А. СИДДИҚОВ

СОНЛИ УСУЛЛАР ВА ПРОГРАММАЛАШ

"ЎЗБЕКИСТОН"

681.3
С-52

А. СИДДИҚОВ

СОНЛИ УСУЛЛАР ВА ПРОГРАММАЛАШ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
2001

БИБЛИОТЕКА
... ПП и ЛП
№ 42499

32.973–018
С52

Масъул муҳаррир: т.ф.д., профессор *Х. З. ИКРОМОВА*
Тақризчилар: т.ф.д., профессор *Р. САДУЛЛАЕВ*
т.ф.д., профессор *Ё. У. СОАТОВ*
Нашриёт муҳаррири: *А. ҲАКИМЖОНОВА*

Сиддиқов Абдулҳамид.
С52 Сонли усуллар ва программалаш: Олий ўқув қўлланма //Масъул муҳаррир: Х. З. Икромова/.—Т.: «Ўзбекистон», 2001–175 б.
ISBN 5-640-01784-5

Қўлланмада ЭҲМнинг асосий қурилмалари, уларнинг вазифалари, алгоритмлаш ва юқори даражадаги алгоритмик тилларда программалаш асослари, оммавий ҳисоблашларда ишлатиладиган сонли усулларнинг алгоритмлари ва программалари берилган. У олий ўқув юртлари талабалари, аспирантлар ва ўқитувчилар учун мўлжалланган. Қўлланмадан сонли усуллар ва программалашни мустақил ўрганаётганлар ҳам фойдаланишлари мумкин.

ББК 32.973–018

№ 553–2000
Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Республикасининг Давлат кутубхонаси

С $\frac{1602030000-68}{М351(04)2001}$ 2001

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 2001 й.

СЎЗ БОШИ

Ҳозирги кунда мураккаб масалаларни ечишда замонавий ЭҲМни қўллаш давр тақозоси бўлиб қолди. Бундан ташқари, талаба ўқув жараёнида турли умумий ва махсус фанларни ўрганишда ҳам ЭҲМдан фойдаланади. Бу уни бир хилдаги толиқтирарли ва қизиқарсиз машғулот бўлган ҳисоблашлардан халос қилиб, фаннинг асосий моҳиятига кўпроқ аҳамият беришга ҳамда уни осонроқ ва чуқурроқ ўрганишга олиб келади.

«Сонли усуллар ва программалаш» фанини ўрганиш натижасида талабалар турли масалаларни сонли ечишнинг намунавий усулларини ўрганишади, аниқ бир масалага мос самарали усулни танлаш, уни алгоритмлаш ва ЭҲМда бевосита ечиш ҳамда сонли тажрибалар ўтказиб, уларни таҳлил қилиш кўникмаларини ҳосил қилади.

Ушбу фанни ўрганиш натижасида олинган билимлар ва кўникмалар бошқа умумтехник ва ихтисосликнинг махсус фанларини, биринчи навбатда, олий риёзиёт, физика, кимё, назарий ва қурилиш механикаси, суюқликлар ва иссиқликлар ҳаракати ва бошқаларни ўрганишларида қўлланилади.

Қўлланмада замонавий ЭҲМларда кенг тарқалган БЕЙСИК алгоритмик тилида программалашнинг асосий хусусиятлари ва услублари келтирилди. Ҳар бир сонли усулга тегишли қисқача назарий маълумотлар, уларнинг алгоритмлари ва ишчи блок-схе-

малари берилган. Алгоритмларнинг амалий имкониятларини текшириш мақсадида уларнинг БЕЙСИК тилидаги программалари тузилиб, намунавий мисолларга қўлланиш баёни берилган. Алгоритмларнинг ишчи блок-схемалари ёрдамида уларнинг бошқа тиллардаги программаларини тузиш кўп қийинчилик туғдирмайди.

Қўлланмада алгоритмлаш ва программалаш асослари ҳамда сонли усуллар назариясининг мавзуларини ягона яхлитликда беришга ҳаракат қилинди.

I. ЭҲМ ВА УЛАРНИ АМАЛИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШГА ҚЎЛЛАШ

Фан ва техниканинг ривожланиши, ишлаб чиқаришда ва халқ хўжалигини бошқаришда мураккаб масалаларни ечишга бўлган талаб инсоннинг беминнат ёрдамчиси бўлган электрон ҳисоблаш машиналарига (ЭҲМ) бўлган қизиқишини ундан фойдаланишга бевосита эҳтиёж даражасига кўтарди. ЭҲМ программа билан бошқариладиган станокларда, илмий тадқиқот ишларидаги мураккаб масалаларни ечишда, касаллик варақаларини тўлдириш, уларни сақлашдан тортиб унинг турини аниқлашда, даволаш йўлларини белгилашда, транспорт ҳаракати графигини тузишда, ишларни оптимал режалаштиришда, халқ ва қишлоқ хўжалигининг, бошқаришнинг барча жабҳаларида кенг қўлланилмоқда.

ЭҲМ техник жиҳатдан қаралганда, маълумотларни йиғиш, сақлаш, қайта ишлаш ва узатишга мўлжалланган физик қурилмалар мажмуидир. Фойдаланувчи учун эса у амалий масалаларни ечишда ёрдамчи воситадир.

1.1. МАСАЛАЛАРНИ ЭҲМда ЕЧИШНИНГ АСОСИЙ БОСҚИЧЛАРИ

Амалий масалаларни ЭҲМда ечиш жараёни масала қандай даражада қўйилганлигига қараб турлича босқичларни ўз ичига олиши мумкин. Лекин улар асосан қуйидагилардан иборат:

1. ***Масаланинг мутахассис томонидан қўйилиши.*** Мутахассис ечмоқчи бўлган масаланинг моҳияти ва мақсадини, мумкин бўлган соддалаштиришларни, кутиладиган натижаларни баён қилади.

2. ***Масаланинг математик моделини қуриш.*** Бу босқичда масаланинг математик модели — масаланинг мақсадини ва ўзгарувчиларнинг ўзаро боғланишини ифодаловчи математик муносабатлар, боғланишлар мажмуи ишлаб чиқилади. Бунинг учун эркин ва боғлиқ ўзгарувчилар аниқ-

ланади, уларга қўйилган чекланишлар ва ўзгарувчиларнинг ўзаро боғлиқлиги математик муносабатлар ёрдамида ифодаланади. Натижада бирор бир математик масалага келинади.

Ихтиёрий математик моделни қуриш учун, айниқса, физик ва технологик жиҳатдан янги ишланмалар олиниши керак бўлганда умумий бўлган тавсия бериш мумкин эмас.

Математик модел назария ёки тажрибалар натижасида қурилади ва қаралаётган жараённи қанчалик акс эттириши баҳоланади. У жараённи аниқ ва тўла ифодаласа, *адекват модель* деб аталади. Модель назарий усулда олинганда қаралаётган жараён учун умумий бўлган, тўғрилиги исботланган физик муносабатлар (масалан, энергиянинг сақланиш қонуни, моддий баланс, ҳаракатнинг узлуксизлиги тенгламалари ва бошқалар каби)га асосланилади ва модель аналитик шаклда олинади. Тажрибалар асосида олинган моделлар эмпирик дейилиб, кузатилган ва ўлчанган маълумотлар сифатига боғлиқ бўлади.

Вақт ўзгаришига боғлиқ модель *динамик*, акс ҳолда *статик* дейилади. Маълумотларнинг берилишига қараб моделлар детерминирланган ёки эҳтимолий бўлади. Эҳтимолий моделларда жараёнга таъсир этаётган баъзи бир ўзгарувчилар тасодифий миқдорлар деб қаралиб, уларнинг таъсири эътиборга олинган бўлади. Аксинча, детерминирланган моделларда бундай ўзгарувчилар эътиборга олинмайди. ЭҲМ имкониятларининг ошиши натижасида кечаётган жараённи математик муносабатлар орқали тасвирловчи имитацион (тақлидий) моделлар қуриш ва улар асосида жараённи ўрганиш, кузатиш, маълум бир хулосаларга келиш кенг қўлланила бошланди. Янги-янги масалаларнинг математик моделларини яратиш ва ечишга интилиш математика фани олдига ҳам янги муаммоларни қўйиш билан унда янги бўлимларнинг пайдо бўлишига олиб келди ва олиб келмоқда. Масалан, телефон автомат станциялари, ёғ қуйиш тармоқлари ва савдо шохобчаларининг ишини моделлаштириш ялпи хизмат назариясининг, иқтисодий муносабатлар ва ҳарбий ишлар стратегияси ва тактикасини ишлаб чиқиш масалаларини ечиш ўйинлар назариясининг пайдо бўлишига ва математиканинг таркибий қисмлари сифатида шаклланишига олиб келди.

Шундай қилиб, бу босқичда фанга маълум бўлган ёки бутунлай янги математик масала ҳосил қилинади.

