

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Ульяновский политехнический институт

М.И.Белый, М.П.Туль, М.А. Туровер

ТОЧНОСТЬ И НАДЕЖНОСТЬ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ,
ПРОИЗВОДСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРИБОРОВ

Метод статистического моделирования

Учебное пособие
для студентов приборостроительных специальностей

Издание Саратовского университета
1980

В пособии рассмотрены вопросы, связанные с применением ЭЦМ для определения точности и надежности на этапах проектирования, производства и эксплуатации приборов и при анализе производственных процессов. Изложены теоретические основы, математический аппарат, методы подготовки данных и исследования результатов при решении разнообразных задач методом статистического моделирования. Приведена программа на языке АЛГОЛ-60. Рассчитано на студентов приборостроительных специальностей. Может быть использовано инженерно-техническими работниками.

3 - 13 - 6

165 - 80

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	4
Глава I. Задачи точности и надежности при проектировании, производстве и эксплуатации приборов... 7	7
Глава II. Решение задач точности и надежности приборов методом статистического моделирования 13	13
2.1. Метод статистического моделирования	14
2.1.1. Моделирование случайных величин	20
2.2. Отраслевая программа статистического моделирования	24
2.2.1. Принципы работы программы	25
2.2.2. Методика подготовки исходных данных	28
2.2.3. Интерпретация результатов моделирования	36
2.3. Примеры решения задач точности и надежности методом статистического моделирования	39
2.3.1. Обеспечение технико-экономических показателей проектируемых приборов	39
2.3.2. Расчет точности на этапе проектирования и производства	46
2.3.3. Расчет надежности на этапе проектирования	49
2.3.4. Организация испытаний на надежность	53
2.3.5. Определение показателей работы испытательного оборудования, как системы массового обслуживания	56
Послесловие	60
Приложение I. Краткие сведения о распределениях ,	61
Приложение 2. Способ определения вида распределения случайных величин по значениям асимметрии и эксцесса	65
Приложение 3: Отраслевая программа "Модель ?"	71
Л и т е р а т у р а	74

П р е д и с л о в и е

Современное развитие науки и техники тесно связано с приборостроением. К приборам предъявляются весьма высокие требования, в первую очередь по точности и надежности в сложных условиях эксплуатации.

Задачи получения необходимых характеристик приборов весьма многогранны и должны решаться на всех этапах жизни прибора: проектировании, производстве, испытаниях и эксплуатации. На каждом этапе элементы и приборы подвергаются воздействию управляемых и неуправляемых факторов, которые не могут быть предопределены, и результирующий эффект их влияния выявляется только при определенной программе испытаний и в процессе эксплуатации.

Широкая номенклатура современного приборостроения, сложность решаемых задач, высокая стоимость большинства приборов и возможные отказы в работе пригласили к необходимости достоверного прогнозирования характеристик и параметров приборов для заданных условий эксплуатации.

Решение таких задач стало возможным с помощью аппарата теории вероятностей и математической статистики. Эти же математические средства оказались наиболее целесообразными при формулировке критериев качества приборов. Методы теории вероятностей, математической статистики и статистического моделирования позволяют установить количественные оценки точности и надежности. Сущность статистического моделирования на ЭЦМ состоит в построении для исследуемого процесса соответствующего моделирующего алгоритма, имитирующего при помощи машинных операций поведение элементов и приборов и взаимодействия между ними. Это позволяет свести многообразие задач к сравнительно небольшому числу универсальных вычислительных алгоритмов, отличающихся легкостью реализации их на ЭЦМ с помощью специальных программ.

Совокупность таких программ представляет собой библиотеку, использование которой на практике приведет к значительному повышению эффективности инженерного труда и технического уровня приборостроения.

В первой части работы рассматриваются методы решения конкретных задач точности и надежности приборов и процессов,

обеспечивающие заданные технико-экономические показатели.

При этом влияние различных реальных факторов на моделируемую систему учитывается с помощью формирования случайных величин.

Излагается отраслевая программа "Модель". Программа обеспечивает возможность моделирования различных систем методом статистических испытаний при различных законах распределения случайных величин: равномерном, нормальном, экспоненциальном, Релея, Вейбулла.

В работе излагается методика использования имитационного моделирования для анализа систем и принятия решений в условиях неопределенности. По сравнению с другими методами такое моделирование позволяет реализовать большее число альтернатив, улучшить качество решений и точнее прогнозировать их последствия.

Во второй части работы описывается отраслевая программа экспериментально-статистического анализа "Статистика". Дело в том, что реальные процессы производства и эксплуатации приборов часто можно рассматривать как случайные и анализировать их с помощью вероятностных методов. Исследуемый при этом процесс считается реализацией некоторой случайной величины, и для его описания необходимо знать вид и параметры функции распределения. Обычно на практике вид функции распределения точно неизвестен и информация о характеристиках случайной величины может быть получена из экспериментально-статистических данных. Следовательно, задача экспериментально-статистического анализа требует изучения случайных явлений и информации о распределении вероятностей, которая может быть получена из статистических данных. Обработка результатов эксперимента позволяет получить большую объективность исследования, возможность обобщения и интерполяции. Оценку исследуемого процесса удобно осуществлять по вычисленным значениям асимметрии и эксцесса. Существование статистической связи подтверждается наличием определенного закона распределения исследуемых величин.

Одним из видов отображения статистической зависимости является корреляционная связь. В работе приведена отраслевая программа корреляционного анализа "Корреляция". Программа обеспечивает вычисление характеристик корреляционной зависимости между аргументом и функцией, определенные коэффициентов

уравнения регрессии, коэффициентов парной корреляции и т.п. Методы многофакторного корреляционного и регрессионного анализа дают возможность решать задачи оптимизации, например, определять значения входных величин, при которых выходные параметры принимают оптимальные значения. В основу этого момента положен активный эксперимент, основанный на измерениях входных факторов и соответствующих им выходных параметров. В результате легко получить эмпирическую математическую модель, позволяющую производить исследования при наличии неконтролируемых факторов, оказывающих влияние на выходные параметры.

Методы активного эксперимента оказались весьма эффективными для обеспечения необходимых значений точности и надежности в современном производстве. Уменьшению трудоемкости проектирования, сроков разработки, а следовательно, ускорению выпуска новой техники способствует внедрение методов планирования эксперимента с обработкой результатов методами регрессионного анализа. Приведенные в работе отраслевые программы "Регрессия" и "Квадрат" дают возможность решать задачи методами многофакторного, корреляционного и регрессионного анализа.

Все рассмотренные методы и средства значительно повышают роль вычислительной техники на этапах проектирования, производства и эксплуатации и способствуют созданию приборов, по точности и надежности отвечающих современным требованиям.

ГЛАВА I

ЗАДАЧИ ТОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ, ПРОИЗВОДСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРИБОРОВ

Бурное развитие науки и техники приводит к появлению в современном приборостроении новых проблем:

- создается широкая номенклатура приборов, усложняются решаемые ими задачи и условия их использования ;
- расширяются способы производства приборов от индивидуального до массового ;
- повышаются требования к техническим параметрам и технико-эксплуатационным характеристикам, в частности по точности и надежности ;
- возникает необходимость в повышении экономичности .

Решение этих проблем осуществляется методами анализа и синтеза при проектировании, производстве и эксплуатации приборов, средств автоматизации и систем управления [5, 6, 15, 19, 53] .

Особое внимание уделяется задаче повышения точности и надежности приборов. В связи с существенными особенностями различных этапов жизни приборов и систем её решение целесообразно вести в следующей последовательности :

- исследование природы отказов материалов и полуфабрикатов, используемых при проектировании и производстве ;
- проектирование и изготовление опытных образцов ;
- обеспечение высокого качества производства ;
- организация рациональной эксплуатации .

Технология производства неизбежно приводит к разбросу характеристик элементов, даже изготовленных при одних и тех же условиях, из одной и той же партии исходного сырья . В этих условиях теория вероятностей и математическая статистика становятся основным расчетным аппаратом точности и надежности. Эти же математические средства используются при формулировке основных понятий и критериев оценки качества продукции .

Во-первых, создаются математические модели физико-химических процессов, которые происходят в материалах под воздействием времени и других факторов. Для выявления совместного влияния нескольких факторов используются методы планирования экспериментов, дающие возможность получения математической модели процесса. Обработка результатов эксперимента требует применения методов математической статистики, а получение достоверных решений в практически приемлемые сроки возможно только при применении ЭВМ.

Во-вторых разрабатываются приборы и системы, оптимально выполняющие поставленные требования (в том числе обеспечивающие заданную точность и надежность) при некоторых ограничениях, налагаемых на процесс разработки .

На рис. I-I показана взаимосвязь между параметрами, обуславливающими процесс проектирования.

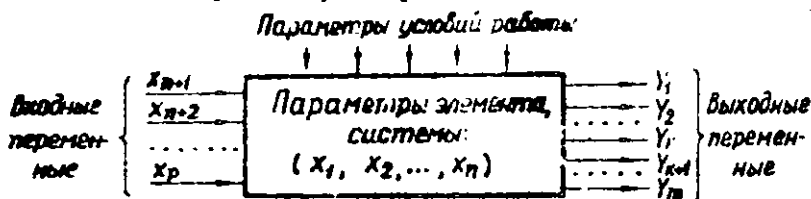


Рис. I-I .

В табл. I-I [20] приведены методы решения, определяемые сочетанием заданных условий и искомых результатов, возникающих в процессах разработки .

Таблица I-I

Заданные условия	Искомый результат	Метод решения
Вход, условия работы, система, элемент	Выход	Анализ (дедукция)
Вход, условия работы, система, элемент	Вход	Универсальный анализ (измерение)
Вход, выход, система, элемент	Условия работы	Научные исследования (индукция)
Вход, выход, условия работы.	Система, элемент	Инженерное проектирование (синтез)

Как видно из таблицы, задача инженерного проектирования состоит в отыскании системы или элемента, которые будут давать определенный выход (результат) при заданных условиях работы и внешних входах. Наиболее общей из предполагаемых ситуаций, связанных с инженерным проектированием, является такая, когда имеется ряд выходных переменных $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, принимающих фиксированные значения, тогда как остальные выходные переменные $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_m$ могут принимать любые значения из ограниченных областей. Ограничения могут быть наложены и на параметры элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r$ условий работы, внешних входов. Тогда математическая формулировка задачи проектирования такова:

для

$$\begin{aligned} x_{1\text{ мин}} &\leq x_1 \leq x_{1\text{ макс}} \\ x_{2\text{ мин}} &\leq x_2 \leq x_{2\text{ макс}} \\ x_{n\text{ мин}} &\leq x_n \leq x_{n\text{ макс}} \end{aligned} \quad (\text{I-1})$$

и для любой комбинации параметров условий и внешних входов, принимающих значения в соответствующих областях допустимой вариации,

$$\begin{aligned} x_{n+1\text{ мин}} &\leq x_{n+1} \leq x_{n+1\text{ макс}} \\ x_{n+2\text{ мин}} &\leq x_{n+2} \leq x_{n+2\text{ макс}} \\ x_{r\text{ мин}} &\leq x_r \leq x_{r\text{ макс}} \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

Найти некоторую совокупность параметров элементов, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} Y_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) &= Y_{1\text{ задан}} \\ Y_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) &= Y_{2\text{ задан}} \\ Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) &= Y_{n\text{ задан}} \end{aligned} \quad (\text{I-3})$$

$$Y_{n+1\text{ мин}} \leq Y_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) = Y_{n+1\text{ макс}}$$

$$Y_{n+2\text{ мин}} \leq Y_{n+2}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) = Y_{n+2\text{ макс}}$$

$$Y_{m\text{ мин}} \leq Y_m(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r) = Y_{m\text{ макс}}$$

Значения параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученные из (I-3) с учетом (I-1)₀ и (I-2), и являются искомым решением задачи синтеза - наиболее сложной в процессе проектирования [9]. Когда схема прибора выбрана и изготовлено небольшое число опытных образцов, необходимо провести испытания, на основе которых сделать заключение о достигнутой точности и надежности, об узких местах конструкции и необходимых доработках.

При проектировании приборов и систем следует обратить внимание на :

- оптимизацию параметров элементов приборов с целью обеспечения точности и стабильности выходных характеристик при воздействии дестабилизирующих факторов (старение, производственный разброс параметров, температурные воздействия и т.п.) ;
- проверку работоспособности разработанной схемы под действием дестабилизирующих факторов.

Методы моделирования работы приборов и систем с применением ЭВМ, исследование на моделях различных условий их эксплуатации, оптимальные процедуры поиска неисправностей и т.п. дают возможность успешно решать задачи точности и надежности на этапе проектирования.

Производство приборов и систем выдвигает свои задачи, среди них первоочередной является обеспечение заданного уровня качества (точность и надежность) приборов в процессе изготовления.

Функционирование технологического процесса, схема которого приведена на рис. I-2, подчиняется определенным закономерностям, знание которых необходимо для прогнозирования и управления этим процессом.

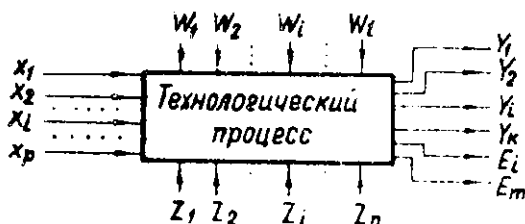


Рис. I-2

На рис. I-2 обозначено:

- $x_1, \dots, x_r$ - входные контролируемые параметры ;
- $z_1, \dots, z_p$ - управляющие контролируемые параметры ;
- $W_1, \dots, W_q$ - возмущающие неконтролируемые параметры ;
- $Y_1, \dots, Y_k$ - выходные показатели качества ;
- $E_1, \dots, E_m$ - выходные экономические показатели.

Влияние на ход технологического процесса управляемых и неуправляемых факторов требует для его объективного анализа применения методов математической статистики. Определение взаимосвязи между отдельными параметрами и показателями технологического процесса, т.е. математическое описание закономерностей функционирования, производится методами корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа [16, 29, 49]. Для математического моделирования и оптимизации технологических процессов разработаны методы активного эксперимента [1, 2, 36, 55]. Одной из основных технико-экономических характеристик приборов при их производстве является серийно - способность, которая достигается в результате :

- разработки экономических основ проектирования;
- анализа и расчета технологической точности выходных параметров элементов или приборов, позволяющих судить о воспроизводимости приборов и систем при серийном производстве, постижении точности и обоснованно выбирать допуски на параметры элементов и приборов, обеспечивая надлежащие технико-экономические показатели производства;
- анализа и расчета технологических факторов, влияющих на надежность приборов, систем и технологический процесс;
- экономического анализа вариантов технологического процесса.

Методы теории вероятностей, математической статистики и статистического моделирования позволяют объективно исследовать технологические процессы производства и установить количественные связи их точности и надежности [11, 16, 29, 49].

Эффективным средством улучшения качества продукции являются математико-статистические методы управления качеством (выборочный контроль, регулирование технологического процесса с помощью контрольных карт и т.п.) [54].

В процессе эксплуатации приборов и систем решаются задачи, связанные с оптимальными сроками профилактических работ, целесообразностью проведения ремонта, расчетами запасов узлов и деталей, необходимых для поддержания приборов и систем в работоспособном состоянии и т.п. [19, 21, 44, 51, 52, 53]. Решение этих задач требует использования методов теории вероятностей и математической статистики, дающих возможность получить количественные характеристики эксплуатационной надежности. В этих задачах входные сигналы (переходность включения систем в работу, переходность выхода систем на ремонт и т.п.), а также параметры системы обслуживания или ремонта (распределение времени ремонта, времени между отказами и т.п.) известны только статистически. Эффективность использования приборов и систем по назначению, пропускная способность систем технического обслуживания и другие надежность характеристики определяются методами статистического моделирования [21, 51, 53].

