O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ISLOM KARIMOV NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

EHMDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

FANIDAN

MA’RUZALAR MATNI

Toshkent – 2018

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ISLOM KARIMOV NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

EHMDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

FANIDAN

MA’RUZALAR MATNI

Toshkent – 2018

Mualliflar: A.Abdukarimov, G.Shodmonov, A.Fayziyev " EHMda matematik modellashtirish" fanidan ma'ruzalar matni.-T.:ToshDTU, 2018.-55 b.

Ma'ruzalar matnida muhandislik masalalarini yechishda chiziqli algebraik tenglamalar tiziminig qo'llanilishi va uni yechish usullari, matematik modellari oddiy differensial tenglamalarning yechilishiga keltiriladigan aviatsiya konstruksiyalari masalalari, xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga keltiriladigan aviatsiya konstruksiyalari masalalarining matematik modellari, erkin va majburiy tebranishlar haqidagi masalalarning matematik modellari, uchish apparatlari qurilish mexanikasining chegaraviy masalalarining matematik modellari hamda xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali modellashtiriladigan ba'zi bir muhandislik masalalari va ularni sonli yechish usullari bayon etilgan.

Taqrizchilar:

A.Axmedov - O'zMU "Nazariy mexanika asoslari" kafedrasi mudiri, f.m.-f.d. professor.

A.Abdug'aniyev - ToshDTU "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.m.fanlari nomzodi.

So‘z boshi

Matematik modellar va muxandislik masalalarini sonli yechish usullari, oliy matematikaning muhim bo‘limidan iborat bo‘lib, o‘quv fani sifatida texnika, iqtisodiy va boshqa oliy o‘quv yurtlarining o‘quv dasturlarida salmoqli o‘rin egallaydi.

Mazkur ma’ruzalar matnining asosiy maqsadi, texnika oliy o‘quv yurtlarining talabalarini matematik modellashtirish usullari bilan tanishtirish hamda ularni har xil muxandislik qurilmalarini hisoblashda qo‘llaniladigan masalalarni yechishga o‘rgatishdan iboratdir.

“EHMda matematik modellashtirish” fanidan ma’ruzalar matni shu fan uchun tuzilgan dastur asosida yozilgan bo‘lib, unda fan bo‘yicha tuzilgan ma’ruzalar matni asos qilib olindi.

Ushbu ma’ruzalar matnini yozish jarayonida mualliflar, bir qancha yillar mobaynida Toshkent Davlat Texnika universiteti hamda Toshkent Davlat Aviatsiya instituti talabalariga o‘tkazilgan nazariy va amaliy mashg‘ulotlar asosida to‘plagan tajribalaridan foydalandilar.

1-ma'ruza

Matematik modellashtirish va muhandislik masalalarini dasturlashning umumiy yo'l-yo'riqlari. Muxandislik masalalarini yechishda chiziqli algebraik tenglamalar tiziminig qo'llanilishi va uni yechish usullari

Reja

1. Aviatsiya konstruksiyalari elementlarining masalalarini EHM da yechish usullari va matematik modellashtirish fanining maqsadi va vazifalari.
2. Aviatsiya konstruksiyalari elementlarining masalalarini EHM da yechishning asosiy bosqichlari.
3. Algebraik tenglamalar, oddiy differensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali aviatsiya konstruksiyalari elementlarining masalalarini matematik modellashtirish.

Kalit so'zlari: diskret model, matematik dasturlash, matematik model, samolyot qanoti.

1. Davrimizning eng dolzarb muammoli masalalaridan biri, inson faoliyatining turli sohalarida matematik modellashtirish va EHMning keng qo'llanilishidir, hususan, uchish apparatlari konstruksiyalarining dinamikasi, turg'unligi va chidamliligi kabi masalalar, shular jumlasiga kiradi.

Zamonaviy elektron hisoblash mashinalaridan oqilona foydalanishni bilmay turib, biror qo'yilgan masalaning matematik modelini qurish va uni yechish katta qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun ham bu fan texnika oliy o'quv yurtlarining dasturiga kiritilgan. Shu sabali, mazkur fanning asosiy maqsadi, bo'lajak muhandislar va konstruktorlarga aviatsiya konstruksiyasi ayrim elementlarining matematik jihatidan modellashtirilishi hamda ularni EHM da yechishning zamonaviy usullarini o'rgatishdan iboratdir.

2. Biror berilgan masalani EHM da yechishdan avval, berilgan masalaning matematik modelini qurish, ya'ni berilgan jarayonni matematik ifodalash zarur.
Har qanday masalani EHM da yechish jarayoni 3 bosqichda olib boriladi:

a) matematik model qurish;

b) diskret model qurish;

d) masalalarni yechishning hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish va uni EHM da tatbiq qilish.

Matematik modellar, odatda algebraik tenglamalardan hamda boshlang'ich va chegaraviy shartlari bilan berilgan oddiy differensial tenglamalardan iborat bo'lishi mumkin. Quyida bu tenglamalarga olib keladigan ayrim masalalarni batafsil ko'rib chiqamiz.

Algebraik tenglamalar yordamida matematik modellashtiriladigan aviatsiya konstruksiyalari masalalari.

Aviatsiya konstruksiyalarining barcha optimizatsiya masalalari o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan ba'zi funksiyalarning maksimum yoki minimumini topish masalasiga keltiriladi, ya'ni:

$$Z = F(x_1, x_2, .. x_n);\ x = (x_1, x_2, .. x_n) \tag{1.1}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, .. x_n) = \varphi_i(x) < b \tag{1.2}$$

kabi cheklanish shartlarini qanoatlantiruvchi ekstremumini topish masalasiga keltiriladi.

Bir necha o'zgaruvchili (1.1) funksiyaning, (1.2) cheklanish shartlarini qanoatlantiruvchi, maksimum yoki minimumini topish masalasi optimizatsiya masalasi deyiladi. Yuqoridagi Z funksiyaga maqsadli funksiya, (1.2)- qo'shimcha shartlarga masalaning cheklanish shartlari deyiladi.

Agar F(x) va $\varphi_i(x)$ lar chiziqli funksiyalar bo'lsa ya'ni,

$$F(\lambda x) = \lambda F(x), \qquad \varphi_i(\lambda x) = \lambda \varphi_i(x)$$

kabi ko'rinishda bo'lsa, (1.1), (1.2) tenglamalar matematik programmalashning chiziqli masalalari deyiladi. Aks xolda, F(X) funksiya (1.2) cheklanish shartlari bilan birgalikda nochiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelini tashkil qiladi va har bir qo'yilgan masala uchun alohida ko'rinishga ega bo'ladi.

Misol tariqasida aviatsiya ishlab chiqarishini rejalashtirish masalasini ko'rib chiqamiz.

Korxona n – turdagi $A_1, A_2, ... A_n$ mahsulot chiqaradi deylik. Buning uchun m- turdagi $B_1, B_2, ... B_m$ hom ashyo kerak bo'ladi. b_i- hom ashyolar zahirasi, $a_{ij}, j-$ mahsulotni ishlab chiqarishida sarf bo'ladigan $i-$hom ashyo birligi soni, $C_j - j-$chi tartibli mahsulot harid qilinganda olinadigan daromad kattaligi bo'lsin.

Quyidagi jadvalni tuzamiz.

	$A_1, A_2 ... A_n$	Hom ashyo zahirasi
B_1 B_2 .... B_m	$a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}$ $a_{21}, a_{22}, ... a_{2n}$ .... $a_{m1}, a_{m2} ... a_{mn}$	b_1 b_2 ... ... b_m
Daromad reja	$c_1\ c_2 ... c_m$ $x_1\ x_2 ... x_n$	

Agar x orqali j- maxsulot birligi sonini belgilasak, u holda, masalaning matematik modelini quyidagicha yozish mumkin.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.3}$$

chiziqli funksiyaning

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \tag{1.4}$$

kabi cheklanish shartlarini qanoatlantiruvchi maksimum qiymati topilsin yoki

$$Z = CX \tag{1.5}$$

bu yerda

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .... \\ c_n \end{pmatrix}, X = (x_1, x_2, ... x_4)$$

$$AX < b \tag{1.6}$$

bu yerda: $A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{12}\ a_{22}\ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ldots a_{mn} \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$

Qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish yordamida (1.6) tengsizlikning cheklanish shartini quyidagi tenglamaga keltirish mumkin.

$$AX+Y=b \qquad (1.7$$

bu yerda: $Y=\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \ldots\ldots \\ X_{n+m} \end{pmatrix}$

(1.5) tenglamalar tizimida noma'lumlar soni, tenglamalar sonidan ko'pdir. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki bunday tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlar ichidan (1.5) maqsad funksiyaga maksimal qiymat beruvchi va optimal yechim deb ataluvchi, yechimni topishimiz lozim bo'ladi.

Matematik modellari oddiy differensial tenglamalarning yechilishiga keltiriladigan aviatsiya konstruksiyalari masalalari

A)Samolyot fyuzelyaji yoki qanotining egilishi haqidagi masala

O'zgaruvchan kesimga ega bo'lgan konsolli sterjenning egilishi haqidagi masalaning matematik modelini qurishni ko'rib chiqamiz. Ma'lumki, samolyot qanoti ixtiyoriy yopma kuch q(x) ta'siridagi o'zgaruvchan kesimli konsolli sterjen kabi modellashtiriladi.

Guk qonuniga asosan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\sigma=E*\varepsilon \qquad (1.8)$$

bu yerda σ - kuchlanish, ε-deformatsiya, E-qovushqoqlik moduli.

Agar tekis kesimlar gipotezasini to'g'ri deb hisoblasak, u holda, ε deformatsiya bilan sterjenning ko'chishi W(x) lar orasidagi munosabat orqali quyidagicha ifodalanadi.

$$\varepsilon=-ZW_{xx} \qquad (1.9)$$

(1.8) va (1.9) dan foydalanib, sterjenning egilish momentini quyidagi formula orqali hisoblaymiz.

$$M=\int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} b(x)\sigma z dz=-E\frac{b(x)h^3(x)}{12}W_{xx} \tag{1.10}$$

ma'lumki muvozanat tenglamasi

$$M_{xx}+g(x)=0 \tag{1.11}$$

kabi edi, (1.10) ni (1.11) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI(x)\frac{d^2W}{dx^2}=q-q(x) \tag{1.12}$$

Bu yerda $I(x)=\frac{b(x)h^3(x)}{12}$ - kesimning inersiya momenti, b(x) – sterjenning o'zgarish qonuni (1.12) tenglama

$$W=W_x=0: \quad x=0, \quad M=M_x=0: x=\ell \tag{1.13}$$

chegaraviy shartlar bilan birgalikda samolyot qanotining egilishi haqidagi masalaning matematik modelini ifodalaydi.

Fyuzelyajning egilishi haqidagi masalaning matematik modelini qurish uchun, (1.12) tenglamaga tayanch reaksiyasini qo'shish yetarlidir, ya'ni

$$P_{T\ peak}=K(x)W$$

U holda (1.12) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{d^2}{dx^2}[EY(x)\frac{d^2W}{dx^2}]+k(x)W=q(x) \tag{1.14}$$

bu yerda K(x) - fyuzelyajning grunt bilan o'zaro ta`sirini ifodalaydi. (1.14) tenglama

$$M=M_x=0,\ x=0,\ x=\ell \tag{1.15}$$

kabi chegaraviy shartlar bilan birgalikda samolyot fyuzelyajining egilishi haqidagi masalaning matematik modelini ifodalaydi.

B)Hususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga keltiriladigan aviatsiya konstruksiyalari masalalarining matematik modellari

Samolyot qanotining majburiy tebranishi haqidagi masalaning matematik modelini qurish uchun, (1.12) tenglamaga. Dalamber prinsipiga ko'ra, inersiya kuchi bo'lgan $m(x)\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ ni qo'shish kifoya bo'ladi.

U holda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=q(x,t) \tag{1.16}$$

bu yerda m (x) – qanotning o'zgaruvchan massasi, (1.16)- hususiy hosilali differensial tenglama (1.13) chegaraviy shartlar va quyidagi boshlang'ich shartlar

$$W\big|_{t=0}=0,\qquad W_t\big|_{t=0}=0 \tag{1.17}$$

Kabi boshlang'ich shartlar bilan birgalikda, samolyot qanotining majburiy tebranishi haqidagi masalaning matematik modelini ifodalaydi. Fyuzelyajning majburiy tebranishi haqidagi masalaning matematik modeli ham xuddi shunday quriladi.

Nazorat savollari

1. Fanning maqsadi va vazifalari.
2. Aviatsiya konstruksiyalari elementlarining masalalarini yechishning asosiy bosqichlarini keltiring.
3. Masalaning matematik modeli nima?
4. Qanday aviatsiya konstruksiyalarining (AK) masalalari algebraik tenglamalarni yechishga keltiriladi?
5. Qanday AK masalasi optimizatsiya masalasi deyiladi?
6. Qanday echim optimal echim deyiladi?

7. Qanday AK masalalari oddiy differensial tenglamalarni yechishga keltiriladi va matematik modeli qanday quriladi?
8. Qanday AK masalalari xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga keltiriladi va matematik modeli qanday quriladi?

Kalit so'zlar

Diskret model. Masalan, $y = x^2$ funksiyaning qiymatini hisoblash uchun, berilgan x bo'yicha uni ustun ko'rinishida hisoblaymiz. Agar x sondan kvadrat ildiz chiqarish talab etilsa, u holda diskret model algoritmi yordamida ifodalanishi mumkin bo'lgan jarayonning matematik ifodasi va yechimning aniqligi masalasi haqidagi savol yuzaga keladi.

Matematik model. Matematik model tuzamiz, ya'ni masalaning matematik ifodasini yozamiz.

$$y = \sqrt{x}$$

Diskret model algoritmini tuzamiz.

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(Y_n + \frac{x}{Y_n}),\ n = 1,2\ .... \tag{1.18}$$

$$\lim_{n \to \infty} Y_{n+1} = C.\ \text{ёки} \qquad \sqrt{x} = c$$

Diskret model algoritmini (1.18) ga tadbiq qilish uchun EHM da dastur ishlab chiqiladi. Misol uchun, $Y = \sqrt{5}$ ni $\varepsilon = |Y_{n+1} - Y_n| = 0{,}0001$ aniqlik bilan $y_0 = 2$ boshlang'ich yaqinlashish bilan hisoblang. (1.18) formula orqali hisoblab, berilgan aniqlikda hammasi bo'lib 3 ta yaqinlashish kerak ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya'ni n=3 ekanligini topamiz.

Matematik dasturlash. So'nggi yillarda matematikaning dasturlashtirishga oid bir necha bo'limlari vujudga keldi. Bularga chiziqli dasturlashtirish, qavariq dasturlashtirish, dasturlashtirish, butun sonli dasturlashtirish, dinamik dasturlashtirish va boshqalar kiradi. Hozirgi paytda bu bo'limlar umumiy tarzda matematik dasturlashtirish yoki optimallash nomi bilan yuritiladigan bo'ldi.