3. ***Математик масалани ечиш усулини танлаш ёки ишлаб чиқиш.*** Ҳозирги кунда жуда кўп масалаларни ечиш усуллари назарий томондан ишлаб чиқилган ва амалий жиҳатдан текшириб кўрилган. Бундай усуллар математиканинг сонли усуллар бўлимида ўрганилади. Бир турдаги масалани бир неча усулларда ечиш мумкин. Улар бир-биридан соддалиги, аниқлиги, ечимга яқинлашиш тезлиги, бошланғич маълумотларга нисбатан турғунлиги ва бошқа хоссалари билан фарқланади. Масалан, бир ўзгарувчининг $f(x)$ функциясидан олинган $\int_a^b f(x)dx$ интеграл, интеграл остидаги функция етарлича силлиқ бўлганда трапециялар, тўғри тўртбурчаклар, Симпсон, Ньютон-Котес, Гаусс, Чебишев, Мелер ва бошқа квадратур формулалар билан ҳисобланиши мумкин.

Албатта, математик модель ҳали математикада ўрганилмаган масалага олиб келса, уни ечиш усулини ишлаб чиқиш керак бўлади.

4. ***Ҳисоблаш алгоритмини танлаш ёки ишлаб чиқиш.*** Алгоритм — масаланинг ечимига олиб келадиган аниқ, бир маъноли ва чекли сонда бажариладиган кўрсатмалар кетма-кетлигидир. Қаралаётган масалани ечиш усулини амалга ошириш (реализация) жиҳатидан соддалиги, ҳисоблаш учун кетадиган вақти, ЭҲМ хотирасидан эгаллайдиган ўрни, бошланғич ва яхлитлаш хатоликларининг тарқалиши ва бошқа хусусиятлари билан фарқланадиган ҳар хил алгоритмлари мавжуд бўлиши мумкин. Шунинг учун танлаш имконияти бор ва бундай масала ҳал қилиниши керак. Бу босқичда ҳам бутунлай янги масалалар (усуллар) учун унинг алгоритмини яратиш, тузиш эҳтиёжи туғилиши мумкин. Бундан ташқари баъзи бир усуллар моҳиятан алгоритмикдир, яъни уларни математик формулалар ёрдамида тавсифлаш имконияти йўқ, маълум бир кўрсатмаларни кетма-кет бажариш натижасида масала ечими олинади. Масалан, кейинги пайтда кенг қўлланилаётган, кибернетика ютуқларига асосланувчи усуллар — эвристик моделлаштириш, имитацион моделлаштириш ва сонли тажрибалар усуллари каби.

5. ***Ҳисоблаш программасини тузиш ёки танлаш.*** Ҳозирги кунда катта универсал ЭҲМлар ва кичик шахсий ЭҲМларнинг математик таъминоти таркибида жуда кўп усул-

лар алгоритмларининг программалари мавжуд. Бундан ташқари муайян соҳага оид масалаларни ечишга мўлжалланган амалий программалар тўплами ишлаб чиқилган ва ишлаб чиқилмоқда. Ўзининг самарадорлиги, аниқлиги ва тезкорлиги билан фойдаланувчини қаноатлантирувчи ва мавжуд ЭҲМ учун танланган программалаш тилида ёзилган программа танлаб олинади ёки бевосита программаловчи томонидан тузилади. .

Программа — алгоритмнинг машина ёки бирор алгоритмик тилдаги ёзувидир. Программани тузиш жараёнига *программалаш* дейилади.

6. ***Программани созлаш.*** Программа ЭҲМ хотирасига киритилади, унда йўл қўйилган хатолар тузатилади ва унинг тўғрилигини текширишга мўлжалланган намунавий масалаларда ишлатиб кўрилади. Бунинг учун ЭҲМда хатони аниқлаш ва у ҳақда маълумот берувчи махсус воситачи программалар ва қурилмалар мавжуд. Бу босқич программалаш жараёнининг энг қийин ва узоқ давом этадиган қисмидир.

7. ***Бевосита ЭҲМда ҳисоблаш ва натижаларни таҳлил қилиш.*** Ўзгарувчиларнинг тадқиқотчини қизиқтирган қийматларида ҳисоблашлар бажарилади. Бунда олинган натижалар масаланинг мақсадига жавоб бериш-бермаслиги, техник ёки технологик жиҳатдан мантиқан тўғри келиш-келмаслиги таҳлил қилинади. Агар улар қаноатлантирарли, мантиқан тўғри бўлса, уларга асосланиб илмий-техник ишланмалар ишлаб чиқилади. Акс ҳолда юқорида санаб ўтилган ҳар бир босқич ёки шубҳали бўлганлари қайтадан кўриб чиқилади.

Келтирилган босқичлар ҳамма масалаларни ечиш учун мажбурий эмас. Масаланинг мураккаблигига ва катта-кичиклигига қараб ихтиёрий биттаси ташлаб ўтилиши, қаралмаслиги мумкин.

1.2. ЭҲМнинг АСОСИЙ ҚУРИЛМАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ВАЗИФАЛАРИ

ЭҲМ техник жиҳатдан мураккаб электрон қурилмалардан иборат бўлиб, улар ҳар хил ЭҲМларда турли таркибда ва ишланмада ташкил қилинган. Мантиқий жиҳатдан бу қурилмаларни уч гуруҳга ажратиш мумкин:

1) киритиш-чиқариш қурилмалари;

2) процессор;

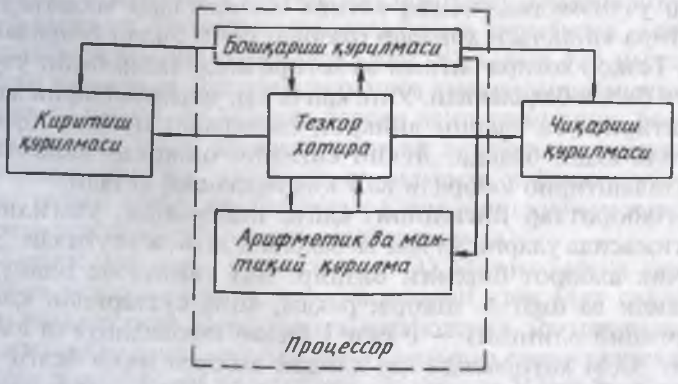
3) ташқи маълумот тўплагичлар (ташқи хотира).

ЭҲМларни бундай таркибда қуриш 40-йиллар охирида фон Нейман томонидан тавсифлаб берилган. Бунга асосан ЭҲМларнинг умумий қурилиши 1.1-расмдагидек бўлади.

ЭҲМнинг марказий қисмини процессор ташкил қилади. У арифметик ва мантиқий, бошқариш қурилмалари ҳамда тезкор операцион хотирадан иборат. Аслида том маънодаги ҳисоблаш ишларини мана шу қурилма бажаради. Қайта ишланиши керак бўлган маълумотлар киритиш қурилмаси орқали тезкор хотирага киритилади, қайта ишлангандан кейин бирор чиқариш қурилмасига узатилади. Шунинг учун маълумотларни *киритиш* дейилганда ташқи қурилмадаги маълумотни процессор тезкор хотирасига узатиш тушунилади. Аксинча, тезкор хотирадаги маълумотларни ташқи хотирага узатиш *чиқариш* дейилади. Бу қурилмаларнинг вазифаларини кўриб чиқамиз.

Арифметик ва мантиқий қурилма. У барча арифметик ва мантиқий ҳисоблашларни бажаради. Улар минглаб элементлардан ташкил топган электрон схемалардир. Улар микросхемалар деб аталиб, юқори зичликка ва тез ишлаш қобилиятига эгадир.

Бошқариш қурилмаси. Бошқариш қурилмаси ЭҲМнинг барча ишларини бошқаради. Бу ерда киритилган ахборотлар оқими баҳоланади, қачон, қандай ва қайси воситалар билан қайта ишлаш кераклиги аниқланади. Бошқариш



1.1.-расм.

қурилмаси арифметик ва мантиқий қурилмаларга бажарилиши керак бўлган ишлар кетма-кетлигини, маълумотлар манбаини ва натижаларни қаерга жойлаштириш ёки юбориш кераклигини кўрсатади.

Бошқарувчи сигналлар буйруқлар (команда) кетма-кетлиги асосида ташкил қилинади. Буйруқ — ҳисоблаш машинасида бирор операцияни бажаришда қўлланиладиган махсус код. Буйруқ икки қисмдан иборат: операция коди ва адрес. Адрес қисмига операцияда қатнашувчи операндлар турган катакчалар тартиб сони (номери), операнднинг таркиби (соннинг катталиги), операция натижаси жойланадиган адрес ҳақида маълумотлар жойланади.

Операция-ҳисоблаш машинаси катталиклар устида программанинг бирор буйруғи бўйича бажарадиган иши (ҳисоблаш амаллари, маълумотни узатиш, сонларни солиштириш ва ҳоказолар).