Предложенная последовательность отражает системный подход к решению задач точности и надежности, но не исключает возможности их решения, в случае необходимости, на отдельных этапах жизни приборов.

ГЛАВА II

Решение задач точности и надежности приборов методом статистического моделирования

В последние годы появилось значительное число работ, посвященных методам оценки точности и надежности приборов и систем, различных по структуре, режимам использования, организации технического обслуживания и целому ряду других признаков [19, 21, 52]. Достаточно жесткие ограничения на исходные предпосылки приводят, с одной стороны, к необходимости разработки большого количества частных математических моделей, не имеющих широкого применения. С другой стороны, многие практически важные случаи не могут быть сведены к известным математическим схемам без грубых допущений, существенно искажающих реальные физические процессы. Поэтому возникла необходимость рассматривать задачи точности и надежности в рамках единого математического метода, допускающего всестороннее исследование приборов и систем. В качестве основного рабочего аппарата целесообразно использовать метод статистического моделирования, позволяющий свести многообразие задач точности и надежности к сравнительно небольшому числу универсальных вычислительных схем (алгоритмов), отличающихся простотой и легко реализуемых на современных ЭЦМ. Совокупность таких стандартизованных алгоритмов представляет собой библиотеку, использование которой в инженерной практике приводит к значительному повышению эффективности инженерного труда и технического уровня приборостроения.

Сущность статистического моделирования на ЭЦМ состоит в построении для исследуемого процесса соответствующего моделирующего алгоритма, имитирующего при помощи машинных операций поведение элементов приборов и взаимодействие между ними. Статистическое моделирование позволяет решать весьма сложные задачи и обладает рядом преимуществ перед другими видами моделирования. Исследуемый прибор может одновременно содержать элементы непрерывного и дискретного действия, подвергаться влиянию многочисленных факторов. Метод позволяет легко варьировать значениями параметров исследуемых приборов, начальными

условиями и дает результаты, вполне удовлетворительные для практического решения многих задач. Недостатком метода является частный характер решения, соответствующий фиксированным значениям параметров моделируемых приборов и начальных условий.

Моделирование процесса функционирования приборов и систем на ЭЦМ позволяет получить результаты, которые по ценности не уступают результатам эксперимента, но достигаются при значительно меньших затратах времени и средств. В практических случаях метод статистического моделирования (если не применяются специальные приемы ускорения) дает приемлемую относительную точность порядка 0,01 - 0,001 [10].

Как показывает опыт применения метода статистического моделирования, полезные результаты удается получить уже на этапе построения модели. Необходимость четкого формального описания функционирования прибора и отстройкой постановки задач исследования требует более глубокого осмысливания физических процессов.

2.1. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В практике определения точности и надежности при проектировании, производстве и эксплуатации изделий распространен метод статистического моделирования - численный метод решения математических задач о использовании случайных величин. В литературе этот метод часто называют методом Монте-Карло или методом статистических испытаний [46]. Основной особенностью этого метода является его экспериментально-статистический характер.

Метод статистического моделирования основан на законе больших чисел, который гарантирует сходимость приближенного решения к точному только в вероятностном смысле. В законе больших чисел использованы две фундаментальные теоремы [42].

Т е о р е м а Б е р н у л л и . Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может наступить с вероятностью p некоторое событие A . Тогда для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta\right\} = 1. \quad (2-1)$$

где $\frac{m}{n}$ — относительная частота события A .

Т е о р е м а Ч е б ы ш е в а . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимые переменные случайные величины с одинаковым математическим ожиданием M и с дисперсией, ограниченной некоторой константой $\sigma_i^2 \leq C, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - M\right| < \delta\right\} = 1. \quad (2-2)$$

Основная идея метода статистического моделирования заключается в следующем. При помощи подходящей более или менее адекватной вероятностной модели точное решение задачи интерпретируется либо как вероятность P_0 некоторого случайного события, либо как математическое ожидание M некоторой случайной величины. Для этого производится достаточно большое число n случайных независимых испытаний. На основании закона больших чисел за приближенное решение данной задачи принимают относительную частоту $\frac{m}{n}$ события (2-1) в первом случае и среднее арифметическое $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ из результатов испытаний (2-2) — во втором случае.

Задачи, решаемые методом статистического моделирования, можно разбить на две группы:

1. Задачи вероятностной природы, аналитическая формулировка которых представляет значительные трудности или даже практически невозможна. К ним относятся, например, задачи: исследования надежности приборов и систем; исследования систем управления со случайными входными параметрами; исследования систем массового обслуживания и т.п.;

2. Задачи, сформулированные аналитически. К ним относятся: нахождение экстремума функции многих переменных; вычисление определенных интегралов и т.п.. При решении этих чисто вычислительных задач, не имеющих прямого отношения к теории вероятностей, применение метода статистического моделирования представляется особенно оригинальным.

Основные идеи метода статистического моделирования рассмотрим на примере решения задачи второй группы.

Дана функциональная зависимость

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2-3)$$

где

Y - выходная характеристика изделия;
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ - параметры, влияющие на Y .

Таковыми параметрами могут быть конструктивные и технические показатели элементов, внешние воздействия, паразитные связи и т.п. Зависимость (2-3) может быть задана аналитически или графически. Подставляя в эту зависимость по одному случайному значению x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$), получим одно значение y_j ($j = 1, 2, \dots, p$). Множество значений Y_j получается при многократном повторении расчетов со случайными значениями x_{ij} . Если значения x_{ij} выбираются в соответствии с теми законами распределения, которые их характеризуют, то решение задачи даст искомое распределение Y .

Предположим, что плотность распределения $Y = f(Y)$ имеет вид, показанный на рис. 2-1.

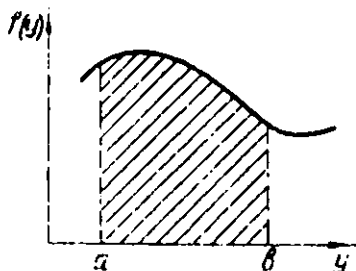


Рис. 2-1

Если a и b - границы поля допуска, в котором должен находиться выходной параметр Y , то вероятность $P(a < Y < b)$ можно найти по формуле

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f(Y) dY.$$

Согласно теореме Бернулли (2-1), частота попадания выходного параметра Y в пределы поля допуска $[a, b]$ при неограниченном увеличении числа опытов приблизится к вероятности

$P(a \leq Y \leq b)$. Поэтому при достаточно большом количестве испытаний можно считать, что

$$\frac{m}{n} \approx P(a \leq Y \leq b),$$

где

m — количество попаданий выходного параметра Y в пределы от a до b ;

n — общее количество испытаний.

Напомним, что относительная частота $\frac{m}{n}$ имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M = P_0$ и дисперсией

$$\frac{P_0(1-P_0)}{n}.$$

При решении задач методом статистического моделирования большое значение имеет определение объема испытаний, необходимого для получения заданной точности δ или же оценки точности вычислений γ по известному числу испытаний n . При обработке статистического материала нельзя ограничиваться только заданной точностью решения, необходимо еще задавать так называемую степень надежности (постоянности).

По теореме Бернулли (2-1) с достоверностью α , сколь угодно близкой к единице, можно записать:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P_0\right| < \delta\right) = \alpha. \quad (2-4)$$

Отметим, что при большом числе независимых опытов можно считать распределение случайной величины $\frac{m}{n}$ приближающимся к нормальному. Поэтому выражение (2-4) можно записать в виде

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P_0\right| < Z\delta\right) = \alpha,$$

где

Z — величина, определяющая значение аргумента, при котором

$$\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha.$$

Значения X табулированы для нормированных случайных величин. Учитывая равенство $\delta = X\alpha$ и считая, что X зависит от α , получим

$$n = X_{\alpha}^2 \frac{P(1-P)}{\delta^2} \quad (2-5)$$

Следовательно, для определения n необходимо знать искомую вероятность P . Если увеличить точность вычислений на порядок, то число испытаний возрастает на два порядка, что увеличивает затраты машинного времени. Если не требуется очень высокой точности результата, то число испытаний может лежать в пределах $10^3 + 10^5$ ($P = 0,5$; $\alpha = 0,997$), при этом максимальное значение ошибки будет в пределах $\gamma = (5 + 0,5)\%$.

Точность статистического моделирования всегда должна согласовываться с достоверностью моделей. Очевидно, нет смысла добиваться высокой точности за счет увеличения числа реализаций, если заранее известно, что модель загроблена, например, вследствие ограниченного объема оперативной памяти ЭЦВМ. Поэтому в каждом конкретном случае требования к точности статистического моделирования должны определяться с учетом сложности моделируемого объекта или процесса, объема памяти и быстродействия ЭЦВМ, времени, отводимого для решения задачи. Статистическое моделирование технической системы на ЭЦВМ проводится по блок-схеме, представленной на рис. 2.2.

Необходимо отметить, что метод статистического моделирования является очень гибким и его можно применять во многих сложных случаях, особенно, когда случайные параметры элементов системы или процесса взаимосвязаны.

Основной недостаток метода статистического моделирования состоит в том, что практически нельзя определить, является ли какая-либо случайная величина преобладающей или более важной чем другие. Кроме того, если одна случайная величина изменяется, то весь процесс моделирования должен повторяться заново.

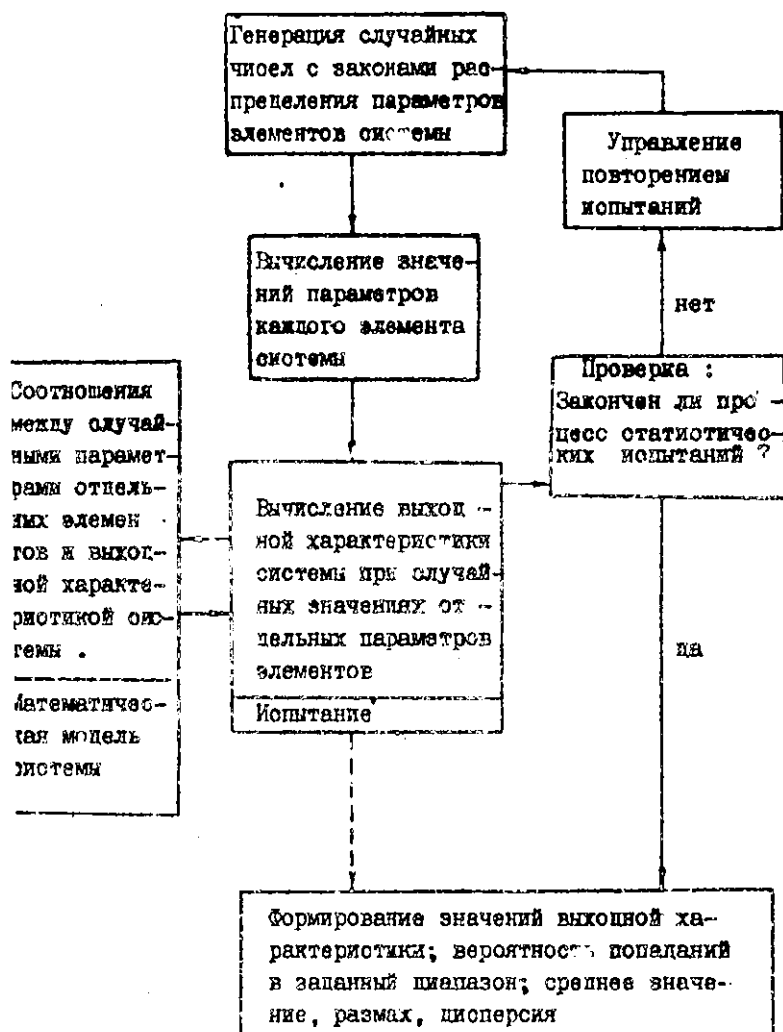


Рис. 2 - 2 .

2.1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Одна из принципиальных особенностей метода статистического моделирования заключается в том, что влияние различных реальных факторов на моделируемую систему учитывается не расчетным путем, а "бросанием жребия", под которым понимается формирование значений различных случайных величин (дискретных или непрерывных) с помощью случайных чисел.

В качестве исходной совокупности случайных величин используются случайные числа, равномерно распределенные в интервале $\{0,1\}$.

При решении задач на ЭЦВМ воспроизводство случайных чисел, отвечающих данной теоретической модели, неосуществимо. Поэтому на практике ограничиваются получением так называемых псевдослучайных чисел (чисел, значения которых достаточно близки к значениям чисто случайных и образующих совокупность, вероятностные параметры которой достаточно близки к параметрам теоретической совокупности).

В дальнейшем под термином "случайное число" мы будем понимать как случайные, так и псевдослучайные числа, если различие между ними не имеет существенного значения.

Различные способы получения случайных чисел с заданным законом распределения изложены в литературе [46, 51].

Для получения случайных величин с различными законами распределения используются нормированные случайные величины, имеющие равномерное распределение в интервале $\{0,1\}$ и нормальное распределение с $M = 0$ и $\sigma = 1$. Случайные величины с такими распределениями могут быть получены на ЭЦВМ.

В способе, называемом преобразованием равномерно распределенной случайной величины, используется то, что интегральная функция распределения $F(x)$ любой непрерывной случайной величины равномерно распределена в интервале $\{0,1\}$. Следовательно, для любой случайной величины x с плотностью распределения $f(x)$ случайная величина

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (2-6)$$

имеет равномерное распределение в интервале $\{0,1\}$.

Исходя из этого, случайную величину X с произвольной плотностью распределения $f(x)$ (рис. 2-3,а) можно задать следующим образом:

1. Получить случайную величину Y_0 , имеющую равномерное распределение в интервале $\{0,1\}$ (точка А, рис. 2-3,б);
2. Принять в формуле (2-6) $Y_0 = F(x)$ (точка Б);
3. Решить полученное уравнение относительно x [51] (точка В).

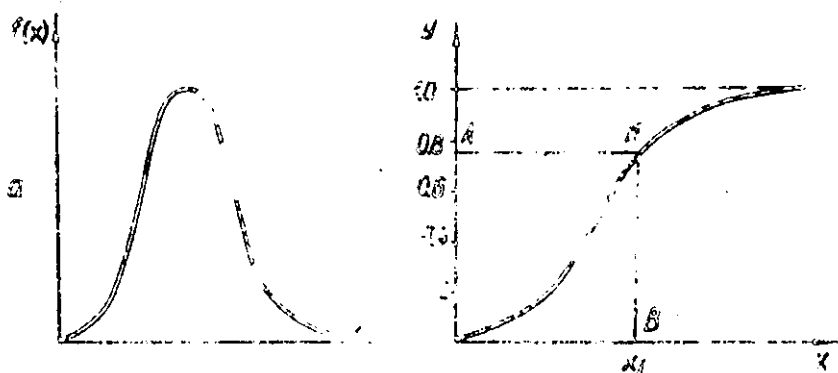


Рис. 2-3

Приведем примеры преобразования для часто применяемых на практике законов распределения.

Экспоненциальный закон. Функция распределения при экспоненциальном законе определяется выражением

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Учитывая (2-6), можно написать:

$$Y_0 = F(x_1) = 1 - e^{-\lambda x_1}$$

Решая это уравнение относительно x , получим

$$x_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y_0) \quad (2-7)$$

Равномерный закон. Функция распределения случайной величины X , равномерно распределенной в интервале $\{a,b\}$, определяется выражением.

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Учитывая, что $Y_R = F(x_i)$, получим

$$x_i = a + Y_R(b - a). \quad (2-8)$$

З а к о н Р е л е я . Для закона Релея функция распределения может быть записана в виде

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Приравнявая $Y_R = F(x_i)$, получим

$$x_i = \sqrt{-2\sigma^2 \ln Y_R}. \quad (2-9)$$

З а к о н В е й б у л л а . Функцию распределения случайной величины, имеющей распределение Вейбулла, можно записать в виде

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^k}{\sigma^k}},$$

где

σ - параметр масштаба;

k - параметр формы.