Samolyot qanoti. Samolyot qanoti odatda eni o'zgaruvchi b(x) va qalinligi h(x) konsolli sterjenday modellashtiriladi. To'g'riburchakli kesim uchun inersiya momenti I (x) quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$Y(x)=\frac{b(x)h^2(x)}{12}$$

Elliptik kesim uchun quyidagi formula bilan hisoblaymiz.

$$I=\frac{\pi ab^2}{4}$$

2-ma'ruza

Koshi masalasi va chegaraviy masalalar haqida tushuncha. Koshi masalasini sonli yechish usullari

Reja

1. Chegaraviy masala hamda Koshi masalasi tushunchalari.
2. Koshi masalasini sonli yechishning Runge-Kutta usuli
3. Koshi masalasini yechishning chekli ayirmalar usuli.

Kalit so'zlari: Koshi masalasi, chegaraviy masala, standart yozuv, Teylor qatoriga yoyish.

Quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamani qaraylik.

$$MU+BU+AU=f(t) \qquad (2.1)$$

bu yerda M,V,A-(m_{ij}),(b_{ij}),(a_{ij}) elementlar bilan berilgan kvadrat matritsalar. $(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n})$ bo'lib $U(t)-n-$o'lchovli izlanayotgan vektor, f(t) esa. t ga bog'liq bo'lgan berilgan vektor funksiya.

Quyidagi

$$U(t_0)=a_0, \qquad U(t_0)=a_1 \qquad (2.2)$$

ko'rinishdagi shartlarni qanoatlantiruvchi (bu yerda, a_0,a_1 – berilgan sonli vektorlar) (2.1) tenglamaning yechimini topish talab etilsa, u holda (2.1) tenglama bilan (2.2) shartlarni birgalikda boshlang'ich shartlar bilan berilgan masalasi yoki Koshi masalasi deyiladi.

Agar quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} U(t_0)+\gamma_1 U(t_0)=\beta_1 \\ U(t_1)+\gamma_2 U(t_0)=\beta_2 \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi, (bu yerda γ_1, γ_2 – berilgan o‘zgarmaslar, β_1, β_2 – berilgan sonli vektorlar) (2.1) tenglamaning yechimini topish talab etilsa, u holda (2.1) tenglama bilan (2.3) shartlar birgalikda chegaraviy masala deb yuritiladi.

Shunday qilib, Koshi masalasi bitta nuqtada berilgan qo‘shimcha shartli differensial tenglama bilan aniqlanib, chegaraviy masala esa, kamida ikki nuqtada berilgan shartli differensial tenglama bilan aniqlanar ekan.

Avvalo Koshi masalasining sonli yechish usullarini ko‘rib chiqamiz, ya’ni aviatsiya konstruksiyalari elementlarining dinamik masalalarini ifodalaydigan (2.2) boshlangich shart bilan berilgan (2.1) tenglamaning yechimini aniqlashning usullaridan biri Runge- Kutta usulini bayon etamiz.

Runge-Kutta usuli

Koshi masalasini yechishning eng ko‘p tarqalgan usullaridan biri Runge-Kutta usuli hisoblanadi.

Bu usulni qo‘llash uchun berilgan (2.1) differensial tenglamani quyidagicha standart ko‘rinishda yozib olamiz.

$$U = y_1, \quad M y = y_2 \quad \text{yoki} \quad \left.\begin{aligned} M y_1 &= E y_2 \\ E y_2 &= f(t) - BM^{-1} y_2 - A y_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

bu yerda E- birlik matritsa, yoki

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A & -BM^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

yoki

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A & -BM^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

yoki

$$y = Dy + q = F(t, y) \tag{2.7}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ A & BM^{-1} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

(2.7) tenglama uchun boshlang'ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$y(0)=\begin{pmatrix} a_1 \\ M\,a_2 \end{pmatrix}=a \qquad (2.8)$$

(2.8) boshlang'ich shart bilan berilgan (2.7) tenglama, berilgan (2.1) tenglamaga Runge-Kutta usulini qo'llash uchun standart yozuv hisoblanadi.

Vaqtning biron bir momentida $t_i=i\ .\ \Delta t$, $t_{i+1}\ .t_i=\Delta t$, y(t) ning qiymatini y_i deb belgilaymiz. $y_{i+1}=y(t_i+\Delta t)$ funksiyani Δt ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha yozish mumkin.

$$y_{i+1}=y_i+y_i\,\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2!}\,y_i+\frac{\Delta t^3}{3!}\,y+\ldots \qquad (2.9)$$

(2.9) da Δt li had bilan chegaralanib, quyidagi taqribiy ifodaga ega bo'lamiz.

$$y_{i+1}=y_i+\Delta t\,y_0 \qquad (2.10)$$

$t=t_i$ bo'lganda (2.7) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y_i=F(t_i,y_i) \qquad (2.11)$$

(2.11) ni (2.10) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$y_{i+1}=y_i+\Delta t\,F(t_i,y_0)\ \ i=0,1,2, \qquad (2.12)$$

(2.11) formula (2.7) tenglamaning oddiy sonli integrallash usulini ifodalaydi va uni 1- tartibli Runge-Kutta usuli deb ataladi. 1- tartibli deyilishiga sabab. Δt ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyishda (2.9) qatorning faqat birinchi, chiziqli hadining olib qolinishidir.

Qo'shiluvchilarning Δt^2 va undan yuqori tartibdagilari tashlab yuboriladi, bundan kelib chiqadiki, (2.12) formuladagi hatolik $0(\Delta t^2)$ tartibli aniqlikka ega, ekan.

Ko'pincha, amaliyotda, to'rtinchi tartibli Runge-Kutta formulasidan foydalaniladi. Unga asosan t_i dan t_{i+1} ga o'tish quyidagi formulalar yordamida amalga oshiriladi.

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t P, \qquad P = \frac{1}{6}[p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4] \tag{2.13}$$

bu yerda, $p_1 = F(t_i, y_i)$, $p_2 = F(t_i + 0{,}5\Delta t\, p_1)$, $p_3 = F(t_i + 0{,}5\Delta t, y_1 + 0{,}5\Delta t\, p_2)$, $p_4 = F(t_i + \Delta t, y_1 + \Delta t\, p_3)$. (13) formulaning hatoligi $0(\Delta t^5)$, bu esa (2.12) formula hatoligidan sezilarli darajada kamdir. Runge-Kutta usuli algoritmining tadbiqi har qanday zamonaviy shaxsiy kompyuterlar matematik ta'minotida mavjuddir.

Koshi masalasini yechishning chekli ayirmalar usuli

Quyidagi 2- tartibli differensial tenglama

$$y(t) + b(t)y(t) = f(t) \tag{2.14}$$

$$y(0) = \alpha_0, \; y(a) = \alpha_1 \tag{2.15}$$

kabi boshlang'ich shartlar bilan berilgan bo'lsin.

Bu yerda b(t) va f(t) –berilgan funksiyalar, α_0 va α_1 lar berilgan o'zgarmaslardir.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz.

$$t = t_i = i\Delta t \qquad i = 1,2,...$$

$$y(t_i) = y_i, \quad b(t_i) = b_i, \quad f(t_i) = f_i$$

$y(t_i + \Delta t)$ funksiyani Δt ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz. Δt^2 -ga ega bo'lgan hadlar bilan chegaralanib, quyidagi taqribiy ifodaga ega bo'lamiz.

$$y(t_i - \Delta t) = y_{i-1} = y_i - \Delta t\, y_i + \frac{\Delta t^2}{2} y_i$$

$$y(t_1 + \Delta t) = y_{i+1} = y_i + \Delta t\, y_1 + \frac{\Delta t^2}{2} y_i \tag{2.16}$$

Bu munosabatlarni qo'shib, y_i uchun quyidagi ayirmalarni hosil qilamiz.

$$y_i = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \qquad (2.17)$$

(2.14) tenglamani $t=t_i$ uchun yozamiz

$$y_i + b_i y_i = f_i \qquad (2.18)$$

(2.17) ni (2.18) ga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{1}{\Delta t^2}(f_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + b_i y_i = f_i$$

$$y_{i+1} = (f_i - b_i y_i)\Delta t^2 + 2y_i - y_{i-1} \qquad (2.19)$$

(2.19) ifoda (2.14) va (2.15) masalalarni yechish uchun chekli ayirmalar usulining algoritmi bo‘lib hisoblanadi. (2.15) va (2.16) boshlang‘ich shartlardan quyidagini hosil qilamiz.

$$y_0 = a_0, y_1 = a_0 + \Delta t a_1 \qquad (2.20$$

y_0, y_1 larning aniq qiymatlari uchun (2.19) formula ketma-ket barcha $y_2, y_3,$ … larni topishga imkon beradi.

Nazorat savollari

1. Koshi masalasining chegaraviy masaladan farqi nimada.
2. Runge-Kutta usulidan foydalanish uchun differensial tenglamaning standart yozuvi qanday ko‘rinishga ega?
3. 2- va 4- tartibli Runge-Kutta usulining algoritmi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Runge-Kutta usuli uchun chekli ayirmalar munosabati qanday ko‘rinishga ega?
5. Koshi masalasini yechish uchun chekli ayirmalar algoritmi qanday ko‘rinishga ega?

Kalit so‘zlari

Koshi masalasi. Boshlang‘ich shart bilan berilgan masala Koshi masalasi deyiladi. Aviatsiya konstruksiyasi elementlarining barcha dinamik masalalarining diskret modellari Koshi masalasini yechishga keltiriladi.

1- tartibli differensial tenglama uchun ular,

$$\left.\begin{array}{l} BU + AU = f(t) \\ U(0) = a_0 \end{array}\right\}$$

2- tartibli differensial tenglama uchun quyidagicha bo‘ladi.

$$\left.\begin{array}{l} MU + BU + AU = f(t) \\ U(0) = a_{0,} U(0) = a_1 \end{array}\right\} \text{kabi}$$

3- tartibli differetsial tenglama uchun esa, quyidagicha bo‘ladi.

$$\left.\begin{array}{l} CU + MU + BU + AU = f(t) \\ U(0) = a_{0,} U(o) = a_{1,}\ U(0) = a_2 \end{array}\right\}$$

Chegaraviy masala. Koshi masalasi bitta nuqtada berilgan qo‘shimcha shartli differensial tenglama bilan aniqlanib, chegaraviy masala esa, kamida ikki nuqtada berilgan shartli differensial tenglama bilan aniqlanadi.

Aviatsiya konstruksiyasi elementlarining barcha statik masalalari chegaraviy masalalarni yechishga keltiriladi.

Masalan, 2-chi tartibli differensial tenglama uchun

$$\left.\begin{array}{l} MU + BU + AU = f(t), \\ U(t_0) + \gamma_1 U(t_0) = \beta_1, \\ U(t_1) + \gamma_2 U(t_1) = \beta. \end{array}\right|$$

kabi bo‘lib,

4-chi tartibli differensial tenglama uchun

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2}{dx^2}(a_1(x)\frac{d^2u}{dx^2})+a_2(x)U=f(x)\\ u=\frac{du}{dx}\end{array}\right| = 0, x = 0 \partial a$$

$$U=\frac{d^2u}{dx^2}=0, \quad x=0 \partial a$$

ёки

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2}{dx^2}(a_1(x)\frac{d^2u}{dx^2})+a_2(x)U=f(x)\\ U=\frac{du}{dx}=0,\ x=0\partial a\\ \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^3u}{dx^3}=0;\ x=0\ \partial a\end{array}\right|$$

kabi yoziladi.

Standart yozuv. Quyidagicha ko'rinishdagi boshlang'ich shart bilan berilgan ixtiyoriy tartibli differensial tenglamalar tizimi

$$\left.\begin{array}{l}y(t)=f(t,y)\\ y(0)=\alpha_0\end{array}\right\}$$

Runge-Kutta usulidan foydalanish uchun standart yozuv deb yuritiladi.

Teylor qatoriga yoyish. Chekli ayirmalar yordamida y_t *ва* y_t hosilalarni approksimatsiyalash uchun har qanday $y(t_i-\Delta t)=y_{i-1}$, $y(t_i+\Delta t)=y_{i+1}$ funksiyalarni Δt ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga quyidagicha yoyiladi:

$$y_{i-1}=y_i-\Delta t\, y_i+\frac{\Delta t^2}{2!}y_i-\frac{\Delta t^3}{3!}y_i+\dots$$

$$y_{i+1}=y_i+\Delta t\, y_i+\frac{\Delta t^2}{2!}y_i+\frac{\Delta t^3}{3!}y_i+\dots$$

Masalan

$$y_i=\frac{y_{i-1}-y_i}{\Delta t}+0(\Delta t),\quad y_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}+0(\Delta t).$$

$$y_i=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta t^2}+0(\Delta t^2)$$

1. $y_i = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$,
2. $y_i + b_i y_i = f_i$,
3. $y_{i+1} = y_i + \Delta t y_i + \frac{\Delta t^2}{2} y_i$,
4. $y_{i-1} = y_i + \Delta t \cdot y_i + \frac{\Delta t^2}{2} y_i$,
5. $y_{i+1} = (t_i - b_i y_i)\Delta t^2 + 2y_i - y_{i-1}$.

3- Ma'ruza

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining aniq yechimini qurish usuli. Matritsaning simmetriklik sharti. Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli

Reja

1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining aniq yechimini qurish usuli.
2. Matritsaning simmetriklik sharti.
3. Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli

Kalit so'zlari: Erkinlik darajasi soni, ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash.

Chekli erkinlik darajasiga ega bo'lgan aviatsiya konstruksiyalari elementlarining barcha dinamik masalalarining diskret modeli quyidagi Koshi masalasini yechishga keltiriladi.

$$M U(t) + AU(t) = f(t) \tag{3.1}$$

$$U(0) = \alpha_0,\ U(0) = \alpha_1 \tag{3.2}$$

bu yerda

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} \dots m_{1n} \\ m_{n1} \dots m_{nn} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_n(t) \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$\alpha_0\ \alpha_1$ -berilgan vektorning koordinatalari.

(3.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (3.1) tenglamaning yechimini topish talab etiladi.

Qaralayotgan tizim matritsasini simmetrik deb hisoblaymiz, ya'ni:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Eslatib o'tamizki, n o'lchovli siimmetrik A matritsa n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan xos vektorlarga ega edi. Faraz qilaylik, dastlabki hisoblashlar natijasida tebranishlarning xos chastotalari bilan xos tebranishlarining ifodalar topilgan bo'lsin. Xos chastotalarni

$$w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq \ldots \leq w_n$$

kabi joylashtirib, ularga mos keluvchi tebranishlarning ko'rinishlarini $W_1 W_2,..W_n$ orqali belgilaylik.