Операнд-операцияни ташкил қилувчилар, операция татбиқ қилинаётган объектлар.

Бошқариш қурилмасининг бажариши керак бўлган операциялар кетма-кетлиги хотирада сақланади ва машина кодидаги *программа* дейилади. Код — ахборотнинг 0 ва 1 рақамлари кетма-кетлигида, иккили саноқ системасидаги ифодасидир.

Тезкор хотира. Бу қурилма бошқариш қурилмаси учун буйруқларни ва арифметик-мантиқий қурилма учун катталикларни сақлайди. У маълум ҳажмдаги хотира катакчаларидан иборат. Хотира катакчаси-битта машина сўзини сақлаш учун мўлжалланган хотира элементлари мажмуидир. Хотира катакчаси хоналар (разряд) сони билан белгиланади. Тезкор хотира сиғими ва хотира катакчаларининг узунлиги билан баҳоланади. Унга қанча кўп маълумотларни жойлаштириш ва уларни аниқроқ тасвирлаш мумкин бўлса, шунча яхши бўлади. Лекин сиғимни ошириш машинани катталаштириб юборади ва у қимматлашиб кетади.

Ахборотлар йиғилиши, қайта ишланиши, узатилиши натижасида уларни ўлчаш ва баҳолаш эҳтиёжи туғилди. Энг кичик ахборот бирлиги битдир. Бит (инглизча binary — иккили ва digit — ишора, рақам, хона сўзларидан қисқартириб олинган) — 0 ёки 1 билан ифодаланувчи ахборот. ЭҲМ хотирасида ҳар қандай ахборот икки белги «0» ёки «1» билан ифодаланади. Чунки бу «йўқ» — «ҳа» принципидаги маълумотлар тасвирланишини жуда яхши ифо-

далайди. Масалан, 0 ва 1 га ток импульсининг «бор — йўқлиги», кучланиш даражасининг «қуйи — баланд»лиги, магнитланганликнинг «манфий — мусбат»лиги, перфокартада тешикчанинг «бор-йўқ»лиги ва бошқаларни тасвирлаш мумкин.

Битдан катта асосий ахборот бирликлари: байт=8 бит, ярим сўз = 2 байт = 16 бит; сўз = 4 байт = 32 бит ва иккиланган сўз = 2 сўз = 8 байт = 64 битдир.

ЭҲМ сиғимини ифодалаш учун: Кбайт (килобайт) = 1024 байт, Мбайт(мегабайт) = 1024 Кбайт, Гбайт (гигабайт) = 1024 Мбайт, Гбайт (терабайт)=1029 Гбайт ишлатилади.

Инсоннинг ЭҲМ билан «Мулоқот» қилиши учун одам томонидан ишлатиладиган ҳарфлар, ҳар хил математик ва техник белгилар иккили кодларда кодланади ва ишлатилади (киритилади, сақланади, қайта ишланади, чиқарилади ва бошқалар).

Ҳар бир белгига 0 ва 1 нинг 8 та маълум комбинацияси мос қўйилади. Ҳаммаси бўлиб 2^8 = 256 та белги фарқланиши ва ишлатилиши мумкин бўлади. Ҳозирги замон ЭҲМларининг тезкор хотираси сиғими бир неча Кбайтлардан ўнлаб Мбайтларгача қилиб ишланмоқда.

Киритиш — чиқариш қурилмалари. Маълумотларни ЭҲМга перфокарта, перфолента, магнитли лента, эгилувчан диск, сканер ва Дисплей клавиатурасидан киритиш мумкин. Энг кўп тарқалган киритиш қурилмаси Дисплей клавиатурасидир, чунки ундан фойдаланилганда тез ва осон тузатишлар қилиш мумкин.

ЭҲМда қайта ишланган маълумотлар: перфокартага, перфолентага, эгилувчан дискка, босма қурилмага, алифбо-рақамли босиш қурилмаси (АЦПУ)га, эни 420 мм гача бўлган қоғозга ва Дисплей экранига чиқарилиши мумкин. Мини ва микро ЭҲМларда асосан эгилувчан диск, босма қурилма, Дисплей клавиатураси ва экрани ишлатилади. Булардан ташқари киритиш қурилмаси сифатида «Сичқон», нурли трубкалар (найчалар), чиқариш қурилмаси сифатида эса граф-ясагичлар ишлатилмоқда.

Ташқи маълумот тўплагичлар: ЭҲМнинг ташқи хотирасини ташкил қилади, маълумотларни узоқ вақт сақлаш учун ишлатилади. Перфокарта, перфолента, магнитли лента, эгилувчан диск ва лазер нури ёрдамида ёзишга мўлжалланган дисклар маълумот тўплагичлардир. У ёки бу тўплагични ишлатиш ЭҲМнинг техник имкониятига боғлиқ.

1.3. МАЪЛУМОТ ТУРЛАРИ ВА ТУЗИЛИШИ

ЭҲМда қайта ишлашга мўлжалланган ахборотлар маълумотлар деб аталади. Маълумотлар бошланғич (киритиладиган), оралиқ (ички) ва натижавий (чиқариладиган, якуний) гуруҳларга бўлинади. Маълумотлар оддий бўлакларга бўлиниб, ҳар бир бўлак маълумот элементи — элементар маълумот дейилади. Маълумотнинг тури унинг қандай қиймат қабул қилишига боғлиқ. Бутун ва ҳақиқий сонлар, сўз ва буль (Ж. Буль — инглиз математиги) миқдорлари кўп қўлланиладиган элементар маълумотлардир.

Сонларни тасвирлашда позицион ва нопозицион саноқ тизимлари ишлатилади. Сонларни ёзиш қоидалари, белгилари, рақамлар ва уларнинг номлари саноқ тизимини ташкил қилади. Сонларни ҳосил қилишга ёрдам берадиган асосий рақамлар сони саноқ тизимининг асоси, рақамлар эса базис дейилади.

Позицион саноқ тизимида рақамнинг қиймати унинг турган ўрнига боғлиқ. У ўзининг асоси q билан характерланади (ёзувда ишлатиладиган рақамлар сони). Ўнли саноқ тизимининг асоси $q = 10$ бўлиб, унда 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — ўнта рақам ишлатилади. Сонни ҳар хил саноқ тизимларида ёзганда унинг қайси тизимда ифодаланганлигини кўрсатиш керак бўлади. Масалан, 123_8 — саккизли, 9999_{10} — ўнли, 01011101_2 — иккили саноқ тизимида ёзилган сонлардир.

Нопозицион саноқ тизимларида рақамнинг қиймати унинг ўрнига боғлиқ эмас. Масалан, римча саноқ тизимида V — бешни, X — ўнни, L — элликни, I — бирни, G — юзни билдиради. Бу белгилар ёрдамида сонлар ташкил қилинади. Масалан, XXX — ўттиз, 4X — олтмиш, XC — тўқсон ва ҳоказо.

ЭҲМда фақат позицион саноқ тизими ишлатилиб, асосийси иккили тизимдир. Бундан ташқари саккизли, ўн олтили ва аралаш саноқ тизимлари ҳам ишлатилади.

a_q сон q асосли тизимда:

$$a_q = \underbrace{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0}_{\text{бутун қисми}}\ ,\ \underbrace{\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-l}}_{\text{каср қисми}} \qquad (1.1)$$

кўринишда тасвирланади. Бу ерда α_i тизимнинг ихтиёрий рақами. i — рақамнинг ёзувдаги ўрни (разряди). Рақамнинг

қиймати вергулдан чапга қараб q марта ошиб, ўнгга қараб q марта камайиб боради. Шунинг учун сонни тизим асосининг даражалари бўйича

$$a_q = \alpha_{n-1}q^{n-1}+\alpha_{n-2}q^{n-2}+...+\alpha q+\alpha_0+\alpha_{-1}q^{-1}+...+\alpha_{-l}q^{-l} \quad (1.2)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин. Масалан, ўнли саноқ тизимида q=10, $135,552_{10}=1\cdot10^2+3\cdot10^1+5\cdot10^0+5\cdot10^{21}+5\cdot10^{-2}+$ $+2\cdot10^{-3}$ тенглик ўринлидир.

Саккизли саноқ тизимида q — саккиз. Саккизта: 0,1,2, 3,4,5,6,7 рақамлар ишлатилади. Саккиздан ортиқ сонлар бир неча рақамлар билан ёзилади. Асоси саккиз 10 билан белгиланади ва бу белги 0 та бирлик ва 1 та саккизлик борлигини билдиради.

Иккили саноқ тизимида q — икки. Иккита: 0 ва 1 рақамлари ишлатилади. Бирдан ортиқ сонлар бир неча рақамлар билан ёзилади. Соннинг асоси q =10 билан белгиланиб, у 0 бирлик ва битта иккилик эканлигини билдиради.