Приравнявая $Y_R = F(x_i)$, получим

$$x_i = [-\sigma \ln(1 - Y_R)]^{\frac{1}{k}}. \quad (2-10)$$

Способ преобразования равномерно распределенной случайной величины удобен в том случае, когда интегрирование можно выполнить в явном виде и получаемое уравнение легко разрешимо. В других случаях для решения уравнения (2-6) относительно x_i необходимо прибегать к численным методам.

Рассмотрим численный метод, который применяется для моделирования случайной величины x , распределенной по нормальному закону. Известно [42], что такую величину можно представить в виде

$$X = M(x) + \sigma(x)Z, \quad (2-11)$$

где

Z - случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с параметрами $M_Z = 0$, $\sigma_Z = 1$.

Если суммируемые величины

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2-12)$$

распределены равномерно на интервале $\{0,1\}$, то есть имеют $M = \frac{1}{2}$ и $\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$, то, согласно центральной предельной теореме, соответствующие параметры для суммарной величины вычисляются по формулам:

$$M_z = \frac{n}{2}; \quad \sigma_z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{12}}. \quad (2-13)$$

Согласно выражениям (2-II) и (2-12) можно получить

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - M_z}{\sigma_z}.$$

С учетом (2-13) последнее выражение представим в виде

$$Z = \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n Z_i - \frac{n}{2} \right).$$

Подставив его в (2-II), получим

$$X = M(x) + \sigma(x) \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n Z_i - \frac{n}{2} \right). \quad (2-14)$$

Формула (2-14) связывает последовательность нормальных распределенных случайных чисел X с параметрами $M(x)$ и $\sigma(x)$ с последовательностью равномерно распределенных в интервале $\{0,1\}$ случайных чисел Z_i . Точность моделирования X возрастает с увеличением n . На практике обычно бывает достаточно $n = 4 + 12$. Если $n = 12$, то формула (2-14) принимает более простой вид:

$$X = M(x) + \sigma(x) \left(\sum_{i=1}^{12} Z_i - 6 \right). \quad (2-15)$$

В некоторых случаях необходимо иметь случайные числа X_i , распределенные по нормальному закону с параметрами $M = 0$ и $\sigma = 1$. Их можно получить, используя выражение

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} Z_j - 6, \quad (2-16)$$

полученное из формулы (2-15).

2.2. ОТРАСЛЕВАЯ ПРОГРАММА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Эта программа зарегистрирована в отраслевом фонде Ульяновского политехнического института под именем "Модель".

Программа написана на языке АЛГОЛ-60 для ЭПМ ОДРА-1204 и состоит из трех отдельных частей. 1-я и 3-я части являются неизменными, а вторая часть переменная и составляется каждым пользователем соответственно решаемой задаче. Такая структура программы требует обязательного ввода всех частей, написанных на исходном языке (АЛГОЛ-60), и трансляции их в рабочую программу перед каждым решением задачи. Программа обеспечивает возможность моделирования различных систем методом статистических испытаний. Обязательными условиями использования программы являются (рис. 2-2):

- наличие математического описания моделируемой системы в виде уравнений с одной выходной функцией;
- знание значений всех параметров моделируемой системы и границ их изменения;
- знание законов и параметров распределения всех переменных, включенных в математическое описание системы;
- знание синтаксиса и семантики процедур языка АЛГОЛ-60.

Ограничением применимости настоящей программы является набор законов распределения вероятностей случайных чисел, генерируемых 1-й частью. Программа обеспечивает генерацию случайных чисел со следующими законами распределения.

- равномерным;
- нормальным;
- экспоненциальным;
- законом Релея;
- законом Вейбулла.

Использование других законов распределения возможно при незначительных дополнениях к излагаемой программе. Текст 1-й и 3-й частей представлен в приложении 3.

2.2.1. ПРИНЦИП РАБОТЫ ПРОГРАММЫ

Принцип работы программы поясняется с помощью её структурной схемы, представленной на рис. 2-4, 2-5.

С помощью процедуры `model` осуществляется вычисление значений моделируемой функции (C) при случайных значениях аргументов. Такой принцип обеспечивается специальными правилами описания процедуры `model`, оговоренными в методике подготовки исходных данных, изложенной ниже. Количество циклов (актов) моделирования задается пользователем в исходных данных (ИД) к программе. Параметры случайных чисел могут быть "стандартными", т.е. заложенными в описании процедур-функций генерации случайных чисел, или указаны пользователем в ИД (2.2.2).

Каждое значение C_i проверяется:

- на попадание в заданный диапазон, указанный пользователем в ИД;
 - на отношение к максимальному и минимальному значениям ранее полученных.
- Это обеспечивает возможность:
- вычисления вероятности попадания моделируемой функции в заданный диапазон в виде отношения

$$вер = \frac{m}{n},$$

где

m - количество испытаний с положительным исходом;

n - общее количество испытаний;

- нахождения граничных значений диапазона моделируемой функции.

Граничные значения моделируемой функции дают пользователю очень ценную информацию для определения неизвестного вида функции, а также влияния на неё изучаемых факторов. По изменению граничных значений функции при моделировании с различными условиями (разными видами функций или значениями факторов) можно судить о степени её зависимости от этих условий.

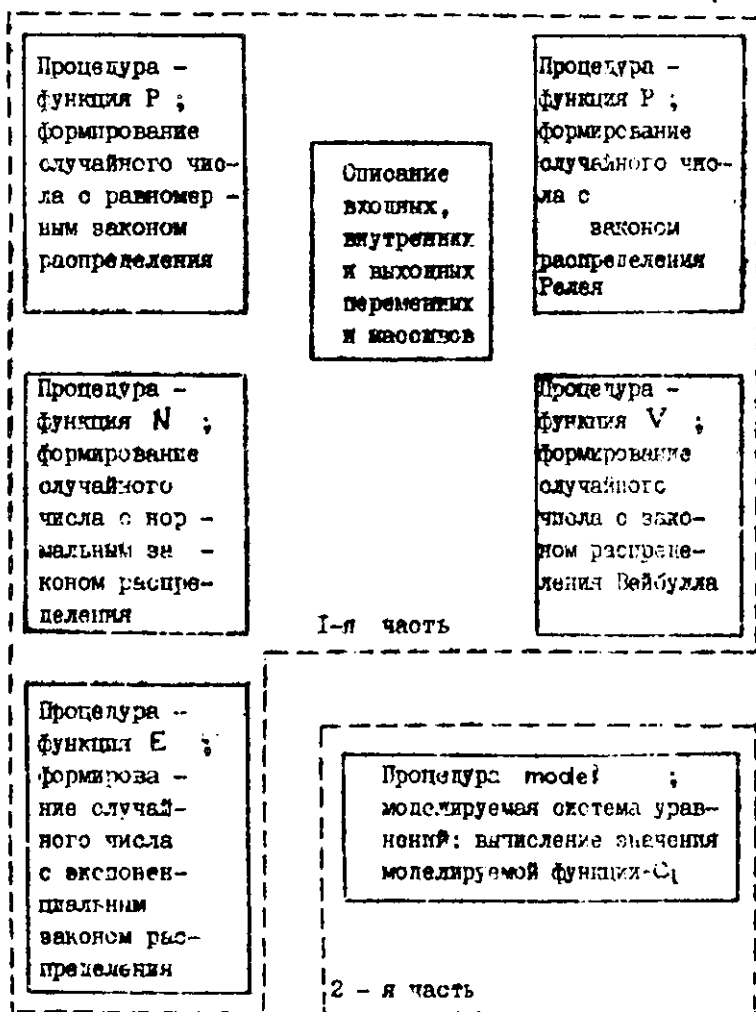
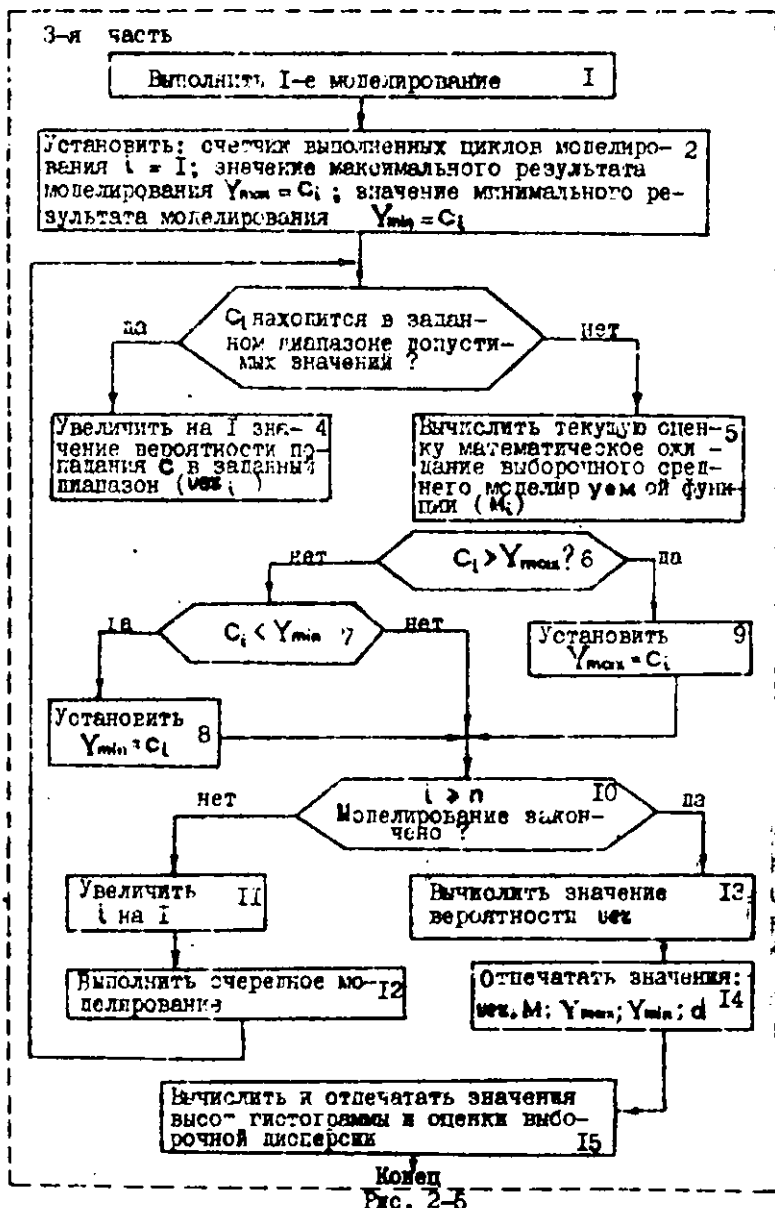


Рис. 2-4



Кроме этого, вычисляется выборочное среднее (математическое ожидание) моделируемой функции, выборочная дисперсия S^2 и ИД её размаха.

После выполнения заданного количества испытаний результаты вычислений печатаются. Эту часть работы выполняют блоки 1-14. Блок 15 вычисляет граничные значения 10-ти равных частей всего диапазона значений моделируемой функции. Затем, повторяя процесс моделирования, вычисляют отношения

$$h_j = \frac{m_j}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, 10).$$

где

- h_j - высота j -го участка гистограммы распределения моделируемой функции (колонка Н);
- m_j - число попаданий значений C_i в j -ю часть диапазона значений моделируемой функции;
- среднее значение функции на j -ом участке разбиения при равномерном распределении (колонка YSR);
- фактическое среднее значение функции на j -м участке разбиения (колонка YSF).

2.2.2. МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

К исходным данным (ИД) программы "Модель" относятся:

1. Числовые данные (четыренадцать чисел):
 - признак печати значения выборочного среднего (M) с удвоенным количеством цифр после запятой (необходим для величин, меньших 0,000001);
 - цифра 0 или 1, определяющие соответственно
 - 00 - печать M в виде числа размерностью 000000, 000000;
 - 1 - печать M в виде числа размерностью ,00000000000000.

Для правильного выбора одного из возможных значений первого числа пользователя должен ориентировочно оценить ожидаемое значение M . Если это значение менее чем 10^{-4} , то нужно первым числом в ИД записать 1, в противном случае - 0:

- пять пар чисел, или пять пар нулей, определяющих параметры псевдослучайных чисел, обозначавших соответственно
 - 1 - левая граница интервала для равномерного закона

распределения (если записать 0, то граница стандартная = 0);
2-е число - правая граница этого интервала (если записать 0, то граница стандартная = 1);

2-я пара :

1-е число - математическое ожидание (M) для нормального закона распределения (если 0, то M = 0);

2-е число - дисперсия (S) (если 0, то S = 1);

3-я пара :

1-е число - параметр λ в выражении плотности распределения экспоненциального закона $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (если 0, то $\lambda = 1$);

2-е число - величина b (если записать 0, то b = 0);

4-я пара :

1-е число - всегда 0;

2-е число - параметр "b" в выражении закона распределения Релея: $f(x) = \left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{b}}$ (если 0, то b = 1);

5-я пара :

1-е число - параметр "b" в выражении закона распределения Вейбулла $f(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$ (если 0, то b = 1);

2-е число - параметр "a" (если 0, то a = 1);

- два числа: минимальное и максимальное значение предполагаемого диапазона изменения моделируемой функции;
- целое число - количество испытаний.

II. Вставляемая процедура (переменная часть программы) - алгоритмическое описание моделируемого процесса в виде процедуры, записанной на языке АЛГОЛ - 60.

Из перечисления состава числовых ИД видно, что их значения определяются пользователем, исходя из требований к процессу моделирования. Подготавливая числовые ИД следует проявить особую внимательность при выборе значений пар исходных чисел, задающих параметры распределения случайных чисел.

Для правильного решения этой задачи необходимо четко представлять себе процесс статистических испытаний, выполняемый программой "Модель". Напомним, что каждое испытание заключается в вычислении значения функции $S(x_i)$ при случайных значениях аргументов x_i (по 2-5).

Рассмотрим схему выбора параметров случайных чисел с уче-

том того, что в математическом описании функции могут быть переменные с различными законами распределения, а несколько переменных с одним законом могут иметь различные значения параметров.

На практике возможны два способа представления значений x_i .

Первый способ - представление значениями параметров случайных величин, характеризующими соответствующие законы распределения, например, M и σ ; границы интервала $\{a, b\}$ и т.д. Такое представление получается в результате обработки статистических данных, полученных при измерениях исследуемого объекта или процесса или при математическом моделировании их на ЭЦМ.

Второй способ - представление числами, определяющими основное значение и поле допуска каждого x_i . Например: 100 ± 30 .

Такое представление берется из технической документации или получается в результате расчетов, учитывающих методы изготовления изделий (классы точности, допуски, посадки и т.п.).

В связи с тем, что в программе формируются значения случайных величин с помощью случайных чисел, выбор параметров случайных чисел для первого способа представления x_i не представляет трудностей. Поэтому, если значения x_i представлены вторым способом, то необходимо произвести преобразования этих значений, приводящие их к первому способу представления.

Рассмотрим методику таких преобразований.

Для переменных с нормальным законом распределения необходимо определить $M(x_i)$ и $\sigma(x_i)$.

На основании "закона 3 σ " можно представить весь диапазон значений x_i соотношением:

$$M - 3\sigma \leq x_i \leq M + 3\sigma. \quad (2-17)$$

Если обозначить:

- M° - основное значение переменной при втором способе представления значений;
- Δ° - допустимое изменение M° в сторону увеличения (верхняя граница поля допуска);
- Δ'' - допустимое изменение M° в сторону уменьшения (нижняя граница поля допуска).