Faraz qilaylik ular uchun quyidagi munosabat bajariladigan bo'lsin ya'ni:

$$W_i^T A W_j = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ w_i^2 & (i \neq j) \end{cases} \tag{3.3}$$

va mos ravishda quyidagi munosabat ham o'rinli bo'lsin

$$W_i^T A W_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ w_i^2 & (i = j) \end{cases} \tag{3.4}$$

(3.1) tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz.

$$U(t) = Z_1(t)W_1 + Z_2(t)W_2 + \ldots + Z_n(t)W_n = W\,Z(t) \tag{3.5}$$

agar bu yerda,

$$W = (W_1, W_2, \ldots, W_n)$$
$$Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$$

ekanliklarini inobatga olsak, (3.5) ni (3.1) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$MW\,Z(t) + AW\,Z(t) = f(t)$$

Buni chap tomondan W^{t} ga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$W^T M W \ddot{Z}(t) + W^T A W Z(t) = W^T f(t) \qquad (3.6)$$

(3.3) va (3.4) ortogonal almashtirishlarni e'tiborga olsak,

$$E\ddot{Z}(t) + \Omega^2 Z(t) = F(t) \qquad (3.7)$$

tenglamaga ega bo'lamiz bu yerda

$$F(t) = W^T f(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t))^T$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Omega^2 = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & w_2^2 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & w_n^2 \end{bmatrix}$$

(3.7) tenglama quyidagi n – ta ajraluvchi differensial tenglamalarga ekvivalentdir.

$$\ddot{Z}_i(t) + w_i^2 Z(t) = F_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad (3.8)$$

Vaqtning boshlang'ich holati t=0 da $U(0) = \alpha_0$, $\dot{U}(0) = \alpha$ lar ma'lum bo'lganliklari uchun (3.8) tenglamani integrallash uchun, α_0 *ва* α_1 *ни* $Z_i(0)$ *ва* $\dot{Z}_i(0)$orqali ifodalash zarur bo'ladiki, Buni (3.5) tenglikdan kelib chiqqan holda amalga oshirish mumkin. Uni chapdan $W^T M$ ga ko'paytirib va $W^T M W$ birlik matritsa ekanligini e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$Z(0) = W^T M U(0)$$

Bundan esa.

$$Z(0) = W^T M U(0), \quad \dot{Z}(0) = W^T M \dot{U}(0)$$

kelib chiqadi. Bu yerdan talab qilingan ifodalarni hosil qilamiz.

$$Z_i(0) = W_i^T M \alpha_0 = a_{0n}, \quad \dot{Z}_i(0) = W_i^T M \alpha_1 = \alpha_{1i}J \qquad (3.9)$$

Ushbu usul, p- ta erkinlik darajasiga ega bo'lgan tebranishlar haqidagi masalani erkinlik darajasi bitta bo'lgan tebranishlar haqidagi masalaga olib kelish usullaridan biridir. (3.9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi.

(3.8) tenglamaning aniq yechimi ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuliga asosan va quyidagicha yoziladi

$$Z_i(t)=Z_i(0)\cos\omega_i t+\frac{Z_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t+\frac{1}{\omega_i}\int_0^t F_i(t)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (3.10)$$

(3.10) ni (3.5) ga qo‘yib, (3.1) tenglamaning (3.2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini hosil qilamiz.

Agar n- erkinlik darajasiga ega bo‘lgan mexanik tizimlar tebranishlari erkinlik darajasi bitta bo‘lgan tebranishlar haqidagi masalaga keltirilsa, ya’ni:

$$Z_i(t)+\omega_i^2 Z_i(t)=F_j(t)\ , \qquad i=1,n \qquad (3.11)$$

$$Z_i(0)=\alpha_{0i}, \qquad Z_i(0)=\alpha_{1i} \qquad (3.12)$$

yoki

$$Z(t)+\omega^2 Z(t)=F(t). \qquad (3.13)$$

$$Z(0)=\alpha_0,\ Z(0)=\alpha_1 \qquad 3.14)$$

bunday tenglamalarni yechish uchun ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanish mumkin. Avval, tenglamasi

$$Z(t)+\omega^2 Z(t)=0 \qquad (3.15)$$

kabi ko‘rinishda bo‘ladigan tizimning erkin tebranishlar sonini ko‘rib chiqamiz. Bu bir jinsli tenglamaning yechimini, $Z=Ce^{kt}$ ko‘rinishida izlaymiz. Uni (3.15) ga qo‘yib, k ga nisbatan quyidagi xarakteristik tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$k^2+\omega^2=0$$

Bu tenglamaning $k_1=-i\omega$ ва $k_2=i\omega$ kabi ildizlari orqali (3.15) tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz.

$$Z=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t \qquad (3.16)$$

$$C_1=C_1(t),\ C_2=C_2(t)$$

deb faraz qilib, (3.16) ni t bo‘yicha differensiallaymiz.

$$\dot{Z} = \dot{C}_1 \cos\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t - \omega(C_1 \sin\omega t - C_2 \cos\omega t) \tag{3.17}$$

$$\dot{C}_1 \cos\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t = 0 \tag{3.18}$$

deb faraz qilib, (3.18) ni differensiallaymiz va quyidagini hosil qilamiz.

$$\ddot{Z} = -\omega(\dot{C}_1 \sin\omega t - \dot{C}_2 \cos\omega t) - \omega^2(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \tag{3.19}$$

(3.16) va (3.19) ni (3.13) tenglamaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$-\dot{C}_1 \sin\omega t + \dot{C}_2 \cos\omega t = 1/\omega F(t) \tag{3.20}$$

(3.18) va (3.20) tenglamalar tizimini $\dot{C}_1$ ва $\dot{C}_2$ ga nisbatan yechib, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\dot{C}_1 = -1/\omega F(t)\sin\omega t, \dot{C}_2 = 1/\omega F(t)\cos\omega t \tag{3.21}$$

yoki

$$C_1 = Z(0) - 1/\omega \int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

$$C_2 = 1/\omega[\dot{Z}(0) + \int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau d\tau]$$

C_1 ва C_2 ni (3.17) ga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$Z(t) = [Z(0) - 1/\omega \int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau dt]\cos\omega t + 1/\omega[\dot{Z}(0) + \int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau d\tau]\sin\omega t$$

$$= Z(0)\cos\omega t + \dot{Z}(0)/\omega \sin\omega t + 1/\omega \int_0^t F(\tau)[\cos\omega\tau \sin\omega t - \sin\omega\tau \cos\omega t] d\tau$$

yoki

$$Z(t) = Z(0)\cos\omega t + \dot{Z}(0)/\omega \sin\omega t + 1/\omega \int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau) d\tau \tag{3.22}$$

(3.22) da $Z = Z_i$, $\omega = \omega_i$, $F = F_i$ deb faraz qilib, (3.11) tenglamaning yechimini topamiz.

$$Z_i(t) = Z_i \cos\omega_i t + \dot{Z}_i(0)/\omega_i \sin\omega_i t + 1/\omega_i \int_0^t F_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau) d\tau .$$

Nazorat savollari

1. Simmetrik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
2. Simmetrik matritsa qanday xossalarga ega?
3. Ortogonal almashtirish deganda qanday almashtirishni tushunasiz?
4. p-ta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tebranishlar haqidagi masalani erkinlik darajasi bir bo‘lgan tebranishlar haqidagi masalaga olib kelishdagi maqsad nimadan iborat?

Kalit so‘zlar

Erkinlik darajasi soni. Mexanik tizimlar tebranishida erkinlik darajasi deb, tizimning barcha nuqtalarining vaziyatini bir qiymatli aniqlovchi o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar soniga aytiladi. (1) tizimda o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan koordinatalar soni p ga teng,
ya’ni,

$$U_1(t), U_2(t), \dots U_n(t)$$

Ma’lumki, ixtiyoriy deformatsiyalanuvchi jism cheksiz ko‘p erkinlik darajasiga ega. (Ammo darajalari chegaralangan bo‘ladi).

Odatda, mavjud adabiyotlarda ixtiyoriy vaqtda tizimning holatini to‘liq xarakterlaydigan bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tizimlar qaraladiki, bunday masalalarni yechish erkinlik darajasi ko‘p bo‘lgan tizimlarga nisbatan ancha oson bo‘ladi.

Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash. Agar n- erkinlik darajasiga ega bo‘lgan mexanik tizimlar tebranishlari erkinlik darajasi bitta bo‘lgan tebranishlar haqidagi masalaga keltirilsa, ya’ni:

$$Z_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = F_j(t) \ , \qquad i = 1, n$$
$$Z_1(0) = \alpha_{0i}, \qquad Z_i(0) = \alpha_{1i}$$

yoki

$$Z(t) + \omega^2 Z(t) = F(t),$$
$$Z(0) = \alpha_0, \ Z(0) = \alpha_1$$

Bu holdagi bunday tenglamalarni yechish uchun ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanish mumkin.

4- ma'ruza

2-chi tartibli integralli -differensialli tenglamalarni darajali qatorlar usuli bilan yechish. Erkin va majburiy tebranishlar haqidagi masalalarni kvadratura formulalariga asoslangan usullardan foydalanib yechish

Reja

1. Elastik va to'liq elastik bo'lmagan materialdan iborat bo'lgan aviatsiya konstruksiyalari elementlarning erkin va majburiy tebranishlari haqidagi masala.

2. Darajali qatorlar usuli.

3. Erkin va majburiy tebranishlar haqidagi masalalarni kvadratura formulalariga asoslangan usullardan foydalanib yechish.

Kalit so'zlar: Bitta erkinlik darajasiga ega bo'lgan konstruksiya elementlari. Integralli- differensialli tenglamalar.

Tashqi kuch ta'siri natijasida hosil bo'ladigan konstruksiya elementlarining tebranishlarini majburiy tebranishlar deb yuritiladi.

Uchish apparatlari dvigateli qurilmalarining ishlashi, gaz bosimi va shamol bunday kuchlar manbai hisoblanadi.

Konstruksiya elementlarining faqat boshlang'ich qo'zg'atovchi kuch ta'sirida bo'ladigan tebranishlari xususiy tebranishlar deb ataladi.

Agar tashqi kuch ta'sirida hosil bo'lgan deformatsiya, kuch olingandan keyin o'zining dastlabki holatiga to'liq qaytsa, bunday uchish apparatlari konstruksiyasi elementlari materiali ideal elastik deyiladi. Aslida esa tashqi kuch ta'sirida deformatsiya vaqt davomida o'sadi. Konstruksiyaning bunday materiali to'liq bo'lmagan elastik material deyiladi. Barcha kompozitsion materiallar bunday hususiyatga egadir. Shuning uchun materialning bunday xususiyatini hisobga olmaslik noaniq natijalarga olib keladi.

Ideal elastik materialdan tayyorlangan konstruksiya elementlarining majburiy tebranishlari haqidagi bitta erkinlik darajasiga ega bo'lgan masalaning matematik modeli quyidagi differensial tenglamani

$$\ddot{U}(t) + b(b)U(t) = f(t) \tag{4.1}$$

$$U(0) = a_0, \quad \dot{U}(0) = a_1 \tag{4.2}$$

kabi boshlang'ich shartlarga nisbatan yechishga keltiriladi.

Majburiy tebranish bo'lgan holatda

$$f(t)\neq 0, \qquad a_0=a_1=0$$

erkin tebranish bo'lgan holatda

$$f(t)=0, \qquad a_0\neq 0, \qquad a_1\neq 0$$

bo'ladi.

Agar konstruksiya elementlari to'liq bo'lmagan elastik materialdan ishlangan bo'lsa, u holda uchish apparatlari elementlarining majburiy tebranishlari haqidagi masala quyidagi boshlang'ich shartlar bilan berilgan integral- differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

$$\ddot{U}(t)+b\left[U(t)-\int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau\right]=f(t) \tag{4.3}$$

boshlang'ich shartlari

$$U(0)=a_0, \qquad \dot{U}(0)=a_1 \tag{4.4}$$

bu yerda b – ma'lum o'zgarmas, $R(t-\tau)$- relaksatsiya yadrosi eksperiment yordamida aniqlanadi.

$$R(t-\tau)=Ae-\beta(t-\tau) \tag{4.5}$$

funksiyaning grafigi quyidagi ko'rinishiga ega.

Uchish apparatlari konstruksiyalari elementlarining erkin va majburiy tebranishlari haqidagi masalani yechish usullarini ko'rib chiqamiz.

Darajali qatorlar usuli

(4.2) boshlang'ich shart bilan berilgan (4.1) tenglamani qaraymiz. Faraz qilaylik, b(t) va f(t) funksiyalar biror $t\in[0,\tau]$ oraliqda yaqinlashuvchi darajali qator ko'rinishida ifodalangan bo'lsin, ya'ni

$$b(t)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \qquad f(t)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i \tag{4.6}$$

bu yerda b_i *va* f_i- ma'lum o'zgarmaslar.

U holda (4.1) tenglamaning yechimini darajali qatorlar usuliga asosan quyidagi ko‘rinishda izlaymiz.

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k \tag{4.7}$$

bu yerda $a_i$aniqlanishi lozim bo‘lgan noma’lum o‘zgarmaslar.

Birinchi 2 ta o‘zgarmasni a_0 *va* a_1 larni (4.2) shartdan topamiz, ya’ni $a_0=\alpha_0$, $\alpha_1=\alpha_1$.(4.7) ni differensiallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\dot{U}(t)=\sum_{K=1}^{\infty}Ka_k t^{k-1} \tag{4.8}$$

$$\ddot{U}(t)=\sum_{K=2}^{\infty}K(K-1)a_k t^{k-2}$$

$\kappa-2=i$ deb belgilash kiritib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\ddot{U}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)a_{i+2}t^i \tag{4.9}$$

(4.6), (4.7) va (4.9) ni (4.1) ga qo‘yib, darajali qatorlarni ko‘paytirish formulasidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz.

$$b(t)U(t)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i t^i\sum_{i=0}^{\infty}a_k t^k=\sum_{i=0}^{\infty}C_i t^i \tag{4.10}$$

Topilgan (4.9), (4.10) munosabatlarni (4.1) tenglamaga qo‘yib va ularni gruppalab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[(i+2)(i+1)a_{i+2}+C_i\right]t^i=\sum_{i=0}^{\infty}f_i t^i \tag{4.11}$$

(4.11)da t ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsentlarni tenglashtirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$(i+2)(i+1)a_{i+1}+c_i=f_i$$

$$a_{i+2}=\frac{1}{(i+1)(i+2)}\left[f_i-\sum_{k=0}^{i}b_k a_{ik}\right]$$

$f(t), b_i, a_0, a_1$ larning aniq qiymatlarida (4.2) rekkurent formulalar $a_i\ i=2,3$ koeffitsentlarning hammasini ketma-ket aniqlaydi.

Topilgan a_i ning qiymatlarini (4.7) ga qo‘yib, (4.2) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (4.1) tenglamaning yechimini topamiz.