Иккили саноқ тизимида сонларни қўшиш:

0+0=0, 1+0=1, 0+1=1, 1+1=10,

кўпайтириш:

0X0=0, 1X0=0, 0X1=0, 1X1=1

қоидаларига асосланади.

Ўн олтили саноқ тизимида 16 та: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F белгилари ишлатилади. Ўн бешдан ортиқ сонлар бир неча белги билан ёзилади. Асоси q =10 кўринишида ёзилиб, бу ёзув 0 бирлик ва битта 16 лик борлигини билдиради. Хоналарнинг қийматлари:

..., 4096, 256, 16, 1/16, 1/256, 1/4096, ...

га тенг.

Аралаш саноқ тизимлари. Бу тизимда сонлар бир саноқ тизимида ёзилган сон рақамларини бошқа тизим асоси бўйича ёзиб ташкил қилинади. Масалан, 2—10 ли саноқ тизимида:

$925_{10}=100100100101_{2-10}$,

$689,47_{10}=011010001001,01000111_{2-10}$.

Ўнли саноқ тизимидаги рақамларни 2—10 саноқ тизимида ифодаланиши қуйидагича:

$0_{10}=0000_{2-10}$, $4_{10}=0100_{2-10}$, $7_{10}=0111_{2-10}$,
$1_{10}=0001_{2-10}$, $5_{10}=0101_{2-10}$, $8_{10}=1000_{2-10}$,
$2_{10}=0010_{2-10}$, $6_{10}=0110_{2-10}$, $9_{10}=1001_{2-10}$,
$3_{10}=0011_{2-10}$.

Саккизли саноқ тизими ва икки-саккизли саноқ тизими орасидаги муносабатлар:

$0_8=000_{2-8}$, $3_8=011_{2-8}$, $5_8=101_{2-8}$, $6_8=110_{2-8}$,
$1_8=001_{2-8}$, $4_8=100_{2-8}$, $2_8=010_{2-8}$, $7_8=111_{2-8}$.

Бир саноқ тизимидан бошқа саноқ тизимига ўтиш. Бирор масалани ЭҲМда ечилганда бошланғич маълумотлар ўнли саноқ тизимида тайёрланади, тўпланади. ЭҲМлар эса бошқа саноқ тизимларида ишлайди. Шунинг учун кўпинча бир саноқ тизимидан бошқа бир саноқ тизимига ўтишга тўғри келади. Албатта ЭҲМда бу жараён автоматик тарзда бажарилади ва фойдаланувчи учун бу жараён сезилмайди. Лекин унинг қандай бажарилишини билиш жараённи яхши тушунишга имкон беради.

Ихтиёрий *q* асосли саноқ тизимидан ўнли саноқ тизимига ўтганда соннинг асос бўйича ёйилмаси ишлатилади. Ҳисоблар ўнли саноқ тизимида бажарилади. Масалан,

$$5761_8=5\cdot8^3+7\cdot8^2+6\cdot8^1+1\cdot8^0=2560+448+48+1=3057_{10},$$

$$af,4_{16}=10\cdot16^1+15\cdot16^0+4\cdot16^{-1}=175,25_{10}$$

Ўнли саноқ тизимидан ихтиёрий q асосли саноқ тизимига ўтиш.

Ўнлидан саккизлига ўтиш: сонни саккизга бўлинади, қолдиқ энг кичик хона бўлади, бўлинма яна саккизга бўлинади, қолдиқ кейинги хона бўлади, бўлинма яна саккизга бўлинади ва ҳоказо. Охири саккиздан кичик сон қолади ёки қолдиқсиз бўлинади. Ҳамма қолдиқларни охиридан бошлаб тартиб билан ёзиб чиқилади. Ҳосил бўлган сон қаралаётган соннинг саккизли тизимдаги ифодаси бўлади. Масалан, 972_{10} соннинг саккизли тизимдаги ифодасини топайлик. 972 ни саккизга бўлсак, 4 қолдиқ билан 121 дан тегади. Бўлинмани 8 га бўлсак, 15 тадан тегиб, 1 қолдиқ қолади ва 15 ни 8 га бўлганда 1 дан тегиб, 7 қолдиқ қолади ва бўлинма 1 саккизга бўлинмайди. Шундай қилиб, $972_{10}=1714_8$ эканлигини аниқлаймиз.

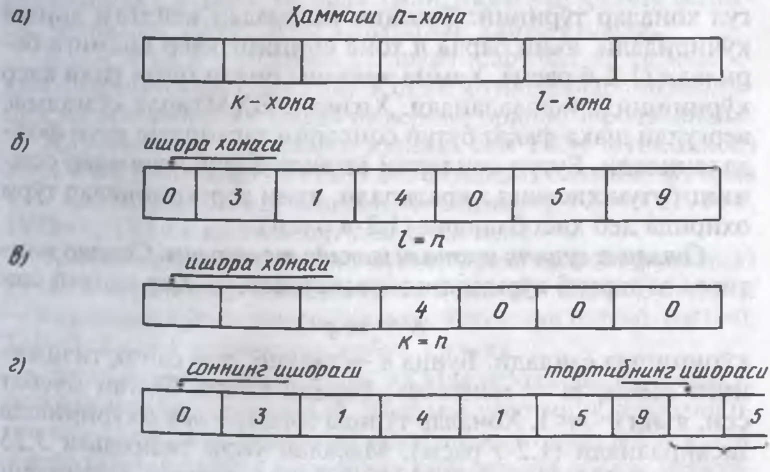
Касрни саккизли тизимда тасвирлаш учун уни саккизга кўпайтирилади, натижанинг бутун қисми саккизли тизимдаги соннинг энг катта хонаси бўлади. Каср қисмини яна 8 га кўпайтирамиз, кўпайтманинг бутун қисми саккизли тизимдаги соннинг кейинги хонасидаги рақам бўлади. Каср қисмини яна 8 га кўпайтирамиз ва соннинг кейинги хонасидаги рақамни аниқлаймиз ва ҳоказо. Кўпайтириш касрда фақат ноллар қолгунча ёки керакли аниқликда ҳисоблангунча давом эттирилади. Масалан, $0,5723_{10}$ сонини саккизли тизимда ифодалайлик:

0,5723	0,5784	0,6272	0,0176	0,1408
× 8	× 8	× 8	× 8	× 8
4,5784	4,6272	5,0176	0,1408	1,1265

Демак, $0,5723_{10}=0,44501_8$.

Аралаш соннинг олдин бутун қисми, кейин каср қисми керакли саноқ тизимига ўтказилади.

Саккизли саноқ тизимидаги соннинг иккили тизимдаги тасвири билан унинг 2—8 тизимдаги тасвири бир хил бўлади. Шунинг учун ўнли тизимдаги сонни иккили тизимга ўтказиш учун уни аввал саккизли тизимда тасвирлаб, сўнг 2—8 ли тизимда ёзган маъқул.



1.2-расм.

Исталган тизимдан бошқа бир тизимга ўтиш учун олдин ўнлига ўтиб кейин керакли тизимга ўтилади.

Сонларни ЭҲМда тасвирлаш. Машинада сонларни ёзиш учун хонали тўрлар ишлатилади. Уларни шартли равишда 1.2-расмдагидек тасвирлаш мумкин. Ҳар бир хонага битта рақам ёзилади. Сонларни ёзиш имконияти нафақат умумий хоналар сонига, балки бу хоналарни соннинг бутун (k — хона) ва каср қисмларига (l — хона) тақсимланишига ҳам боғлиқ бўлади (1.2-*а*-расм). Агар соннинг бутун қисмидаги рақамлар сони ажратилган хоналар сонидан кўп бўлиб қолса, катта хоналар тўри тўлиб тошиб кетади ва хато натижага олиб келади. Бу мумкин эмас. Аксинча, каср қисмидаги 0 рақамлар сони l дан катта бўлса, тўрнинг кичик хоналари сони етарли бўлмайди. Натижада бу ҳисоблаш аниқлигига таъсир қилади.

Тўр хоналаридаги вергулнинг ўрнига қараб сонлар: қўзғалмас ва сузувчи вергулли усулларда тасвирланади. Биринчи ҳолда сонларнинг ёзувида вергулнинг ҳолати (ўрни) қўзғалмас қилиб қўйилган. Масалан, агар машина қурилмаси олти хонадан иборат бўлиб, унинг учтаси каср қисмга ажратилган бўлса, у ҳолда қурилмада: 00,000, ..., 99,999 сонларни ифодалаш мумкин бўлади. 0,001 дан кичик сон кичик хоналарда хатога олиб келиб нолга айланади. 99,999 дан катта сон катта хоналарда хатоликка олиб келади. Бундан қутилиш учун сонларни кўпайтирганда вергул хоналар тўрининг бошига, ишорадан кейинги хонага кўчирилади, яъни барча n хона соннинг каср қисмига берилади (1.2-б расм). Ҳамма аралаш сонлар тўғри ўнли каср кўринишида ифодаланади. Ҳозирги ЭҲМларда қўзғалмас вергулли шакл фақат бутун сонларни тасвирлаш учун фойдаланилади. Бутун сонларни ёзганда барча n хоналар соннинг бутун қисмига ажратилади, яъни вергул хоналар тўри охирида деб ҳисобланади (1.2-*в* расм).

