=4p-12. \end{cases} \Leftrightarrow -2p+36=4p-12 \Leftrightarrow p=8,\ q=20.$$

Demak, talab va taklif bir xil bo'ladigan muvozanat narxi $p=8$ ga teng bo'lib, bunda talab va taklif miqdori $q=20$ ga teng.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda imkoniyatlardan kelib chiqadigan chiziqli tengsizlik shaklidagi cheklovlardan foydalaniladi. Bu cheklovlar odatda resurslar zahirasidan ortiq miqdorda resursdan foydalana olmasligimizni yoki mablag' sarfiga cheklovni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, ikki xil turdagi mahsulot sotib olish talab qilinsin. Bu mahsulotlarning bir birliklarining narxlari mos ravishda p_1, p_2 bo'lsin. U holda $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, narx vektori deb ataladi. Sotib olingan mahsulotlar miqdori mos ravishda x_1, x_2 bo'lsin. $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, vektor mahsulotlar vektori deb ataladi. Bu mahsulotlar vektorining umumiy narxi $(P,X)=P^T X=p_1x_1+p_2x_2$ ga teng.

Bir xil narxli ikkita X va Y mahsulotlar vektorlari ekvivalent deyiladi va $X \sim Y$ kabi belgilanadi.

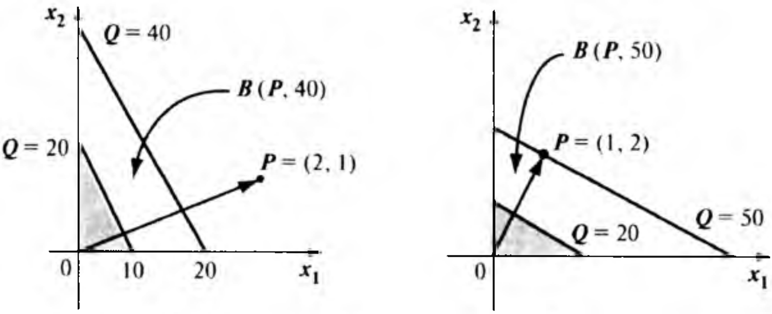
Izoh. Umuman olganda biz bu yerda ixtiyoriy n sondagi mahsulotlarni qarashimiz mumkin. Bunda narx va mahsulotlar vektorlari n o'lchovli arifmetik vektorlardan iborat bo'ladi. Aynan ikki mahsulotning qaralishi ikki o'lchovli arifmetik vektorning tekislikdagi vektor bilan ekvivalentligidir.

Bir xil c narxdagi X mahsulot vektorlari to'plami Ox_1x_2 tekislikda $p_1x_1+p_2x_2=c$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Q miqdordagi mablag' berilgan bo'lsin. Narxi Q dan oshmaydigan mahsulot vektorlari to'plami byudjet to'plami deyiladi. Byudjet to'plami $p_1x_1+p_2x_2 \le Q$ tengsizlik bilan ifodalanadi va $B(P,Q) \equiv B(p_1,p_2,Q)=\{(x_1,x_2) | p_1x_1+p_2x_2 \le Q\}$ kabi belgilanadi.

Q narxdagi mahsulot vektorlari to'plami $B(p_1,p_2,Q)$ byudjet to'plam chegarasi deyiladi va $p_1x_1+p_2x_2=Q$ tenglama bilan ifodalanadi.

Quyidagi rasmda byudjet to‘plamiga misollar keltirilgan. Mahsulotlar vektori komponentalari musbat bo‘lganligi sababli, byudjet to‘plami katetlari koordinata o‘qlarida yotgan I chorakda joylashgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat.



To‘g‘ri chiziqning xossalaridan kelib chiqadigan bo‘lsak, byudjet to‘plam chegarasini ifodalovchi to‘g‘ri chiziqning normali P narx vektoridan iborat. Yuqoridagi rasmdan byudjet to‘plami chegarasini ifodalovchi to‘g‘ri chiziq narx vektori (normal vektor) yo‘nalishida parallel ko‘chirilsa, sarflanadigan Q mablag’ miqdori ortadi.

Byudjet to‘plami tushunchasida narxni bir birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi ma’lum bir resurs sarfi, Q ni resurs zahirasi, deb olishimiz mumkin. Bu holatda byudjet to‘plami ma’lum resurs sarfi shu resurs zahirasidan ortmasligi zarurligini bildiradi.

4.2. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ikki noma’lumli ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.5)$$

(4.5) tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini ko‘rib chiqamiz.

Buning uchun (4.5) tenglamaning koeffitsiyentlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda $\Delta-(4.5)$ tenglamaning diskriminanti, $\delta-$uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (4.5) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to'g'ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum parallel to'g'ri chiziq)

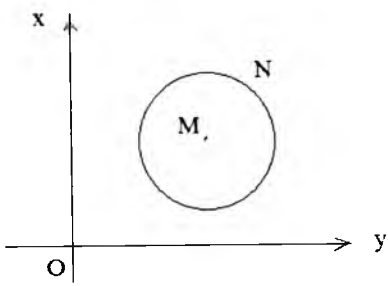
Masalan, $x^2 - y^2 = 0$ ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi, chunki bu yerda $\delta = -1, \Delta = 0;$; $(x+y)^2 = 1$ ikkita parallel to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi, chunki bu yerda $\delta = 0, \Delta = 0;$ $x^2 + y^2 = 0$ bitta nuqtani ifodalaydi chunki bu yerda $\delta = 1, \Delta = 0.$

Yuqorida jadvalda keltirilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarning har birini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

2-ta'rif. Tekislikda belgilangan $M(a,b)$ nuqtadan bir xil R masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rni aylana deb ataladi.

Bu yerda $M(a,b)$ nuqta aylana markazi, R masofa esa aylana radiusi deb ataladi.

$N(x,y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin.



U holda ta'rifga ko'ra $|MN| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$ tenglikdan aylananing kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \tag{4.6}$$

6-misol. $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ tenglama bilan berilgan aylananing markazi koordinatalarini va radiusini toping.

Yechish. Tenglamada x va y ga nisbatan to'la kvadrat ajratamiz: $(x-3)^2+y^2=4^2$. Bundan $R=4$ aylana radiusini va $M_0(3,0)$ aylana markazini topamiz.

7-misol. $M(0,3)$ nuqtadan $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasini toping.

Yechish. Urinma tenglamasini $y=kx+3$ to'g'ri chiziq ko'rinishida izlaymiz. Chunki u (0,3) nuqtadan o'tadi. Aylana tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0$, ya'ni $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

Aylana va to'g'ri chiziqning umumiy nuqtasini topish uchun to'g'ri chiziq va aylana tenglamalarini birgalikda yechib, quyidagi shakl almashtirish bajaramiz:

$$(x-3)^2+(kx+3+2)^2=0 \Rightarrow (k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0.$$

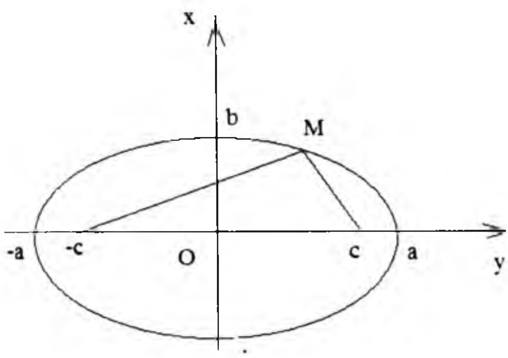
To'g'ri chiziq aylanaga uringani uchun bu tenglama yagona yechimga ega bo'lishi kerak. Tenglama yagona yechimga ega bo'lishi uchun esa uning diskriminanti nolga teng bo'lishi lozim:

$$(5k-3)^2-9(k^2+1)=0 \Rightarrow 16k^2-30k=0$$

U holda $k_1=0,\ k_2=\frac{15}{8}$. Demak, izlangan urinma tenglamalari $y=3$ yoki $y=\frac{15}{8}x+3$ ko'rinishda bo'ladi.

3-ta'rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips deb ataladi.

Bu yerda $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deb ataladi.



Ta'rifga ko'ra ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan F_1, F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas: $|F_1M|+|F_2M|=2a$. U holda

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Oxirgi ifodani kvadratga oshirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+y^2.$$

Bu ifodani soddalashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Bundan

$$|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-|F_2M|=2a-a-\frac{c}{a}x=a-\frac{c}{a}x$$

masofalarni topamiz. Bu masofalar fokal masofalar deb ataladi. Bundan

$$c^2x^2+2cxa^2+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

hosil qilamiz. $c<a$ bo'lganligi sababli $a^2-c^2=b^2$ belgilash ma'noga ega. U holda

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.7}$$

(4.7) ellipsning kanonik tenglamasi deb ataladi. (4.7) tenglamada noma'lumlarning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, uning grafigi Ox va Oy o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan. Koordinatalar boshl uning simmetriya markazi bo'lib, koordinata o'qlari simmetriya o'qlari bo'ladi. Fokuslar joylashgan o'q ellipsning fokus (fokal) o'qi deyiladi.

Ellipsni koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. (4.7) tenglamada $y=0$, deb $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ uchlarni, $x=0$, deb $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$ uchlarni topamiz, $|A_2A_1|=2a$, $|B_2B_1|=2b$, kesmalar ellipsning mos ravishda katta (fokal) o'qi va kichik (fokal) o'qi, deyiladi a, b kesmalar mos ravishda katta yarim o'q va kichik yarim o'q deyiladi. O'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi va (x_0, y_0) ellips markazining koordinatasini ifodalaydi.

Ellips fokuslari orasidagi $2c$ masofani katta o'q $2a$ ga nisbati uning ekssentrisiteti deyiladi va ε bilan belgilanadi: $\varepsilon = \frac{c}{a}$

Har qanday ellips uchun $\varepsilon < 1$ bo'lib, ε ellipsning cho'zinchoqligini yoki siqilganligini bildiradi. Ellipsning fokal radiuslari $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ $(r_1 + r_2 = 2a)$ formula bilan aniqlanadi.

Ellipsning kichik o'qiga parallel va undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisasi deb ataladi va $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ tenglama bilan aniqlanadi.

8-misol. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ tenglama bilan aniqlangan chiziqning shaklini, markazini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Egri chiziq tenglamasida shakl almashtiramiz.

$$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 =$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3(y^2 + 4y + 4 - 4) - 32 = 4(x-1)^2 - 4 + 3(y+2)^2 - 12 - 32 = 0,$$

o'lganligi sababli, bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 48 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1.$$

Demak, tenglama ellipsni ifodalaydi. Bu yerda $a = 2\sqrt{3}, b = 4, c = 2,$ $\varepsilon = \frac{2}{4} = 0{,}5.$

Mashq. Ellips $24x^2 + 49y^2 = 117$ tenglama bilan berilgan. Uning

1) yarim o'qlari uzunligini;
2) fokuslarining koordinatalarini;
3) ellips ekssentrisitetini;
4) direktrisalar tenglamalari va ular orsidagi masofani;
5) chap fokusidan 12 birlik masofada joylashgan ellips nuqtasini toping.

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola deb ataladi.

Belgilangan F_1, F_2 nuqtalar giperbolaning fokuslari deb ataladi.

Ta'rifga asosan, giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ uchun $\|F_1M\| - \|F_2M\| = 2a$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda ham yuqoridagi kabi mulohaza yuritib, ma'lum bir shakl almashtirishlardan so'ng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda $c > a$ bo'lib, $b^2 = c^2 - a^2$ belgilashlardan so'ng giperbolaning quyidagi kanonik tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.8)$$

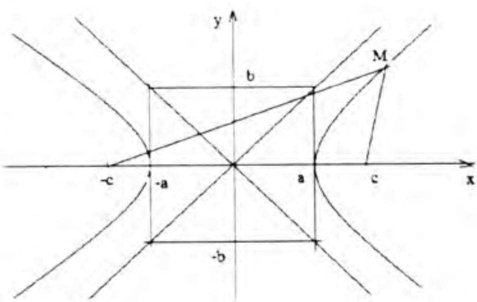
Tenglamadan ko'rinib turibdiki giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuningdek, giperbola $O(0,0)$ nuqtaga, ya'ni koordinata boshiga nisbatan ham simmetrik. Fokuslar yotgan o'q giperbolaning fokal o'qi deyiladi.

Agar (4.8) tenglamada $y = 0$, deb olsak, $x = \pm a$ ni topamiz. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. Bu yerda $|A_1A_2| = 2a$.

Giperbola Oy o'q bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham (4.8) tenglamada $x = 0$, deb olsak, $y^2 = -b^2$ bo'ladi. Bu tenglikning ma'noga ega emasligi giperbola Oy o'qi bilan kesishmasligini bildiradi. $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari, deb atalib, ular orasidagi masofa $2b$ ga teng bo'ladi.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deylladi.

Bu to'g'ri chiziqlar markazi koordinatalar boshlda bo'lgan, tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak (giperbolaning asosiy to'rtburchagi) diagonallarida yotadi. Giperbolani chizishdan oldin asimptotalarini chizish maqsadga muvofiq.



Giperbola uchun ham $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ko'rinishdagi tenglik giperbolanıng ekssentrisiteti deyiladi, giperbola uchun $\varepsilon>1$.

Ekssentrisitet giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagini cho'zinchoqligini ifodalaydi.

Giperbolanıng mavhum o'qiga parallel hamda undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan l_1, l_2 to'g'ri chiziqlar giperbolning direktrisasi deb ataladi.

Agar giperbolada $a=b$ bo'lsa, giperbola teng tomonli deyiladi, uning tenglamasi $x^2-y^2=a^2$ ko'rinishda bo'ladi.

Simmetriya markazi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan giperbolaning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar giperbolaning haqiqiy o'qi Oy o'qda yotsa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

Bu giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{b}$ ga, asimtotalar $y=\pm\frac{b}{a}x$ ga, teng bo'lib, uning direktrisalari esa $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

9-misol. $5x^2-4y^2=20$ giperbolada:

1) yarim o'qlar uzunligi;
2) fokuslar koordinatasi;
3) ekssentrisiteti;
4) asimptota va direktrisa tenglamasi;
5) $M(3;2,5)$ nuqtasinıng fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Tenglamaning ikki tarafini 20 ga bo'lib, giperbola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Bundan:

1) $a^2=4$, $b^2=5$, ya'ni $a=2, b=\sqrt{5}$;
2) $c^2=a^2+b^2=4+5=9\Rightarrow c=3$. Demak, $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$;
3) $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$;

4) asimptota va direktrissa tenglamalari topamiz: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{4}{3}$;

5) M nuqta giperbolaning o‘ng qismida $(x=3>0)$, yotganligi sababli uning fokal radiusi $r=\pm a+\varepsilon x$ formuladan foydalanib topiladi: $r_1=2+\frac{3}{2}\cdot 3=6,5$, $r_1=-2+\frac{3}{2}\cdot 3=2,5$.

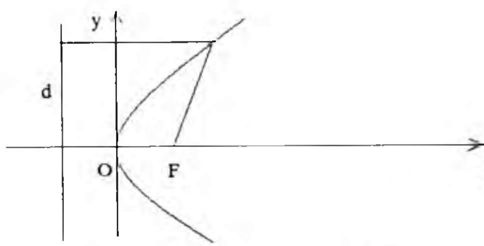
Mashqlar. 1) Fokuslari $F_1(-2;4)$, $F_2(12;4)$. nuqtalarda yotgan va mavhum o‘qining uzunligi 6 bo‘lgan giperbola tenglamasini toping.

2) Agar giperbola ekssentrisiteti 2 bo‘lsa, uning asimtotalari orasidagi burchakni toping.

5-ta’rif. Belgilangan $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, nuqta va belgilangan $d:x=-\frac{p}{2}$, to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni parabola deb ataladi.

$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, nuqta fokus. $d:x=-\frac{p}{2}$ to‘g‘ri chiziq esa direktrisa deb ataladi.

Fokus nuqtadan o‘tib direktrisaga perpendikulyar bo‘lgan o‘qni Ox o‘qi, deb qabul qilamiz. U holda parabolaning grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



Paraboladan ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz. U holda ta’rifga asosan

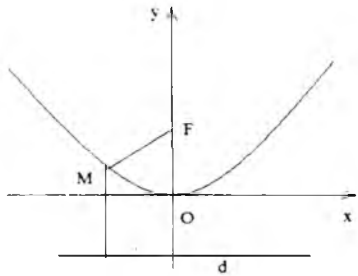
$$|MF|=\rho(M,d)\Rightarrow\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Bu tenglamani soddalashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y^2=2px.$$

Bu tenglama parabolaning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar parabolaning fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtada, direktrisasi $y=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqda bo'lsa, u holda uning grafigi



ko'rinishda bo'lib, tenglamasini esa quyidagicha yozamiz:

$$x^2 = 2py$$

Parabolaning uchi $O(0,0)$ nuqtada yotadi, FM kesma uzunligi M nuqtaning fokal radiusi, $Ox-$ o'qi esa uning simmetriya o'qi deyiladi. Parabolning fokal radiusi $r = x + \frac{p}{2}$ formula bo'yicha topiladi.

10-misol. Parabola $x^2 = 4y$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Fokus nuqta koordinatasi, direktrisa tenglamasi, $M(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi topilsin.

Yechish. $x^2 = 2py \Rightarrow p = 2$. Demak, $F(0;1)$, $y=-1$. $M(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi $r = 4+1=5$.

Mashq. $y=-2x^2+8x-5$ parabola uchining koordinatasi, fokusi va direktrisasi topilsin hamda uning grafigining eskizi chizilsin.

11-misol. Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 14Q_S + 22$, $P=-Q_D^2-10Q_D+150$ ko'rinishda bo'lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorini va muvozanat narxini aniqlang.

Yechish. Muvozanatda $Q_S = Q_D = Q$ bo'lgani uchun masala shartidagi funksiyalarni $P=Q^2+14Q+22$, $P=-Q^2-10Q+150$ korinishda yozib olamiz. U holda

$$Q^2 + 14Q + 22 = -Q^2 - 10Q + 150 \Rightarrow 2Q^2 + 24Q - 128 = 0$$

Bu tenglamaning yechimi $Q=-16$, $Q=4$. Bu yerda $Q>0$ bo'lgani uchun $Q=4$ (muvozanat miqdor) qiymatni tenglamaning yechimi sifatida qabul qilamiz. U holda $P=94$ (muvozanat narx).

Mashqlar. 1) Agar talab va taklif funksiyalari $P=2Q_S^2+10Q_S+10$, $P=-Q_D^2-5Q_D+52$ bo'lsa, ishlab chlqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

2) Agar talab va taklif funksiyalari $P=Q_S^2+2Q_S+12$, $P=-Q_D^2-4Q_D+68$ mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

3) Agar talab va taklif funksiyalari $P=Q_S^2+2Q_S+7$, $P=-Q_D+25$ bo'lsa, ishlab chiqrilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

4.3. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari

Biz vektorlarning skalyar ko'paytmasi bilan tanishmiz va bu tushunchadan tekisllkda to'g'ri chiziq tenglamasining normal shaklini aniqlashda foydalandik. Biz tekislik tushunchasini kiritish R^3 fazoda amalga oshirilganligi sababli bu fazo vektorlariga doir ba'zi tushunchalarni, ya'ni vektorlarning vektor ko'paytmasi, vektorlarning aralash ko'paytmasi va komplanar vektorlar tushunchalarini kiritib olamiz.

6-ta'rif. Agar $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar $\vec{z}$ vektor quyidagi:

1) $\vec{z}$ vektor ko'paytma uzunligi

$$|\vec{z}|=|\vec{x}||\vec{y}|\sin\alpha$$

tenglik bilan aniqlanadi va son jihatidan $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng bo'ladi (bu yerda α – $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlar orasidagi burchak);

2) $\vec{z}$ vektor uchidan qaraganda $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar orasidzgi α burchak soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda aniqlanadi;

xossalarga ega bo'lsa, u holda $\vec{z}$ vektorga $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deyiladi va $\vec{z}=[\vec{x},\vec{y}]$ ko'rinishda belgilanadi.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $[\vec{x},\vec{y}]=-[\vec{y},\vec{x}]$;

2) $\vec{x}\perp\vec{y}\Rightarrow\left|[\vec{x},\vec{y}]\right|=|\vec{x}||\vec{y}|$;

3) $\alpha[\vec{x},\vec{y}]=[\alpha\vec{x},\vec{y}]=[\vec{x},\alpha\vec{y}]$;

4) $[\vec{x},(\vec{y}+\vec{z})]=[\vec{x},\vec{y}]+[\vec{x},\vec{z}]$.

$\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ va $\vec{y}(y_1,y_2,y_3)$ vektorlarning vektor ko'paytmasim 3-tartibli determinant yordamida quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\vec{z}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}.$$

12-misol. $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektor ko'paytmasi va uning uzunligini;
2) skalyar ko'paytmasini;
3) ular orasidagi burchakni.

Yechish.

a) $$\vec{z}=[\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-4\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}\ .$$

Demak $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlarning vektor ko'paytmasi: $\vec{z}(-4;-2;5)$. Bu vektorning uzunligi: $|\vec{z}|=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

b) $(\vec{x},\vec{y})=-2+2+0=0$.

c) $(\vec{x},\vec{y})=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$ Bu yerda $\alpha-\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar orasidagi burchak. Bu burchakni vektor ko'paytmadan foydalanib ham hisoblab ko'ramiz:

$$\sin\alpha=\frac{|[\vec{x},\vec{y}]|}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+2+0}}=1\Rightarrow\alpha=90^0$$

Mashq. $\vec{x}(2;4;-2)$, $\vec{y}(4;-2;5)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektorlarning vektor ko'paytmasi va uning uzunligini;
2) vektorlarning skalyar ko'paytmasini;
3) vektorlar orasidagi burchakni;
4) vektorlarga qurilgan parallelepiped yuzini.

7-ta'rif. Agar $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $[\vec{x},\vec{y}]$ uchinchi $\vec{z}$ vektorga skalyar ko'paytmasi $([\vec{x},\vec{y}],\vec{z})$ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb ataladi va $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ kabi belgilanadi.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=(\vec{y},\vec{z},\vec{x})=(\vec{z},\vec{x},\vec{y})$.

Ya'ni ko'paytiriluvchi vektorlar o'rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi.

2) $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=-(\vec{y},\vec{x},\vec{z})$, $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=-(\vec{z},\vec{y},\vec{x})$, $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=-(\vec{x},\vec{z},\vec{y})$.

Ya'ni qo'shni 2 ta vektorlarning o'rinlari almashtirilganda aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi.

3) R^3 da aralash ko'paytma qiymatini quyidagicha 3-tartibli determinant yordamida aniqlash mumkin: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

13-misol. $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko'patmani hisoblang.

Yechish. $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ bo'lgani uchun biz $(\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ ko'paytmaning qiymatini hisoblaymiz:

$$(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 4 + 20 = 4$$

Demak $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlarning aralash ko'paytmasi 4 ga teng.

Mashq. $\vec{x}(5;-7;2)$, $\vec{y}(-11;2;5)$, $\vec{z}(3;6;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko'paytmani hisoblang.

8-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

Teorema. R^3 da 3 ta $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

14-misol. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Yechish. $[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}, \left(\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}\right) = 21 + 70 - 91 = 0.$

Demak, bu vektorlar komplanar.

Mashq. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Izoh. Vektorlarning aralash ko'paytmasining absolyut qiymati shu vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni $V = \left|\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)\right|$, V parallelepipedning hajmi.

Tekislik geometriyaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni turli usullarda aniqlash mumkin. Biz tekislikni aniqlashning ba'zi usullari bilan tanishib chiqamiz. Shuni alohda ta'kidlashimiz zarurki, bizga ma'lum ma'lumotlar yordamida aniqlangan tekislik yagona bo'lishi kerak.

Belgilangan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(A.B.C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzamiz. Ma'lumki, bunday tekislik yagona.

Tekislikka tegishli ixtiyoriy $M(x.y)$ nuqtani olamiz. U holda tekislikda yotgan $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar. Bundan $(\overline{M_0M}.\vec{n})=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Bu tenglamani soddalashtirsak, tekislikning umumiy tenglamasi hosil bo'ladi:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \left(D=-Ax_0-By_0-Cz_0\right)$$

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan har qanday $\vec{n}(A.B.C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

15-misol. $3x-4y+7x+6=0$ tekislikning normal vektorini toping.

Yechish. Bu tekislikning normal vektori: $\vec{n}(3;-4;7)$.

Tekislik umumiy tenglamasining xususiy hollarini qaraymiz:

1) Agar $D=0$ bo'lsa, tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishida bo'lib, uni $O(0;0;0)$ nuqta qanoatlantiradi, ya'ni tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.

2) $C=0$ bo'lsa, tenglama $Ax+By+D=0$ ko'rinishni oladi. Bu Oxy tekislikdagi proeksiyasi $Ax+By+D=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan tekislik tenglamasi. Bu tekislik Oz o'qiga parallel. Shunga o'xshash, $B=0$ va $A=0$ bo'lganda, mos ravishda, Oy va Ox o'qlariga parallel bo'lgan $Ax+By+D=0$ va $By+Cz+D=0$ tekisliklarni hosil qilamiz.

3) $B=C=D=0$ bo'lsa, Oyz tekislikning tenglamasi hosil bo'ladi. Shunga o'xshash, Oxz tekislik va Oxy tekislik tenglamalarini hosil qilamiz.

Faraz qilamiz, tekislikning umumiy tenglamasida barcha koeffitsiyentlar noldan farqli bo'lsin. U holda bu tenglamani quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$Ax+By+Cz=-D \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \left(a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}\right).$$

Bu tekislikning a, b, c kesmalar bo'yicha tenglamasi deb atalib, bunda a, b, c tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalar kattaligi.

Masalan. $2x-3y+z-6=0$ tenglamani kesmalar bo'yicha tenglamaga keltirish talab qilinsin. Buning uchun tenglamaning har bir hadini 6 ga bo'lamiz va izlangan $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$ tenglamani topamiz.

Mashq. Ushbu

1) $2y-5=0$;

2) $x+z-1=0$;

3) $3x+4y+6z-12=0$.

tenglamalar bilan berilgan tekisliklarni chizing.

Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzish talab qilinsin.

Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $\overline{M_1M}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$, $\overline{M_2M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, bu vektorlar komplanar. Demak, $\left(\overline{M_0M},\overline{M_1M},\overline{M_2M}\right)=0$, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Bu tenglama belgilangan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi deb ataladi.

16-misol. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_0(2;0;1)$, $M_1(1;2;0)$, $M_2(0;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overline{M_0M}(x-2,y,z-1)$, $\overline{M_1M}(x-1,y-2,z)$, $\overline{M_2M}(x,y-3,z-2)$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, bu vektorlar komplanar. Demak, $\left(\overline{M_0M},\overline{M_1M},\overline{M_2M}\right)=0$, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1-2 & 2-0 & 0-1 \\ 0-2 & 3-0 & 2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=5(x-2)+3y+z-1=5x+3y+z-11=0.$$

Mashq. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_0(2;3;1)$, $M_1(1;2;4)$, $M_2(5;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi sifatida bu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchak qabul qilingan. Demak, umumiy tenglamalari $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ko'rinishda bo'lgan tekisliklar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, u holda bu burchakni topish uchun $\vec{n}_1(A_1B_1C_1)$ va $n_2(A_2,B_2,C_2)$ vektorlar orasidagi burchakni topish formulasidan foydalanamiz:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Bu ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo'lib, u $0\le\varphi\le\pi$ oraliqda topiladi.

Umuman olganda ikki tekislikning normal vektorlari yordamida ularning o'zaro joylashishi haqida quyidagi mulohazalarni chiqarish mumkin.

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, u holda $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; agar tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, u holda $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha masofa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{|\vec{n}|}.$$

17-misol. $M_1(-2;1;0)$ nuqtadan $2x-6y+3x-4=0$ tekislikkacha masofa topilsin.

Yechish. $d=\frac{|2\cdot(-2)-6\cdot1+3\cdot0-4|}{\sqrt{4+36+9}}=\frac{|-4-6-4|}{7}=2.$

18-misol. $M(1;-3;-2)$ nuqtadan o'tgan va $3x-2y+4z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Ikkita parallel tekislik umumiy normalga ega. Berilgan tekislik normal vektori $\vec{n}=(3;-2;4)$. Bundan izlangan tekislik tenglamasining ko'rinishini topamiz:

$$3(x-1)-2(y+3)+4(z+2)=0\Rightarrow\ 3x-2y+4z-1=0.$$

Fazoda to'g'ri chiziqni ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar kesishmasidan iborat nuqtalarning geometrik o'rni sifatida aniqlash mumkin.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ixtiyoriy vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb ataladi. Yuqoridagi tenglamalar sistemasi yordamida ifodalangan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchisini $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ kabi aniqlash mumkin, bunda $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ tekisliklarning normal vektorlari.

Ma'lumki, fazodagi ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani $\vec{r} = \overline{OM}$ radius vektor bilan aniqlaymiz.

Fazoda to'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va noldan farqli $\vec{s}(m, n, p)$ yo'naltiruvchi vektor berilgan bo'lsin. Faraz qilamiz $M(x,y,z)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda $\overline{M_0M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo'ladi, ya'ni shunday t son mavjudki, $\overline{M_0M} = t \cdot \vec{s}$.

U hoida ta'rifga asosan $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ekanligini hisobga olsak, to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$ hosil qilamiz. Bu tenglamani koordinatalar ko'rinishida ifodalasak

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right|$$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz. Bu sistemada t parametrni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

ga ega bo'lamiz. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

19-misol. To'g'ri chiziqning

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasini kanonik shaklga keltiring.

Yechish. Buning uchun berilgan sistemadan x, y noma'lumlarni topamiz:

$$x=-\frac{1}{5}z+\frac{5}{2},\ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5}$$

Endi esa bu ifodalardan z ni topamiz:

$$z=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}},\ z=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}$$

Endi ularni o‘zaro tenglashtirib

$$\frac{z}{1}=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}$$

ko‘rinishdagi kanonik tenglamani topamiz.

Ikkita to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning orasidagi burchakni topish, ularning parallelik va perpendikulyarlik shartlari yo‘naltiruvchilar orasidagi burchakni topish, yo‘naltiruvchilarning parallellik va perpendikulyarlik shartlariga ekvivalent.

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchak

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

formula yordamida topiladi. Agar $Am+Bn+Cp=0$, ya’ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori perpendikulyar bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Agar $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ bo‘lsa, ya’ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori parallel bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq perpendikulyar bo‘ladi.

20-misol. Berilgan $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+3y+3z-8=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}=t$

Belgilash yordamida

$$x=3t-2, y=-t+2, z=2t-1$$

ifodalarni topamiz. Bu qiymatlarni tekislik tenglamasiga qo'ysak, $t=1$. Bundan, $x = y = z = 1$.

Tekislikning ba'zi tatbiqlarini ko'rib chiqamiz: bozorga ikki turdagi mahsulot taklif etilayotgan bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: P_i $(i=1,2)$ – mahsulotlarni sotish narxi, Q_i - mahsulotlarga bo'lgan talab miqdori bo'lsin. Agar narx va miqdor orasidgi bog'lanish chiziqli bo'lsa, u holda quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\begin{cases} Q_1 = a_1 + b_1 P_1 + c_1 P_2, \\ Q_2 = a_2 + b_2 P_1 + c_2 P_2. \end{cases}$$

Birinchi tenglamada qatnashayotgan o'zgaruvchilarni va koeffitsiyentlarni tahlil qilib chlqamiz. Mahsulotlar narxi nolga teng bo'lganda ularga bo'lgan talab $Q_1 > 0$ bo'lgani uchun $a_1 > 0$. Mahsulot narxi oshganda talab kamayganligi sababli $b_1 < 0$. c_1 parametrning ishorasi mahsulotlarning xarakteriga bog'liq. Agar mahsulotlar bir-birining o'rnini bosadigan bo'lsa, u holda 2-mahsulot narxining oshishi iste'molchi 1-mahsulotni xarid qilishga undaydi va natijada 1-mahsulotga bo'lgan talab Q_1 ortadi. Bu holat, ya'ni ular bir-birining o'rnini bosuvchi mahsulotlar ekanligi $c_1 > 0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Agar mahsulotlar bir-birini to'ldiruvchi mahsulotlar bo'lsa, u holda mahsulot narxining oshishi unga bo'lgan talabning kamayishiga olib keladi. Bu holat esa $c_1 < 0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Xuddi shunday usulda a_2, b_2, c_2 parametrlarning ham ishoralari aniqlanadi.

21-misol. Ikki mahsulot uchun talab va taklif funksiyalari quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$Q_{11} = 10 - 2P_1 + P_2,$$
$$Q_{12} = 5 + 2P_1 - 2P_2,$$
$$Q_{21} = -3 + 2P_1,$$
$$Q_{22} = -2 + 3P_2.$$

Bu ikki mahsulotni ishlab chiqarish miqdori va narxi uchun muvozanat nuqtasini aniqlang. Bu yerda $Q_{11} = Q_{21}, Q_{12} = Q_{22}$.

Yechish. $Q_{11} = Q_{21} = Q_1, Q_{12} = Q_{22} = Q_2$ belgilashiar kiritib tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 10 - 2P_1 + P_2, \\ Q_2 = 5 + 2P_1 - 2P_2, \\ Q_1 = -3 + 2P_1, \\ Q_2 = -2 + 3P_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1, \\ 5 + 2P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4P_1 + P_2 = -13, \\ 2P_1 - 5P_2 = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = 4,\ P_2 = 3,\ Q_1 = 5,\ Q_2 = 7.$$

IV bobga doir savollar

1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
2. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang.
3. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing va koeffitsiyentlarining geometrik ma’nosini izohlang.
4. To‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasini yozing.
5. Koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang.
6. To‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasi, deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
7. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffitsiyenti ma’lum bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
8. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasini yozing.
9. Umumiy tenglama koeffitsiyentlari qanday munosabatlarni qanoatlantirganda, ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlaydi?
10. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga ellips deyiladi?
11. Ellipsning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang.
12. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga giperbola deyiladi?
13. Giperbolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni sharhlang.
14. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga parabola, deyiladi?
15. Parabolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang.
16. Parabola fokusini aniqlang va direktrisasi tenglamasini yozing.
17. Ordinata o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lgan parabola, uning direktrisasi tenglamalarini yozing va fokusini aniqlang.
18. Fazoda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
19. Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing.
20. Tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi, deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?

21. Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo'lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?

22. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi va nima uchun?

23. Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?

24. Tekisllklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing.

25. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha bo'lgan masofani hisoblash formulasini yozing.

26. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?

27. Fazoda to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.

IV bobga doir misol va masalalar

1. Uchburchakning $A(7;9)$, $B(2;-3)$ va $C(3;6)$ uchlari berilgan. a) uchburchak medianalari kesishgan M nuqtani; b) BC tomoni AE bissektrisasi kesishgan E nuqtani toping.

2. $A(5;1)$ nuqtadan o'tuvchi, $3x+2y-7=0$ to'g'ri chiziqqa a) parallel, b) perpendikulyar ikkita to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3. ABC uchburchakning $A(-7;2)$, $B(5;-3)$ va $C(8;1)$ uchlari berilgan. Uchburchakning B uchidan o'tkazilgan medianasi, balandlik va bissektrisasi tenglamasini tuzing.

4. Uchburchakning $A(0;2)$ uchi va $(BM)\, x+y-4=0$, $(CM)\, y=2x$ balandliklari (bu yerda M – balandliklar kesishish nuqtasi) tenglamalari berilgan. Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

5. $3x+4y-1=0$ va $4x-3y+5=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisasi tenglamasini tuzing.

6. ABC uchburchakda uchburchakning tomoni $(AB)\, x+7y-6=0$ va bissektrisalari $(AL)\, x+y-2=0$, $(BM)\, x-3y-6=0$ tenglamalari berilgan. Uchlarining koordinatalarini toping.

7. Buyumlar partiyasini ishlab chiqarish uchun y (so'mda) xarajatlar $y=ax+b$ formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda x - partiya hajmi. Texnologik jarayonning birinchi varianti uchun $y=1,45x+20$. Ikkinchi varianti uchun $x=100$ (buyum)da $y=157,5$ (so'm) va $x=300$ (buyum)da $y=452,5$ (so'm) ekanligi ma'lum. Texnologik jarayonning ikkala variantini baholang va $x=200$ (buyum) da ikkala variant uchun mahsulot tannarxini toping.

8. Ikki turdagi transportning y yuk tashish xarajatlari $y=150+50x$ va $y=250+25x$ tenglamalar bilan ifodalanadi, bu yerda x–yuz kilometrlik masofa, y – transport xarajatlari. Qanday masofadan boshlab transportning ikkinchi turi tejamliroq bo‘ladi.

9. x mehnat unumdorligi o‘zgarishi bilan y ishlab chiqarish hajmi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab o‘zgarishi ma’lum bo‘lsa, uning tenglamasini tuzing. Agar $x=3$ da $y=185, x=5$ da $y=305$ ekanligi ma’lum bo‘lsa $x=20$ da ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

10. $A(1;5)$, $B(-4;0)$ va $C(4;-4)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

11. Markazi $2x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziqda yotgan $A(7;7)$ va $B(-2;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

12. $x^2+y^2=16$ va $(x-5)^2+y^2=9$ aylanalar umumiy vatarining tenglamasini tuzing.

13. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ aylananing $x-y+2=0$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtalaridan bu aylanaga o‘tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

14. Koordinata o‘qlariga joylashtirilgan ellips $M(1;1)$ nuqtadan o‘tadi va ekssentrisiteti $e=\frac{3}{5}$ ga teng. Ellips tenglamasini tuzing.

15. Fokus va uchlari tenglamasi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ bo‘lgan ellipsning mos fokus va uchiarida yotgan giperbola tenglamasini tuzing.

16. $x^2-y^2=8$ giperbola berilgan. $M(4;6)$ nuqtadan o‘tuvchi va giperbola bilan bir xil fokusga ega bo‘lgan ellips tenglamasini yozing.

17. $x^2-y^2=1$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning asimptotalarigacha bo‘lgan masofalar ko‘paytmasi o‘zgarmas songa tengligini isbotlang.

18. Agar simmetriya o‘qiga perpendikulyar, fokus va parabola uchi orasidagi masofani teng o‘rtasidan bo‘luvchi vatarning uzunligi 1 ga teng bo‘lsa, parabola tenglamasini tuzing.

19. $y^2=32x$ parabolada $4x+3y+10=0$ to‘g‘ri chiziqdan 2 birlik masofada yotgan nuqtani toping.

20. $M(1;-2;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi a) $\vec{n}=(3;-4;5)$ vektorga perpendikulyar; b) $3x-4y+5z+6=0$ tekislikka parallel; c) $M_1(0;2;5)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy o‘qiga parallel; d) Oz o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

21. a) $M(1;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{a}=(6;-8;10)$ va $\vec{b}=(4;-3;5)$ vektorlarga parallel; b) $M_1(1;2;3)$ va $M_2(4;-1;-2)$ nuqtalardan o'tuvchi, $\vec{a}$ $(6;-8;10)$ vektorga parallel; c) $M_1(1;2;3)$, $M_2(4;-1;-2)$ va $M_3(4;0;3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

22. $M_0(-1;0;5)$ nuqta orqali o'tuvchi a) koordinata o'qlari bilan $\alpha=\frac{\pi}{3};\ \beta=\frac{\pi}{4};\ \gamma=\frac{2\pi}{3}$ burchaklar tashkil qilgan; b) $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$ to'g'ri chiziqqa parallel; c) Oy o'qiga parallel; d) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel; e) $M_1(2;-3;4)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

23. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziqdan va $M(2;0;1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

24. $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ to'g'ri chiziqning $2x+3y-z-5=0$ tekislikka proeksiyasi tenglamasini toping.

Javoblar: **1. a)** $M(4;4)$; **b)** $E\left(\frac{49}{18};\frac{7}{2}\right)$. **2. a)** $3x+2y-17=0$; **b)** $2x-3y-7=0$. **3.** BD mediana tenglamasi $x+y-2=0$. BE balandlik tenglamasi $15x-y-78=0$. BF bissektrisa tenglamasi $11x+3y-46=0$. **4.** $x-y+2=0$, $x+2y-4=0$, $2x+y-8=0$. **5.** $x-7y+6=0$ va $7x+y+4=0$. **6.** $A\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$, $B(6;0)$, $C(2;-4)$. **7.** Buyumlar partiyasi $x<400$da texnologik jarayonning ikkinchi varianti uchun, $x>400$ da birinchi varianti samarall. Mahsulot tannarxi $x=200$ (buyum) da birinchi variant uchun $y=310$ (so'm), ikkinchi variant uchun $y=305$ (so'm). **8.** $400\,km$. **9.** $y=60x+5$; 1205. **10.** $(x-1)^2+y^2=25$. **11.** $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. **12.** $x=3,2$. **13.** $3x-4y+8=0$, $4x-3y+7=0$. **14.** $16x^2+25y^2=41$. **15.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$. **16.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **18.** $y^2=\sqrt{2}x$. **19.** $M(0;0)$, $M_1(18;-24)$. **20.** **a)** $3x-4y+5z-26=0$; **b)** $3x-4y+5z-26=0$; **c)** $2x+z-5=0$; **d)** $2x+y=0$. **21. a)** $5x-5y-7z+26=0$; **b)** $35x+30y+3z-104=0$;

c) $10x+15y-3z-31=0$. **22. a)** $\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-5}{-\frac{1}{2}}$; **b)** $\frac{x+1}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-2}$;

c) $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$; **d)** $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{-2}$; **e)** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{-1}$.

23. $5x-3y-z-9=0$. **24.** $\frac{x}{-10}=\frac{y-3,4}{13}=\frac{z-5,2}{19}$.

Tayanch so'z va iboralar: Dekart koordinata sistemasi, nuqta koordinatalari, to'g'ri chiziqning normal vektori, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti, to'g'ri chiziqning parametrli tenglamasi, to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, to'g'ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlik shartlari, aylana, ellips, giperbola, parabolai, giperbola va parabola direktrisalari, ellips va giperbola ekssentrisiteti, tekislik, fazoda to'g'ri chiziq, tekislik tenglamasi.

V bob. MATEMATIK TAHLILGA KIRISH

5.1. Sonli ketma-ketlik. Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi

Qandaydir X to'plam berilgan bo'lsin. N natural sonlar to'plamini X to'plamga har qanday $f: N \to X$ akslantirish X to'plam elementlari ketma-ketligi deb ataladi. $f: N \to X$ ketma-ketlik odatda $\{x_n\}$ yoki x_n, $n \in N$, ko'rinishda yoziladi. Bunda:

x_1 – ketma-ketlikning birinchi hadi,

x_2 – ketma-ketlikning ikkinchi hadi, ...

x_n – ketma-ketlikning n – hadi, deyiladi.

Masalan: $x_n = n^2 + 1$, $y_n = \dfrac{3n-1}{2n}$, $z_n = \dfrac{5}{n+3}$, $n \in \mathrm{N}$ sonli ketma-ketliklarni ifodalaydi.

Agar shunday M, (m) soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_n sonli ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yuqorldan ham, quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bu ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Agar ixtiyoriy n uchun $x_n < x_{n-1}$ $(x_n \le x_{n-1})$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamaymaydigan) sonli ketma-ketlik deyiladi. Kamayuvchi (o'smaydigan) ketma-ketliklar ham shunga o'xshash ta'riflanadi. Bunday ketma-ketliklar monoton deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari faqat va faqat bitta C soniga teng bo'lsa, u holda uni o'zgarmas deb atashadi. Masalan, $x_n = 5$, $\{x_n\} = \{5,5,\ldots,5,\ldots\}$

Sonli ketma-ketliklar rekurrent usulda ham beriladi. Bunda ketma-ketlikning x_1 birinchi hadi va n – hadini o'zidan oldingi hadlar orqali topish qoidasi beriladi:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Shunday qilib, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ va hakozo.

Masalan, $x_1 = 2$, $x_n = 3 + x_{n-1}$, $\{x_n\} = \{2,5,8\ldots\}$.

Ko'rish mumkinki, $x_n = \frac{n-1}{n}$ ketma-ketlikning hadlari n kattalashtirilganda 1 soniga yaqinlashadi. Bunday holda $x_n = \frac{n-1}{n}$ ketma-ketlikning limiti 1 soniga intiladi deyiladi.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ nomerlarda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda a soni x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Bu yerda keyinchalik ham $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik musbat son sifatida qabul qilingan.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $n \to \infty$ da $x_n \to a$ ko'rinishda yoziladi. Shuningdek, x_n ketma-ketlik a soniga yaqinlashadi ham deyiladi.

Masalan, $\{x_n\} = \left\{\frac{4n}{n+1}\right\}$ sonli ketma-ketlikda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4$ ekanligini ta'rif asosida isbotlaymiz.

Haqiqatan ham,

$$\left|\frac{4n}{n+1} - 4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$$

ifodani hosil qilamiz. Natijada, N sonining butun son ekanligini e'tiborga olib, $N = \left[\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, deb olasak, natijada ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $n > N$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy n uchun $\left|\frac{4n}{n+1} - 4\right| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, aynan 4 soni x_n ketma-ketlikning limiti ekanligini anglatadi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4$.

Agar sonli ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

Masalan, $\{x_n\} = \left\{\frac{4n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir.

Teorema. Agar sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning limiti yagonadir.

Teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘zgarmas, ya’ni $\{x_n\}=c$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=c$;

2) $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, $m-$ o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda: $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, $\{mx_n\}$, $\{x_n{}^m\}$ ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k+y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}+\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\dfrac{x_k}{y_k}\right\}=\dfrac{\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}\neq 0$;

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\{mx_k\}=m\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}$;

e) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k^m\}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\right)^m$;

3) Aga $x_k\le y_k$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty}x_k\le\lim\limits_{k\to\infty}y_k$;

4) Agar $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$, $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=a$ va $x_k\le z_k\le y_k$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=a$.

2-ta’rif. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun ε ga bog‘liq biror $N(\varepsilon)$ natural son topilib $n>N(\varepsilon)$ bo‘ladigan barcha n natural sonlar uchun $|\alpha_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{\alpha_n\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deyiladi.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}=0$ ko‘rinishda yoziladi.

Shunday qilib, limiti nolga teng har qanday sonli ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deyiladi. Masalan, $\left\{\dfrac{1}{4n}\right\}$, $\left\{\dfrac{4n}{n^2+1}\right\}$ sonli ketma-ketliklar cheksiz kichik sonli ketma-ketliklardir chunki

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4n}\right\}=0,\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{n^2+1}\right\}=0.$$

1-mashq. Cheksiz kichik sonli ketma-ketlik ta’rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Odatda, ketma-ketlik limitini aniqlashda cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdan foydalaniladi. Masalan, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik limiti a ga teng bo‘lishi, uchun shunday cheksiz kichik $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib, $x_n=a+\alpha_n$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi yoki ayirmasidan tuzilgan $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketliklar ham cheksiz kichik sonli ketma-ketliklardir;

2) $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma-ketlik va $\{x_n\}$ chegaralangan sonli ketma-ketlik bo‘lsa, ularning mos hadlari ko‘paytmasidan tuzilgan $\{\alpha_n x_n\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir;

3) Chekli sondagi cheksiz kichik sonli ketma-ketliklarning ko‘paytmalari ham cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir.

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy $A > 0$ son uchun $\{\gamma_n\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir $N(A)$ (A ga bog‘liq) tartib raqamini tanlash mumkin bo‘lib barcha $n > N(A)$ tartib raqamli hadlari uchun $|\gamma_n| > A$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\{\gamma_n\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz katta sonli ketma-ketlik deyiladi.

Cheksiz katta sonli ketma-ketliklar limiti ∞ ga teng.

Masalan, $\left\{\dfrac{n^2}{10n+1}\right\}$, $\left\{\dfrac{2-n^3}{10n^2+10n+1}\right\}$ ketma-ketliklar cheksiz katta sonli ketma-ketliklarga misol bo‘la oladi, chunki ularning limiti, mos ravishda, ∞ va $-\infty$ ga teng.

Cheksiz katta sonli ketma-ketliklar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1) Har qanday cheksiz katta sonli ketma-ketlik chegaralanmagandir;

2) $\left\{\dfrac{1}{\gamma_k}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik bo‘lgandagina, $\{\gamma_n\}, (\gamma_n \neq 0)$ ketma-ketlik cheksiz katta sonli ketma-ketlik bo‘ladi.

4-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N nomer mavjud bo‘lib har qanday $n > N$ va $n + p > N$ $(p \geq 1)$ nomerlar uchun $|x_{n+p} - x_p| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Agar sonli ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u holda bu ketma – ketlik fundamental bo‘ladi.

Agar sonli ketma-ketlik fundamental bo‘lsa, u holda u chegaralangan bo‘ladi.

Veyershtrass teoremasi. Agar sonli ketma-ketlik monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib u yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda bu sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Masalan: $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlik monoton o‘suvchi va chegaralanganligi uchun yaqinlashuvchidir. Ketma-ketlik limiti irratsional e – soniga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=e \quad (e=2.718\ldots).$$

e soni uzluksiz to'lovli murakkab foiz, kapital qo'yilmalarining samaradorligini baholash va hakozo masalalarida qo'llaniladi.

Faraz qilamiz, omonatchi bankda n yil muddatga S_0 so'm miqdorida jamg'arma omonatini ochdi. Bank foizlarining stavkasi esa bugungi kunda omonat pulining i foizini tashkil qiladi. U holda n yildan so'ng omonatchining hisobidagi pullar miqdori $S_n=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$ (murakkab foizlar formulasi) ni tashkil qiladi.

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, omonatning dastlabki pulining murakkab foizlar bo'yicha o'sishi – bu birinchi hadi S_0, maxraji esa $\left(1+\frac{i}{100}\right)$ bo'lgan ***geometrik progressiya*** qonunlari bo'yicha rivojlanuvchi jarayon.

1-misol. S_0 dastlabki depozit bankka $i=100\%$ yillik foiz stavkasi bilan qo'yilgan bo'lsin, bir yildan so'ng depozit miqdori $2S_0$ ni tashkil etadi. Faraz qilamizki yarim yildan so'ng hisob $S_1=S_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}S_0$ natija bilan yopiladi va bu summa yana shu bankka depozit sifatida qo'yiladi. Yil yakunida depozit $S_2=S_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25S_0$ ni tashkil etadi. Bankka qo'yilgan depozitni uni olgandan so'ng keyin yana qo'yish sharti bilan qo'yish vaqtini kamaytirib boramiz. Bu operatsiyalar har kvartalda takrorlanganda yil so'nggida depozit $S_3=S_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\approx 2.37S_0$ ni tashkil etadi. Agar olishning qo'yish operatsiyasini yil davomida xoxlagancha takrorlasak har oy manipulyatsiyalar bir yilda $S_{12}=S_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2{,}61S_0$ summani tashkil etadi; har kungi bankka tashriflar $S_{365}=S_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}\approx 2{,}714S_0$; har soatdagida $S_{8720}=S_0\left(1+\frac{1}{8720}\right)^{8720}\approx 2.718S_0$ va hokazoni tashkil etadi.

$\{S_n/S_0\}$ dastlabki omonatning o'sish qiymatlarining ketma-ketligi murakkab foizlar formulasiga $S=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$ ga ko'ra $n\to\infty$ da limiti e son bo'lgan ketma-ketlik bilan bir xil ko'rish qiyin emas. Shunday qilib foizlarning uzluksiz hisoblanishidan kelgan daromad bir yilda $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_0)\cdot 100\%/S_0 = (e-1)100\% \approx 172\%$ ga teng.