то весь диапазон значений x_i , представленных значениями M°

Δ^+ и Δ^- , можно представить соотношением

$$M^0 - \Delta^- \leq x_1 \leq M^0 + \Delta^+. \quad (2-18)$$

Из очевидного подобия соотношений (2-17) и (2-18) вытекают формулы вычисления параметров M и σ :

а/ для случая симметричного поля допуска

$$|\Delta^-| = \Delta^+ = \Delta; \quad M = M^0; \quad \sigma = \frac{\Delta}{3},$$

б/ в общем случае

$$M = \frac{2M^0 + (\Delta^- + \Delta^+)}{2}; \quad \sigma = \frac{|\Delta^-| + \Delta^+}{6}. \quad (2-19)$$

Например: даны значения

$$x_1 = 100^{+10}_{-10},$$

$$x_2 = 100^{+10}_{-10}.$$

Тогда для x_1 определяем:

$$M = 100;$$

$$\sigma = \frac{+30}{3} = 10.$$

Для x_2 :

$$M = \frac{2 \cdot 100 + (-10 + 20)}{2} = 105,$$

$$\sigma = \frac{10 + 20}{6} = 5.$$

Для переменных с равномерным законом распределения, представленных граничной парой $\{a, b\}$, диапазоны значений определяются соотношением

$$a \leq x_i \leq b \quad (2-20)$$

Учитывая (2-18), получим формулы для вычисления значений граничной пары:

$$a = M^0 - \Delta^-; \quad b = M^0 + \Delta^+. \quad (2-21)$$

Например, для значения

$$x = 317^{+16}_{-27}$$

$$a = 317 - 27 = 290;$$

$$b = 317 + 16 = 333.$$

Величины с экспоненциальным законом распределения и с законами Релея и Вейбулла на практике задаются только параметрами распределения, т.е. первым способом. Поэтому методика преобразования их из второго способа представления в первый не рассматривается.

Теперь достаточно рассмотреть методику выбора параметров случайных чисел для первого способа представления X_i . Основной целью пользователя при решении этой задачи является обеспечение наиболее простых выражений для формирования значений X_i в модели. Эта цель достигается в общем случае путем применения "стандартных" параметров случайных чисел. Некоторые другие частные случаи будут рассмотрены ниже.

Для нескольких нормальных случайных величин:

$$X_i = \{M_i, \sigma_i\}, \dots, X_n = \{M_n, \sigma_n\}$$

существует единственная возможность - использование нормальных случайных чисел N с "стандартными" параметрами $M = 0, \sigma = 1$.

В этом случае выражения в модели для всех $i = 1, 2, \dots$ будут иметь вид $X_i = M_i + \sigma_i N$, а вторая пара чисел в ИД будет состоять из двух нулей.

Например,

$$\begin{aligned} X_1 &= \{98,4\} \dots \\ \dots X_n &= \{1700,25\} \end{aligned}$$

Выражения в модели

$$X_1 = 98 + 4N; \dots, X_n = 1700 + 25N.$$

Если же в модели имеется всего одна нормальная случайная величина $X = \{M, \sigma\}$, то её параметры можно задать случайному числу N . Тогда выражение в модели будет иметь вид: $X = M$, а вторая пара чисел в ИД будет состоять из M и σ .

Например, дано значение $X = \{105,5\}$

выражение в модели: $X = M$

вторая пара чисел в ИД: 105 5

Для нескольких равномерных случайных величин:

$$X_i = [a_i, b_i]; \dots; X_n = [a_n, b_n]$$

как и в предыдущем случае, следует выбирать случайное число P со стандартными границами $[0,1]$. В этом случае выражения для модели составляются в следующей последовательности ($i = 1, 2, \dots, n$):

- вычисляются : $2\alpha_i = b_i - a_i$, (2-22)

- в модели записываются выражения:

$$x_i = a_i + 2\alpha_i \cdot P,$$

а первая пара чисел в ИД будет состоять из нулей.

Например, $x_1 = | 94, 102 |$; ... ; $x_n = | 1675, 1725 |$;

$$2\alpha_1 = 102 - 94 = 8; \dots; 2\alpha_n = 1725 - 1675 = 50,$$

$$x_1 = 94 + 8 \cdot P \quad ; \dots ; x_n = 1675 + 50 \cdot P.$$

Если же в модели имеется одна равномерная случайная величина, то и здесь эффективнее использовать выбор случайного числа P в параметрах впадной величины. Тогда выражение в модели будет иметь вид : $x_i = P$, а значениями первой пары чисел в ИД будут a_i и b_i .

Точно такие же принципы применяются при выборе параметров, имеющих экспоненциальный закон распределения или законы Релея и Вейбулла (2.3.4).

В приложении I приведены формулы для вычисления плотностей распределения, параметров распределения, соотношений между параметрами распределений и области применения следующих законов распределений: равномерного, экспоненциального, Релея (экспонентности), Вейбулла, нормального.

Наконец, последнее число в ИД, число испытаний, достаточное для получения достоверных результатов, рассчитывается по эмпирическим формулам:

$$n \approx 300K \quad (\text{для } K \leq 5),$$

$$n \approx 100K \quad (\text{для } K \geq 5),$$

(2-23)

где

K - количество случайных величин в математической модели.

При расчетах можно делать округления по ближайшего "удобного в дальнейших расчетах" числа : 500, 1000, 3000 и т.п., при этом число испытаний должно быть кратным 100.

Правила написания чисел на бланках являются основой для предоставления численных ИД и изложены в [13, 14].

Вспомогательная процедура, описывающая моделируемую систему, составляется в полном соответствии с синтаксисом процедур языка АЛГОЛ-60, но со следующими ограничениями:

- заголовок процедур стандартный :

1198946
10.10.1970

procedure model

- тело процедуры - блок ;
- идентификатор моделируемой функции - C - глобальная переменная (в теле процедуры не описывается) ;
- идентификаторы случайных чисел - соответствующие глобальные переменные ;
- P - для равномерного распределения ;
- N - для нормального распределения ;
- E - для экспоненциального распределения ;
- R - для распределения Релея ;
- V - для распределения Вейбулла .

Правила оформления бланков с текстами ИД также изложены в [13, 14] .

Для уменьшения вероятности ошибок при написании процедуры рекомендуется выбирать идентификаторы переменных близкими по изображению с обозначениями, имеющимися в математическом описании .

Например ,

в математическом описании

α
 β
 R_1

в теле процедуры

α
 β
 R_1

Пример. Подготовка ИД для задачи определения точности изготовления тангенсного преобразователя, представленного на рис. 2-6.

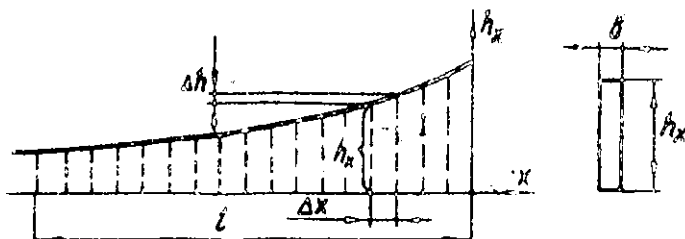


Рис. 2 - 6

Математическое описание такого преобразователя, согласно постановке задачи, представляется отношением [14] :

$$h_x = \frac{l q \Delta R}{2 \rho W \Delta x} - b,$$

где

- q - площадь сечения провода обмотки, мм² ;
- ρ - удельное сопротивление провода обмотки, Ом мм²/мм;
- W - число витков обмотки ;
- $\Delta R / \Delta x$ - изменение сопротивления обмотки на участке Δx , в соответствии с функцией преобразования .

Параллельно написанию вставляемой процедуры необходимо тщательно проверить соответствие размерностей всех значений переменных .

Параметры переменных для этого примера взяты из конструкторской документации и имеют следующие значения и законы распределения :

- $l = 45,2^{+1000}_{-1000}$ мм - нормальный;
- $q = 0,00282^{+0,000282}_{-0,000282}$ мм² - нормальный;
- $\rho = 0,00017^{+0,000005}_{-0,000005}$ Ом мм²/мм - нормальный;
- $W = 524^{+8}_{-8}$ витка - равномерный ;
- $b = 0,7^{+0,01}_{-0,01}$ мм - равномерный;
- $R = 2040^{+40}_{-40}$ Ом - нормальный .

Определим параметры случайных чисел - "стандартные" :

$$N: \{M=0,6=1\}; P: \{0,1\}$$

Для полного исследования достаточно разбить преобразователь на 7 равных частей по длине (I часть пропорциональна преобразованию по углу = 10°) и выполнить семь вариантов расчетов .

Покатаем все значения ИИ для первого варианта, т.е. для интервала .

$$0 \leq x \leq 6,457.$$

Сопротивление первого интервала (по чертежу)

$$\Delta R_1 = 10^{+40}_{-40} \text{ Ом}.$$

Значения h_x по чертежу

$$h_1 = 5,55^{+0,24}_{-0,24} \text{ мм},$$

отсюда, диапазон ожидаемых значений R_x :

$$5,32 \pm 5,8 \text{ мм},$$

поэтому первое число в ИД - ноль. Следующие пять пар чисел - тоже нули, так как параметры случайных чисел "стандартные". Последнее число ИД вычисляется по формуле (2-23) ($K = 7$):

$$100 \times 7 = 700 \approx 1000.$$

Вся последовательность ИД примет вид:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.32 1000

Для оставления процедуры model принимаем идентификаторы переменных:

переменная	-	!	идентификатор	-	!
		q			q
		p			p
		b			b
		w			w
		dR			d
		dX			x

Вставляемая процедура с учетом (2-19) и (2-21) будет иметь вид :

```
PROCEDURE MODEL;
BEGIN REAL L,Q,P,W,B,D,X;
L:=-45.2+.05/3*N;    Q:=.0026(16+.0002256/3*N);
P:=.00047+.00005/3*N;    W:=.002+43*P;
B:=.69+.02*P;    D:=140+40/3*N;    X:=(.45/+.002/3)*N;
C:=L*Q*D/(2*P*W*X)-1;
END;
```

2.2.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При описании результатов, выдаваемых программой на печать, будем пользоваться следующими обозначениями :

тек - явное представление того, что печатается всегда, независимо от конкретного решения (обычно это буквы);
<значение M> - в кавычках **< >** - пояснение значения числа, печатавшегося в указанном кавычками месте.

В этих обозначениях результаты программы "Модель" будут

иметь вид :

$uet = \langle \text{значение } \frac{m}{n} \rangle$ $m = \langle \text{значение } M \rangle$ $D = \langle \text{значение } S^2 \rangle$

$Y_{max} = \langle \text{max значение функции} \rangle$

$Y_{mi} = \langle \text{min значение функции} \rangle$

$cd = \langle 0, I \text{ размаха функции} \rangle$

k	ysx	ysf
$\langle \text{значения } k_i \rangle$	$\langle \text{средние значения функции} \rangle$	$\langle \text{фактические средние значения функции} \rangle$
в отношении kI на j -м участке при равномерном законе		на j -м участке

Всего - 10 строк значений :

Например, результат решения задачи, приведенной в 2.2.2, имеет следующий вид.

$uet = 000$ $\gamma = +3.651566$ $\beta = +.073216$

$Y_{max} = +5.200783$ $Y_{mi} = +2.1761430$ $cd = +.302464$

k	ysx	ysf
03100	+2.327375	+2.324776
07300	+2.629839	+2.590343
13700	+2.932303	+2.931188
17700	+3.234767	+3.232777
25300	+3.537231	+3.576153
13500	+3.839695	+3.809048
75500	+4.142159	+4.124019
02000	+4.44462	+4.411769
03200	+4.747087	+4.726401
05700	+5.049551	+5.000948

Время решения задачи - 25 минут.

Эти результаты позволяют сделать следующие выводы:

- высота потенциометра на первом участке спроектирована неправильно, так $M(A_1) = 3,6$ и значения Y_{max} и Y_{mi} лежат за пределами проектных,
- при использовании элементов преобразователя с принятыми в примере параметрами высота каркаса в соответствии с расчетом будет иметь разброс :

$$\frac{Y_{\text{по}} - Y_{\text{ти}}}{2} = \frac{52 - 2.2}{2} = \pm 1.5 \text{ мм.}$$

Отсюда, при изготовлении преобразователей необходимо предусматривать подгоночные операции.

Выбор размеров заготовок каркаса производится по данным расчета (h , y_{32} , y_{33}), для чего строится гистограмма полигона частот распределения значений h_x , как показано на рис. 2-7.

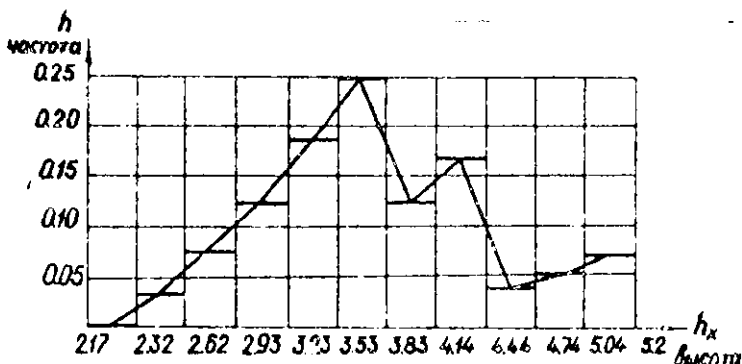


Рис. 2-7

Для уменьшения трудоемкости подгоночных работ, с помощью гистограммы устанавливаются требования к заготовкам каркаса по высоте. Для нашего примера $2,95 \leq h_x \leq 4,15$.

Выходные параметры некоторых устройств и их зависимость от параметров элементов (для справки) приведены ниже.

№ пп.	Наименование устройства	Параметры элементов		Функциональная связь
		элементов	выход	
1.	Колебательный контур	L, C	ω -собственная частота	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
2.	Делитель напряжения	E, R_1, R_2	$U_{\text{вых}}$	$U_{\text{вых}} = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
3.	Полупроводниковый усилитель	A -параметры R_n -сопротивление нагрузки	$K_u = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}$	$K_u = \frac{A_{11} + (A_{12} A_{21} - A_{22} A_{11}) R_n}{A_{11} + (A_{12} A_{21} - A_{22} A_{11}) R_n}$
4.	Электромагнитный преобразователь	$S, (\mu), \delta, \mu_0$	P -сила тяги	$P = \mu_0 \frac{(\mu S)^2}{2 \delta^2}$

2.3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.3.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЕКТИРУЕМЫХ ПРИБОРОВ

В процессе проектирования приборов должны быть учтены возможные разбросы значений параметров элементов за счет погрешностей, возникающих при их изготовлении, с целью определения вероятности получения выходных характеристик, отвечающих требованиям технического задания. Для определения конструкторско-технологических требований на параметры элементов приборов, обеспечивающих с заданной вероятностью получение выходной характеристики приборов в требуемых пределах, используем метод статистического моделирования (2.1).

Поскольку заданной является величина $\delta_{\text{вып}}$ - допустимая погрешность на выходную характеристику прибора, а неизвестными δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) - допустимая погрешность на i -й параметр элемента прибора, то решение неравенства

$$\delta_{\text{вып}} \leq f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$$

будет неоднозначным, то есть существует бесчисленное множество вариантов решения, при которых оно будет удовлетворяться.

Учитывая данные по точности получения основных параметров элементов приборов при различных вариантах конструкции и технологического процесса, поставим задачу:

определить требования на параметры элементов прибора δ_i , обеспечивающие получение выходной характеристики с требуемой вероятностью в заданных пределах $\delta_{\text{вып}}$ при минимальных затратах.

Уменьшения допустимых погрешностей или повышение точности при изготовлении приборов увеличивает их себестоимость. Связь между себестоимостью и величиной допустимых погрешностей в общем виде можно записать как

$$C = \alpha \cdot \gamma^a, \quad \text{или} \quad C = b_0 + b_1 \gamma + b_2 \gamma^2,$$

где C - себестоимость,

γ - точность (определяется допустимой погрешностью),

a, a_1, b, b_1, b_2 — коэффициенты уравнений регрессии, которые могут быть определены по статистическим данным.