2. Elastik va to'liq elastik bo'lmagan materiallardan yasalgan elementlarning tebranishlari haqidagi masalani kvadratura formulalariga asoslangan usulda yechishni ko'rib chiqamiz

a) Avval elastik materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining tebranishi haqidagi masalani ko'rib chiqamiz. Uning uchun quyidagi Koshi masalasini qaraymiz.

$$\ddot{U}(t)+b(t)U(t)=f(t) \tag{4.12}$$

$$U(0)=\alpha_0, \quad \dot{U}(0)=\alpha_1 \tag{4.13}$$

(4.12) tenglamani 0 dan t gacha integrallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\dot{U}(t)-\dot{U}(0)+\int_0^t b(t)U(t)dt=\int_0^t f(t)dt$$

yoki (4.13) ga asosan

$$\dot{U}(t)+\int_0^t b(t)U(t)dt=\int_0^t f(t)dt+\alpha_1 \tag{4.14}$$

(4.14) ni integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$U(t)-U(0)+\int_0^t\int_0^t b(t)U(t)dt\,dt=\int_0^t\int_0^t f(t)dt\,dt+\alpha_1 t$$

yoki

$$U(t)+\int_0^t\int_0^t b(t)U(t)dt\,dt=\int_0^t\int_0^t f(t)dt\,dt+\alpha_1 t+\alpha_0 \tag{4.15}$$

Matematik analiz kursidan ma'lumki

$$\int_0^t\int_0^t \cdots \int_0^t \phi(t)dt\ldots dt=\int_0^t \frac{1}{(n-1)}(t-\tau)^{n-1}\phi(\tau)d\tau \quad \text{(n marta)}$$

bu formuladan foydalanib, (4.15) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$U(t)+\int_0^t (t-\tau)b(\tau)d\tau=\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau+\alpha_1 t+\alpha_0$$

yoki

$$U(t)=F(t)-\int_0^t (t-\tau)b(\tau)U(\tau)d\tau \tag{4.16}$$

bu yerda

$$F(t)=\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau+\alpha_1 t+\alpha_0$$

Kvadratura formulasini (4.16) integral tenglamani yechishga qo'llash uchun t ning $t = t_n = n\Delta t$ $(n = 1,2,\ldots)$ kabi belgilangan qiymatlarida. berilgan (4.16) tenglamadan hosil qilingan quyidagi ifodadan foydalanish zarur.

$$U(t_n) = F(t_n) - \int_0^{t_n} (t_n - \tau) b(\tau) U(\tau) d\tau \tag{4.17}$$

$$U(t_n) = U_n, \; F(t_n) = F_n, \; b(t_n) = b_n$$

belgilashlar kiritamiz. U holda (4.17) dan quyidagini hosil qilamiz.

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - \tau) b(\tau) U(\tau) d\tau \tag{4.18}$$

(4.18) ga kiruvchi integralni trapetsiya formulasi bilan hisoblaymiz, ya'ni

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - \tau) b(\tau) U(t) d\tau = \frac{\Delta t}{2}\left[(t_n - t_i) b_i U_i + (t_n - t_{i-1}) b_{i-1} U_{i-1}\right]$$

va quyidagini hosil qilamiz.

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i (t_n - t_i) b_i U_i, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.19}$$

$$A_1 = \frac{\Delta t}{2}, \; A_i = h, \; i = 2, \; n-1$$

(4.19) rekkurent formula $U_1 = U(t_1), U_2 = U(t_2), \ldots, U_n = U(t_n)$ larning sonli qiymatlarini ketma-ket topish imkonini beradi.

b)Yuqorida bayon qilingan usulni ikkinchi tartibli integral – defferensial tenglamalarni yechish uchun ham osonlik bilan umumlashtirish mumkin:

$$\ddot{U}(t) + b\left[U(t) - \int_0^t R(t-\tau) U(\tau) d\tau\right] = f(t) \tag{4.20}$$

va boshlang‘ich shartlari

$$U(0)=\alpha_0, \quad U(0)=\alpha_1 \tag{4.21}$$

(4.21) boshlang‘ich shartlarni e’tiborga olgan holda (4.20) tenglamani ikki marta integrallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$U(t)+b\int_0^t \Gamma(t-\tau)U(\tau)d\tau = F(t) \tag{4.22}$$

bu yerda

$$\Gamma(t-\tau)=(t-\tau)-\int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)R(s)ds$$

$$F(t)=\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau+\alpha_1 t+\alpha_0 \tag{4.23}$$

(a) bandda bayon qilingan usulga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$Un=Fn-\sum_{i=1}^{n-1}A_i\Gamma(t_n-t_i)U_i \qquad i=1,2,\ldots\ldots \tag{4.24}$$

bu yerda

$$\Gamma(t_n-t_i)=b\left[(t_n-t_i)-\int_0^{t_n-t_i}(t_n-\tau_i-s)R(s)d\tau\right]$$

$$A_1=\frac{\Delta t}{2} \qquad A_i=\Delta t \qquad i=1,n-1$$

(4.25) rekurrent formula (4.21) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (4.20) integral – differensial tenglamani sonli yechishni ketma – ket topishga imkon beradi.

$$U_1=U(t_1),\ U_2=U(t_2),\ldots\ldots,\ U_n=U(t_n)$$

Nazorat savollari

1. Integral -differensial tenglamalarni yechish uchun darajali qator usulining algoritmi qanday ko‘rinishga ega?

2. Ideal elastik materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining majburiy tebranishi haqidagi masalani yechish uchun kvadratura formulasiga asoslangan usul algoritmi qanday ko‘rinishiga ega?
3. To‘liq elastik bo‘lmagan materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining majburiy tebranishi haqidagi masalani yechish uchun kvadratura formulasiga asoslangan usul algoritmi qanday ko‘rinishiga ega?

4. Uchish apparatlari elementlarining materiallaridan qaysilari ideal elastik, qaysilari to‘liq bo‘lmagan elastik deyiladi.
5. Qanday hollarda konstruksiya elementlarining tebranishi majburiy, qanday hollarda esa hususiy bo‘ladi.
6. Ideal elastik materialli konstruksiya elementlari tebranishi haqidagi masalani yechish uchun darajali qatorlar usulining algoritmi qanday ko‘rinishda bo‘ladi.

Kalit so‘zlar

Bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan konstruksiya elementlari. Bu yerda vaqtning har qanday momentida bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan konstruksiya elementlari holatini to‘liq harakterlaydigan tebranishlar qaraladi.

p-ta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tebranishlar qaralayotgan holatda 3-chi ma’ruzada ko‘rsatilgan usul yordamida har doim bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tenglamalar tizimi masalasiga keltiriladi.

Integralli-differensialli tenglamalar. Agar tenglamada noma’lum differensial belgisi yoki integral belgisi ostida joylashgan bo‘lsa, u holda bunday tenglamalar integral differensial tenglamalar deb ataladi.

5 –Ma’ruza

2-chi tartibli integral-differensial tenglamalarni darajali qatorlar usuli bilan yechish. Erkin va majburiy tebranishlar haqidagi masalalarni kvadratura formulalariga asoslangan usullardan foydalanib yechish

Reja

1. 2- chi tartibli integral-differensial tenglamalarni yechish uchun darajali qatorlar usulini qo‘llash.
2. Elastik va to‘liq elastik bo‘lmagan uchish apparatlari konstruksiyasi elementlarning erkin va majburiy tebranishlari haqidagi masalalarini kvadratura formulalariga asoslangan usullardan foydalanib yechish .

Kalit so‘zlar: Rekurrent formulalar. Integral tenglama.

1. To'liq elastik bo'lmagan materiallardan yasalgan barcha konstruksiya elementlarining dinamik masalalari boshlang'ich shartlari bilan berilgan quyidagi integral – differensial tenglamalarni yechishga keltiriladi.

$$\ddot{U}(t)+b\left[U(t)-\int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau\right]=f(t) \qquad (5.1)$$

$$U(0)=a_0, \qquad \dot{U}(0)=a_1 \qquad (5.2)$$

Agar $R(t-\tau)$ va $f(t)$ funksiyalarni quyidagi yaqinlashuvchi darajali qatorlar ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa ya'ni:

$$R(t-\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}R_i(t-\tau)^i,\ f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f_it^i \qquad (5.3)$$

o'tgan ma'ruzada bayon qilingan, darajali qatorlar usulini (5.1) integral – differensial tenglamani yechishga qo'llash mumkin bo'ladi.

Quyidagi ayniyat o'rinli ekanligini inobatga olsak,

$$\int_0^t\sum_{s=1}^{\infty}R_i(t-\tau)^i\sum_{i=0}^{\infty}a_{0i}\tau^i d\tau=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{i}(a_{s-1}R_{i-s}B(i-s+1,s)\right)t^i=\sum_{i=0}^{\infty}c_it^i \qquad (5.4)$$

bu yerda

$$B(i-s+1,s)=\frac{(i-s)!(s-1)!}{i!},\ c_i=\sum_{s=1}^{i}a_{s-1}R_{i-s}B(i-s+1,s)$$

(2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (5.1) integral – differensial tenglamaning yechimini qo'yidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k,\quad a_0=\alpha_0,\ a_1=\alpha_1 \qquad (5.5)$$

undan:

$$\ddot{U}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)a_{i+2}t^i \qquad (5.6)$$

(5.3), (5.5) va (5.6) larni (5.1) ga qo'yib, (5.4) ayniyatidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\{(i+2)(i+1)a_{i+2}+b[a_i-c_i]\}t^i=\sum_{i=0}^{\infty}f_it^i \qquad (5.7)$$

Bu yerdan, t ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirib, noma'lum a_i koeffitsientlarni aniqlash uchun rekurrent formulani hosil qilamiz.

$$a_{i+2} = \frac{1}{(i+2)(i+1)}\left\{f_i - b\left[a_i - \sum_{s=1}^{i} a_{s-1} R_{i,s} B(i-s+1,s)\right]\right\} \tag{5.8}$$

$a_0 = \alpha_0,\quad a_1 = \alpha_1,\quad i = 1,2,3,\ldots$

Mazkur formula bo'yicha a_i larni hisoblab, ularni (5.5) ga qo'yib, (5.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (5.1) integral – differensial tenglamaning aniq yechimini topamiz.

2. Endi ideal elastik va to'lik elastik bo'lmagan materiallardan yasalgan elementlarning tebranishlari haqidagi masalani kvadratura formulalariga asoslangan usulda yechishni ko'rib chiqamiz.

*a)*Avval ideal elastik materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining tebranishi haqidagi masalani ko'rib chiqamiz. Uning uchun quyidagi Koshi masalasini qaraymiz.

$$\ddot{U}(t) + b(t)U(t) = f(t) \tag{5.9}$$

$$U(0) = \alpha_0,\quad \dot{U}(0) = \alpha_1 \tag{5.10}$$

(5.9) tenglamani 0 dan t gacha integrallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\dot{U}(t) - \dot{U}(0) + \int_0^t b(t)U(t)dt = \int_0^t f(t)dt$$

yoki (5.10) ga asosan

$$\dot{U}(t) + \int_0^t b(t)U(t)dt = \int_0^t f(t)dt + \alpha_1 \tag{5.11}$$

(5.11) ni integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$U(t) - U(0) + \int_0^t\int_0^t b(t)U(t)\,dt\,dt = \int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\,dt + \alpha_1 t$$

yoki

$$U(t) + \int_0^t\int_0^t b(t)U(t)\,dt\,dt = \int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\,dt + \alpha_1 t + \alpha_0 \tag{5.12}$$

Matematik analiz kursidan ma'lumki

$$\int_0^t\int_0^t \dots \int_0^t \phi(t)dt \dots dt = \int_0^t \frac{1}{(n-1)}(t-\tau)^{n-1}\phi(\tau)dt \qquad \text{(n marta)}$$

bu formuladan foydalanib, (5.12) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$U(t) + \int_0^t (t-\tau)b(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0$$

yoki

$$U(t) = F(t) - \int_0^t (t-\tau)b(\tau)U(\tau)d\tau \qquad (5.13)$$

bu yerda

$$F(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Kvadratura formulasini (5.13) integral tenglamani yechishga qo'llash uchun t ning $t = t_n = n\Delta t \quad (n = 1,2,\dots\dots)$ kabi belgilangan qiymatlarida, berilgan (5.13) tenglamadan hosil qilingan quyidagi ifodadan foydalanish zarur.

$$U(t_n) = F(t_n) - \int_0^{t_n} (t_n-\tau)b(\tau)U(\tau)d\tau \qquad (5.14)$$

$U(t_n) = U_n$, $F(t_n) = F_n$, $b(t_n) = b_n$ belgilashlar kiritamiz. U holda (5.14) dan quyidagini hosil qilamiz.

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n-\tau)b(\tau)U(\tau)d\tau \qquad (5.15)$$

(5.15) ga kiruvchi integralni trapetsiya formulasi bilan hisoblaymiz, ya'ni

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - \tau)b(\tau)U(t)d\tau = \frac{\Delta t}{2}\left[(t_n - t_i)b_i U_i + (t_n - t_{i-1})b_{i-1}U_{i-1}\right]$$

va quyidagini hosil qilamiz.

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i(t_n - t_i)b_i U_i, \qquad n = 1,2,\dots\dots \qquad (5.16)$$

$$A_1 = \frac{\Delta t}{2},\ A_i = h,\ i = 2.\ n-1$$

(5.16) rekurrent formula $U_1 = U(t_1), U_2 = U(t_2), \dots, U_n = U(t_n)$ larning sonli qiymatlarini ketma-ket topish imkonini beradi.

b)Yuqorida bayon qilingan usulni ikkinchi tartibli integral – differensial tenglamalarni yechish uchun ham osonlik bilan umumlashtirish mumkin:

$$\ddot{U}(t)+b\left[U(t)-\int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau\right]=f(t) \qquad (5.17)$$

va boshlang'ich shartlari

$$U(0)=\alpha_0, \quad \dot{U}(0)=\alpha_1 \qquad (5.18)$$

(5.18) boshlang'ich shartlarni e'tiborga olgan holda (5.17) tenglamani ikki marta integrallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$U(t)+b\int_0^t \Gamma(t-\tau)U(\tau)d\tau=F(t) \qquad (5.19)$$

bu yerda

$$\Gamma(t-\tau)=(t-\tau)-\int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)R(s)ds$$

$$F(t)=\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau+\alpha_1 t+\alpha_0 \qquad (5.20)$$

(a) bandda bayon qilingan usulga asosan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$Un=Fn-\sum_{i=1}^{n-1}A_i\Gamma(t_n-t_i)U_i \qquad i=1,2,\dots \qquad (5.21)$$

bu yerda

$$\Gamma(t_n-t_i)=b\left[(t_n-t_i)-\int_0^{t_n-t_i}(t_n-\tau_i-s)R(s)d\tau\right]$$

$$A_1=\frac{\Delta t}{2} \qquad A_i=\Delta t \qquad i=\overline{1,n-1}$$

(5.21) rekurrent formula (5.18) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi (5.17) integral - differensial tenglamani sonli yechishni ketma - ket topishga imkon beradi.

$$U_1=U(t_1),\ U_2=U(t_2),\dots\dots,\ U_n=U(t_n)$$

Nazorat savollari

1. Integral -differensial tenglamalarni yechish uchun darajali qator usulining algoritmi qanday ko'rinishga ega?
2. Ideal elastik materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining majburiy tebranishi haqidagi masalani yechish uchun kvadratura formulasiga asoslangan usul algoritmi qanday ko'rinishiga ega?