2-misol. Inflyatsiya tempi bir kunda 1% ni tashkil etadi. Yarim yildan so'ng dastlabki summa qanchaga kamayadi.

Yechish. Murakkab foizlar formulasini qo'llasak $S = S_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$ ni hosil qilamiz, bu erda S_0 – dastlabki summa, 182 – yarim yildagi kunlar soni. Bu ifodaning shaklini almashtirsak $S = S_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}} \approx S_0/e^{1.82}$ ni hosil qilamiz, ya'ni inflyatsiya dastlabki summani taxminan 6 marta kamaytiradi.

Ma'lumki, R^n fazoda nuqta $M(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'rinishda belgilanadi. $M(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtaning δ atrofi $U_\delta(M)$ ko'rinishda belgilanib, u markazi $M(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtada bo'lgan δ radiusli ochiq sharni anglatadi.

5-ta'rif. Agar R^n fazoda har bir $k \in N$ songa aniq bir $M_k(x_1^k, x_2^k,...,x_n^k)$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsa, u holda R^n fazoda $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Demak, R^n fazoda nuqtalar ketma-ketligi quyidagi ko'rinishda $M_1(x_1^1, x_2^1,...,x_n^1)$, ..., $M_k(x_1^k, x_2^k,...,x_n^k)$, ... beriladi.

M_1 – birinchi hadi, M_2 – ikkinchi hadi, M_k – k – hadi deyiladi.

Masalan,

R^2 fazoda $M_k\left(\frac{k^2}{4k^2+1};\frac{k-1}{3k+2}\right)$: $M_1\left(\frac{1}{5};0\right)$, $M_2\left(\frac{4}{17};\frac{1}{8}\right)$

R^3 fazoda $M_k\left(\frac{1}{k};\frac{k^2}{3k^2+1};\frac{k^3}{(k+5)^3}\right)$: $M_1\left(1;\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\frac{4}{13};\frac{8}{27}\right)$

R^4 fazoda $M_k\left(\frac{4}{k};\frac{3k}{5k+1};...;\frac{4k-1}{5k+10}\right)$: $M_1\left(4;\frac{3}{6};...;\frac{1}{5}\right)$; $M_2\left(2;\frac{6}{11};...;\frac{7}{20}\right)$

R^n fazoda qism osti nuqtalar ketma-ketllgi berilgan nuqtalar ketma-ketligidan tuziladi va unda hadlarning oldinma-ketin kelish tartibi saqlanadi.

Masalan, $10,20,30,...,10m,...$ sonli ketma-ketlik $5,10,15,...,5k,...$ sonli ketma-ketlikning qism osti ketma-ketligidir.

Ma'lumki, M_n, M_0 nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(M_k;M_0)=\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\left(x_m^k-x_m^0\right)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.

6-ta'rif. Agar biror bir $C\in R$ son va biror bir $M_0\in R^n$ nuqta topilib, ixtiyoriy $k\in N$ natural son uchun $\rho(M_k;M_0)<C$ tengsizlik bajarilsa, $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi chegaralangan, deyiladi.

Masalan, R^3 fazoda $M_k\left(\frac{k}{k+1};\frac{4}{k};\frac{k^2}{k^2+5}\right)$ ketma-ketlik chegaralangan.

R^n fazoda $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $K(\varepsilon)\in N$ son mavjud bo'lib, biror M_0 nuqta va barcha $m>K(\varepsilon)$ tartib raqamli hadlar uchun $M_k\in U_\varepsilon(M_0)$ bo'lsa, u holda M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti deyiladi va $\lim\limits_{k\to\infty}M_k\left(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k\right)=M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ ko'rinishda yoziladi

Masalan, R^3 fazoda $M^{(m)}\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. U holda $\lim\limits_{k\to\infty}M_k\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)=M_0\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

8-ta'rif. Agar $M\in D$ nuqtaning shunday $U_\delta(M)$ atrofi mavjud bo'lib, $U_\delta(M)\in D$ bo'lsa, u holda M to'plamning ichki nuqtasi deb ataladi.

9-ta'rif. Agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat bo'lsa, u holda bu to'plam ochlq to'plam deb ataladi.

10-ta'rif. Agar M nuqtaning har qanday atrofi D to'plamning hech bo'lmaganda bitta nuqtasini o'z ichiga olsa, u holda M nuqta D to'plamning urinish nuqtasi deb ataladi.

11-ta'rif. Agar to'plamning barcha urinish nuqtalari to'plamga tegishli bo'lsa, u holda bu to'plam yopiq to'plam deb ataladi.

Teorema. Agar R^n fazoda nuqtalar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lsa u holda bu ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

12-ta'rif. Agar nuqtaning har qanday atrofida to'plamga tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud bo'lsa, u holda bu nuqta chegaraviy nuqta deb ataladi.

13-ta'rif. Agar n o'lchovli nuqtalar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lsa, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik, aks holda uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental ketma-ketlikdir va aksincha.

Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.

2) Har bir chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin.

3) n o'lchovli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashsa, u holda uning har bir qism ketma-ketligi ham M_0 nuqtaga yaqinlashadi.

4) M_0 nuqta biror–bir V nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasi bo'lsa, V to'plam nuqtalaridan M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

5) Yopiq V to'plamga tegishli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lsa, u hoida $M_0 \in V$.

Nuqtalar ketma-ketliginmg limitim aniqlashda sonli ketma-ketlik limiti muhim ahamiyatga ega.

Masalan, nuqtalar ketma-ketligining limiti uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. M_k va M_0 nuqtalar orasidagi $\{\rho(M_k, M_0)\}$ masofalardan tashkil topgan sonli ketma-ketliknmg limiti nolga teng bo'lgandagina, M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti bo'ladi.

2. R^n fazoda $\{M_k(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ nuqtalar ketma-ketligi $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtaga yaqinlashishi uchun $\lim\limits_{k\to\infty} x_m^k = x_m^0$, $m = \overline{1,n}$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Masalan, $M_0(0, 4)$ nuqta $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{4k}{k+1}\right)\right\}$ nuqtalar ketma-ketligining limitidir, chunki $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{4k}{k+1} = 4$ munosabatlar o'rinli.

3-misol. $M_k\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k; \frac{k^2+k}{3k^2-1}\right)$, $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = ?$

Yechish. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}\frac{3}{2}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k}{3k^2-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k^2+k}{k^2}}{\frac{3k^2-1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{3-\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{3}$$

Demak, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k;\frac{k^2+k}{3k^2-1}\right)=\left(e^{\frac{3}{2}};\frac{1}{3}\right).$

5.2. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya

Funksiya tushunchasini kiritishdan oldin o‘zgarmas va o‘zgaruvchi tushunchalarini kiritib olamiz.

14-ta'rif. Agar biror-bir kattalik doimo faqat bitta son qiymatini saqlab qolsa, u holda bu kattalikka o‘zgarmas kattalik deyiladi.

O‘zgarmas kattaliklar $C=const$ ko‘rinishda yozilib, ko‘p hollarda $a, b, c, m, n,...$ harflari bilan belgilanadi.

15-ta'rif. Agar biror-bir kattalik turli sonli qiymatlarni qabul qilsa, u holda bu kattalikka o‘zgaruvchi deyiladi.

O‘zgaruvchilar $x, y, z, ...$ harflari bilan belgilanadi.

16-ta'rif. Agar X to‘plamning har bir $x\in X$ elementiga Y to‘plamning bitta va faqat bitta $y\in Y$ elementi qandaydir f qonuniyat bilan mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar orasida funksional bog‘lanish mavjud deyiladi va $f:X\to Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Shuningdek, f funksiya X to‘plamni Y to‘plamda akslantiradi, deb ham ataladi.

Agar $X\subset R^n$, $Y\subset R^1$ bo‘lsa, u holda f qonuniyat funksiya deb ataladi. Biz haqiqiy sonlar to‘plamida ish ko‘rganimiz sababll bundan keyin f qonuniyat o‘rniga funksiya atamasini ishlatamiz.

$x\in X$ to‘plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ kabi belgilanadi. $y\in Y$ to‘plam f funksiyaning qiymatlar to‘plami deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

Shuni ham alohida ta'kidlash kerakki, $y=f(x)$ funksiya:

R^1 fazoda $y=f(x)$ ko‘rinishda;

R^2 fazoda $y=f(x_1,x_2)$ yoki $y=f(\bar{x}(x_1,x_2))$ ko‘rinishda;

R^3 fazoda $y=f(x_1,x_2,x_3)$ yoki $y=f(\bar{x}(x_1,x_2,x_3))$ va R^n fazoda $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ yoki $y=f(M)$ $(M(x_1,x_2,...,x_n))$ ko‘rinishda yoziladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi uning ma'noga ega bo‘lgan nuqtalar (sonlar) to‘plamidan iborat bo‘ladi.

Masalan:

1) $y=f(x)=\ln x$ funksiya $V=\{x\in R^1:x>0\}$ to‘plamda berilgan bir o‘zgaruvchili funksiya;

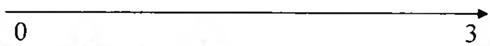
2) $y = f(M) = f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \setminus O(0, 0)\}$ to‘plamda berilgan ikki o‘zgaruvchili funksiya;

3) $y = f(M) = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \setminus (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9)\}$ to‘plamda berilgan uch o‘zgaruvchili funksiya.

4-misol. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plamini aniqlang:

1) $y = \log_2(3 - x)$; 2) $y = \sqrt{4x_1 - x_2^2}$.

Yechish. 1) Bir o‘zgaruvchili $y = \log_2(3 - x)$ funksiya aniqlanish sohasi $D(f)$: $3 - x > 0$ tengsizlik yechimidan iborat. $D(y) = (-\infty : 3) \in R^1$. Son o‘qida $(-\infty; 3)$ ochiq nurdan iborat.



Funksiya qiymatlari to‘plami esa sonlar o‘qidan iborat, ya’ni $E(f) = R^1$.

2) Funksiya ikki o‘zgaruvchili bo‘lib, $y = \sqrt{4x_1 - x_2^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = \left\{ M(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 \geq \dfrac{x_2^2}{4} \right\}$. Funksiyaning qiymatlari to‘plami $E(f) = [0; \infty)$.

Biz asosan, bir o‘zgaruvchili funksiya grafigi va xossalari bilan tanishib chiqamiz. Asosiy tushunchalarni esa ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun beramiz.

$f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(a)$ kabi yoziladi. Masalan, $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ bo‘lsa $f(0) = -7$, $f(1) = 1$ bo‘ladi.

$f(x)$ funksiyaning grafigi deb, mumkin bo‘lgan $(x, f(x))$, $x \in D(f) \subset R^1$ juftliklarnimg xOy tekislikdagi geometrik o‘rniga aytiladi.

Masalan, $y = \sqrt{1 - x^2}$ funksiyaning grafigi markazi $O(0,0)$ va radiusi $R = 1$ bo‘lgan yuqori yarim aylanadan iborat.

$f(x)$ funksiya berilgan, deyiladi, agar ma’lum x uchun y ning qiymatini topish mumkin bo‘lgan qoida mavjud bo‘lsa. Odatda, funksiya uchta usulda beriladi: analitik (takomillashgan usul, chunki matematik analiz metodlarini qo‘llab $y = f(x)$ funksiyani to‘la tekshirish mumkin), jadval va grafik.

R^1 fazoda V qism to‘plam va unda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

17-ta'rif. Agar har qanday $x \in V$ uchun $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya V to'plamda juft (toq) funksiya deyiladi.

Juft funksiya grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, $y = x^{2n}$, $n \in N$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \ln|x|$ - juft funksiyalar; $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, $y = \sin x$ - toq funksiyalar; $y = x - 2$, $y = \sqrt{x}$ funksiyalar juft ham emas va toq ham emas.

18-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun shunday bir musbat T son mavjud bo'lsaki, funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday x va $x+T$ nuqtalar uchun $f(x+T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi.

Bu yerda T soni funksiya davri deyiladi.

Amalda funksiya davrlari ichldan eng kichik davrini topish masalasi qo'yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralisidan iborat bo'ladi.

Masalan, $y = 5\sin(0{,}25\pi x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri

$$T = \frac{2\pi}{0{,}25\pi} = 8.$$

19-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya $V \in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning biror–bir V_1 qism to'plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \le f(x_2))$ munosabat bajarilsa, u holda $y = f(x)$ funksiya V_1 to'plamda o'suvchi (kamaymaydigan) funksiya deyiladi.

20-ta'rif. Agarda $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli V_1 to'plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $(f_1(x_1) \ge f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya V_1 to'plamda kamayuvchi (o'smaydigan) funksiya deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar qat'iy monoton funksiyalar deyiladi.

Masalan, $y = 3x - 2$ funksiya o'zining R^1 aniqlanish sohasida qat'iy monoton o'suvchi funksiyaga misol bo'lsa, $y = -3x - 2$ funksiya esa kamayuvchi funksiyaga misol bo'la oladi.

21-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya $D(f)\subseteq R^1$ sohada aniqlangan bo'lib, $E(f)$ soha uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Agar bu funksiya uchun $\forall x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ munosabat bajarilsa, u holda, har bir $y\in E(f)$ songa $x=g(y)$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x\in D(f)$ sonni mos qo'yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(f)$ to'plamda berilgan $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiyani aniqlash mumkin.

Agar $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiya mavjud bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari to'plami $E(f)$ unga teskari $x=g(y)$ funksiya uchun aniqlanish sohasi, $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ esa $x=g(y)$ teskari funksiya uchun qiymatlar to'plami bo'ladi.

22-ta'rif. $[a,b]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $y=f(x)$ funksiya, $[f(a),f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $x=g(y)$ teskari funksiyaga ega.

Masalan, $y=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o'suvchi va uzluksiz bo'lganligi sababli, u $[-1,1]$ kesmada aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz $x=\arcsin y$ teskari funksiyaga ega.

O'zaro teskari $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari birinchi va uchinchi chorak simmetriya o'qi $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

23-ta'rif. Agar $V_1\subset D(f)$ nuqtalar to'plamida berilgan $y=f(x)$ funksiyaning V_1 to'plamda erishadigan qiymatlar to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Demak, $y=f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda shunday K son mavjud bo'ladiki, barcha $M\in V_1$ nuqtalar uchun $f(M)\le K$ $(f(M)\ge K)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

24-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $V_1\in D(f)$ nuqtalar to'plamida ham quyidan, va ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 to'plamda chegaralangan funksiya deb ataladi.

Agar $V_1 = D(f)$ bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to'plami chegaralangan sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

5-misol. 1) Bir o'zgaruvchili $y = x^2$ funksiya R^1 aniqlanish sohasida quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki $E(f) = [0;\infty)$;

2) $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ funksiya o'z aniqlanish sohasi $D(f) = \{M(x_1, x_2) \in R_2 \setminus x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ to'plamda chegaralangandir, chunki $E(f) = [0;1]$.

25-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $V \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar V qavariq to'plamga tegishli har qanday $M_1(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ va $M_2(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0 \le \alpha \le 1$ son uchun

$$f(\alpha M_1 + (1-\alpha)M_2) \le \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2)$$
$$(f(\alpha M_1 + (1-\alpha)M_2) \ge \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2))$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda, $y = f(x)$ funksiya V to'plamda qavariq (botiq) funksiya deyiladi.

Masalan, $y = x^2$ funksiya R^1 fazoda botiq funksiyaga misol bo'lsa, $y = -x^2$ funksiya esa R^1 fazoda qavariq funksiyaga misol bo'ladi.

n o'zgaruvchili chiziqli $y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ funksiya R^n fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funksiyadir.

Qavariq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1) $f(M)$ funksiya V to'plamda botiq bo'lgandagina, $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq funksiya bo'ladi.

2) $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funksiyalar V to'plamda qavariq bo'lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy k_1 va k_2 koeffitsiyentli chiziqli $k_1f_1(M) + k_2f_2(M)$ kombinatsiyalari ham V to'plamda qavariq bo'ladi.

3) $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq bo'lib, $P = \{M \in V : f(M) \le b\}$ to'plam bo'sh bo'lmasin. U holda P to'plamning o'zi ham qavariq to'plamdir. Bu yerda b ixtiyoriy son.

Botiq funksiyalar ham yuqoridagi xossalarga o'xshash xossalarga ega.

$V \subset R^n$ to'plamda aniqlangan $y = f(u_1, u_2, ..., u_n)$ berilgan bo'lib, har bir $M(x_1\ x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$ nuqtaga $N(u_1\ u_2, ..., u_n) \in D \subset R^n$ nuqtani mos qo'yish mumkin, ya'ni

$$u_1 = \varphi_1(x_1\ x_2, ..., x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1\ x_2, ..., x_n),\ ...,\ u_n = \varphi_n(x_1\ x_2, ..., x_n)$$

bo‘lsin. U holda $V \subset R^n$ to‘plamda

$$y = f(\varphi_1(M), \varphi_2(M), ..., \varphi_n(M))$$

funksiya aniqlangan va $x_1\ x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarga nisbatan esa $D \subset R^n$ to‘plamda murakkab funksiya deyiladi.

Masalan, $y = \sqrt{16 - u^2}$, $V = \{-4 \le u \le 4\}$; $u = 2\cos 4x$, $x \in R^1$ bo‘lsin. U holda R^1 fazoda $y = \sqrt{16 - 4\cos^2 4x}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

$V \subseteq R^n$ to‘plamda aniqlangan $F(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$ tenglamaga oshkormas funksiya deyiladi. Masalan, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ funksiyalar oshkormas funksiyalardir.

E to‘plamda $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $x = \varphi(t)$ funksiyaga teskari $t = \varphi^{-1}(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. U holda E to‘plamda $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ murakkab funksiya berilgan deyiladi.

E to‘plamda berilgan $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funksiyalar $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ funksiyaning parametrik ko‘rinishi deyiladi.

6-misol. 1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funksiyalar $y = \sin(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ funksiyaning parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ funksiyalar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips tenglamasining parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

Iqtisodiy nazariya va amaliyotda funksiya keng qo‘llaniladi. Iqtisodda uchraydigan funksiyalar turlari rang barangdir, chiziqli funksiyadan tortib to maxsus funksiya deb nomlanuvchi funksiyalargacha qo‘llaniladi.

Yuqorida keltirilgan elementar funksiyalar deb nomlangan funksiyalarning deyarli barchasi iqtisodda qo‘llaniladi.

Iqtisodda tez-tez uchraydigan va o‘zining iqtisodiy nomiga ega bo‘lgan funksiyalar qatoriga quyidagilarni keltirish mumkin:

1. Foydalilik funksiyasi. Bu funksiya foydalilikni ma’lum bir faktorlar ta’siriga, bog‘liqligini aniqlaydi.

2. Ishlab chiqarish funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarish faoliyati natijasini, shu faoliyatni aniqlovchi faktorlarga bog‘liqligini aniqlaydi.

3. Mahsulot hajmi funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda mahsulot hajmining hom-ashyo zaxirasi va iste’molchiga bog‘liqligini aniqlaydi.

4. Sarf-xarajat funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda sarf-xarajatlarni mahsulot hajmi bilan bog‘liqligini aniqlaydi.

5. Talab, iste'mol va taklif funksiyalari. Bu funksiyalar mahsulotga bo'lgan talab, iste'mol va taklif hajmlarining turli faktorlarga (masalan, narx-navo, daromad va boshqa) bog'liqligini aniqlaydi.

Ma'lum iqtisodiy jarayonlar ko'p faktorlar ta'siri natijasida yuzaga kelgani uchun yuzaga keladigan funksiyalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

5.3. Funksiya limiti va uzluksizligi. Kobb-Duglas funksiyasi

Amaliyotda funksiya tushunchasi katta ahamiyatga ega bo'lganligi sababli biz funksiyani atroflicha o'rganib chiqamiz. Bizga ma'lumki, R^1 fazoda x_0 nuqtaning δ atrofi quyidagicha aniqlanadi:

$$U_\delta(x_0)=\{x:|x-x_0|<\delta\}.$$

$y=f(x)$ funksiya biror $V\in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

26-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchu shunday $\delta(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lib, $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi.

Bu limit quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

27-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar V to'plamga tegishli ixtiyoriy yaqinlashuvchi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_1,x_2,...,x_n$ ketma-ketlik uchun $y=f(x)$ funksiyaning $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)$ qiymatlaridan tashkil topgan ketma-ketlik ham A soniga yaqinlashsa, intilsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$ dagi limiti deyiladi.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan birini qo'llab $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{2x-1}=3$ tengliklarni isbotlash mumkin.

V to'plamda aniqlangan limitga ega funksiyalar o'zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit yagonadir;

2. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjudki, $U_\delta(x_0)\cap V$ to'plamda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

3. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=A\neq 0$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda funksiyaning ishorasi A sonning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi.

4. Agar biror $\delta>0$ son va barcha $x_0\in U_\delta(x_0)$ nuqtalar uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x_n)=B$ bo‘lib, $f(x)\leq g(x)$ bo‘lsa, u holda $A\leq B$ bo‘ladi.

$y=f(x)$ funksiya biror bir $V=(a,\infty)$ nurda aniqlangan bo‘lsin.

28-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $K(\varepsilon)>0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, barcha $|x|>K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $x\to-\infty$ limiti ham yuqoridagi kabi ta’riflanadi.

29-ta’rif. Agar ixtiyoriy $A>0$ son uchun shunday $\delta(A)>0$ son topilsaki $0<|x-x_0|<\delta$ bo‘lganda $|f(x)|>A$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz limitga ega deyiladi.

Bu limitlar quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=3$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=0$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}=\infty$.

30-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ sonni topish mumkin bo‘lib $x_0-\delta<x<x_0$ $\quad(x_0<x<x_0+\delta)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b=f(x_0-0)$, $(b=f(x_0+0))$ son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o‘ng) limiti deyiladi.

Bu limit quyidagicha yoziladi

$$b=f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\qquad \left(b=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

Masalan, 1. $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2}{x-2}}$ funksiyada $\lim\limits_{x\to 2-0} 4^{\frac{2}{x-2}}=0$, $\qquad \lim\limits_{x\to 2+0} 4^{\frac{2}{x-2}}=\infty$.

2. $y = f(x) = \begin{cases} (x-2)^2+1, & agar \ x \geq 2; \\ (x-2)^2-1, & agar \ x < 2 \end{cases}$ funksiyada $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -1$.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud bo'lishi uchun bu funksiya shu nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Quyidagi teoremalar limitlar haqidagi asosiy teoremalar deb atalib, funksiya limitlarining asosiy xossalarini ifodalaydi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ bo'lsin. U holda

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Yuqoridagi teoremalar funksiyalarning limitlarini hisoblashda qo'llaniladi.

Masalan,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to \pi} \sin x}{\lim\limits_{x \to \pi} \cos x} = 0;$$

$$\lim_{x \to \pi} (\sin x \cos x) = \lim_{x \to \pi} \sin x \lim_{x \to \pi} \cos x = 0;$$

$$\lim_{x \to \pi} (\sin x + \cos x) = \lim_{x \to \pi} \sin x + \lim_{x \to \pi} \cos x = -1.$$

Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan ajoyib limitlar nomini olgan limitlarni keltlrib o'tamiz:

1- ajoyib limit: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2- ajoyib limit: $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Bu ajoyib limitlarning boshqa shakllari ham mavjud bo'lib ular quyidagilardir:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$;

Uzluksizlik tushunchasi funksiyaning asosiy xarakteristikalaridan biri bo'lib, u amaliyotda muhim ahamiyatga ega.

Faraz qilamiz, $y=f(x)$ funksiya $V\subseteq R^1$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_0\in V$ bo‘lsin.

31-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun biror $\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, $|x-x_0|<\delta$ o‘rinli bo‘lganda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi shu nuqta atrofida argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelishidir.

Masalan, $y=\cos x$ funksiya har bir $x_0\in R^1$ nuqtada uzluksiz, haqiqatan ham

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=0.$$

Nuqtada uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish mumkin. Nuqtada uzluksiz bo‘lgan funksiya shu nuqtaning kichik δ atrofida chegaralangan bo‘lib o‘z ishorasini saqlaydi.

Agar funksiya V to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya V to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo‘ladi va o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Uzluksiz funksiyalar uchun ba’zi teoremalarni ketirib o‘tamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari turli ishorali $(f(a)f(b)<0)$ bo‘lsa, u holda kamlda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bunda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va $f(a)\neq f(b)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $f(a)<C<f(b)$ uchun shunday $\xi\in[a,b]$ son topiladiki bunda $f(\xi)=C$ bo‘ladi.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilishi shart.

Masalan, $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiya 0 nuqtada chapdan uzluksiz, chunki $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0=f(0).$

32-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ shartning bittasi bajarilmasa yoki u x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

33-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan va o'ngdan limitlari mavjud bo'lib, ular o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

34-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud, lekin bu limit funksiyaning x_0 nuqtada erishadigan $y_0=f(x_0)$ qiymatidan farq qilsa yoki $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda x_0 nuqta bartaraf etiladigan uzilish nuqta deb ataladi.

35-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chap yoki o'ng limitlarining hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

$|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ ayirma $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ funksiya $x=0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$.

Masalan, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud (1-ajoyib limit). Lekin, bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, birinchi tur uzilish nuqta. Bu uzilishni funksiyaga uning shu nuqtadagi limit qiymatini qo'yish orqali yo'qotish mumkin, ya'ni

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Bu funksiya barcha son o'qida uzluksizdir.

$y=f(M),\ M(x_1,...,x_n)\in V\subseteq R^n$ funksiya va M_0 urinish nuqtasi berilgan bo'lsin.

36-ta'rif. Agar A nuqtaning ixtiyoriy $U(A)$ atrofi uchun M_0 nuqtaning $U(M_0)$ atrofi mavjud bo'lib, $f(M\cap U(M_0))\subset U(A)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A nuqta $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limiti deb ataladi.

37-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ topilib, $\rho(M_0, M) < \delta$ munosabat o'rinli bo'lgan barcha $M \in V$ nuqtalar uchun $|f(M) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda b soni $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limiti deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

7-misol. 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{3x^2 + 4y}{x^3 + y + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ funksiya limiti mavjud emas. Chunki $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ ketma-ketlik $R \to \infty$ da $(0,0)$ nuqtaga intiladi. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ funksiya $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ ga teng, ya'ni $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \frac{1}{2}$.

$(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ ketma-ketlik ham $R \to \infty$ da (0.0) nuqtaga intiladi.

$f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2}$ ya'ni $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = -\frac{1}{2}$ bu esa 1-ta'rifga zid.

Ma'limki, $y = f(M)$, $M \in V \subseteq R^n$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limitini qarayotganimizda bu nuqta V to'plamga tegishli bo'lishi ham tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Agar $M_0 \in V$ bo'lib $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$ limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit qyidagicha yoziladi:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b = f(M_0)$$

va $y = f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar V to'plam M_0 nuqtaning qandaydir $U(M_0)$ atrofini ham o'z ichiga olsin. U holda $y = f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi barcha $U(M_0)$ atrofi bo'yicha limitiga har tomonlama limit deyiladi.

8-misol. $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \in R^2 \setminus O(0;0)$ funksiyaning $O(0:0)$ nuqtadagi limiti mavjudligini turli yo'nalishlar va $y = x^2$ parabola bo'yicha o'rganamiz.

1) $x = at,\ y = bt \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} f(at, bt) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{a^2 bt}{a^4 t^2 + b^2} \to 0;$

2) $y = x^2 \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(x, x^2) = \lim_{t\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{1}{2}.$

Demak, bu funksiyaning har tomonlama limiti mavjud emas.

Iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda foydalilik funksiyasi tushunchasidan keng foydalaniladi. Bu funksiya iste'molchining biror bir tovarlar vektorini boshqa tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi.

Deylik, iste'molchi n turdagi tovarlardan foydalansin. Bu tovarlar miqdorini bildiruvchi tovarlar vektorini X satr vektor sifatida ifodalaymiz. X va Y tovarlar orasida $X \succ Y$ afzallik munosabatini kiritamiz. Bu munosabat iste'molchining X tovarlar vektorini Y tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi. Misol uchun $X > Y$ bo'lsa, u holda $X \succ Y$. Bir xil afzallikka ega bo'lgan X va Y tovarlar vektorlarini farqlanmaydigan tovarlar vektorlari deb ataymiz va $X \sim Y$ kabi belgilaymiz.

Afzallik munosabati odatda foydalilik (utility) funksiyasi deb ataluvchi $U(X)$ funksiya yordamida aniqlanadi.

38-ta'rif. Ixtiyoriy X, Y tovarlar vektorlari uchun $X \succ Y \Leftrightarrow U(X) > U(Y)$ va $X \sim Y \Leftrightarrow U(X) = U(Y)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $U(X)$ funksiyani foydalilik funksiyasi deb ataymiz.

Odatda foydalilik funksiyasining qiymati emas, turli tovarlar vektoriga mos qiymatlari orasidagi "katta", "kichik" yoki "teng" kabi munosabatlar muhim hisoblanadi. Foydalilik funksiyasi har bir alohida o'zgaruvchisi bo'yicha (boshqa o'zgaruvchilar o'zgarmas bo'lganda) o'suvchi funksiya bo'ladi.

Muhim bo'lgan foydalilik funksiyalaridan biri CES-funksiya deb ataladi. Bu funksiya nomidagi CES (constant elasticity of substituion) qisqartmasi alternativ (bir-birining o'rnini bosuvchi) tovarlarning o'zgarmas elastiklikka egaligini bildiradi. Ikki o'zgaruvchili holda bu funksiya quyidagicha:

$$U(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{1/\rho} + \beta x_2^{1/\rho}\right)^{\rho}$$

Bu funksiyaning xususiy holatlarini qaraymiz.

1) $\rho = 1$ da chiziqli foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

2) $\rho \to -\infty$ da Leontev funksiyasi, deb ataluvchi foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

3) Agar $\alpha + \beta = 1$ bo'lsa, $\rho \to 0$ da Kobb-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}.$$

Bu funksiyalarni n ta o‘zgaruvchi holatiga ham umumlashtirishimiz mumkin.

9-misol. Foydalilik funksiyasi $U(x_1,x_2,x_3)=0,2\lg x_1+$ $+0.3\lg x_2+0.5\lg x_3$ formula bilan aniqlangan bo‘lsin. $X_1(10;100;100)$, $X_1(100;10;100)$ tovarlar vektorlarini afzallik munosabati yordamida tekshiring.

Yechish. Foydalilik funksiyasining qiymatlarini topamiz:

$$U(X_1)=U(10.100,100)=1,8;\quad U(X_2)=U(100.10.100)=1,7$$

Bundan, $U(X_1)>U(X_2)\Rightarrow X_1\succ X_2$.

Foydalilik funksiyasi umuman olganda yagona aniqlanmaydi.

Yuqoridagi misolda keltirilgan $U(x_1,x_2,x_3)=0,2\lg x_1+0,3\lg x_2+$ $+0.5\lg x_3$ foydalilik funksiyasi yordamida $10^{U(x_1,x_2,x_3)}=x_1^{0.2}x_2^{0.3}x_3^{0.5}$ Kobb-Duglas foydalilik funksiyasini hosll qilish mumkin.

Kobb-Duglas funksiyasidan ishlab chiqarish funksiyasi sifatida ham foydalaniladi.

$$Q(L,K)=A\cdot L^{\alpha}K^{\beta}$$

ishlab chiqarish funksiyasida Q – ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, L - mehnat resurslariga sarf xarajatni, K - ishlab chiqarishga sarflangan kapitalni, A - texnologik koeffitsiyent, α va β elastiklik koeffitsiyenlarini ifodalaydi. Misol uchun, $Q=L^{0,73}K^{0,27}$ ifodada umumiy ishiab chiqarilgan mahsulot miqdorida mehnat resurslari ulushi 73%, kapital mablag‘lar ulushi 27% ni tashkil qilishini bildiradi.

Foydalilik funksiyasi yordamida bitta sodda iqtisodiy modelni qaraymiz. Faraz qilaylik iste’molchining jami mablag‘i (byudjeti) S ga teng bo‘lsin. U bu mablag‘ni bir birllgi narxi $p_1,p_2,...,p_n$ bo‘lgan n xil tovar uchun sarflashi mumkin. Bu jarayondagi $U(x_1,x_2,...,x_n)$ foydalilik funksiyasi berilgan bo‘lsin. Eng afzal tovarlar vektorini topish masalasini qaraymiz.

Tovarlar vektori X bo‘lsin. Narxlar vektorini P kabi aniqlaymiz. Bu masalada quyidagi cheklovlar mavjud.

1) Har bir turdagi sotib olingan tovarlar miqdori nomanfiy, ya’ni $X\geq 0$.

2) Iste’molchl byudjeti cheklangan $(P,X)=p_1x_1+....p_nx_n\leq S$.

Bu cheklovlar byudjet to‘plami $B(P,S)$ ni aniqlaydi. Demak bizdan $B(P,S)$ byudjet to‘plamida $U(X)$ foydalilik funksiyasini maksimallashtirish talab qilinadi.

Ma’lumki, ikki tovar qaralgan holatda $B(P,S)$ byudjet to‘plami 1-chorakda joylashgan katetlari koordinata o‘qlarida yotuvchi to‘g‘ri burchakli uchburchakdan. uch tovar holatida uchburchakli piramidadan iborat bo'ladi.

V bobga doir savollar

1. R^n fazoda nuqta atrofi deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. Yopiq va ochiq nuqtalar to'plamlarini ta'riflang. Ularga misollar keltiring.
3. Nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi, deb nimaga aytiladi?
4. Qavariq nuqtalar to'plamining chetki nuqtasi, deb, qanday nuqtaga aytiladi?
5. Funksiya limitini tushuntiring.
6. Ajoyib limitlarni tushuntiring.
7. Bir tomonlama limitlarni tushuntiring.
8. Limitlar haqida asosiy teoremalarni keltiring.
9. Funksiyaning uzluksizligini tushuntiring.
10. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning juft-toqligini aniqlashni misollar yordamida tushuntiring.
11. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning chegaralanganligi qanday aniqlanadi?
12. Teskari funksiya tushunchasi ta'riflang.
13. Funksiyalarnimg davriyligi, monotonllgini misollar yordamida tushuntiring.
14. To'plamda qavariq (botiq) funksiyalarni tushuntiring.
15. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya xossalarini keltiring.
16. Foydalllik funksiyasi va Kobb – Duglas funksiyasini tushuntiring.
17. Bir o'zgaruvchill funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami ta'riflang. Misollar keltiring.
18. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning ayrim xossalarini aytib bering.
19. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning juft-toqligi qanday aniqlanadi?
20. To'plamda o'suvchi, kamayuvchi funksiyalarga misollar keltiring.
21. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami qanday aniqlanadi? Misollar keltiring.

V bobga doir misol va masalalar

1. Limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{12n^2-7n-8}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{12}{n+2}-\dfrac{1}{n^2-4}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+3n-1}}{\sqrt[3]{8n^3+4n-7}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}}{5}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n^2+5}\sin n$.

2. Funksiya grafigini yasang.

a) $y = 2^x$, b) $y = \sqrt{x^2}$, c) $y = 2^{|x|}$; d) $y = 2^{-|x|}$; e) $y = \sin x$.

3. Limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-3^x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{3/x^2}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$; h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

4. Bir tomonlama limitlarni toping.

a) $\lim\limits_{x\to 4\pm 0} \dfrac{|x-4|}{x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} \dfrac{x+3}{9-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}\pm 0} \dfrac{|tg(\pi-4x)|}{x-\frac{\pi}{4}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \arcsin\dfrac{x}{2}$

5. Funksiyani uzluksizlikka tekshiring va grafigini yasang.

a) $y = \dfrac{|x|}{x}$. b) $y = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 3, x = 0. \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x < 1, \\ 3x, & x \geq 1. \end{cases}$ d) $y = \dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$

e) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$. f) $y = \dfrac{\sin x}{x}$. g) $y = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$. h) $y = \cos\dfrac{1}{x}$. i) $y = \begin{cases} 1-x, & x < 2, \\ 1+x, & x \geq 2. \end{cases}$

6. F doimiy xarajatlar (ishlab chiqarilgan mahsulotning x birligi soniga bog‘liq bo‘lmagan) bir oyda 125 ming pul birligini, $V(x)$ o‘zgaruvchan xarajatlar (x ga proporsional) mahsulotning bir birligi uchun 700 pul birligini tashkil etadi. Mahsulot birligining narxi 1200 pul birligi. Daromad a) 0 ga, b) bir oyda 105ming pul birligiga teng bo‘lgandagi x mahsulot hajmini toping.

7. Takror operatsiyalarni bajarishda y(min) bajarish davomiyligi bu operatsiyalarning x soni bilan $y = \dfrac{a}{x+c}$ bog‘liqlik bilan bog‘langan. $x = 20$ da $y = 12$ va $x = 200$ da $y = 50$ ekanligi ma'lum bo‘lsa, 50 ta operatsiyada ish necha minutda bajarilishini aniqlang.

8. Korxona narxi 150 ming pul birligi bo‘lgan avtomobillarni sotib oldi. Har yilgi amortizatsiya normasi 9% ni tashkil etadi. Avtomobil narxining vaqtga bog‘liqligini chiziqli, deb faraz qilib avtomobilning 4,5 yildan keyingi narxini toping.

9. Biror turdagi tovarning y istemol darajasining oila daromadi darajasiga x ga bog‘liqligi $y = a - \dfrac{b}{x+c}$ formula bilan ifodalanadi. Oila daromadi darajasi 158 shartli pul birligida iste'mol darajasini toping. Bunda

$x=50$ da $y=0$; $x=74$ da $y=0.8$; $x=326$ da $y=2{,}3$ ekanligi ma'lum.

10. y mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar $y=100+10x$ tenglama bilan ifodalanadi. Bu yerda $x-$oylar soni. Mahsulotni sotishdan tushgan daromad $y=50+15x$ tenglama bilan ifodalanadi. Qaysi oydan boshiab ishiab chiqarish rentabelli bo'ladi.

Javoblar: **1. a)** $\frac{1}{6}$; **b)** 1, **c)** ∞, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** 0 **3. a)** $\frac{1}{3}$, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 1; e) $2-\ln 3$. **f)** $e^{-3/2}$; **g)** $\frac{3\sqrt[6]{2}}{2}$; **h)** 2; **i)** 1. **4. a)** ± 1; **b)** $\pm\infty$; **c)** ± 4; **d)** $\frac{\pi}{6}$ **5. a)** $x=0$ – birinchi tur uzilish nuqtasi. **b)** $x=0$ – bartaraf etilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi. **c)** $x=1-$ ikkinchi tur uzilish nuqtasi. **d).** $x=3-$ ikkinchi tur uzilish nuqtasi, $x=-1-$ bartaraf etilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi. **e)** $x=\pm 2$ – ikkinchi tur uzilish nuqtasi. **f)** $x=0$ – bartaraf etilishi mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi. **g)** $x=0$ – birinchi tur uzilish nuqtasi. **h)** $x=0$ – ikkinchi tur uzilish nuqtasi. **i)** $x=2-$ birinchi tur uzilish nuqtasi. **6.** a) $x=250$ (birlik), b) $x=460$ (birlik). **7.** a) $y(50)=100$ (min). **8.** 89,25 (ming pul birligi). **9.** 1,8. **10.** 10.

Tayanch so'z va iboralar: Ketma-ketlik, nuqtaning atrofi, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, ketma-ketlik limiti, fundamental ketma-ketlik, chegaralangan ketma-ketlik, funksiya, funksiyaning aniqlanish sohasi, davriy funksiya, juft funksiya, toq funksiya, bir o'zgaruvchili funksiya limiti, bir tomonlama limitlar, cheksiz kichik miqdor, cheksiz katta miqdor, ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti, ko'p o'zgaruvchili funksiya uzluksizligi, Kobb – Duglas funksiyasi.

VI bob. DIFFERENSIAL HISOB

6.1. Bir o'zgaruvchili funksiya hosllasi va differensiall. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

$y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada va uning biror bir atrofida aniqlangan bo'lsin. x_0 nuqtaga Δx orttirma berib funksiyaning $f(x_0 + \Delta x)$ qiymatini topamiz. U holda $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ifoda funksiya orttirmasi deb ataladi.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosllasi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasini $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ ko'rinishlarda ham yozish mumkin.

1-misol. $f(x) = x^2$ funksiya barcha $x \in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

2-misol. $f(x) = x^n$, $n \neq -1$ funksiya barcha $x \in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

3-misol. $f(x) = \sin x$ funksiya barcha $x \in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini hosila ta'rifiga asosan toping: 1) $f(x) = 5x - 2$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Quyidagi ifodalar

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \; f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mos ravishda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng hosilalari deb ataladi.

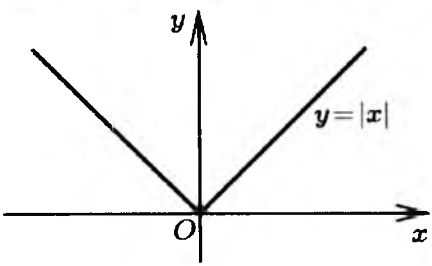
Teorema. $y = f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ nuqtada

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz hosilaga ega deyiladi.

4-misol. $f(x) = |x|$ finksiyanіng $x_0 = 0$ nuqtada bir tomonlama chekli hosilalari mavjud bo'lsa ham uning hosilasi mavjud emas. Chunki uning chap va o'ng hosilalari teng emas. Haqiqatan ham

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$



Mashqni bajaring.

1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi bir tomonlama hosilalari mavjud emasligini isbotlang.

2) $f(x)=|x+3|$ funksiyaning $x_0=-3$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

3) $y=|\ln x|$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Shuni alohida ta'kidlashimiz kerakki. yuqoridagi teoremanimg teskarisi har doim ham o'rinli bo'lmaydi. Demak, uzluksiz funksiyaning hosilasi har doim ham mavjud emas. Bunga misol sifatida 4-misolni ko'rish mumkin. Chunki, $y=|x|$ funksiya barcha $x\in(-\infty,\infty)$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa ham $x=0$ nuqtada uning hosilasi mavjud emas.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosini misollarda ko'rib chiqamiz. $Q(t)$ funksiya t vaqt ichida ishiab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalasin. t_0 momentda mehnat unumdorligi topllsin.

t_0 dan $t_0+\Delta t$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $Q(t_0)$ qiymatdan $Q(t_0+\Delta t)$ qiymatgacha o'zgaradi, ya'ni $\Delta Q=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)$. U holda mehnatning o'rtacha unumdorligi shu vaqt oralig'ida $u_{o'rt}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ bo'ladi. t_0 momentda mehnat unumdorligi deganda, $\Delta t\to 0$ da t_0 dan $t_0+\Delta t$ vaqt oralig'ida o'rtacha mehnat unumdorligming limit qiymati tushuniladi, ya'ni

$$u(t_o)=\lim_{\Delta t\to 0}Q_{o'rt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Shunday qilib mehnat unumdorllgi – bu mahsulot hajmining o'sish tezligidir.

Marjinal mahsulot. $Q(C)$ funksiya ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining C harajatlar kattaligiga bog'liqligini ifodalasin. $\frac{\Delta Q}{\Delta C}$ nisbat mahsulotning ΔC hajmdagi harajatlar kattaligiga mos bo'lgan o'rtacha kattaligidir. C_0 harajatda limit mahsulot yoki marjinal mahsulot deganda iqtisodda quyldagi limit tushuniladi:

$$MQ(C_0)=\lim_{\Delta C\to 0}Q_{o'rt}=\lim_{\Delta C\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta C}$$

5-misol. t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q=100t-\frac{1}{30}t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdotligini: 1) 5 vaqt birligiga mos; 2) 10 vaqt birligiga mos aniqlang.

Yechish. Bu masalaning yechimini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz: $u' = 100 - \frac{1}{10}t^2$, $u'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5$; $u'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90$.

Mashqni bajaring. 1) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q = 100t^2 - 12t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. $t = 10$ vaqtdagi mehnat unumdorligini aniqlang;

2) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $y(x) = 40x - 0{,}03x^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. $x = 15$ birligidagi mehnat unumdorligini aniqlang.

Shunday qilib, mahsulotning limit qiymati, limit foyda, ishlab chiqarish limiti, samaradorlik limiti, talab limiti kabi kattaliklar hosila tushunchasi bilan uzviy bog'liq.

Iqtisodiy nazariyada $y'(x)$ marjinal (limit) kattaliklarni $My(x)$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan. Bu yerda M marjinal so'zining birinchi harfini bildiradi va limit ma'nosini beradi. Yuqorida aniqlangan limit kattaliklar iqtisodiy qonuniyatlarni isbotlashda matematik apparatlardan foydalanish imkoniyatini beradi. Buni biz differensial hisobning iqtisodiy nazariyaga ba'zi tatbiqlari sifatida ko'rib chiqamiz.

Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib uni P so'mdan sotsa, u

$$R = PQ$$

miqdordagi daromadga ega bo'ladi. Firmadagi ishlab chiqarish hajmi ΔQ miqdorga o'zgarganda uning daromadi

$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ} \tag{6.2}$$

tezlik bilan o'zgaradi. Bu holda MR kattalik marjinal (limit) daromad deb ataladi.

6-misol. Firmaning daromadi

$$R = 100Q - 2Q^2$$

funksiya ko'rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q = 15$ uchun aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi birinchi tenglikka asosan topamiz.

$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ} = 100 - 4Q \quad MR = 100 - 4 \cdot 15 = 40.$$

Ishlab chiqarish hajmming o'zgarishiga bog'liq ravishda xarajat funksiyasining o'zgarish tezligi marjinal (limit) xarajat deb ataladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ}$$

O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{C(Q)}{Q}$.

7-misol. O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{24}{Q} + 15 + 3Q$, ko‘rinishda berilgan. Marjinal xarajat funksiyasini toping.

Yechish.

$$C(Q) = AC \cdot Q = \left(\frac{24}{Q} + 15 + 3Q\right)Q = 24 + 15Q + 3Q^2.$$

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ} = 15 + 6Q.$$

Funksiya elastikligi. Talab funksiyasini tahlil qilish jarayonida Al’fred Marshall tomonidan funksiya elastiklikligi tushunchasi kiritilgan. $y = f(x)$ funksiya argumentiga Δx orttirma berilgan bo‘lsin. U holda

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right)$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattlik $y = f(x)$ funksiyaning elastikligi deb ataladi.

Elastiklik y, x o‘zgaruvchilarning nisbiy o‘zgarishi orasidagi proporsionallik koeffitsiyentidir. Masalan, x ning qiymati bir foizga o‘zgarsa, u holda y ning qiymati taxminan $E_x(y)$ foizga o‘zgaradi.

Elastikligi o‘zgarmas bo‘lgan ishlab chiqarish funksiyalarining nazariy va amaliy ahamiyati alohida o‘ringa ega. Bu kabi funksiyalarga **CES (Constant Elasticity Substitution)** funksiyasi misol bo‘la oladi:

$$y = C_0\left[CL^{-p} + (1 - C)K^{p}\right]^{-1/p}$$

Bu yerda elastiklik $\frac{1}{1-p} \neq 1$.

Mahsulotlarga talabning elastikligini to‘g‘ri aniqlash davlatga yangi soliqlar va aksizlarni kiritishda katta yordam beradi. Masalan, x – yuvilir mahsulotlarga qo‘yilgan aksiz, y – bu mahsulotlarga bo‘lgan talab bo‘lsin. Faraz qilamiz davlat bu mahsulotga qo‘yilgan aksizni 10% ga oshirishni mo‘ljallayotgan bo‘lsin. Agar talab elastikligi $E_x(y) = -0.2$ bo‘lsa, u holda mahsulotga bo‘lgan talab $0,2 \cdot 10\% = 2\%$ kamayishini kutishimiz kerak bo‘ladi. Bu mahsulotni sotishdan davlat oladigan daromad 10% ga emas, balki 8% ga ortadi.

Elastiklikni o‘rganish natijasida aholi daromadining ortishi bozordagi vaziyaitning o‘zgarishini baholash mumkin. Masalan, ma'lumki go‘sht, yog‘ va tuxumlar uchun talab elastikligi aholi daromadiga nisbatan musbat, un uchun esa bu elastikllk manfiy. Demak, aholi daromadi o‘sishi bilan go‘sht, yog‘ va tuxumlarga bo‘lgan talab ortadi, unga bo‘lgan talab esa kamayadi. Aholi daromadi kamayishi bilan go‘sht, yog‘ va tuxumlarga bo‘lgan talab kamayadi, unga bo‘lgan talab esa ortadi.

8-misol. Talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo‘lsin:

$$y = 10 - x, \quad z = 3x - 6$$

a) talab va taklif uchun muvozanat bahoni toping;

б) muvozanat baho uchun talab va taklif funksiyalarining elastikligini toping.

Yechish. a) $y(x) = z(x) \Rightarrow 10 - x = 3x - 6 \Rightarrow x = 4$;

б) $E_x(y)$ – talab va $E_x(z)$ – taklif funksiyalarining elastiklarini quyidagicha topamiz:

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} : \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{x}{10 - x}\right) = -\frac{x}{10 - x}.$$

$$z = 3x - 6;$$

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = 3x + 3\Delta x - 6 - (3x - 6) = 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{z} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3\Delta x}{3x - 6} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3x}{3x - 6},$$

$$E_x(z) = \frac{x}{x - 2}.$$

$$E_x(y) = -\frac{4}{10 - 4} = -\frac{2}{3}, \quad E_x(z) = \frac{4}{4 - 2} = 2.$$

Demak, muvozanat bahosinmg 1% ortishi talabning (2/3) % ga kamayishiga taklifning esa 2% ga ortishiga olib keladi.

Mashqni bajaring. Talab funksiyasining elastikligini topmg:

1) $p + 5x = 100, \ p = 50$;

2) $3p + 4x = 120, \ p = 2; \ p = 20$;

3) $p^2 + p + 4x = 40, \ p = 2; \ p = 4$.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning qandaydir δ atrofida aniqlangan bo'lib, uning Δy orttirmasini

$$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqta differensiallanuvchi, $A\Delta x$ esa uning differensiali, deb ataladi. Bu yerda A Δx ga bog'liq emas, $\lim\limits_{\Delta\varepsilon \to 0} \varepsilon(\Delta x) \to 0$.

Funksiya differensiali quyidagicha yoziladi: $dy = Adx$. $A = f'(x)$.

9-misol. $y = x^2$ funksiya differensiallanuvchi. Haqiqatan ham

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot(\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x\cdot(\Delta x) + o(\Delta x).$$

> **Teorema.** $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun u bu nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.
>
> Agar funksiya $(a.b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $(a.b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'ladi.

$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$ formulada $\Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$ qo'shiluvchi cheksiz kichik miqdor bo'lgan uchun bu formulani quyidagicha yozish mumkin:

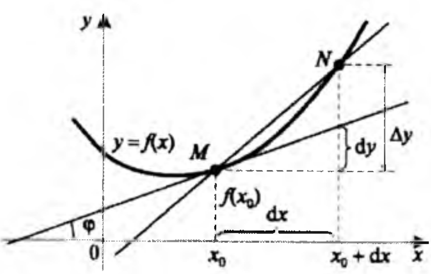
$$\Delta y \approx f'(x_0)A\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Bu formuladan taqribiy hisoblarda foydalanish mumkin.

10-misol. $y = \sqrt[4]{x}$ funksiyaning $x = 90$ nuqtadagi qiymatini toping.

Yechish. Bu yerda $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$, deb faraz qilamiz. U holda $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4\cdot 3^3}$, $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \dfrac{1}{12}$, $\sqrt[4]{90} \approx 3{,}083$.

$M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinma, deb MN kesuvchining N nuqtasi M nuqtaga funksiya grafigi bo'ylab ixtiyoriy ravishda yaqinlashishini qabul qilamiz. Bunda $dx \to 0$.