Значения коэффициентов уравнений регрессии можно вычислить, пользуясь отраслевыми программами "Регрессия" или "Квадрат" (4.3., 4.4). Решение поставленной задачи рассмотрим на примере выбора метода изготовления электромагнитного реле, обеспечивающего наименьшие затраты для постижения требуемой точности. Упрощенная схема реле представлена на рис. 2-8.

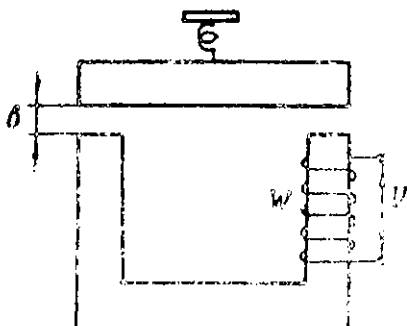


Рис. 2-8

Критерием решения поставленной задачи является обеспечение заданного диапазона времени срабатывания реле $t_{cr} = 0,010 \pm 0,005$. Величина t_{cr} определяется зависимостью:

$$t_{cr} = \frac{L}{R} \cdot \ln \frac{I_{взм}}{I_{взм} - I_{cr}},$$

где

$$L = \frac{W^2}{\mu_0 S_0 + \frac{t_c}{\mu_0 S_c} + \frac{25}{\mu_0 S_b}},$$

$$R = \frac{4 \rho l_{co} W}{\pi d^2}, \quad I_{cr} = \frac{(1W)_{cr}}{W}, \quad I_{взм} = \frac{U}{R},$$

W — число витков обмотки реле;

d — диаметр провода, мм;

U — напряжение питания, В;

ρ - удельное сопротивление провода, Ом мм²/м;

l_m - средняя длина витка, м;

$\mu_c, \mu_a, \mu_{\text{вз}}$ - магнитная проницаемость, сердечника, якоря, воздушного зазора, соответственно, Гн/м;

$(IW)_{\text{ср}}$ - ампервитки срабатывания, А ;

l_c, l_a - длина магнитопровода сердечника и якоря, соответственно, м ;

$S_c, S_a, S_{\text{вз}}$ - площадь сечения сердечника, якоря, воздушного зазора, соответственно, мм²;

δ - длина воздушного зазора, м .

Все параметры перечисленных элементов реле взяты из технической документации. Законы распределения вероятностей погрешностей определяются по табл. 2-1. Для решения задачи подготовлены ИД, согласно методике, изложенной в (2.2.2) для трех вариантов конструкции и изготовления элементов реле (табл.2-1). Подготовленные данные, для удобства и уменьшения возможных ошибок при составлении процедуры 'model' сведены в табл. 2-2.

В табл. 2-1 приведены соотношения затрат при реализации каждого из основных конструктивных элементов реле по различным вариантам. Соотношение затрат на полное изготовление реле по I, II или III варианту принимается как 3 : 2 : 1, соответственно. Напряжение питания реле изменяется в пределах $\pm 10\%$ от номинального, закон распределения колебания напряжения - равномерный .

Начиная решение поставленной задачи рекомендуется с использованием данных и конструкторско-технологическим требованиям на параметры элементов реле (табл.2-1) для III-го варианта, обеспечивающего наименьшие затраты при изготовлении.

Если в результате решения вероятность получения выходной характеристики в требуемых пределах не удовлетворяет заданию, то решение повторяется с данными (табл.2-1) для II-го варианта, дающего большую точность при изготовлении, но приводящего к большим затратам.

При необходимости решение повторяется с данными по I- у варианту, дающего наименьшие затраты. Возможны и другие

Таблица 2-1

Дарматн	I				II				Закон распределения погрешностей	Соотношение затрат на исправление параметров
	Погрешность	Требования к конструкции, технологическим процессам	Погрешность	Требования к конструкции, технологическим процессам	Погрешность	Требования к конструкции, технологическим процессам	Погрешность	Требования к конструкции, технологическим процессам		
Р - активное сопротивление катушки	+5%	Прецизионное намоточное оборудование с непрерывным автоматическим контролем числа витков для соблюдения точности в процессе намотки	-2%	Обычное намоточное оборудование, роль числа витков оператора	+10%	Обычное намоточное оборудование, роль числа витков оператора	-10%	Обычное намоточное оборудование, роль числа витков оператора	Нормаль-ный	2:1,7 :1
W - индуктивный датчик катушки		Специальный отбор на входном контроле намоточного процесса по разному сопротивлению одного метра		Специальный отбор на входном контроле намоточного процесса по разному сопротивлению одного метра		Специальный отбор на входном контроле намоточного процесса по разному сопротивлению одного метра		Специальный отбор на входном контроле намоточного процесса по разному сопротивлению одного метра	Нормаль-ный	3:1,5 :1
Р - активное сопротивление катушки	+5%	Прецизионный пресс-разовател, точность изготовления деталей, упругих элементов - 2 + 3 класс, частота обмотки (%-%) - V	-10%	Прецизионный пресс-разовател, точность изготовления деталей, упругих элементов - 2 + 3 класс, частота обмотки (%-%) - V	+10%	Прецизионный пресс-разовател, точность изготовления деталей, упругих элементов - 2 + 3 класс, частота обмотки (%-%) - V	-10%	Прецизионный пресс-разовател, точность изготовления деталей, упругих элементов - 2 + 3 класс, частота обмотки (%-%) - V	Преобразователь обычного исполнения к требованиям к упругому элементу отсутствует	3:1,5 :1

Продолжение табл. 2-1

	2	3	4	5	6	7	8	9
Б.Х. - начальная разор и дуть, про- ходный якорем	+5%	Прецизионный преобра- зователь- повтнгенные требования по сборке- оеспечение начально- го зазор. за счет подзора и регулировки. точность изготовления деталей 2+ 3 класс	+10%	Оснучный преобразо- ватель	+10%	Оснучный преобразо- ватель	Нор- маль- ный	3:1:1
С.П. - клетчат иссереж- ного соче- чия и клина сердеч- ника	+5%	Точная штамповка сборка и клейка сер- дечника и якоря в специальных приспособ- лениях, лсвошка после сборки	+10%	Оснучная штамповка и сборка	+10%	Оснучная штамповка и сборка	Нор- маль- ный	2:1:1
М. - магнитная принципе- мость май- нотропрово- да	+5%	Точная штамповка пластин, прецизион- ная сборка и клейка, поровка после сбор- ки, термообработка в вакууме	+14%	Точная штамповка пластин, прецизи- онная сборка и клейка, термообра- ботка в нейтраль- ной среде	+20%	Оснучная штамповка пластин, сынчая сборка и клейка, термообработка в воздушной среде	Закон Релея	4:2:1
М. - магнитная принципе- мость воз- душного зазора	+10%	Гетеметизация и кон- млюнирование по- мещения	+14%	Изоточное латче- ние в помещении	+20%	Требования к поме- щению не предъявля-Релея ются	Закон 4:2:1	

Таблица 2-2

Параметр (размерность)	Обозначение в программе	Проектное значение	Закон распределения	Значения σ (нМ) для различных вариантов изготовления		
				I-й вариант	II-й вариант	III-й вариант
Число витков обмотки (вит)	ω	6300	нормал.	105(+5%)	147(+7%)	210(+10%)
Диаметр провода (мм ²)	d	0,1	нормал.	0,00333	(+20% для всех вар.)	
Напряжение питания (В)	U	12	равном.	+1,2 (+10% для всех вар.)		
Удельное сопротивление провода (Ом мм ² /м)	τ	0,0175	нормал.	4375	10 ⁻⁷ (+15% для всех вар)	
Средняя длина витка обмотки (м)	l	0,0565	нормал.	9416 10 ⁻⁷ (+5%)	1383 10 ⁻⁶ (+7%)	1883 10 ⁻⁶ (+10%)
Магнитная проницаемость сердечника (Гн/м)	μ		Релея	$M=1831 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=570 \cdot 10^{-8}$ (+10%)	$M=2565 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=1341 \cdot 10^{-8}$ (+14%)	$M=3662 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=1914 \cdot 10^{-8}$ (+20%)
Магнитная проницаемость якоря (Гн/м)	μ		Релея	$M=1985 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=1038 \cdot 10^{-8}$ (+10%)	$M=2779 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=1453 \cdot 10^{-8}$ (+14%)	$M=3973 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=2077 \cdot 10^{-8}$ (+20%)
Магнитная проницаемость вазора (Гн/м)	μ		Релея	$M=4580 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=2394 \cdot 10^{-8}$ (+10%)	$M=6412 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=3351 \cdot 10^{-8}$ (+14%)	$M=9160 \cdot 10^{-7}$ $\sigma=4787 \cdot 10^{-8}$ (+20%)
Амперыжки обмотки (А)	I	70	нормал.	1,1666(+5%)	2,3333(+10%)	3,5(+15%)
Длина сердечника (м)	e	0,56	нормал.	93 10 ⁻⁵ (+5%)	18666 10 ⁻⁷ (+10%)	
Площадь сечения сердечника (м ²)	S	0,0001	нормал.	16 10 ⁻⁷ (+5%)	32 10 ⁻⁷ (+10%)	
Величина зазора (м)	δ	0,0005	нормал.	83 10 ⁻⁷ (+5%)	166 10 ⁻⁷ (+10%)	
Длина якоря (м)	z	0,018	нормал.	3 10 ⁻⁴ (+5%)	6 10 ⁻⁴ (+10%)	
Площадь сечения якоря (м ²)	f	0,00006	нормал.	83 10 ⁻⁸ (+5%)	166 10 ⁻⁸ (+10%)	
Площадь сечения вазора (м ²)	g	0,0001	нормал.	16 10 ⁻⁷ (+5%)	32 10 ⁻⁷ (+10%)	

комбинации конструкторско-технологических требований как внутри табл. 2-I, так и не предусмотренных таблицей, но встречающихся на практике.

Ниже приведен пример процедуры и исходных данных для решения задачи по III-у варианту.

PROCEDURE MOBILE

BEGIN REAL W,I,D,R,L,M,J,Y,T,E,S,B,A,F,G,K,Z;

W:=6300+210*N; D:=.1+.00333*N; U:=10..8+2.4*P;

R:=.0175+.000477*N; L:=.0565+.0018833*N;

M:=.0003662+.0001914*N; J:=.0003973+.0002017*N;

Y:=.0916₁₀-6+.04787₁₀-6*N; T:=70+3.5*N;

E:=.056+.0018566*N; S:=.0001+.0000032*N;

B:=.0005+.0000166*N; A:=.018+.0006*N;

F:=.00005+.0000016*N; G:=.0001+.0000032*N;

K:=0.1415926*D*I; Z:=4*F*L;

C:=((K*W)/(2*(E*(Y*D)+A/(T*F)+2*B/(Y*D))))*LN(K*U-T*Z) END;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 .01 .05 500

Результаты решения примера сведены в табл. 2-3.

Таблица 2-3

Конструк- торско- техноло- гические варианты изготов- ления	Вероятность выполнения требований	Среднее значение $t_{\text{ср}}, \text{с}$	Дисперсия $D(t_{\text{ср}}), \text{с}^2$	$t_{\text{ср}}$ макс.	$t_{\text{ср}}$ мин.	прини- маемое решение
I	I,0	0,0208	0,000063	0,0322	0,0134	не при- нимает- ся из-за большой стоимос- ти
II	0,096	0,0294	0,00014	0,0588	0,0172	прини- мается
III	0,096	0,0426	0,00035	0,146	0,0227	не при- нимает- ся из- за недо- статочной точности.

2.3.2. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ НА ЭТАПЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ПРОИЗВОДСТВА

Решение этой задачи рассматривается на примере стабилизированного источника для питания микросхем. Разброс значений номинального напряжения стабилизации на опорном элементе и разброс значений напряжения U_{BE} транзистора в существующей схеме компенсируется регулировкой переменного резистора $R^{\circ}16$.

Ставится задача исследовать возможность исключения регулировочного резистора $R^{\circ}16$ за счет подбора номиналов и допусков резисторов делителя $R15$, $R17$. Упрощенная электрическая схема стабилизации напряжения представлена на рис. 2-9.

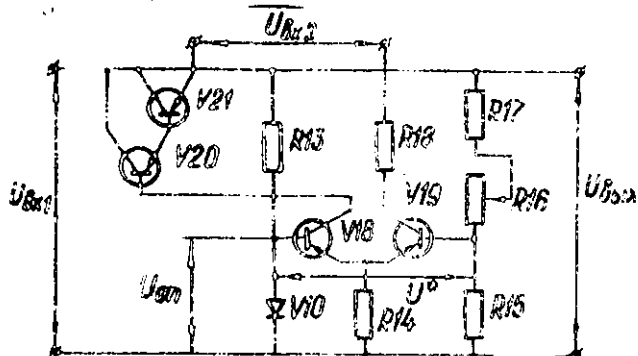


Рис. 2 - 9

Составляем уравнение для $U_{вых}$ этой схемы [43]:

$$U_{вых} = \frac{(U_{он} + U^0)(R15 + R17)}{R15} \quad (2-24)$$

На стабилизатору напряжения предъявляются следующие требования:

$$U_{вых} = +12,6 \pm 0,1 \text{ В;}$$

$$U_{вых макс} = 9\%, \Delta U_{вых макс} = \pm 5\%$$

$$U^0 = U_{BE10} - U_{BE19}, U^0 = 0,1 \text{ В (обеспечивает подбором транзисторов)}$$

Произведем расчет номинальных значений резисторов R_{17} и R_{15} .

$$R_{17} = \frac{U_{\text{вых.}} - U_{\text{ок.ком.}}}{I_1}.$$

По справочнику [35] выбираем резистор С2-13-025-2,74кОм $\pm 1\%$.

Находим значение $I_1 = \frac{U_{\text{вых.}} - U_{\text{ок.ком.}}}{R_{17}} = \frac{12 - 9}{2740} \approx 1,32 \text{ мкА}.$

Отсюда значение $R_{15} = \frac{U_{\text{ок.ком.}}}{I_1} = \frac{9}{1,32 \cdot 10^{-6} \text{ А}} \approx 6,82 \text{ кОм}.$

В [35] для R_{15} выбираем резистор С2-13-025-6,81кОм $\pm 1\%$. Для получения законов распределений значений параметров элементов схемы, входящих в уравнение (2-24) произведены измерения параметров стабилитронов Д818Е ($U_{\text{норм.}}$), резисторов С2-13-025-2,74кОм $\pm 1\%$ (R_{17}), С2-13-0,25-6,81кОм $\pm 1\%$ (R_{15}) по 50 шт. каждого. Данные измерений обработаны на ЭЦМ "Найрж-2" по отраслевой программе "Статистика" (3.1.2). Полученные результаты, а также значения напряжения $U_{\text{норм.}}$ и U^0 приведены в табл. 2-4.

Таблица 2-4

Обозначение параметров	R_{17}	R_{15}	$U_{\text{н.}}$	U^0	$U_{\text{норм.}}$
Обозначение в программе	R_1	R_2	U_1	U	C
Размерность	Ом	Ом	В	В	В
$m_{\text{н.}}$	2716,8	6820,8	9	0	12,6
$\sigma_{\text{н.}}$	8,9	18,7	-	-	-
$\delta_{\text{н.}}$	-	-	$\pm 0,05$	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$
Закон	нормальн.	нормальн.	равном.	равном.	равном.

Закон распределения напряжений U^0 на основании данных по подгруппе транзисторов принимается равномерным.

Для определения возможности исключения регулировочного резистора использована отраслевая программа "Модель" (2.2).