Сонларни сузувчи нуқтали шаклда тасвирлаш. Сонлар мантисса ва тартиб кўринишида тасвирланади. Ҳар қандай сон

$$N = m \cdot q^n$$

кўринишда ёзилади. Бунда n — тартиб, q — саноқ тизимининг асоси, m — мантисса, бирдан кичик бўлган мусбат сон, яъни $0<m<1$. Хоналар тўрида сонлар $\pm m \pm p$ кўринишда тасвирланади (1.2-*г* расм). Масалан ўнли тизимдаги 3,25 сонини $0{,}325\ 10^1$ ёки $0{,}00325\ 10^3$ кўринишида тасвирлаш мумкин.

Агар сон машинада тасвирланганда унинг мантиссаси нуктадан кейин нолдан фарқли рақам билан бошланса, сон нормаллаштирилган, акс ҳолда нормаллаштирилмасон дейилади. ЭҲМда сонлар автоматик равишда нормаллаштирилади. Сонлар машинада тасвирланганда икки гуруҳ қилиб тасвирланади. Бир гуруҳ мантиссани, бошқа гуруҳ эса сонниңг тартибини ифодалайди. Масалан, агар сонни ёзиш учун мантисса 4 та тартибга иккита хона ажратилган бўлса, 0,00325 сони +3250—02 кўринишида тасвирланади.

Сузувчи нуқтали шаклдаги сонлар устида арифметик амаллар уларнинг мантиссалари устида бажарилади. Сонларни қўшганда ва айирганда, уларнинг тартиблари бир хил қилиб олинади ва мос хоналари устида кўрсатилган амал бажарилади. Натижанинг тартиби операндлар тартиби билан бир хил қилиб олинади.

Сонларни кўпайтирганда ва бўлганда улар ҳар хил тартибли бўлиши мумкин. Натижа тартиби кўпайтирилганда ҳар иккала сон тартиблари йиғиндисига, бўлинганда эса айирмасига тенг бўлади.

Мантиқий ўзгарувчи ва функция тушунчаси. Мантиқий ўзгарувчи «ҳақиқат» ва «ёлғон» қийматлардан бирини қабул қилади. Буни сонлар ёрдамида 1 ва 0 деб олиш мумкин.

Бир мантиқий ўзгарувчининг $P=F(A)$ функцияси биргина. Бу инверсия (ёки мантиқий рад қилиш, ёки ЭМАС функцияси). Уни $P=A$ ёки $P=\rceil A$ (A эмас деб ўқилади) кўринишда ёзилади. Бу ерда $\rceil$ мантиқий рад қилиш белгиси. Функция $\rceil 0=1$, $\rceil 1=0$ қийматлар қабул қилади.

Икки A ва B мантиқий ўзгарувчиларнинг 16 та мантиқий функциялари бор. Улар асосий функциялар: дизъюнкция ва конъюнкция ҳамда инверсия орқали ифодаланади.

Дизъюнкция (мантиқий қўшиш ёки ЁКИ функцияси) $P=A \vee B$ кўринишда (A ёки B деб ўқилади) ёзилади. Бу ерда $\vee$ — мантиқий қўшиш белгиси. Функция: $0 \vee 0=0$, $0 \vee 1=1$, $1 \vee 0=1$, $1 \vee 1=1$ қийматлар қабул қилади.

Конъюнкция (мантиқий кўпайтириш ёки *ВА* функция) $P=A \wedge B$ кўринишда ёзилади (A ва B деб ўқилади). Бу ерда $\notin$ — мантиқий кўпайтириш белгиси. Функция $0 \wedge 0=0$, $0 \notin 1=0$, $1 \wedge 0=0$, $1 \wedge 1=1$ қийматлар қабул қилади.

Элементар маълумотларни ЭҲМда ифодалаш учун махсус белгили номлар ишлатилади. Улар маълумотнинг келиб чиқиши ва хусусиятини ифодалаб, идентификаторлар деб аталади. Ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматлари соҳаси идентификаторнинг турини, ўзгариши ва кўламини белгилайди. Иден-

БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ у2499

тификаторлар лотин алифбосининг катта ҳарфлари ва рақамлар кетма-кетлигида ташкил қилинади. Улар албатта ҳарф билан бошланиши керак ва турли программалаш тилларида ҳар хил сондаги ҳарф рақамлардан иборат бўлади.

Шундай қилиб, ўзгарувчан миқдор ўзининг номи ва қабул қиладиган қийматлари тури билан фарқланади. Баъзи миқдорларнинг қатъий номи ва қиймати барча масалалар учун ўзгармайди. Масалан, e=2,718, π=3,14159 каби сонлар. Бундай маълумотларни ўзгармас (константа) лар дейилади ва уларнинг номи қатъий белгилаб қўйилган. Ўзгарувчилар маълум тузилишга эга бўлади. Масалан, векторлар, матрицалар ва бошқалар. Улар ўз тартиб сонига эгадирлар. Тартиблаш ҳар бир элементни бутун сон билан белгилаш орқали амалга оширилади ва улар ўзгарувчи элементларининг тартиб сонлари индекслар билан белгиланади. Бир индексли ўзгарувчилар векторлар, икки индексли ўзгарувчилар — матрицалар мос ҳолда бир ва икки ўзгарувчили массивлар дейилади. Уларнинг индекси бир қадамли тартиб билан ўзгаради.

Амалда сон бўлмаган, ҳар хил хусусиятли турли ўзгарувчилар ҳам кўп учрайди. Уларни ёзувлар, файллар деб аталади.

Файл — хотира қурилмалари, одатда, дисклар, ленталарда сақланувчи маълумотларнинг бир қисми. Бир гуруҳ маълумотларга (одатда маълум турдаги масалаларни ечиш керак бўладиган) аниқ ном берилиб, ташқи хотира қурилмаларига ёзиб сақланади. Бу ёзувлар программа матнлари ҳам, ўзгарувчиларнинг қийматлари ҳам бўлиши мумкин. Керак бўлганда мана шу номи билан топиб, тезкор хотирага киритиб (ўқиб олиб) ишлатиш мумкин бўлади.

Синов саволлари

Масаланинг математик модели нима?

Программа нима? У қандай хоссаларга эга бўлиши керак?

ЭҲМнинг мантиқий қурилмалари ва уларнинг вазифалари нималардан иборат?

Ахборотнинг қандай бирликлари бор?

Қандай маълумот тўплагичлар бор? Уларнинг вазифаси нима?

Маълумотлар турларини тушунтириб беринг.

ЭҲМда қандай саноқ тизимлари ишлатилади? Бир саноқ тизимидаги сон бошқа тизимда қандай ифодаланади?

Сонларни тавсифлаш усулларини тушунтириб беринг.

Мантиқий амаллар ва функциялар қандай аниқланади?

II. АЛГОРИТМЛАШ АСОСЛАРИ

2.1. АЛГОРИТМ ВА УНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Масалани ЭҲМда ечиш учун унинг алгоритми ишлаб чиқилади. Бу жараён алгоритмлаш деб аталади. Алгоритмлаш ижодий жараён бўлиб, бу жараёнда биргина масалани битта усулда ечишни ҳар хил йўллар билан бажариш мумкин. Ҳар бир усулнинг ижодкори ўзича энг яхши усул танлаганлигини исботлаб бериши мумкин ва у ўзича ҳақдир. Сабаби алгоритмни баҳолаш кўплаб бир-бирига қарама-қарши бўлган хусусиятларга боғлиқлигидадир. Ҳозиргача алгоритмга қатъий таъриф берилмаган, лекин унга қўйиладиган талабларга асосан қуйидагича таъриф бериш мумкин. Алгоритм — масалани ечимга олиб келадиган кўрсатмаларнинг аниқ, бир маъноли ва чекли сондаги кетма-кетлигидир.

Алгоритм тушунарлилик, оммавийлик, дискретлик, натижавийлик хоссаларига эга бўлиши керак.

Тушунарлилик хоссаси. Алгоритмнинг ҳар бир кўрсатмаси бажарувчи учун аниқ, тушунарли бўлиши керак. Икки хил маъно берадиган кўрсатма, амаллар бўлмаслиги керак.