$f(x_0)$ qiymat $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinmaning $tg\varphi$ burchak koeffitsiyentini bildiradi.

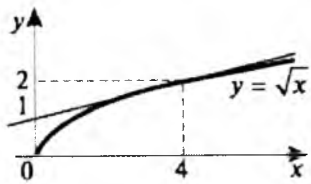
$M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

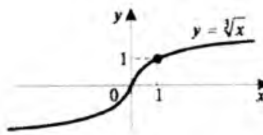
11-misol. $M_0(4;2)$ nuqtada $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. $f(x_0) = \sqrt{4} = 2.$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$ $\quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$

Demak urinma tenglamasi: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4).$



12-misol. $O(0;0)$ nuqtada $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasi $f'(0) = +\infty$ bo'lgani uchun u vertikal to'g'ri chiziq bo'ladi.



$f(x)$, $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $k = const$ bo'lsin. U holda quyidagi qoidalar o'rinli:

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$, $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$;

2) $[kf(x)]' = kf'(x)$, $d(kf(x)) = kdf(x)$;

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
$d(f(x)g(x)) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x))$;

4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$;

Funksiyaning hosilasi va differensialini hisoblashda zarur bo'ladigan elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini keltiramiz:

1) $(C)' = 0, \quad C = const.$

2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in R^1, \ x > 0. \left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \ n \in N, \ x \in R^1$

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in R^1, \left(e^x\right)' = e^x, \ x \in R^1$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

8) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \ n \in Z.$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$

11) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $(sh\, x)' = chx, \quad x \in R^1.$

14) $(ch\, x)' = shx, \quad x \in R^1.$

15) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

13-misol. $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Bu yerda hosilalar jadvali va hosila olish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = \frac{\left(e^x + 4x^3\right)' \ln x - \left(e^x + 4x^3\right)\left(\ln x\right)'}{\ln^2 x} = \frac{\left(e^x + 12x^2\right)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}$$

14-misol. $y = a^x arctgx$ funksiya hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y'=\left(a^x\right)' arctg\,x+a^x\left(arctg\,x\right)'=a^x\cdot\ln a\cdot arctg\,x+\frac{a^x}{1+x^2}.$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishib chiqamiz. $u=g(x)$, $y=f(u)$ bo'lib, $u=g(x)$ funksiya x_0 nuqtada $y=f(u)$ funksiya esa $u_0=g(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $y=F(x)=f(g(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\quad \Phi(x_0)=f'(u_0)g'(x_0).$$

U holda $dy=\Phi'(x_0)dx=f'(u_0)du$. Bu yerda $du=g'(x_0)dx$. Bu birinchi differensialning invariantligi deyiladi, ya'ni murakkab funksiyada ham differensial o'z formasini saqlab qoladi.

15-misol. $y=3^{\cos^5 2x}$ funksiyanimg hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\left(\cos^5 2x\right)'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\cdot 5\cos^4 2x\left(\cos 2x\right)'=$$

$$=5\ln 3\cdot 3^{\cos^5 2x}\cos^4 2x(-\sin 2x)(2x)'=-10\ln 3\cdot\sin 2x\cos^4 2x\cdot 3^{\cos^5 2x}.$$

16-misol. $y=tg^4 6x$ funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y'=4tg^3 6x\frac{6}{\cos^2 6x}=\frac{24\sin^3 6x}{\cos^5 6x}.$$

Agar $y=f(x)$ $(a<x<b)$ funksiyaga teskari funksiya uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsa, u holda x'_y hosila ham mavjud bo'ladi:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Masalan, $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ y>0)$ funksiyaga teskari funksiya $x=\log_a y$. Uning hosilasi:

$$x'_y=\left(\log_a y\right)'=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{\left(a^x\right)'_x}=\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{1}{y\ln a}.$$

Faraz qilamiz $y=f(x)$ funksiya parametrik $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi'(t)\neq 0$ bo'lsa, u holda y'_x mavjud bo'lib quyidagicha aniqlanadi:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Masalan, $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,$ funksiya uchun y'_x hosila quyidagicha hisoblanadi:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}tg\,t,\ t \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

Oshkormas $F(x,y) = 0$ funksiyada y'_x hosilani topish uchun $(F(x,y))'_x = 0 \Rightarrow F_x(x,y) + F_y(x,y)y'_x = 0$ tenglamadan y'_x hosila topib olinadi.

Masalan, $arctgy - y + x = 0$ funksiyadan y'_x hosilani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\frac{f'(x)}{1+y^2} - f'(x) + 1 = 0 \Rightarrow y' = f'(x) = 1 + y^{-2}.$$

$y = f(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilasi quyidagicha amalga oshiriladi:

$$y'' = (y')' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ y''' = (y'')' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \ldots.$$

Bu yerda ham yuqoridagi qoidalar o'rinli. Yuqori tartibli differensiallar quyidagicha aniqlanadi:

$d^2y = d(dy)$ - ikkinchi tartibli differensial;

$d^3y = d(d^2y)$ - uchinchi tartibli differensial;

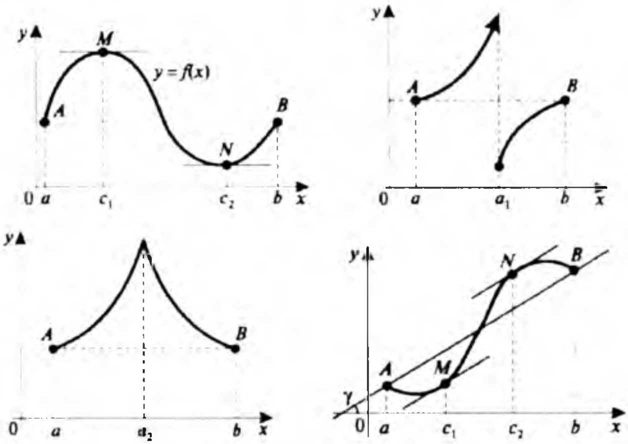
....

$d^ny = d(d^{n-1}y)$ - $n-$tartibli differensial.

Biz quyida amaliy masalarni yechishda zarur bo'ladigan differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi ba'zi teoremalarni keltiramiz.

Teorema (Roll). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo'lib, $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday $c \in (a,b)$ nuqta toplladiki bunda $f'(c) = 0$.

Bu teoremaning geometrik ma'nosini va teoremadagi shartlar juda ham muhim ekanligini quyidagi rasmlarda ko'rish mumkin.



Teorema (Lagranj). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Teorema (Koshi). Agar $\varphi(t),\psi(t)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo‘lib, $\varphi'(t)\neq 0$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bunda

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}$$

Teylor formulasi. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtining qandaydir atrofida $(n+1)$ – tartibli hosilagacha bo‘lgan barcha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda shu atrofdagi barcha x nuqtalar uchun quyldagi Teylor formulasi o‘rinli bo‘ladi:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Bu yerda $R_n(x)=\dfrac{f^{(n-1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $(0<\theta<1)$ - Lagranj qoldiq hadi, deb ataladi.

Agar bu formulada $a=0$, deb olsak, u holda Makleron formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ (0<\theta<1).$$

Teylor formulasi yordamida funksiyalarni ko‘phad ko‘rinisbda yozib olish mumkin. Bunga ba’zi misollarni keltiramiz:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

Differensiallanuvchi ratsional kasr ifodalardagi $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqliklarning aniq qiymatlarini Lopital qoidasidan: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ foydalanib hisoblash mumkin. Bu yerda $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Bu qoidani misollarda ko‘rib chiqamiz:

17-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+7x-18}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+7}=\frac{4}{11}.$

Bu jarayon noaniqlikdan qutimaguncha chekli marta davom ettirilishi mumkin. Agar noaniqlik $0\cdot\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0, \infty-\infty$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda ma’lum bir elementar almashtirishiar bajarib uni $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqlikka keltiriladi so‘ngra Lopital qoidasi qo‘llaniladi.

18-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ni toping.

Yechish. $[\infty^0]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $y=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ deb belgilab, tenglikning ikkala qismini logarifmlaymiz $\ln y=\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Endi limitga o’tamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Demak, $\ln y=0$, $y=1$.

19-misol. $\lim_{x\to 4}(x-4)tg\frac{\pi x}{8}$ ni toping.

Yechish. $\lim_{x\to 4}(x-4)tg\frac{\pi x}{8}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{ctg\frac{\pi x}{8}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{1}{-\frac{\pi}{8}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{8}}}=-\frac{8}{\pi}.$

6.2. Bir o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

Ko'p jarayonlar funksiya yordamida ifodalanishi mumkinligini ko'rdik. Bu jarayonlarning dinamikasini bilish funksiyaning monotonligi bilan bog'liq.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda bizga ma'lumki:

agar $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya;

agar $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'smaydigan funksiya;

agar $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'suvchi funksiya;

agar $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamayuvchi funksiya deb ataladi.

Funksiyaning bu xossalari hosila yordamida quyidagicha ifodalanadi:

Agar $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ funksiya uchun $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya bo'ladi.

Agar $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ funksiya uchun $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'suvchi (kamayuvchi) funksiya bo'ladi.

20-misol. $y=2x^2-\ln x$ funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini toping.

Yechish. Berilgan funksiya $x>0$ da aniqlangan. Uning hosilasini topamiz:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x}.$$

$y'=0,\ 4x^2-1=0$, bundan $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}$.

$x_2=-\frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmaydi. $x_1=\frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasini $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ va $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ intervallarga bo'ladi. Bu intervallarda y' hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

a) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ da $y'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}<0$, b) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ da $y'(1)=3>0$. Bu esa birinchi intervalda funksiya kamayuvchi, ikkinchi intervalda o'suvchi ekanini bildiradi.

Mashqni bajaring. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini toping: 1) $y=x^3+3x^2-9x-2$; 2) $y=\frac{1}{1+x^2}$

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar, deb ataladi. O'shish va kamayish oraliqlari esa monotonlik oraliqlari deb ataladi.

Ekstremum tushunchasini kiritishda zarur bo'lgan belgilashlarni kirirtamiz. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha x nuqtalar to'plami x_0 nuqtaning δ atrofi deb ataladi.

2-ta'rif. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha x nuqtalar uchun $f(x)\geq f(x_0)$ $(f(x)\leq f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum (maksimum) nuqtasi, $f(x_0)$ esa bu funksiyaning minimum (maksimumi) qiymati deb ataladi.

Agar yuqoridagi tengsizliklar qat'iy bo'lsa, u holda qat'iy minimum (maksimum) tushunchalarini ishlatamiz.

3-ta'rif. Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalari uning ekstremum nuqtalari deb ataladi.

x_0 – ekstremum nuqta bo'lsin. U holda

$$x_0 - \max \Rightarrow \Delta f(x_0)\leq 0,\quad x_0 - \min \Rightarrow \Delta f(x_0)\geq 0$$

x_0 – ekstremum nuqta bo'lsin. U holda bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lmaydi yoki $f'(x_0)=0$ bo'ladi. Bu shart x_0 – ekstremum nuqta bo'lishi uchun zaruriy shart, deb ataladi.

Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0)=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta deb ataladi. Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lmasa, u holda x_0 – kritik nuqta deb ataladi.

21-misol. $x_0=0$ nuqta $y=x^2$ funksiya uchun statsionar, $y=|x|$ funksiya uchun kritik nuqta deb ataladi.

Umuman olganda statsionar nuqtalar ham kritik nuqtalar deb ataladi.

Mashqni bajaring. $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-8)$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.

Yuqorida biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun zaruriy shartni ko'rdik. Endi biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun yetarlilik shartini ko'rib chiqamiz.

I. x_0 nuqtaning ixtiyoriy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ – δ atrofida $f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud va uzluksiz bo'lsin. U holda:

a) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)>0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)>0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ yoki $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta.

II. x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. U holda:

a) agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $f''(x_0)=0$ bo'lsa, u holda ekstremum masalasi ochiq qoladi.

III. $f'(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lsin. U holda:

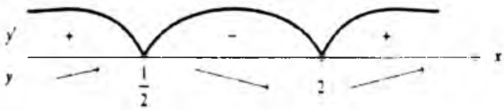
a) n – juft bo'lsin. Agar $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum; agar $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta bo'ladi;

b) n – toq bo'lsa,u holda x_0 – ekstremum nuqta bo'lmaydi.

22-misol. Funksiyaning ekstremumlari va monotonlik intervallarini toping.

$$y=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x$$

Yechish. $y' = 2x^2 - 5x + 2$ ko‘rinib turibdiki, x ning barcha qiymatlarida hosila mavjud. Hosilani nolga tenglab, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tenglamani olamiz, bu yerdan $x_1 = \frac{1}{2}$ va $x_2 = 2$ kabi kritik nuqtalarni topamiz. Hosila ishoralari quyidagi chizmada ko‘rsatilgan:



$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ va $(2;+\infty)$ orliqlarda hosila $f'(x) > 0$ va funksiya o‘suvchi, $\left(\frac{1}{2};2\right)$ oraliqda hosila $f'(x) < 0$ ya’ni funksiya kamayuvchi. $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$, $x = 2$ — minimum nuqta va $f_{min}(2) = -\frac{2}{3}$. Chunki hosila bu nuqtalardan o‘tishda o‘z ishorasini ($x = \frac{1}{2}$ da) «+» dan «-» ga va ($x = 2$ da) «-» dan «+» ga o‘zgartiradi.

Izoh: $x = \frac{1}{2}$ va $x = 2$ kritik nuqtalarda ekstremum mavjudligini ikkinchi tartibli hosila yordamida aniqlasa: $f''(x) = 4x + 5$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ va $f''(2) = 3 > 0$ bo‘lganligi uchun $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $x = 2$ — minimum nuqta.

23-misol. Q sotilgan mahsulot miqdoriga bog’liq bo’lgan daromad funksiyasi $R(Q) = \frac{Q^3}{3} + 2000000Q$ formula bilan, mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan harajatlar funksiyasi esa $C(Q) = 1500Q^2$ formula bilan ifodalanadi. Ishlab chiqarishning optimal darajasini va unda erishiladigan foydani aniqlang.

Yechish. Foyda $F(Q) = R(Q) - C(Q)$ formula bilan aniqlanadi. Bu erdan $F(Q) = \frac{Q^3}{3} - 1500Q^2 + 2000000Q$. Foyda hosilasini $F'(Q) = Q^2 - 3000Q + 2000000$ nolga tenglashtirib, $Q^2 - 3000Q + 2000000 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning ildizlari $Q_1 = 1000$ va $Q_2 = 2000$. Tekshirish shuni ko’rsatadiki $Q = 1000$ da maksimal foydaga erishiladi.

$$F_{max} = F(1000) \approx 833333333 \text{ pul birllgi.}$$

24-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan daromad $R(Q)=16Q-Q^2$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan harajatlar esa $C(Q)=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

Yechish. Foyda funksiyasi: $F(Q)=R(Q)-C(Q)=16Q-2Q^2-1$. Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $F'=16-4Q=0$. Demak, $Q=4$ nuqta kritik nutadir. $Q=4$ maksimal foyda keltiruvchi ishlab chiqarish miqdori, $F_{max}=31$ esa maksimal foyda.

Foyda maksimal bo‘lishi uchun, marjinal daromad va marjinal harajatlarning teng bo‘lishi zarur.

25-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan daromad $R(Q)=16Q-Q^2$ funksiya bilan ishiab chiqarishga ketgan harajatlar esa $C(Q)=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Korxona maksimal foyda olishi uchun har mahsulot birligiga qo‘yllgan optimal soliq miqdorini toping.

Yechish. t har bir mahsulotga qo‘yilgan soliq miqdori bo’lsin. U holda foyda funksiyasi: $F(Q)=R(Q)-C(Q)-tQ=16Q-2Q^2-1-tQ$. Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $F'=16-4Q-t=0 \Rightarrow Q=\frac{16-t}{4}$.

Demak. $Q=4-\frac{t}{4}$ nuqta kritik nutadir. U holda:

$$T=tQ=t\left(4-\frac{t}{4}\right)=4t-\frac{t^2}{4}.$$

Bu funksiyaning maksimal qiymatini topamiz:

$$T'=4-\frac{t}{2}=0 \Rightarrow t=8 \Rightarrow Q=2.$$

Demak, har bir mahsulotga qo‘yilgan soliq $t=8$ bo‘lsa, u holda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining optimal qiymati $Q=2$ bo‘ladi. Korxonaning maksimal foydasi esa $F_{max}=F(2)=7$ bo‘ladi.

Shunday qilib, soliq miqdorining kamayishi foydaning ortishiga olib kelar ekan.

Mashqni bajaring. 1) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$ funksiyaning ekstremumini toping.

2) Sotilgan mahsulotdan olingan foyda $y=\frac{1}{50}x^2+15x+800$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishdagi to‘la xarajat esa $p=50-\frac{1}{10}x$

funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

$y = f(x)$ funksiya biror – bir $V \in R^1$ to'plamda aniqlangan va $x_0 \in V$ bo'lsin.

Agar:

• har bir $x_0 \in V$ uchun $f(x) \le f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0 \in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng katta $f_{max} = f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi;

• har bir $x_0 \in V$ uchun $f(x) \ge f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0 \in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng kichik $f_{max} = f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $V = [a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, kompakt to'plamda uzluksiz funksiya xossalaridan biriga ko'ra u ushbu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qlladi. Funksiya o'zining ekstremum qiymatlariga nafaqat kesma ichiga tegishli nuqtalarda, shu bilan birga unmg chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funksiyaning kesmaga tegishli kritik nuqtalari aniqlanadi;

b) funksiyaning topilgan kritik nuqtalaridagi va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi;

c) ushbu qiymatlar o'zaro solishtirilib uning eng katta va eng kichigi tanlanadi.

26-misol. $y = x^3 - 3x$ funksiyaning $[-1,5;2,5]$kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

Yechish. a) funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. $y' = f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, bu yerdan $x_1 = -1$, $x_2 = 1$nuqtalarda $f'(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi va ular berilgan kesmaga tegishlldir.

b) funksiyaning kritik va berilgan kesmaning chetki nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2;$$

$$f(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1) = -2;$$

$$f(-1,5) = (-1,5)^3 - 3 \cdot (-1,5) = 1,125;$$

$$f(2,5) = (2,5)^3 - 3 \cdot (2,5) = 8,125.$$

c) demak, funksiyaning berilgan kesmadagi eng katta qiymati $x = 2,5$ nuqtada $f(2,5) = 8,125$ ga va eng kichik qiymati $x = 1$ nuqtada $f(1) = -2$ ga teng.

Agar qaralayotgan kesmada funksiya uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning uzilish nuqtalarida ham tekshiriladi.

Funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsa, u holda funksiyani a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan limitlarini tekshirish talab qilinadi.

Mashqni bajaring. Berilgan oraliqda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini toping: 1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2;2]$;

2) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad x \in [-1;1]$;

Ma'lumki, biz qavariq to'plamda berilgan qavariq yoki botiq funksiyalar bilan tanishmiz. Ko'p hollarda, qavariq iborasi qavariqligi bilan quyiga, botiq iborasi esa qavariqligi bilan yuqoriga qaragan, deb yuritiladi. Bu tushunchalar quyidagicha aniqlanadi.

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun biror (a,b) intervalda

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

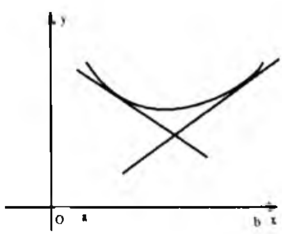
tengsizlik bajarilsa, unda qavariqlik yuqoriga qaragan;

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

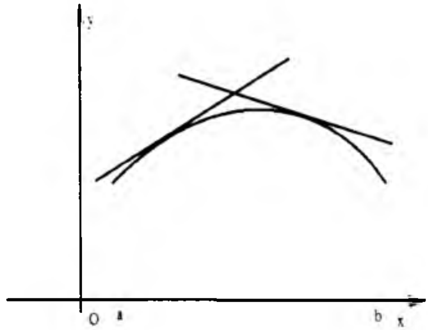
tengsizlik bajarilsa, qavariqlik pastga qaragan bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, kesmada qavariq yoki botiq funksiyani o'zgacha ta'riflash va shu bilan birga, (a,b) intervalda ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, $[a,b]$ kesmada qavariqlik shartini aniqlash imkoni tug'iladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o'z urinmalaridan yuqorida yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan quyiga yo'nalgan deyiladi.



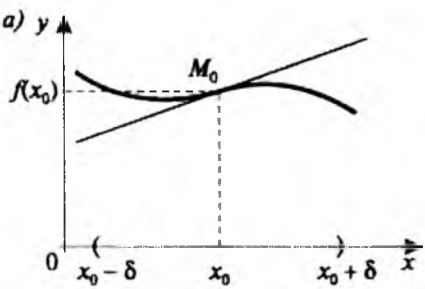
5-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o'z urinmalaridan pastda yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan yuqoriga yo'nalgan deyiladi.



Endi biz funksiya qavariqligini tekshirish uchun zarur bo'lgan teorema va qoidalarni keltiramiz.

Teorema. $y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, $[a,b]$ kesmaning chetki nuqtalarida uzluksiz bo'lsin. U holda (a,b) intervalda $f''(x) \geq 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi qavariqligi quyiga, $f''(x) \leq 0$ bo'lganda esa uning bu kesmadigi qavariqligi yuqoriga yo'nalgan bo'ladi.

6-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining x_0 absissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma mavjud bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallarda funksiya grafigining qavariqligi turli yo'nalishda bo'lsa, u holda $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi deyiladi.



Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror bir atrofida aniqlangan bo'lib, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda yoki $f''(x_0)=0$ yoki $f(x_0)$ – mavjud emas.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma, xususan vertikal urinma bo'lib, x_0 nuqtaning biror bir δ atrofida ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsin va $f''(x_0)=0$ yoki $f(x_0)$ – mavjud bo'lmasin. Agar $(x_0-\delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

27-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ funksiya grafigining qavariqlik oraliqlarini va burilish nuqtasini toping.

Yechish. Funksiya haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan va ikki marta differensiallanuvchi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz

$$f''(x)=\frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

$f''(x)<0$ da funksiya yuqoriga qavariq $x^2-\frac{1}{3}<0$ yoki $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$. $f''(x)>0$ da funksiya quyiga qavariq $x^2-\frac{1}{3}>0$, $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Shunday qilib funksiya grafigi $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ da yuqoriga qavariq, $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ da quyiga qavariq bo'ladi. Demak $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ va $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqtalar funksiyaning burilish nuqtalari bo'ladi.

Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning qavariqligi va grafigining burilish nuqtalarini aniqlang: 1) $y=\ln(x^2+1)$; 2) $y=xe^{-x}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^5}$.

6.3. Bir o'zgaruvchili funksiyani to'la tekshirish

Yuqorida o'rganilgan tushunchalar: ekstremumlar, qavariqlik, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari, funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari o'rganilayotgan funksiyaning sxematik grafigini tasvirlashga yordam beradi. Bu sxematik grafikni yanada aniqlashtirish uchun funksiya asimptotasi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

Funksiya asimptotasi. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi qandaydir l to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqilashib borib $f(x) \cap l = \varnothing$ bo'lsa, u holda bu l to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiyanng asimptotasi deb ataladi.

Masalan. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ to'g'ri chiziqlar $y = tgx$ funksiyaning asimptotalari hisoblanadi. $x = \pi + \pi k,\ k \in Z$ to'g'ri chiziqlar esa $y = ctgx$ funksiyaning asimptotalari hisoblanadi.

Asimptotalar 3 tipda bo'ladi: vertikal, og'ma va gorizontal asimptotalar.

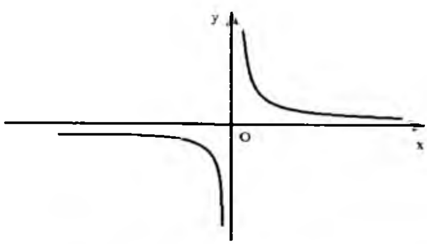
Agar $y = f(x)$ uchun

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \pm\infty$$

munosabatiardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiyaning vertikal asimptotasi deb ataladi. Yuqorida keltirilgan misollar vertikal asimptotaga misol bo'la oladi.

Biz quyida funksiya va uning asimptotasi koordinatalar sistemasida o'zaro qanday joylashishini ko'rib chiqamiz.

28-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning vertikal asimptotasi $x = 0$ to'g'ri chiziqdir. Haqiqatan ham, $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty,\ \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$. Bu misolda asimptota va funksiya grafiklari koordinatalar sistemasida quyidagicha joylashadi.



29-misol. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $x=0$ va $x=1$ - uzilish nuqtalari,

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=0.$$

$x=0$, $x=1$ ikkinchi tur uzilish nuqtalari, $x=0$, $x=1$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptotalar.

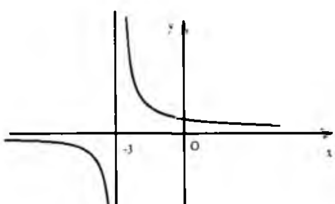
Agar $y=f(x)$ uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(kx+l)\right)=0$$

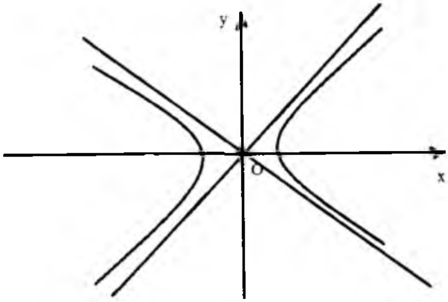
munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $kx+l$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi deb ataladi. Agar bu yerda $k=0$ bo'lsa, u holda $y=l$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning gorizontal asimptotasi deb ataladi. k va l sonlar quyidagicha topiladi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k_0,\quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(k_0x+l)\right)=0.$$

Yuqoridagi misollarda $y=\dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq esa gorizontal asimptota bo'ladi. $y=\dfrac{1}{x+3}$ funksiya uchun $x=-3$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq esa gorizontal asimptota bo'ladi.



30-misol. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning o'g'ma asimptotasi mavjud bo'lib u quyidgi ko'rinishga ega.



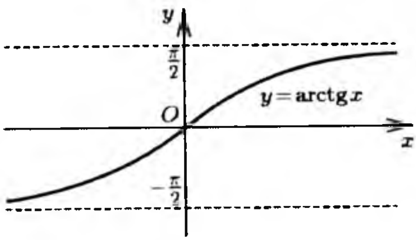
31-misol. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-2}$ funksiya grafigining og'ma asimptotasini toping.

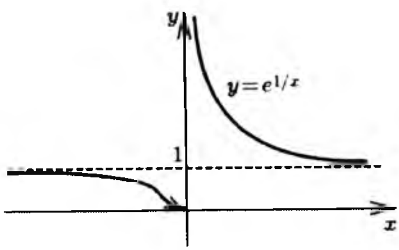
Yechish. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-1}{x(x^2-2)}=1,$

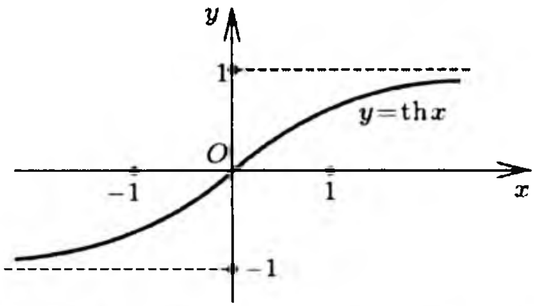
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$$

$y=x+3$ – og'ma asimptota.

Mashqni bajaring. 1) Quyidagi rasmlarda tasvirlangan funksiyalarning vertikal, gorizontal asimptotalarini ko'rsating:







2) Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping va tasvirlang:

a) $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$; b) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; c) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$; d) $y=\dfrac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}}$.

Funksiyani to‘la tekshirish. Funksiyaning sxematik grafigini chlzishning umumiy sxemasi quyidagidan iborat:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, so‘ngra uning uzilish nuqtalari;

2) funksiyaning juft – toqligi, davriyligi. Funksiyaning asimptotalari topiladi;

3) funksiya nollari topiladi;

4) funksiyaning monotonlik intervallari va ekstremumlari topiladi;

5) funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishlari va burilish nuqtalari aniqlanadi;

6) funksiya grafigining eskizi chiziladi.

32-misol. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ funksiyaning grafigini yasaymiz.

Yechish. Funksiya $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$ oraliqda aniqlangan. Funksiya $x>0$ oraliqda musbat va $x<0$ oraliqda esa manfiy qiymatlarni qabul qiladi $y(0)=0$, $x=-1$ uzilish nuqtasi.

Funksiyaning uzilish nuqtalardagi va cheksizlikdagi xususiyatlarini aniqlaymiz:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty,$$

Funksiya asimptotalarini aniqlaymiz $x=-1$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota ekanligi yuqorida ma’lum bo‘ldi. Endi uning og‘ma asimptotasini aniqlaymiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=1$$

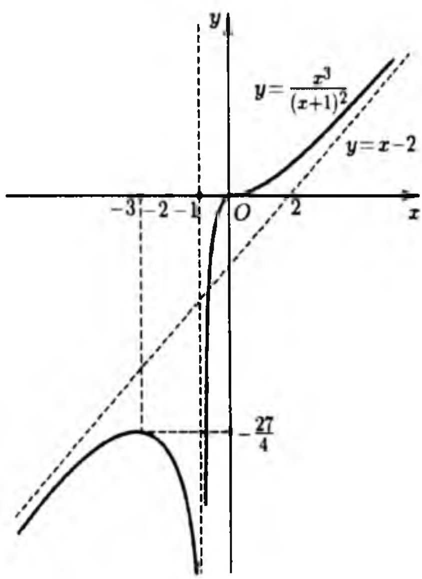
$$l=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

Demak $y=x-2$ to‘g‘ri chiziq funksiyaning og‘ma asimptotasi ekan.

Funksiyaning o‘sish, kamayish, qavariqlik oraliqlarini va burilish nuqtalarini aniqlash uchun uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad y''=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

$y'=0\Rightarrow x=0,\ x=3$ nuqtalar statsionar nuqtalardir. $x=0$ nuqta ekstremum nuqta emas, chunki, $x\in(-1;0)\Rightarrow f'(x)>0$ $x\in(0;\infty)\Rightarrow f'(x)>0$. $x=-3$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi, chunki $y''(-3)<0$, $y(-3)=-\dfrac{27}{4}$.



Funksiya $(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$ oraliqda o‘suvchi $(-3;-1)$ oraliqda esa kamayuvchi ekanligini aniqladik.

Endi funksiyaning qavariqlik oraliqlarini aniqlaymiz $x<0$ $(x\neq -1)\Rightarrow y''<0$, $x>0\Rightarrow y''>0$. Demak, funksiya grafigi $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ oraliqda qavariqlik yuqoriga qaragan, $(0;\infty)$ oraliqda esa qavariqlik pastga qaragan. $y''=0\Rightarrow x=0$ demak, $x=0$ burilish nuqtasi. U holda funksiya grafigi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

33-misol. $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ funksiya grafigini chizamiz. Funksiya R^1 da aniqlangan. Shu bilan bur qatorda $x<-1\Rightarrow y<0$, $x>-1$ $(x\neq 0)\Rightarrow y>0$, $y(-1)=y(0)=0$. $y=x+\frac{1}{3}$ to'g'ri chiziq uning og'ma asimptotasidir. Hosilalarini hisoblaymiz:

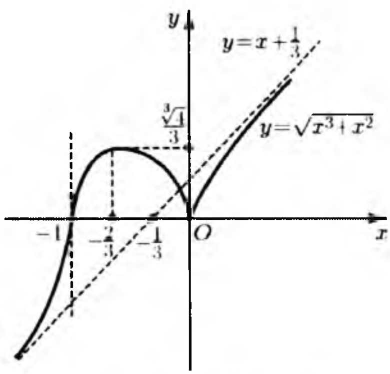
$$y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(3x+2),\quad y''=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}.$$

Bu yerda

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}y'(x)=+\infty,\quad f'_+(0)=+\infty,\quad f'_-(0)=-\infty.$$

$x=-\frac{2}{3}$ nuqta funksiyaning maksimumi bo'lib, $y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $x=0$ funksiyaning munimumi bo'lib, $y(0)=0$. $x<-1\Rightarrow y''>0$ bo'lgani uchun uning qavariqligi bu oraliqda pastga qaragan; $x>-1$ $(x\neq 0)\Rightarrow y''<0$ bo'lgani uchun uning qavariqligi bu oraliqda yuqoriga qaragan.

U holda funksiya grafigi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.



Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning grafigini chizing:

1) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}$; 3) $f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{2}-tgx+\sin x$; 5) $f(x)=\frac{1}{4}(x^3+3x^2-9x-3)$;

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{4(2-x)^2}$; 7) $f(x)=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

6.4. Xususiy hosila. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_\Delta(x_1^0,...x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

7-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}=\dfrac{f(M_\Delta)-f(M_0)}{\Delta x_i}$ limit chekli bo'lsa, u holda unga $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi x_i o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi.

Xususiy hosila quyidagicha belgilanadi: $\dfrac{\partial y(M_0)}{\partial x_i}=y_{x_i}(M_0)$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=f_{x_i}(M_0)$.

Shunday qilib,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i}. \tag{6.3}$$

Xususiy hosilaning ta'rifidan, $y=f(M)$ funksiyadan x_i bo'yicha xususiy hosilani topishda boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas, deb qarab, funksiyadan x_i bo'yicha oddiy hosilasini topish yetarli.

Agar funksiya ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x, f_y ko'rinishda, agar funksiya uch o'zgaruvchili $u=f(x,y,z)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x, f_y, f_z ko'rinishda belgilanadi.

34-misol. $f(x,y,z)=2x^5z^2-3xy^4+7y-9$ funksiyaning barcha o'zgaruvchilari bo'yicha xususiy hosilalarini toping.

Yechish.Ta'rifga binoan:

$$f_x=10x^4z^2-3y^4,\ f_y=-12xy^3+7,\ f_z=4x^5z.$$

35-misol. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $M(-4;3)$ nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f_x(M)=-\frac{4}{5},$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(M)=-\frac{3}{5}.$$

Mashqlarni bajaring. 1) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$; b) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

c) $f(x,y)=\frac{x(x-y)}{y^2}$; d) $f(x,y)=\sin x-x^2y$;

e) $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$; k) $f(x,y)=e^x(\cos x+x\sin y)$;

2) Berilgan nuqtada funksiya hosilasini hisoblang:

a) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, $(1,1)$; b) $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$, $(1,2)$;

c) $f(x,y)=xye^{\sin\pi xy}$, $(1,1)$.

3) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$; b) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

c) $f(x,y,z)=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$; d) $f(x,y,z)=\frac{y}{z}+arctg\frac{z}{x}+arctg\frac{x}{z}$;

e) $f(x,y,z)=z^{xy}$.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la orttirmasini topishni $y=f(M)$ funksiya misolida ko‘rib chiqamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. $M_\Delta(x_1^0+\Delta x_1,...x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

$f(M_\Delta)-f(M_0)$ ayirma $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi to‘la orttirmasi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f=f(M_\Delta)-f(M_0)$$

36-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ funksiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini toping.

Yechish.

$$\Delta f(M_0)=(1+\Delta x_1)^2+(-2+\Delta x_2)^2-\left[1^2+(-2)^2\right]=$$
$$=1+2\Delta x_1+\Delta x_1^2+4-4\Delta x_2+\Delta x_2^2-1-4=2\Delta x_1+\Delta x_1^2-4\Delta x_2+\Delta x_2^2.$$

Funksiyaning Δf orttirmasidan foydalanib ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun to‘la differensial tushunchasini kiritamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo‘lsin.

8-ta'rif. Agar $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi $\Delta f(M_0)$ to‘la orttirmasini

$$\Delta f(M_0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+\alpha_1(\Delta x_1)+...+\alpha_n(\Delta x_n) \qquad (6.3)$$

ko‘rinishda ifoda etish mumkin bo‘lsa, u holda $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Bu yerda, A_1, A_2, ..., A_n sonlar Δx_1, ... Δx_n orttirmalarga bog‘liq emas va $\Delta x_1\to 0\Rightarrow\alpha_1(\Delta x_1)\to 0, \Delta x_2\to 0\Rightarrow\alpha_2(\Delta x_2)\to 0$, ... $\Delta x_n\to 0\Rightarrow\alpha_n(\Delta x_n)\to 0$.

37-misol. $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiya $M_0(-1;2)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Yechish. Buning uchun uning $M_0(-1;2)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(M)=-2\Delta x+4\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=A_1\Delta x+A_2\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y).$$

Bu yerda $A_1=-2$, $A_2=4$, $\alpha_1(\Delta x)=(\Delta x)^2$, $\alpha_2(\Delta y)=(\Delta y)^2$. Demak funksiya differensiallanuvchi.

38-misol. n o‘zgaruvchili chiziqli

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+b$$

funksiya R^n fazoning ixtiyoriy nuqtasida differensiallanuvchidir.

Mashqlarni bajaring. 1) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^4}$ funksiya $X_0(0;0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini isbotlang.

2) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^3}$ funksiya $X_0(0;0)$ nuqtada differensiallanuvchi emasligini isbotlang.

Quyidagi mulohazalar o‘rinli:

a) Agar funksiya biror bir M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya ushbu nuqtada uzluksiz bo‘ladi (zaruriy shart);

b) Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya ushbu nuqtada barcha xususiy hosilalarga ega bo‘ladi va shu bilan birgalikda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\Delta f(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n+\alpha_1(\Delta x_1)+...+\alpha_n(\Delta x_n). \qquad (6.4)$$

Bu yerda

$$\Delta x_1\to 0\Rightarrow\alpha_1(\Delta x_1)\to 0, \Delta x_2\to 0\Rightarrow\alpha_2(\Delta x_2)\to 0, ... \Delta x_n\to 0\Rightarrow\alpha_n(\Delta x_n)\to 0.$$

c) Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqta atrofida barcha xususiy hosilalarga ega bo‘lib, ushbu hosilalar M_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(M)$ funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi (yetarli shart).

9-ta'rif. $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsm. M_0 nuqtada $f(M)$ funksiya orttirmasinimg bosh chiziqli qismi uning M_0 nuqtadagi to'la differensiali, deyiladi va $df(M_0)$ kabi belgilanib quyidagicha yoziladi:

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}dx_n$$

39-misol. $f(x,y,z)=x^3y+y^3z+z$ funksiyaning $M(2;\ 1;\ -3)$ nuqtadagi differensialini topamiz. Buning uchun uning xususiy hosilalarini hisoblab olamiz:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}=3xy=12,\ \frac{\partial f(M)}{\partial y}=x^3+2yz=2,\ \frac{\partial f(M)}{\partial z}=y^2+1=2.$$

$$df(M)=12dx+2dy+2dz.$$

Mashqni bajaring. $f(x,y)$, funksiyaning differensialini toping:

1) $f(x,y)=2x^4-3x^2y^2+x^3y$; 2) $f(x,y)=(y^3+2x^2y+3)^4$;

3) $f(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$; 4) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 5) $f(x,y)=2^{-\frac{y}{x}}$.

Agar $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda cheksiz kichik $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ miqdorlar uchun

$$\Delta f(M_0)\approx df(M_0)$$

munosabat bajariladi, ya'ni

$$\Delta f(M_0)\approx\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(M_\Delta)\approx f(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu taqribiy hisoblash formulasi deb ataladi.

40-misol. $1{,}02^{2{,}01}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish. Buning uchun $z=x^y$ funksiyani qaraymiz. Uning $M_0(1;\ 2)$ nuqtadagi qiymati $z(M_0)=1^2=1$ ga teng. Taqribiy hisoblash formulasidan foydalanamiz:

$$\Delta z\approx yx^{y-1}\Delta x+x^y(\ln x)\Delta y.$$

Bu yerda

$$\Delta z=z(M_\Delta)-z(M_0)=(1+0{,}02)^{2\text{-}0{,}01}-1^2,\ x=1,\ y=2,\ \Delta x=0{,}02,\ \Delta y=0{,}01.$$

U holda

$$z(M_\Delta)=(1+0{,}02)^{2+0{,}01}=1+2\cdot 1^{2-1}\cdot 0{,}02+1^2\cdot \ln 1\cdot 0{,}01=1{,}04.$$

Erkli o'zgaruvchilarni har qanday almashtirishda ham to'la differensial formulasining saqlanish qonunini (invariantligi) $z=f(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya misollda ko'rsatamiz.

$x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ bo'lib, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalar mavjud bo'lsin. Δt orttirma berib,

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad \psi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ifodalarni hosil qilamiz. U holda $z=f(x,y)$ funksiya:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-f(x,y)$$

orttirma oladi. To'la orttirma formulasiga asosan,

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y). \tag{6.5}$$

α_1, α_2 cheksiz kichik miqdorlar, ya'ni

$$\Delta t\to 0\Rightarrow \Delta x\to 0\Rightarrow \alpha_1\to 0;\ \Delta t\to 0\Rightarrow \Delta y\to 0\Rightarrow \alpha_2\to 0.$$

(6.5) ifodani Δt ga bo'lib

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\alpha_1(\Delta x)+\frac{1}{\Delta t}\alpha_2(\Delta y)$$

ifodani hosil qilamiz. Bundan $\Delta t\to 0$ limitga o'tsak,

$$z'_t=f'_x(x,y)\varphi'(t)+f'_y(x,y)\psi'(t). \tag{6.6}$$

(6.6) ning ikki tomonini ham dt ko'paytirib, $dz=z'_t dt$, $dx=\varphi'(t)dt$ $dy=\psi'_t dt$ belgilashlardan foydalanib

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy \tag{6.7}$$

formulani hosil qilamiz. (6.7) to'la differensial formulaning saqlanish qonuni, deyiladi.

Bu qoidadan ko'p o'zgaruvchili funksiyada murakkab funksiyani differensiallash qoldasi kelib chiqadi.

Masalan,

$\Psi=F(u,v,\omega)$: $u=u(x,y,z,t)$, $v=v(x,y,z,t)$, $\omega=\omega(x,y,z,t)$ funksiyaning to'la differensiali:

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Psi}{\partial t}dt. \tag{6.8}$$

Bu yerda

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

(6.8) formulaga asosan $F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ funksiyaning to'la differensialini

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+...+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{6.9}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar bu yerda $t\equiv x_1$, deb olsak (6.9) quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{dF}{dx_1}=\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+...+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}. \tag{6.10}$$

Bu yerdagi $\frac{dF}{dx_1}$ hosila $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ hosiladan farqli ravishda x_1 o'zgaruvchi bo'yicha to'la hosila, deb ataladi.

Ikki o'zgaruvchili $z=F(x,y)$ funksiya misolida $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy va $\frac{dF}{dx_1}$ to'la hosilalarning turli ma'noga ega ekanligini geometrik nuqtai-nazardan tushuntiramiz.

l yoyning tenglamasi $y=f(x)$ ko'rinishda bo'lsin. U holda l yoy bo'ylab $z=F(x,y)$ funksiyani $z=F(x,f(x))$ ko'rinishda yozish mumkin. (6.10) dan foydalanib $z=F(x,f(x))$ funksiyaning $M(x,y)$ nuqtada to'la $\frac{dF}{dx}$ hosilasini yozamiz:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}f'(x). \tag{6.11}$$

Bundan ko'rinadiki, $M(x,y)$ nuqtadagi $\frac{dF}{dx}$ to'la hosilala $M(x,y)$ nuqtadan o'tuvchi $y=f(x)$ egri chiziqning yo'nalishiga bo'g'liq. $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy hosila esa $M(x,y)$ nuqtaning faqat o'ziga bo'g'liq.

Faraz qilaylik, M_0 nuqta va uning $U_\delta(M_0)$ atrofida $f(M)$ funksiya barcha $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin.

10-ta'rif. M_0 nuqtada $f(M)$ funksiyaning birinchi tartibli $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ xususiy hosilasidan x_j o'zgaruvchi bo'yicha olingan xususiy hosilaga $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=f_{x_i x_j}. \tag{6.12}$$

Agar (6.12) da $i=j$ bo'lsa, u holda uni 2-tartibli xususiy hosila $i \neq j$ bo'lsa uni 2-tartibli aralash hosila deb ataladi. Xuddi shunday usulda 3-, 4- va hokazo barcha yuqori tartibli hosilalar aniqlanadi. Shuni alohida ta'kidlash kerakki aralash hosilada natija qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hosila olinish tartibiga bog'liq emas alohida har bir o'zgaruvchi bo'yicha hosila tartibi o'zgarmasligi kerak, ya'ni:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i},\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}=\frac{\partial^4 f}{\partial x_j^2 \partial x_i^2},\ldots$$

41-misol. $f(M)=2x_1^5x_2^2-3x_1^6+4x_2^3$ funksiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibll xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=10x_1^4x_2^2-18x_1^5; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=4x_1^5x_2+12x_2^2.$$

Endi bundan foydalanib ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=40x_1^3x_2^2-90x_1^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=20x_1^4x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=4x_1^5+24x_2.$$

$y=f(M)$ funksiyaning yuqori tartibli differensiali quyidagicha aniqlanadi:

$d^2f=d(df)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ -2 tartibli differensial,

$d^3 f = d(d^2 f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k$ -3 tartibli differensial va hokazo.

$F(x,y)=0$ oshkormas funksiyaning hosilasini hisoblash uchun $F(x,y)$, $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ funksiyalarning uzluksizligini talab qilamiz. Agar $F_y(x,y)\neq 0$ bo'lsa, u holda:

$$y_x = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Xuddi shunday usulda 3 va undan ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalardan hosilalar olish mumkin.

6.5. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

$y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtaning $U_r(M_0)\subset D(f)$ – atrofida aniqlangan bo'lsin.

11-ta'rif. Agar M_0 nuqtaning shunday $U_r(M_0)$ atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $M\in U_r(M_0)$ nuqtalar uchun $f(M_0)<f(M)$ $\left(f(M_0)>f(M)\right)$ tengsizlik bajarilsa, M_0 nuqta lokal minimum (maksimum) nuqta deyiladi.

12-ta'rif. Funksiyaning lokal maksimum va minimum nuqtalari funksiyaning lokal ekstremum nuqtalari deb ataladi.

Funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlash uchun yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent tushunchasini kiritamiz.

$u=f(x,y,z)$ funksiya $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta atrofida anuqlangan va $\vec{l}\neq 0$ vektor berilgan bo'lsin. Bu yerda $\vec{l}$ vektor yo'nalishida $\vec{l}_0=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ birlik vektorni aniqlaymiz. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $\vec{l}$ vektor yo'nalishi bo'ylab nur o'tkazamiz va uning tenglamasini parametrik tenglama ko'rinishida yozamiz:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma,\ t\geq 0. \qquad (6.13)$$

Bu yerda $t=\rho\left(M(x,y,z),M_0(x_0,y_0z_0)\right)$, chunki

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=t\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=t.$$

(6.13) nurda $f(x,y,z)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$ funksiyani qaraymiz. U holda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada $\vec{l}$ yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{t}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta. z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

Shunday qilib yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ faqat M_0 nuqta va $\vec{l}$ vektor yo'nalishi bilan aniqlanib u koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. $\frac{\partial f}{\partial l}$ hosilani murakkab funksiya hosilasi formulasi yordamida hisoblasak:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

Bu yerda $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}. \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\}=\nabla f(M_0)$ f funksiyaning M_0 nuqtadagi gradiyenti, deb ataladi va $gradf(M_0)$ yoki $\nabla f(M_0)$ (∇f –nabla ef) ko'rinishda belgilanadi.

42-misol. $f(x_1,x_2)=3x_1^2x_2-4x_1^3+2x_2^2-5$ funksiyaning $M_0(1;-1)$ nuqtadagi gradiyentini toping.

Yechish.

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1}=6x_1\cdot x_2-12x_1^2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=-18;$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2}=3x_1^2+4x_2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=-1.$$

Demak, $grad\ f(M_0)=(-18,-1)$.

Demak, birlik vektor: $\vec{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; M_0 nuqtada $f(x.y,z)$ funksiyaning gradiyenti esa $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\}=\nabla f(M_0)$ ko'rinishda aniqlanadi. U hoida

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma= \tag{6.14}$$
$$=|\nabla f||\vec{l}_0|\cos\varphi=|\nabla f|\cos\varphi$$

Bundan ko'rinib turibdiki, agar $\Delta f \neq 0$ bo'lsa, u holda M_0 nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ o'zining eng katta qiymatiga faqat ∇f ning yo'nalishida erishadi, ya'ni $\varphi = 0$ bo'lganda. Bu yerda $\varphi - \nabla f$ va $\bar{l}_0$ vektorlar orasidagi burchak.

Gradiyent tushunchasidan foydalanib ekstremumning zaruriy shartini aniqlaymiz.

11-ta'rif. Agar $M_0 \in R^n$ nuqtada $f(M)$ funksiyaning gradiyenti nol vektor, ya'ni $grad\, f(M_0) = 0$ bo'lsa, u holda $M_0 \in R^n$ nuqta $f(M)$ funksiyaning statsionar nuqtasi deyiladi.

43-misol. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 9x_2 - 5$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning gradiyentini aniqlaymiz:

$$grad\, f(M) = (2x_1 - x_2 + 6;\ \ -x_1 + 2x_2 - 9).$$

Bundan

$$grad\, f(M) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

sistemaning yechimi $M_0(-1;4)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

$M(a,b)$ nuqta atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $z = f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu nuqtada quyidagi orttirmani qaraymiz:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b).$$

Quyidagi belgilash kiritamiz:

$$\varphi(t) = f(a+ht, b+kt).$$

Bu yerda $\varphi(0) = f(a,b), \varphi(1) = f(a+h, b+k)$. $\varphi(t)$ funksiyaga $[0;1]$ Lagranj o'rta qiymat teoremasini: $f(a) - f(b) = (b-a)f'(\xi),\ \xi \in (a;b)$ qo'llaymiz:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1-0)\varphi'(\xi),\ \ \xi \in (0;1). \qquad (6.15)$$

Bu yerda:

$$\varphi'(t) = hf'_x(a+ht, b+kt) + kf'_y(a+ht, b+kt). \qquad (6.16)$$

(6.15) tenglikni (6.16) dan foydalanib quyidagicha yozib olamiz:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf'_x(a+h\xi, b+k\xi) + kf'_y(a+h\xi, b+k\xi). \quad (6.17)$$

Bu tenglik ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Lagranj funksiyasi deb ataladi.

Lagranj o‘rta qiymat teoremasining umumlashmasi Teylor o‘rta qiymat teoremasi yoki kengaytirilgan o‘rta qiymat teoremasi ko‘p holarda Teylor formulasi deb atalib quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),\ \xi\in(a,b). \quad (6.18)$$

(6.17) formulani $f(x,y)$ uchun keltirib chiqaramiz. Buning uchun $\varphi(t)=f(a+ht,b+kt)$ funksiyani [0;1] kesmada Teylor formulasini 2 – tartibli hadi bilan yozib olamiz:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1-0}{1!}\varphi'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}\varphi''(\xi),\ \xi\in(a,b). \quad (6.19)$$

(6.16) formulani differensiallab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\varphi''(t)=h^2f''_{xx}(a+ht,b+kt)+2hkf''_{xy}(a+ht,b+kt)+k^2f''_{yy}(a+ht,b+kt).$$

(6.16) ga asosan $\varphi'(0)=hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)$ bo‘lgani uchun (6.19) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+[hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(a+\xi t,b+\xi t)+2hkf''_{xy}(a+\xi t,b+\xi t)+k^2f''_{yy}(a+\xi t,b+\xi t)],\ \xi\in(0;1).$$

Bu formula ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor o‘rta qiymat teoremasi deb ataladi.