Исходные данные взяты из табл.2-4 :

```
PROCEDURE MODEL;
BEGIN REAL U,U1,R1,R2;
U1:=6.95+.1*P;    U:=-.1+.2*P;    C1:=2716.8+.9*N;
R2:=6820.8+18.7*N;    C:=-((U+U1)*C1+.127)*.001;
END;
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12.5 12.7 500

Результат решения имеет вид :

VRN=	.847	W=	+12.617324	D	+1.601385
YMA	+12.745008	YMI	+12.481977	YMB	+1.626303
N		YSR		YSM	
.10600		+12.495129		+12.491391	
.14000		+12.521431		+12.521424	
.09200		+12.547735		+12.553978	
.09800		+12.574038		+12.573286	
.23000		+12.600341		+12.600367	
.12500		+12.626644		+12.622128	
.02300		+12.652947		+12.662407	
.07100		+12.679250		+12.677349	
.04200		+12.705553		+12.706939	
.07100		+12.731856		+12.731730	

На основании этих результатов сделаем следующие выводы :

- в техническую документацию на стабилизатор необходимо внести типы и значения резисторов R15 C2-I3-025-6,81кОм $\pm 1\%$, R17, C2-I3-025-2,74кОм $\pm 1\%$;
- О - исключить регулировочный резистор R16 из схемы стабилизации, тем самым устраняется регулировочная ошибка при изготовлении стабилизатора, при этом регулировочное напряжение преобразован к U_{max} составит 0,5;
- создается возможность расширить диапазон U_{max} до $\pm 0,1\%$, при этом обеспечивается вероятность выполнения требований к U_{max} до $\pm 1,0\%$.

2.3.3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ НА ЭТАПЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Решение задачи надежности приборов на этапе проектирования рассматривается на примере определения вероятности попадания выходного параметра усилителя в заданное поле допуска.

Расчет надежности усилителя регулирующего устройства на этапе проектирования позволяет определить его серийноспособность, сроки и объемы профилактических работ. На рис.2-10 приведена схема каскада усилителя. Для этого требуется определить надежность работы усилителя при $T = 0$ час. (начало эксплуатации) и при эксплуатации в течение $T = 10000$ час. По конструкторской документации на усилитель, значение коэффициента усиления первого каскада в режиме холостого хода должно быть $K_{u.х.} = 26,5 \pm 10\%$. Температурный диапазон окружающей среды при эксплуатации усилителя от $+10$ до $+35^\circ\text{C}$.

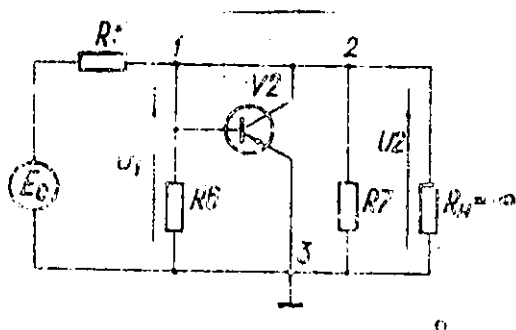


Рис. 2-10

При напряжении питания коллектора $U_k = 9\text{ В}$ элементами, подлежащими оптимизации, являются R_6 - расчетное значение $240\text{ Ом} \pm 5\%$ и R_7 - расчетное значение $820\text{ Ом} \pm 5\%$.

Пользуясь обобщенным методом узловых потенциалов, определим выражение для коэффициента усиления по напряжению в режиме холостого хода [37]:

$$K_{\text{в.с.}} = \frac{R_7 \cdot h_{21}}{(h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}) R_7 + h_{11}} \quad (2-25)$$

Средние значения h - параметров триода МП25А и их средне-квадратические отклонения, полученные обработкой измерений партии триодов в количестве 70 шт, даны в табл. 2-5.

Обработка статистических данных проведена на ЭЦМ "Наир-2" по отраслевой программе "Статистика". На основании результатов обработки h - параметров триодов можно считать, что они распределены по нормальному закону.

Таблица 2-5

$\hat{T}_{\text{нас.}}$	НОМИНАЛЬН ПАРАМЕТРЫ	R_7 (кОм)	h_{11} (кОм)	h_{12}	h_{21}	$h_{22} \cdot 10^3$ (СММ)
	ОБОЗНАЧЕНИЕ В ПРОГРАММЕ	R1	R2	R3	R4	R5
0	СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕ- НИЕ (НОМИНАЛ)	0,82	0,7407	$0,37037 \cdot 10^{-3}$	24,074	$1,9537 \cdot 10^{-2}$
	σ	0,01367	0,04938	$0,02469 \cdot 10^{-3}$	1,6049	$0,13025 \cdot 10^{-2}$
10000	σ	0,05467	0,09878	$0,02489 \cdot 10^{-3}$	3,2099	$0,26049 \cdot 10^{-2}$

Для получения необходимого решения использована отраслевая программа "Модель". Исходные данные взяты из табл. 2-5 для $\hat{T} = 0$.

PROCEDURE MODEL;

BEGIN REAL R1,R2,R3,R4,R5;

$R1 := .85 + .01367 * N;$ $R2 := .7407 + .04938 * N;$

$R3 := .00037037 + .00002469 * N;$ $R4 := 24.074 + 1.6049 * N;$

$R5 := .019537 + .0013025 * N;$

$C := (R1 * R4) / ((R2 * R5 * R1) - (R1 * R4 * R1) + R2)$

END;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 23.81 29.1 1000

Результаты решения имеют вид :

YBI= 0,955	Y= +27.565642	D= +.016367
YMI= 20.313555	YMI= +25.553167	CD= +.476038
	YBI	YCI
.00000	+25.791187	+25.770377
.00000	+26.267225	+26.290084
.00000	+26.743264	+26.815377
.00500	+27.219503	+27.273623
.01000	+27.695742	+27.749864
.01500	+28.171980	+28.196026
.02000	+28.647419	+28.666954
.02500	+29.123451	+29.277109
.03000	+29.599497	+29.657365
.03500	+30.075535	+30.259035

Из этих результатов видно, что вероятность появления выходного параметра каскада усилителя $K_{v_{out}}$ в процессе производства, в заданное поле значений $P(K_{v_{out}})_{t_{с}} = 0,955$. Для усилителя, состоящего из трех каскадов, $P(K_{v_{out}})_{t_{с}} = 0,955^3 = 0,87$, что свидетельствует о высокой серийноспособности усилителя.

Для расчета вероятности безотказной работы усилителя за время $T = 10000$ часов при изменении температуры окружающей среды от $+10$ до $+35^{\circ}\text{C}$ необходимо определить изменения средних значений и дисперсий параметров элементов схемы.

Для сопротивлений типа МЛТ-0,5 температурный коэффициент $\alpha_R = \pm 7 \cdot 10^{-4}$ на 1°C , коэффициент старения $C_R = \pm 2 \cdot 10^{-5}$ на 1 час работы, производственный допуск выбран $\delta_R = \pm 5\%$.

Считая эти погрешности независимыми и распределенными по нормальному закону, подсчитаем суммарный допуск на сопротивление $R7$ после 10000 часов работы усилителя :

$$\begin{aligned} \delta_{R7} &= \sqrt{\delta_{R7}^2 + \delta_{C7}^2 + \delta_{\alpha}^2} = \sqrt{\delta_R^2 + (C_R \Delta T)^2 + (\alpha_R \Delta t)^2} = \\ &= \sqrt{5^2 + (2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4)^2 + (7 \cdot 10^{-4} \cdot 25)^2} \approx 21\% . \end{aligned}$$

ак как параметры транзистора за это время практически не изменяются, то коэффициент старения транзистора $C_T = 0$ и в расчете не учитывается. Для транзистора типа МП25А температурный коэффициент $\alpha_{Tb} = 1,3 \cdot 10^{-2}$ на 1°C , по данным измерения

70 шт. транзисторов разброс параметров в начальный период эксплуатации составил $\approx 20\%$.

Решение проведено аналогично решению при $T = 0$ с использованием данных, взятых из табл. 2-5 для значений σ при $T = 10000$ час.

PROCEDURE MODEL;

BLNIN REAL R1,R2,R3,R4,R5;

R1:=.62+.07467*N; R2:=.7407+.9876*N;

R3:=.00037037+.00002469*N; R4:=24.074+3.2399*N;

R5:=.019537+.0026049*N;

C:=(R1*R4)/((R2*R5*R1)-(R3*R4*R1)+R2) END;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 24.0 31.5 500

Результаты решения имеют вид :

VER=	.889	ME	+23.988043	DE	+0.043713
YMA=	+32.909359	YMF=	+23.262280	CT=	+0.964707

N	YMA	YMF	YCF
.02000	+23.744034		+23.037312
.09700	+24.709342		+24.700753
.16500	+25.674050		+25.615209
.32200	+26.638756		+26.573336
.13200	+27.603466		+27.533712
.12100	+28.568174		+28.508191
.06200	+29.532882		+29.488493
.00800	+30.497590		+30.468974
.04000	+31.462298		+31.437673
.00400	+32.427005		+32.411989

Из этих результатов видно, что вероятность попадания выходного параметра каскада усилителя равна

$$P(k_{v_{n,n}})_{t=10000} = 0,889.$$

Вероятность безотказной работы каскада усилителя через 10000 часов определим по формуле

$$P(k, 10000) = P(k, 0) \cdot P\left(\frac{k-10000}{k, 0}\right),$$

где

$P(k, 0)$ — безусловная вероятность того, что каскад усилителя работает в момент $T = 0$, $k = k_{v_{n,n}}$,

$P\left(\frac{k-10000}{k, 0}\right)$ — условная вероятность безотказной работы каскада

усилителя через 10000 часов при условии, что он был работоспособен в начальный момент,

$$P\left(\frac{K, 10000}{K, 0}\right) = 1 - [P(K, 0) - P_c(K, 10000)] = \\ = 1 - [0,995 - 0,892] = 0,934.$$

Таким образом, вероятность безотказной работы каскада усилителя через 10000 часов составит

$$P(K, 10000) = 0,955 \cdot 0,934 = 0,892.$$

Вероятность безотказной работы всего усилителя, состоящего из трех каскадов, подсчитывается по формуле

$$P_c(K, 10000) = 0,892 \cdot 0,892 \cdot 0,892 = 0,731.$$

На основании полученных результатов можно построить гистограммы распределения $K_{в.д.}$ для случаев $T = 0$ час и $T = 10000$ час и установить изменение значений $M(K_{в.д.})$ и $\sigma^2(K_{в.д.})$, которые соответственно равны: $M(K_{в.д.})_{T=0} = 22,57$; $\sigma^2(K_{в.д.})_{T=0} = 0,043$

$$M(K_{в.д.})_{T=10000} = 22,97; \sigma^2(K_{в.д.})_{T=10000} = 0,0437.$$

Отсюда видно, что в процессе эксплуатации усилителя уменьшается коэффициент усиления и увеличивается разброс его значений у различных образцов.

2.3.4. ОРГАНИЗАЦИЯ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ

Во многих инженерных задачах рассматриваются сложные системы, характеристики которых меняются при изменении параметров составляющих их компонентов. Зная эти изменения и понимая структуру системы, необходимо сделать вывод о характеристике системы.

Рассмотрим пример.

Оборудование, состоящее из шести испытательных стендов, используется для проверки приборов. Каждый прибор должен пройти испытания на всех стендах. Время испытаний на определенном стенде является случайной величиной, распределение которой оценивается на основе имеющихся данных и не зависит от времени пребывания приборов на других стендах. Необходимо

найти оценку максимальной длительности испытания случайно выбранного прибора. Допустим, что распределение времени, затраченного на испытания на i -м стенде ($i = 1, 2, \dots, 6$) является таким, как показано в табл. 2-6.

Таблица 2-6

Номер стенда:	Плотность распределения	Закон и параметры распределения
1	$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - 10)^2}{2}}$	Нормальный с $\mu = 10$ и $\sigma = 1$
2	$f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{20}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - 20}{\sqrt{20}} \right)^2}$	Нормальный с $\mu = 20$ и $\sigma = 2$
3	$f_3(x_3) = \frac{1}{b-a}$	Равномерный $a = 3$ и $b = 10$
4	$f_4(x_4) = \left(\frac{x_4}{a} \right) e^{-\frac{x_4}{a}}$	Закон Релея $a = 2$
5	$f_5(x_5) = \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{x_5}{a} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x_5}{a} \right)^b}$	Закон Вейбулла $a = 2$ и $b = 1.5$
6	$f_6(x_6) = 5 e^{-5x_6}$	Экспоненциальный $\lambda = 5$

Статистическими моделями для времени испытаний на отдельных стендах приняты нормальное, равномерное, экспоненциальное распределения, распределения по закону Релея и Вейбулла.

Согласно центральной предельной теореме, распределения средних независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсией приближается к нормальному при увеличении числа наблюдений. Эта теорема применима для решения задачи, так как общая длительность испытаний равна сумме длительностей проверки на каждом из стендов.

Нас интересует распределение общего времени

$T = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$, где x_i — время на испытания прибора. В табл. 2-7 приведены численные значения

ожидания и средние квадратические отклонения (в часах), полученные с помощью выражений, приведенных в приложении I.

Таблица 2-7

Параметр	Номер стенда					
	I	2	3	4	5	6
Математическое ожидание	10	20	4,5	2,5	1,8	0,2
Дисперсия	1	2	0,75	0,85	1,48	0,04

Математическое ожидание для общего времени испытаний будет равно $M(T) = 10 + 20 + 4,5 + 2,5 + 1,8 + 0,2 = 39$ часов, а дисперсия $\sigma^2(T) = 1 + 2 + 0,75 + 0,85 + 1,48 + 0,04 = 6,12$ часов.

Принимаем, что общая длительность испытаний прибора нормально распределенная случайная величина (центральная предельная теорема) с математическим ожиданием $M = 39,0$ час и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{6,12} = 2,48$ час.

Таким образом, в случае нормального распределения 90%, 95% и 99% верхние доверительные пределы общей длительности испытаний равны соответственно ($M + 1,28 \sigma$) - 42,3 часа; ($M + 1,65 \sigma$) - 43,1 часа; ($M + 2,33 \sigma$) - 44,8 часа.

Эту задачу можно решить на ЭЦВМ методом статистических испытаний с помощью отраслевой программы "Модель".

PROCEDURE MODEL;

BEGIN READ A,B,E,D,F,G;

A:=10*N; B:=20+1.4142135*N;

C:=3+1*N, D:=205066282*N;

F:=1.8053*V; G:=.2*E;

C:=A+B+D+F+G

END;

0 0 0 0 0 0 0 0 2 1.5 2 30 35 1000

Результаты решения имеют вид :

VER= .000	M= +41.931558	D= 0.432879
YMA= +47.155069	YMI= +35.024240	CD= +1.219083
H	YSR	YSF
.01600	+35.330782	+35.258547
.08900	+36.343865	+37.025833
.12000	+38.056948	+38.108654
.08300	+39.270031	+39.288243
.07000	+40.493113	+40.589008
.06200	+41.696196	+41.829854
.16900	+42.909279	+42.931653
.22300	+44.222362	+44.165813
.08100	+45.335445	+45.123654
.07800	+46.548528	+46.472139

По этим результатам построена гистограмма общей длительности испытаний прибора (рис. 2-II).

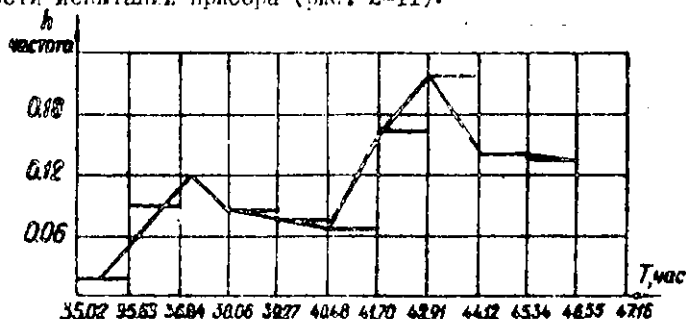


Рис. 2-II.

Эта гистограмма позволяет видеть аппроксимирующее распределение длительности испытаний прибора.

2.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ГАРЬТЫ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Среди методов прикладного системного анализа имитационное моделирование является одним из мощных инструментов исследования сложных систем, управление которыми связано с принятием решений в условиях неопределенности. Имитационное моделирование — это процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на основе ее модели для получения поведения системы, либо оценки различных стратегий,

обеспечивающие функционирование данной системы.

По сравнению с другими методами такое моделирование позволяет рассматривать большое число альтернатив, улучшать качество решений и точнее прогнозировать их последствия. Эффективность этого метода значительно возрастает при использовании ЭЦМ. Идея имитационного моделирования проста и в то же время интуитивно привлекательна. Она дает возможность последовательно экспериментировать с системами (существующими или предполагаемыми) в тех случаях, когда делать это на реальном объекте практически невозможно или нецелесообразно.

Систематическое изложение основных вопросов, связанных с построением моделей реальных систем, проведением экспериментов с моделями и управлением этими экспериментами дано в [56]. "Разыгрывание" выборок с использованием метода статистического моделирования является основным принципом моделирования систем, содержащих стохастические или вероятностные элементы (2.1.) Метод основывается на предположениях о распределениях вероятностей для переменных, участвующих на различных ступенях изучаемого процесса.

С помощью этого метода, позволяющего получить моделированную выборку, соответствующие процессы можно выполнять многократно "на бумаге" и таким способом быстро и точно накопить большое количество информации об их результатах. В итоге возникают различные численные реализации процесса, совместное рассмотрение которых дает возможность изучить его особенности.

На следующем примере покажем имитацию движения 100 приборных систем, проходящих испытания на надежность, через испытательный стенд (система массового обслуживания - одноканальная).

Основные параметры системы обслуживания:

- входной поток - требования поступают по одному в моменты времени, имеющие равномерное распределение с параметрами $\{1 \text{ мин}, 2 \text{ мин}\}$;
- обслуживающий поток - время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с функцией плотности распределения $f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}$;

- дисциплина очереди - "первым пришел - первым обслужен", т.е. требования обслуживаются в порядке поступления.

Предполагаем, что вначале в очереди требований нет.

Имитация работы системы наглядно видна из табл.2-8, в которой приведены соответствующие обозначения распечатки результатов решения.

Таблица 2-8

Номер прибор- ной систе- мы	Текущее время поступ- ления прибор- ной сис- темы на испытат- ельный стенд	Текущее время начала испытат- ельного прибор- ной сис- темы на испытат- ельный стенд	Время пробе- жения (обс- луж- ки)	Текущее время оконча- ния ис- пытания прибор- ной сис- темы на испытат- ельном стенде	Время ожидания освобо- ждения испытат- ельного стенда	Время простоя испытат- ельного стенда
---	---	--	--	---	---	---

N TPZ T BX T OBC T BIX (+) T ZAD (-)

Имитация работы этой системы обслуживания проведена на ЭВМ "Одра-1204" с использованием отраслевой программы "Модель" (2.2)