Оммавийлик хоссаси. Алгоритм маълум синфдаги барча масалаларни ечишга яроқли бўлиши керак. Қанча кўп масалаларни ечишга қўллаш мумкин бўлса, алгоритм шунча оммавийроқ бўлади. Масалан,

$$ax^2 + bx^c + c = 0$$

тенглама ечимларини топиш масаласи қаралаётган бўлсин. Бу тенглама $a \neq 0$ бўлганда тўла квадратик тенглама бўлиб, у $D=b^2-4ac$ дискриминантнинг қийматига қараб, иккита ҳақиқий, иккита каррали ёки қўшма комплекс ечимга эга бўлиши мумкинлигини биламиз. Агар $a=0$ бўлса, тенглама $bx+c=0$ кўринишдаги чизиқли тенгламага айланиб, у $b\neq0$ бўлганда битта ҳақиқий ечимга эга бўлади. Агар $b=0$ бўлса, $c=0$ бўлганда чексиз кўп ечимга эга бўлиб, $c\neq0$ бўлганда эса маънога эга эмас.

Агар тузилган алгоритм юқорида кўрсатилган ҳамма ҳолларни эътиборга олиб ечимни топишга мўлжалланган бўлса, бундай алгоритм билан a, b, $c \in R$ бўлганда ихтиёрий квадрат учҳад нолларини топиш мумкин бўлади. Бу алгоритм — шу синфдаги масалаларни ечишга мўлжалланган энг оммавий алгоритм бўлган бўларди. Фақатгина квадрат тенглама ($a \neq 0$) бўлган ҳол қаралса, алгоритмнинг оммавийлиги маълум маънода сусаяди. Агар фақатгина ҳақиқий илдизларинигина топишга мўлжалланган бўлса, у янада торроқ соҳага ўтадиган бўлади ва ҳоказо.

Ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари соҳаси алгоритмнинг *қўлланиш соҳаси* дейилади.

Дискретлик хоссаси. Қаралаётган масала оддийроқ масалаларга, улар ўз навбатида, янада соддароқ масалаларга бўлиб ўрганилиши мумкинлиги, яъни масала етарлича содда қисмларга ажратилиши мумкинлигини ифодалайди. Алгоритмнинг кўрсатмалари элементар кўрсатмаларгача тушиб ифодаланиши, маълум босқичга, аввалдан маълум алгоритмларга келтирилиб, кейин улардан ташкил қилиниши мумкин. Шундай қилиб, мураккаб масалаларни ечиш анча соддароқ масалаларни ечишга келтирилади.

Натижавийлик хоссаси. Ўзгарувчиларнинг алгоритмни қўлланиш соҳасидан олинган барча қийматларида ёки бошқача айтганда, алгоритм ёрдамида ечишга мўлжалланган масалалар синфидан олинган ихтиёрий масала учун аниқ ечим олиш имконияти. Юқоридаги мисолда квадрат тенгламанинг ҳақиқий илдизларини аниқлашга мўлжалланган алгоритм $D \geq 0$ бўлганда ижобий натижага (x_1, x_2 қийматларига), бу шарт бажарилмаганда эса салбий натижага (тенгламанинг ҳақиқий илдизлари йўқ) олиб келади. Алгоритм кўрсатмаларининг сони чекли бўлиши шарт. Акс ҳолда уни бажариш ҳеч қандай натижага олиб келмайди. У натижавийлик хоссасига эга бўлмайди.

2.2. АЛГОРИТМНИ ТАВСИФЛАШ УСУЛЛАРИ

Алгоритм сўзлар, математик формулалар, алгоритмик тиллар, геометрик схемалар, программалаш тиллари ва бошқалар ёрдамида тавсифланади.

Алгоритмнинг сўзлар ёрдамида берилишига, тавсифланишига мисол тариқасида лифтда керакли қаватга кўтарилиш алгоритмини келтириш мумкин. Бу қуйидагича кетма-кетликда бажарилади:

1. Лифтга киринг.

2. Керакли қават тартиб сонига мос тугмачани босинг.

3. Лифтни ҳаракатга келтиринг.

4. Лифт тўхташини кутинг.

5. Лифт эшиги очилгандан кейин ундан чиқинг.

Алгоритм математик формулалар ёрдамида тавсифланганда ҳар бир қадам аниқ формулалар ёрдамида ёзилади. Мисол тариқасида

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

квадрат тенглама ечимлари x_1, x_2 ни аниқлаш алгоритмини кўриб чиқайлик.

1. a, b, c коэффициентлар қийматлари берилсин.

2. $D=b^2-4ac$ дискриминант ҳисоблансин.

3. $D<0$ бўлса, тенгламанинг ҳақиқий ечимлари йўқ. Фақат ҳақиқий илдизлар изланаётган бўлса, масала ҳал бўлди.

4. $D=0$ бўлса, тенглама иккита бир-бирига тенг, яъни каррали ечимга эга бўлади ва улар

$$x_1=x_2=-b/2a$$

формулалар билан ҳисобланади. Масала ҳал бўлди.

5. $D>0$ бўлса, тенглама иккита ҳақиқий ечимга эга, улар

$$x_1=(-b-\sqrt{D})/2a, \ x_2=(-b+\sqrt{D})/2a$$

формулалар билан ҳисобланади. Яна масала ҳал бўлди.

Шундай қилиб, квадрат тенглама ҳақиқий ечимларини аниқлашда:

1. «Тенгламанинг ҳақиқий ечимлари йўқ» матни;

2. «Тенглама каррали ечимга эга $x_1=x_2=$» матни ва x_1, x_2 қийматлари;

3. «Тенглама иккита ечимга эга» матни, x_1 ва x_2 қийматлари натижалар бўлади.

Алгоритмик тиллар — алгоритмни бир маъноли тавсифлаш имконини берадиган белгилар ва қоидалар мажмуидир. Ҳар қандай тиллардагидек улар ҳам ўз алифбоси, синтаксиси ва семантикаси билан аниқланади.

Бизга ўрта мактабдан маълум бўлган, академик А.П. Ершов раҳбарлигида яратилган, ЭҲМсиз алгоритмлашга мўлжалланган алгоритмик тизим алгоритмик тилнинг намунасидир. Алгоритмик тилга мисол сифатида яна алгоритмларни белгили операторлар тизими шаклида тавсиф-

лашни ҳам кўрсатиш мумкин. Бу тиллар одатдаги тилга яқин бўлиб, ЭҲМда бевосита бажаришга мўлжалланмаган. Улардан мақсад алгоритмни бир хил шаклда ва тушунарли қилиб, таҳлил қилишга осон қилиб ёзишдир.

Алгоритмларни геометрик схемалар ёрдамида тавсифлаш кўргазмали, шу сабабли тушунарлироқ бўлгани учун кўп қўлланилади. Бунда ҳар бир ўзига хос операция алоҳида геометрик шакл (блок) билан тавсифланади ва уларнинг бажарилиш тартиби, улар орасидаги маълумотлар узатилиши ва йўналиши блокларни бир-бири билан кўрсаткичли тўғри чизиқлар ёрдамида туташтириб кўрсатилади. Алгоритмнинг геометрик схемасига унинг блок-схемаси дейилади.

Блокларга мос геометрик шакллар, уларнинг ўлчамлари ва улар ёрдамида блок-схемаларни чизиш қоидалари давлат стандартларида (ГОСТ 19003-80, ГОСТ 19002—80) берилган. 2.1-жадвалда энг кўп ишлатиладиган блоклар шакли ва уларнинг маъноси келтирилган. Бу давлат стандартларига кўра блокларни туташтирувчи тўғри чизиқлар ёзув текислигига вертикал ёки горизонтал ҳолатда бўлиши керак, яъни уларни оғма чизиқлар билан туташтириш тақиқланади. Блокларни бажариш табиий ёзиш тартибида бўлса, яъни юқоридан пастга ёки чапдан ўнгга бўлса, туташтирувчи чизиқ кўрсаткичсиз бўлиши мумкин. Бошқа барча ҳолларда маълумот оқими йўналишини кўрсатувчи кўрсаткич қўйилиши шарт. Блокнинг тартиб сони туташтирувчи чизиқдан чапга, алоҳида ажратилган бўш жойга қўйилади. Чизиқларнинг бирлашган жойи йирикроқ нуқта ёрдамида кўрсатилади. Блокда кўзда тутилган операция унинг ичига ёзиб қўйилади. Схемалар ГОСТ 2.301—68 давлат стандарти форматларида бажарилади.

Амалда ечиладиган масалалар ва демак, алгоритмлар турлари ҳам жуда кўп бўлишига қарамасдан улар асосан беш хил: чизиқли, тармоқланувчи, циклик, итерацион ва чексиз такрорланувчи тузилишларда бўлади деб айтиш мумкин.

Агар мураккаб масалалар алгоритмларининг блок-схемасини бир бино десак, бу тузилишдаги алгоритмлар уни ташкил қилувчи ром, ғишт, тўсин, устун ва бошқаларини ифодалайди деб айтиш мумкин. Ҳар қандай мураккаб бино ана шу ашёлардан қурилганидек, мураккаб алгоритмлар ҳам юқоридагидек схемалардан тузилади. Аслида охирги учта тузилишдаги алгоритмларни битта ном билан такрорлаш алгоритмлари деб аташ мумкин. Аммо уларнинг ҳар бири ўзига хос бўлганлиги учун алоҳида номланади.