Bu ikkita o‘rta qiymat teoremasini uch va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham qo‘llash mumkin.

44-misol. $M(1;2)$ nuqtada $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiya uchun Lagranj va Teylor o‘rta qiymat teoremasini yozing.

Yechish. Bu funksiya uchun Lagranj o‘rta qiymat teoremasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$(1+h)^2+(2+k)^2=1^2+2^2+2h(1+\xi h)+2k(2+\xi k)=$$
$$=1^2+2^2+2h+2h^2\xi+4k+2k^2\xi=(1^2+2h+2h^2\xi)+(2^2+4k+2k^2\xi).$$

Bu yerda $\xi=\frac{1}{2}\in(0;1)$ bo‘lsa tenglik o‘rinli bo‘ladi.

U holda bu funksiya uchun Teylor o‘rta qiymat teoremasini yozamiz va bu teorema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$(1+h)^2+(2+k)^2=1^2+2^2+2h\cdot1+2k\cdot2+\frac{1}{2}(2h^2+2k^2)=$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2h + h^2 + 4k + k^2 = (1^2 + 2h + h^2) + (2^2 + 4k + k^2).$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning M_0 ekstremum nuqtasini topishni ikki o'zgaruvchili $z = f(x,y)$ funksiya misolida ko'rib chiqamiz. $M_0(a,b)$ nuqta atrofida $f(x,y)$ uchun Teylor formulasini yozamiz:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + [hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b)] +$$
$$+\frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)] \qquad (6.20)$$

Bu yerda $f_x = f_y = 0$ bo'lgani uchun (6.20) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)].$$

Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} = A, \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = B, \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} = C, \quad -\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

bo'lsin. U holda:

1) agar $\Delta = B^2 - AC < 0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta funksiyaning lokal ekstremum nuqtasi bo'lib: a) $A < 0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta maksimum nuqta; b) $A > 0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo'ladi.

2) agar $B^2 - AC > 0$ bo'lsa, u holda M_0 statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi;

3) agar $B^2 - AC = 0$ bo'lsa, u holda nuqtaning ekstremum nuqtasi bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda qo'shimcha tekshirish talab etiladi.

45-misol. 43– misolda keltirilgan funksiyaning $M_0(-1;4)$ statsionar nuqtasini ekstremumga tekshiramiz:

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} = 2; \qquad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} = 2.$$

$$B^2 - AC = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0,$$

bo'lgani uchun $M_0(-1;4)$ statsionar nuqta ekstremum va $A = 2 > 0$ bo'lganidan minimum nuqta bo'ladi.

Endi ko'p o'zgaruvchil funksiya uchun ekstremumni topish masalasini ko'rib chiqamiz. X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin.

X^0 statsionar nuqta lokal ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matritsasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H\left[X^0\right]$ musbat aniqlangan bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta; Agar $H\left[X^0\right]$ manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum nuqta bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matritsalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n\times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matritsa berilgan bo'lsin.

$A=(a_{ij})$ matritsaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi 1, 2, ..., $n-$tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \dots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning bosh minorlari deyiladi.

$A=(a_{ij})$ matritsaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matritsa musbat aniqlangan bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matritsaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo'lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matritsa manfiy aniqlangan bo'ladi.

46-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nuqta bo'ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matritsasini tuzamiz:

$$H\left[X^0\right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda -2, 4, -6. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

$y = f(X)$ funksiya chegaralangan, yopiq V to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Funksiya to'plamining har bir nuqtasida, uning ba'zi nuqtalaridan tashqari, xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Ushbu holda, V to'plamga tegishli shunday X^0 nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(X)$ funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi. Funksiya V to'plamda o'zining eng katta (eng kichik) qiymatini nafaqat ichki X^0 statsionar nuqtada balki xususiy hosilalaridan biri mavjud bo'lmagan nuqtada, shu bilan birga V to'plamning chegarasida ham erishishi mumkin.

Yuqoridagilarni e'tiborga olib, $f(X)$ funksiyaning berilgan V to'plamda eng katta va eng kichik qiymatlarini topish jarayonini quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

a) V to'plamning $f(X)$ funksiya xususiy hosilalari mavjud bo'lmagan nuqtalari aniqlanadi;

b) $f(X)$ funksiyaning V to'plamga tegishli barcha statsionar nuqtalari topiladi;

c) barcha aniqlangan nuqtalarga va V to'plam chegarasida $f(X)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi va o'zaro solishtiriladi. Ulardan eng kattasi (eng kichigi) $f(X)$ funksiyaning V to'plamda erishadigan eng katta (eng kichik) qiymati hisoblanadi.

6.6. Iqtisodiy masalalarni Lagranj ko'paytuvchilar usuli bilan yechish

Ma'lumki, ishlab chiqaruvchining maqsadi maksimal foyda olishdir. Iste'molchiga kelsak u o'zining shaxsiy daromadini ko'paytirishga harakat qiladi. Shu sababli iste'molchi turli faktorlarni e'tiborga olgan holda sotib oladigan mahsulotini tanlaydi. Iste'molchini qanoatlantiradigan sonni f bilan belgilaymiz va uni iste'molchining foydasi, deb ataymiz. Iste'molchining imkoniyatlar chegaralanganligi sababli u f sonni minimallashtirishga harakat qiladi.

Faraz qilamiz ikki turdagi G_1, G_2 mahsulotalr bo'lib, iste'molchi birinchi mahsulotdan x_1 miqdorda, ikkinchi mahsulotdan esa x_2 miqdorda olsin. U holda iste'molchining foydasi $f(x_1,x_2)$ funksiya ko'rinishida ifodalanadi. Iste'molchi olishi kerak bo'lgan mahsulotlar turi ortishi bilan f funksiyada o'zgaruvchilar soni ham ortadi.

Biz shartli ekstremum masalasini yechish metodlari bilan tanishib chiqamiz. Bunda:

- Resurslar va turli faktorlar bilan chegaralangan ishlab chiqaruvchi faoliytani.
- Shaxsiy byudjetini ratsional taqsimlaydigan iste'molchi faoliyatini optimallashtirish masalalari ko'riladi.

Shartli ekstremum masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$f(X) \to \min(\max) \tag{6.21}$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{6.22}$$

Shartli ekstremum masalasi masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami:

$$K = \{X : g_1(X) = 0, \quad g_2(X) = 0, \quad \dots, \quad g_m(X) = 0\}$$

bo'sh to'plam bo'lmagandagina ma'noga ega.

Ko'p hollarda (6.21), (6,22) masalaning yechimi mavjudligini isbotlash uchun uzluksiz funksiyaning minimumi haqidagi Veyershtrass teoremasidan foydalanish yetarli hisoblanadi.

(6.21), (6.22) masala global shartli ekstremum masalasi bo'lib, bu masala o'z ichiga shartsiz ekstremum masalasini ham oladi. Soddalik uchun shartli minimum masalasini qaraymiz:

$$f(X) \to \min \tag{6.23}$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,\dots,m \tag{6.24}$$

masalaning yechimini topish talab qilinsin.

(6.23), (6.24) masalani yechishning eng sodda klassik usuli noma'lumlarni yo‘qotish usulidir. Bunda:

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1,2,...,m$$

tenglamalar sistemasidan m ta noma’lumlarni, masalan,

$$x_1 = h_1(x_{m+1},...,x_n),$$
$$x_2 = h_2(x_{m+1},...,x_n),$$
$$.........................,$$
$$x_m = h_m(x_{m+1},...,x_n)$$

noma’lumlar topilib $n-m$ ta $x_{m+1},....,x_n$

$$\psi(x_{m+1},...,x_n) = f(h_1(x_{m+1},....,x_n),...,h_m(x_{m+1},....,x_n),x_{m+1},...,x_n)$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu esa shartsiz minimum masalasidir:

$$\psi(x_{m+1},...,x_n) = f(h_1(x_{m+1},...,x_n),...,h_m(x_{m+1},...,x_n),x_{m+1},...,x_n) \to \min \tag{6.25}$$

Bu masala (6.23), (6.24) masalaga ekvivalent:

1. Agar $(x_1^0,...,x_n^0)$ nuqta (6.23), (6.24) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ (6.25) masalaning yechimi bo‘ladi;

2. Agar $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ (6.25) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda $(x_1^0,....,x_n^0)$ (6.23), (6.24) masalaning yechimi bo‘ladi.

Noma’lumlarni yo‘qotish metodini tatbiq etish juda katta qiyinchiliklarni yuzaga keltirsa ham uni ba'zi holatlarda qo‘llash mumkin, chunki bu metodni qo‘llash uchun maxsus nazariy bilim talab qilinmaydi.

Noma’lumlarni yo‘qotish usulini qo‘llashning nazariy asoslari quyidagi oshkormas funksiya haqidagi teoremaga asoslangan:

Teorema. $A \in R^m, B \in R^k$ nuqtalar belgilangan nuqtalar bo‘lsin. $g(Y,Z)$, $Y \in R^m$, $Z \in R^k$ funksiya $(Y,Z) \in R^m \times R^k$ nuqtaning qandaydir atrofida aniqlanib, Y bo‘yicha differensiallanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$g(A,B) = 0, \qquad \left|\frac{\partial g(A,B)}{\partial Y}\right| \neq 0$$

U holda $Z = B$ nuqta atrofida aniqlangan va uzluksiz m o‘lchovli shunday $Y = h(Z)$ funksiya topiladiki, bu funksiya uchun quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

1. $Z = B$ nuqtaning atrofida $g(h(Z),Z) = 0$
2. $h(B) = A$;
3. $h(Z)$ funksiya $Z = B$ nuqta atrofida Z bo‘yicha $g(Y,Z)$ funksiya bilan bir xil tartibli hosilalarga ega bo‘ladi.

Yuqoridagilarga asosan quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema. Agar $X = X^0 \in R^n$ nuqtada

$$rank\left(\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X},...,\frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X}\right) = m$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (6.23), (6.24) masalaga noma'lumlarni yo'qotish usulini qo'llash mumkin.

$g_i(x_1,...x_n)$, $f(x_1,...,x_n)$ funksiyalar va ularning barcha xususiy hosilalari uzluksiz bo'lsin. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda (6.23), (6.24) masalani Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechish mumkin.

(6.23), (6.24) masalaning elementlaridan umumlashgan (kengaytirilgan) $(m+1)$–o'lchovli Lagranj vektori $\overline{\Lambda} = (\lambda_0, \Lambda)$ (λ_0 –skalyar, $\Lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ –Lagranj vektori; bu vektorning komponentalari Lagranj ko'paytuvchilari, deb ataladi) yordamida

$$F(X,\overline{\Lambda}) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - g_i(X)) \tag{6.26}$$

umumlashgan Lagranj funksiyasini tuzamiz. Shunday qilib (6.23), (6.24) masala $F(X,\overline{\Lambda})$ Lagranj funksiyasining ekstremumini o'rganishga keltiriladi.

Teorema (Umumlashgan Lagranj ko'paytuvchilar qoidasi). $f(X)$, $g_1(X),..., g_m(X)$ funksiyalar R^n fazoda aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsin. (6.23), (6.24) masalaning har bir X^0 lokal optimal rejasi uchun shunday $\overline{\Lambda} \neq 0$ vektor topiladiki, bunda

$$\frac{\partial F(X^0,\overline{\Lambda})}{\partial X} = 0 \tag{6.27}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

X^0 nuqtada (6.27) tenglik bajariladigan $\overline{\Lambda} \neq 0$ vektor X^0 nuqtaga mos umumlashgan Lagranj vektori deb ataladi. X^0 nuqtaga bir nechta umumlashgan Lagranj vektorlari mos kelishi mumkin.

(6.27) tenglikni $-\overline{\Lambda}$ vektor ham qanoatlantiradi. Shu sababli $\overline{\Lambda} \geq 0$ deb olinib, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga aniqlik kiritiladi.

Ko'p hollarda

$$F(X,\overline{\Lambda}) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \quad \lambda_0 = 1 \tag{6.28}$$

klassik Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

(6.28) Lagranj funksiyasi uchun, umuman olganda, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi o'rinli emas.

(6.23), (6.24) masalani tekshirishda (6.28) Lagranj funksiyasidan qachon foydalanish mumkinligini aniqlaymiz.

12-ta'rif. Agar X^0 optimal rejaga mos umumlashgan Lagranj vektorlari ichlda $\lambda_0 = 0$ kabilar bo'lmasa, u holda (6.23), (6.24) masala va uning X^0 optimal rejasi normal deb ataladi.

13-ta'rif. Agar X^0 rejada

$$\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X}, \dots, \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X} \qquad (6.29)$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 reja oddiy joiz reja deb ataladi.

Teorema. Optimal reja X^0 normal bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar u oddiy joiz reja bo'lsa. Agar (6.23), (6.24) masala normal bo'lsa, u holda $m \leq n$ bo'ladi.

Endi asosiy natijani keltiramiz. Bundan keyin (6.23), (6.24) masalada soddalik uchun $b_i = 0$, deb qaraymiz.

Teorema (Lagranj ko'paytuvchilar qoidasi). Agar (6.23), (6.24) masalaning X^0 optimal rejasida (6.29) vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda shunday yagona λ^0 Lagranj vektori topiladiki, $(X^0, \overline{\Lambda})$ juftlikda

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0$$

tengliklar bajariladi.

Masalan, (6.23), (6.24) masalada $i = 1$, $j = 2$, bo'lsa (6.28) funksiyaning $(X^0, \overline{\Lambda})$ statsionar nuqtasini topamiz. So'ngra

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(X^0) & g_{x_2}(X^0) \\ g_{x_1}(X^0) & F_{x_1x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) \\ g_{x_2}(X^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_2}(X^0, \lambda^0) \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz. Bu yerda quyldagilar o'rinli:

a) Agar $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaning shatrli minimum nuqtasi;

b) Agar $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaning shartli maksimum nuqtasi bo'ladi.

47-misol. Lagranj qoidasidan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

$$x_1 + x_2 = 1;$$
$$Z = x_1 x_2 \to \max.$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1+x_2-1)$$

Bu funksiyadan x_1, x_2 va λ lar bo‘yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} x_2+\lambda=0, \\ x_1+\lambda=0, \\ x_1+x_2-1=0. \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^0=-1/2,\ x_1^0=x_2^0=1/2,\ Z=1/4.$$

48-misol. Lagranj usulidan foydalanib quyidagi masalaning optimal yechimini topamiz.

$$x_1+x_2=4$$
$$Z=x_1^2+x_2^2\to\max(\min)$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda(4-x_1-x_2)$$

Ushbu funksiyadan x_1,x_2 va λ bo‘yicha xususiy hosilalar olib ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1-\lambda=0 \\ 2x_2-\lambda=0 \\ 4-x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix}\lambda=4 \\ x_1=x_2=2\end{matrix}$$

Demak $X^0=(x_1^0,x_2^0)=(2;2)$ nuqta $Z=x_1^2+x_2^2$ funksiya uchun statsionar nuqta bo‘ladi. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$$

$$\Delta>0, \qquad A=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=2>0$$

Demak $x^0=(2;2)$ nuqtada funksiya minimumga erishadi.

Mashqni bajaring. Quyidagi masalalarning optimal yechimini toping.

$a)\ f(x_1,x_2)=x_1^2+12x_1x_2+2x_2^2\to\min,$

$\quad 4x_1^2+x_2^2=25.$

$b) f(x_1,x_2) = ee^{ax_1x_2} \to \min. \qquad (a<0)$

$x_1^3 + x_2^3 + x_1 + x_2 - 4 = 0.$

(6.23), (6.24) masalada funksiyalar o'zgaruvchilari ikkitadan ko'p bo'lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0 \end{cases} \tag{6.30}$$

Bu sistemadan (X^0,λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumming mavjudligi Lagranj funksiyasining d^2F – ikkinchi differensialini o'rganish bilan bog'liq:

a) agar (X^0,λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0$ $(i=1,2,...,m)$, $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0,\lambda^0) < 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi;

b) agar (X^0,λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0$ $(i=1,2,...,m)$, $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0,\lambda^0) > 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, (X^0,λ^0) nuqtada $d^2F(X^0,\lambda^0) = 0$ bo'lsa, u holda (X^0,λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilah qo'shimcha tekshirish kerak bo'ladi.

49-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi masalanmg yechimini topamiz:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,$$
$$u = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min(\max)$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\lambda) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9)$$
$$F(x_1,x_2,\lambda) = x_1 + x_2 + \lambda\left[1 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2\right]$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ F_{x_2} = -2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ F_{x_3} = 2 + 2\lambda x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \; x_{11} = -1, \; x_{21} = 2, \; x_{31} = -2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, \; x_{12} = 1, \; x_{22} = -2, \; x_{32} = 2,$$

Bundan $d^2u\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0$; $d^2u\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$. Demak, $\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)$ – nuqta shartli minimum nuqta, $u_{min} = -9$; $\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)$ – shartli maksimum nuqta, $u_{max} = 9$.

Mashqlarni bajaring.

$a)\, f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min,$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

$b)\, f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$c)\, f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1.$

$d)\, f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le 40, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

Lagranj ko'paytuvchilarining iqtisodiy talqini. Amaliyotda masalaning mohiyatini e'tiborga olgan holda Lagranj ko'paytuvchilarini turlicha talqin qilish mumkin. Masalan, mexanikada Lagranj ko'paytuvchilari aloqaning reaksiyasini, iqtisodiyotda esa ishlab chiqarilgan mahsulotning bahosini ifodalashi mumkin. Biz quyida bu ko'paytuvchilarning iqtisodiy talqinini misollarda ko'rib chiqamiz.

50-misol. Korxona ikki turdagi mahsulot ishlab chiqarsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish funksiyasi ikki xil faktorga bog'liq bo'lib, har bir faktorning umumiy miqdori belgilangan bo'lsin. Agar mahsulot bahosi ma'lum bo'lsa, u holda qanday sharoitda foyda maksimal bo'lishini aniqlang.

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

x_i $(i=1,2)$ – mahsulotlarni ishlab chiqarish hajmi;

x_{i+2} – 1-mahsulotni ishiab chiqarishda foydalanilgan faktorlar hajmi;

x_{i+4} – 2-mahsulotni ishlab chiqarishda foydalanilgan faktorlar hajmi;

p_i – mahsulotlar bahosi bo'lsin.

Bu yerda x_3, x_5 va x_4, x_6 mos ravishda bir xll faktorlarni ifodalaydi, deb faraz qilinadi. U holda yuqoridagi belgilashlardan va masala shartiga asosan $x_1=\varphi(x_3,x_4)$, $x_2=\varphi(x_5,x_5)$ funksiyalarni yozib olish mumkin. Masalaning modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(X)=p_1x_1+p_2x_2\to\max,$$
$$x_1-\varphi(x_3,x_4)=0,\quad x_3+x_5-k_1=0,$$
$$x_2-\psi(x_5,x_6)=0,\quad x_4+x_6-k_2=0$$

Bu masala uchun Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(X,\Lambda)=p_1x_1+p_2x_2-$$
$$-\lambda_1(x_1-\varphi(x_3,x_4))-\lambda_2(x_2-\psi(x_5,x_6))-\lambda_3(x_3+x_5-k_1)-\lambda_4(x_4+x_6-k_2).$$

Bu funksiyaning statsionar funksiyasini topish maqsadida undan hosilalar olib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$p_1=x_1,\quad p_2=x_2,$$
$$\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\lambda_1,\quad \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}=\lambda_4,$$
$$\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x_5}=\lambda_3\quad \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x_6}=\lambda_4.$$

Bundan esa foydani maksimallashtiruvchi shartlarni topmiz:

$$p_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=p_2\frac{\partial\psi}{\partial x_5}=\lambda_3,\qquad p_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}=p_2\frac{\partial\psi}{\partial x_6}=\lambda_4.$$

Demak, Lagranj ko'paytuvchilari bu masalada mahsulot bahosini ifodalaydi.

VI bobga doir savollar

1. Funksiya hosilasini ta'riflang.
2. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi tushuntiring.

3. Yig'indi va ayirmaning hosilasi qanday topiladi?
4. Ko'paytmaning hosilasi qanday topiladi?
5. Bo'linmaning hosilasi qanday topiladi?
6. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
7. Talab egiluvchanligini hisoblash formulasini keltiring.
8. Talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanligini ta'riflang va topish formulasini yozing.
9. Marjinal daromad qanday ma'noga ega?
10. Marjinal xarajat ishlab chiqarish hajmiga bog'liq ravishda qanday funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi?
11. Marjinal foyda qanday ma'noga ega?
12. Funksiya ekstremumlari.
13. Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topmg.
14. Qanday holda kesmada berilgan funksiyaning minimumi uning shu kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi, deb ta'kidlash mumkin?
15. Qanday holda kesmada berllgan funksiyaning maksimumi uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi. deb ta'kidlash mumkin?
16. Firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
17. Firmaning foydasini maksimaliashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
18. Firmaning marjinal xarajatlarini minimallashtlruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
19. Soliq foydasini maksimallashtiruvchi soliq stavkasi qanday aniqlanadi?
20. Funksiyaning qavariqligi nima?
21. Funksiyaning kesmada botiq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
22. Funksiyaning kesmada qavariq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
23. Funksiya grafigining burilish nuqtasini tushuntiring.
24. Burilish nuqta uchun zaruriy shartni keltiring.
25. Funksiya grafigining asimptotalarini tushuntiring.
26. Qavariq funksiyaning grafigi unmg urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
27. Botiq funksiyaning grafigi uning urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
28. Asimptota qanday aniqlanadi? Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
29. Og'ma asimptotani ta'riflang. Gorizontal asimptota nima?
30. Hosila yordamida funksiyani to'la tekshirish qanday amalga oshiriladi?
31. Ko'p o'zgaruvchlli funksiya differensiali qanday hisoblanadi?

32. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi qanday hisoblanadi?

33. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi qanday tekshiriladi?

34. Ko‘p o'zgaruvchili funksiyaning to‘la differensiali qanday hisoblanadi?

35. Funksiyaning lokal ekstremumlarini tushuntiring.

36. Funksiyaning M_0 nuqtadagi gradiyentini tushuntiring.

37. Teylor formulasini keltiring.

38. Ko'p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumining zaruriy shartini keltiring.

39. Ko'p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli shartini keltiring.

40. Shartli ekstremumni ta’riflab bering.

VI bobga doir misol va masalalar

1. Berilgan egri chiziqqa berilgan nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

a) $y = x^3$, $A(1,1)$ b) $y = x^2 + 5$, $A(2,9)$ c) $y = \sin x$, $A(\pi, 0)$

2. Funksiya hosilasini toping.

a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. b) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$. c) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$

d) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1}{2}arctgx$. e) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

f) $y = \dfrac{1}{2}(3 - x)\sqrt{1 - x^2 - 2x} + 2\arcsin\dfrac{x + 1}{\sqrt{2}}$.

g) $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1 + x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$. h) $y = \dfrac{tg\dfrac{x}{2} + ctg\dfrac{x}{2}}{x}$

i) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + ctgx} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + tgx}$. j) $y = 10^{x \cdot tgx}$.

3. Funksiya differensialini toping.

a) $y = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}arctgx$. b) $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

4. Taqribiy qiymatini hisoblang.

a) $\sin 60^\circ 18'$. b) $\sqrt[6]{735}$. c) $tg 46^\circ$. d) $\ln 1{,}07$.

5. Funksiya n - tartibli hosila va differensialini toping ($n \in N$).

a) $\sqrt{x}$. b) x^a. c) $\ln\sqrt[33]{x + 1}$. d) $\sin\alpha x$

6. Oshkormas funksiya hosilasini toping.

a) $x^3y^3 + 5xy + 4 = 0$; b) $x\sin y + y\sin x = 0$; c) $x^y - y^x = 0$

7. Funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

a) $y = x^2(x-3)$; b) $y = e^{x^2-4x}$; c) $y = x\ln x$.

8. Funksiyani ekstremumga tekshiring.

a) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$; b) $y = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$; c) $y = x\ln^2 x$.

9. Lopital qoidasidan foydalanib limitni toping.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - arctgx}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx - \dfrac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}arctgx\right)^x$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$.

10. Funksiyaning og'ma asimptotasini toping.

a) $f(x) = \dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; b) $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{x}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$; d) $f(x) = xe^x$.

11. Funksiyaning qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalarini ikkinchi tartibli hoslla yordamida toping.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; b) $y = x^2\ln x$; c) $y = (1+x^2)\cdot e^x$.

12. Biror firma tomonidan mahsulot ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar funksiyasi $y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250$ ko'rinishga ega (pul bir. hisobida). Ishiab chiqarishning o'rtacha va chegaraviy xarajatlarini toping va ularning $x = 10$ dagi qiymatini hisoblang.

13. Biror firma tomonidan qishki oyoq kiyimlarini ishlab chiqarish hajmi $u = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$ (birlik) tenglama bilan aniqlangan, bunda t–yilning tavqim oyi. Mehnat unumdorligi hamda uning o'zgarish tempi va tezllgini yll o'rtasida hisoblang.

14. Agar talab funksiyasi $q = \dfrac{3p+14}{p+3}$ va takllf funksiyasi $s = p+2$ (bu erda q va s - mos ravishda biror vaqt birligida sotib olinayotgan va sotishga taklif etilayotgan tovar miqdori, p– bir birlik tovarning bahosi) berilgan bo'lsa. u holda: a) muvozanat baho, ya'ni talab va taklifni tenglashtiradigan baho; b) talab va taklif elastikligi; v) narx muvozanat bahodan 10% ga oshirilganda daromadning o'sishini toping.

15. Xarajatlar funksiyasi $C(x) = 10 + \dfrac{1}{10}x^2$ ko'rinishga ega. Boshiang'ich bosqichda firma ishni $A(x)$ o'rtacha xarajatlarni minimallashtirish maqsadida tashkil etdi. Keyinchalik tovarning bir birligiga 4 shartli birlikka teng bo'lgan narx belgilandi. Firma ishlab chiqarishni qancha birlika orttirishi kerak?

16. Agar tovarning narxi $p=14$ birlik va xarajatlar funksiyasi $C(x)=13+2x+x^3$ ko'rinishda bo'lsa, ishlab chiqaruvchi uchun optimal x_0 mahsulot hajmimi aniqlang.

17. Firmaning ishiab chiqargan x birlik tovarini narxi $p(x)=8-\sqrt{x}$ funksiya bilan aniqlanadi. Agar xarajatlar funksiyasi $C(x)=10+x+\frac{x^2}{2}$ ko'rinishda bo'lsa, firma uchun optimal bo'lgan x_0 mahsulot hajmini aniqlang.

18. Firma tovarning x birligi uchun fiksirlangan $p=380$ narxni o'rnatdi. x birlikdagi tovarni ishlab chiqarishdagi xarajatlar $C(x)=292x+x^2$ ga teng. Bunda sotilayotgan $K(x)$ tovarning miqdori x ga quyidagicha bog'liq: $K(x)=x+(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})$. Firmaning maksimal foyda oladigan x ning qiymatini aniqlang.

19. Ishiab chiqarilayotgan mahsulotning x hajmi bilan firma daromadi o'rtasidagi munosabat $D(x)=100x-1000\sqrt{x}$ $(400\le x\le 900)$ funksiya kabi aniqlandi. Bu oraliqdagi xarajatlar funksiyasi $C(x)=50x+\frac{4}{5}x\sqrt{x}$ ko'rinishga ega. Ishlab chiqaruvchi uchun optimal bo'lgan mahsulot hajmini aniqlang.

20. Funksiya ekstremumlarini toping.

a) $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$; b) $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

21. Korxona ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ularning miqdorini x va y bilan belgilaymiz. Ikki turdagi mahsulotlar narxi mos ravishda $P_1=32$ va $P_2=24$ pul birligiga teng. Agar xarajat funksiyasi $C=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2$ ko'rinishiga ega bo'lsa, bu mahsulotlardan qancha miqdorda sotilsa foyda maksimal bo'ladi.

Javoblar:

1. **a)** $3x-y-2=0$, $x+3y-4=0$.

b) $y=4x+1$, $x+4y-38=0$.

c) $y=\pi-x$, $y=x-\pi$.

2. **a)** $y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. **b)** $y' = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$. **c)** $y' = \sqrt{1-x^2}$.

d) $y' = \frac{1}{1-x^4}$. **e)** $y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$. **f)** $y' = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-2x}}$.

g) $y' = \frac{1}{x^3+1}$. **h)** $y' = -\frac{2(x\cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$. **i)** $y' = -\cos 2x$.

j) $y' = 10^{x\,tgx} \ln 10 \left(tgx + \frac{x}{\cos^2 x} \right)$.

3. **a)** $dy = \frac{x^2 dx}{1-x^4}$. **b)** $dy = -\frac{2dx}{3\sqrt{x^2+1}}$.

4. **a)** 0,86863. **b)** 3,0041.
c) 1,03553. **d)** 0,0676586.

5. **a)** $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}}$. **b)** $y^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$.

c) $y^{(n)} = \frac{1}{33}(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$. **d)** $y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{\pi}{2} n \right)$.

6. **a)** $y' = -\frac{3x^2y^2+5y}{2x^3y+5x}$. **b)** $y' = \frac{-(y\cos x + x\sin y)}{x\cos y + \sin x}$.

c) $y' = \frac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$.

8. a) $(0;2)$, kamayuvchi b) $(-\infty;2)$, kamayuvchi c) $(0;e^{-1})$, kamayuvchi. **8.** a) $y_{\min}(0,23) \approx -0,76$, $y_{\min}(1,4) \approx -0,05$, $y_{\max}(1) \approx 0$; b) $y_{\max}(1) = -4$; $y_{\min}(5) = 4$; c) $y_{\max}(e^{-2}) = 4e^{-2}$; $y_{\min}(1) = 0,6$.

9. **a)** $\frac{1}{3}$. **b)** 0. **c)** 1. **d)** $e^{-2/\pi}$. **e)** 1.

10. **a)** $y = -3$. **b)** $y = 1$. **c)** $y = 1$. **d)** $y = 0$.

11. **a)** $(-\infty; 2)$ da qavariq, $x = 2$ – burilish nuqtasi.

b) $(0; e^{-3/2})$ da qavariq, $x = e^{-3/2}$ – burilish nuqtasi.

c) $(-3; -1)$ da qavariq, $x = -3$, $x = -1$ – burilish nuqtasi.

12. Chegaraviy xarajat $y'(x) = 0,3x^2 - 2,4x + 5$, $y'(10) = 11$.

O'rtacha xarajat $y_1(x) = \frac{0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250}{x}$, $y_1(10) = 28$.

13. $z(6) = 0$, $z'(6) = 5$, $T_z(6) = 0$.

14. **a)** 2. **b)** $E_p(q) = -\frac{5p}{(p+3)(3p+14)}$, $E_p(s) = \frac{p}{p+2}$, $E_{p=2}(q) = -0,1$, $E_{p=2}(s) = 0,5$.

c) 9%.

15. 10 birlik. **16.** 2. **17.** 4. **18.** 5. **19.** 625.

20. a) $z_{min} = -7; M(1,2)$ nuqtada;

b) $z_{min} = -\frac{2}{e}, M(-2,0)$ nuqtada.

21. $x = 8,\ y = 4$ da $\Pi_{max} = 176.$

Tayanch so'z va iboralar: hosila, differensial, talab egiluvchanligi, marjinal daromad, marjinal xarajat, marjinal foyda, funksiyaning kritik nuqtalari, funksiyaning ekstremum nuqtalari, funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari, statsionar nuqtalar, daromadni va foydani maksimallashtirish, xarajatlarni minimallashtirish, asimptota, burilish nuqtasi, vertikal asimptota, og'ma asimptota, gorizontal asimptota, funksiyani to'la tekshirish, qavariqlik, funksiyanmg to'la orttirmasi, funksiyaning to'la differensiali, to'la differensialning mvariantligi, yuqori tartibli xususiy hosila, aralash xususiy hosila, oshkormas funksiyaning hosilasi, lokal ekstremum, global ekstremum, Teylor formulasi, gradiyent.

VII bob. INTEGRAL HISOB

7.1. Aniqmas integral

Bizga ma'lumki, $F(x)=x^n$ funksiyadan birinchi tartibli hosila olinsa, $f(x)=F'(x)=nx^{n-1}$ ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi. Biz yuqorida qaragan bu funksiyalar o'zaro quyidagicha nomlanadi: $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. $F(x)$ funksiyaga ixtiyoriy $C=const$ – o'zgarmas sonning qo'shilishi uning $f(x)$ – hosilasiga ta'sir qilmasligini e'tiborga olsak, $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini $F(x)+C$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $f(x)=nx^{n-1}\to F(x)=x^n+C$, $f(x)=\sin x\Rightarrow F(x)=-\cos x+C,...$ Shunday qilib quyidagi ta'rif va teoremani keltirish mumkin.

$F(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $F'(x)$ mavjud bo'lsin.

1-ta'rif. Agar barcha $x\in[a;b]$ uchun $F'(x)=f(x)$ o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda bu funksiyalar uchun $F_2(x)=F_1(x)+C$ $(C=const)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. $x\in[a;b]$ oraliqda $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)$ funksiyani qaraymiz. Ta'rifga ko'ra $\Phi(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$. Demak, $\Phi(x)=C$ va $F_2(x)=F_1(x)+C$.

Shunday qilib, boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ shaklda yoziladi.

2-ta'rif. Boshlang'ich funksiyaning $F(x)+C$ umumiy ko'rinishi berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{7.1}$$

Bu yerda $\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ – integral osti ifodasi deb ataladi.

$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ bo'lgani uchun (7.1) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)dx=\int dF(x) \qquad (7.2)$$

Aniqmas integral quydagi xossalarga ega:

1) Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$\int dF(x)=F(x)+C.$

2) Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

$d\int f(x)dx=f(x)dx \quad \left(\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\right)$

3) O'zgarmas ko'paytuvchi A ni integral belgisidan tashqarisiga chiqarish mumkin:

$\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$, bu yerda $A\neq 0$. (7.3)

4) Chekli sondagi funksiyalarnimg algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng:

$\int[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+...+\int f_n(x)dx$. (7.4)

5) Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsa, u holda $\int f(ax+b)dx=$ $=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, bu yerda $a\neq 0$.

Integrallarni hisoblashda keng foydalaniladigan elementar funksiyalar uchun tuzilgan quyidagi asosiy integrallar jadvalini keltiramiz:

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad n\neq -1;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C;\quad \int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C.$

2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;\quad \int e^x dx=e^x+C.$

4. $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

5. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$

6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C.$

7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C.$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;\ (a>0).\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

9. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arc}tg\frac{x}{a}+C;\ (a\neq 0).\ \int\frac{dx}{x^2+1}=\mathrm{arc}tgx+C.$

10. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ (a>0).$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$

12. $\int shx\,dx=chx+C.$

13. $\int chx\,dx=shx+C.$

14. $\int tgx\,dx=-\ln|\cos x|+C.$

15. $\int ctgx\,dx=\ln|\sin x|+C.$

16. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

17. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

1-misol. Aniqmas integral asosiy xossalari va jadvaldan foydalanib integrallarni toping: 1) $\int 4x^5dx$; 2) $\int(3x^4+x^3-1)dx$; 3) $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$; 4) $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$.

Yechish. 1) $\int 4x^5dx=4\int x^5dx=\frac{4}{6}x^6+C=\frac{2}{3}x^6+C.$

2) $\int(3x^4+x^3-1)dx=3\int x^4dx+\int x^3dx-\int dx=\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-x+C.$

3) $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$

$=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}+\int\frac{dx}{x^2}=\ln|x|-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C.$

4) $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=tgx-ctgx+C.$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping:
1) $\int(tgx+ctgx)dx$; 2) $\int(3x^3+\sin x)dx$;

3) $\int\left(4x^3+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$; 4) $\int\left(\frac{(2x+3)^2}{x+1}\right)dx$.

Integral osti funksiyasi murakkab funksiyadan iborat bo‘lsa, u holda integrallashning quyidagi asosiy qoidalaridan foydalanamiz:

- o‘zgaruvchini almashtirish qoidasi;
- bo‘laklab integrallash qoidasi.

Aniqmas integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalga oshiriladi: $\int f(x)dx$ integralni o‘zgaruvchini alamashtirish qoidasi yordamida hisoblash kerak bo‘lsin. x o‘zgaruvchini t erkli o‘zgaruvchining biror differensiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalaymiz: $x=\varphi(t)$, bu yerda $t=\psi(x)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsin, deb faraz qilinadi, u holda $dx=\varphi'(t)dt$ bo‘lgani uchun

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{7.5}$$

2-misol. Integralni toping:

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+5}}$;

4) $\int\sqrt{25-x^2}dx$; 5) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Yechish.

1) $t=1+2\sqrt{x}$ almashtirish kiritamiz; bu yerdan $x=\frac{(t-1)^2}{4}$; $dx=\frac{2(t-1)}{4}dt$.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}=\int\frac{\frac{t-1}{2}\cdot\frac{2(t-1)}{4}dt}{t}=\frac{1}{4}\int\frac{(t-1)^2}{t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^2-2t+1}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{4}\int tdt-\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}{8}-\frac{1+2\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1+2\sqrt{x}\right|+C.$$

2) $t^2=x+4$ almashtirish kiritamiz, bu yerdan $x=t^2-4$; $dx=2tdt$, shuningdek, $t=\sqrt{x+4}$.

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{t}{t^2-4}2tdt=2\int\frac{t^2dt}{t^2-4}=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=$$

$$=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-4}=2t+8\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+5}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2+\frac{5}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-x-\frac{5}{4}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-0,5)^2+1,5}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-0,25)}{\sqrt{\left(\sqrt{1,5}\right)^2-(x-0,5)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-0,5}{\sqrt{1,5}}+C.$$

4) $x=5\sin t$ almashtirish kiritamiz, $dx=5\cos t dt$ shuningdek $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda $\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-25\sin^2 t}=5\sqrt{1-\sin^2 t}=5\cos t$.

$$\int\sqrt{25-x^2}dx=\int 5\cos t\cdot 5\cos t dt=25\int\cos^2 t dt=25\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{25}{2}\int dt+\frac{25}{2}\int\cos 2t dt=$$

$$=\frac{25}{2}t+\frac{25}{4}\sin 2t+C.$$

Endi x o'zgaruvchiga qaytamiz: $t=\arcsin\frac{x}{5}$,

$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$.

$$\int\sqrt{25-x^2}dx=\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}+C.$$

5) $t=tg\frac{x}{2}$ u hoida $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $3+5\cos x=3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{8-2t^2}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{8-2t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping:

1) $\int\left(tg(6x+1)+ctg7x\right)dx$; 2) $\int\left(3x^3+\sin(8x+3)\right)dx$;

3) $\int\sqrt{3x+6}dx$; 4) $\int\ln(7x-3)dx$.

Aniqmas integralda bo'laklab integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

Ma'lumki, uv ko'paytmaning differensiali

$$d(uv)=udv+vdu \tag{7.6}$$

formula bilan hisoblanadi. (7.6) formulaning ikkala tomonini ham integrallaymiz. U holda

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow uv = \int vdu + \int udv \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu \qquad (7.7)$$

(7.7) bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu yerda u, v – differensiallanuvchi funksiyalar.

(7.7) formulani aniqmas integralga qo'llash uchun, integral ostidagi ifoda ikki qismga ajratiladi va birinchi qismini u, ikkinchi qismini esa dv, deb olinadi. So'ngra birinchi u ifodani differensiallab du ifodani, ikkinchi dv ifodani integrallab $\int vdu$ integralni hosil qilamiz.

3-misol. Integralni toping: 1) $\int x^2 \ln xdx$; 2) $\int x\cos xdx$; 3) $\int xe^x dx$.

Yechish. 1) $\int x^2 \ln xdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (7.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

2) $\int x\cos xdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u = x$, $dv = \cos xdx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx$, $v = \sin x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (7.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

3) $\int xe^x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u = x$, $dv = e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx$, $v = e^x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (7.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping:

1) $\int (3x+2)\sin(2x-3)dx$; 2) $\int 4x\ln(2x-1)dx$; 3) $\int (3x-7)e^{2x+3}dx$.

Aniqmas integralni hisoblashda integral osti funksiyaning ko'rinishini e'tiborga olgan holda integralni hisoblash usulini tanlash kerak bo'ladi. Bunday usullar ko'p bo'lib biz ulardan biri bilan tanishib chiqamiz.

Sodda ratsional ifodalar asosan to'rt xil bo'ladi. Ratsional ifodalarni integrallash shu to'rt xil sodda ifodalarni integrallashga keltiriladi. Shu sababli bu to'rt xil ifodani integrallash masalasi alohida ahamiyat kasb etadi. Ularning ko'rinishlari quyidagicha:

1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

bu yerda A, M, N, a, p, q sonlar haqiqiy sonlar bo'lib, $k>1$ natural son va $p^2-4q<0$, deb hisoblanadi.

Endi yuqoridagi ifodalarni integrallash masalasiga o'tamiz.

1) $\dfrac{A}{x-a}$ ifodani integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ifodani integrallaymiz $(k>1)$.

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

3) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ (p^2-4q) ifodani integrallash uchun uning suratida maxrajning differensialini ajratib olish va maxrajini kvadratlar yig'indisiga keltirish orqali jadvaldagi integrallarga keltiriladi.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Mx+N=\dfrac{M}{2}(2x+p)+N-\dfrac{Mp}{2}\end{array}\right|=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k>1)$ sodda ifodani integrallash uchun $x+\dfrac{p}{2}=z$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$dx=dz,\ x^2+px+q=\left(z-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(z-\frac{p}{2}\right)+q=z^2+q-\frac{p^2}{4}.$$ U holda

$a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$ begilashdan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=M\int\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^k}=MI_0+\frac{2N-Mp}{2}I_k.$$

Bu yerda

$$I_0 = \int \frac{zdz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+a^2)}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(z^2+a^2\right)^{k-1}} + C$$

Demak, $I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}$ integralni hisoblash kifoya.

$$I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{z^2+a^2-z^2}{\left(z^2+a^2\right)^k}dz = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}.$$

Bu yerda $I_{k-1} = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}$ belgilash kiritamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$I_k = I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right). \quad (7.8)$$

$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ integralni hisoblash uchun uni bo‘laklab integrallaymiz.

$$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k} = \left| \begin{array}{ll} u = z, & du = dz \\ dv = \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}, & v = \frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}} = \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

So‘ngi topilgan ifodani (7.8) formulaga qo‘yamiz, natijada

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} - \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\right) \quad (7.9)$$

(7.9) rekurrent formula deb ataladi. $z = \frac{2x+p}{2}$ va $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ almashtirishlarga qaytib, izlanayotgan integralni topamiz.

$I_1 = \int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{z}{a} + C$ ni bilgan holda (7.9) formula yordamida $I_2 = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$ integralni hisoblash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+a^2}+\frac{z}{2(z^2+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{z}{2a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{z}{a}+C.$$

Shunday qilib, biz barcha sodda ifodalarni integrallash formulalarini hosil qildik.

Endi ratsional ifoda funksiyalarni integrallash qoidasini keltiramiz. Ratsional ifodani integrallash uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

1) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n\geq m$ ratsional ifoda noto'g'ri bo'lsa, u holda uni ko'phad va to'g'ri ratsional ifoda yig'indisi ko'rinishda ifodalab olamiz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m,$$

2) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m$ ratsional ifoda to'g'ri bo'lsa, u holda uni sodda ifodalarga yoyamiz;

3) ratsional ifoda integralini uning butun qismi va sodda ratsional ifodalar integrallari yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va har bir integralni hisoblaymiz.

4-misol. Integralni toping: 1) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$; 2) $\int\frac{x-1}{x^3+1}dx$.

Yechish.

1) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ integralni hisoblash uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatdan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B+C=0, \\ 3A+B-C+D=0, \\ -A=1. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2$. U holda

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

2) $\int\frac{x-1}{x^3+1}dx$ integralni hisoblash uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Bundan $x-1=A(x^2-x+1)+Mx(x+1)+N(x+1)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatdan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+M=0, \\ -A+M+N=1, \\ A+N=-1. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A=-\frac{2}{3}$, $M=\frac{2}{3}$, $N=-\frac{1}{3}$. U holda

$$\int\frac{x-1}{x^3+1}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+\ln\sqrt[3]{x^2-x+1}+C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping:

1) $\int\frac{x^2-1}{x^3-1}dx$; 2) $\int\frac{x^2+x-1}{x^6-1}dx$; 3) $\int\frac{x^3-1}{x^8-1}dx$.

Endi aniqmas integralning iqtisodiyotga ba'zi tatbiqlari bilan tanishib chiqamiz.

Agar firmaning marjinal daromad funksiyasi $MR(Q)$ berilgan bo'lsa, ya'ni

$$MR(Q)=f(Q)$$

funksiya ma'lum bo'lsa, u holda firmaning yalpi daromad funksiyasi quyidagi aniqmas integral yordamida topiladi:

$$R(Q)=\int MR(Q)dQ=\int f(Q)dQ=F(Q)+C. \qquad (7.10)$$

Bu yerda $F(Q)$ – boshlang'ich funksiya.

5-misol. Firmaning marjinal daromad funksiyasi

$$MR(Q)=150-15Q$$

ko'rinishida berilgan. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chlqarilganda firmaning umumiy daromad $R(Q)=1000$ sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Umumiy daromad funksiyasi $R(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$R(Q)=\int(150-15Q)dQ=150Q-\frac{15Q^2}{2}+C.$$

$Q=10.$ $R(Q)=1000$ bo'lganidan foydalanib, $C=250$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, firmaning yalpi daromad funksiyasi

$$R(Q)=150Q-\frac{15Q^2}{2}+250$$

ko'rinishda bo'ladi.

Xuddi shuningdek, marjinal xarajat va foyda funksiyalari ma'lum bo'lganda umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalarini ham aniqmas integraldan foydalanib topish mumkin.

6-misol. Firmaning marjinal xarajat funksiyasi

$$MC(Q)=Q^2+3Q+8$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=0$ da firmaning xarajati 250 sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda uning umumiy xarajat funksiyasini toping.

Yechish. Umumiy xarajat funksiyasi $C(Q)$ ni quyldagi integraldan foydalanib topamiz: $\dfrac{dC(Q)}{dQ}=MC=Q^2+3Q+8.$

$$C(Q)=\int(Q^2+3Q+8)dQ.$$

$$C(Q)=\int Q^2dQ+3\int QdQ+8\int dQ=\frac{1}{3}Q^3+3\left(\frac{1}{2}Q^2\right)+8Q+k,$$

$$C(Q)=250,\ Q=0 \text{ da } k=250.$$

Demak, umumiy xarajatlar funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C(Q)=\frac{1}{3}Q^3+\frac{3}{2}Q^2+8Q+250.$$

7-misol. Firmaning marjinal foyda funksiyasi

$$MF(Q)=-3Q^2+100Q-200.$$

ko'rinishiga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarganda firmaning foydasi $F=1500$ sh.p.b. ga teng bo'lsa, u holda uning yalpi foyda funksiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Yechish. Marjmal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasini quyidagi integral yordamida topamiz:

$$F(Q) = \int MF(Q)\,dQ = \int(-3Q^2+100Q-200)\,dQ = -Q^3+50Q^2-200Q+C.$$

$Q=10$ da $F=1500$ ekanligini nazarga olib, $C=500$ ekanligini topamiz.

Demak, yalpi foyda funksiyasi

$$F(Q) = -Q^3+50Q^2-200Q+500\,.$$

ko'rinishga ega.

Ma'lumki, marjinal mehnat unumdorligi $MQ(L)$ ishlab chlqarish funksiyasi $Q(L)$dan olingan birinchl tartibli hosiladan iborat. Shu sababli ishlab chiqarish hajmini mehnatning funksiyasi sifatida aniqlash uchun marjinal mehnat unumdorligini integrallaymiz, ya'ni

$$Q(L) = \int MQ(L)\,dL.$$

8-misol. Marjinal mehnat unumdorlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan.

$$MQ(L) = \frac{5}{\sqrt{L}} - 1.$$

Agar ishlab chlqarishda $L=4$ ta kishi ishlaganda 10 ta mahsulot ishlab chiqarilsa, u holda ishlab chlqarish funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$Q(L) = \int MQ(L)\,dL = \int\left(\frac{5}{\sqrt{L}} - 1\right)dL = 10\sqrt{L} - L + C.$$

$L=4$ da $Q(L)=10$ ekanligini inobatga olib $C=4$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q(L) = 10\sqrt{L} - L + 4\,,$$

ko'rinishga ega ekan.

Deylik, talab egiluvchanlik funksiyasi

$$E_{Q_D}(P) = f'(P)\cdot\frac{P}{Q_D} = P\cdot\frac{f'(P)}{f(P)}, \tag{7.11}$$

ma'lum bo'lsin. U holda talab funksiyasi aniqmas integral yordamida aniqlanadi. Buning uchun (7.11) ifodadan

$$\frac{E_{Q_D}(P)}{P}=\frac{f'(P)}{f(P)},$$

tenglikni hosil qilib, uning ikki tomonini integrallaymiz.

$$\int\frac{f'(P)}{f(P)}dP=\int\frac{E_{Q_D}(P)}{P}dP+C.$$

9- misol. Talabning narx bo'yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_D(P)=\frac{-P^2}{170-P^2}, \qquad 0<P<13,$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $P=7$ sh.p.b. ga teng bo'lganda unga bo'lgan talab $Q_D=550$ bo'lsa, u holda talab funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish.

$$f'(P)\frac{P}{Q_D}=\frac{-P^2}{170-P^2}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f'(P)}{f(P)}=\frac{-P}{170-P^2}.$$

Hosil bo'lgan tengllkning ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int\frac{f'(P)}{f(P)}dP=\int\frac{-P}{170-P^2}dP.$$

va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln f(P)=\frac{1}{2}\ln(170-P^2)+\ln C.$$

Bu tenglikdan $f(P)$ funksiyani aniqlaymiz.

$$f(P)=C\sqrt{170-P^2},$$

Bu tenglikka boshlang'ich shartlarni qo'yib topamiz.

$$550=C\sqrt{170-49} \Rightarrow 550=C\sqrt{121} \quad \Rightarrow C=50.$$

Demak, talab funksiyasi

$$f(P)=50\sqrt{170-P^2},$$

ko'rinishga ega.

Agar taklif egiluvchanligi $E_{Q_S}(P)=\varphi'(P)\cdot\frac{P}{Q_S}=P\cdot\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$, (7.12)

ma'lum bo'lsa, u holda taklif funksiyasi $\varphi(P)$ aniqmas integral yordamida topiladi. Buning uchun (7.12) tenglikni quyidagi

$$\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}=\frac{E_{Q_S}(P)}{P},$$

ko'rinishda yozamiz. So'ngra tenglikning ikki tomonini integrallaymiz va topamiz:

$$\int\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}dP=\int\frac{E_{Q_S}(P)}{P}dP+C.$$

10-misol. Taklifning narx bo'yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_S(P)=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)(15+3P)}$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $P=3$ sh.p.b. ga teng bo'lganda taklif $Q_S=1080$ birlik bo'lsa, u holda taklif funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra,

$$\phi'(P)\frac{P}{Q_S}=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)(15+3P)}.$$

Bundan

$$\frac{\varphi'(P)}{Q_S}=\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}=\frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)}.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\ln\phi(P)=\int\frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)}dP.$$

Bundan

$$\ln\varphi(P)=\ln(3+2P)(15+3P)+\ln C$$

va nihoyat

$$\varphi(P)=C(3+2P)(15+3P)$$

funksiyani hosil qilamiz.

Bundan, boshlang'ich shartlarni nazarga olib topamiz:

$$\varphi(3)=1080=C(3+6)(15+9)\ \Rightarrow\ C=5.$$

Demak, taklif funksiyasi $\varphi(P) = 5(3+2P)(15+3P)$ ko'rinishda bo'ladi.