3. To‘liq elastik bo‘lmagan materialdan yasalgan konstruksiya elementlarining majburiy tebranishi haqidagi masalani yechish uchun kvadratura formulasiga asoslangan usul algoritmi qanday ko‘rinishiga ega?

Kalit so‘zlar

Rekurrent formulalar. a_i, a_{i-1} larning aniq qiymatlarida $a_{i\,2}$ ning qiymatini ham hisoblash mumkin bo‘ladigan formula rekurrent formula deyiladi.

Integral tenglama. Tarkibida integral ostida noma’lum funksiya qatnashgan tenglamani integral tenglama deyiladi.

6-ma’ruza

Chegaraviy masalalarni Koshi masalalariga keltirish usullari

Reja

1. Uchish apparatlari konstruksiyalari elementlarining chegaraviy masalalarini yechish usullari.
2. Superpozitsiya usuli
3. Boshlang‘ich parametrlar usuli.

Kalitso‘zlari: Turg‘un bo‘lmagan hisoblash algoritmi.Koshi masalasi.

Ma’lumki, chegaraviy masalalarni yechish jarayoni Koshi masalasini yechishga nisbatan murakkabdir. Shuning uchun ham ko‘p hollarda chegaraviy masalani yechish u yoki bu usul bilan Koshi masalasini yechishga keltiriladi.

Chegaraviy masalalarni Koshi masalalariga keltirishning ba’zi bir usullarini ko‘rib o‘tamiz.

Superpozitsiya usuli

Oddiy chiziqli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masala superpozitsiya usulida ikki yoki undan ortiq Koshi masalalariga keltiriladiki, ularni esa, yuqoridagi ko‘rib o‘tilgan usullardan biri yordamida yechiladi. So'ngra berilgan masalaning yechimi Koshi masalasining topilgan yechimlari kombinatsiyasi kabi aniqlanadi.

Aytaylik, ikkinchi tartibli differensial tenglama o'zining chegaraviy shartlari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$U(x)+a(x)U(x)+b(x)U(x)=f(x) \qquad (6.1)$$

$$U(0)=U_0, \qquad U(\ell)=U_\ell \qquad (6.2)$$

(6.1), (6.2) chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirish uchun U(x) funksiyani quyidagicha yozib olamiz.

$$U(x)=Y_1(x)+\mu Y_2(x) \qquad (6.3)$$

bu yerda μ- hozircha noma'lum o'zgarmas. (6.3) ni (6.1) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$[Y_1(x)+a(x)Y_1(x)+b(c)Y_1(x)-f(x)]+\mu[Y_2(x)+a(x)Y_2(x)+b(x)Y_2(x)]=0 \qquad (6.4)$$

(6.4) da har ikkala qo'shiluvchini 0 ga tenglab, ikkita tenglamani hosil qilamiz

$$Y_1(x)+a(x)Y_1(x)+b(x)Y_1(x)=f(x) \qquad (6.5)$$

$$Y_2(x)+a(x)Y_2(x)+b(x)Y_2(x)=0 \qquad (6.6)$$

(6.1) chegaraviy shart quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$Y_1(0)+\mu\, Y_2(0)=U_0 \qquad (6.7)$$

agar

$$Y_1(0)=U_0 \qquad Y_2(0)=0 \qquad (6.8)$$

deb faraz qilsak, u holda (6.7) bajariladi. x=0 deb qabul qilib (6.3) ni differensiallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$U(0)=Y_1(0)+\mu Y_2(0) \qquad (6.9)$$

Agar noma'lum chegaraviy qiymatlarni

$$Y_1(0)=0 \qquad Y_2(0)=1 \qquad (6.10)$$

deb olsak, u holda (6.8) dan μ ni topamiz.

$$U(0)=\mu \qquad (6.11)$$

shunday qilib. noma'lum o'zgarmas μ yetishmayotgan boshlang'ich qiymat bilan ustma-ust tushadi. (6.8) va (6.10) ga asoslanib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$y_1(0)=U_0, \quad y_1'(0)=0 \qquad (6.12)$$

$$y_2(0)=0, \quad y_2'(0)=1 \qquad (6.13)$$

(6.5), (6.12) va (6.6),(6.13) Koshi masalalarini yechib $y_1(\ell)$ *va* $y_2(\ell)$ larni topamiz. (6.3) ni (6.2) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$Y_1(\ell)+\mu y_2(\ell)=U_\ell$$

Bu yerdan noma'lum μ ni topamiz.

$$\mu=\frac{U_1-y_1(\ell)}{Y_2(\ell)} \qquad (6.14)$$

Boshlang'ich parametrlar usuli

Usulning mohiyatini (6.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (6.1) differensial tenglamaga nisbatan bayon etamiz.

Ushbu usulga asosan, avval quyidagi masalalarning yechimini ko'rib chiqamiz.

$$\left.\begin{array}{ll} y_1''(x)+a(x)y_1'+b(x)y_1(x)=f(x) & \\ y_1(0)=1, & y_1'(0)=0 \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_2''(x)+a(x)y_2'(x)+b(x)y_2(x)=f(x) & \\ y_2(0)=0, & y_2'(0)=1 \end{array}\right\} \qquad (6.16)$$

(6.1) tenglamaning yechimini (6.15) va (6.16) Koshi masalalarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalaymiz, ya'ni

$$U(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \qquad (6.17)$$

bu yerda C_1 *ва* C_2 - noma'lum o'zgarmaslar, $y_1(x)$ *ва* $y_2(x)$ mos ravishda (6.15) va (6.16) Koshi masalalarining yechimlaridir, (6.16) ni (6.2) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_1(0)+C_2 y_2(0)=U_0 \\ C_1 y_1(\ell)+C_2 y_2(\ell)=U_\ell \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

(6.18) algebraik tenglamalar tizimini yechib, noma'lum C_1 *va* C_2 larni topamiz, ya'ni $C_1=A$, $C_2=B$. Topilgan C_1 *va* C_2 ni (6.17) ga qo'yib, chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi (6.1) differensial tenglamaning yechimini topamiz.

Superpozitsiya va boshlang'ich parametrlar usuli jiddiy kamchiliklarga ega. Masalan, superpozitsiya usulida, agar $y_2(\ell)=0$ bo'lsa, u holda noma'lum o'zgarmas μ ni aniqlab bo'lmaydi, boshlang'ich parametrlar usulida esa, agar

$$D=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\ell) & y_2(\ell) \end{vmatrix}=0$$

bo'lsa, algebraik tenglamalar tizimida noma'lum C_1 *ва* C_2 larni aniqlab bo'lmaydi, ya'ni algebraik tenglamalar tizimi yechimga ega emas.

Shunday qilib, bu usullar algoritmi $y_2(\ell)$ va D larning kichik qiymatlarida turg'un bo'lmagan hisoblash algoritminini beradi.

Bunday hollarda chegaraviy masalalarni yechish uchun yuqoridagi kamchiliklardan holi bo'lgan boshqa usullardan foydalanish lozim.

Nazorat savollari

1. Qaysi hollarda chegaraviy masalalarni yechish uchun superpozitsiya usulidan foydalanish mumkin emas?
2. Qaysi hollarda chegaraviy masalalarni yechish uchun boshlang'ich parametrlar usulidan foydalanish mumkin emas?
3. Superpozitsiya usuli boshlang'ich parametrlar usulidan nimasi bilan farq qiladi

Kalitso'zlar

Turg'un bo'lmagan hisoblash algoritmi. Agar masalada mavjud parametrlarning etarlicha kichik o'zgarishi, yuqoridagi holda $y_2(\ell)$ va bu masala yechimini tubdan o'zgarishga olib kelsa, u holda masala yechimining hisoblash algoritmini turg'un emas deyiladi.

Koshi masalasi. Boshlang'ich shart bilan berilgan masala Koshi masalasi deyiladi. Aviatsiya konstruksiyasi elementlarining barcha dinamik masalalarining diskret modellari Koshi masalasini yechishga keltiriladi.

7-ma'ruza

2-chi tartibli differensial tenglamaning chegaraviy masalalarini yechishning chekli ayirmalar va differensial progonka usullari

Reja

1. 2-chi tartibli differensial tenglamaning chegaraviy masalalarni yechishning chekli ayirmalar usuli.
2. 2-chi tartibli differensial tenglamaning chegaraviy masalalarni yechishning differensial progonka usuli.

Kalit so'zlari: Yechimning to'g'ri yo'li. Chekli ayirmalarning ifodasi. Chekli o'zaro teng kuchli ifodalarning aniqligi.

Differensial progonka usuli

Berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi chizikli differensial teglamani yechishni ifodalaydigan quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\ddot{U}(x)+a(x)\dot{U}(x)+b(x)U(x)=f(x) \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_{01}U(0)+\alpha_{02}U(0)=U_0 \\ \alpha_{11}U(\ell)+\alpha_{12}U(\ell)=U_\ell \end{cases} \tag{7.2}$$

bu yerda: $a(x), b(x), f(x)$- berilgan funksiyalar, $\alpha_0, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, U_0, U_\ell$ - berilgan o'zgarmaslardir. (7.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (7.1) tenglamaning yechimini differensial progonka usulida topish talab etilsin. Dastlab, quyidagi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani ko'rib chiqamiz.

$$\alpha(x)\dot{U}(x)=\beta(x)U(x)+\gamma(x) \tag{7.3}$$

bu yerda $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$- no'malum funksiyalar.

(7.3) ni x bo'yicha differensialab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\dot{\alpha}(x)\dot{U}(x)+\alpha(x)\ddot{U}(x)=\dot{\beta}(x)U(x)+\beta(x)\dot{U}(x)+\dot{\gamma}(x) \tag{7.4}$$

(7.4) tenglamani yuqori tartibli hosilalarga nisbatan yechamiz.

$$\ddot{U}(x)+\alpha^{-1}(x)\left[\dot{\alpha}(x)-\beta(x)\right]\dot{U}(x)-\alpha^{-1}(x)\dot{\beta}(x)U(x)=\alpha^{-1}(x)\dot{\gamma}(x) \tag{7.5}$$

Ushbu hamda (1) tenglamalarni taqqoslab,

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}(x)&=a(x)\alpha(x)+\beta(x)\\ \dot{\beta}(x)&=\alpha(x)b(x)\\ \dot{\gamma}(x)&=\alpha(x)f(x)\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

kabi 1 – tartibli oddiy chiziqli differensial teglamalar sistemasini hosil qilamiz: (3) tenglama x=0 da quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\alpha(0)\dot{U}(0)-\beta(0)U(0)=\gamma(0) \tag{7.7}$$

(7.7) tenglamani (7.2) chegaraviy shartning (7.1) tenglamasi bilan solishtirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\alpha(0)=\alpha_{01};\beta(0)=-\alpha_{01};\gamma(0)=U_0 \tag{7.8}$$

Shunday qilib, $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$larni topish uchun (7.6), (7.8) kabi Koshi masalasini yechamiz. $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ funksiyalarni differensial proganka usulining "progonkalovchi" koeffitsientlari deyiladi. 0 dan ℓ gacha bo'lgan (7.6), (7.8) Koshi masalasining yechimi differensial progonka usulining to'g'ri yo'lliy yechimi deb ataladi. (7.6), (7.8) masalaning yechimi yordamida$\alpha(\ell),\beta(\ell),\gamma(\ell)$ni topamiz. (7.3) tenglikda x=ℓ deb olib, (7.2) shartdan foydalansak, quyidagi tizimni hosil qilamiz.

$$\left.\begin{aligned}\alpha(\ell)\dot{U}(\ell)-\beta(\ell)U(\ell)&=\gamma(\ell)\\ \alpha_{11}\dot{U}(\ell)+\alpha_{12}U(\ell)&=U_\ell\end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

(7.9) algebraik tenglamalar tizimini yechib

$$U(\ell)=A, \quad \dot{U}(\ell)=\beta \tag{7.10}$$

(7.10) larni topamiz endi ℓ dan 0 gacha (7.1), (7.10) Koshi masalasini yechib, differensial tenglamaning izlanayotgan yechimini topamiz (differensial proganka usulining teskari yo‘li).

Xulosa qilib, shuni aytish mumkinki, bu usul uchish apparatlari va qurilish mexanikasiga doir chegaraviy masalalarini yechishning eng samarali usulidir. Bu usul algoritmi har doim turg‘un bo‘lgan hisoblash jarayonini beradi, ya’ni bu usul boshlang‘ich parametrlar usuli va superpozitsiya usullarida mavjud bo‘lgan kamchiliklardan holidir.

Chekli ayirmalar usuli

Chegaraviy masalami taqribiy yechish usullaridan biri chekli ayirmalar usulidir. Usulning mazmunini berilgan chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi quyidagi 2-chi tartibli differensial tenglamaga qo‘llash jarayonida bayon qilamiz.

$$\ddot{U}(x)+a(x)\dot{U}(x)+b(x)U(x)=f(x) \tag{7.11}$$

$$U(0)=U_0 \qquad U(\ell)=U_\ell \tag{7.12}$$

Bu usulga asosan hosilalar chekli ayirmalar bilan almashtiriladi.

$$\begin{aligned} \ddot{U}_i &\approx \ddot{U}(x_i) \approx \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2} \\ \dot{U}_i &= \dot{U}(x_i) = \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h} \end{aligned} \tag{7.13}$$

bu yerda $h=\dfrac{\ell}{N+1}$, $x_i=ih$, $U(x_i)=U_i$, $a(x_i)=a_i$, $b(x_i)=b_i$, $f(x_i)=f_i$

$x=x_i$ da (7.11) tenglamani quyidagicha yozib olamiz, ya’ni

$$\ddot{U}_i+a_i\dot{U}_i+bU_i=f_i \tag{7.14}$$

$$U(0)=U_0, \quad U(x_{N+1})=U_{N+1}=U_\ell \tag{7.15}$$

(7.13) ga asosan (7.14) dan quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}}{h^2}+\alpha_i\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}+b_iU_i=f_i$$

yoki

$$A_iU_{i-1}+B_iU_i+C_iU_{i+1}=r_i,\qquad i=\overline{1,N} \tag{7.16}$$

bu yerda

$$A_i=1-\frac{h}{2}\alpha_i,\quad B_i=-2+h^2b_i,\quad C_i=1+\frac{h}{2}\alpha_i,\quad r_i=h^2\cdot h_i$$

U_0, U_{N+1} lar (7.15) chegaraviy shartdan aniqlangandir.

Shunday qilib, biz $U_i,\left(i=\overline{1,N}\right)$ noma'lumlarini topish uchun (7.16) algebraik tenglamalar tizimini hosil qildik.