2.3. ЧИЗИҚЛИ ТУЗИЛИШДАГИ АЛГОРИТМЛАР

Чизиқли тузилишдаги алгоритмларда кўрсатмалар ёзилиш тартибида бажарилади. Уларнинг блок-схемалари ишга тушириш, тўхтатиш, киритиш-чиқариш жараён ва аввалдан маълум жараён блоклари ёрдамида тузилиб, бир чизиқ бўйлаб кетма-кет жойлашган бўлади.

Чизиқли тузилишдаги алгоритмни тузиш масалани ечиш учун керак бўладиган бошланғич маълумотларни ташкил қилувчи ўзгарувчилар номи, уларнинг тури ва ўзгариш кўламини аниқлашдан бошланади. Кейин оралиқ ва якуний натижалар ўзгарувчиларининг номлари, турлари ва мумкин бўлса ўзгариш кўламини аниқлаш керак. Энди алгоритм мана шу бошланғич маълумотларни қандай қайта ишлаб оралиқ ва якуний натижаларни олиш кераклигини аниқлашдан иборат бўлади.

1-мисол. Томонлари мос равишда a, b, c бўлган ABC учбурчак юзини ҳисоблаш алгоритмини тузайлик.

Томонлари маълум бўлганда ABC учбурчакнинг S юзи

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (2.1)$$

Герон формуласи билан ҳисобланади. Бунда

$$P = (a+b+c)/2 \qquad (2.2)$$

учбурчак ярим периметри.

1. Бошланғич маълумотлар: a, b, c учбурчак томонлари. Шунинг учун $a, b, c \in R$ ва $a>0$, $b>0$, $c>0$, яъни a, b, c — ўзгарувчилар номи; улар ҳақиқий сон қийматлар қабул қилади. Акс ҳолда кесма узунлиги бўлмаган бўларди. Яна, бу уч сон учбурчак томонларини ифода қилиши учун уларнинг исталган бири қолган иккитаси йиғиндисидан катта бўлмаслиги, яъни

$$a<b+c, \; b<a+c, \; c<a+b \qquad (2.3)$$

шартлар бажарилиши керак. Шундай қилиб, ўзгариш кўлами (2.3) муносабатлар билан аниқланар экан.

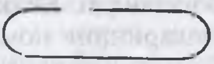
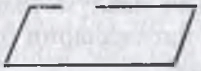
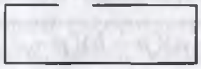
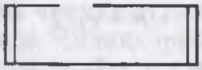
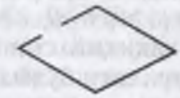
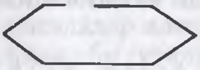
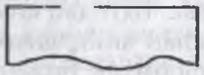
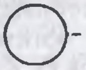
2. Натижалар: (2.1) формула билан учбурчак юзини ҳисоблаш учун унинг ярим периметрининг қиймати керак. Демак, P ўзгарувчининг қиймати оралиқ маълумот бўлади. Юқорилаги шартларда $P \in R$ ва $P>0$. Якуний нати-

жа: S — учбурчак юзи. У $S \in R$ ва $S>0$ қийматлар қабул қилади.

Шундай қилиб, ихтиёрий ABC учбурчак юзини ЭҲМда ҳисоблаш ва босмага (ёки Дисплей экранига) чиқариш:

2.1-жадвал

Асосий блокларнинг шакллари ва уларнинг вазифалари

Шакл номи	Шакл	Вазифаси
1	2	3
Ишга тушириш, тўхтатиш		Бошлаш, тамомлаш, маълумотларни қайта ишлаш жараёни ёки программа бажарилишини тўхтатиш
Киритиш-чиқариш		Маълумотларни қайта ишлашга (киритиш) ёки қайта ишлаш натижаларини акслантиришга (чиқариш) яроқли ҳолга келтириш
Жараён		Бажарилиши натижасида маълумотларнинг қиймати, тасаввур шакли ёки ўрнини ўзгартирадиган амал ёки амаллар гуруҳи
Аввалдан маълум жараён		Илгари тузилган ва алоҳида тавсифланган алгоритм ва программадан фойдаланиш
Ечим		Ўзгарадиган шартга боғлиқ ҳолда алгоритм ёки программани бажариш йўналишини танлаш
Модификация (турлаш)		Программани ўзгартирадиган буйруқ ёки буйруқлар гуруҳини бажариш
Ҳужжат		Маълумотларни босма қоғозига чиқариш
Боғловчи		Маълумотлар оқимининг узилган жойларини туташтириш

2.1-жадвал давоми

Шакл номи	Шакл	Вазифаси
1	2	3
Бетлараро боғловчи		Турли варақда жойлашган алгоритм ва программа бўлаклари орасидаги боғланишни кўрсатиш
Изоҳ		Схема элементлари ва тушунтириш ўртасидаги боғланиш

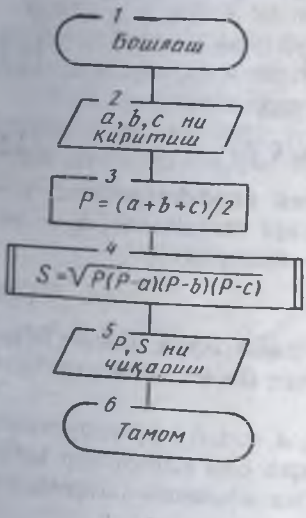
1) *a, b, c* қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиш:

2) *P* қийматини (2.2) формула билан ҳисоблаш:

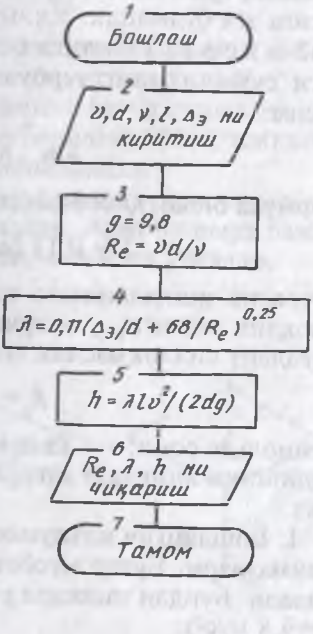
3) *S* қийматини (2.1) формула билан ҳисоблаш;

4) *P* ва *S* қийматларини босмага чиқариш операцияларидан иборат бўлади(2.1-расм).

Ҳар қандай алгоритм блок-схемаси ишга тушириш блокидан бошланади. Уни ЭҲМни ишга тайёрлаш, бошлан-



2.1-расм.



2.2-расм.

ғич маълумотларни аниқлаш ва тайёрлаш деб тушуниш керак. Ҳисоблашларнинг тугаганлиги ана шундай геометрик шакл билан кўрсатилади. Шунинг учун расмдаги 1- ва 6-блоклар ичига мос келган операциялар ҳақида маълумот ёзиб қўйилган.

Бошланғич маълумотларни ЭҲМга ҳар хил қурилмалардан киритиш мумкин. Аниқ биттасини танлаб олиш иш шароитига боғлиқ. Шунинг учун умумий киритиш-чиқариш блокларидан фойдаланилади (2- ва 5-блоклар).

Учинчи блокда бевосита ҳисоблаш жараёни, тўртинчи блокда эса квадрат илдиздан чиқариш учун тузилган кичик алгоритм (ёрдамчи алгоритм) дан фойдаланиш — авваллан маълум жараён кўзда тутилган. Алгоритм кўрсатмалари ёзилиш тартибида кетма-кет бажарилади. Маълумотлар блокдан-блокка юқоридан пастга узатилади. Шунинг учун уларни туташтирувчи чизиқларга кўрсаткичлар қўйилмаган.

Алгоритмдан фойдаланувчи бошланғич маълумотларни (2.3) шартларни бажариладиган қилиб олиши керак. Акс ҳолда алгоритмни бажариб бўлмайди. У натижавийлик хоссасига эга бўлмайди.

2-мисол. Узунлиги l, диаметри d бўлган трубапроводдаги суюқликнинг турбулент ҳаракатида йўқотиладиган босим

$$h = \lambda l v^2/(2dg) \qquad (2.4)$$

формула билан ҳисобланади. Бу ерда

$$\lambda = 0{,}11\ [\Delta_э/d + 68/R_e]^{0{,}25} \qquad (2.5)$$

ўлчовсиз ишқаланишга қаршилик коэффициенти; v — суюқлик тезлиги; g — эркин тушиш тезланиши, $\Delta_э$ — эквивалент силлиқмаслик (ғадир — будирлик);

$$R_e = vd/\nu \qquad (2.6)$$

Рейнольдс сони; ν — кинематик ёпишқоқлик. Босим йўқотилишини аниқлаш алгоритмининг блок-схемасини тузамиз.