```

PROCEDURE MODEL; BEGIN INTEGER I; REAL A1,B1,
OWN REAL A,B;
IF S=0.0 THEN BEGIN A:=B:=0.0; C:=0;
PRINT(' N      T PZ      T BX      T OBC      T BIX      T ZAD')
END; I:=W+1; A:=A+P; C:=E; A1:=B-A;
S1:=(IF A1<0 THEN A ELSE A+A1); B:=B1+C;
FORMAT('123    123.123    123.123    123.123    123.123    123.123');
PRINT(I,A,B,C,B1,A1) END;

```

Результаты решения имеют вид:

N	T 12	T BX	T OBC	T BIX	T ZAD
1	1.921	1.921	1.812	2.732	-1.921
2	3.185	3.185	1.749	4.934	-1452
3	4.481	4.034	1.677	6.591	1453
4	6.042	6.596	1.164	7.761	155
	7.898	7.898	0.958	8.754	-1117
	..	..	..	..	..
	..	..	..	..	..

97	148.440	148.440	.776	149.273	-.635
98	149.880	149.880	1.435	151.332	-.625
99	151.320	151.320	1.556	152.868	-.093
100	152.980	152.980	.973	153.955	-.093
VER=	1.000	W=	-1.360135	D=	+.122489
YMA=	+1.772050	YMA=	-.753258	CD=	+.107542
	H	YS	YSF		
97	.16000	+.804529	+.789696		
	.07000	+.901071	+.920531		
	.09000	+.1.009613	+.998412		
	.09000	+.1.112156	+.1.100501		
	.09000	+.1.211469	+.1.211891		
	.09000	+.1.317240	+.000000		
	.09000	+.1.417782	+.1.437953		
	.11000	+.1.522220	+.1.540282		
	.17000	+.1.622220	+.1.612432		
	.17000	+.1.722220	+.1.734644		

Используя результаты решения, можно определить следующие характеристики системы обслуживания:

- доля простоя испытательного стенда, фактически это вероятность P_0 того, что испытательный стенд свободен $P_0 = \frac{\sum_{i=0}^{100} P_i}{100}$

- среднее время ожидания обслуживания приборной системы $E(t) = \frac{\sum_{i=1}^{100} i P_i}{P_{ак}}$

- среднее время, проведенное приборной системой в системе обслуживания, $T_{ср} = \frac{\sum_{i=0}^{100} i P_i}{P_{ак}}$

Так как время ожидания освобождения испытательной системы по своим значениям не превосходит времени обслуживания (по результатам решения), то в очереди на обслуживание более одной системы не будет и такие характеристики системы обслуживания как средняя длина очереди, ожидающей обслуживания, или среднее число требований, находящихся в системе, определять нецелесообразно.

Полученные характеристики по результатам решения системы обслуживания свидетельствуют о том, что работа испытательного стенда обеспечивает своевременное проведение испытаний приборных систем. Менять организацию проведения испытаний или увеличивать количество испытательных стендов рассматривать не представляется возможным.

П о с л о в и е

Весь изложенный в настоящей работе материал отработан и проверен с помощью программ разработанных, в основном, для ЭЦМ "Опра-1204".

Во время работы над рукописью у авторов появилась практическая возможность пользоваться еще одной ЭЦМ-ЕС-1030 с ДЭС. Как известно, ЕС-1030, по сравнению с "Одрой", может обеспечить меньше затраты времени на решение задач и предоставляет хорошие выразительные средства для оформления результатов решения (русский алфавит). Поэтому было принято решение разработать дубликаты программ "Модель", "Корреляция", "Регрессия", "Квадрат" для ЕС-1030. К моменту завершения рукописи разработан черновой вариант программы "Модель", испытания которой подтвердили надежды авторов на сокращение времени решения и хорошее оформление результатов.

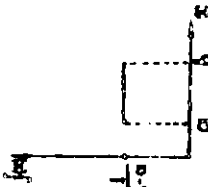
Все программы предполагается разрабатывать на языке ПЛ/1 для ДЭС версии 2.1.

После завершения исследований программы будут включены в отраслевой фонд Ульяновского политехнического института.

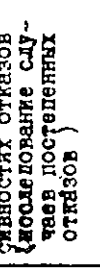
Применение этих программ для решения задач точности и надежности при проектировании, производстве и эксплуатации приборов не потребует дополнений к изложенным в пособии методам.

Приложение I

Краткие сведения о распределениях

Распределение	Условные обозн.	Применение	Примеры	Плотность распределения	Параметры распределения и план для расчетов	Примечание
I	2	3	4	5	6	7
Равномерное		а/ при равномерном изменении подматричного систематического фактора; б/ распределение погрешностей округления величин и отсчетов, полученных при измерениях на приборе; в/ дает вероятность того, что наблюдение будет лежать в определенном интервале, когда вероятность того, что наблюдение принадлежит данному интервалу, прямо пропорциональна длине интервала	Используется для генерирования случайных чисел распределения времени, оставшегося до завершения работ по сетевому графику. Распределение значения напряжения питания источников питания.	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{в ос-} \\ 0 & \text{стальных случаях} \end{cases}$ 	$a, b; a < b$ $M = \frac{a+b}{2}$ $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$ $S_{\text{н}} = 3,464\sigma$ $\sqrt{K} = 0$ $R_n = 1,8$ $\alpha'_1 = 0$ $K_1 = 1,73$	Двухна- ракет- частный случай бета - распре- деления

[illegible]

1	2	3	4	5	6	7
Распределения Рейбулла		Общее распределение времени безотказной работы при самых разнообразных интенсивностях отказов (исследование случаев постепенных отказов)	Распределение времени безотказной работы электрических устройств, таркопопунктов, магнетронов и т.п.	$\left\{ \frac{a}{m} \left(\frac{x}{m} \right)^{a-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{m} \right)^a \right] \right\}$ $a > 0, m > 0$ $M = m \Gamma \left(\frac{1}{a} + 1 \right)$ $\sigma^2 = m^2 \left[\Gamma \left(\frac{2}{a} + 1 \right) - \left[\Gamma \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \right]^2 \right]$ 		$\bar{x}$ — среднее значение эксцентриситета, $\bar{\sigma}$ — среднее квадратичное отклонение акцентриситета, $\bar{\sigma}^2$ — дисперсия метрического параметра — метр формулы $\bar{\sigma}^2$ — метр масштаба $\bar{\sigma}$ — гамма-функция (находим из таблиц)

1	2	3	4	5	6	7
Пор- ядок	Основное распределение математической статисти- ки. Когда применяется. Основное распределение цен- тров при применении теоремы. Результаты этого нормаль- ного распределения являют- ся практической моделью для многих физических яв- лений, особенно в зада- чах точности и наладочно- сти при проектировании и производстве изделий	Распределение параметров из- менений, воз- можности яв- ления факторов, механических и электрических свойств мате- риалов	$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ $-\infty < x < \infty$ $\sigma^2 = 1$ $M = 1$ $\sigma^2 = 1$ $P_1 = 0$ $P_2 = 3.0$ $P_3 = 6.6$ $\alpha_1 = 0$ $\kappa_1 = 1$ 	$-\infty < x < \infty$ $\sigma^2 = 1$ $M = 1$ $\sigma^2 = 1$ $P_1 = 0$ $P_2 = 3.0$ $P_3 = 6.6$ $\alpha_1 = 0$ $\kappa_1 = 1$	$-\infty < x < \infty$ $\sigma^2 = 1$ $M = 1$ $\sigma^2 = 1$ $P_1 = 0$ $P_2 = 3.0$ $P_3 = 6.6$ $\alpha_1 = 0$ $\kappa_1 = 1$	Параметри- ческое распределение имеется таб- лицы значе- ний интегр- альной функ- ции нормаль- ного распре- деления. Ко- эффициент статистичес- кого анализа основан на нормальном распределении

Примечание: μ - асимметрия (четвертый момент) $\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4$ - величина, измеренная отношением асим-
метрии к мере рассеяния. Этот нормированный показатель позволяет сравнивать асимметрию
нормальных распределений, имеющих различный масштаб.

μ_4 - эксцесс (четвертый момент), островершинность $\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4$ - относительный показатель
эксцесса. μ_4 - полный момент рассеяния, принятый для уровня вероятности $P = 0,9973$.

α_1 - коэффициент относительной асимметрии, характеризующий величину смещения центра
группированных отклонений от середины поля рассеивания.

$\alpha_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, где μ_3 - среднее значение, σ - стандартная погрешность, μ_3 - половина поля
рассеивания.

κ_1 - коэффициент относительного рассеивания, характеризующий, в какой степени закон
распределения отличается от закона нормального распределения, принимаемого за основной $\kappa_1 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$.
Значения α_1 и κ_1 зависят от закона распределения, т.е. являются характеристиками
исследуемого объекта или процесса.

Приложение 2

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ЗНАЧЕНИИ АСИММЕТРИИ И ЭКЦЕССА

При установлении статистической модели прибора или процесса решающим часто является выбор теоретического распределения, на котором она базируется. В литературе [51] и в приложении I даны обоснования применению различных теоретических распределений, описывающих реально явления. Выбор типа распределения должен производиться на основании соображений, вытекающих из характера исследуемого процесса. Однако инженер не всегда имеет достаточно надежные теоретические основания для принятия такого решения и вынужден подтверждать свои соображения соответствующим анализом экспериментальных данных. На основании анализа гистограмм, построенных после обработки экспериментальных данных, в некоторых случаях можно сделать соответствующие выводы о изучаемых приборах или процессах.

В других случаях бывает более желательно предлагать данные формально через эмпирические распределения, получаемые путем аналитической обработки результата эксперимента. В этих случаях аналитическая обработка обеспечивает:

- большую объективность исследования (отпадает необходимость сглаживания гистограмм);
- возможность обобщения и интерполяции на основании полученных оценок параметров эмпирических распределений;
- выбор случайных чисел, имеющих данное распределение, для статистического моделирования на ЭЦМ;
- проведение статистического анализа для проверки справедливости допущения о принятом распределении. Например, для проверки с помощью критерия W [51];
- большие возможности для использования ЭЦМ при обработке экспериментальных данных.

Первичная оценка исследуемого распределения осуществляется по его асимметрии и островершинности. Асимметрии распределений, имеющих различный масштаб, могут сравнивать

ваться по нормированному показателю $\sqrt{\beta_1} = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}$, где $M_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n f(x) dx$ - центральный n -й момент.

Острровершинность (эксцесс) распределения определяется относительным показателем эксцесса

$$\beta_2 = \frac{M_4}{M_2^2}.$$

На рис. П. I показаны области в плоскости (β_1, β_2) для различных распределений [51].

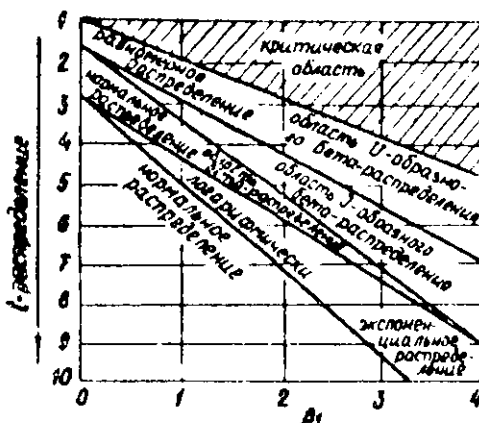


Рис. П. I

Для любого нормального распределения $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 3$, поэтому на рис. 3-I это распределение представлено одной точкой, так же как и экспоненциальное ($\beta_1 = 4, \beta_2 = 9$), равномерное ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 1,8$), Гелла ($\beta_1 = 0,4; \beta_2 = 3,36$). Такой вид представления объясняется тем, что эти распределения не имеют параметра формы, а гамма - распределение и

t - распределение (Стюдента) на рис. П-I представлены прямыми:

$$\beta_1 = \frac{2(\beta_2 - 3)}{3} \quad \text{для гамма - распределения;}$$

при $\beta_1 = 0, \quad 3 \leq \beta_2 < 10$ для t - распределения.

Кривые логарифмически - нормального распределения и

семейства эмпирического распределения Джонсона [51] заданы системой уравнений

$$\begin{cases} \beta_1 = (\omega - 1)(\omega + 2)^2, \\ \beta_2 = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3, \end{cases} \quad \text{где } \omega = e^{\omega^2}.$$

Таким образом, гамма-распределения можно покрывать для всех значений β_1 и β_2 , лежащих юлизи оредней прямой. Заме- тим также, что прямая гамма-распределения находится вбли- зи кривой логарифмически- нормального распределения. Это помогает объяснить тот факт, что эмпирические данные чао- то могут быть одинаково хорошо (плохо) описаны как гамма- распределением, так и логарифмически - нормальным.

Бета - распределение [51], имеющее два параметра формы (на рис. П. I, целая область), является более общим, чем лю- бое другое распределение. Как видно из областей распре- делений на рисунках П. I + П. 3, все они могут быть определе - ны в три группы :

- названные выше распределения ;
- семейства распределений Джонсона [51] ;
- семейства распределений Пирсона [32, 34] .

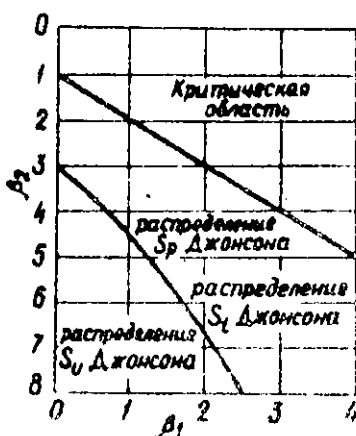


Рис. П. 2.

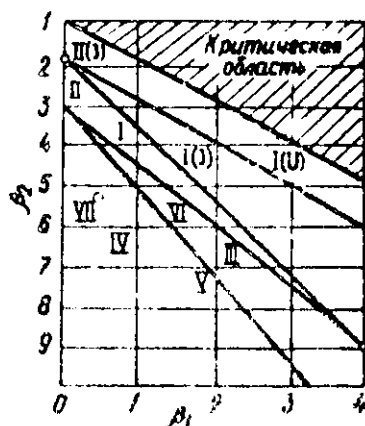


Рис. П. 3.

Эмпирические распределения Джонсона находятс путем преобразования нормированной нормально - распределенной случайной величины. Пусть x - случайная величина, для которой требуется подобрать распределение Джонсона. В общем случае преобразование имеет вид

$$x = \gamma + \eta T(x, \delta, \lambda); \quad \eta > 0; \lambda > 0; \quad -\infty < \gamma < \infty; \quad -\infty < \delta < \infty,$$

где

T - произвольная функция; γ, η, δ и λ - параметры распределения; X - нормированная случайная величина, распределенная по нормальному закону. Джонсону [51] принадлежит следующая классификация форм, или семейств, функций T :

$$1/ \quad T_1(x; \delta, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\delta}{\lambda}\right), \quad x \geq \delta; \quad (\text{семейство } S_1);$$

$$2/ \quad T_2(x; \delta, \lambda) = \ln\left(\frac{x-\delta}{\lambda+\delta-x}\right), \quad \delta < x < \delta + \lambda; \quad (\text{семейство } S_2);$$

$$3/ \quad T_3(x; \delta, \lambda) = \operatorname{Arsh} \frac{x-\delta}{\lambda}, \quad -\infty < x < \infty; \quad (\text{семейство } S_3).$$

Третья группа образуют распределения Пирсона [32, 34]. Конкретное распределение в системе Пирсона может быть получено как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(x-\alpha) f(x)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad (1)$$

для случайной величины x с плотностью распределения $f(x)$ путем надлежащего выбора параметров b_0, b_1, b_2 и α .

Принимая моду [40] за начало отсчета, уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dx} (\log f) = \frac{x - \alpha}{b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(x - \alpha)^2},$$

или

$$\frac{d}{dx} (\log f) = \frac{x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}. \quad (2)$$

Точное выражение для плотности f дает интегрирование уравнения (2) типа распределений зависят от знаменателя в (2):

$$b_0 + b_1'x + b_2x^2. \quad (3)$$

Если (3) имеет действительные корни противоположных знаков, то $f = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$; ($p, q > 0$)

Это неполный бета-функция, а распределение - бета-распределение типа I.

Если либо p , либо q лежит между 0 и 1, то одна из крайних ординат бесконечна и распределение имеет J-образную форму.

Если корни (3) действительны и одного знака, то:

$f = kx^{p_1}(x - \alpha)^{p_2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 > 1$), где $0 \leq x < \infty$, при $\alpha > 0$ и $-\infty \leq x < \alpha$ при $\alpha < 0$. Это VI тип распределения Пирсона и с помощью преобразования $y = \alpha/x$ он сводится к распределению I типа.

Если корни (3) мнимые, то получается распределение IV типа

$$f = k \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-p} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (\sigma^2 > 0).$$

Если в (3-32) $b_2 = 0$, то распределение имеет вид:

$f = k \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-p} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ ($0 \leq x < \infty$). Это III тип распределения Пирсона, или гамма-распределение случайной величины. Если корни полинома (3) равны, то

$$f = \frac{1}{\Gamma(p)} e^{-x} x^{p-1} \quad (0 \leq x < \infty)$$

представляет J тип распределения Пирсона

И т.д. распределения Пирсона являются частными случаями I типа. Наличие областей и точек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и точек α_1, α_2 на рис. 1-2 и 1, 3, свидетельствует о разнообразии форм распределений Пирсона и Джонсона. Это облегчает выбор соответствующего аппроксимируемого распределения случайной величины на основе значений параметров β_1 и β_2 .

Выборочные оценки (β_1 - оценка β_1 , β_2 - оценка β_2), получаются при обработке данных по выборкам объема n . [22]

Затем, используя рис. П. I + П. 3, выбирают ближайшую к значениям $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$ точку, кривую или область, соответствующую одному из указанных распределений. Это может быть использовано для описания экспериментальных данных и определения оценок параметров их распределения.

При применении этого метода следует учитывать два важных ограничения. Во-первых, для любого множества данных $\hat{b}_1$

$\hat{b}_2$ являются оценками λ и λ , и подвержены колебаниям от выборки к выборке, поэтому их необходимо использовать с осторожностью, особенно когда число наблюдений невелико, например, меньше 100. Во-вторых, в общем случае форма распределения не определяется однозначно его нормированными показателями асимметрии и островершинности. Таким образом, подбор распределения для описания определенного множества экспериментальных данных с помощью рис. П. I + П. 3 не гарантирует адекватности выбранной модели. Обычно требуется составить таблицу частот и сравнить подогнанное распределение с фактическими данными. В [51] описаны статистические оценки адекватности выбранной модели при помощи:

- графического метода, использующего вероятностную бумагу;
- критерия Колмогорова ;
- критерия χ^2
- критерия W

Приложение 3.

Программа "Модель "

Текст на языке АЛГОЛ-60 для ЭЦВМ "Опра-1204 "

Часть I .