Demak, chekli ayirmalar usulining mohiyati, differensial tenglamani biror bir aniqlikdagi algebraik tenglamalarga almashtirishdan iboratdir. Yuqoridagi holatida (7.13) chekli ayirmalarning aniqligi $0\left(h^2\right)$ ga teng bo'lgani uchun, (7.16) algebraik tenglamalar tizimining aniqligi ham $0\left(h^2\right)$ bo'ladi.

(7.16) algebraik tenglamalar tizimini matritsa ko'rinishida quyidagicha yozib olamiz.

$$MP=F \tag{7.17}$$

bu yerda:

$$M=\begin{pmatrix} B_1\,C_1\,0.....000 \\ A_2\,B_2\,C_2\,...000 \\ 000....\,A_{N-1}\,B_{N-1}\,C_{N-1} \\ 000....0\,A_N\,B_N \end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F \end{pmatrix}$$

$$F_1=r_i-AU_0,\quad F_i=r_if_i,\quad F_n=r_n-C_nU_0,\quad \left(i=\overline{2,N-1}\right)$$

(7.17) tenglamalar tizimini teskari matritsalar usulida yechib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$P=M^{-1}F=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_N \end{pmatrix}\ ,\text{ёè}\quad U_1=D_1,\ U_2=D_2,....,U_N=D_N.$$

Nazorat savollari

1. Differensial progonka usulining mohiyati nimadan iborat?
2. Differensial progonka usulining chegaraviy masalalarni Koshi masalasiga keltiruvchi boshqa usullardan afzalligi nimadan iborat?
3. Chegaraviy masalalarini yechishda chekli ayirmalar usulining mohiyati nimadan iborat?

Chekli o‘zaro teng kuchli ifodalarning aniqligi.

Kalit so‘zlar

Yechimning to‘g‘ri yo‘li. $\alpha(x), \beta(x), \lambda(x)$ progonka koeffitsientlarini topish uchun (7.6), (7.8). Koshi masalasini 0dan ℓ gacha yechish, differensial progonka usulining to‘g‘ri yo‘li deyiladi va aksincha izlanayotgan yechimlarni topish uchun (7.1), (7.10) Koshi masalasining ℓ dan 0 gacha yechimi differensial progonka usulining teskari yo‘li deyiladi.

Chekli ayirmalarning ifodasi. $\dot{U}_i$ va $\ddot{U}_i$ hosilalarni quyidagi taqribiy ifodalar bilan almashtirish:

$$\dot{U}_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}; \quad \ddot{U}_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

chekli ayirmali ifodalarning aniqligi Teylor qatoriga bo‘lgan yoyilmaning nechta hadlarining olinishiga bog‘lik bo‘ladi.

Chekli o‘zaro teng kuchli ifodalarning aniqligi.

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{1!}\dot{U}_i + \frac{h^2}{2!}\ddot{U}_i + \frac{h^3}{3!}\dddot{U}_i + \dots \qquad (7.18)$$

$$U_{i-1} = U_i - \frac{h}{1!}\dot{U}_i + \frac{h^2}{2!}\ddot{U}_i - \frac{h^3}{3!}\dddot{U}_i + \dots \qquad (7.19)$$

(7.18) dan (7.19) yoyilmani ayirib, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$U_{i+1} - U_{i-1} = 2\dot{U}_i + \frac{2h^3}{3!}\dddot{U} + \dots \qquad (7.20)$$

(7.18) va (7.19) ni qo‘shib. quyidagini hosil qilamiz

$$U_{i+1} + U_{i-1} = 2U_i + h^2\ddot{U}_i + \frac{2h^4}{4!}\ddddot{U}_i + \ldots \tag{7.21}$$

(7.20) va (7.21) dan mos ravishda quyidagilarni topamiz

$$\begin{aligned} &\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = \dot{U}_i + O(h^2) \\ &\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = \ddot{U}_i + O(h^2) \end{aligned} \tag{7.22}$$

(7.22) dan chekli ayirmalar ifodalarning aniqligi $O(h^2)$ ga tengligi kelib chiqadi.

8-ma'ruza

Uchish apparatlari qurilish mexanikasining chegaraviy masalalarini yechishda variatsion usular tushunchasi. Rits va Galerkin usullari

Reja

1. Uchish apparatlari qurilish mexanikasining chegaraviy masalalarini yechishda variatsion usullar tushunchasi.
2. Funksional tushunchasi.
3. Koordinata funksiyalarining tizimi tushunchasi.
4. Rits va Galerkin usullari tushunchasi.

Kalit so'zlari: Variatsion usullar, bir tomoni qattiq mahkamlangan to'sin.

Variatsion usullar deb ataluvchi usullar uchish apparatlari qurilish mexanikasining chegaraviy masalalarini yechishdagi eng keng tarqalgan usullardandir.

Chegaraviy masalalarni yechishda qo'llaniladigan barcha variatsion usullar funksionalni minimallashtirish bilan bog'liqdir.

Bu usulni o'rganishdan avval funksional va koordinata funksiyalari tizimi kabi tushunchalarni bayon etamiz.

Funksional tushunchasi

1-ta'rif. Agar biror $M = \{U(x)\}$ kabi, funksiyalar to'plamidan olingan har bir $U(x)$ funksiyaga, biror $[x_0, x_1]$ oraliqda

$$I\{U(x)\} = \int_{x_0}^{x_1} F(U, U_x, U_{xx}, \ldots)dx \qquad (8.1)$$

bilan aniqlanadigan $I\{U(x)\}$son mos qo'yilsa, u holda $I\{U(x)\}$ son U(x) funksiyaning funksionali deyiladi. Uchish apparatlari qurilish mexanikasida quyidagi funksionallar ko'p uchraydi:

$$I\{U(x)\} = \int_{x_0}^{x_1} F(U, U_x)dx \qquad (8.2)$$

yoki

$$I\{U(x)\} = \int_{x_0}^{x_1} F(U, U_x, U_{xx})dx \qquad (8.3)$$

Funksional minimumga erishishining zaruriy sharti bo'lib (8.2) va (8.3) tenglamalarga mos ravishda quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan Eyler tenglamalari hisoblanadi.

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x} = 0 \qquad (8.4)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial U_{xx}} = 0 \qquad (8.5)$$

1. Aytaylik

$$F = \frac{1}{2}[ES(x)U_x^2] + f(x)U \qquad (8.6)$$

bo'lsin, bu yerda E- elastiklik moduli, S(x)- ko'ndalang kesim yuzasi. U holda

$$I\{U\} = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}[ES(x)U_x^2] + f(x)U\right\}dx = \int_{x_0}^{x_1} F(U, U_x)dx \quad \frac{\partial F}{\partial U} = f(x), \quad \frac{\partial F}{\partial U_x} = ES(x)U_x \qquad (8.7)$$

(8.7) ni (8.4) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{d}{dx}[ES(x)\frac{dU}{dx}] = f(x) \qquad (8.8)$$

Agar

$$U(x_0)=0, \qquad U(x_1)=0 \tag{8.9}$$

bo'lsa, u holda (8.9) chegaraviy shartlarda (8.8) tenglama o'zgaruvchan kesimli sterjenning bo'ylama egilishining tenglamasini ifodalaydi.

(8.9) chegaraviy shartda (8.2) funksionalning minimumini topish, sterjenning bo'ylama egilish masalasining variatsion qo'yilishini ifodalaydi.(8.9) chegaraviy shartda (8.8) tenglamani yechish sterjenning bo'ylama egilishi masalasining to'g'ridan-to'g'ri qo'yilishini beradi. Bu ikki agar masalaning qo'yilishi o'zaro ekvivalentdir, ya'ni agar (8.9) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi (8.2) funksionalning minimumini topsak, u holda bu minimum (8.8) tenglamani ham qanoatlantiradi va aksincha faraz qilaylik,

$$F=\frac{1}{2}[EI(x)U_{xx}^2+k(x)U^2]-f(x)U$$

bo'lsin , u holda

$$I\{I\}=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}[EI(x)U_{xx}^2+k(x)U^2]-f(x)U\right\}dx=\int_{x_0}^{x_1}F(U,U_x,U_{xx})dx$$

(8.3) ga qaralsin. Berilgan masala uchun (8.5) Eyler tenglamasiga mos keluvchi tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2}{dx^2}]+k(x)U=f(x) \tag{8.10}$$

chunki,

$$\frac{\partial F}{\partial U}=-f(x)+k(x)U,\ \frac{\partial F}{\partial U_x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=EI(x)\frac{dU^2}{dx^2}$$

Quyidagi chegaraviy shartlarni (K(x)=0)qanoatlantiruvchi (8.10) tenglama

$$\begin{aligned} &U=\frac{dU}{dx}=0 && x=x_0 \\ &M=EI(x)\frac{d^2U}{dx^2}=0,\quad \frac{dM}{dx}=0, && x=x_1 \end{aligned} \tag{8.11}$$

o'zgaruvchan kesimli samolyot qanotining yoki bir uchi qattiq mahkamlangan to'sinning egilishi haqidagi masalaning matematik modelini ifodalaydi. Bu yerda I(x)- kesimning inersiya momenti, E-elastiklik moduli.

Agar chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishida berilsa,

$$k(x)=0 \qquad M=0, \frac{dM}{dx}=0, \qquad x=x_0, \quad x=x_1 \text{ da} \tag{8.12}$$

U holda (8.12) chegaraviy shartlarda (8.10) tenglama samolyot fyuzelyajining egilishi haqidagi masalaning to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘yilishini ifodaydi.

(8.2) chegaraviy shartlarda (8.3) funksionalning minimumini topish, samolyot fyuzelyajining egilishi haqidagi masalaning variatsion quyilishini ifodalaydi.

Koordinata funksiyalari tizimi tushunchasi

Aytaylik, quyidagi funksiyalar tizimi berilgan bo‘lsin.

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{8.13}$$

2-ta'rif. Agar (8.13) funksiyalar tizimi, quyidagi 4 ta shartni qanoatlantirsa, u holda uni koordinata funksiyalari tizimi deb ataladi:

1. (8.13) funksiyalar tizimi uzluksiz va istalgan tartibdagi uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin.

2. (8.13) funksiyalar tizimi chiziqli bog‘liq bo‘lmagan bo‘lsin, ya’ni ixtiyoriy $a_i \neq 0, (i=\overline{1,n})$ uchun $\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)=0$ bo‘lsin.

3. (8.1) funksiyalar tizimi to‘la bo‘lsin, ya’ni istalgan etarlicha katta N lar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘lsin.

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i - \sum_{i=0}^{N} a_i\varphi_i\right| < \varepsilon .$$

4. (8.13) funksiyalar tizimi berilgan chegaraviy shartlarni qanoalantirishi kerak.

Rits usuli

Aviatsiya konstruksiyalari masalalarini yechishda eng keng tarqalgan variatsion usullaridan biri Rits usulidir. Usulning mohiyatini qanot yoki fyuzelyaj masalalariga qo‘llash bilan bayon qilamiz.

Bu usul variatsion usul bo‘lganligi uchun qaralayotgan masalaning qo‘yilishi variatsion bo‘lishi zarurdir, ya’ni quyidagi funksionalning berilgan chegaraviy shartlardagi minimumini topish lozimdir.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{1}{2} [EI(x) U_{xx}^2 + K(x) U^2] - f(x) U \right\} dx \qquad (8.14)$$

qanot qaralayotgan holatda chegaraviy shartlar

$$\left.\begin{array}{ll} U = 0,\ U_x = 0 & x = x_0\ \partial a \\ M = 0, M_x = 0 & x = x_1\ \partial a \end{array}\right\} \qquad (8.15)$$

fyuzelyaj qaralayotgan holatdagi chegaraviy shartlar esa,

$$M = 0, \quad M_x = 0 \qquad x = x_0, x = x_1 \qquad (8.16)$$

Rits usuliga asosan qo'yilgan masalaning yechimi quyidagi ko'rinishda qidiriladi.

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x) \qquad (8.17)$$

bu yerda: $\varphi_i(x)$ – ma'lum koordinata funksiyalari tizimi, a_i – aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum o'zgarmaslar (8.17) ni (8.14) funksionalga qo'llash.

$$I(a_1,...,a_N) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} [EI(x) (\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_{ixx})^2 + k(x)(\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i)^2] - f(x) \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \right\} dx \qquad (8.18)$$

Ma'lumki, $a_1,...,a_n$ larning ba'zi qiymatlarida $I(a_1...a_n)$ differensiallanuvchi funksiya ekstrimumiga ega bo'lishi uchun bu qiymatlar uchun quyidagi shartlar bajarilishi zarur.

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, ..., \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \qquad (8.19)$$

Bu yerdan quyidagi algebraik tenglamalar tizimini hosil qilamiz.

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ki} a_i = fk, \qquad k = \overline{1,n} \qquad (8.20)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} A_{ki} &= \int_{x_0}^{x_1} [EI(x) \varphi_{ixx} \varphi_{kxx} + K(x) \varphi_i \varphi_k] dx \\ f_k &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) \varphi_k dx \end{aligned} \qquad (8.21)$$

(8.20) algebraik tenglamalar tizimini biror usul bilan yechib, noma'lum $a_i, i=\overline{1,n}$ o'zgarmaslarni topamiz va topilgan a_i – larni (8.17) ga qo'yib, Rits usulida qo'yilgan masalaning taqribiy yechimini olamiz.

Galerkin usuli

Usulning mohiyatini (8.15) yoki (8.16) chegaraviy shartlarda quyidagi tenglamaga qo'llashda bayon qilamiz.

$$LU = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2U}{dx^2}] + k(x) = f(x) \tag{8.22}$$

Bu usulga asosan (8.15) yoki (8.16) chegaraviy shartlarda (8.22) tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz.

$$U(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(x) \tag{8.23}$$

(8.23) ni (8.22) ga qo'yamiz.

$$\sum_{i=1}^{N} a_i L\varphi_i = f(x) \tag{8.24}$$

bu yerda

$$L\varphi_i = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}] + k(x)\varphi_i$$

$a_i, i=\overline{1,N}$ noma'lum koeffitsientlarni topish uchun, (8.24) tenglamani $\varphi_k(x), (k=\overline{1,N})$ ga ko'paytirib, hosil bo'lgan ifodani X_0 dan X_1 gacha integrallab, quyidagi algebraik tenglamalar tizimini hosil qilamiz.

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ki}a_i = p_k \qquad (k=\overline{1,N}) \tag{8.25}$$

bu yerda

$$B_{ki} = \int_{x_0}^{x_1}(L\varphi_i)\varphi_k dx, \qquad P_k = f_k = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_k dx \tag{8.26}$$

Algebraik tenglamalar tizimini biror usul bilan yechib, $a_i, i=\overline{1,x}$ larni topamiz. Topilgan a_i – larni (8.23) ga qo'yib, (8.15) yoki (8.16) shartlarda (8.22) tenglamaning Galerkin usulidagi taqribiy yechimini topamiz.
Shuni aytish mumkinki, quyidagi ayniyat o'rganishdir

$$B_{ki} = A_{ki} \tag{8.27}$$

ya'ni (8.15) yoki (8.16) chegaraviy shartlarda (8.21) va (8.26) formulalar tengdir.