Ma'lumki, agar $M(t)$ – kattalik biror-bir kompaniyaning t vaqtdagi fondini ifodalasa, u holda $\frac{dM(t)}{dt}$ – kattalik bu kompaniyadagi dt vaqtdagi pul oqimi bildiradi. Faraz qilamiz qandaydir bankda bir yilllk pul oqimi o'zgarmas $\frac{dM(t)}{dt} = k = const$ bo'lsin. U holda bu bankning t vaqtdagi fondi quyidagicha aniqlanadi: $M(t) = \int k dt = kt + C$.

7.2. Integrallash usullari

Aniqmas integralni mtegrallash usullari bilan tanishlb chiqamiz.

Irratsional funksiyalarni integrallash usullari. Har qanday ratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lishini va ularni hisoblash usullarini ko'rib chiqdik. Lekin har qanday irratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lavermaydi. Biz hozir boshlang'ich funksiyalari elementar bo'ladigan ba'zi bir sodda irratsional funksiyalarni mtegrallash bilan shug'ullanamiz. Ular asosan biror almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltiriladigan funksiyalardir. Biz quyida ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1. $I = \int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ..., \sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx$ $(m_1, n_1, m_2, n_2, ..., m_k, n_k$ – butun sonlar) ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bu ko'rinishdagi integrallar $x = t^s$, bu yerda s – $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_k}{n_k}$ funksiyalarning umumiy maxraji, almashtirish natijaslda ratsional funksiya integraliga keltiriladi:

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ..., \sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx = \int R(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, ..., t^{r_k})st^{s-1}dt.$$

2. $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bu integralda R – o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d – haqiqiy sonlar va $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – ratsional sonlar bo'lib, ularning umumiy maxraji m va $ad - bc \neq 0$ bo'lsin. Agar $ad - bc = 0$ bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d} = const$ bo'lib $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)$ funksiya x ga nisbatan ratsional funksiya bo‘ladi. Quyidagi $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ almashtirishni kiritamiz. U holda

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},\ x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m},\ dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}.$$

Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

3. $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. I_1 ko‘rinishdagi integralni hisoblash uchun ildiz ostidagi funksiyadan to‘la kvadrat ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right).$$

So‘ngra $x+\frac{b}{2a}=u,\ dx=du$ almashtirish bajariladi. Natijada integral jadvaldagi $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}$ ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

I_2 integral suratida ildiz ostidagi funksiyaning differensiali ajratib olinadi va bu integral ikkita integral yig‘indisi ko‘rinishida funksiyalanadi:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$

$$+\left(B-\frac{AB}{2a}\right)I_1=\frac{A}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

bu yerda I_1 yuqorida hisoblangan integral.

I_3 integralni hisoblash $x=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{1}{u^2}du$ almashtirish yordamida I_1 ga keltiriladi.

11-misol. Integralni toping:

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

Yechish.

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblaymiz. $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ funksiyalarning umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi va integral quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=$$

$$=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu funksiyalarning umumiy maxraji $m=6$. U holda $x+1=t^6$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlar bajarib, quyidagi $I=6\int\frac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|+C.$$

3) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ integralni hisoblaymiz. Bu integral I_2 ko'rinishidagi integraldir. Shu sababli funksiyaning suratini $3x-1=\frac{3}{2}(2x+2)-4$ yozib olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x+2)-$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Mashqni bajaring. Integralni toping:

1) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}$; 3) $\int\frac{5x+4}{\sqrt{3x^2+5x+3}}dx$.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash usullari. $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ integralni qaraylik. Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun umumiy usul mavjud. Haqiqatan ham, yuqoridagi integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishni bajarsak,

$$x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

kelib chiqadi. Bu funksiyani integralga qo'ysak,

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

hosil bo'ladi. Bunda R o'z argumentlarining ratsional funksiyasi bo'lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

Shuni ta'kldlash kerakki, $t = tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida $\int\frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ ko'rinishdagi integrallarni topish osonlashadi.

Ba'zi hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional – kasr funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shunimg uchun ba'zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish anchagina qulay bo'ladi.

a) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $\sin x = t$ almashtirish bajariladi.

b) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $\cos x = t$ almashtirish bajariladi.

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda $tgx = t$ almashtirish bajariladi.

d) $I = \int \sin^n x \cdot \cos^m xdx$ integralni qaraylik. Bunda m, n - butun sonlar. Quyldagi uchta holni ko'ramiz:

1) m va n lardan hech bo'lmaganda biri toq son bo'lsin. Masalan, m-toq son, ya'ni m=2k+1, k-butun son. U holda $t = \sin x, dt = \cos x,\ \cos^{2k} x = (1-\sin^2 x)^k = (1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I = \int \sin^n x \cdot \cos^m xdx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos xdx = \int t^n \cdot (1-t^2)^k dt$$

funksiya hosil bo'ladi. Demak, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

2) m va n musbat juft sonlar bo‘lsin, ya’ni m=2s. n=2k, s, k- natural sonlar. U holda integrallash jarayonida

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

3) Agar m va n lar juft sonlar bo‘lib, ularning kamida biri manfiy bo‘lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda tgx=t almashtirishni bajarish lozim bo‘ladi.

e) $\int tg^n x dx,\ \int ctg^n x dx,\ n-$ natural son, n>1 ko‘rinishdagi integrallar mos ravishda $tgx=t$ yoki $ctgx=t$ almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, $tgx=t,\ \ x=arctgt,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo‘ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

k) $\int\sin nx\cdot\cos mxdx,\qquad \int\cos nx\cdot\cos mxdx,\qquad \int\sin nx\cdot\sin mxdx$

ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$

$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$

$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig‘indining integraliga keltirish mumkin.

12-misol. Integralni toping: 1) $\int tg^5 xdx$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$.

Yechish. 1) $\int tg^5 xdx$ integralni hisoblashda $tgx=t$, $x=arctgt,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajaramiz. U holda

$$\int tg^5 xdx=\int\frac{t^5}{1+t^2}dt=\int(t^3-t+\frac{t}{t^2+1})dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+C$$

hosil bo‘ladi.

2) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ integralning integral ostidagi funksiyasi uchun

$$R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\cos x)$$

shart bajariladi, shu sababli uni hisoblashda $tgx=t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(1+tg^2x)d(tgx)=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=tgx+\frac{tg^3x}{3}+C.$$

Mashqni bajaring. Integralni toping:

1) $\int\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 2x}dx$; 2) $\int\frac{5+2tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

3) $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$; 4) $\int\cos^8 x\sin^7 xdx$

Trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash usuli. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ integrallarning xususiy hollarini hisoblashni yuqorida qarab o'tdik. Bu kabi integrallarni hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib, bunda biz avval trigonometrik almashtirishlarga asoslangan hisoblash usulini ko'rib o'tamiz.

ax^2+bx+c kvadrat uchhadni to'la kvadratini ajratish va o'zgaruvchini almashtirish natijasida $u^2\pm k^2$ ko'rinishga keltirish mumkin. Shunday qilib, quyidagi uch turdagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,\ I_2=\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du,\ I_3=\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du.$$

I_1 integral $u=k\sin t$, $u=k\cos t$ almashtirishlar natijasida $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Haqiqatan ham, $u=k\sin t$, $k>0$ almashtirishdan foydalansak, $du=k\cos tdt$, $\sqrt{k^2-u^2}=k\cos t$,

$\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du=\int R(k\sin t,k\cos t)k\cos tdt$ bo'ladi.

I_2 integral esa $u=k\,tgt, u=k\,ctgt$ almashtirishlar yordamida $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

Haqiqatan ham, $u=k\,tgt$, $k>0$ almashtirish bajaramiz. U holda $du=\frac{k}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{k^2+u^2}=\frac{k}{\cos t}$

$$\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du=\int R\left(k\frac{\sin t}{\cos t},\frac{k}{\cos t}\right)\cdot\frac{k}{\cos^2 t}dt.$$

I_3 integral $u = k\sec t = \dfrac{k}{\cos t}$ yoki $u = \dfrac{k}{\sin t}$ almashtirish yordamlda sint va cost ga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Haqiqatan ham. $u = \dfrac{k}{\cos t}$ almashtirish bajaraylik. U holda $du = \dfrac{k\sin t}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{u^2 - k^2} = k\dfrac{\sin t}{\cos t}$

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - k^2})du = \int R\left(\frac{k}{\cos t}, \frac{k\sin t}{\cos t}\right)\cdot \frac{k\sin t}{\cos^2 t}dt$$

bo'ladi. $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Bu integrallar yuqorida keltirilgan metodlar yordamida hisoblanadi.

13-misol. Integralni toping: $\int\sqrt{a^2 + x^2}dx$.

Yechish. $x = atgt$ almashtirish yordamida integralni

$$\int\sqrt{a^2 + x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = atgt \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \end{array} \right| = \int\sqrt{a^2(1 + tg^2 t)}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt = a^2\int\frac{dt}{\cos^3 t}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $\int\dfrac{dt}{\cos^3 t}$ integralni hisoblashni o'quvchilarga havola qilamiz.

$\int\sqrt{a^2 + x^2}dx$ integralni quyidagicha bo'laklab integrallash ham mumkin.

$$\int\sqrt{a^2 + x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 + a^2}, & du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int\frac{a^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int\sqrt{x^2 + a^2}dx + \int\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int\sqrt{x^2 + a^2}dx + a^2\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|.$$

$\int\sqrt{x^2 + a^2}dx$ funksiyani tenglikning chap tomoniga o'tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\sqrt{a^2 + x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Izoh. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ integrallarni ham bo'laklab integrallash mumkin. Bu integrallarni mustaqil ishlang.

Eyler almashtirishi yordamida integrallash. $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko'rinishdagi integralni Eyler almashtirishlari yordamida hisoblash. Agar ildiz ostidagi kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari bo'lmasa va $a>0$ bo'lsa, u holda ildiz osti funksiya manfiy bo'lib, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ funksiya mavjud bo'lmaydi va integrallash masalasi o'z ma'nosini yo'qotadi. Shuning uchun quyidagi ikki hol mavjud.

1) $a<0$ va ax^2+bx+c uchhad haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin. Bu hoida

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\cdot t$$

almashtirishni bajaramiz. Bunda α, β kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari. Soddalik uchun $\alpha<\beta$, deb faraz qilamiz. Demak,

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,\qquad a(x-\beta)=(x-\alpha)\cdot t^2,\qquad x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt,\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$

Endi topilgan funksiyalarni berilgan integralga qo'yib, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

Agar $\alpha=\beta$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}$ funksiya mavjud bo'lmaydi, chunki $a<0$.

2) $a>0$ bo'lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$$

almashtirishni bajaramiz. Bundan

$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}},\qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2bt+2c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt.$$

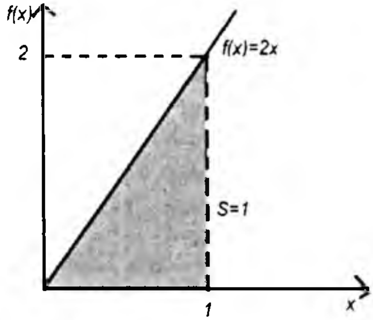
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=\frac{bt+c\sqrt{a}+t^2\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

kelib chiqadi. Topilganlarni berilgan integralga qo'yib, yana t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan almashtirishlar Eyler almashtirishlari deb ataladi.

7.3. Aniq integral

Aniq integral (Riman integrali) biror-bir intervalda aniqlangan funksiya grafigining egri chizig'i va bu intervallardan hosil bo'lgan sohaning yuzini aniqlaydi. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyani $[0;1]$ oraliqda qaraymiz.



Bu uchburchakning yuzi $S=1$ ekanligi geometriyadan ma'lum. Biz bu misol yordamida $y=f(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan sohalarning yuzini integratsiya yordamida hisoblash uchun matematik usul bilan tanishamiz.

Buning uchun biz birinchi navbatda $f(x)$ funksiya aniqlangan intervalni kichik kesmalarga ajratamiz. Ixtiyoriy $[a,b]$ kesmani kichik qismlarga ajratish quyidagicha amalga oshiriladi. $[a;b]$ kesmaga tegishli $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nuqtalardan foydalanib ixtiyoriy ravishda n ta qismiy kesmalar:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$$

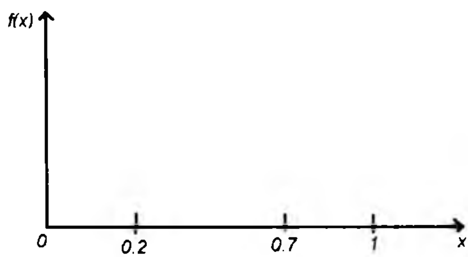
hosil qilamiz. Bu yerda

$$[x_0,x_1]+[x_1,x_2]+...+[x_{n-1},x_n]=[a,b].$$

Kichik kesmalar uzunligini mos ravishda $\Delta_i=x_i-x_{i-1},\ i=\overline{1,n}$ kabi belgilab olamiz. Bizning misolimizda

$$[a,b]=[0;1]\Rightarrow a=0=x_0<x_1<x_2<...<x_n=1=b.$$

Masalan, $n=3$ bo'lib, $x_0=0,\ x_1=0.2,\ x_2=0.7,\ x_3=1$ bo'lsa, biz quyidagiga ega bo'lamiz.



Demak, $\Delta_1 = 0.2,\ \Delta_2 = 0.5,\ \Delta_3 = 0.3$.

Ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqta olamiz. U holda

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \tag{7.13}$$

yig'indi Riman yig'indisi deb ataladi.

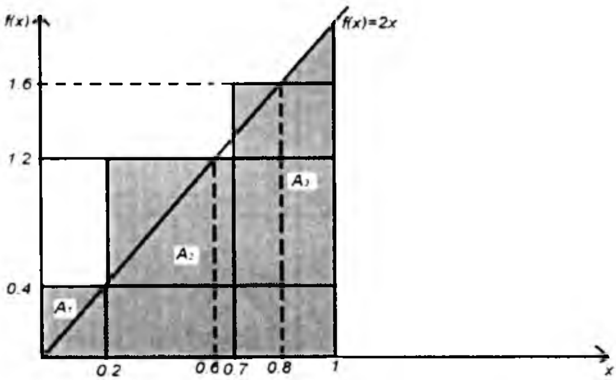
Bizning misolimizda

$\xi_1 = 0.2,\ \xi_2 = 0.6,\ \xi_3 = 0.8 \Rightarrow f(0.2) = 0.4,\ f(0.6) = 1.2,\ f(0.8) = 1.6$.

U holda Riman integrali

$A_1 = 0.4 \times 0.2 = 0.08,\ A_2 = 1.2 \times 0,5 = 0.6,\ A_3 = 1.6 \times 0,3 = 0.18,$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 = 1,16.$$



Har bir $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtalar ixtiyoriy bo'lgani uchun bu nuqtalarni shunday tanlash mumkinki Riman yig'indisini tashkil etuvchi to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a.b]$ kesma bilan chegaralangan soha yuzidan (S) katta $(S_{\max})$, y'ani

$$\exists \bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(\bar{\xi}_i) \geq f(x),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow S_{\max} = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i)\Delta_i$$

yoki bu to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a.b]$ kesma bilan chegeralangan soha yuzidan kichik $(S_{\min})$, y'ani

$$\exists \underline{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(\underline{\xi}_i) \leq f(x),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta_i$$

bo'lishi mumkin.

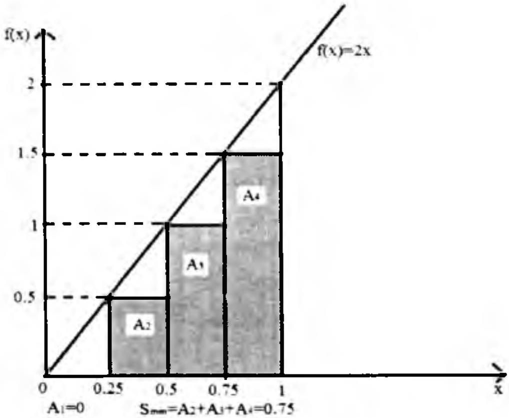
Bizning misolimizda $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0.25$, deb olsak, u holda

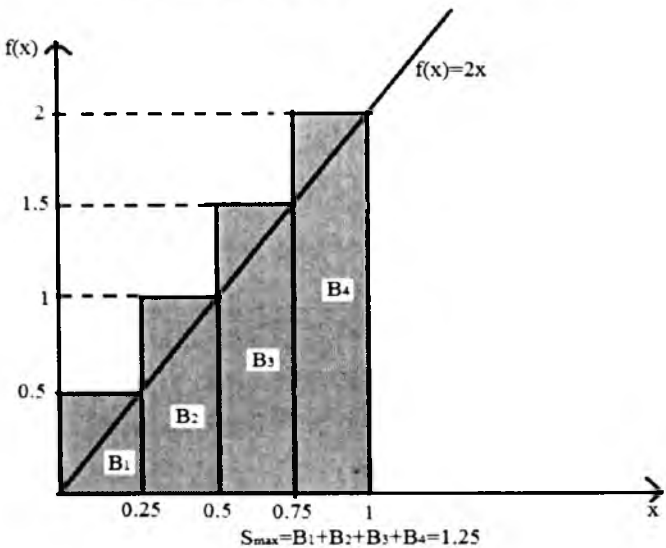
$$\overline{\xi}_1 = 0,25 \;\; \overline{\xi}_2 = 0,5, \;\; \overline{\xi}_3 = 0,75, \;\; \overline{\xi}_4 = 1,$$

$$\underline{\xi}_1 = 0 \;\; \underline{\xi}_2 = 0,25, \;\; \underline{\xi}_3 = 0,5, \;\; \underline{\xi}_4 = 0,75.$$

$$S_{\max} = 0,5 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 1,5 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = 1,25,$$

$$S_{\min} = 0 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 1,5 \cdot 0,25 = 0,75.$$





Bu topilgan $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlar oraslda shunday S^* qiymat borki $S_{\min} \le S^* \le S_{\max}$, $S^* = S$. Bizning misolimizda S^* qiymatni topish uchun $\Delta_i = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, deb olamiz. U holda $x_i = \frac{i}{n}$, deb olib $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\xi_i = \frac{i-1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1),$$

$$\xi_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i.$$

Bu yerda

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

U holda

$$S_{\min} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) = 1 - \frac{1}{n}, \quad S_{\max} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$1 - \frac{1}{n} < S^* < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{\min} = \lim_{n \to \infty} S_{\max} = 1 = S = S^*.$$

$[a,b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya va $L \in \mathbb{R}$ – son berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday kichik musbat δ $\left([a,b] \supset \Delta_i < \delta\right)$ son topilsaki,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i - L\right| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi deyiladi. Bu yerda $\xi_i \in \Delta_i$.

L son esa $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi aniq integrali, deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerda, a integralning quyi, b integralning yuqori chegarasi deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralning ta'rifidan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \tag{7.14}$$

Ma'lum vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan pul miqdori. $u = f(t)$ – funksiya t – vaqtning har bir momentida jamg'arma bankiga tushadigan pul miqdorini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig'ida bankka tushgan pulning U umumiy miqdorini topish talab etiladi.

Agar $f(t) = const$ bo'lsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan U pul miqdori $U = f(c)\cdot(T-0) = f(c)\cdot T$ formula bilan topiladi, bu yerda $c \in [0;T]$. Agar $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ vaqt oralig'ining har bir momentida bankka $f(c_1)$ pul birligi, $\left[\frac{T}{2};T\right]$ oraliqda vaqtning har bir momentida $f(c_2)$ pul birligi tushsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig'ida tushgan umumiy pul miqdori

$$U = f(c_1)\frac{T}{2} + f(c_2)\frac{T}{2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

$f(t)$ funksiya $[0;T]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'lsin. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... t_{n-1} < t_n = T$ nuqtalar yordamida $[0;T]$ kesmani kichik vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1}, t_i]$ vaqt oralig'ida bankka tushgan ΔU_i pul miqdori taqriban $\Delta U \approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,2,3,...,n$. U holda

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow U = \lim_{\max\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow U = \int_0^T f(t)dt.$$

$f(t) \geq 0$ bo'lgani uchun $[0;T]$ vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan umumiy pul miqdori son jihatidan $f(t)$, $t = 0$, $t = T$, Ot chiziqlar bilan chegaralangan figura yuziga teng.

Ma'lum vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi. $y = f(t)$ funksiya vaqt o'tishi bilan biror ishlab chiqarishning unumdorligi o'zgarishini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan Q mahsulot hajmini topamiz.

$[0;T]$ kesmani $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ nuqtalar yordamida vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1}, t_i]$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan ΔQ_i

mahsulot hajmi taqriban $\Delta Q \approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,2,3,...,n$. U holda

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow Q = \int_0^T f(t)dt.$$

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz:

1) Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o‘zgaradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$$

3) O‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

4) Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar integrallarining yig‘indisiga teng:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx.$$

5) Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki, ushbu nuqtada

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $c \in (a;b)$.

Agar $[a;x]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu yerda hosil bo‘lgan soha egri chiziqli trapetsiya deb ataladi. Yuqoridagilardan ma’lumki bu sohaning yuzi

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

integral bilan aniqlanadi. $S(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lishini, ya’ni $S'(x) = f(x)$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$S(x+h) - S(x)$ ayirmani qaraylik, bunda $h > 0$. Bu ayirma asosi $[x; x+h]$ bo‘lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Agar h son kichik bo‘lsa, u holda: $S(x+h) - S(x) \approx f(x)\cdot h$. Demak,

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x).$$

Bu munosabatda $h \to 0$ limitga o‘tamiz:

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi.

$f(x)$ funksiyaning istalgan boshqa $F(x)$ boshlang‘ich funksiyasi $S(x)$ funksiyadan o‘zgarmas songa farq qiladi, ya’ni

$$F(x) = S(x) + C$$

Nyuton – Leybnits teoremasi. Agar $F(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, u $y = f(x)$ funksiyaning biror – bir boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

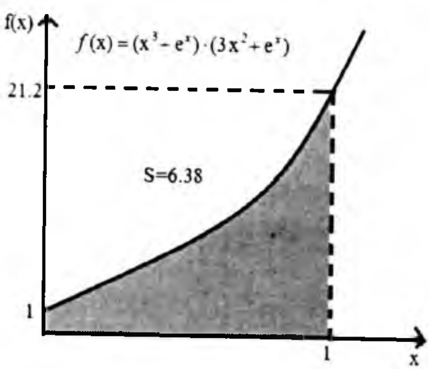
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (7.15)$$

Nyuton – Leybnits formulasi o‘rinli bo‘ladi.

Demak aniq integralning geometrik ma’nosi egri chiziqli trapetsiyaning yuzi ekan.

14-misol. $[0;1]$ kesmada aniqlangan $f(x) = (x^3 + e^x)(3x^2 + e^x)$ egri chiziq, Ox koordinata o‘qi, $x = 0$ va $x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Bunday sohalar egri chiziqli trapetsiya deb ataladi.



Birinchi navbatda $f(x) = (x^3 + e^x)(3x^2 + e^x)$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C = 0)$:

$$F(x)=\int(x^3+e^x)(3x^2+e^x)dx=\frac{(x^3+e^x)^2}{2}.$$

Endi (7.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\int_0^1(x^3+e^x)(3x^2+e^x)=\left.\frac{(x^3+e^x)^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1}=6{,}38,\quad e=2{,}71.$$

15-misol. $[0;3]$ kesmada aniqlangan $f(x)=3xe^{x^2}$ egri chiziq, Ox koordinata o'qi, $x=0$ va $x=3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini toping.

Yechish. Birinchi navbatda $f(x)=3xe^{x^2}$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int 3xe^{x^2}dx=\frac{3e^{x^2}}{2}.$$

Endi (7.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\int_0^3 3xe^{x^2}dx=\left.\frac{3e^{x^2}}{2}\right|_{x=0}^{x=3}=\frac{3e^9-3}{2}=\frac{3}{2}(e^9-1),\quad e=2{,}71.$$

16-misol. $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada aniqlangan $f(x)=2\sin 3x$ egri chiziq, Ox koordinata o'qi, $x=0$ va $x=\frac{\pi}{3}$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini toping.

Yechish. Birinchi navbatda $f(x)=2\sin 3x$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int 2\sin 3x dx=-\frac{2\cos 3x}{3}.$$

Endi (7.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\left|\int_0^{\pi/3}2\sin 3xdx\right|=\left|-\left.\frac{2\cos 3x}{3}\right|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{4}{3}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini toping:

1) $f(x)=4\cos 2x,\ x=0,\ x=\frac{2\pi}{3},\ y=0;$

2) $f(x)=2x^2+4x+3,\ x=0,\ x=2,\ y=0.$

Aniq integralni aniq hisoblashning asosiy yagona usuli, integral ostidagi funksiya uchun boshlang'ich funksiyani aniqlash va so'ngra Nyuton – Leybnits formulasini qo'llashdir. Aniq integralni hisoblashda qo'llaniladigan boshqa usullar bilan tanishib chiqamiz.

Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_a^b f(x)dx$$

integral berilgan bo'lib, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaramiz. Bunda $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz bo'lishi kerak. Bu yerda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

17-misol. Integralni hisoblang: 1) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$

Yechish. 1) Bu integralda $\sqrt{x}=t$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x=t^2$. $dx=2tdt$. $x=1$ da $t=1$, $x=9$ da $t=3$. Demak,

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}=\int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t}=\int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt=$$

$$=\int_1^3\left(1-\frac{5}{2t+5}\right)dt=t\Big|_1^3-5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3=$$

$$=3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7)=2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

2) $\sin x=t$ deb almashtirish bajaramiz. U holda $\cos xdx=dt$, $x=\frac{\pi}{6}$ da, $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$ da $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-5}dt=-\frac{1}{4t^4}\Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right)=\frac{32}{9}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib hisoblang: 1) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$; 2) $\int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z+1}$.

Aniq integralda bo‘laklab integrallash quyidagicha amalga oshiriladi: $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. U hoida aniq integralda bo‘laklab integrallash quyidagi formula

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (7.16)$$

bo‘yicha amalga oshiriladi.

18-misol. Integralni toping: 1) $\int_1^3 x^2 \ln x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$; 3) $\int_0^2 xe^x dx$.

Yechish. 1) $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u=\ln x$, $dv = x^2 dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7.16) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^3 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^3 = 9\ln 3 - \frac{26}{9}.$$

2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u=x$, $dv=\cos x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du=dx$, $v=\sin x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7.16) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3) $\int_0^2 xe^x dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u=x$, $dv=e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du=dx$, $v=e^x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7.16) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = xe^x\Big|_0^2 - e^x\Big|_0^2 = e^2.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanib hisoblang:

1) $\int_1^3 x^2 \ln(x+3)dx$; 2) $\int_0^2 \cos xe^x dx$; 3) $\int_0^{\pi/2} x(\cos x + \sin x)dx$.

Integralni hisoblashni osonlashtiradigan ba’zi xossalarni keltirib o‘tamiz:

1) $f(x)$ funksiya toq, ya’ni $f(-x) = -f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

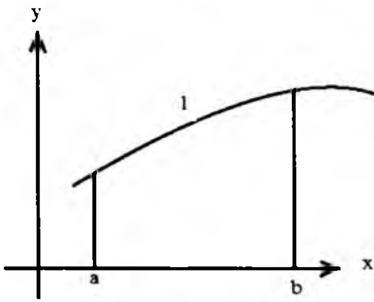
2) $f(x)$ funksiya juft, ya’ni $f(-x) = f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

7.4. Aniq integralning tatbiqlari

Aniq integralning ba’zi tatbiqlarini ko‘rib chiqamiz.

Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y = f(x)$ silliq chiziqni qaraymiz. Bu egri chiziqning $x = a$, $x = b$ to‘g‘ri chiziqlari bilan chegaralangan yoyining uzunligi



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (7.17)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

19-misol. $y = \ln \sin x$ egri chiziqning $x_1 = \frac{\pi}{3}$ dan $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ gacha bo‘lgan yoyining uzunligini hisoblang.

Yechish. $y = \ln \sin x$, $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sin x}$,

$x \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2}{3}\pi\right]$. *AB* yoyning *l* uzunligini hisoblaymiz:

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3}.$$

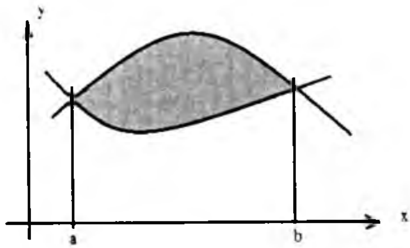
Mashqni bajaring. Quyidagi yoylarning uzunliklarini hisoblang:

1) $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in [1;3]$;   2) $y = \dfrac{(x+1)^2}{2}$, $x \in [0;3]$.

Yassi sirt yuzini hisoblash. Bizga $y = f(x)$ egri chiziq, $x = a, x = b$ to‘g‘ri chiziqlar va Ox o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$$

formula bo'yicha hisoblanishi ma’lum. $y = f_2(x)$ va $y = f_1(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yassi sirt



yuzi quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx \qquad (7.18)$$

Bu yerda a va b sonlar yuqoridagi egri chiziqlar kesishish nuqtalarining absissalari. Bu yerda $f_2(x) \geq f_1(x)$.

20-misol. $y = x^2 - 6$ va $y = -x^2 + 5x - 6$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yassi sirtning yuzini hisoblang.

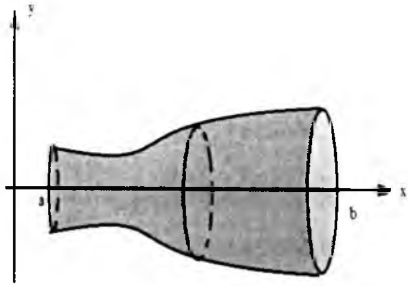
Yechish. Bu egri chiziqlarning tenglamalaridan foydalanib quyidagi tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Bu sistemadan $x_1 = 0,\ x_2 = 2,5$ ni topamiz. Izlanayotgan yuza:

$$S = \int_0^{2,5} \left(-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6\right)dx = \int_0^{2,5} \left(-2x^2 + 5x\right)dx = 5\frac{5}{24}.$$

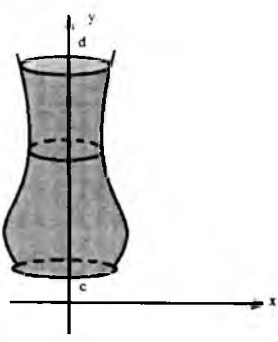
Aylanma jism hajmi va sirtini hisoblash. Uzluksiz $y = f(x)$ egri chiziq, absissalar o'qi hamda $x = a,\ x = b\ \ (a < b)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism hajmini



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{7.19}$$

formula bilan hisoblaymiz.

Xuddi shunga o'xshash, uzluksiz $x = \varphi(y)$ egri chiziq, ordinatalar o'qi va $y = c,\ y = d\ \ (c < d)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini



$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy \tag{7.20}$$

formula bilan hisoblaymiz.

21-misol. Radiusi R ga teng bo‘lgan, markazi Ox o‘qida joylashgan yarim doirani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping. **Yechish.** Ma’lumki, radiusi R ga teng bo‘lgan, markazi Ox o‘qida joylashgan yarim doirani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism radiusi R ga teng bo‘lgan shardir. Uning hajmini topish formulasini keltirib chiqaramiz. Yarim aylananing $y\geq 0$ tekislikdagi tenglamasi: $y=\sqrt{R^2-x^2}$. U holda (7.19) formulaga asosan

$$\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Mashqni bajaring.

1) $y=2x-x^2,\ y=-x+2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

2) $y=-x^2+4,\quad y=x^2,\ x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

Aylanish jismlari sirtining yuzi. $x=a,\ x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan $y=f(x)$ egri chiziqning Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzini S_x

$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{7.21}$$

formula bilan hisoblaymiz.

Xuddi shunga o‘xshash, $y=c,\ y=d$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uzluksiz $x=\varphi(y)$ egri chiziqning Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzini

$$S_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\,dy \tag{7.22}$$

formula bilan hisoblaymiz.

22-misol. $y=\sin 2x$ sinusoidaning $x=0$ dan $x=\frac{\pi}{2}$ gacha bo‘lgan yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

Yechish. $y'=2\cos 2x$, u hoida

$$S_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}dx.$$

O‘zgaruvchini almashtiramiz: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2xdx = dt$, $\sin 2xdx = -\frac{1}{4}dt$. t bo‘yicha integrallash chegaralarini topamiz: agar $x=0$ bo‘lsa, u holda $t=2$; agar $x=\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $t=-2$.

Shunday qilib,

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right).$$

Mashqni bajaring.

1) $y^2 = 2x$ parabolaning $x=0$ dan $x=2$ gacha bo‘lgan yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

2) $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ sikloidaning bir arkasini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsni Oy o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

Biror t vaqt davomida ishlab chiqarish jarayonining unumdorligi $y = u(t)$ funksiya bilan aniqlansin. U holda $[t_1;t_2]$ vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

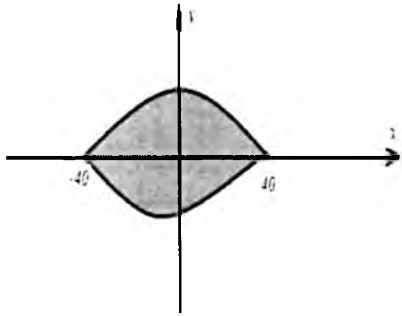
$$Q(t_1;t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt \tag{7.23}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Moddiy xarajatlarni prognozlashtirish. Moddiy xarajatlarni prognozlashtirishda ko‘p hollarda turli murakkab figuralar, yuzalarni hisoblash zarurati kelib chiqadi. Aniq integral qo‘llaniladigan mos misollarni keltiramiz.

23-misol. Kema palubasi ikkita kesishuvchi parabolani eslatadi. Agar kema uzunligi 80 m, markazidagi eni 20 m va har bir kvadrat metrga 0,25 kg bo‘yoq kerak bo‘lsa, uni bo‘yash uchun qancha bo‘yoq zarur.

Yechish. Koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Koordinatalar boshini kema markaziga, Ox o'qini esa paluba bo'ylab joylashtiramiz



Paluba yuzini topish uchun parabolalardan birining tenglamasini aniqlab olamiz. Parabolaning umumiy tenglamasi $y = ax^2 + bx + c$ ko'rinishiga ega. $(-40{,}0)$, $(40{,}0)$, $(0{,}10)$ nuqtalar parabolaga tegishli bo'lgani uchun ular parabola tenglamasini qanoatlantiradi: $a \cdot 40^2 - b \cdot 40 + c = 0$, $a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 0$, $c = 10$. Ushbu tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi sonlar hisoblanadi. $a = -\frac{1}{160}$, $b = 0$, $c = 10$. Shunday qilib, izlanayotgan parabolaning tenglamasi $y = -\frac{x^2}{160} + 10$ ko'rinishga ega. Kema yarim palubasining yuzi

$$S = \int_{-40}^{40} \left(-\frac{x^2}{160} + 10 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{160 \cdot 3} + 10x \right) \Bigg|_{-40}^{40} =$$

$$= -1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} - 1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} + 400 + 400 = 400 \cdot \frac{4}{3}.$$

Palubaning yarmini bo'yash uchun $S \cdot 0{,}25 = \frac{400}{3} (kg)$ bo'yoq zarur. Butun palubani bo'yash uchun esa $2 \cdot S = 2 \cdot \frac{400}{3} \approx 266{,}7 (kg)$ bo'yoq zarur bo'ladi.

Pul oqimini diskontlash ("diskont"-chegirma). Diskontlash masalasi $i\%$ foiz stavkasi bilan n yilga qo'yilgan S_0 miqdordagi pulning oshgan $S(n)$ qiymatini topish masalasiga teskari masala hisoblanadi. Bu holda S_0 – boshlang'ich pulni n vaqtdan keyin uning oshgan miqdori $S(n)$ bo'yicha $i\%$ foiz stavkasida aniqlash.

$S(n)$ – n yillardan olingan yakuniy pul bo'lsin va S_0 – boshlang'ich pul bo'lsin. Agar foizlar oddiy bo'lsa u holda har bir n yil yakunida $S(n)$ pul jamg'arma bankida o'tgan $n-1$ yilga nisbatan S_0 boshlang'ich pulning i foizga oshadi:

$$S(n)=S(n-1)+\frac{i}{100}S_0$$

Birinchi yil yakunida hosil bo'lgan pul

$S(1)=S_0+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)$ni

Ikkinchi yil yakunida

$S(2)=S_1+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+2\frac{i}{100}\right)$ ni,

n yil yakunida:

$S(n)=S_0(1+\frac{i}{100}n)$ ni tashkil qiladi. Shuning uchun agar foizlar oddiy bo'lsa, u holda diskontlangan pul $S_0=\dfrac{S(n)}{1+\frac{i}{100}n}$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Yuqorida ko'rsatilganidek, murakkab foizlar qo'shilganda, u holda yakuniy pul $S(n)=S_0(1+\frac{i}{100})^n$, $n\in N$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Foizlar uzluksiz qo'shilganda $S(n)=S_0e^{\frac{in}{100}}$, $n\in(0;+\infty)$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu yerdan diskontlangan pul (bu holda dastlabki mablag') n vaqt momentiga kelib murakkab foizlar holda $S_0=\dfrac{S(n)}{(1+\frac{i}{100})^n}$, foizlarning uzluksiz qo'shilishida esa $S_0=S(n)e^{-\frac{in}{100}}$ ga teng bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, pullar bankka $n=0$ vaqtning boshlang'ich momentida blrdan emas doimiy ravishda qo'yilsin va $S_0(n)$ uzluksiz funksiya bilan ifodalanadigan pul oqimini ifodalasin. U hoida $[0;T]$vaqt bankka qo'yilgan U_d umumiy pul aniq integralni ifodalaydi:

$$U_d(T)=\int_0^T S_0(n)dn=\int_0^T S(n)e^{-\frac{in}{100}}dn.$$

Bu yerda $S(n)$– har yili tushadigan daromad. $U_d(T)$kattalik $[0;T]$vaqtdagi diskont pul deyiladi.

24-misol. Yillik daromad 1000 pul birligini tashkil qilishi uchun, jamg'arma bankiga yillik 10% ga $[0;T]$ davrda qancha pul qo'yilishi kerak, faraz qilinadiki foizlar uzluksiz qo'shiladi.

Yechish. Masala shartiga ko'ra barcha $[0;T]$ da $S_0(n)=1$ (ming birlik), shuning uchun

$$U_d(T)=\int_0^T S_0(n)dn=\int_0^T 1\cdot e^{-\frac{10n}{100}}dn=-10e^{-0.1T}+10 \text{ (ming pul birl).}$$

Xususan, $T=3$ yilda

$U_d(3)=-10e^{-0,1\cdot3}+10\approx 2.59$(ming pul birl).

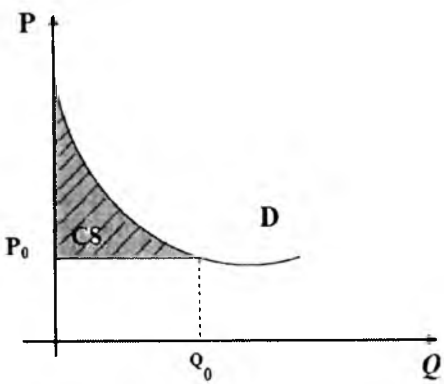
Shunday qilib uch yil davomida yillik daromad ming so'm pul birligini (uch yilda 3 ming pul birligini) tashkil qilishi uchun, jamg'arma bankiga 2,59 ming pul birligini qo'yish kerak. Uch yilda foyda 0,41 ming pul birligini tashkil qiladi. $T=10$ yilda

$U_d(10)=-10e^{-0,1\cdot10}+10\approx 6.32$(ming pul birl)

O'n yilda foyda 3.68 ming pul birligiga yaqin bo'ladi.

Iste'molchilarning ortiqcha foydasi. Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi. Bozorda muvozanat narx o'rnatilgandan so'ng mahsulotni yuqoriroq narxda sotib olmoqchi bo'lgan iste'molchilar uni muvozanat narxida sotib olish oqibatida qandaydir yutuqqa ega bo'ladilar. Ana shunday iste'molchilar yutuqlarining yig'indisi iste'molchilarning ortiqcha foydasi deb ataladi.

Grafik ma'noda istemolchilarning ortiqcha foydasi talab egri chizig'i, ordinatalar o'qi va absissalar o'qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin.



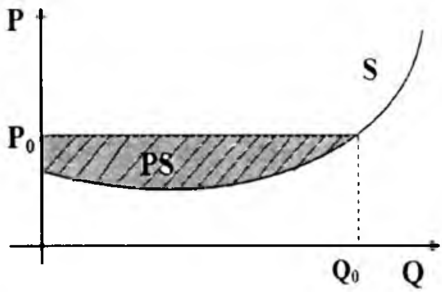
Iste'molchilarning ortiqcha foydasi *CS* bilan belgilanadi va quyida aniq integral yordamida topiladi.

$$CS = \int_0^{Q_0} P(Q)dQ - P_0Q_0$$

Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi ta'minotchilar o'z mahsulotini bozordagi muvozanat narxda sotganda hosil bo'ladigan umumiy foydalarini ifodalaydi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$$

Geometrik ma'noda ta'minotchilarning ortiqcha foydasini taklif egri chizig'i, ordinatalar o'qi va absissalar o'qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin.



25-misol. Biror tovarga talab $P = 70 - 4Q_d$ funksiya bilan berilgani ma'lum. Bu erda Q – mahsulot miqdori (dona), P – bir birlik mahsulot narxi, taklif esa $P = 5 + Q_s$ funksiya bilan beriladi.

a) ushbu mahsulotni sotib olishdan iste'molchilar ortiqcha foydasi miqdorini;

b) ushbu mahsulotni sotishdan ishlab chiqaruvchining (ta'minotchining) ortiqcha foydasini hisoblang.

Yechish. a) Uning kattaligini o'lchash uchun $Q_d = Q_s$ tenglikdan narxning va berilgan mahsulot miqdorining muvozanat qiymatlarini aniqlash zarur. $70 - 4Q = P = 5 + Q$ $70 - 5 = Q + 4Q$ $5Q = 65$ $Q = 13$. $Q = 13$ da $P = 18$. Iste'molchilar ortiqcha foydasi formulasidan foydalanib topamimz:

$$CS = \int_0^{13} PdQ - 13 \cdot 18 = \int_0^{13} (70 - 4Q)dQ - 234 =$$

$$= \left[70Q - 2Q^2\right]\Big|_0^{13} - 234 = (910 - 338 - 0) - 234 = 338.$$

b) Ta'minotchining ortiqcha foydasi kattaligi:

$$PS = 13 \cdot 18 - \int_0^{13} PdQ = 234 - \int_0^{13} (5+Q)dQ =$$

$$= 234 - \left[5Q + \frac{1}{2}Q^2\right]\Bigg|_0^{13} = 234 - (65 + 84.5 - 0) = 84.5.$$

Kobb-Duglas funksiyasi asosida ishlab chiqarish hajmini aniqlash. Ishiab chiqarish unumdorligining o'zgarishi turli xil omillar ta'siri hisobiga funksiyani qo'llashga bog'llq, masalan, bunday funksiya Kobb-Duglas funksiyasi deb nomlanadi. Bunday holda $f(t)$ unumdorlik uchta ko'paytuvchllarning ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlanadi.

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t),$$

bu yerda $A(t), L(t), K(t)$ funksiyalar tabiiy resurs, mehnat va kapital xarajatlarining miqdori $a_0, \alpha, \beta, \gamma -$ biror sonlar.

26-misol. Agar Kobb-Duglas funksiyasida $A(t) = e^t$, $L(t) = (t+1)^2$, $K(t) = (100-3t)^2$, $a_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0{,}5$ ($t -$ vaqt yillarda) bo'lsa, besh yil uchun mahsulot chiqarish hajmini toping.

Yechish. (7.23) formuladagi $f(t)$ samaradorlik funksiyasiga qo'ysak, quyldagini olamiz:

$$Q(0;5) = \int_0^5 e^t (t+1)(100-3t)dt = \int_0^5 e^t (-3t^2 + 97t + 100)dt.$$

Ikki marta ketma-ket bo'laklab integrallash formulasini qo'llab quyidagi natijani olamiz:

$$Q(0;5) = (-3t^2 + 97t + 100)e^t\Big|_0^5 - (97 - 6t)e^t\Big|_0^5 - 6e^t\Big|_0^5 = 64825$$

7.5. Xosmas integral

Bizga ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya ixtiyoriy $[a;b]$ oraliqda aniqlangan va integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \tag{7.24}$$

integral mavjud. Agar (7.24) integralning yuqori chegarasi uchun $b \to +\infty$, yoki quyi chegarasi uchun $a \to -\infty$, yoki ham yuqori ham quyi chegaralari uchun $b \to +\infty$, $a \to -\infty$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (7.24) integral I tur xosmas integral deb ataladi. Shunday qilib I tur xosmas integral quyidagi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{7.25}$$

(7.25) xosmas integrallardagi integral osti funksiyalarning aniqlanish sohasi mos ravishda quyidagi oraliqlardan iborat bo‘ladi: $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$. (7.25) integrallarni hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{gathered}\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx + \lim_{c\to+\infty}\int_b^{c} f(x)dx, \ \forall c\in(-\infty,+\infty)\end{gathered} \tag{7.26}$$

Agar (7.26) ifodanng o‘ng tomonidagi limit osti integrallar mavjud va chekli bo‘lsa, u holda ifodaning chap tomonidagi xosmas integrallar yaqinlashuvchi, aks holda esa ular uzoqlashuvchi deyiladi.

27-misol. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\sqrt{x}\Big|_1^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right) = \infty.$$

Demak, bu xosmas integral uzoqlashuvchi.

28-misol. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

$f(x)=\frac{dx}{1+x^2}$ integral osti funksiyasi butun son o‘qida aniqlangan va uzluksiz. Funksiya juft funksiya. Shuning uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^{b} = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

integral yaqinlashuvchi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va π ga teng.

29-misol. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1\ .$$

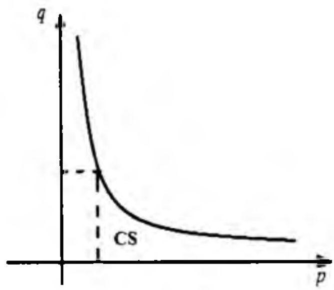
Demak, bu xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mashqni bajaring. Quyidagi xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring: 1) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1}$; 2) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(ax+b)^{\frac{5}{4}}}$; 3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$; 4) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^{\frac{7}{3}}}$.

Xosmas integrallarning iqtisodiyotdagi tatbiqlari. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning yechlmlarini topish jarayonida xosmas integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Masalan, talab elastikligi o'zgarmas bo'lgan holat uchun iste'molchining ortiqcha foydasini hisoblash masalasining talab egri chizig'ini quyidagicha yozish mumkin:

$$q=ap^{-\varepsilon},\ a>0,\ \varepsilon>0\Rightarrow p=\left(\frac{q}{a}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Bu yerda ε talab elastikligining bahosi. Talab egri chzig'i p, q koordinata o'qlarida quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:



U holda $p=p_0$ dan boshlab iste'molchining ortiqcha foydasi quyidagi I tur xosmas integral bilan hisoblanadi:

$$CS=\int_{p_0}^{\infty}ap^{-\varepsilon}dp.$$

U holda

$$CS=\int_{p_0}^{\infty}ap^{-\varepsilon}dp=\lim_{\bar p\to\infty}\int_{p_0}^{\bar p}ap^{-\varepsilon}dp=\lim_{p\to\infty}\frac{a}{1-\varepsilon}\bar p^{1-\varepsilon}\Bigg|_{p_0}^{\bar p}=\frac{a}{1-\varepsilon}\left[\lim_{\bar p\to\infty}\bar p^{1-\varepsilon}-p_0^{1-\varepsilon}\right].$$

Bu integral $\varepsilon > 1$ holatda yaqinlashadi.

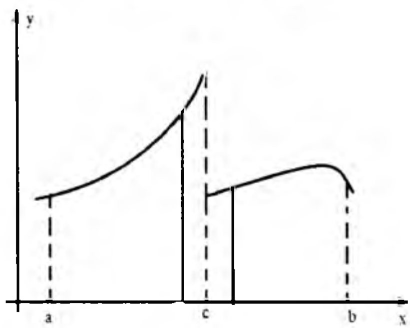
30-misol. Talab funksiyasi $q = 50p^{-2}$ bo'lsa, $p = 10$ da iste'molchining ortiqcha foydasi topilsin.

Yechim. $CS = \int_{10}^{\infty} 50p^{-2}dp = \lim_{\bar{p}\to\infty} \int_{10}^{\bar{p}} 50p^{-2}dp = \frac{50}{1-2}\left[\lim_{\bar{p}\to\infty} \bar{p}^{1-2} - 10^{1-2}\right] = 5$.

Agar integral chegaralari chekli a, b sonlardan iborat bo'lib, integral osti funksiyasi $[a,b]$ kesmaning chekli sondagi nuqtalarida aniqlanmagan bo'lsa, bunday integral II tur xosmas integral deb ataladi. Masalan, $y = f(x)$, $x \in [a,c) \cup (c,b]$ berilgan bo'lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integral II tur xosmas integral deb ataladi.

Xosmas integrallarni yaqinlashishga tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \ \varepsilon > 0. \qquad (7.27)$$



Agar (7.27) formulada qatnashayotgan limitlar mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (7.27) formulada qatnashayotgan limitlardan bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi.

31-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$ xosmas integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi $y = \frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ funksiya $x = 1$ nuqtada aniqlanmagan va nuqtadan chapda chegaralanmagan. Demak,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{(1-x)}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{(1-1+\varepsilon)} - \sqrt{(1-0)}\right) = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1}\right) = 2.$$

Bu xosmas integral yaqinlashuvchi.

32-misol. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\delta\to0}\int_{\delta+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\delta\to0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}-1+\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}-1=\infty,$$

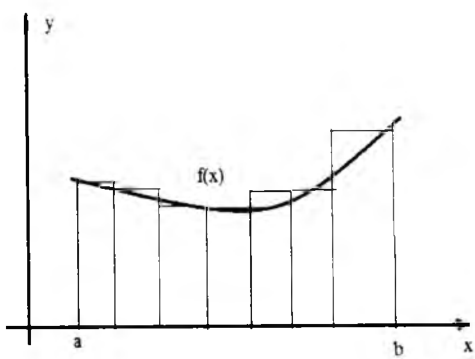
Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan.

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring: 1) $\int_0^1\frac{dx}{(2x-1)^2}$; 2) $\int_0^2\frac{dx}{(3x-6)^{\frac{3}{4}}}$; 3) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; 4) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$.

Xosmas integrallarni integrallash uchun o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullaridan foydalanlladi.

Ko'p hollarda berilgan integral osti funksiyaning boshlang'ich funksiyasini elementar funksiyalarda ifoda etish mumkin bo'lavermaydi. Bunday hollarda aniq integralni hisoblash uchun taqribiy formulalardan foydalaniladi. Bu formulalarning ba'zilari bilan tanishib chiqamiz.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari. Aniq mtegrallarni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar usull: $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)\geq0$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda n ta teng $h=\frac{b-a}{n}$ bo'laklarga, ya'ni qismiy kesmalarga bo'lamiz: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b.$ $[x_{i-1};x_i]$ oraliqqa mos $y=f(x)$ egri chiziqlarni Ox ga parallel to'g'ri chiziqlar bilan almashtiramiz.