```
begin real A,B,C,A1,A2,S,D,MA,MY,  
array G[1:5,0:1],F[0:9],kf[0:9,0:1],z[0:99];  
integer W,M,N,I,J,PA,l,z;  
integer array K[0:9];  
real procedure Q;  
  begin real t; own real A,B,C;  
  t:=.9000; if t=0 then goto in2 else  
    begin A:=3.14159265; B:=542101887; C:=.9003  
    end;  
  in2: t:=A+B; if t>4 then t:=t/4; B:=t; C:=t/4;  
  end;  
real procedure P;  
  begin real t; t:=A+B; if t>4 then t:=t/4;  
  B:=t; P:= if G[1,0]≠0 ∨ G[1,1]≠0 then G[1,0]+(t/4)*  
  (G[1,1]-G[1,0]) else t/4  
  end;  
real procedure N;  
  begin real t; integer i;  
  t:=0; for i:=1 step 1 until 12 do t:=t+Q;  
  N:= if G[2,0]≠0 ∨ G[2,1]≠0 then G[2,0]+(t-6.278)*  
  4.249*G[2,1] else (t-6.278)*4.249  
  end.
```

```

real procedure R;
B:= if G[3,1]<0 or G[3,0]<0 then G[3,1]-LN(Q)/G[3,0]
else -LN(Q);
real procedure R;
R:= if G[4,1]<0 then SQRT(-2*G[4,1]*G[4,1]*LN(Q))
else SQRT(-2*LN(Q));
real procedure V;
V:= if G[5,0]<0 or G[5,1]<0 then (-G[5,0]*LN(Q))
(1/G[5,1]) else -LN(Q);
switch T:=3,4,5;

```

MODULE 3

```

read(P,G,A1,A2,M); z:=0; P1:=P/01; A:=3.14159265;
B:=.542101887; C:=0; S:=0.0; MOD81;
MA:=MI:=0; W:=1; L:=0; goto M2;
M1: MOD81;
W:=W+1; L:=L+1; G[1]:=C; if L=99 then
  begin drumplace:=100-z+100; z:=z+1; todrum(100,G[0]); L:=1
  end;
M2: if C>MA then MA:=C; if C<MI then MI:=C; if C>A1 and C<A2
then H:=1+1; if W<M then goto M1; A:=H/M;
format('1.123 '); print('vers',A); D:=0; z:=z-1;
for I:=0 step 1 until z do
  begin
mk1: drumplace:=1+I+100; fromdrum(100,G[0]);
mk2: for l:=0 step 1 until 99 do D:=0+(G[l]-S)*12
  end;

```



```

D:=D/(M-1); goto T[PR];
M3: format('+123456.123456 '); print('Y',S,'D=',D);
line(1); D:=(MA-MI)/10; print('yma=',MA,'ymi=',MI,'od=',D);
line(1); goto M5;
M4: format('+123456712345 '); print('M',S,'D=',D);
line(1); D:=(MA-MI)/10; print('yma=',MA,'ymi=',MI,'od=',D);
line(1);
M5: for I:=0 step 1 until 9 do
    begin P[I]:=0.0; K[I]:=0;
    end;
for l:=0 step 1 until 9 do
    begin Kf[l,0]:=Ml+0.1; Kf[l,1]:=Kf[l,0]+2;
    end;
for I:=0 step 1 until 2 do
    begin drumblow:=1+I*100; fromdrum:=100-g[0];
    for l:=0 step 1 until 9 do
        for J:=0 step 1 until 9 do
            if g[l]>Kf[J,1] * g[l]>Kf[J,1] then
                begin K[J]:=K[J]+1; P[J]:=P[J]*g[l];
                end;
            end;
        end;
    print(' H YSA YSP');
for l:=0 step 1 until 9 do
    begin A:=Kf[l,0]+D/2; B:=if K[l]>0 then P[l]/K[l]
    else 0; C:=K[l]/M; if PR=2 then
        begin format(' .12345 +.123456712345 +.12345
        6712345'); print(C,A,B); goto M7
        end;
    format(' .12345 +123456.123456 +123456.123456');
    print(C,A,B);
M7: end;
end; 77

```

ЛИТЕРАТУРА

- Алдер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский М.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., 1976 .
- Алдер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М., 1969 .
- Автоматизация обработки экспериментальных данных в химии и химической технологии / Под ред. А.Б.Иенушида, В.Ф.Корнишко. М., МХТ им. М.В.Ломоносова, 1976.
4. Антонен И.В., Туровер М.А., Итернгарц Е.Б. Автоматические адресователи. - Механизация и автоматизация производства, 1979, №11.
5. Бусленко А.П. Моделирование сложных систем. М., 1978 .
6. Буловский П.И., Зайленберг И.Г. Надежность приборов. Л., 1976 .
7. Беричевский Б.Е. Вопросы обеспечения надежности радиоэлектронной аппаратуры при разработке. М., 1971 .
8. Буловский П.И. Основы сборки приборов, М., 1970 .
9. Беккер П., Йенсон Ф. Проектирование надежности электронных схем, М., 1977 .
10. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний и его реализация на электронных цифровых машинах. М., 1961 .
11. Буловский П.И., Микронов В.М. Технология радиоэлектронного аппаратостроения. М., 1976 .
12. Бранит Э. Статистические методы анализа наблюдений. М., 1976 .
13. Белый М.И., Туль М.П. Электромагнитные преобразователи с распределенными параметрами. Саратов, 1976 .
- Белый М.И., Туль М.П. Динамика электромагнитных механизмов. Саратов, 1977 .
- Гаррилов А.Я. Основы технологии приборостроения. М., 1976.
- Госва В.П. Технология радиоаппаратостроения. М., 1972 .
- Грановский М.В., Алдер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов. М., 1974 .
- Григорьев Д.А. Статистические методы в педагогике. М., 1974 .

19. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. М., 1977 .
20. Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, лиз, принятие решений. М., 1969 .
21. Делков В.К., Северинов Н.А. Основные вопросы эксплуатации сложных систем. М., 1976 .
22. Дрейнер Н., Смит Г. , Прикладной регрессионный анализ. М., 1973 .
23. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М., 1976 .
24. Епифанов А.Д. Надежность систем управления. М., 1974 .
25. Езекел М., Фоко А.К. Методы анализа корреляций и регрессий. М., 1964 .
26. Жигалов А.Н., Карпов В.И. Методические указания по применению ЭВМ в дипломном проектировании. М., МТИИП, 1976 .
27. Ионов И.П., Перова А.А. и др. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. М., 1977 .
28. Луду А.А.
Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. М., 1969 .
29. Колькер Я.Д. Математический анализ точности механической обработки деталей. Киев, 1976 .
30. Крецендер Б.П. и др. Решение задач надежности и эксплуатации на универсальных ЭВМ. М., 1967 .
31. Кендалл Д.Дж, Стюарт К. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., 1976 .
32. Кендалл Д.Дж, Стюарт К. Теория распределений. М., 1966 .
33. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973 .
34. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М., 1961 .
35. Малинин Р.М. Справочник радиолокающего конструктора. М., 1973 .
36. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования опытно-исследовательских экспериментов. М., 1965 .

37. Нагорный Л.Я. Анализ и расчет усилительных схем. Киев, 1961 .
38. Острейковский В.А. Многофакторные испытания на надежность. М., 1978 .
39. Нуссильник Е.М. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., 1968 .
40. Подлак Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., 1971 .
41. Применение статистических методов в производстве. М., 1963 .
42. Румянский Л.Э. Элементы теории вероятностей. М., 1976 .
43. Расчет схем на транзисторах, перевод с английского, под редакцией Меркулова Н.Н., М., 1969 .
44. Соснов Г.С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. М., 1970 .
45. Сигорский В.И. Математический аппарат инженера. Киев, 1975 .
46. Соловьев И.М. Метод Колте-Харлоу. М., 1971 .
47. Тернер Д. Вероятность, статистика и логические операции. М., 1976 .
48. Тихомиров Н.М. Увеличение производительности элементов автоматики. М., 1971 .
49. Точность проработки в магнитоэлектронике и микроэлектронике / Под ред. Заврикова А.Н., М., 1976 .
50. Фомин А.И., и др. Надежность полупроводниковых радиоустройств печатных аппаратов. М., 1969 .
51. Фан Р., Танниро С. Статистические методы в инженерных задачах. М., 1969 .
52. Червоний А.А., Мукьяшяко В.И., Котин В.В. Надежность сложных систем. М., 1976 .
53. Шилонов В.И., и др. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники. 1964 .
54. Шиполовский Э. Шерр С. Статистические методы управления качеством. М., 1976 .
55. Шакаляк Ч.В. Моделирование технологических процессов. М., 1973 .
56. Джинсон Р. Наилучшее моделирование систем - искусство и наука. М., 1975 .

М.И.Белый, М.П.Тухъ, М.А.Туронер

ТОЧНОСТЬ И НАДЕЖНОСТЬ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ
ПРОИЗВОДСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРИБОРОВ

Метод статистического моделирования

Учебное пособие
для студентов приборостроительных специальностей

ИБ 1195

Редактор Л.В.Аброськина.

ЛР 40250. Подписано к печати 24.IV.1980 г. Формат 60х80 1/16.

Бум.тип.* I. Усл.печ.л. 4,42 (4,75). Уч.-изд.л. 4,3.

Тираж 500. Заказ 4172 Цена 45 коп.

Издательство Саратовского Университета, Университетская, 42
Госаппарат Саратовской областной типографии.