Shuning uchun ham Galerkin usuli hech qanday funksionalni minimallashga bog'liq bo'lmasa ham, variatsion usul tarkibiga kiritilgan.

Shunday qilib, Galerkin usuli Rits usuliga nisbatan umumiy hisoblanadi.

Nazorat savollari

1. Chegaraviy masalalami yechishning qanday usullari variatsion usullar deyiladi?
2. Funksional deb nimaga aytiladi?
3. Qanday funksiya tizimlari koordinata funksiyalari tizimlari deyiladi?
4. Galerkin usulining Rits usulidan farqi nimadan iborat?
5. Nima uchun Galerkin usuli variatsion usullar kiradi?

Kalit so'zlar

Variatsion usullar. Funksionalni minimallash bilan bog'liq bo'lgan barcha qurilish mexanikasining chegarviy masalalarini yechish usullari variatsion usullar deyiladi. Ular tarkibiga Rits usuli, Galerkin usuli va chekli elementlar usuli kiradi.

Bir tomoni qattiq mahkamlangan to'sin. Samolyot qanotining qalinligi va uzunligi o'zgaruvchan, bir uchi qattiq mahkamlangan to'sin kabi modellashtirilganidan o'zgaruvchan mastahkamlikka ega bo'lgan bir uchi mahkamlangan to'sinlar uchish appartlari konstruksiyalarining asosiy elementlaridan biri bo'lib hisoblanadi.

(13) ifodalardagi B_{ki} ni ifodani ikki marta bo'laklab integrallaymiz.

$$B_{ki} = \int_{x_0}^{x_1} (L\varphi_i)\varphi_k\,dx = (\varphi_k M_{ik})\Big|_{x_0}^{x_1} - (\varphi_{kx} M_i)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [EJ\,\varphi_{ixx}\varphi_{kxx} + k\varphi_i\varphi_k]dx \qquad (A)$$

bu yerda

$$M_{ix} = \frac{d}{dx}\left(EJ\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\right), \qquad M_i = EJ\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}$$

(2) yoki (3) chegaraviy shartlarni hisobga olsak, (A) dan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$B_{kl}=\int_{x_0}^{x_1}(L\varphi_l)\varphi_h dx=\int_{x_0}^{x_1}[EJ\varphi_{lxx}\varphi_{kxx}+\eta(x)\varphi_l\varphi_h]=A_{kl}$$

Shunday qilib,

$$B_{kl}=A_{kl}$$

ayniyatni hosil qilamiz.

9-ma'ruza

Xususiy hosilali tenglamalar yordamida matematik modellashtiriluvchi aviatsiya konstruksiyalari masalalari

Reja

1. Matematik fizika tenglamalari va xususiy hosilali differensial tenglamalar tushunchalari.
2. Matematik fizika tenglamalarining asosiy turlari.
3. Matematik fizika tenglamalari orqali ifodalanuvchi aviatsiya konstruksiyalari masalalari.
4. Matematik fizika tenglamalarini to'g'ri va variatsiyali shakllari.

Kalitli so'zlar: Qanot qoplamasi, bigarmonik tenglama, majburiy tebranish, erkin tebranish.

Ta'rif. $U(x_1,x_2,...,x_n)$ noma'lum funksiyani, $(x_1...x_n)$ noma'lum o'zgaruvchilarini va noma'lum bog'lovchi tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

U quyidagi ko'rinishga ega.

$$F(x_1,...x_n)U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x},...,\frac{\partial^k U}{\partial x_1^{a_1},..\partial x_n^{a_n}}=0, \qquad (9.1)$$

bu yerda $a_1+a_2+...+a_n=k$.

Noma'lum funksiyaning yuqori tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan hususiy hosilali tenglama kvazichiziqli deyiladi.

Misol uchun quyidagi tenglama kvazi chiziqlidir.

$$A(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_2}+C(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y^2}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0 \qquad (9.2)$$

Noma'lum funksiyaga va uning hususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan hususiy hosilali tenglamaga hususiy hosilali chiziqli tenglama deyiladi. Masalan,

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y)U=f(x,y) \qquad (9.3)$$

2-chi tartibli hususiy hosilali chiziqli tenglama deyiladi.
(9.1), (9.2) va (9.3) tenglamalarga kiruvchi hususiy hosilalarning yuqori tartibi hususiy hosilali tenglamalar tartibi deyiladi.

(9.1)-(9.3) turdagi tenglamalar matematik fizika tenglamalari deyiladi.

Matematik fizika tenglamalari 3 turga bo'linadi. Elliptitk, giperbolik va parabolik turlar. Aviatsiya konstruksiyalarining barcha masalalari shu turlardan biriga keltiriladi.

Elliptik turdagi tenglama

Aviatsiya konstruksiyalarining barcha statik masalalari elliptik turdagi masalani yechishga keltiriladi (sterjenning buralishi, membrananing egilishi, samolyot qanoti qoplamasi, plastinka va qobiqlar).

Elliptik turdagi tenglama to'g'ri va variatsiyasi shakllarga ega.

1. Elliptik turdagi tenglamaning to'g'ri shakli.

A)

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = f(x,y) \qquad (9.4)$$

Bu yerda Δ-Laplas operatori.

$$\left.\begin{array}{ll} U=0 & x=0,\ x=a \text{ da} \\ U=0 & y=0,\ y=b \text{ da} \end{array}\right\} \qquad (9.5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} U_x=0 & x=0,\ x=a \text{ da} \\ U_y=0 & y=0,\ y=b \text{ da} \end{array}\right\} \qquad (9.6)$$

(9.5) chegaraviy shartini qanoatlantiruvchi (9.4) tenglamaning yechimini topish masalasi Dirixle masalasi deyiladi.

(9.6) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi (9.4) tenglamaning yechimini topish masalasi Neyman masalasi deyiladi.

(9.4) tenglama Puasson tenglamasi deyiladi.

B)
$$\Delta^2 U = U_{xxx} + 2U_{xyy} + U_{yyy} = f(x, y) \tag{9.7}$$

Bu yerda Δ^2-bigarmonik operator.

$$\left.\begin{aligned} U = U_x = 0 \quad x = 0,\ x = a\ da \\ U = U_y = 0 \quad y = 0,\ y = b\ da \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

$$\left.\begin{aligned} U = U_{xx} = 0 \quad x = 0,\ x = a\ da \\ U = U_{yy} = 0 \quad y = 0,\ y = b\ da \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Samolyot qanoti qoplamasi yoki to'g'ri burchakli plastinka egilishi haqidagi masala (9.5) va (9.6) chegaraviy shartlarda (9.7) bigarmonik tenglamani yechishga keltiriladi. (9.8) chegaraviy shart bir tomoni qattiq mahkamlangan to'g'ri burchakli plastinkaga mos keladi, (9.9)chegaraviy shart erkin tayanchli to'g'ri burchakli plastinka holatiga mos keladi.

2. Elliptik turdagi tenglamaning variatsiyali shakli.

(9.4) tenglama quyidagi funksionalning minimumini topishga ekvivalentdir.

$$Y = \int_0^a\int_0^b \left\{U_x^2 + U_y^2 + 2fU\right\} dx\,dy = \int_0^a\int_0^b F(U, U_x, U_y)\,dx\,dy \tag{9.10}$$

Isbot.
(9.10) funksional minimumining zaruriy shartlari quyidagi Eyler tenglamasini beradi.

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \tag{9.11}$$

Bundan.

$$\frac{\partial F}{\partial U} = 2f, \quad \frac{\partial F}{\partial U_x} = 2U_x, \quad \frac{\partial F}{\partial U_y} = 2U_y \tag{9.12}$$

(9.12) ni (9.11) ga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$U_{xx}+U_{yy}=f(x,y) \qquad (9.13)$$

(9.5) va (9.6) chegaraviy shartlarda (9.10) funksionalning minimumini topish masalasi Dirixle masalaning variatsiyali quyilishi deyiladi.

(9.6) chegaraviy shartda esa (9.4) tenglamaning mos chegaraviy shartlardagi yechimiga ekvivalent bo‘lgan Neyman masalasining variatsiyali qo‘yilishini hosil qilamiz. (9.7) tenglama quyidagi funksionalning minimumini topishga ekvivalentdir.

$$J=\int_0^a\int_0^b \left(U_{xx}^2+U_{yy}^2+2U_{xy}^2-2fU\right)dx\,dy=\int_0^a\int_0^b F(U,U_{xx},U_{yy},U_{xy})dxdy \qquad (9.14)$$

Isbot.

(9.14) funksional minimumini zaruriy sharti quyidagi Eyler tenglamasining yechimiga ekvivalentdir.

$$\frac{\partial F}{\partial U}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial U_{yy}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_{xy}}=0 \qquad (9.15)$$

Bundan

$$\frac{\partial F}{\partial U}=-2f,\quad \frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=2U_{xx},\ \frac{\partial F}{\partial U_{yy}}=2U_{yy},\ \frac{\partial F}{\partial U_{xy}}=4U_{xy} \qquad (9.16)$$

(9.16) ni (9.15) ga qo‘yib, quyidagini olamiz.

$$\Delta^2U=U_{xxxx}+2U_{xxyy}+U_{yyyy}=f(x,y) \qquad (9.17)$$

Bundan kelib chiqadiki, (9.8) yoki (9.9) chegaraviy shartlarda (9.14) funksionalning minimumini topish masalasi samolyot qanoti qoplamasining egilishi haqidagi masalaning variatsiyali quyilishi deyiladi.

Giperbolik turdagi tenglama

Aviatsiya konstruksiyalari elementlarining barcha dinamik masalalari giperbolik turdagi tenglamalar ham to‘g‘ri va variatsiyali shakllarga ega:

A) $U_{tt} = CU_{xx} + f(x,t)$ (9.18)

$U = 0 \quad x = 0,\ x = a$ da (9.19)

$U/_{t=0} = a_0,\ U_{t/t=0} = a_1$ (9.20)

(9.20) boshlang'ich shartlarda va (9.19) chegaraviy shartlarda (9.18) tenglama sterjenning bo'ylama tebranishi haqidagi masalaning to'g'ri qo'yilishini ifodalaydi.

B) $U_{tt} + CU_{xxxx} = f(x,y)$ (9.21)

$U = U_x = 0 \quad x = 0,\ x = a$ да (9.22)

$U = U_{xx} = 0 \quad x = 0,\ x = a$ да (9.23)

$U/_{t=0} = a_0,\ U_{t/t=0} = a_1$ (9.24)

(9.24) boshlang'ich shartlarda va (9.24) yoki (9.23) chegaraviy shartlarda (4) tenglama sterjanning ko'ndalang tebranishi haqidagi masalaning to'g'ri qo'yilishi deyiladi. (9.22) chegraviy shart bir uchi qattiq mahkamlangan sterjenga, (9.23) shart esa erkin-tayanchli sterjenga mos keladi.

D) $U_{tt} + C\Delta^2 U = f(x,y,t)$ (9.25)

$$\left.\begin{array}{ll} U = U_{xx} = 0 & x = 0,\ x = a \text{ да} \\ U = U_{yy} = 0 & y = 0, y = b \text{ да} \end{array}\right\} \quad (9.26)$$

$$\left.\begin{array}{ll} U = U_x = 0 & x = 0,\ x = a \text{ да} \\ U = U_y = 0 & y = 0, y = b \text{ да} \end{array}\right\} \quad (9.27)$$

$U/_{t=0} = a, \qquad U_{t/t=0} = a_1$ (9.28)

mos ravishda (9.28) boshlang'ich va (9.26) yoki (9.27) chegaraviy shartlarda (9.25) tenglama samolyot qanoti qoplamasi yoki to'g'ri burchakli plastinkaning majburiy tebranishi masalaning to'g'ri quyilishini ifodalaydi.

Erkin tebranish bo'lgan holda (9.18), (9.21) va (9.25) larni $f(x,t) = 0$ ва $(f(x,y,t) = 0$ deb qarash kerak.

2. Giperbolik turdagi tenglamaning variatsiyali shakli.

A) sterjenning bo'ylama tenglamasi, ya'ni (9.1) tenglama quyidagi funksionalning minimumini topishga ekvivalentdir.

$$Y = \int_0^T\int_0^a \{CU_x^2 - U_t^2 - 2fU\} dx\,dy = \int_0^T\int_0^a F(U, U_x, U_t)\,dx\,dx \quad (9.29)$$

Isbot. (9.29) funksional minimumining zaruriy sharti quyidagi Eyler tenglamasiga ekvivalentdir.

$$\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_t}=0 \tag{9.30}$$

bu yerdan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\frac{\partial F}{\partial U}=2f,\quad \frac{\partial F}{\partial Ux}=2CUx,\ \frac{\partial F}{\partial Ut}=-2Ut \tag{9.31}$$

(9.31) ni (9.30) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$U_{tt}=CU_{xx}+f(x,t) \tag{9.31}$$

Shunday qilib, (9.20) boshlang'ich va (9.19) chegaraviy shartlarda (9.30) funksionalning minimumini topish sterjenning bo'ylama tebranishi haqidagi masalaning variatsiyali qo'yilishini ifodalaydi.

B) sterjenning ko'ndalang tebranishi tenglamasi, ya'ni (9.21) tenglama, quyidagi funksionalning minimumini topishga ekvivalentdir.

$$Y=\int_0^T\int_0^a\{CU_{xx}^2-U_t^2-2fU\}dx\,dt=\int_0^T\int_0^a F(U,U_tU_{xx})dxdxt \tag{9.32}$$

Isbot. (9.32) funksionalning minimumining zaruriy sharti quyidagi Eyler tenglamasini beradi.

$$\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=0 \tag{9.33}$$

$$\frac{\partial F}{\partial U}=-2f,\quad \frac{\partial F}{\partial U_t}=-2U_t,\ \frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=2U_{xx} \tag{9.34}$$

(9.34) ni (9 33) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$U_{tt}+CU_{xxxx}=f(x,t)$$

Bundan kelib chiqadiki, boshlang'ich va chegaraviy shartlarga mos keluvchi (9.32) funksionalning minimumini topish (9.21) tenglamaning yechimiga ekvivalentdir va aksincha. (9.21) tenglamaning mos boshlang'ich va chegaraviy shartlardagi echimi (9.32) funksionalning minimumini beradi.

D) Samalyot qanoti qoplamasining ko'ndalang tebranish tenglamasi (9.25) quyidagi funksionalning minimumini topishga ekvivalentdir

$$I = \int_0^T\int_0^a\int_0^b \left\{C[U_{xx}^2 + U_{yy}^2 + 2U_{xy}^2] - U_t^2 - 2fU\right\} dxdydt =$$
$$= \int_0^T\int_0^a\int_0^b F(U, U_t, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}) dxdydt \qquad (9.35)$$

Isbot. (9.35) funksional minimumining zaruriy sharti quyidagi Eyler tenglamasini beradi.