U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Bu yerda $S_i = h \cdot y_{i-1}$.
Demak,

$$\int_a^b ydx \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (7.28)$$

33-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ integralning taqribiy qiymatini toping. Bu yerda $n = 5$.

(7.28) formuladan foydalanib taqribiy hisoblashni amalga oshiramiz. $[0;1]$ kesmani quyidagicha 5 ta bo'lakka ajratamiz va y_{i-1} qiymatlarni $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ integral osti funksiya yordamida hisoblaymiz:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1; \quad x_1 = 0.2, \quad y_1 = 0,992;$$
$$x_2 = 0,4, \quad y_2 = 0,94; \quad x_3 = 0,6, \quad y_3 = 0,822;$$
$$x_4 = 0,8, \quad y_4 = 0,661; \quad x_5 = 1.$$

So'ngra (7.28) formuladan foydalansak:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{5} \cdot 4.415 = 0.883.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning trapetsiya usuli: $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x) \geq 0$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda n ta teng $h = \frac{b-a}{n}$ bo'laklarga, ya'ni qismiy kesmalarga bo'lamiz: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. $[x_{i-1}; x_i]$ oraliqqa mos $y = f(x)$ egri chiziqlarni yuqoridagi rasmdagi kabi to'g'ri chiziqlar bilan almashtirib trapetsiyalar hosil qllamiz. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Bu yerda $S_i = h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$. Demak,

$$\int_a^b ydx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) \qquad (7.29)$$

34-misol. Yuqoridagi 33 - misolni (7.29) formuladan foydalanib taqribiy hisoblaymiz $(n=5)$:

$$x_0=0,\quad y_0=1;\quad x_1=0.2,\quad y_1=0{,}992;$$
$$x_2=0.4,\quad y_2=0{,}94;\quad x_3=0{,}6,\quad y_3=0{,}822;$$
$$x_4=0.8,\quad y_4=0{,}661;\quad x_5=1,\quad y_5=0{,}5.$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{5}\left(\frac{y_0+y_5}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4\right),\quad \int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{5}\cdot 4.165=0.833.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning parabola usuli (Simpson formulasi). Bu holatda $n-$ juft olinadi. Taqribiy hisoblanishi kerak bo‘lgan integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_a^b ydx\approx\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)\qquad(7.30)$$

35-misol. Yuqoridagi 33-misolni Simpson formulasidan foydalanib yechamiz. Bizga ma’lumki, Simpson formulasida $n-$juft bo‘lishi kerak. Shuning uchun $n=4$ deb olamiz.

$$x_0=0,\quad y_0=1;\quad x_1=0{,}25,\quad y_1=0.985;$$
$$x_2=0.5,\quad y_2=0{,}889;\quad x_3=0{,}25,\quad y_3=0{,}703;$$
$$x_4=1,\quad y_4=0.5,$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{0.25}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right),$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{0{,}25}{3}\left(1+4\cdot 0.985+2\cdot 0.889+4\cdot 0{,}703+0.5\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 10{,}03\approx 0.836.$$

Masbqni bajaring. Quyidagi integrallarning taqribiy qiymatini 3 ta usuldan foydalanib toping. Bu yerda:

1) $\int_0^2\frac{dx}{3+2x^3}$;   2) $\int_1^4\frac{dx}{\ln x}$;   3) $\int_2^4\frac{dx}{4+3x^5}$, $n=8$.

VII bobga doir savollar

1. Aniqmas integral nima (son, funksiya, funksiyalar to‘plami)?
2. Asosiy integrallar jadvali integralning qaysi xossasiga asoslanib tuzilgan?

3. Aniqmas integralning xossalarini ayting.

4. Qanday integrallash qoidalarini bilasiz?

5. Qanday integrallash usullarini bilasiz?

6. Bevosita integrallash usuli nimalarga asoslangan?

7. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli qanday bajariladi?

8. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash qanday amalga oshiriladi?

9. Qanday trigonometrik funksiyalarni integrallashda $\cos x = t$ almashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi?

10. Ratsional funksiyalarni integrallash algoritmini ayting.

11. Marjinal daromad funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi daromad funksiyasi qanday topiladi?

12. Marjinal xarajat funksiyasi ma'lum bo'lganda umumiy xarajat funksiyasi qanday topiladi?

13. Marjinal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasi qanday aniqlanadi?

14. Integral yig'indi nima, u qanday tuziladi?

15. Integral yig'indining geometrik ma'nosi nimadan iborat?

16. Aniq integralga qanday ta'rif beriladi?

17. Aniq integralning mavjud bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?

18. Qanday funksiya integrallanuvchi, deyiladi?

19. Darbu yig'indilari integral yig'indi bo'la oladimi?

20. Nyuton-Leybnits formulasi qanday keltirib chiqariladi?

21. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish qanday bajariladi? U aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirishdan nimasi bilan farq qiladi?

22. Iste'molchining ortiqcha foydasini ta'riflang.

23. Iste'molchining ortiqcha foydasini geometirik shakl yordamida tasvirlang.

24. Ta'minotchining ortiqcha foydasi nima?

25. Ta'minotchining ortiqcha foydasining geometrik tasvirini ko'rsating.

26. Qanday jismga aylanma jism, deyiladi?

27. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasini yozing.

28. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash formulasini yozing.

29. Yassi sirt yuzini hisoblash formulasini yozing.

30. Vaqtning ma'lum oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan pul miqdori qanday aniqlanadi?

31. Vaqtning ma'lum oralig'ida ishiab chiqarilgan mahsulot hajmi qanday aniqlanadi?

32. Xosmas integrallarning qanday turlari mavjud? Ular qanday qilib aniq integralning umumlashmasi bo'lib hisoblanadi?

33. Integrallash sohasi chegaralanmagan xosmas integral qanday ta'riflanadi?

34. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali qanday ta'riflanadi?

35. Xosmas integrallar qanday hisoblanadi?

36. Xosmas integrallarni yaqinlashishga qanday tekshirish mumkin?

37. Xosmas integrallarning xossalarini ayting. Bu xossalar ichidan aniq integral xossalariga oʻxshashlarini alohida sanab chiqing.

VII bobga doir misol va masalalar

1. Aniqmas integralni toping.

a) $\int\frac{dx}{x^3}$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ c) $\int(7x-1)^{23}dx$; d) $\int x^2\cdot\sin(x^3+1)dx$;

e) $\int x\ln x dx$. f) $\int\frac{6x-7}{x^2+4x+13}$.

2. Aniq integralni o‘zgaruvchini almashtirish usulida hisoblang.

a) $\int\limits_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$. b) $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. c) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$. e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}tg^4 x dx$.

3. Aniq integralni bo‘laklab integrallash usulida hisoblang.

a) $\int\limits_1^e\ln^2 x dx$. b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$. c) $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$. d) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$. e) $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

f) $\int\limits_0^{\pi}e^x\sin x dx$.

4. Xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$. b) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. c) $\int\limits_0^{\infty}e^{-2x}dx$. d) $\int\limits_0^{\infty}x\sin x dx$. e) $\int\limits_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

f) $\int\limits_1^{\infty}\frac{arctgx dx}{1+x^2}$. h) $\int\limits_1^5\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$. i) $\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{(x+1)^2}$. j) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

5. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralar yuzalarini hisoblang.

a) $y=-x^3,\ y=-9x$.

b) $y=\arccos x,\ x=-1,\ x=0,\ y=0$.

c) $y = tg^2 x,\ x = \frac{\pi}{4},\ y = 0.$

d) $y = x^2,\ y = \frac{1}{x^2}, y = 0,\ x = 0,\ x = 3.$

6. Egri chiziqlar yoylari uzunliklari hisoblang.

a) $y = 2\sqrt{x},\quad x = 0$ dan $x = 1$ gacha.

b) $y = \ln x,\quad x = \sqrt{3}$ dan $x = \sqrt{8}$ gacha.

c) $x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t,\ t = 0$ dan $t = 2\pi$ gacha.

d) $y = \ln \sin x,\quad x = \frac{\pi}{3}$ dan $x = \frac{\pi}{2}$ gacha.

e) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ $t = 0$ dan $t = \frac{\pi}{4}$ gacha.

f) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$

7. $y = 1 - x^2,\ \ y = 0, x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figurani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

8. $y = x^3,\ \ y = 4x$ chiziqlar bilan chegaralangan figurani Oy o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismnimg hajmini toping.

9. Agar kun davomida mehnat unumdorligi $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10$ empirik formula bo‘yicha o‘zgarsa, kunlik ish vaqti 8 soat bo‘lganda, bir kunlik ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Q ni toping.

10. Marjinal daromad funksiyasi $MR(q) = \frac{10}{(1+q)^2}$. Agar $R(0) = 0$ ma’lum bo’lsa, $R(q)$ daromad funksiyasini toping va uning $q = 9$ dagi qiymatini hisoblang.

11. Marjinal xarajat funksiyasi $MC(q) = \frac{100}{\pi} arctgq$ berilgan. Agar $C(0) = 1000$ ma’lum bo‘lsa, $C(q)$xarajat funksiyasi uchun ifodani va uning $q = 100$ dagi qiymatini toping.

12. Mahsulotga bo‘lgan taklab va taklif funksiyalari $p = 240 - x^2$ va $p = x^2 + 2x + 20.$ ko‘rinishda bo‘lsa, iste’molchi hamda ta’minotchining ortiqcha foydasini aniqlang.

Javoblar: 1. **a)** $-\frac{1}{2x^2} + C.$ **b)** $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$ **c)** $\frac{(7x-1)^{24}}{168} + C.$

d) $-\frac{1}{3}\cos(x^3 + 1) + C.$ **e)** $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$

f) $3\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{19}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C.$

2. a) $7+2\ln 2$. **b)** $4-\pi$. **c)** $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pi$. **d)** $2-\frac{1}{2}\pi$. **e)** $-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\pi$.

3. a) $e-2$. **b)** $\pi-2$. **c)** $1-\frac{2}{e}$. **d)** $\pi\sqrt{2}-4$. **e)** 1. **f)** $\frac{1}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}$.

4. a) $\frac{\pi}{2}$. **b)** $\frac{\pi}{2}$. **c)** $\frac{1}{2}$. **d)** Uzoqlashuvchi. **e)** 2. **f)** $\frac{3}{32}\pi^2$.
h) 4. **i)** Uzoqlashuvchi. **j)** 0.

5. a) $\frac{81}{2}$. **b)** $\pi-1$. **c)** $1-\frac{\pi}{4}$. **d)** 1.

6. a) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **b)** $1+0.5\ln 1,5$. **c)** 8. **d)** $\frac{1}{2}\ln 3$

e) $\frac{\pi^2}{32}$. **f)** $8\sqrt{2}-1$. **7.** $\frac{8\pi}{15}$. **8.** $\frac{256\pi}{15}$. **9.** 88,53 birlik.

10. $\frac{10q}{1+q}$;9. **11.** $\frac{100}{\pi}\left(qarctgq-\frac{1}{2}\ln\left(1+q^2\right)\right)+1000;5822.$

12. $C=667; P=767.$

Tayanch so‘z va iboralar: boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral, integral osti funksiyasi, integrallash o‘zgaruvchisi, aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish, bo‘laklab integrallash, ratsional funksiyalarni integrallash, trigonometrik almashtirishlar, irratsional funksiyalarni integrallash, integral yig‘indi, aniq integral, integral chegaralari, egri chiziqli trapetsiya, Riman yig‘indasi, o‘rta qiymat, Nyuton – Leybnits formulasi, yassi sirt, jism hajmi, yoy uzunligi, yuza, jism hajmi, aylanma jism sirti, yalpi daromad, umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalari, mahsulot hajmi, vaqtning ma’lum oralig‘ida jamg‘arma bankiga tushgan pul miqdori, moddiy xarajatlarni prognozlashtirish, pul oqimini diskontlash masalasi, ta’minotchi va iste’molchining ortiqcha foydasi, xosmas integral.

VIII bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA QATORLAR

8.1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Iqtisodda dinamik jarayonlarni tadqiq qilish muhim masalalardan hisoblanadi. Bunda miqdorning vaqtga bog'liq o'zgarishi tahlil qilinadi. Ma'lumki, biror miqdorning o'sish yoki kamayish tezligi (o'zgarish tezligi) shu miqdorni ifodalovchi vaqtga bog'liq funksiyaning hosilasiga teng. Shu sabab iqtisodiy dinamik jarayonlarning modellarida noma'lum miqdorni ifodalovchi noma'lum funksiya bilan bir qatorda uning hosilalari ham ishtirok qlladi.

Masalan, ota o'zining 7 yoshdagi o'g'lining 12 yildan keyingi universitetda o'qishi bilan bog'liq 35 000 shartli pul birligini qoplash uchun 10% foiz stavkasi bilan bankka pul qo'ymoqchi. Bank foizini stavkasining ulushini uzluksiz ravishda hisoblansin. Bu masalada bizdan otaning hozirda bankka qancha miqdorda pul qo'yishi kerakligini topish talab qilinadi.

Deylik x vaqtdan keyin bank depozitidagi pul miqdori $y(x)$ ga teng bo'lsin. Masala shartiga ko'ra bu pul miqdorining o'zgarish tezligi $y'(x)$ shu vaqtdagi pul miqdori $y(x)$ ning 10% ga teng, ya'ni

$$y'(x) = 0{,}1y. \tag{8.1}$$

Masala shartiga ko'ra

$$y(12) = 35000 \tag{8.2}$$

bo'lib, $y(0)$ ni topish talab qilinadi.

Izoh. Dinamik masalalarda odatda vaqtni ifodalovchi o'zgaruvchi x emas, balki t bilan belgilanadi. Bu holatda vaqt bo'yicha hosila $\dot{y}$ kabi belgilanadi. Masalan, (8.1) tenglama bu belgilashlarda $\dot{y} = 0{,}1y$ kabi yoziladi.

Biz sodda misolda dinamik model tuzdik. Xuddi shuningdek, yetarlicha ma'lumot mavjud bo'lganda, boshqa murakkab iqtisodiy jarayonlar uchun ham matematik modellar tuzish mumkin. Bu modellar odatda "differensial tenglamalar" bilan ifodalanadi.

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi x ni, noma'lum $y(x)$ funksiyani va uning hosilalarini bog'lovchi tenglamaga differensial tenglama deylladi. Bu tenglamada ishtirok etgan hosilaning eng katta tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

n – tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{n}) = 0\ . \tag{8.3}$$

Yuqoridagi misoldagi (8.1) differensial tenglama 1- tartibli tenglamadir.

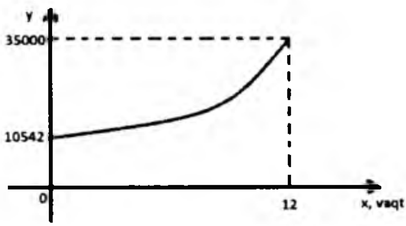
2-ta'rif. (8.3) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida n marta differensiallanuvchi har qanday $y = f(x)$ funksiyaga (8.3) differensial tenglama yechimi deyiladi.

Masalan, $y = e^{0.1x}$ funksiya $y' = 0,1y$ differensial tenglamaning yechimi bo'lib, u tenglamaning cheksiz ko'p yechimlaridan biridir. Har qanday $y = c \cdot e^{0.1x}$ funksiya ham, bu yerda, c – ixtiyoriy o'zgarmas son, tenglamani qanoatlantiradi. Bu funksiya tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o'zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to'plami yagona ixtiyoriy c o'zgarmasga bog'liq deyiladi.

O'zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi. Misol uchun (8.1) tenglamaning (8.2) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. (8.2) shartdan

$$c \cdot e^{0.1 \cdot 12} = 35000 \text{ yoki } c = 35000 \cdot e^{-1.2} \approx 10542.$$

Demak, ota bankka 10542 shartli p.b. miqdorida pul qo'yishi kerak ekan.



Boshqa misol ko'raylik.

1-misol. $y''' = 0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin:

$$y'' = c_1, \quad y' = c_1 x + c_2, \quad y = c_1 x^2/2 + c_2 x + c_3.$$

Bu yerda, c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'lib, ularning har qanday qiymatlarida $y = c_1 x^2/2 + c_2 x + c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli $y = c_1 x^2/2 + c_2 x + c_3$ umumiy yechim bo'lib hisoblanadi. $y''' = 0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq va har birining konkret qiymatlarida xususiy yechim hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan differensial tenglama umumiy yechimida o'zgarmaslar soni tenglamaning tartibiga teng ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechim o‘zgarmaslarining konkret qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo‘yilishiga qarab, uning yoki umumiy yechimi yoki xususiy yechimi topiladi.

Oddiy differensial tenglamalar. Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar. Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy

$$F(x;y;y')=0$$

yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y'=f(x;y)$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Ushbu tenglama ham, odatda, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ulardan biror – bir xususiy yechimni ajratib olish uchun qo‘shimcha shartni talab etadi. Ko‘p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo‘yiladi.

Koshi masalasi:

$$y'=f(x;y) \tag{8.4}$$

differensial tenglamaning

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \tag{8.5}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

(8.4), (8.5) masala yechimining mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremadan aniqlanadi.

Teorema. Agar $f(x;y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va $\partial f/\partial y$ – uzluksiz xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda $(x_0;y_0)$ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofda $y'=f(x;y)$ differensial tenglama uchun $y\big|_{x=x_0}=y_0$ boshlang‘ich shartli Koshi masalasi yechimi mavjud va yagonadir.

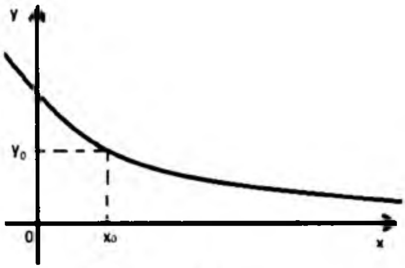
Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

Agar boshlang‘ich $(x_0;y_0)$ nuqtaning berilishi (8.4) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechim xususiy yechim deyiladi. Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to‘plamiga uning umumiy yechimi deyiladi.

Odatda, umumiy yechim oshkor $y=\varphi(x,c)$ yoki oshkormas $\varphi(x,y,c)=0$ ko‘rinishda yoziladi. c o‘zgarmas $(x_0;y_0)$ boshlang‘ich shart asosida $y_0=\varphi(x_0;c)$ tenglamadan topiladi.

3-ta'rif. Tenglamaning umumiy integrali (yoki yechimi), deb c o'zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\varphi(x,y,c)=0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik shartlari (teoremadagi) yuqorida ko'rilgan $y'=-y$ tenglama uchun xOy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y=c\cdot e^{-x}$ formuladan iborat bo'lib, har qanday boshlang'ich $y|_{x=x_0}=y_0$ shart mos c o'zgarmas tanlanganda qanoatlantiriladi. c o'zgarmas $y_0=c\cdot e^{-x_0}$ tenglamadan topiladi: $c=y_0\cdot e^{x_0}$.



Differensial tenglamani shartlarsiz yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi.

Differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta'minlaydigan muhim shartlardan biri $\partial f/\partial y$ xususiy hosllaning uzluksizligidir. Ba'zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasllgi va ular orqali birorta ham integral chiziq o'tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o'tishini bildiradi. Bunday nuqtalar differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig'i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo'lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari, deb yuritiladi.

$$y'=p(x)q(y) \tag{8.6}$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deb ataladi.

(8.6) tenglamani yechish uchun noma'lum y funksiyaning qaralayotgan o'zgarish sohasida $q(y)\neq 0$ shart bajariladi deb (8.6) tenglamani

$$dy/q(y)=p(x)dx$$

shaklda yozamiz va ikkala qismini integrallab,

$$\int dy/q(y)=\int p(x)dx$$

tenglikni olamiz. Agar $Q(y)$ funksiya $1/q(y)$ funksiyaning, $P(x)$ esa $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, (8.6) tenglamaning umumiy integrali:

$$Q(y) = P(x) + C$$

ko'rinishdan iborat bo'ladi.

2-misol. $y' = xy^2$ tenglamaning barcha yechlmlarini topish talab qilingan bo'lsin. $y \neq 0$ shart o'rinli, deb tenglama o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$dy/dx = xy^2 \Rightarrow dy/y^2 = xdx.$$

Buni integrallab, $y = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$ ko'rinishdagi umumiy yechimni olamiz. Ushbu yechimga tenglamani yechish jarayonida yo'qotilgan $y = 0$ yechimni ham qo'shish lozim.

3-misol. Ma'lum bir davlatda aholining o'sishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\dot{N}(t) = 0.1N(t)(40 - N(t)).$$

Bu yerda $N(t)$ million miqdor (noma'lum funksiya) t vaqt momentidagi aholi sonini ifodalaydi. Agar $N(0) = 30$ bo'lsa, $N(20)$, ya'ni 20 yildan keyingi aholi sonini toping.

Tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz

$$\frac{dN}{N(40 - N)} = 0.1dt.$$

$\dfrac{1}{N(40 - N)} = \dfrac{1}{40}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{40 - N}\right)$ ayniyatni hisobga olgan holda bu tenglamani integrallasak

$$\ln\frac{N}{40 - N} = 4t + C$$

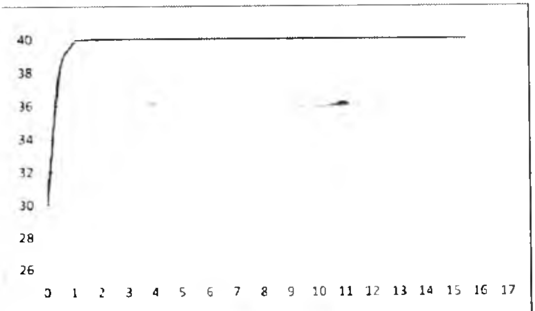
yoki

$$N(t) = \frac{40C_1e^{4t}}{1 + C_1e^{4t}} \qquad (C_1 = e^C)$$

yechimni hosil qilamiz. Masala shartiga ko'ra $t = 0$ boshlang'ich holatda

$$\frac{40C}{1 + C} = 30 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3.$$

Demak, aholi soni $N(t)=\dfrac{120e^{4t}}{1+3e^{4t}}$ qonuniyat bilan o'zgaradi. $N(t)$ funksiyaning Excel dasturida chizilgan grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



Funksiya grafigidan ko'rinib turibdiki, mazkur model bilan ifodalangan aholi soni dastlabki 1,5 yil davomida tez o'sadi va deyarli 40 mln ga yaqinlashadi. Keyingi davrlarda o'sish tezligi juda kichik bo'lib, deyarli o'zgarmaydi. Xususan, $N(20)\approx 40$.

$$dy/dx = f(y/x) \tag{8.7}$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama, deb ataladi.

(8.7) tenglamani yechish uchun noma'lum $y(x)$ funksiyadan $u(x)=y(x)/x$ funksiyaga o'tamiz. U holda

$$y = xu, \qquad dy/dx = u + x\,du/dx$$

tengliklar o'rinli bo'lib, (8.7) tenglama:

$$u + x\,du/dx = f(u) \Rightarrow du/(f(u)-u) = dx/x$$

ko'rinishga keltiriladi. Oxirgi tenglama o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama bo'lib, yuqorida ko'rsatilgan usulda yechiladi. Natijada

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + c.$$

$u(x)$ funksiya topilgandan so'ng, $y(x)=x\cdot u(x)$ funksiyaga qaytiladi.

4-misol. $y' - \dfrac{x+y}{x-y} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Ushbu tenglama bir jinsli tenglama, chunki

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+x}{y-x} = \frac{y/x+1}{y/x-1} = \frac{u+1}{u-1}.$$

Bu yerda $u = y/x$. Noma'lum u funksiyaga nisbatan o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1} - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{(u-1)du}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{dx}{x}$$

tenglama hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallaymiz

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2 + 2u + 1\right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|C|.$$

So'ngra

$$x^2\left|-u^2 + 2u + 1\right| = |C|$$

yechimlarni va $y = xu$ funksiyaga qaytib, oshkormas shaklda

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

umumiy integralni quramiz.

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{8.8}$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb ataladi.

Bu tenglamani integrallash jarayoni odatda, ikki bosqichdan iborat: dastlab, tenglama o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiya nol bilan almashtirilib

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi qurilgandan so'ng, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning biror – bir $y(x)$ xususiy yechimi topiladi.

Bir jinsli bo'lmagan tenglama umumiy yechimi, bu tenglamaning biror – bir $y_{xus}(x)$ xususiy yechimi bilan bir jinsli tenglamaning $y_{b.j}$ yechimlari yig'indisiga teng

$$y(x) = y_{b.j}(x) + y_{xus}(x).$$

Birinchi bosqichda bir jinsli tenglamani yechamiz. Tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo'lgani uchun

$$dy/y = -p(x)dx.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $y = Ce^{-P(x)}$ umumiy yechimni quramiz, bu yerda,

$P(x)$ funksiya $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri.

Ikkinchi bosqichda tenglamaning xususiy yechimlaridan birini ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usulida, ya'ni $y(x)$ xususiy yechimni

$$y(x)=u(x)e^{-P(x)}$$

shaklda qidiramiz. Ushbu ifodani (8.8) tenglamaga qo'yamiz va $u(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan

$$u'\cdot e^{-P(x)}-uP'(x)e^{-P(x)}+p(x)ue^{-P(x)}=f(x)$$

tenglamani olamiz. $P'(x)=p(x)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun, tenglamaning chap tomondagi ikkinchi va uchlnchi hadlar o'zaro yeyishadi. Natijada

$$du/dx=f(x)e^{P(x)}$$

tenglama kelib chiqadi. Uni integrallab, cheksiz ko'p

$$u(x)=\int f(x)e^{P(x)}dx$$

boshlang'ich funksiyalardan birini tanlaymiz.

5-misol. $y'-2x(y+1)=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama $y'-2xy=2x$ shaklda yozilishi mumkin va u chiziqli tenglamadir. Tenglamaning mos bir jinsli tenglamasi $y'-2xy=0$ ko'rinishga ega. O'zgaruvchilarni ajratib, so'ngra integrallaymiz:

$$dy/y=2x\cdot dx \quad \Leftrightarrow \ln|y|=x^2+\ln|c| \quad \Leftrightarrow y=\pm ce^{x^2}$$

Dastlabki bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini $y_0(x)=u(x)e^{x^2}$ ko'paytma ko'rinishida topamiz:

$$u'e^{x^2}+2xue^{x^2}-2xue^{x^2}=2x \quad \Leftrightarrow \quad u'=2xe^{-x^2}$$

va $u(x)=-e^{-x^2}+c$, umumiy yechimdan $u(x)=-e^{-x^2}$ xususiy yechimni tanlaymiz. Natijada, $y_0(x)=-e^{-x^2}\cdot e^{x^2}=-1$, shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini xususiy $y=-1$ va mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y=c\cdot e^{x^2}$ larning yig'indisidan iborat:

$$y(x)=c\cdot e^{x^2}-1.$$

6-misol. Raqobat sharoitida biror-bir tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin

$$Q_{talab}=170-8p,\ Q_{taklif}=-10+4p.$$

Agar narx talab va taklif orasidagi muvozanat shartini qanoatlantirmasa, u holda bozordagi raqobat ta'sirida u quyidagicha o'zgaradi:

$$\frac{dp}{dt}=0,5(Q_{talab}-Q_{taklif}).$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar talab taklifdan katta bo'lsa, $\dot{p}>0$ bo'lib narx oshadi, aks holda, ya'ni taklif talabdan katta bo'lsa $\dot{p}<0$ bo'lib, narx kamayadi. Har ikkala holatda ham narx $Q_{talab}=Q_{taklif}$ shartni qanoatlantiruvchi muvozanat narxga yaqinlashadi. $p(0)=10$ bo'lsin. Narx dinamikasini aniqlaymiz va bozorning stabilligini tahlil qilamiz.

Tenglamada talab va taklif funksiyalarini o'rniga qo'yib, soddalashtirsak

$$\frac{dp}{dt}=-6p+90.$$

Bu tenglamaning bir jinsli qismini yechamiz.

$$\frac{dp}{dt}=-6p \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dp}{p}=-6dt \quad\Leftrightarrow\quad p_{b.j}(t)=C\cdot e^{-6t}.$$

Endi xususiy yechimni topamiz. $p_{xus}(t)=u(t)e^{-6t}$,

$\dot{p}_{xus}=-6u(t)e^{-6t}+\dot{u}(t)e^{-6t}$ ifodalarni tenglamaga qo'ysak,

$$\dot{u}(t)=90e^{6t} \quad\Rightarrow\quad u(t)=15e^{6t}$$

ni hosil qilamiz. U holda $p_{xus}=15$ ni hosil qilamiz. Tekshirib ko'rib, bu xususiy yechim muvozanat narxni ifodalashiga amin bo'lamiz.

Demak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi

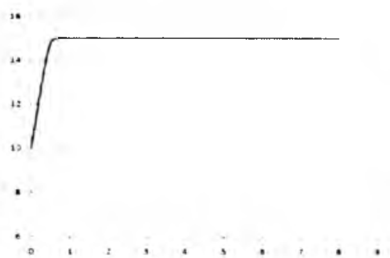
$$p(t)=p_{b.j}(t)+p_{xus}=Ce^{-6t}+15.$$

Boshlang'ich narx $p(0)=10$ dan foydalansak, $C+15=10$ yoki $C=-5$ ni hosil qilamiz. U holda narx dinamikasi

$$p(t)=15-5e^{-6t}.$$

Bu yechimning grafigini Excel dasturida chizamiz.

T	N
0	10
0,5	14,75106466
1	14,98760624
1,5	14.99938295
2	14,99996928
2,5	14,99999847
3	14.99999992



Bundan ko‘rish mumkinki, bozordagi boshlang‘ich narx $p(0)=10$ juda tez suratda muvozanat narxi $p=15$ ga yaqinlashadi. Ya’ni, bozor stabillik shartini qanoatlantiradi.

Chiziqli differensial tenglamani yechishda qo‘llanilgan usul ba’zi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkonini beradi.

Bernulli tenglamasi. $y'+P(x)y=q(x)y^n$ tenglama Bernulli tenglamasi deb ataladi.

Bernulli tenglamasini yuqoridagi usulni qo‘llab, yechish mumkin. Dastlab, $y'+P(x)y=0$ bir jinsli tenglamaning yechimlaridan biri $y_0(x)$ ni topamiz.

Tenglama umumiy yechimini $y(x)=u(x)y_0(x)$ ko‘rinishda qidiramiz. Natijada, noma’lum $u(x)$ ga nisbatan,

$$u'(x)y_0(x)=q(x)u^n(x)y_0^n(x)$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi va integrallanadi.

7-misol. $y'+2y-e^{2x}y^2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Dastlab, bir jinsli $y'+2y=0$ tenglamani integrallaymiz va uning $y=ce^{-2x}$ umumiy yechimini olamiz. Yechimlaridan biri sifatida $y_0(x)=e^{-2x}$ funksiyani qarash mumkin. So‘ngra, berilgan tenglamada $y(x)=u(x)e^{-2x}$ almashtirish bajaramiz:

$$e^{-2x}u'=e^{-4x}e^{2x}u^2\Rightarrow du/u^2=1.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $u(x)=1/(c-x)$ tenglikni olamiz. Natijada, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x)=u(x)y_0(x)=e^{-2x}/(c-x).$$

Rikkati tenglamasi. $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $P(x)$, $Q(x)$ va $R(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalardir.

Rikkati tenglamasining y_1 xususiy yechimi ma’lum bo’lsa

$$y=y_1+\frac{1}{z} \tag{8.9}$$

(z –yangi noma'lum funksiya) almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi

$$y'=Ay^2+\frac{B}{x}y+\frac{C}{x^2} \tag{8.10}$$

bunda A, B, C o'zgarmas sonlar bo'lib $\left(B+1^2\right) \geq 4AC$. Rikkati tenglamasi $y_1 = \frac{a}{x}$ xususiy yechimga ega. Bu yerda $a-$ o'zgarmas son bo'lib uni aniqlash uchun bu xususiy yechim (8.10) tenglamaga qo'yiladi.

(8.10) tenglama $y = \frac{z}{x}$ almashtirish yordamida ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirilishi mumkin.

8-misol. $y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = \frac{z}{x}$ almashtirishdan foydalansak,

$$\frac{z'x - z}{x^2} = \frac{z^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}, \qquad 2z'x = (z+1)^2, \qquad \frac{2dz}{(z+1)^2} = \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{z+1} = \ln|x| + C. \qquad z + 1 = \frac{2}{C - \ln|x|}, \quad y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)}.$$

8.2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Fan va texnikaning, xususan, iqtisodiyot muammolarini tahlil qilishda miqdorning dinamikasini o'rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Bu masalalarning modellarida odatda miqdorning o'zgarish tezligini ifodalovchi birinchi tartibli hosila bilan bir qatorda tezlanish, ya'ni tezlikning o'zgarishini ifodalovchi ikkinchi tartibli hosila ham ishtirok etadi. Bunday modeilarga misollar keltirishdan oldin ikkinchi tartibli tenglamalar haqlda umumiy tushunchalarni keltirib o'tamiz.

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{8.11}$$

ko'rinishdagi tenglama 2 – tartibli differensial tenglama deb ataladi. Qandaydir intervalda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan (8.11) tenglikni qanoatlantiradigan $y(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi yoki uning integral egri chizig'i deb ataladi.

4-ta'rif. Agar (8.11) tenglama $x \in [a, b]$ intervalda

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1 \tag{8.12}$$

boshlang'ich shartlar bilan o'rganilayotgan bo'lsa, u holda (8.11) va (8.12) birgalikda Koshi masalasi deb ataladi.

5-ta'rif. Agar (8.11) tenglama $x \in [a,b]$ intervalda

$$y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1 \qquad (8.13)$$

chegaraviy shartlar bilan o'rganilayotgan bo'lsa, u holda (8.11) va (8.13) birgalikda chegaraviy masala deb ataladi.

Ma'lumki, agar $F(x,y,z,u)$ funksiya qandaydir (x_0,y_0,z_0,u_0) nuqtada nolga teng va bu nuqtaning atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0,u_0)}{\partial u} \neq 0$ bo'lsa, u holda $F(x,y,z,u) = 0$ **tenglama** bu nuqtaning qandaydir atrofida yagona $u = f(x,y,z)$ yechimga ega bo'ladi.

Xuddi shunday shartlar asosida (8.11) tenglamani quyidagicha yozib olish mumkin:

$$y'' = F(x,y,y') \qquad (8.14)$$

Agar bu tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya ikkinchi va uchinchi argumentlariga nisbatan chiziqli ($F(x,y,y',y'') = y'' - py' - qy$) bo'lsa, (8.14) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaga keltiriladigan iqtisodiy dinamik modellarga doir ba'zi misollarni ko'rib chiqamiz:

a) Tovar va materiallar zahirasi hisobga olinadigan narx moslashuvchanligi modeli. Birinchi tartibli differensial tenglamani o'rganishda biz narxning talab va taklif funksiyalari orasidagi farqqa moslashuvchanligi modelini

$$\dot{p} = \alpha(Q_{talab} - Q_{taklif}), \quad \alpha > 0$$

ko'rib chiqqan edik. Bunda Q_{talab} va Q_{taklif} talab va taklifni ifodalovchi funksiyalar. Bu model narxning muvozanatda bo'lmasligi sababli sotilmasdan yig'ilib qolgan mahsulot miqdorini hisobga olmaydi. Taklifning ma'lum vaqt davomida talabdan yuqori bo'lishi bozorda ortiqcha mahsulot paydo bo'lishiga olib keladi va narxni pasayishga majburlaydi. Aksincha, talabning taklifdan oshib ketishi yig'ilib qolgan talab ta'sirida narxning oshishiga olib keladi. Bu effektni hisobga oluvchi modelni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\dot{p} = \alpha(Q_{talab} - Q_{taklif}) - \beta\int_0^t \left(Q_{taklif}(\tau) - Q_{talab}(\tau)\right)d\tau, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Bu tenglamadagi ikkinchi had talab va taklif orasidagi farq natijasida yig'ilib qolgan (izoh: integral so'zi jamlash ma'nosini bildiradi) mahsulot miqdorini bildiradi.

Bu tenglikning har ikkala tarafidan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha(\dot{Q}_{talab} - \dot{Q}_{taklif}) - \beta\left[Q_{talab} - Q_{taklif}\right].$$

Talab va taklif funksiyalari chiziqli bo'lsin, ya'ni $Q_{talab} = A + Bp$, $Q_{taklif} = F + Gp$. U holda bizning tenglamamiz quyldagi:

$$\ddot{p} + \alpha(G - B)\dot{p} + \beta(G - B)p = \beta(A - F)$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

b) Valrasa narx moslashuvchanligi modeli. Yuqoridagi misollarda raqobat sharoitidagi bozorda narxning talab va taklifdan kelib chiqqan holda

$$\dot{p} = \alpha(Q_d - Q_s), \quad \alpha > 0$$

tenglamaga muvofiq o'zgarishi aytib o'tildi. Bunga qo'shimcha ravishda Valrasa modelida ma'lum bir tovarni sotishdan olinadigan foydaning musbat yoki manfiyligidan kellb chiqqan holda korxonalarning bu mahsulotni ishlab chiqaruvchilari safiga qo'shilishi yoki bu turdagi mahsulotni ishlab chiqarishni to'xtatishi holati hisobga olinadi.

Ma'lum tovarni ishlab chiqaruvchilar soni $N(t)$ ga, firma o'z faoliyatini samarali davom ettirishi uchun zarur bo'lgan o'rtacha minimal harajat $\bar{c}$ ga teng bo'lsin. Agar narx $\bar{c}$ dan yuqori bo'lsa, faoliyat ollb borayotgan ishiab chiqaruvchllar soni ortadi, ya'ni $\dot{N}(t) > 0$. Agar narx $\bar{c}$ dan kam bo'lsa, ishlab chiqaruvchilar soni kamayadi, ya'ni $\dot{N}(t) < 0$. Buni quyidagicha algebraik ifodalashimiz mumkin

$$\dot{N} = \gamma(p - \bar{c}), \quad \gamma > 0.$$

Talab funksiyasi $Q_d = A + Bp$, $B < 0$ bo'lsin. Taklif faoliyat olib borayotgan ishlab chlqaruvchilar somga quyidagicha bog'langan $Q_s = mN$, $m = const > 0$. Bu ifodalarni hisobga olgan holda narx dinamikasini ifodalovchi tenglamadan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha\left(B\dot{p} - m\dot{N}\right)$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodaga $\dot{N}$ ning yuqorida berilgan ifodasini qo'-yamiz va

$$\ddot{p} - \alpha B\dot{p} + \alpha m\gamma p = \alpha m\gamma\bar{c}$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

Biz

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8.15)$$

tenglamani f funksiya chiziqli va koeffitsiyentlari o'zgarmas bo'lgan holi bilan tanishamiz. Bunday tenglamalar ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama deb ataladi.

Agar (8.15) tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (8.16)$$

tenglamaga (8.15) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Bir jinslimas (8.15) tenglama qaralayotganda uning mos bir jinsli (8.16) tenglamasi muhim ahamiyat kasb etadi. (8.16) tenglamaning yechimlar to'plami o'ziga xos xususiyatlarga egaligidan uni maxsus o'rganish maqsadga muvofiq.

Dastlab, chiziqli erkli va chiziqli bog'liq funksiyalarga to'xtalamiz. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkliligi yoki chiziqli bog'liqligi tushunchalarini ixtiyoriy funksiyalar uchun ham qo'llash mumkin.

6-ta'rif. Berilgan $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalarning $c_1, c_2, ..., c_n$ o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyasi, deb

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) \qquad (8.17)$$

tenglikka aytiladi. Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, u holda bu funksiyalar sistemasi chiziqli erkli sistema deyiladi.

Aksincha, agar qaralayotgan funksiyalardan hech bo'lmaganda bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalansa, u holda bu funksiyalar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Bir nechta funksiyalardan iborat sistemaning chiziqli erkliligi masalasini aniqlash usullaridan biri Vronskiy aniqlovchisi bilan bog'liq. $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar sistemasi uchun, Vronskiy aniqlovchisi

$$W(x) = W[y_1, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (8.18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Aniqlovchi xossalariga ko'ra, agar $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, Vronskiy aniqlovchisining qiymati x ning barcha qiymatlarida nolga teng.

Agar x ning hech bo'lmaganda bitta qiymatida $W(x) \neq 0$ bo'lsa, $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli erklidir.

Quyidagi funksiyalarning chiziqli erkli ekanligini Vronskiy aniqlovchisi yordamida isbotlash mumkin.

9-misol. $1, x, ..., x^{m-1}$ $x \in (a, b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

10-misol. $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_m x}$ $x \in (a, b)$ funksiyalar chiziqli erkli. Bu yerda $k_1, ..., k_m$ – turli sonlar.

11-misol. $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$ $x \in (a, b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

Agar chiziqli erkli $y_1(x),...,y_n(x)$ funksiyalar n – tartibli differensial tenglamalar sistemasining yechimlari bo'lsa, u holda bu funksiyalarni fundamental yechimlar sistemasi deb ataymiz. Agar chiziqli erkli $y_1(x),...,y_n(x)$ funksiyalar n – tartibli differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u holda bu funksiyalarning har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

Masalan, $y_1 = \sin x$; $y_2 = \cos x$ funksiyalar $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimlaridir.

Bu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy aniqlovchisi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 .$$

Demak, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ chiziqli erkli. U holda

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

funksiya ham $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi hisoblanadi.

Agar $y_1(x), y_2(x)$ (8.16) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u holda

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

funksiya (8.16) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli (8.16) tenglama fundamental yechimlari sistemasini qurish usuli bilan tanishamiz. Bu usilni ixtiyoriy n – tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli tenglama uchun qo'llash mumkin.

(8.16) tenglama xususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ $\lambda = const$ ko'rinishida qidiramiz. Funksiyani ikki marta differensiallab.

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

tengliklarni olamiz. Funksiya va uning hosilalarini (8.16) tenglamaga qo'ysak,

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

tenglama hosil bo'ladi. $e^{\lambda x} \neq 0$ (har doim musbat) ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamaga teng kuchli

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (8.19)$$

tenglamani olamiz.

(8.19) algebraik tenglama (8.16) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(8.16) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi (8.19) tenglamaning ildizlari bilan bog'liq. Shu sababli umumiy yechimni tuzishning xarakteristik tenglama yechimlari bilan bog'liq barcha hollarini ko'rib chiqamiz:

1) λ_1 va λ_2 ildizlar haqiqiy va turlicha bo'lsin. U holda $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ yechimlar (8.16) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasini tashkil qiladi. Umumiy yechim esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

12-misol. $y'' - 8y' + 7y = 0$ tenglama umumiy yechimini quring.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ ko'rinishga ega va uning ildizlari

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$. Natijada, chiziqli erkli $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{7x}$ yechimlarni olamiz. Tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}.$$

2) λ_1 va λ_2 ildizlar $\lambda_1 = \alpha + \beta i$; $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ kompleks sonlar bo'lsin, bu yerda $-\beta \neq 0$. Ildizlarga mos yechimlar:

$$z_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad z_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo'lganidan, ular chiziqli erkli. Eyler formulasidan foydalanib,

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

funksiyalarni olamiz. Funksiyalarning quyidagi chiziqli kombinatsiyalarini tuzamiz:

$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

y_1; y_2 funksiyalar tenglamaning haqiqiy yechimlari bo'lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

ko'rinishda yoziladi.

13-misol. $y'' - 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_2 = 3 - i$. Shunday qilib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{3x}\cos x, \quad y_2 = e^{3x}\sin x.$$

Umumiy yechim

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

3) λ_1 va λ_2 ildizlar o‘zaro teng va haqiqiy. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo’lsin. U holda fundamental yechimlar sistemasi sifatida $y_1(x) = e^{\lambda x}$ $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ chiziqli erkli funksiyalarni olish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

14-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Umumiy yechim

$$y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Bir jinsli bo‘lmagan ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamaning yechimini qurishning ba’zi usullari bilan tanishib chiqamiz.

Teorema. Bir jinslimas (8.15) differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu tenglama biror $y_0(x)$ xususiy yechimi va (8.15) ning bir jinsli (8.16) tenglama umumiy yechimlari yig‘indisiga teng:

$$y = y_{xususiy} + y_{bir\ jinsli}.$$

Umumiy holda (8.16) tenglamaning biror – bir xususiy yechimini ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulida qurish mumkin. Bu usulni o‘rganishni talabalarga mustaqil ish sifatida tavsiya etamiz. Tenglamaning o‘ng tomoni maxsus shaklga ega bo‘lgan holatlarga to‘xtalib o‘tamiz.

1) Agar tenglamaning o‘ng tomoni o‘zgarmas $f(x) = M$ bo‘lsin. U holda

a) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{q}$ agar $q \neq 0$ bo‘lsa;

b) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{p}x$ agar $q = 0$, $p \neq 0$ bo‘lsa;

c) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{2}x^2$ agar $p = 0$, $q = 0$ bo‘lsa.

2) tenglamaning o‘ng tomoni $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + l$ ko‘rinishdagi ko‘phad bo‘lin. U holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar (8.19) xarakteristik tenglamaning ildizlari noldan farqli bo‘lsa, xususiy yechim $y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar (8.19) xarakteristik tenglamada nol k karrali ($k=1$ *yoki* $k=2$) ildiz bo‘lsa, xususiy yechim $y=x^k(Ax^m+Bx^{m-1}+...+L)$ ko‘rinishda qidiriladi.

3) Tenglamaning o‘ng tomoni $f(x)=(ax^m+bx^{m-1}+...+l)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda bo‘lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar α (8.19) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo‘lmasa, xususiy yechim $y=(Ax^m+Bx^{m-1}+...+L)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar α (8.19) xarakteristik tenglamaning k karrali ($k=1$ *yoki* $k=2$) ildizi bo‘lsa, xususiy yechim $y=x^k(Ax^m+Bx^{m-1}+...+L)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi. 2) va 3) holatarda yechimdan hosilalarni hisoblab, (8.15) tenglamaga qo‘yiladi. Hosil bo‘lgan ayniyatda o‘xshash hadlarning koeffitsiyentlari taqqoslanib, $A,B,...,L$ noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilinadi va bu sistemani yechib noma’lum koeffitsiyentlar topiladi.

4) Tenglamaning o‘ng tomoni $f(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$ ko‘rinishda bo‘lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar $\alpha+\beta i$ son (8.19) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo‘lmasa, xususiy yechlm $y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar $\alpha+\beta i$ (8.19) xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lsa, xususiy yechim $y=xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko‘rinishda qidiriladi.

15-misol. $y''-6y'+8y=(3x-1)e^x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Ushbu holda $\alpha=1$. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

bo‘lib, uning ildizlari 2 va 4 ga teng. $y_{bir\ jinsli}=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$.

Tenglamaning xususiy yechimini $y=(ax+b)e^X$ ko‘rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$$

$$y''=ae^x+(ax+a+b)e^x=(ax+2a+b)e^x$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo‘yiladi va e^x ga qisqartirilgandan so‘ng:

$$(ax+2a+b)-6(ax+a+b)+8(ax+b)=x-1$$

yoki

$$3ax-4a+3b=3x-1.$$

Mos koeffitsiyentlarni tenglab, $a=1, b=-1$ natijani olamiz. Izlanayotgan xususiy yechim:

$$y_{xususiy}=(x-1)e^{x}.$$

Tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+(x-1)e^{x}.$$

16-misol. $y''-4y'+5y=12\sin x+4\cos x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani yechamiz.

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$

$\lambda=2\pm i$. Bizning holatda $\alpha=0$ va $\beta=1$ bo'lib, xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Demak, xususiy yechim quyidagicha qidiriladi:

$$y=A\sin x+B\cos x.$$

Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y'=A\cos x-B\sin x$$

$$y''=-A\sin x-B\cos x.$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo'yamiz va soddalashtiramiz

$$(-A\sin x-B\cos x)-4(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=12\sin x+4\cos x$$

yoki

$$(4A+4B)\sin x+(4B-4A)\cos x=12\sin x+4\cos x.$$

Bundan

$$\begin{cases}4A+4B=12,\\4B-4A=4,\end{cases}$$

yoki $A=1.$ $B=2$. Xususiy yechim

$$y_{xususiy}=\sin x+2\cos x.$$

Demak, umumiy yechim

$$y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\sin x+2\cos x,$$

bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Izoh. Agar o'zgarmas koeffitsiyentli $n-$tartibli chiziqli

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+...+p_0y=f(x)$$

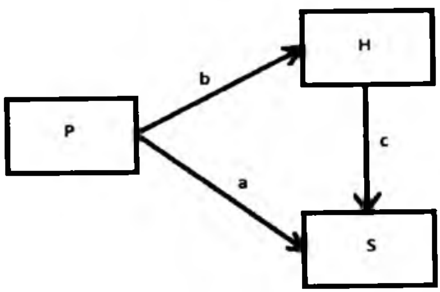
differensial tenglama o'rganilayotgan bo'lsa, uning ymumiy yechimini qurish uchun

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_0 = 0$$

xarakteristik tenglamadan foydalaniladi. Xususiy yechimni topish usuli ikkinchi tartibli tenglama holidagi bilan bir xil.

8.3. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Fizika, texnika va iqtisodiyotning ko'p masalalarida o'rganilayotgan jarayonni bir nechta miqdorlar ifodalaydi. Masalan, biror-bir mahsulot yoki xizmatga bo'lgan talabni o'rganganda mijozlarni uch toifaga bo'lishimiz mumkin: potensial mijozlar (P), ikkilanuvchi yoki kechikuvchi mijozlar (H) va xaridorlar (S). $P+H+S=N$ bo'lsin. $p=P/N$, $h=H/N$, $s=S/N$ normallangan o'zgaruvchilarni kiritamiz. Mijozlar bir turdan boshqasiga quyidagi sxema asosida harakatlansin.



Bunda a,b va c birlik vaqt davomida bir toifadagi mijozning boshqa toifaga o'tishi ehtimoli ($c<a$). O'rtacha ikkilanish vaqti $\tau_h = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ kabi aniqlanadi. Bu jarayonni quyidagi tenglamalar sistemasi bilan modellashtirishimiz mumkin.

$$\dot{p} = -ap - bs,$$

$$\dot{s} = ap + ch,$$

$$\dot{h} = bp - ch.$$

Natijada uchta tenglamadan iborat tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shunga o'xshagan ko'plab jarayonlar differensial tenglamalar sistemasiga keltirilishi mumkin.

Umumiy holda differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{8.20}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar differensial tenglamalar sistemasida noma'lum funksiyaning hosilasi differensial tenglamaning chap tomonida bo'lib, o'ng tomonida hosilalar qatnashmasa bunday differensial tenglamalar sistemasiga normal differensial tenglamalar sistemasi deyiladi. (8.20) normal differensial tenglamalar sistemasidir. (8.20) tenglamalar sistemasining yechimi, deb 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, (8.20) tenglamalar sistemasini ayniyatga aylantiradigan har qanday $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ funksiyalarga aytiladi.

(8.20) differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi, deb

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (8.20) tenglamalar sistemasining $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ yechimiga aytiladi.

(8.20) differensial tenglamalar sistemasining yechimini topish quyidagicha amalga oshiriladi.

Biz o'zgarmas koeffitsiyentli normal differensial tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{8.21}$$

bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Bu tenglamalar sistemasini matritsali shaklda $y' = Ay + f(x)$ kabi yozishimiz mumkin, bu yerda y noma'lum funksiyalar vektori, A koeffitsiyentlar matritsasi, $f(x)$ tashqi ta'sirni ifodalovchi vektor.