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial U_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial U_{xy}} = 0 \qquad (9.36)$$

(9.35) dan quyidagi kelib chiqadi.

$$\frac{\partial F}{\partial U} = -2f, \quad \frac{\partial F}{\partial U_t} = -2U_t, \quad \frac{\partial F}{\partial U_{xx}} = 2CU_{xx}$$

$$\frac{\partial F}{\partial U_{yy}} = 2CU_{yy}, \quad \frac{\partial F}{\partial U_{xy}} = 4CU_{xy} \qquad (9.37)$$

(9.37) ni (9.36) qo'yib, isbotlash kerak bo'lgan ifodani hosil qilamiz.

Parabolik tipdagi tenglama

Aviatsiya konstruksiyasining issiqlik ta'siriga bog'liq bo'lgan barcha masalalari parabolik turdagi tenglamalarni yechishga keltiriladi. Masalan, quvurlarda issiqlik tarqalishi, gaz va suyuqlikning tarqalishi, gaz va suyuqlikning filtrlanish masalalari. Parabolik turdagi tenglamalar masalaning faqat to'g'ridan-to'g'ri qo'yilishiga ega. Biz juda oddiy parabolik turdagi tenglamalarni o'rganamiz.

Issiqlik tarqalishning bir o'lchovli va ikki o'lchovli masalalarini ko'rib chiqamiz, ya'ni.

A) Bir o'lchovli masalaning qo'yilishi.

$$U_t = CU_{xx} + f(x,t) \qquad (9.38)$$

bu yerda S berilgan o'zgarmas, $f(x,t)$-berilgan funksiya.

$$U = 0 \quad x = 0, x = a \ \partial a \tag{9.39}$$

$$U = 0 \quad t = 0 \quad \partial a \tag{9.40}$$

B) Ikki o'lchovli masalaning qo'yilishi

$$U_t = \bar{N}[U_{xx} + U_{yy}] + f(x,y,t) \tag{9.41}$$

$$\left.\begin{aligned} U = 0 \quad x = 0, x = a \ \partial a \\ U = 0 \quad y = 0, y = b \ \partial a \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

$$U = 0 \quad t = 0 \ \partial a \tag{9.43}$$

(9.38), (9.39) va (9.40) lar bir o'lchovli masalaning to'g'ri qo'yilishi deyiladi, (9.41) ,(9.42) va (9.43) lar esa issiqlik tarqalishining ikki o'lchovli masalasi deyiladi.

Nazorat savollari

1. Qanday tenglamalar matematik fizika tenglamalari deyiladi.
2. Aviatsiya konstruksiyalarining qanday masalalari elliptik turdagi tenglamalarni yechishga keltiriladi.
3. Aviatsiya konstruksiyalarining qanday masalalari giperbolik turdagi tenglamalarni yechishga keltiriladi.
4. Aviatsiya konstruksiyalarining qanday masalalari parabolik turdagi tenglamalarni yechishga keltiriladi.
5. Elliptik turdagi tenglamaning to'g'ridan-to'g'ri va variatsiyali shaklga keltiring.
6. Giperbolik turdagi tenglamaning to'g'ridan-to'g'ri va variatsiyali shaklga keltiring.

Kalitli so'zlar: Qanot qoplamasi, bigarmonik tenglama, majburiy tebranish, erkin tebranish.

Qanot qoplamasi. Qanotdan olingan to‘g‘ri burchakli qirqim, qanot qoplamasi deb ataladi va to‘g‘riburchakli yupqa plastinka yoki tarh ko‘rinishda to‘g‘riburchakli panel kabi tushiniladi.

Bigarmonik tenglama. Quyidagi to‘rtinchi tartibli tenglama.

$$U_{xxx} + 2U_{xxyy} + U_{yyyy} = f(x,y)$$

yoki $\Delta^2 U = f(x,y)$ bigarmonik tenglama deyiladi. Δ^2- bigarmonik operatorlar deyiladi. Samolyot qanoti qoplamasining egilishi haqidagi masala bigarmonik tenglamalarni yechishga keltiriladi.

Majburiy tebranish, erkin tebranish.

Konstruksiya elementlarining tashqi kuch ta’siri natijasida tebranish majburiy tebranish deyiladi.

Erkin tebranish. Konstruksiya elementlarining faqat boshlang‘ich kuch ta’sir natijasida tebranishi erkin tebranish deyiladi.

Test savollari

1. Quyidagi ifodalardan qaysi biri maqsad funksiyani ifodalaydi.

1. $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$,

3. $Ax < b$,

2. $\sum_{n+1}^{n} a_{ij} x_j < b$,

4. $AX + Y = b$.

2. Qaysi ifoda cheklanish shartlarini tenglama ko‘rinishida ifodalaydi.

1. $AX + Y = b$

3. $Ax < b$

2. $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$

4. $\sum_{n+1}^{n} a_{ij} x_j < b$

3. Qaysi masalada aviatsiya konstruksiyasining algebraik tenglamalar ko‘rinishida ifodalanadi.

1. Optimizatsiya masalalari.
2. Qanotning egilishi haqidagi masala.
3. Fyuzelyajning egilishi haqidagi masala.
4. Qanotning majburiy tebranishi haqidagi masala.

4. Qaysi masalada aviatsiya konstruksiyalari elementlari chegaraviy shartlar bilan berilgan differensial tenglama ko‘rinishida ifodalanadi.
1. Optimizatsiya masalalari.
2. Qanotning egilishi haqidagi masala.
3. Fyuzelyajning egilishi haqidagi masala.
4. Qanotning majburiy tebranishi haqidagi masala.

5. Qaysi masalada aviatsiya konstruksiyalarining qaysi elementlari hususiy hosilali differensial tenglamalar ko‘rinishida ifodalanadi.
1. Optimizatsiya masalalari.
2. Qanotning egilishi haqidagi masala.
3. Fyuzelyajning egilishi haqidagi masala.
4. Qanotning majburiy tebranishi haqidagi masala.

6. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun qaysi shartlar boshlang‘ich shartlar bo‘lib hisoblanadi?

1. $\dot{U}(t_0)=\alpha_0, U(t_0)=\alpha_1,$
2. $U(t_0)=\alpha_0,$
3. $U(t_0)=\alpha_1.$
4. $U(t_0)+\gamma_1 U(t_0)=\beta_1$
5. $\left.\begin{array}{l} U(t_0)+\gamma_1(t_0)=\beta_1 \\ U(t_1)+\gamma_2(t_1)=\beta_2 \end{array}\right\}$

7. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun qaysi shart chegaraviy shart hisoblanadi.

1. $\left.\begin{array}{l} U(t_0)+\gamma_1(t_0)U(t_0)=\beta_1 \\ U(t_1)+\gamma_2(t_1)U(t_0)=\beta_2 \end{array}\right\}$
2. $U(t_0)=\alpha_0.$
3. $U(t_0)=\alpha_1.$
4. $U(t_0)=\alpha_0, U(t_0)=\alpha_1.$
5. $U(t_0)+\gamma_1 U(t_0)=\beta_1$

8. Quyidagi differensial tenglamalardan qaysi biri Runge-Kutta usulidan foydalanish uchun standart yozuv hisoblanadi?

1) $y=f(t,y),$
2) $\dot{y}=f(t,y).$
3) $y=F(t,y,y)$,
4) $y+by=F(t,y),$
5) $y-by=F(t).$

9. Quyidagi algoritmdan qaysi biri $y+b(t)y(t)=f(t)$ ko‘rinishidagi tenglamani yechish uchun chekli ayirmalar usulining algoritmi bo‘ladi?

1. $y_i = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$,
2. $y_i + b_i y_i = f_i$,
3. $y_{i+1} = y_i + \Delta t y_i + \frac{\Delta t^2}{2} y_i$,
4. $y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot y_i + \frac{\Delta t^2}{2} y_i$,
5. $y_{i+1} = (f_i - b_i y_i)\Delta t^2 + 2y_i - y_{i-1}$

10. Qaysi tebranishlar majburiy tebranishlar deyiladi.
1. $f \pm 0$
2. $f = 0$
3. $a_0 = 0$
4. $a_1 = 0$
5. $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, f = 0$

11. Qaysi tebranishlar erkin tebranishlar deyiladi?
1. $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, f = 0$
2. $f \pm 0$
3. $f = 0$
4. $a_0 = 0$
5. $a_1 = 0$

12. Superpozitsiya usuli boshlang'ich parametrlar usulidan nima bilan farq qiladi?
A) Y_1 *va* Y_2 larni topish uchun boshlang'ich shartlar vazifasi usuli bilan.
V) Hech qanday farq qilmaydi.
S) μ o'zgarmasni aniqlash bilan.
D) C_1 *va* C_2 larni aniqlash bilan.

13. Nima uchun ko'p hollarda chegaraviy masalani yechish u yoki bu usul bilan Koshi masalasini yechishga keltiriladi.
A) Chegaraviy masalalarni yechish jarayoni Koshi masalasini yechishga nisbatan murakkabdir.

14. Superpozitsiya usuli boshlang'ich parametrlar usulidan nima bilan farq qiladi?

A) Y_1 *va* Y_2 larni topish uchun boshlang'ich shartlar vazifasi usuli bilan.
V) Hech qanday farq qilınaydi.
S) μ o'zgarmasni aniqlash bilan.
D) C_1 *va* C_2 larni aniqlash bilan.

15. Nima uchun ko'p hollarda chegaraviy masalani yechish u yoki bu usul bilan
Koshi masalasini yechishga keltiriladi.
A) Chegaraviy masalalarni yechish jarayoni Koshi masalasini yechishga nisbatan murakkabdir.
V) Chegaraviy masalalarni yechish usullari turg'un bo'lmagan yechimlarni beradi
S) Koshi masalasida chegaraviy shartlarni tekshirish oson.

16. $J=\int_{x_0}^{x_1} F(U,U_x)dx$ funksional uchun quyidagi tenglamalarning qaysi biri minimumning zaruriy sharti hisoblanadi?

1. $\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x}=0,$ 2. $\frac{\partial F}{\partial U}=0,$ 3. $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_x}=0.$

4. $\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_x}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=0,$ 5. $\frac{\partial F}{\partial U}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=0.$

17. $J=\int_{x_0}^{x_1} F(U,U_x,U_{xx})dx$ funksional uchun tenglamalarning qaysi biri funksionalning minimum sharti hisoblanadi?

1. $\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_x}+\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=0,$ 2. $\frac{\partial F}{\partial U}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial U_{xx}}=0.$

3. $\frac{\partial F}{\partial U}=0,$ 4. $\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_x}=0,$ 5. $-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_x}=0.$

18. $\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2U}{dx^2}\right)+k(x)U=f(x)$ tenglama qaysi hollarda bir uchi
mahkamlangan to'sinning egilishi haqidagi masalani ifodalaydi?

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 1. U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0 \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 2. U=U_x=0, \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0, \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 3. U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ \qquad\qquad x=x_1\,\partial a \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ .U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ \qquad\qquad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 5. U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0 \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

19. $\frac{d^2}{dx^2}[EJ(x)\frac{d^2U}{dx^2}]+k(x)U=f(x)$ tenglama qaysi hollarda fyuzelyajning egilishi haqidagi masalani ifodalaydi?

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 1. M=M_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ \qquad\qquad x=x_1 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 2. M=M_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ \qquad\qquad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 3. \ U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0 \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 4. \ U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0 \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} k(x)=0 \\ 5. \ U=U_x=0 \quad x=x_0\,\partial a \\ M=M_x=0 \quad x=x_1\,\partial a \end{array}\right|$$

20. Qaysi hollarda Rits usuli bilan Galerkin usulining yechimlari bir xil bo'ladi?

$$1. \left.\begin{array}{l} P_k=f_k \\ B_{kt}=A_{kt} \end{array}\right\} \ 2. \left.\begin{array}{l} P_k=A_{kt} \\ B_{kt}=A_{kt} \end{array}\right\} \ 3. \left.\begin{array}{l} f_k=B_{kt} \\ B_{kt}=A_{kt} \end{array}\right\} \ 4. P_k=f_k.$$

21. Qaysi funksional elliptik turdagi tenglamaga mos keladi.

1. $Y = \int_0^b \int_0^a \{U_x^2 + U_y^2 + 2fU\} dxdy.$

2. $Y = \int_0^a \left\{ \frac{1}{2} [EY(x)U_{xx}^2 + d(x)U^2] - fU \right\} dx.$

3. $Y = \int_0^a [\frac{1}{2} EY(x)U_x^2 - fU] dx$

4. $Y = \int_0^a [\frac{1}{2} EY(x)U_{xx}^2 - fU] dx$

5. $Y = \int_0^T \int_0^a (CU_x^2 - U_t^2 - fU) dxdt.$

22. Qaysi funksional giperbolik turdagi tenglamaga keladi.

1. $Y = \int_0^T \int_0^a ((CU^2, U^2, fU) dxdt.$

2. $Y = \int_0^b \int_0^a [U_x^2 + U_y^2 + 2fU] dxdt.$

3. $Y = \int_0^a \left\{ \frac{1}{2} [EY(x)U_{xx}^2 + d(x)U^2] - fU \right\} dx.$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Абдуллаев.О.М.Иқтисодий-математик усуллар. Ўқув қўлланма. ТДИУ. –Т: 2006 й.
2. Отаниёзов Б. Чизиқли программалаш асослари. - Т.: Ижод дунёси, 2002 .
3. Сафаева К. Математик дастурлаш. -Т.: Ибн Сино, 2004.
4. ҒофуровМ., Холмуродов М., Хусанов Қ. Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар. - Т.: АГНИ, 2001.
5. Г.Шодмонова Иқтисодий – математик усуллар ва моделлар.Ўқув қўлланма. Т.: Мусиқа,2007. – 141.
6. Ханов А.А., Макарова И.Г. Математическое моделирование и методы в расчетах на ЭВМ. Лабораторный практикум.-Астраханский Государственный университет, 2016.
7. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры,-М.:Физматлит,2001.-320.
8. Бадалов Ф.Б., Шодмонов Ғ. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари.- Т.: ФАН, 2000.-273.
9. Мышкис А.Д. Элементы теорий математических моделей.-3-е изд.испр.-М.: КомКнига, 2007.-192.
10. ВершининВ.Н. Математическое моделирование в расчетах на ЭВМ: Учебно-методическое пособие.-М.-Вологда-Вологодская ГМХА, 2016-56 с.
11. Зарубина В.С. Математическое моделирование в технике: Учебник для вузов. -М.Из-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2001,-496 с.
12. Трусова П.В. Введение в математическое моделирование.Учебное пособие. -М.: Логос, 2005. -440 с.

Mundarija

Muharrir K.A.Sidikova

Musahhih Sh.M.Adilxodjayeva

Bosishga ruhsat etildi 03.10.2018 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 3,75. Nusxasi 50 dona. Buyurtma № 128.

TDTU bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh, Talabalar ko'chasi 54.