Agar $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$ bo'lsa, (8.21) sistema bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi. (8.21) sistemaning umumiy yechimi bir jinsli differensial tenlamalar sistemasining umumiy yechimi va bir jinsli bo'lmagan sistemaning xususiy yechimi yig'indisi shaklida ifodalanadi, ya'ni

$$y = y_{bir\ jinsli} + y_{xususiy}.$$

Bir jinsli differensial tenglamalar sistemasining yechimini $y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, ..., y_n = \alpha_n e^{\lambda x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $\alpha_1, ..., \alpha_n$, λ – noma'lum sonlar. $\frac{dy_i}{dx} = \alpha_i \lambda e^{\lambda x}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ bo'lgani uchun (8.21) sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}y_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{8.22}$$

Bu sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchin

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8.23}$$

bo'lishi kerak. Agar determinant hisoblab chiqilsa biz bu yerdan $n-$ tartibli tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (8.21) differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi, deb ataladi. Bu tenglamadan $\lambda_1, ..., \lambda_n$ –(8.21) sistema matritsasining xos sonlarini, so'ngra esa λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sonlarga mos $\alpha^{(j)} = \{\alpha_1^{(j)}, ..., \alpha_n^{(j)}\}$ – xos vektorlarni topamiz. Natijada chiziqli erkli $\{\alpha_i^{(j)} e^{\lambda_j x}\}$ $i, j = 1, 2, 3, ..., n-$ vektorlar sistemasini, ya'ni fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz.

U holda (8.21) sistemaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_1^{(j)} \exp(\lambda_j x), \\ .... \\ y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_n^{(j)} \exp(\lambda_j x). \end{cases}$$

Ikkita tenglamadan iborat bir jinsli avtonom sistemani alohida tahlil qilib chiqamiz

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Bu sistemaga mos bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

Bu sistemaning asosiy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ga teng. Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \qquad (8.25)$$

Bu tenglamaning ildizlarini (xarakteristik sonlarni yoki matritsa xos sonlarini) topamiz. Maktab kursidan bizga ma'lumki, bunda uch holat ro'y berishi mumkin.

1) $D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$. Bu holatda (8.25) tenglama ikkita bir-biridan farqli ildizlarga ega:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

Ularga mos xos vektorlarni $(A - \lambda_k E)\alpha_k = 0$ tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Demak, bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$y_1 = C_1 a_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2 a_{12} e^{\lambda_2 x},$$
$$y_2 = C_1(\lambda_1 - a_{11})e^{\lambda_1 x} + C_2(\lambda_2 - a_{11})e^{\lambda_2 x}.$$

2) $D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$. Bu shart ostida (8.25) tenglama ikkita bir xil yechimga ega $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$. Bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x},$$
$$y_2 = \left[\frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}(C_1 + C_2 x) + \frac{C_2}{a_{12}}\right]e^{\lambda x}.$$

3) $D=(a_{11}+a_{22})^2-4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)<0$. Bu shart ostida (8.25) tenglama haqiqiy sonlarda yechimga ega emas. Uning ildizlari kompleks qo'shma sonlardan iborat bo'ladi. $\lambda=h\pm iv$ bo'lsin. Bu yerda

$$h=\frac{a_{11}+a_{22}}{2},\qquad v=\sqrt{|D|}\,.$$

U holda differensial tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$y_1=e^{hx}(C_1\cos vx+C_2\sin vx),$$

$$y_2=e^{hx}\left(\frac{(h-a_{11})C_1+vC_2}{a_{12}}\cos vx+\frac{(h-a_{11})C_2-vC_1}{a_{12}}\sin vx\right).$$

Bunda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu o'zgarmaslarni aniqlash uchun odatda bizga ikkita shart zarur bo'ladi: $y_1(0)=a_1$, $y_2(0)=a_2$. Bu ko'rinishdagi shartlarni boshlang'ich shartlar, deb ataymiz. Tenglamalar sistemasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi.

17-misol. $\begin{cases} \dot{x}(t)=x+2y, \\ \dot{y}(t)=y+2x \end{cases}$ sistemaning yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik ildizlarni topamiz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=0\Rightarrow\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1\,.$$

Demak, sistemaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlash mumkin:

$$x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\qquad y(t)=a_1e^{3t}+a_2e^{-t}\,.$$

U holda sistemadagi 1-tenglamadan quyidagini hosil qilamiz:

$$3C_1e^{3t}-C_2e^{-t}=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+2a_1e^{3t}+2a_2e^{-t}\Rightarrow$$

$$2C_1-2a_1=0,\ -2C_2-2a_2=0\Rightarrow a_1=C_1,\ a_2=-C_2.$$

Shunday qilib sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, \\ y(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Sistemani yuqori darajali tenglamaga keltirib uning yechimini topish ham mumkin. Bu usul bilan biz tanishib chiqamiz.

18-misol. $\begin{cases} y_1'=2y_1+2y_2 \\ y_2'=y_1+3y_2 \end{cases}$ sistemaning umumiy yechimni toping.

Yechish. Bu tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasidan x argument bo'yicha hosila olamiz $y_1'' = 2y_1' + 2y_2'$. Ikkinchi tenglamadan foydalanib quyidagini hosil qilamiz: $y_1'' = 2y_1' + 2y_1 + 6y_2$. $y_2(x)$ funksiyani $y_1(x)$ va $y_1'(x)$ orqali ifodalaymiz: $y_2 = \frac{1}{2}y_1' - y_1$. So'ngra quyidagi $y_1'' = 5y_1' - 4y_1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning yechimi $y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{4x}$. Bu yechimdan hoslla olib $y_2(x) = -\frac{1}{2}C_1e^x + C_2e^{4x}$ ga ega bo'lamiz.

19-misol. $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$ sistemani $y_1\big|_{x=0} = 1$, $y_2\big|_{x=0} = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu yerda ham sistemaning birinchi tenglamasini differensiallab, so'ng $y_2 = y_1' + 7y_1$ dan foydalanib $y_1'' + 12y_1' + 37 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi: $y_1 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Bundan

$$y_2(x) = c_2e^{-6x}(\cos x - \sin x) + c_2e^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

yechimni aniqlaymiz. Agar $y_1\big|_{x=0} = 1$, $y_2\big|_{x=0} = 0$ boshlang'ich shartlardan foydalanilsa, tenglamalar sistemasining yechimi

$$y_1(x) = e^{-6x}(\cos x - \sin x)$$

$$y_2(x) = -2e^{-6x}\sin x$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasining yechimini topamiz. Buning uchun bu sistemaning xususiy yechimi topib, uni bir jinsli tenglamalar sistemasi yechlmiga qo'shib qo'yish yetarli. Xususiy yechimni topishni ko'rib chiqamiz.

7-ta'rif. (8.24) tenglamalar sistemasining turg'un yechimi, deb $y_1' = 0$, $y_2' = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimga aytiladi.

Turg'un yechim quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini yechib topiladi:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = -b_1,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = -b_2.$$

Agar $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo'lsa,

$$\overline{y}_1 = \frac{a_{21}b_1 - a_{22}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\overline{y}_2 = \frac{a_{12}b_1 - a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Bu holatda turg'un yechim (8.24) sistemaning xususiy yechimi bo'ladi.

20-misol. $\begin{cases} \dot{x}(t) = x + 2y - 5, \\ \dot{y}(t) = y + 2x - 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Xususiy yechimni topamiz.

$$x + 2y - 5 = 0,$$
$$y + 2x - 4 = 0$$

tenglamalar sistemasidan $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 2$ turg'un yechimni hosil qilamiz. Oldingi misollarda bu sistemaga mos bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topilgan edi:

$$\begin{cases} x_b(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \\ y_b(t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + 1, \\ y(t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} + 2. \end{cases}$$

8.4. Birinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda dinamik o'zgaruvchi vaqt t uzluksiz o'zgaruvchi sifatida yoki diskret o'zgaruvchi sifatida qaralishi mumkin. Agar t uzluksiz o'zgaruvchi sifatida qaralsa, dinamikasi o'rganilayotgan miqdor y vaqtning uzluksiz funksiyasi $y(t)$ sifatida ifodalanadi va uning dinamikasi odatda differensial tenglama yoki differensial tenglamalar sistemasi yordamida modellashtiriladi. Differensial tenglamalar haqidagi tushunchalar va ular orqali ifodalanadigan ba'zi modellar oldingi ma'ruzalarda keltirib o'tildi.

Bu yerda vaqt diskret o'zgaruvchi sifatida qaraladigan diskret tenglamalar bilan tanishamiz. t vaqt diskret bo'lganda u 0,1,2,3,... butun qiymatlarni ifodalaydi. t odatda yillarda, oylarda, kunlarda yoki ba'zi holatlarda soat, minut yoki sekundlarda ham ifodalanishi mumkin. Bu holatda o'rganilayotgan miqdorning t vaqtdagi qiymati y_t kabi belgilanadi yning dinamikasini ifodalovchi tenglamalar chekli ayirmali tenglamalar deb ataladi. Chekli ayirmali tenglamalarning tartibi qaralayotgan vaqtlar orasidagi eng katta farq bilan aniqlanadi.

21-misol. $y(t+1) = 2y(t) - 1$ – birinchi tartibli chekli ayirmali tenglama. $y(t+2) = 2y(t) + 6$ – ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglama.

Chekli ayirmali tenglamaning yechimi $\{y(t)\}$, $t = 0,1,2,3,...$ – sonli ketma-ketlik sifatida qaraladi. Uni aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan foydalaniladi. Masalan, 1-tartibli tenglama uchun shart $y(0) = y_0$ ko'rinishda; 2-tartibli tenglama uchun shart $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$ ko'rinishda bo'lib, ularning soni tenglama tartibiga mos bo'ladi. Ko'p hollarda chekli ayirmali tenglamada $y(t)$ o'rniga y_t belgi ishlatiladi. Masalan, yuqoridagi tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin: $y_{t+1} = 2y_t - 1$, $y_{t+2} = 2y_t + 6$. Bu ko'rinishdagi chekli ayirmali tenglamalar bilan oldindan tanishmiz.

Masalan: arifmetik progressiyada $2y_{t+1} = y_t + y_{t+2}$, geometrik progressiyada $y_{t+1}^2 = y_t \cdot y_{t+2}$.

Masalan, bank depoziti bo'yicha yillik foiz stavkasi 12% bo'lib, foiz stavkasi har oyning oxirida hisoblanib borilsin. Bankga har oyning boshida 100 p.b. miqdorida pul qo'yib boriladi. Bu jarayonni quyidagicha modellashtirishimiz mumkin. Vaqtni t bilan belgilaymiz va u oylarni ifodalasin. t vaqt momentidagi depozitdagi pul miqdorini y_t kabi belgilaymiz. Bir oyda depozitdagi pul miqdori $\frac{12\%}{12} = 1\%$ ga oshib boradi. U holda $y_0 = 100$ yordamida

$$y_{t+1} - y_t = 0{,}01y_t + 100$$

yoki

$$y_{t+1} = 1{,}01y_t + 100 \qquad (8.26)$$

munosabatni hosil qilamiz. (8.26) tenglik 1-tartibli chekli ayirmali tenglamadir.

Agar tenglamada butun argumentli funksiyaning turli vaqtlarga $(t = 0,1,2,3,...)$ mos keluvchi qiymatlari qatnashsa, u holda bu tenglama chekli ayirmali tenglama deb ataladi. Tenglamaning tartibi undagi vaqtlarning eng katta farqi blan aniqlanadi.

8-ta'rif. Quyidagi

$$y_{t+k} = f(y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+k-1}, t) \qquad (8.27)$$

shakldagi munosabat k-tartibli chekli ayirmali tenglama deb ataladi (bu yerda $t + k - t = k$).

Agar bu tenglamaning o'ng tomonidagi f funksiya t erkli o'zgaruvchiga bo'g'liq bo'lmasa, u holda bu tenglama avtonom chekli ayirmali tenglama deb ataladi.

Agar f funksiya $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+k-1}$ o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo‘lsa, u holda (8.27) tenglama chekli ayirmali chiziqli tenglama deb ataladi.

Izoh. Chekli ayirmali tenglamalar diskret tenglamalar ham deb atalishi mumkin.

(8.27) tenglikni qanoatlantiruvchi $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ ketma-ketlik (8.27) chekli ayirmali tenglamaning yechimi deb ataladi.

22-misol. $y_{t+1} = 1,1y_t$ chekli ayirmali tenglamaning yechimi $y_t = C \cdot 1,1^{t-1}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$y_{t+1} = C \cdot 1,1^{(t+1)-1} = C \cdot 1,1^t = 1,1 \cdot C \cdot 1,1^{t-1} = 1,1y_t.$$

Chekli ayirma, deb odatda $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ ifodaga aytiladi. Chekli ayirmali tenglama ham differensial tenglama kabi miqdorning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini ifodalaydi. Differensial tenglamada hosila vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligini ifodalasa, chekli ayirma bu miqdorning qancha miqdorda o‘zgarishini ifodalaydi.

Differensial tenglamani chekli ayirmali tenglamaning limlti sifatida qarash mumkin.

Hosilaning ta'rifiga asosan $y'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$. Agar bu ifodada h ni yetarlicha kichik miqdor deb olsak, $y'(t) \approx \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$ ifodani hosil qilamiz. $h = 1$ deb qaralsa, $y'(t) = \Delta y_t$ ifodani olamiz. Bu ifodadan ko‘rinib turibdiki, agar t diskret vaqt yetarlicha kichik birliklarda ifodalansa, hoslla chekli ayirma bilan ifodalanishi mumkin.

Xuddi shunday, ikkinchi tartibli hosila uchun

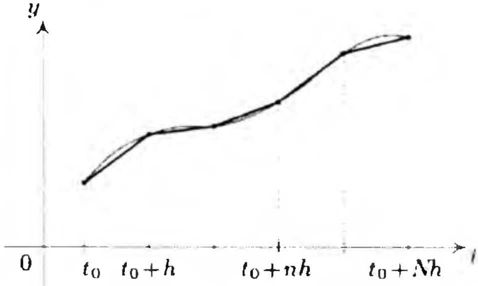
$$y''(t) \approx \Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

ifodani hosil qilishimiz mumkin. Bu yerda $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t)$- ikkinchi tartibli chekli ayirma.

Yuqorldagilardan xulosa qilgan holda, ixtiyoriy differensial tenglamani vaqtni diskretlashtirish natijasida chekli ayirmali tenglamaga almashtirishimiz mumkin. Lekin teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lavermaydi, ya’ni, differensial tenglamaga keltirilmaydigan chekli ayirmali (diskret) tenglamalar ham mavjud.

Masalan, Fibonachchi sonlari: 1, 2, 3, 5, 8, 13,... $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ko‘rinishdagi 2-tartibll chekli ayirmali tenglama bilan ifodalanadi. Ammo bu tenglamani differensial tenglama ko‘rinishda yozish mumkin emas.

1-tartibli differensial tenglama va uning chekli ayirmali approksimatsiyasini (Eyler siniq chizig'ini) quyidagicha tasvirlash mumkin.



Chekli ayirmali tenglamalarning yechimini topishda ketma-ketliklar nazariyasidan foydalanish mumkin. Masalan, $y_{t+1}=2y_t-1-$ birinchi tartibli chekli ayirmall tenglamaning yechimini topish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) avval $y_{t+1}=2y_t$ bir jinsli tenlamaning yechimi topiladi. Buning uchun yechimni $y_t=\lambda^t$ ko'rinishda qidiramiz. U holda $y_{t+1}\to\lambda^{t+1}$, $y_t\to\lambda^t$; $y_{t+1}=2y_t\Rightarrow\lambda=2$. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y_t=C\cdot 2^t$. Tenglamanimg o'ng tomoni ko'phad bo'lganu uchun bir jinsli bo'magan tenglamaning xususiy yechimini $y_t=at+b$ ko'rinishda qidiramiz va uni tenglamaga qo'yib $a=0, b=1$ ni hosil qilamiz. U holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini quyidagicha yozamiz: $y_t=2^t(C-1)+1,\quad C=y_0$ yechimm hosil qilamiz.

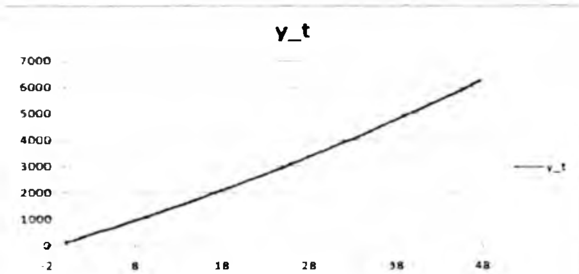
$y_{t+2}=2y_t+6-$ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamaning yechimi esa $y_0=C_1$, $y_1=C_2$ shartlar asosida topiladi. Bu yerda ham yuqoridagi kabi bir jinsli tengalama uchun $\lambda^2-2=0$ xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $\lambda_1=\sqrt{2}$, $\lambda_2=-\sqrt{2}$. U holda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y_t=C_1\left(\sqrt{2}\right)^t+C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t$, $t=0,1,2,...$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham tenglamaning o'ng tomoni ko'phad bo'lgani uchun bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini $y_t=at^2+bt+c$ ko'rinishda qidiramiz va uni tenglamaga qo'yib $a=0, b=0,\ c=-6$ ni hosil qilamiz. U holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini quyidagicha yozamiz $y_t=C_1\left(\sqrt{2}\right)^t+C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t-6$, $t=0,1,2,...$ ko'rinishda yoziladi. Buni to'g'ridan to'g'ri tekshirish orqali bilish mumkin.

Shunday qilib,

$$y_{t+1}=f(y_t,t) \tag{8.28}$$

ko'rinishdagi tenglama 1-tartibli chekli ayirmali tenglama deyiladi. (8.26) tenglama MS Excel dasturida quyidagicha yechiladi.

	A	B
1	t	y_t
2	0	100
3	1	201
4	2	303,01
5	3	406,0401
6	4	510,1005
7	5	615,2015
8	6	721,3535
9	7	828,5671
10	8	936,8527
11	9	1046,221
12	10	1156,683
13	11	1268,25
14	12	1380,933
15	13	1494,742
16	14	1609,69
17	15	1725,786
18	16	1843,044
19	17	1961,475
20	18	2081,09
21	19	2201,9
22	20	2323,919
23	21	2447,159
24	22	2571,63



Bu ko'rinishdagi tenglamaning aniq yechimini topish uchun y_t miqdorning $t=0$ dagi qiymatini bilish talab qilinadi. Ya'ni, biz $y_0 = A$ shakldagi boshlang'ich shartni berishlmiz zarur. Chekli ayirmali tenglamani ketma-ket yaqinlashish usulida yechish mumkin. Ya'ni (8.28) tenglikda $t=0$ deb olib, y_1 ni topamiz. Ikkinchi qadamda (8.28) tenglikka $t=1$ qiymatini qo'yib, oldingi qadamdan topilgan y_1 ning qiymati yordamida y_2 ni topamiz va hakozo. Shu usul bilan t ning bizga zarur bo'lgan ixtiyoriy qiymati uchun y_t miqdorni aniqlashimiz mumkin.

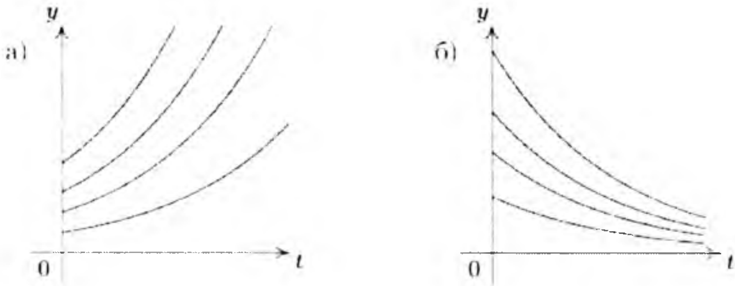
Bizga ma'lumki, $y' = ay + b$ 1-tartibli chiziqli differensial tenglama ,deb ataladi. Unga mos chekli ayirmali tenglama esa quyidagicha yoziladi

$$y_{t+1} = ay_t + b \qquad (8.29)$$

Agar 1-tartibli chlziqli differensial tenglamada $b=0$ bo'lsa, u holda uni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{y'}{y} = a$$

Bu yerda a o'sish koeffitsiyenti, deb ataladi va bu tenglamaning yechimi turli boshlang'ich shartlarda quyidagicha tasvirlanadi:



1-tartibli chiziqli differensial tenglamaga mos chekli ayirmali (8.29) tenglamani $b=0$ hol uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=a.$$

Demak, $y_{t+1}=ay_t$ tenglama o'zgarmas tempda o'sishda bo'lgan jarayonni ifodalaydi.

23-misol. Faraz qilamiz bankka S_0 miqdorda m yillik foizda mablag' qo'yilgan bo'lsin. U holda t yildan so'nggi qiymatini S_t bilan belgilaymiz. Ma'lumki, bu qiymat geometrik progressiyaga asoslangan holda $S_t=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t S_0$ formula bilan aniqlanadi. Agar foiz bir yilda bir marta hisoblanadigan bo'lsa, u holda S_t ning qiymatini $S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100}\right)S_t$ 1-tartibli chekli ayirmali tenglama yordamida hisoblanadi.

Agarda foiz bir yilda k marta hisoblanadigan bo'lsa, u holda S_t ning qiymatini $S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100k}\right)S_t$ tenglama yordamida hisoblanadi.

Agar foizni hisoblash uzlukzis, ya'ni $k\to\infty$ bo'lsa, u holda $S(t)=\lim\limits_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=S_0e^{rt}$ bo'ladi.

Chekli ayirmali tenglamada $h=\frac{1}{k}$ belgilash kiritsak, u holda u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100k}\right)S_t\Rightarrow S_{t+1}-S_t=h\frac{m}{100}S_t\Rightarrow\frac{S_{t+1}-S_t}{h}=rS_t,\ \ r\equiv\frac{m}{100}$$

Bu yerda $k\to\infty\Rightarrow h\to 0$ limitga o'tib chekli ayirmali tenglamaga mos bo'lgan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

Quyidagi misolni ko'ramiz: $m = 8\%$, ya'ni $r = 0,08$ bo'lsin. U holda mablag'ning o'sishi quyidagi jadval kabi bo'ladi:

yillar	$\frac{S(t)}{S_0}$ chekli ayirmali tenglamadan		$\frac{S(t)}{S_0}$ differensial tenglamadan
	$m = 4$	$m = 366$	
1	1,0824	1.0833	1.0833
2	1,1716	1.1735	1,1735
5	1.4859	1,4918	1,4918
10	2.2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11.0202	11,0232
40	23,7609	24.5238	24.5325

$y_{t+1} = ay_t + b$ chiziqli birinchi tartibli chekli ayirmali avtonom tenglamada

y_0 ma'lum, deb qaraymiz. U holda $t = 0$ da

$$y_1 = ay_0 + b.$$

$t = 1$ deb olsak,

$$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2 y_0 + (a+1)b.$$

$t = 2$ da

$$y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + (a+1)b) + b =$$
$$= a^3 y_0 + (a^2 + a + 1)b.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, shu jarayonni ixtiyoriy t gacha davom ettirsak,

$$y_t = a^n y_0 + b(1 + a + a^2 + ... + a^{t-1})$$

yoki

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\dfrac{1-a^t}{1-a} & \text{agar } a \neq 1 \text{ bo'lsa,} \\ y_0 + bt, & \text{agar } a = 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni hosil qilamiz.

9-ta'rif. (8.29) tenglamaning turg'un yechimi ,deb jarayon o'zgarmas holatda bo'ladigan yechimga aytiladi.

Turg'un yechimni hosil qilish uchun (8.29) tenglikda $y_{t+1} = y_t = \overline{y}$ deb olamiz. U holda $a \neq 1$ da

$$\bar{y} = \frac{b}{1-a}$$

yechimni hosil qilamiz. $a = 1$ da tenglama turg'un yechimga ega emas.

a parametrning qiymatiga bog'liq ravishda tenglamaning umumiy yechimi $t \to \infty$ da turg'un yechimga yaqinlashadi yoki undan uzoqlashadi. Bu savolga javob berish maqsadida tenglama yechimini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

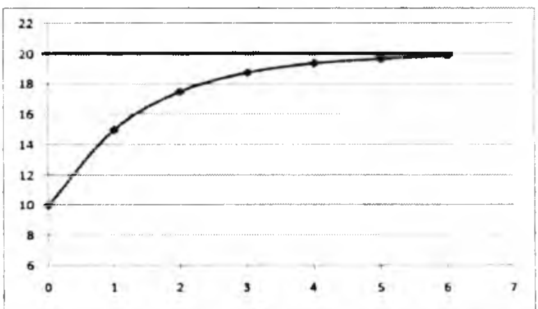
$$y_t = \frac{b}{1-a} + a^t\left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right), \quad a \neq 1, \ t = 0,1,2,...$$

Bundan ko'rinib turibdiki, $|a|<1$ da tenglama yechimi turg'un yechimga yaqinlashadi, agar $|a|>1$ bo'lsa, yechim uzoqlashadi.

24-misol. $y_{t+1} = ay_t + 10$ tenglamani qaraylik. $y_0 = 10$ deb olamiz. Quyidagi grafikdan ko'rish mumkinki $a = 0,5$ da tenglama yechimi turg'un yechim $\bar{y} = 20$ ga juda tez ravishda monoton yaqinlashadi.

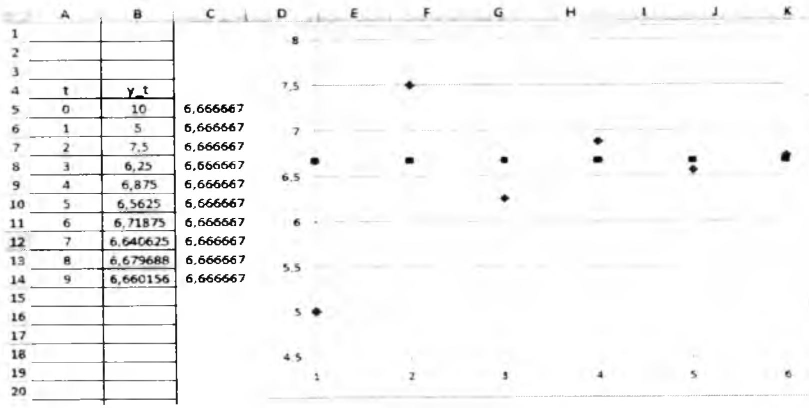
Tenglamaning $a = 0,5$, $y_0 = 10$ da Excel dasturidagi yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

	A	B	C
1	t	y_t	
2	0	10	20
3	1	15	20
4	2	17,5	20
5	3	18,75	20
6	4	19,375	20
7	5	19,6875	20
8	6	19,84375	20
9	7	19,92188	
10	8	19,96094	
11	9	19,98047	
12	10	19,99023	
13	11	19,99512	
14	12	19,99756	
15	13	19,99878	
16	14	19,99939	
17	15	19,99969	
18	16	19,99985	



Agar $a = -0,5$ deb olsak, tenglama yechimi tebranuvchi bo'ladi, ya'ni vaqt o'tishi bilan turg'un yechimdan yuqoriga va pastga sakraydi. Biroq, yechim yana turg'un yechimga yaqinlashadi. Buni quyidagi grafikda ko'rishimiz mumkin.

Tenglamaning $a = -0,5$, $y_0 = 10$ da Excel dasturidagi yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



	A	B	C
1			
2			
3			
4	t	y_t	
5	0	10	6,666667
6	1	5	6,666667
7	2	7,5	6,666667
8	3	6,25	6,666667
9	4	6,875	6,666667
10	5	6,5625	6,666667
11	6	6,71875	6,666667
12	7	6,640625	6,666667
13	8	6,679688	6,666667
14	9	6,660156	6,666667
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Inflyatsiya modeli (Keygen modeli) bilan tanishib chiqamiz. Bu model 1956 yilda F.Keygen tomonidan taklif etilgan bo‘lib, giperinflyatsiya jarayonini ifodalaydi. Modelning asosini quyidagi tenglama tashkil etadi:

• Pulga talab funksiyasini yozib olamiz: $\frac{M_d}{P} = e^{-\alpha\pi}$. Bu yerda P – narxning aynan hozirgi paytdagi darajasi; π – kutilayotgan inflyatsiya tempi; $\alpha > 0$ – pulga bo‘lgan talabning elastikligi;

• Kutilayotgan inflyatsiyaga moslashish (adaptatsiya) differensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi $\pi' = \beta\left(\frac{P'}{P} - \pi\right)$. Bu yerda $\beta > 0$ – adaptatsiya parametri; $\frac{P'}{P}$ – inflyatsiya tempi.

Keygen modelini quyidagicha yozib olish maqsadga muvofiq buning uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$m_d = \ln M_d, \qquad p = \ln P.$$

U holda bu belgilashlardan so‘ng tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$m_d - p = -\alpha\pi, \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{8.30}$$

$$\pi' = \beta(p' - \pi), \tag{8.31}$$

(8.30) tenglamani pulga talab funksiyasini logorifmlashdan; (8.31) tenglamani esa differensial tenglamadan hosil qilamiz.

Faraz qilamiz $M_d = const$ u holda $\pi' = \gamma\pi$. $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\beta - 1}$.

$\pi(0) = \pi_0$ boshlang‘ich shartdan foydalansak

$$\pi(t) = \pi_0 e^{\gamma t}$$

Demak, agar $\gamma < 0$ bo'lsa, inflyatsiya kamayadi.

Endi narx muvozanatini ifodalovchi Cobveb modeli bilan tanishib chiqamiz. Bozordagi biror bir tovarga nisbatan talab funksiyasi

$$Q_d = A + Bp_t$$

ko'rinishda bo'lsin. Odatda narxni oldindan belgilashda taklifning t vaqtda qanday bo'lishi noma'lum bo'ladi va shu sabab taklifning kutilgan qiymati 1 davr oldingi, ya'ni $t-1$ vaqtdagi taklif funksiyasiga teng deb olinadi:

$$Q_s = F + Gp_{t-1}.$$

Muvozanat shartidan

$$A + Bp_t = F + Gp_{t-1}.$$

Bu tenglikni soddalashtirib

$$p_t = \frac{G}{B} p_{t-1} + \frac{F-A}{B}$$

chekli ayirmali tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning turg'un yechimi

$$\overline{p} = \frac{A-F}{G-B}$$

ga teng.

(8.29) bilan taqqoslasak, t ni $t+1$ ga almashtirish lozimligi,

$$a = \frac{G}{B}, \quad b = \frac{F-A}{B}$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$p_t = (p_0 - \overline{p})\left(\frac{G}{B}\right)^t + \overline{p}.$$

Bundan ko'rish mumkinki, narx o'zining turg'un qiymatiga $-1 < \frac{G}{B} < 1$ shartni qanoatlantirgandagina yaqinlashadi. Aks holda, narx turg'un bo'lmaydi va vaqt o'tishi bilan ortib boradi va $t \to \infty$ da narx cheksiz ortadi.

25-misol. Talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin

$$Q_{talab} = 100 - 10p_t, \quad Q_{taklif} = 27 + 5p_{t-1},$$

Boshlang'ich narx $p_0 = 3$ narx dinamikasini aniqlang.

Yechish. Chekli ayirmali tenglama parametrlarini topamiz. Yuqoridagi formulalarga asosan

$$a = \frac{G}{B} = \frac{5}{-10} = -0{,}5,$$

$$b = \frac{F - A}{B} = \frac{27 - 100}{-10} = 7{,}3.$$

Demak,

$$p_t = -0{,}5 p_{t-1} + 7{,}3.$$

$|a| < 1$ hamda a manfiy bo‘lgani sababli narx turg‘un holatiga yaqinlashadi. Narxning turg‘un (muvozanat) qiymati

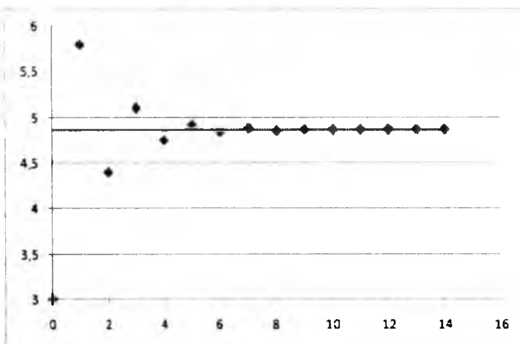
$$\overline{p} = \frac{7{,}3}{1{,}5} \approx 4{,}866.$$

Tenglamaning yechimi (narx dinamikasi) quyidagicha

$$p_t = -1{,}866 \cdot (-0{,}5)^t + 4{,}866.$$

Masala yechimi grafigini Excel dasturida chizamiz:

	A	B	C
1	t	p_t	turg'un narx
2	0	3	4,866667
3	1	5,8	4,866667
4	2	4,4	4,866667
5	3	5,1	4,866667
6	4	4,75	4,866667
7	5	4,925	4,866667
8	6	4,8375	4,866667
9	7	4,88125	4,866667
10	8	4,859375	4,866667
11	9	4,870313	4,866667
12	10	4,864844	4,866667
13	11	4,867578	4,866667
14	12	4,866211	4,866667
15	13	4,866895	4,866667
16	14	4,866553	4,866667



Grafikdan ko‘rishimiz mumkinki, narx o‘zining turg‘un holati atrofida tebrangan holda, o‘zining turg‘un holatiga yaqinlashadi. $t = 4$ dan boshlab narxning muvozanat holatidan farqi $0{,}1$ dan oshmaydi.

8.5. Ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar

$$a_k(t)y_{t+k} + \cdots + a_1(t)y_{t-1} + a_0(t)y_t = f(t) \qquad (8.32)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar $k-$ tartibli chekli ayirmali tenglamalar deb ataladi. Bu yerda $a_0, a_1, \ldots, a_k$, f - t ga bog‘liq bo‘lgan funksiyalar.

Agar bu tenlamada $f(t)=0$ bo'lsa, u holda (8.32) ni bir jinsli $k-$ tartibli chekli ayirmali tenglama deb ataymiz:

$$a_k(t)y_{t+k}+\cdots+a_1(t)y_{t-1}+a_0(t)y_t=0. \tag{8.33}$$

Ma'lumki, (8.32) tenglamanimg umumiy yechimi unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (8.32) tenglamaning qandaydir xususiy yechimlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

Faraz qilamiz, $\left\{y^{(1)}(t),\dots,y^{(k)}(t)\right\}$ - to'plam (8.33) tenglamaning yechimlar to'plami bo'lsin. Agar bu yechimlar uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} & \cdots & y_t^{(k)} \\ y_{t-1}^{(1)} & y_{t-1}^{(2)} & \cdots & y_{t-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t+k}^{(1)} & y_{t+k}^{(2)} & \cdots & y_{t+k}^{(k)} \end{vmatrix}$$

Kazoratti determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda $y^{(1)}(t),\dots,y^{(k)}(t)$ yechimlar chiziqli erkli bo'ladi va $\left\{y^{(1)}(t),\dots,y^{(k)}(t)\right\}$ sistema fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi. U holda (8.33) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$y(t)=C_1y^{(1)}(t)+\cdots+C_ky^{(k)}(t) \tag{8.34}$$

Agar (8.33) tenglamaning koeffitsiyentiari o'zgarmas sonlardan iborat bo'lsa, u holda uning yechimi

$$y_t=\lambda^t, \tag{8.35}$$

bu yerda $\lambda=const\neq 0$ ko'rinishda qidiramiz va quyidagi xarakteristik tenglamani hosil qllamiz:

$$a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{8.36}$$

Biz yechimni qurishning yuqoridagi usuli bilan ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalarning yechimini qurishda tanishib chiqamiz.

10-ta'rif.

$$y_{t+2}=f(y_{t+1},y_t,t) \tag{8.37}$$

ko'rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli avtonom chiziqli tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

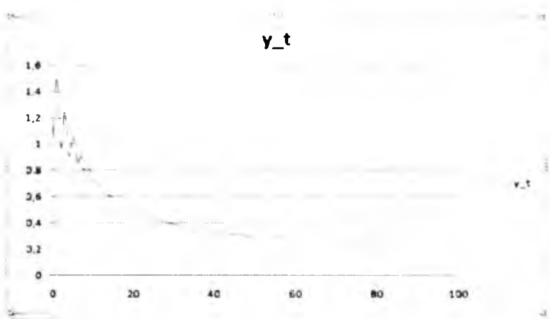
$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=b. \tag{8.38}$$

Agar y_0 va y_2 lar ma'lum bo'lsa, yechimni oldindan berilgan t ning qiymatigacha ketma-ket yaqinlashish usulida topish mumkin. Ketma-ket yaqinlashish usuli oldingi mavzularda keltirilgan.

26-misol. $y_{t+2} = 0,2y_{t-1}^{0,7} + 0.7y_t$ tenglamani $y_0 = 1$, $y_1 = 1.5$ boshlang'ich shart bilan yechib, quyidagi ketma-ketlikni va yechimning grafigini hosil qilamiz.

Buning uchun Excel dasturida 1-ustunga t ning qiymatlarini kiritamiz. Ikkinchi ustunga $t = 0$ va $t = 1$ ga mos y ning qiymatlarini kiritamiz. $t = 2$ ga mos y ning qiymatini hisoblash uchun B4 katakka tenglamani =0,2*B3^0,7+0,7*B2 ko'rinishda kiritiladi va qolgan kataklarga tegishli usulda bu formula davom ettiriladi. Hosil bo'lgan qiymatlar asosida y_t miqdorning dinamikasini ifodalovchi quyidagi grafikni hosil qilamiz.

	A	B
1	t	y_t
2	0	1
3	1	1,5
4	2	0,96564
5	3	1,245164
6	4	0,909127
7	5	1,058712
8	6	0,844538
9	7	0,918789
10	8	0,779663
11	9	0,811174
12	10	0,718511
13	11	0,726506
14	12	0,662876
15	13	0,658534
16	14	0,613304
17	15	0,603011
18	16	0,569678
19	17	0,556995
20	18	0,531552
21	19	0,518399



Grafikdan ko'rish mumkinki, yechim tebranma harakat bilan kamayadi. Vaqt o'tishi bilan tebranish so'nadi. Yechim esa o'zining turg'un holatiga yaqinlashadi. Turg'un qiymatning taqribiy qiymati 0,2588 ga teng.

Quyidagi 2-tartibli chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglamani qaraylik

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = 0 \qquad (8.39)$$

Bu tenglama yechimini $y_t = \lambda^t$ ko'rinishda izlaymiz. $y_{t+1} = \lambda^{t+1}$, $y_{t+2} = \lambda^{t+2}$ larni tenglamaga qo'ysak,

$$\lambda^{t+2} + p\lambda^{t+1} + q\lambda^t = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. $\lambda \neq 0$ shart ostida bundan

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

λ noma'lumga nisbatan kvadratik tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (8.39) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Ma'lumki, bu kvadrat tenglamani yechishda uchta holat alohida qaraladi.

1) $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita har xil haqiqiy ildizga ega

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

U holda (8.39) tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi $y^{(1)} = \lambda_1^t$ va $y^{(2)} = \lambda_2^t$ ko‘rinishda bo‘ladi. Tenglamaning umumiy yechimi bu ikkita funksiyaning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$y_t = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t.$$

2) $D = p^2 - 4q = 0$ bo‘lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita bir xil haqiqiy ildizga ega bo‘ladi:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2}.$$

Bu holatda tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi $y_1 = \lambda^t$ va $y_2 = t\lambda^t$ dan iborat va umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$y_t = (C_1 + C_2 t)\lambda^t.$$

3) $D = p^2 - 4q < 0$ bo‘lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita kompleks qo‘shma ildizlarga ega bo‘ladi:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{|D|}.$$

Bu holatda yechim quyidagi ko‘rinlda yoziladi:

$$y_t = q^{t/2}\left(C_1\cos\theta t + C_2\sin\theta t\right).$$

Bu yerda θ quyidagi shartlar asosida topiladi:

$$\cos\theta = -\frac{p}{2\sqrt{q}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2\sqrt{q}}.$$

27-misol. $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 5y_t = 0$ tenglamaning $y_0 = 3$, $y_1 = -7$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Bu tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$. Demak, umumiy yechim quyidagicha bo‘ladi.

$$y_t = C_1(-1)^t + C_2(-5)^t.$$

$y_0 = 3,\ y_1 = -7$ boshlang‘ich shartlardan

$$C_1 + C_2 = 3,\ \ C_1 + 5C_2 = 7$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bundan, $C_1 = 2,\ \ C_2 = 1$.

Masalaning yechimi

$$y_t = 2(-1)^t + (-5)^t.$$

28-misol. $y_t - 6y_{t-1} + 9y_{t-2} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

bo‘lib, bitta ikki karrali $\lambda = 3$ ildizga ega. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t = (C_1 + C_2 t)\cdot 3^t.$$

29-misol. $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

ikkita kompleks qo‘shma ildizga ega

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

$\cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ tengliklardan $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ni topamiz.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t = 2^{\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{3\pi}{4}t + C_2\sin\frac{3\pi}{4}t\right).$$

Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli chekli ayirmali tenglama deb quyidagi

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = b(t)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan bir jinsli bo‘lmagan tenglamanіng xususiy yechimi yig‘indisiga teng, ya’ni

$$y_t = y_t^{bir\ jinsli} + y_t^{xususiy}.$$

Bir jinsli tenglamaning xususiy yechimini topishni biz yuqorida ko‘rib chiqdik. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechlmini toppishning noma’lum koeffitsiyentlar usulini ko‘rib chiqamiz:

1) $b(t) = b = const$ bo‘lsin. Bu holda yechlmni quyidagicha topamiz: masalaning yechimini $y_t^{xus} = A$ ko‘rinishda qidiramiz. U holda tenglamadan

$$A+pA+qA=b \tag{8.40}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan, agar $1+p+q\neq 0$ bo'lsa, $\overline{y}=\dfrac{b}{1+p+q}$ yechimni hosil qilamiz. Bu yechim tenglamaning turg'un yechimi, deyiladi. Ko'rinib turibdiki, agar $1+p+q=0$ bo'lsa, turg'un yechim mavjud emas.

$1+p+q=0$, $p\neq -2$ bo'lsa yechimni $\overline{y}_t=Bt$ shaklda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak,

$$B(t+2)+Bp(t+1)+Bqt=b \;\Rightarrow\; B=\frac{b}{p+2}.$$

Ya'ni $\overline{y}_t=\dfrac{bt}{p+2}$ xususiy yechimni hosil qilamiz.

Agar $p=-2$, $q=-1$ bo'lsa, yechim $\overline{y}_t=Bt^2$ shaklda qidiriladi (bu holatda tenglamani $\Delta^2 y_t=b$ ko'rinishda yozish mumkin va bu ikkinchi tartibli hosilaga ekvivalent). Bu ifodani tenglamaga qo'ysak, $B=\dfrac{1}{2}b$. Demak, xususiy yechim $\overline{y}_t=\dfrac{bt^2}{2}$.

2) $b(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n$ ko'rinishda bo'lsin. Bu holatda xususiy yechimni $\overline{y}_t=(A_0+A_1t+...+A_nt^n)t^k$ shaklda qidiramiz. Bu yerda k ($k=0,1,2$) $\lambda^2+p\lambda+q=0$ xarakteristik tenglamada $\lambda=1$ ildizning karraliligi. Agar $\lambda=1$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, $k=0$ deb olinadi. Noma'lum $A_0, A_1, ..., A_n$ koeffitsiyentlarni topish uchun $\overline{y}_t$ xususiy yechimni (8.40) tenglamaga qo'yamiz va hosil bo'lgan ayniyatda o'xshash hadlarning koeffitsiyentlarini tenglashtirib, tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

3) $b(t)=a\cdot r^t$, $r\neq 1$, bo'lsin. Bu holatda yechimni $\overline{y}_t=At^kr^t$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda k ($k=0,1,2$) $\lambda^2+p\lambda+q=0$ xarakteristik tenglamada $\lambda=r$ ildizning karraliligi. Agar $\lambda=r$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, $k=0$ deb olinadi. $\overline{y}_t$ xususiy yechimni (8.40) tenglamaga qo'yib noma'lum koeffitsiyentni topamiz.

30-misol. $y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t=10$ tenglamani yeching.

Yechish. $\lambda^2-3\lambda+2=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $\lambda_1=1$ va $\lambda_2=2$ dan iborat. Demak, bir jinsli tenglamaning yechimi

$$y_t=C_1+C_2 2^t.$$

Endi xususiy yechimni topamiz. $1+p+q=1-3+2=0$ bo'lganligi sababli yechimni $\overline{y}_t = At$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'ysak,

$$A(t+2)-3A(t+1)+2At=10$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan $A=-10$, xususiy yechim $\overline{y}_t=-10t$ ni hosil qilamiz. Tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t = C_1 + C_2 2^t - 10t.$$

31-misol. $y_{t-2}+2y_t-8y_t=3t+1$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz: $\lambda^2+2\lambda-8=0$. Bu tenglamanıng ildizlari $\lambda_1=-4$ va $\lambda_2=2$. Bundan, bir jinsli $y_{t-2}+2y_t-8y_t=0$ tenglama yechimi

$$y_t = C_1(-4)^t + C_2 2^t.$$

Xususiy yechimni $\overline{y}_t = At+B$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'yib quyidagini hosil qilamiz

$$A(t+2)+B+2A(t+1)+2B-8At-8B=3t+1.$$

yoki

$$-5At+(4A-5B)=3t+1.$$

Bu ayniyatda mos hadlarnıng koeffitsiyentlarini tenglashtirsak,

$$\begin{cases} -5A=3, \\ 4A-5B=1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan, $A=-0{,}6$, $B=-0.68$. Demak, xususiy yechim $\overline{y}_t=-0.6t-0{,}68$, umumiy yechim

$$y_t = C_1(-4)^t + C_2 2^t - 0{,}6t - 0{,}68.$$

32-misol. $y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=5\cdot 2^t$ tenglamani yeching.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2-5\lambda+6=0$. Unıng yechimlari $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Bundan, bir jinsli tenglama yechimi

$$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t.$$

$\lambda=2$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganllgi sababli, tenglama yechimini $\overline{y}_t = At\cdot 2^t$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'ysak,

$$A(t+2)\cdot 2^{t+2} - 5A(t+1)\cdot 2^{t+1} + 6At\cdot 2^t = 5\cdot 2^t.$$

Bundan, $2A=5$. $A=2{,}5$ ni hosil qilamiz. Demak, xususiy yechim $\bar{y}_t=2{,}5t\cdot 2^t$. Tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t=C_1 2^t+C_2 3^t+2{,}5t\cdot 2^t.$$

Samuelson-Xoks modeli bilan tanishib chiqamiz. Bu modelda investitsiya hajmi milliy daromadning o'sishiga proporsional deb qaraladi (akseleratsiya prinsipi). Bu faraz quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$I(t)=V\big(Y(t-1)-Y(t-2)\big) \qquad (8.41)$$

Bu yerda $V>0$ - akseleratsiya fartori. $I(t)$ - t davrdagi investitsiya miqdori, $Y(t-1)$, $Y(t-2)$ - mos holda $(t-1)$ va $(t-2)$ davrdagi milliy daromad miqdori. Talab ham oldingi davrdagi milliy daromad miqdoriga bog'liq deb qaraladi:

$$C(t)=aY(t-1)+b. \qquad (8.42)$$

Talab va taklif tengligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Y(t=)I(t)+C(t). \qquad (8.43)$$

(8.41) va (8.42) tenglikni e'tiborga olgan holda (8.43) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$Y(t)=(a+V)Y(t-1)-VY(t-2)+b. \qquad (8.44)$$

Bu 2-tartibli chekli ayirmali tenglama Xiks tenglamasi deb ataladi.

Biz (8.44) tenglamaning xususiy yechimini topish uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$Y(t)=Y(t-1)=Y(t-2)=Y^*. \qquad (8.45)$$

Bu yerda xususiy yechim sifatida $Y^*=const$ muvozanat yechimni olamiz. U holda

$$Y^*=(a+V)Y^*-VY^*+b,$$

$$Y^*=b(1-a)^{-1}. \qquad (8.46)$$

(8.46) formuladagi $(1-a)^{-1}$ ifoda Keyns mul'tiplikatori deb ataladi va u to'la xarajat matritsasining bir o'lchamli analogi hisoblanadi.

33-misol. $a=0{,}5$; $V=0{,}5$; $b=4$ shartlar asosida Samuel'son-Xiks modelini qaraymiz. U holda (8.44) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Y(t)-Y(t-1)-0{,}5Y(t-2)=4.$$

U holda

$$y(t)=\frac{4}{1-0{,}5}=8.$$

holda bu tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi. Xarakteristik tenglamani tuzib olamiz:

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0.$$

Uning ildizlari:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

U holda tenglamaning umumiy yechimi:

$$Y(t) = \left(\sqrt{2}\right)^t\left(C_1\cos\frac{\pi}{4}t + C_2\sin\frac{\pi}{43}t\right) + 8.$$

8.6. Dinamik modellar

Bizga ma’lumki vaqt o‘sishi bilan rivojlanib boruvchi jarayon dinamik jarayon deb ataladi. O‘zida bu jarayonni aks ettiruvchi modellar esa dinamik modellar deb ataladi. Barcha dinamik modellarda t – vaqt erkli o‘zgaruvchi sifatida olinadi.

Dinamik sistemalarni matematik shakllantirish A.Puankarega (1854-1912) tegishlidir. Puankare modelida o‘zgaruvchi sifatida fazo koordinatalari bilan birgalikda tezlik ham o‘zgaruvchi bo‘lib qatnashadi va sistemaning harakati to‘liq va bir qiymatli aniqlanadi. Ya’ni fazoviy traektoriyalar hech qachon kesishmaydi.

Iqtisodda uchraydigan dinamik modellar dinamik sistemalarga tegishli bo‘lib, ular diskret va uzluksiz modellarga ajratib o‘rganiladi. Diskret modellar chekli ayirmali tenglamalar va sistemalar, uzluksiz modellar esa differensial tenglamalar va sistemalar, deb ataladi.

Biz bu mavzuda iqtisodiyotda uchraydigan ba’zi dinamik modellarni keltiramiz va ularning yechimlarini tahlil qilamiz.

$$y' = ay - by^2, \tag{8.47}$$

ko‘rinishdagi chiziqsiz tenglama logistika tenglamasi deb atalib, uning diskret ko‘rinishi quyidagicha:

$$y(t+1) = ay(t) - by^2(t). \tag{8.48}$$

Bu yerda $a, b > 0$. Bu tenglamalar Ferxyul’ste-Pirl modeli deb atalib biologik populyatsiya dinamikasini ifodalaydi va ular Mal’tus modelining al’ternetivi hisoblanadi. Bu tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{y'}{y} = a - by,$$

$$\frac{y(t+1)}{y(t)} = a - by(t).$$

U holda bu modellarning o‘sish tempi y bo‘yicha chiziqli bo‘lib, kamayadi.

Yuqorida keltirilgan logistika modeliga ba’zi misollar ko‘rib chiqamiz.

Reklamaning effektivligi. y qandaydir mintaqa aholisining reklama yordamida firma ishlab chiqargan mahsulotdan xabardor bo‘lgan qismi bo‘lsin. Aholining bu qismining o‘sishida mahsulotda xabardor aholi va bu imkoniyatga ega bo‘lgan aholi $(1-y)$ orasidagi axborot almashinishining intensivligi katta ahamiyatga ega. Demak, $y' = ay(1-y)$. Bu tenglamaning diskret ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi: $y(t+1) = y(t) + ay(t)(1 - y(t))$. Bu yerda $a > 0$ axborot almashinishining intensivligini ko‘rsatib, u firmaning reklamaga xarajati bilan bog‘liq. Agar xaridorning mahsulot reklamasini esdan chiqarishini ham e’tiborga olsak, u holda tenglamaning o‘ng tomoniga $(-cy)$, $c > 0$ qo‘shiluvchini qo‘shishlmiz kerak bo‘ladi.

Talab funksiyasini qurish uchun

$$E(D,I) = I\frac{D'(I)}{D(I)} \tag{8.49}$$

elastiklik koeffitsiyenti uchun quyidagi gipotezalarni qabul qilishimiz kerak bo‘ladi. Bu yerda $D = D(I)$ foyda.

a) $E(D,I) > 0$, ya’ni foyda oshishi talabning oshishiga olib keladi;

b) $E'_D(D,I) < 0$, ya’ni foyda doimiy bo‘lganda talabning yuqori darajada qanoatlantirilishi iste’molning kamayishiga olib keladi;

c) $E'_I(D,I) > 0$ iste’mol darajasi o‘zgarmas bo‘lsa, foydaning o‘zgarishiga bo‘lgan munosabat foydaning darajasiga bo‘lgan munosabatdan yuqori bo‘ladi.

U holda a) va b) gipotezalardan quyldagiga ega bo‘lamiz:

$$E(D,I) = aI(M - D). \tag{8.50}$$

Bu yerda a, $M > 0$, $0 < D < M$, chunki $E > 0$. Shunday qilib, (8.50) va (8.49) dan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{dD}{dt} = aD(M - D). \tag{8.51}$$

Bozorga moslashish modeli. t vaqtdagi mahsulot narxini $p(t)$, talab va taklif funksiyalarini mos ravishda $D(p)$, $S(p)$ belgilaymiz. U holda $z(p) = D(p) - S(p)$ ortiqcha talab funksiyasi bo‘ladi. Faraz qilamiz, narx ortiqcha talab bilan aniqlansin. U holda bu faraz quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$p' = aF\left(z\left(p\right)\right). \qquad (8.52)$$

Bu tenlamaning diskret ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$p(t+1) = p(t) + aF(z(p(t))).$$

Bu yerda $a > 0$ adaptatsiya parametri bo‘lib, u bozorda balans o‘zgarishiga nisbatan narxning reaksiyasini ko‘rsatadi. $F(z)$ funksiya esa quyidagi xossalarga ega $F(0) = 0$, $F(z) > 0$, agar $z > 0$ bo‘lsa, $F(z) < 0$, agar $z < 0$ bo‘lsa.

Xavel mo modeli (siklik o‘sish modeli). Bu model o‘z ichiga darajali ishlab chiqarish modeli

$$Y = AL^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1), \quad A > 0$$

va bandlik dinamikasi tenglamasini

$$\frac{L'}{L} = a - b\frac{L}{Y}.$$

oladi. Yuqoridagi ikki tenglamadan Bernulli tenglamasini hosil qilamiz:

$$L' = aL - \frac{B}{A}L^{2-\alpha} \qquad (8.53)$$

IS-LM modeli. IS-LM modeli tovar va pul (kapital) bozorlaridagi muvozanat holatlarini umumlashtirgan holda makroiqtisodiy muvozanatni ifodalovchi modeldir. Bunda tovar bozori (IS) va pul bozori (LM) egri chiziqlari bilan ifodalanadi.

Neoklassik iqtisodiy o‘sish (Solov) modeli bilan tanishamiz. Yetarlicha uzoq vaqtda iqtisodiy o‘sishning darajasi qanday? Bu savolga javob berish maqsadida iqtisodiy o‘sish nazariyasi paydo bo‘ldi va shu bugungacha rivojlanib kelmoqda. Bu nazariyanimg muhim modellaridan biri Nobel mukofoti lauriati Robert Solov tomonidan kiritilgan va zamonaviy nazariyada ham muhim modellardan hisoblanib kelayotgan neoklassik iqtisodiy o‘sish modelini qaraymiz.

Bu nazariyada bir birlik aholi boshiga to‘g'ri keladigan ishlab chiqarish $k = \frac{K}{L}$ o‘zgaruvchining funksiyasi deb qaraladi, bunda $K-$ kapital mablag‘ni, $L-$mehnatga jalb etilgan aholi soni. Bu munosabatni quyidagi funksional munosabat ko‘rinishida ifodalaymiz

$$y = f(k) = f\left(\frac{K}{L}\right).$$

$f(k)$ funksiya qavariq va o‘suvchi, deb qaraladi, ya'ni $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$. Ishiab chiqarilgan Y mahsulot miqdori iste’mol qilinadi yoki iqtisod qilinadi. Iqtisod qilingan mahsulot iqtisodga kiritilgan kapitalga aylanadi.

Kapitalning ishlab chiqarish natijasida ortishi S koeffitsiyent bilan ifodalansin, ya'ni

$$\dot{K} = sY.$$

$$k = \frac{K}{L} \quad \text{dan} \quad \dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dot{K}}{L^2} - \frac{\dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}.$$

Ishchi kuchi o'zgarmas n darajada ortadi, ya'ni, $\dot{L} = nL$ bo'lsa,

$$\dot{k} = s\frac{Y}{L} - nk.$$

Yuqoridagi y ning ta'rifiga asosan, $y = \frac{Y}{L}$ ni hisobga olsak,

$$\dot{k} = sf(k) - nk$$

bu tenglama neoklassik o'sish (Solov) modeli deb yuritiladi. Tenglamaning turg'un (o'zgarmas) yechimi $\frac{f(k)}{k} = \frac{n}{s}$ tenglamadan topiladi. Bu yechim yagonadir.

34-misol. Yalpi ichki mahsulot Kobb-Duglas funksiyasi bilan ifodalansin

$$Y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta}.$$

Bunda A bir birlik kapital va bir birlik ishchi kuchi bilan ishlab chiqarilgan mahsulotni ifodalovchi o'zgarmas son, α va β lar kapital va ishchi kuchining elastik koeffitsiyentlari. Odatda $\alpha + \beta = 1$, $\beta = 1 - \alpha$ deb olamiz. U holda

$$y = \frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

Bu holatda neoklassik o'sish modeli quyidagicha:

$$\dot{k} = Ask^{\alpha} - nk$$

Bernulli tenglamasiga keladi. Bu tenglamani yechishni ko'rib chiqamiz. $k^{1-\alpha}(t) = z(t)$ belgilash kiritsak,

$$\dot{z} = -\frac{n}{1-\alpha}z + \frac{As}{1-\alpha}$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning turg'un yechimi

$$\bar{z} = \frac{As}{n}$$

ga teng. Bunga mos dastlabki tenglamaning turg'un yechimi $\bar{k}=\left(\frac{As}{n}\right)^{1-\alpha}$.

$$\dot{z}=-\frac{n}{1-\alpha}z$$

bir jinsli chiziqli tenglamani yechamiz

$$\frac{dz}{z}=-\frac{n}{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|z|=-\frac{nt}{1-\alpha}+const \quad \Leftrightarrow \quad z=C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}$$

ni hosil qilamiz. Demak, umumiy yechim

$$z=C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\frac{As}{n}.$$

Bundan, aholi boshiga mos ishlab chiqarilgan mahsulot

$$k(t)=\left(C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\frac{As}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

$k(0)=k_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni topamiz.

$$k(0)=\left(C+\frac{As}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=k_0,\quad C=k_0^{1-\alpha}-\bar{k}^{1-\alpha}.$$

Demak, yechim $k(t)=\left((k_0^{1-\alpha}-\bar{k}^{1-\alpha})\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\bar{k}^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$,

bu erda $\bar{k}=\left(\frac{As}{n}\right)^{1-\alpha}$.

$t\to\infty$ da $e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}\to 0$. Shu sababli yechim o'zining turg'un holatiga yaqinlashadi, ya'ni $\lim\limits_{t\to\infty}k(t)\to\bar{k}$.

Yirtqich va o'lja modeli. Bu modeldan birinchi marotaba biologik jarayonlarni va hayvonlar populyatsiyasi (soni) ning dinamikasini o'rganishda foydalanilgan bo'lib, u ikkita faktor, tabiiy o'sish faktori bilan birgalikda har xil yirtqichlar, kasalliklar, epidemiyalar ta'sirida kamayishni hisobga oladi. Keyinchalik bu model aholi sonining dinamikasini o'rganishda iqtisodiyot masalalarida qo'llanila boshlagan. Iqtisodiy dinamik jarayonlarda yirtqich sifatida narxning ortishi va konkurensiya sharoiti, potensial mijozlar sonining chegaralanganligi qaralishi mumkin.

Bu model quyidagicha ikkita tenglamadan iborat

$$\dot{x} = (b - py)x,$$
$$\dot{y} = (dx - r)y$$

tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi. Bu tenglamada x o'ljani ifodalasa, y yirtqichni ifodalaydi. Agar $y=0$ bo'lsa, yirtqich yo'qligi sababli, x tabiiy eksponensial ravishda o'sadi. Agar $x=0$ bo'lsa, yemish yo'qligi sabab, y eksponensial ravishda kamayadi. Ya'ni a va r koeffitsiyentlar erkin o'sish va kamayishni ifodalaydi. p ва q lar esa x va y orasidagi bog'liqlikni ifodalaydi. Bu ko'rinishdagi bog'llqliklarni keyingi kurslarda bo'ladigan ekonometrika usullari (regressiya tenglamasi) yordamida topish mumkin.

Odatda tenglamalar sistemasining yechimini topish uchun boshlang'ich shartlar, ya'ni noma'lum funksiyalarning $t=0$ dagi $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ qiymatlarini berish kerak bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash bir nechta yirtqich va bir nechta o'ljadan iborat sistemani ham qarash mumkin. Yuqoridagi sistemani yechish uchun uni quyidagicha diskretlashtiramiz. $[0,T]$ vaqt oralig'ini $t_k = h \cdot k$, $h=T/n$, $k=0,1,2,...,n$ nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'lamiz. $x(t_k)=x_k$, $y(t_k)=y_k$ belgilashlar kiritamiz va tenglamalardagi hosilalarni

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{h}, \dot{y}(t_k) \approx \frac{y_{k+1}-y_k}{h}$$

taqribiy qiymatlar bilan almashtiramiz va

$$x_{k+1} = (bh+1)x_k - phx_k y_k,$$
$$y_{k+1} = dhx_k y_k + (1-rh)y_k$$

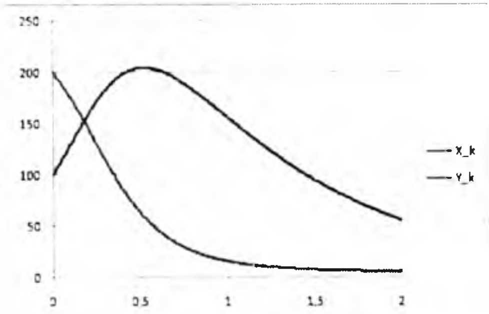
chekli ayirmali tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini Excel dasturida ketma-ket qiymatlarni topib, kerakli $t=T$ davrdagi funksiyaning qiymatlarini topamiz. h ni yetarlicha kichik qilib olinsa, bu taqribiy yechim aniq yechimga juda yaqin bo'ladi.

Tenglamalar sistemasi Excel dasturida quyidagicha yechiladi (rasm).

Ba'zi modellarda bitta o'zgaruvchi (funksiya) yirtqich va o'ljani ifodalashi mumkin. Misol uchun, aholi sonining dinamikasini o'rganganimizda aholi soni ortishi yashash uchun zarur ozuqa moddalarning tanqisligiga olib keladi. Bunda aholi soni har ikkala vazifani bajarmoqda. Yoki, ma'lum tovarni sotishdan olinadigan daromadni qarasak, narx ortishi bilan daromad ortadi, biroq narxning oshishi oqibatida bu tovarga talab kamaya boradi va bu teskari effektni ham beradi.

	A	B	C	D
1	k	t	X k	Y k
2	0	0	200	100
3	1	0,01	198	102,8
4	2	0,02	195,9091	105,6373
5	3	0,03	193,7291	108,5087
6	4	0,04	191,4622	111,4108
7	5	0,05	189,1106	114,3401
8	6	0,06	186,6771	117,2926
9	7	0,07	184,1647	120,2643
10	8	0,08	181,5767	123,2508
11	9	0,09	178,9166	126,2477
12	10	0,1	176,1882	129,2503
13	11	0,11	173,3956	132,2537
14	12	0,12	170,5431	135,2531
15	13	0,13	167,6352	138,2434
16	14	0,14	164,6767	141,2194
17	15	0,15	161,6723	144,1758
18	16	0,16	158,6272	147,1076
19	17	0,17	155,5464	150,0093
20	18	0,18	152,4352	152,8759
21	19	0,19	149,2988	155,7021
22	20	0,2	146,1426	158,4829
23	21	0,21	142,9718	161,2134
24	22	0,22	139,7917	163,8886
25	23	0,23	136,6076	166,504

F–G	H–I
h= 0,01	
b= 1	p= 0,02
d= 0,02	r= 1,2
bh+1= 1,01	ph= 0,0002
dh= 0,0002	1-rh= 0,988



Bunday holatlarni

$$\dot{y} = y(a - by)$$

ko'rinishdagi bitta tenglama bilan ifodalanadi.

Bu tenglama 1-tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama yoki Rikkati tenglamasi sifatida qaralishi mumkin.

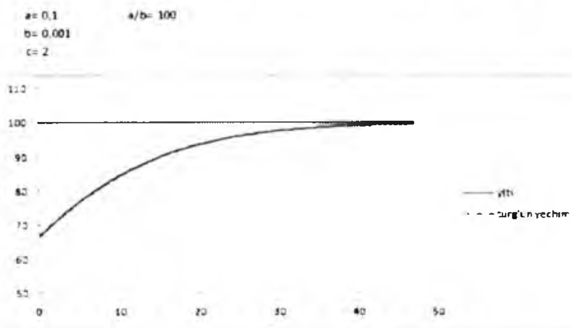
Tenglamani o'zgaruvchilarni ajratish usulida yechamiz.

$$\frac{dy}{y(a-by)} = dx \iff \ln\frac{by}{a-by} = at + const \iff y = \frac{ace^{at}}{b + bce^{at}}.$$

bunda $c = const$. Bu yechim $t \to \infty$ da o'zining turg'un yechimi $\bar{y} = \frac{a}{b}$ ga yaqinlashadi. Quyida bu funksiyaning Excel dasturida chizilgan grafigini keltiramiz.

Bunda biz $a = 0{,}1$, $b = 0{,}001$, $y(0) = 66\frac{2}{3}$ deb olingan. Grafikdan ko'rinadiki, yechim vaqt o'tishi bilan o'zining turg'un yechimi $\bar{y} = 100$ ga yaqinlashadi.

	A	B	C
1	t	y(t)	turg'un yechim
2	0	66,66666667	100
3	0,5	67,76836743	100
4	1	68,85066915	100
5	1,5	69,91276343	100
6	2	70,95392129	100
7	2,5	71,97345346	100
8	3	72,97091011	100
9	3,5	73,94566001	100
10	4	74,89736928	100
11	4.5	75,82562964	100
12	5	76,73014624	100
13	5,5	77,61113515	100
14	6	78,46794058	100
15	6,5	79,30070177	100
16	7	80,10941973	100
17	7,5	80,89415373	100
18	8	81,65501773	100
19	9,5	82,3921767	100
20	9	83,10584287	100
21	9,5	83,796272	100
22	10	84,46375965	100
23	10,5	85,10863748	100
24	11	[illegible]	100



8.6. Qatorlar

11-ta'rif. $\{a_n\}$, $a_n \in N$ va $\{S_n\}$, $S_n = a_1 + ... + a_n \in N$, $n \in N$ ketma-ketliklar juftligi qator, deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (8.54)$$

Bu yerda S_n – xususiy yig'indi, $\{a_n\}$ ketma – ketlik elementlari esa qator hadlari deb ataladi.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_0 < \infty$$

bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ qator yaqinlashuvchi, deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_0$$

Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$$

bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ qator uzoqlashuvchi deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ qator uning qoldiq hadi deyiladi.

35-misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q|<1$ qator yaqinlashuvchi.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q|>1$ qator uzoqlashuvchi.

Yaqinlashuvchi qatorlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar qator yaginlashuvchi bo‘lsa, u holda uning elementlaridan iborat ketma – ketlik nolga intlladi.

2) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indisi mos ravishda S_{01}, S_{02} ga teng bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) = \lambda_1 S_{01} + \lambda_2 S_{02}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \to 0, & \alpha<0, \\ \to \infty, & \alpha \ge 0 \end{cases}$ bo‘ladi.

3) Agar qator yaqinlashsa, u holda uning har qanday qoldiq hadi ham yaqinlashadi. Agar qatorning qandaydir qoldiq hadi yaqinlashsa u holda qatorning o‘zi ham yaqinlashadi.

Qator yaqinlashishining Koshi kriteriyasi bilan tanishib chiqamiz:

Teorema (Koshi kriteriyasi). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo‘lishi kerakki, barcha $n>n_0$ va $p\ge 0$ lar uchun $|a_n + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

36-misol. $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ garmonik qatorni qaraymiz. Ixtiyoriy $n \in N$ da

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}_{n} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$$

bo‘lgani uchun agar $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ bo‘lsa n_0 nomerni tanlash mumkin emas. Chunki ixtiyoriy n va $p=n-1$ holatda teoremadagi tengsizlik bajarilmaydi. Shu sababli garmonik qator uzoqlashuvchi.

Hadi nomanfiy bo‘lgan qatorlarning yaqinlashish alomatlari bilan tanishamiz.

Teorema. Hadlari nomanfiy bo‘lgan qator faqat va faqat bu qatorning xususiy yig‘indilari ketma – ketligi yuqorldan chegaralangan bo‘lgandagina yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)\geq 0,\ x\geq 1$ funksiya kamayuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ qator yaqinlashishi uchun $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lishi zarur va yetarli.

37-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. U holda

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\begin{cases}\to 0,\ \alpha<1,\\ \to\infty,\ \alpha\geq 1\end{cases}$$

bo‘lgani uchun $\alpha<1$ bo‘lsa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator yaqinlashadi, $\alpha\geq 1$ bo‘lsa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator uzoqlashadi.

Garmonik qatorning uzoqlashishini oxirgi teoremadan foydalanib ham isbotlash mumkin.

Teorema (taqqoslash alomati). $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar uchun $0\leq a_n\leq b_n,\ n=1,2,3,...$ munosabat o‘rinli bo‘lsin.

1. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi;

2. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi;

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k=const<\infty$ bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar bir paytda yaqinlashadi va bir paytda uzoqlashadi.

38-misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ – qator yaqinlashuvchi, chunki $0\leq\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ bo‘lib $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – qator yaqinlashuvchidir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ – qator uzoqlashuvchi, chunki $\frac{1}{1+n}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}\geq 0$ bo‘lib $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ – qator uzoqlashuvchidir.

Teorema (Dalamber alomati). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ limit mavjud bo'lsin. U holda,

1. Agar $l<1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi;
2. Agar $l>1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi.

39-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – qator yaqinlashuvchi. Chunki $\lim_{n\to\infty}\frac{(n)!}{(n+1)!}=0$.

Teorema (Koshi alomati). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ limit mavjud bo'lsin. U holda,

1. Agar $l<1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi;
2. Agar $l>1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi.

40-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ – qator yaqinlashuvchi. Chunki $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$ qator ishorasi almashinuvchi qator, deb ataladi.

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n\ge 0$, $a_n\ge a_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator absolyut yaqinlashuvchi qator deb ataladi. Absolyut yaqinlashuvchi qator yaqinlashuvchidir.

41-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ – absolyut yaqinlashuvchi qator. Chunki $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – yaqinlashuvchidir.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – qator uzoqlashuvchi va $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator shartli yaqinlashuvchi qator deb ataladi.

42-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – shartli yaqinlashuvchi qator. Chunki $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – uzoqlashuvchidir.

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k = b \cdot q^{k-1}$ ko‘rinishdagi qator geometrik qator deyiladi. Yuqorida ko‘rilgan misolda bu qator $|q|<1$ shart bajarilganda yaqinlashadi va uning yig‘indisi $\frac{b}{1-q}$ ga teng.

Geometrik progressiya moliyaviy jarayonlar tahlilida ko‘plab tatbiqlarga ega.

43-misol. To‘lovlar oqimining joriy qiymati. t davrdagi V miqdordagi mablag‘ning joriy bahosi, deb $\frac{V}{(1+i)^t}$ miqdorga aytiladi. Har yilning boshida V miqdorda pul to‘lab boriladigan to‘lovlar oqimini qaraymiz. Bir davrga mos foiz stavkasi P % ga teng bo‘lsin, $i=\frac{P}{100}$. U holda bu to‘lovlar oqimining joriy qiymati

$$PV_T = \sum_{k=0}^{T} \frac{V}{(1+i)^k}$$

ga teng. Agar to‘lovlar oqimi yetarlicha uzoq davrga davom ettirilsa,

$$PV = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=0}^{T} \frac{V}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V}{(1+i)^k}$$

qatorni hosil qilamiz. Bundan, $PV = \frac{V}{i}(1+i)$.

44-misol. Firmaning ma’lum mahsulotni sotish hajmi har yili $(1+g)$ koeffitsiyent bilan ortib boradi. Yillik foiz stavkasi i ga teng bo‘lsin. U holda foydaning umumiy yig‘indisi

$$GB = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=1}^{T} p(1+g)^{k-1}$$

ga teng bo‘lib, uzoqlashuvchi qatordan iborat. Keltirilgan joriy foyda

$$PVB = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=1}^{T} \frac{p(1+g)^{k-1}}{(1+i)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1+g)^{k-1}}{(1+i)^{k-1}}.$$

Agar $g<i$ bo‘lsa, bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi

$$PVB = \frac{p}{1-\frac{1+g}{1+i}} = \frac{p(1+i)}{p-g}$$

ga teng.

45-misol. Ma'lum bir korxona ishlab chiqarish quvvatini oshirish maqsadga muvofiqligini tahlil qllmoqchi. Uning xarajat va daromadlari quyidagicha:

Qurilish xarajatlari	200 million 100 million	1- yilning boshida Keyingi har uch yil boshida
Tashkilly xarajatlar	5 million	4-yilning oxiridan boshlab har yili
Daromad	30 million	4-yilning oxiridan boshlab har yill

Bank foiz stavkasi 6%. Shu holatni tahlil qilamiz. Buning uchun xarajat va daromadlarning joriy bahosini taqqoslash zarur.

$$PV_{qurilish\ xarajatlari} = \left(200 + \frac{100}{1,06} + \frac{100}{1,06^2} + \frac{100}{1,06^3}\right) \cdot 10^6 = 467\ 301,195.$$

$$PV_{daromad-tashkiliy\ xarajat} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{25000000}{1,06^{k+4}} = \frac{25000000}{0,06 \cdot 1,06^4} = 330\ 039,026.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, qurilish xarajatlari uzoq vaqt davomida olinadigan daromadning umumiy miqdoridan ancha ortiq. Demak, bu loyihaga pul tikish tavsiya qilinmaydi.

46-misol. Keynsian koeffitsiyentlari modeli. Faraz qilaylik davlat iqtisodiyotga ma'lum maqsadga yo'naltirilgan A miqdorda investitsiya kiritgan bo'lsin. Bu mablag' ishchilarga va korxonalarga ajratiladi. Deylik, korxona yoki shaxslar o'z mablag'ining P% miqdorini davlatning ichki mahsulotlarini sotib olishga sarflasin. U holda investitsiya ikkinchi marotaba aylanadi va yana $\frac{AP}{100}$ miqdorda qayta effekt beradi, uchinchi aylanmada $A\left(\frac{P}{100}\right)^2$, to'rtinchisida $A\left(\frac{P}{100}\right)^3$ va hakozo. Kiritilgan A investitsiyaning umumiy effekti $\sum_{k=1}^{\infty} A\left(\frac{P}{100}\right)^{k-1} = \frac{P}{1-\frac{P}{100}}$ ga teng bo'ladi.

Misol uchun, davlat yo'l ta'mirlashga 100 million so'm sarflasin. Aholi o'z mablag'ining 60% qismini ichki mahsulotlarga sarflasin. U holda bu mablag'ning umumiy effekti

$$\frac{100\ 000\ 000}{1-0.6} = 250\ 000\ 000$$

so'mga teng bo'ladi, ya'ni, sarflanganidan 2,5 marta ortiq.

Funksional qatorlar taqribiy hisoblashlar, dinamik modellar va optimal boshqaruv nazariyasiga oid masalalarni taqribiy yechishda foydalaniladi. Moliyaviy operatsiyalarga oid to'lovlar oqimida foiz stavkasi o'zgaruvchi, deb qaralsa, bunday to'lovlar oqimini ham funksional qator, deb qaralishi mumkin. Bu mavzuda biz funksional qatorlar va ular bilan bog'liq funksional ketma-ketliklar haqida zarur bo'lgan nazariy bilimlarni beramiz.

X to'plamda

$$f_n, \quad n = 1,2,3,... \tag{8.55}$$

funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Bu yerda X to'plam elementlarini nuqtalar deb ataymiz.

Agar shunday C son topilsaki, barcha $n = 1,2,3,...$ nomerlar va $x \in X$ nuqtalar uchun $|f_n(x)| \le C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (8.55) ketma – ketlik X to'plamda chegaralangan deb ataladi.

Agar har qanday belgilangan $x \in X$ nuqtada $\{f_n(x)\}$ sonli ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (8.55) ketma – ketlik ham X to'plamda yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$ tenglik esa (8.55) ketma – ketlikning limiti deb ataladi.

X to'plamda $u_n(x)$, $n = 1,2,3,...$ funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma – ketlikning har birida $x \in X$ nuqta ixtiyoriy ravishda belgilangan bo'lsin. U holda barcha $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}$ – sonli qatorlar to'plamini X to'plamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{8.56}$$

qator, deb ataymiz. $u_n(x)$ funksiyalar esa qatorning hadlari deb ataladi.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X$$

yig'indi (8.56) qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisi, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ qator esa uning qoldiq hadi deb ataladi.

$\{S_n(x)\}$ – xususiy yig'indilar ketma-ketligini qaraymiz.

12-ta'rif. Agar X to'plamda aniqlangan $\{S_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik qandaydir $G \subset X$ to'plamda biror – bir $S(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, ya'ni $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, $x \in G \subset X$ bo'lsa, u holda (8.56) qator G to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi, $S(x)$ esa uning yig'indisi deyiladi.

Agar (8.56) qator ixtiyoriy belgilangan $x \in X$ nuqtada absolyut yaqinlashsa, u holda uni absolyut yaqinlashuvchu qator deymiz.

47-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ qatorning yaqinlashish sohasi va yig'indisini toping.

Yechish. $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ $(n = 1, 2, ...)$ funksiyalar $x = -n, x = -(n+1)$ nuqtalarda aniqlanmagan. Shu sababli bu qatorni $x \neq -k,\ k \in \mathbb{N}$ nuqtalarda tekshiramiz. Qatorning umumiy hadini $u_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x}$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$S_n(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1}{(2+x)(3+x)} + ... + \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1+x}$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}.$$

Demak, berilgan qator $x \neq -k,\ k \in \mathbb{N}$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $\frac{1}{1+x}$ ga teng.

Funksional qatorlar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Agar (8.56) qatorning har bir hadini noldan farqli songa yoki (8.56) qatorning yaqinlashish sohasida noldan farqli qiymat qabul qiladigan funksiyaga ko'paytirsak, qatorning yaqinlashish sohasi o'zgarmaydi.

2) (8.56) funksional qatorning chekli sondagi hadlarini olib tashlash yoki (8.56) qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish (8.56) (qator yaqinlashish sohasida aniqlangan) natijasida qatorning yaqinlashish sohasi o'zgarmaydi.

48-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cos x$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Argument qiymatini belgilab olamiz va umumiy hadi $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ bo'lgan yordamchi qatorni qaraymiz. Dalamber alomatiga ko'ra x ning har bir qiymatida

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

Bundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

$\left|\frac{x^n}{n!}\cos x\right| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right| = |u_n|$ bo'lganligi sababli. qator x ning ixtiyoriy qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$ oraliqdan iborat.

49-misol. Umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo'lgan qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ni fiksirlab olamiz, natijada umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo'lgan sonli qatorga ega bo'lamiz. Agar $x\neq 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n^3x^2)=x\lim\limits_{n\to\infty}n^3=\infty$. Demak, qatorning yaqinlashish sohasi faqat bitta, $x=0$ nuqtadan iborat.

50-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ning $(x\neq -1)$ har bir qiymatida qandaydir sonli qator hosil bo'ladi. Bunga Dalamber alomatini tatbiq qilamiz

$$u_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1},\qquad u_n(x)=\frac{(-1)^n}{3n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

U holda

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{3n+2}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ shartni qanoatiantiruvchi x larda berilgan qator absolyut yaqinlashadi. $l(x)>1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda qator uzoqlashadi. $l(x)=1$ shartni qanoatlantiradigan va $l(x)$ aniqlanmagan nuqtalarda qatorni qo'shimcha tekshirish lozim. Bu misolda $x=-1$ nuqtada qator aniqlanmagan. $x=1$ nuqtada esa qator faqat 0 dan iborat bo'ladi va absolyut yaqinlashadi. $l(x)<1$ tengsizlikning yechmi $(0;\infty)$. Demak, qator $(0,+\infty)$ oraliqda yaqinlashadi. $x=0$ nuqtani alohida tekshirish lozim, bu nuqtada $l(x)=1$. $x=0$ nuqtada qator $-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{3n-1}+...$ ko'rinishda bo'ladi. Bu qator esa shartli yaqinlashadi. Shunday qilib qatorning yaqinlashish sohasi $[0;+\infty)$ oraliqdan iborat.

13-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $x\in X$ nuqtalar va $n>n_0$ nomerlar uchun

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (8.55) ketma – ketlik X to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

14-ta'rif. Agar $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ qatorning qism yig'indilaridan iborat $S_n(x)$ ketma-ketlik K sohada tekis yaqinlashsa, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ qator K sohada tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

51-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ nuqtalarni $x>-1$ oraliqda tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qator uchun $S(x)=\frac{1}{1+x}$, $S_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}$. Demak $R_n(x)=\frac{1}{n+x+1}$ va masala shartiga ko'ra $x+1>0$, shu sababli $|R_n(x)|<\frac{1}{n}$ tengsizlik o'rinli. Endi ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjudligini va barcha $n>n_0$ nomerlar uchun $\frac{1}{n}<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham $\frac{1}{n_0}=\varepsilon$, deb olsak, barcha $n>n_0$ nomerlar uchun $\frac{1}{n}<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, berilgan qator $x+1>0$ da tekis yaqinlashadi.

Teorema. $\{f_n(x)\}$ – ketma – ketlik $f(x)$ funksiyaga X to'plamda tekis yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|=0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema (Veyershtrass alomati). Agar $\sum_{i=1}^{\infty}a_n,\ a_n\geq 0$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib barcha $x\in X$ nuqtalar va $n=1,2,3,\ldots$ lar uchun

$$|u_n(x)|\leq a_n$$

bo'lsa, u holda (8.56) qator tekis va absolyut yaqinlashadi.

52-misol. $\frac{sin^2 x}{1^3}+\frac{sin^2 2x}{2^3}+...+\frac{sin^2 nx}{n^3}+...$ funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Argumentning barcha haqiqiy qiymatlarida

$$\left|\frac{sin^2 nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$$

tengsizlik o'rinli. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$ qator esa yaqinlashuvchi. Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan qator $(-\infty;+\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi.

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlar uchun funksiyanol qatorlarning chekli yig'indisi xossalarini tatbiq qilish mumkin.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yig'indisi $S(x)$ ham shu kesmada uzluksiz bo'ladi.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+...+\int_a^b u_n(x)dx+...$$

bo'ladi.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...$$

qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan funksional qatorning $S(x)$ yig'indisi shu $[a,b]$ kesmada $S'(x)$ hosilaga ega va

$$S'(x)=u_1'(x)+...+u_n'(x)+...$$

bo'ladi.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... \qquad (8.57)$$

ko'rinishdagi funksional qatorlar darajali qator, deb ataladi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0$ o'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lib qatorning koeffitsiyentlaridir. Darajali qatorlar matematikada va uning tatbiqlarida muhim ahamiyatga ega.

(8.57) qatorni $(x-x_0)=z$ almashtirish yordamida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (8.58)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Shu sababli biz (8.58) ko'rinishdagi qatorlarni o'rganish bilan chegaralanamiz.

Teorema. Agar (8.58) darajali qator $z=z_0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda $|z|<z_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z ning qiymatlarida (8.58) qator absolyut yaqinlashadi.

Natija. Agar (8.57) darajali qator $z=z_0$ nuqtada uzoqlashsa, u holda $|z|>z_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z ning qiymatlarida (8.57) qator uzoqlashadi.

(8.57) qator $z=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin. (8.57) qator yaqinlashadigan barcha $z=x$, $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plamini X bilan belgilaymiz. $R=\sup X$, $0 \le R \le +\infty$ bo'lsin.

Shunday qilib, agar $|z|<R$ bo'lsa (8.57) qator yaqinlashadi, agar $|z|>R$ bo'lsa, (8.57) qator uzoqlashadi. Ma'lumki, $|z|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami R radiusli sohasi bo'ladi. (8.57) qator uchun bu soha $|x-x_0|<R$ ko'rinishda bo'ladi.

15-ta'rif. Agar $|x-x_0|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (8.56) qator yaqinlashib, $|x-x_0|>R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda esa (8.56) qator uzoqlashsa, u holda R (chekli yoki cheksiz) son (8.56) qatorning yaqinlashish radiusi deb ataladi.

$|x-x_0|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar to'plami esa yaqinlashish doirasi, deb ataladi.

53-misol. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\left|z^{n+1}\right|}{n!\left|z^n\right|} = |z| \lim_{n\to+\infty}(n+1) = \begin{cases} \infty, & z \ne 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=0$.

54-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left|z^{n+1}\right|}{(n+1)!\left|z^n\right|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=+\infty$.

55-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|z^{n+1}\right|}{\left|z^n\right|}=|z|$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|<1$. $|z|\geq 1$ uzoqlashadi.

56-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2},\quad |z|<1$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|\leq 1$. $|z|>1$ da uzoqlashadi.

57-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nz^{n+1}}{(n+1)z^n}=|z|$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|<1$. $|z|=1$ bo‘lsa bu qator garmonik qatorga aylanib uzoqlashadi.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinib turibdiki darajali qatorning yaqinlashish radiusi nol, qandaydir chekli son yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Yaqinlashish doirasi chegarasida esa u yaqinlashish, uzoqlashish, qator boshqa qatorga aylanishi mumkin.

Agar x_0 nuqtaning biror – bir atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{8.59}$$

qatorga yoyish mumkin bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya analitik funksiya deb ataladi.

Quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \quad |z| < R_1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad |z| < R_2$$

qatorlarning yaqinlashish radiuslari: $R = R_1 = R_2$.

Ko'rinib turibdiki, bu qatorlarda integrallash yoki differensiallash orqali biridan ikkinchisini hosil qilish mumkin. Demak, integrallash yoki differensiallash orqali hosil qilingan qatorlarda yaqinlashish radiusi o'zgarmaydi, ya'ni yaqinlashlsh radiusi boshlang'ich qator radiusiga teng bo'ladi.

Shunday qilib, agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in \mathbb{R}$ nuqtada analitik bo'lsa, u holda funksiyani bu nuqtaning qandaydir atrofida quyidagi darajali qatorga yoyish mumkin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Har qanday haqiqiy koeffitsiyenli darajali qator uchun yaqinlashish radiusi mavjud bo'llb bu yaqinlashish radiusi quyidagi xossalarga ega:

1) barcha $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ nuqtalarda qator yaqinlashadi;

2) barcha $x \notin (x_0 - R; x_0 + R)$ nuqtalarda qator uzoqlashadi.

$(x_0 - R; x_0 + R)$ interval darajali qatorning yaqinlashish intervali ,deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta qandaydir atrofida (8.59) darajali qatorga $R > 0$ yaqinlashish radiusi bilan yoyilsa, u holda:

1) $f(x)$ funksiya $(x_0 - R; x_0 + R)$ intervalda (8.59) qatordan hadma – had olinishi mumkin bo'lgan barcha hosilalarga ega bo'ladi:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)...(n-m+1) a_n (x - x_0)^{n-m} \tag{8.60}$$

2) $f(x)$ funksiyani $(x_0 - R; x_0 + R)$ interval hadma – had integrallash mumkin:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1} \tag{8.61}$$

3) (8.59), (8.60) va (8.61) qatorlar bir xil yaqinlashish radiusiga ega.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta qandaydir atrofida (8.59) darajali qatorga yoyilsa, u holda:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

bo'lib quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning qandaydir atrofida darajali qatorga yoyilsa, u holda bu yoyilma yagonadir.

VII bobga doir savollar

1. Oddiy differensial tenglama, deb qanday tenglamalarga aytiladi?
2. Differensial tenglama tartibi, deganda nima tushuniladi?
3. Differensial tenglama yechimi, deganda qanday funksiya nazarda tutiladi?
4. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari, deb qanday yechimlarga aytiladi?
5. Tenglamani integrallash nimani anglatadi?
6. Tenglama umumiy yechimlda ixtiyoriy o'zgarmaslar soni bilan tenglama tartibi qanday munosabatda?
7. Koshi masalasi, deganda qanday masala tushuniladi?
8. Koshi masalasi yechimining mavjudlik va yagonalik shartlarini bayon qiling.
9. Differensial tenglamaning maxsus nuqtalari va maxsus yechimlari, deganda nimalar tushuniladi?
10. O'zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglamalarga misollar keltiring.
11. Bir jinsli differensial tenglama, deb qanday tenglamaga aytiladi va uni yechish usulini tushuntirib bering.
12. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, deganda qanday tenglama tushuniladi?
13. Bir jinslimas chiziqli differensial tenglama umumiy yechimi ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usulida qanday quriladi?
14. Bernulli tenglamasini yozing va u qanday yechiladi?
15. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama, deb qanday ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi?
16. Bir jinsli tenglamaning farqli jihati nimadan iborat?
17. Chiziqli – bog'liq, chiziqli erkli funksiyalarni ta'riflang.
18. Vronskiy aniqlovchisini yozing va uni nimani aniqlashda qo'llash mumkin?
19. Fundamental yechimlar sistemasi, deganda nima tushuniladi?
20. Bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini qurishning qanday sodda usuli mavjud?
21. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?

22. Chekli ayirmali tenglama, deb qanday tenglamalarga aytiladi?
23. Chekli ayirmali tenglama tartibi, deganda nima tushuniladi?
24. Birinchi tartibli chiziqli chekli ayirmali tenglama.
25. Narx moslashuvchanligi Cobveb modelini tushuntiring.
26. Chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglama.
27. Chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglamaning xarakteristik tenglamasi.
28. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli chekli ayirmali tenglama.
29. Ikkinchi tartibli Cobveb modelining mohiyatini ayting.
30. Neoklassik iqtisodiy o'sish (Solov) modelini tushuntiring.
31. Yirtqich va o'lja modeli qanday tuziladi?
32. Qator, deb nimaga aytiladi?
33. Geometrik qatorni yozing.
34. Qatorning qoldig'i nima?
35. Garmonik qatorni yozing. U yaqinlashuvchimi?
36. Koshi kriteriyasi yordamida qatorni yaqinlashishga qanday tekshiramiz?
37. Qanday qatorga musbat qator deyiladi?
38. Musbat qatorlarni taqqoslash deganda nimani tushunasiz?
39. Dalamber alomatini ayting.
40. Koshining radikal, integral alomatini ayting.
41. Funksional ketma-ketlik, deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
42. Funksional qator, deb nimaga aytiladi?
43. Funksional qatorning aniqlanish sohasi, deb nimaga aytiladi?

VII bobga doir misol va masalalar

1. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $(1+y)dx-(1-x)dy=0.$

b) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0.$

c) $xyy'=1-x^2.$

d) $y'(1+y)=xysinx.$

2. Differensial tenglamalarning xususiy yechimini toping.

a) $x^2dy-y^2dx=0,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}.$

b) $1+y^2=xyy',\ y(2)=1.$

c) $(x+xy^2)dx+(x^2y-y)dy=0,\ y(0)=1$

d) $y'(x^2-2)=2xy,\ y(2)=2.$

e) $cosx\,siny\,dy=cosy\,sinx\,dx,\ y(\pi)=\pi$

3. Bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

b) $\sqrt{y}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)dx + xdy = 0$;

c) $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$;

d) $xy' + xtg\frac{y}{x} = y$.

4. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $y' + 2y = 3e^x$;

b) $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = 3x^2$;

c) $y' + ycosx = sin2x$;

d) $y'e^{x^2} - \left(xe^{x^2} - y^2\right)y = 0$.

5. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$;

b) $y'' - 2y' + y = 0$;

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

6. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

a) $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$;

b) $y'' - y' = 2x$;

c) $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$;

d) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$;

e) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

f) $y'' - 2y' + 2y = -85\cos 3x$;

g) $y'' + y = 2\sin x$;

h) $y'' + 3y' - 4y = e^x \cos x$.

7. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

a) $\begin{cases} y' = -y + z \\ z' = 4y - z \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = 5y - 2z \\ z' = 13y - 5z - \sin x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3z - 2y \end{cases}$

8. Agar elastiklik $E_p = -\frac{1}{2}$ o'zgarmas va talabning $y = 2$ qiymatida $p = 5$ narx berilgan bo'lsa, $y = y(p)$ talab funksiyasini toping.

9. Agar talabning $y=10$ qiymatida narx $p=90$ berilgan hamda elastiklik $E_p=\frac{y-100}{y}$, $0<y<100$ ko'rinishda bo'lsa, talab funksiyasini toping.

10. Tog' ruda posyolkasi aholisining soni vaqt o'tishi bilan o'zgarishi $y'=0{,}3y\left(2-10^{4}y\right)$ tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda $y=y(t)$, t–vaqt (yillarda). Vaqtning boshlang'ich momentida posyolka aholisi 500 odamni tashkil etgan. Uch yildan so'ng u qanday bo'ladi.

11. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda $y=25-2p+3\frac{dp}{dt}$ va $x=15-p+4\frac{dp}{dt}$ ko'rinishlga ega. Agar boshlang'ich moment $p=9$ bo'lsa, muvozanat narx bilan vaqt o'rtasidagi bog'liqlikni toping.

12. Agar ishlab chiqarish hajmi (investitsiyalar normasi $0{,}6$, sotilish bahosi $0{,}15$ va $l=0{,}4$ shartlarda) vaqtning boshlang'ich momentida $y_0=y(0)=24$ (shart.bir) ni tashkil etgan bo'lsa, to'yinmagan bozor sharoitda 6 oyda ishiab chiqarilgan mahsulot hajmini topmg.

13. Tovar narxi $p(y)=\left(5+3e^{-y}\right)y^{-1}$, $m=0{,}6$, $l=0{,}4$, $y(0)=1$ funksiya bilan beriladi, deb faraz qilib, sotilayotgan mahsulot hajmi bilan vaqt orasidagi $y=y(t)$ bog'liqlikni toping.

14. Taqqoslash teoremalaridan foydalanib, qatorni yaqinlashishga tekshiring. Berilgan qator bilan taqqoslanadigan qatorning umumiy hadini ko'rsating.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn+1}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\frac{n+1}{n}$.

15. Dalamber yoki Koshi alomatlari yordamida qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!2^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

16. Koshining integral alomatidan foydalanib qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

17. Qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{3n^2\sqrt{n+1}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n^2}}{n^n}$.

18. Qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{(n+1)!}$.

Javoblar: 1. a) $(1-x)(1+y)=C$. **b)** $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x + C$.
c) $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **d)** $y+\ln|y|=\sin x - x\cos x + C$.

2. a) $y=\frac{x}{x+1}$. **b)** $x^2-2y^2=2$ **c)** $1+y^2=\frac{2}{1-x^2}$.
d) $y=x^2-2$. **e)** $y=x, y=2\pi-x$.

3. a) $arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **b)** $y=x\ln^2\frac{C}{x}$. **c)** $y=xe^{Cx+1}$. **d)** $x\sin\frac{y}{x}=C$.

4. a) $y=Ce^{-2x}+e^x$. **b)** $y=\frac{x^3+C}{x^2+1}$. **c)** $y=Ce^{-\sin x}+2\sin x-2$ **d)** $y^2(2x+C)=e^{x^2}$.

5. a) $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$. **b)** $y=C_1e^x+C_2xe^x$. **c)** $y=(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)e^{3x}$.

6. a) $y=2x^2-6x+3+C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$. **b)** $y=C_1+C_2e^x-x(x+2)$.
c) $y=2e^{-x}+(C_1\sin 4x+C_2\cos 4x)e^{-2x}$. **d)** $y=-xe^{-x}+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.
e) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **f)** $y=6\sin 3x+7\cos 3x+(C_1\sin x+C_2\cos x)e^x$.
g) $y=C_1\sin x+(C_2-x)\cos x$. **h)** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}+\frac{1}{26}(5\sin x-\cos x)e^x$

7. a) $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-3x}, \\ z=2C_1e^x-2C_2e^{-3x}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=C_1\sin x+C_2\cos x - x\cos x. \\ z=(2,5C_1+0,5C_2-0,5x)\sin x-(0,5C_1-2,5C_2+2.5x-0.5)\cos x. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}-1. \\ z=C_1e^x-C_2e^{-x}-1. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x), \\ z=e^{2x}((C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x). \end{cases}$

8. $y=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{p}}$. **9.** $p=100-y$. **10.** 2685. **11.** $p=10-e^{-t}$. **12.** 29,8.

13. $y=\ln(3,32e^{12t}-0,6)$. **14. a)** Yaqinlashuvchi; $\frac{\frac{\pi}{2}+1}{n^2}$

b) uzoqlashuvchi; $\left(\frac{5}{2}\right)^n$. **c)** uzoqlashuvchi; $\frac{1}{n}$.

d) Yaqinlashuvchi; $\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

15. a) uzoqlashuvchi; $\frac{e}{2}$. b) uzoqlashuvchi; $\frac{3}{2}$.

c) uzoqlashuvchi; $\frac{3}{2}$. d) Yaqinlashuvchi; 0.

16. a) uzoqlashuvchi; $\frac{1}{2}\ln\ln(2x+1); +\infty$.

b) yaqinlashuvchi; $-\frac{1}{\ln\ln x}; \frac{1}{\ln\ln 2}$.

17. **a)** Absolyut yaqinlashuvchi; ikkinchi taqqoslash alomati; $\frac{1}{3n\sqrt{n}}$.

b) Uzoqlashuvchi; Koshi alomati; $+\infty$.

18. **a)** $x=0$ da $\{0\};0$; $x\neq 0$ da $+\infty$. **b)** $(-\infty;+\infty)$; 0.

Tayanch so'z va iboralar: differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, differensial tenglama yechimi, umumiy yechim, xususiy yechim, Koshi masalasi, maxsus nuqta, maxsus yechim, o'zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglama, bir jinsli differensial tenglama, chiziqli differensial tenglama, o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama, chiziql erkli funksiyalar, chiziqli bog'liq funksiyalar, funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi, Vronskiy aniqlovchisi, bir jinsli chiziqli differensial tenglama, fundamental yechimlari sistemasi, xarakteristik tenglama, chekli ayirma, diskret miqdor, chekli ayirmali tenglama, diskret dinamik jarayonlar, dinamik jarayon, dinamik o'zgaruvchi, qatorlar, xususiy yig'indi, qator yig'indisi, qatorning qoldig'i, garmonik qator, yaqinlashish alomatlari, musbat hadli qatorlar, funksional qator, tekis yaqinlashuvchi qatorlar, tekis yaqinlashish sharti, xususiy yig'indi, qoldiq had, yaqinlashish sohasi, darajali qator, Teylor qatori.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. AbdalimovR.R., UrazboyevaI.K. Oliy matematika. Toshkent "Aloqachi" nashriyoti, O'quv qo'llanma, 2005.

2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-кисм.-Т.: "Ўкитувчи", 1994.-416 б.

3. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 2-кисм.-Т.: "Ўкитувчи", 1995.-436 б.

4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: "Высшая школа", 1999,-695 ст.

5. Ахтямов А. М. Математический анализ для социально – экономических специальностей. / Учебное пособие в 3-х частях. Уфа: Изд-во Башкирск. Ун-та. 2001. Ч. 2. 199 с. Ч. 3. 194 с.

6. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика. Часть I. Учебное пособие. Т.: « IQTISOD - MOLIYA », 2008. – 336 стр.

7. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика. Часть II. Учебное пособие. Т.: «АЛФА - ПРИНТ», 2008. – 288 стр.

8. БоярчукА.К., ГоловачГ.П.Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

9. Высшая математика для экономистов. Учебник. 2-е изд. / Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 стр.

10. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshibaev M. "Matematik analizdan misol va masalalar" T.: "Yangi asr avlodi" 2006 y. -304 b.

11. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 2007.

12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Издательство АСТ», 2003,-558 ст.

13. Jurayev T.J., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari. Darslik. T. O'zbekiston, 1999, 290 bet.

14. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. 2-е изд. М.: Дело и сервис. 1999.

15. Karimov M., Abdukarimov R. Oliy matematika. O'quv qo'lanma. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2009. – 204 b.

16. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. Теория, примеры, задачи. М.: «Экзамен», 2005.

17. Коршунова Н. И., Плясунов В.С. Математика в экономике. М.: Вита-Пресс, 1996. 368 стр.

18. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. 4-е изд. М.: Дело, 2003.

19. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 4-е изд. М.: Дело, 2003.

20. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 6-е изд. М.: Дело, 2008. 720 стр.

21. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. 2-е изд. СПб., 2005.

22. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник. М.: Дело, 2005. – 576 с.

23. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под общей редакцией В.И. Ермакова. ИНФРА – М, 2007. – 656 стр.

24. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-416 ст.

25. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-544 ст.

26. Практикум по высшей математики для экономистов: Учебное пособие для вузов. Под редакции проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 320 стр

27. Rayemov M., Xujaniyozova G. "Oliy matematika" fani bo'yicha mustaqil ta'lim texnologiyasi. O'quv-uslubiy qo'llanma. Toshkent, "Ekstremum press" nashriyoti, 2011.-142 bet.

28. Raximov D.G., Roishev A.R. Oily matematika. 1 qism. O'quv qo'llanma. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2008. – 120 b.

29. Сборник задач по высшей математике / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А. Шевченко. – 7-е изд. - М.:Айрис-пресс. 2008. 576 с.

30. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 1998.

31. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. Ч.2. М.: Финансы и статистика, 1999.

32. Сборник задач по курсу математики / Под ред. А.С. Солодовникова. А.В.Браилова. М.: Финансовая академия. 2001. 508 с.

33. Turdaxunova S. Isayeva G. Oliy matematika. Masalalar to'plami. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2015. – 204 bet.

34. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2000.

35. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.

36. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. Taylor & Francis group, London and New York 2003.

37. Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. Springer, London, 2007.

38. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York 2011y.

MUNDARIJA

VI bob. Differensial hisob

VII bob. Integral hisob

VIII bob. Differensial tenglamalar va qatorlar

A.R. Xashimov, G.S. Xujaniyozova

IQTISODCHILAR UCHUN
MATEMATIKA

O'quv qo'llanma

Muharrir N. Artikova
Badiiy muharrir M. Odilov
Kompyuterda sahifalovchi O. Fozilova

Nashr. lits. AI № 305. 22.06.2017.
Bosishga ruxsat 29.12.2017-yilda berildi.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. Ofset qog'ozi №2. «Times» garniturasi.
Shartli b.t. 25,7. Nashr hisob t. 26,5.
Adadi 120 dona. 74-buyurtma.

"IQTISOD-MOLIYA" nashriyoti
100000, Toshkent, Amir Temur, 60«A».

"HUMOYUNBEK-ISTIQLOL MO'JIZASI"
bosmaxonasida chop etildi.
100000, Toshkent, Amir Temur, 60«A».