1. Бошлангич маълумотлар: v, d, ν, l, $\Delta_э$, g ўзгарувчилар қийматлари. Булар мусбат ҳақиқий сон қийматлар қабул қилади. Бундан ташқари g — қиймати ҳамиша ўзгармаслир (g=9,8 м/с^2).

2. Натижалар: R_e — Рейнольдс сони, λ — ишқаланиш қаршилиги-оралиқ; h — босимнинг йўқотилиши — якуний натижалар бўлади.

3. Ҳисоблаш тартиби: аввал (2.6) формула билан R_e — қиймати, (2.5) формула билан λ қиймати, сўнг (2.4) формула билан h қиймати ҳисобланади (2.2-расм).

2.4. ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТУЗИЛИШДАГИ АЛГОРИТМЛАР

Турли масалаларни ечганда кўрсатмаларни бажариш тартиби бирор бир шартнинг бажарилишига боғлиқ ҳолда ўзгаради, яъни алгоритм тармоқланади. Тармоқланиш «Ечим» блоки орқали ифодаланади.

Шартни текшириш натижаси фақат икки хил бўлганда: бажарилган ҳол учун «Ҳа» (ёки «+»), бажарилмаган ҳол учун «Йўқ» (ёки «—») белгилари қўйилади (мантиқий шарт, 2.3-*а* расм).

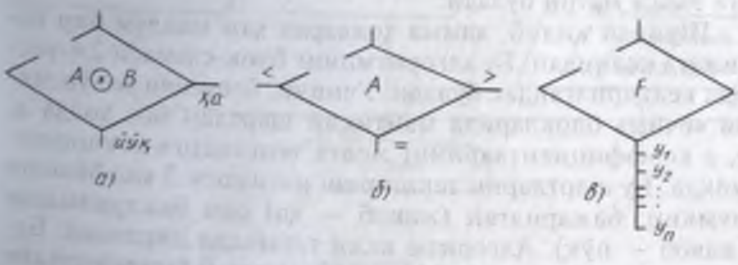
Тармоқланиш математик ифода қийматининг ишораси бўйича бўлганда (арифметик шарт): > — мусбат, < — манфий ва = нолга тенг белгилар қўйилади (2.3-*б* расм).

Текшириш натижаси учдан кўп бўлганда 2.3-*в* расмдагидек тармоқланиш бўлиши мумкин.

3-мисол. $ax^2+bx+c=0$ тенглама ечимларининг аниқлаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

Бунда a, b, $c \in R$ ва тенгламанинг барча ечимлари изланаётган бўлсин. Агар бу сонлар берилган бўлса, тенглама илдизлари қуйидаги тартибда ҳисобланади:

1. Тенгламани квадрат тенглама эканлиги текширилади. Бунинг учун a=0 шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса тенглама квадрат бўлмайди, 4-бандга ўтилади.



2.3-расм

2. Тенглама дискриминанти $D=b^2-4ac$ ҳисобланади.

3. D нинг ишораси текширилади. Агар $D>0$ бўлса, тенгламани иккита ҳақиқий илдизлари бор, улар $x_1=(-b-\sqrt{D})/2a$ ва $x_2=(-b+\sqrt{D})/2a$ формулалар билан ҳисобланади.

Натижалар: 1-маълумот: «Тенглама иккита ҳақиқий ечимга эга» матн ва x_1, x_2 ларнинг қийматлари босмага чиқарилади. Масала ечилди.

Агар $D<0$ бўлса, тенглама $x_1=(-b-\sqrt{|D|}\,i)/2a$ ва $x_2=(-b+\sqrt{|D|}\,i)/2a$ формулалар билан ҳисобланадиган иккита қўшма комплекс илдизга эга бўлади. Илдизларнинг ҳақиқий қисмини $x_1=-b/2a$, мавҳум қисмини $x_2=\sqrt{|D|}/2a$ билан белгиланса, x_1, x_2 ни ҳисоблаб, $x_1 \pm x_2 i$ комплекс сонлари ҳосил қилинади.

Натижалар: 3-маълумот: «Тенглама комплекс ечимга эга, ҳақиқий қисми =... "мавҳум қисми =", матни ва x_1, x_2 ларнинг қийматлари босмага чиқарилади. Бу ҳолда ҳам масала ечилди.

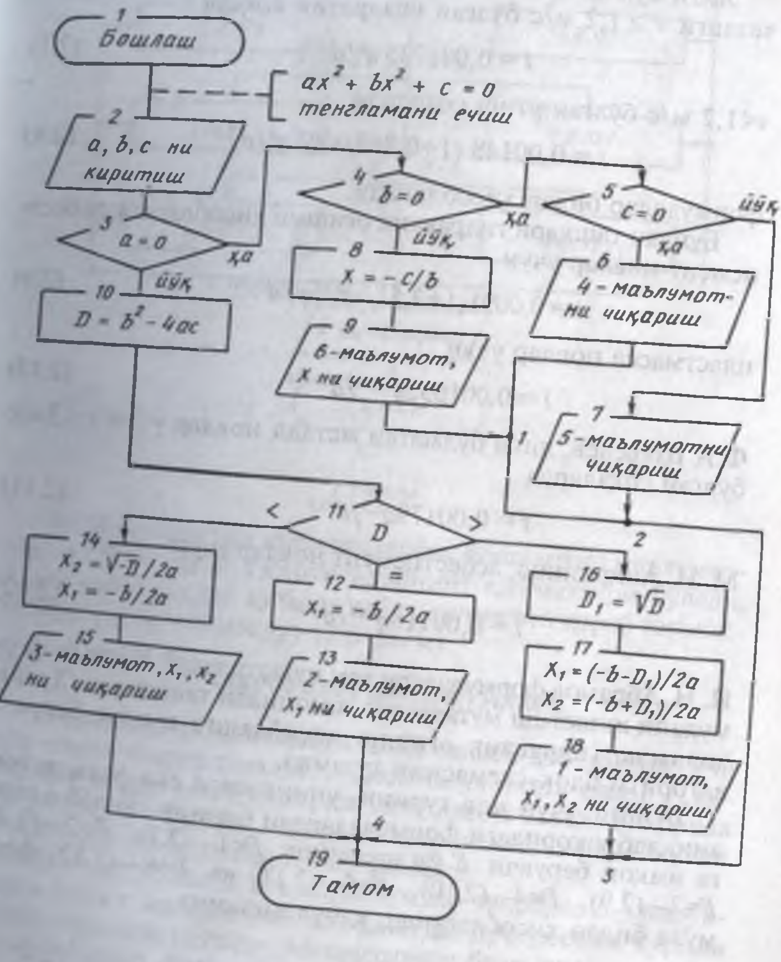
4. Тенгламанинг чизиқлилиги $b=0$ шартни текшириш билан аниқланади. Агар бу шарт бажарилса, тенглама чизиқли эмас, 6 — бандга ўтади.

5. Тенгламанинг ечими: $x=-c/b$. Натижалар: 6-маълумот: «Тенглама чизиқли $x=$» матни ва x нинг қиймати босмага чиқарилади. Масала ечилди.

6. Агар $c=0$ бўлса, тенглама $0 \cdot x^2+0 \cdot x+0=0$ айниятга айланади ва ихтиёрий $x \in R$ сон унинг ечими бўлади. Натижа: 4-маълумот: «Тенглама чексиз кўп ечимга эга» матни босмага чиқарилади. Агар $c \neq 0$ бўлса, тенглама маънога эга бўлмайди. Бу ҳолда натижа: 5-маълумот: «Тенглама ечимга эга эмас» матни бўлади.

Шундай қилиб, ҳамма ҳолларда ҳам маълум бир натижага келинади. Бу алгоритмнинг блок-схемаси 2.4-расмда келтирилгандек бўлади. Учинчи, бешинчи ва тўртинчи «ечим» блокларида мантиқий шартлар мос ҳолда a, b, c коэффициентларнинг нолга тенглилиги текширилмоқда. Бу шартларни текшириш натижаси 2 хил бўлиши мумкин: бажарилган (жавоб — ҳа) ёки бажарилмаган (жавоб — йўқ). Алгоритм икки тармоққа ажралади. Булардан фарқли ўлароқ 11 ечим блокида D ўзгарувчининг

ишораси текширилмоқда. Натижа уч хил бўлиши мумкин. Схеманинг 1,2,3,4 нуқталарида маълумотлар оқимининг қўшилиши рўй бермоқда. Шунинг учун бу нуқталар ажратиб кўрсатилган. Маълумот оқимини кўрсатувчи чизиқ «синган» ва оқим ўнгдан чапга йўналган ҳолларда туташтирувчи чизиқлар кўрсаткич билан белгиланган.



2.4-расм

4-мисол. Сув билан таъминлаш тизимида қувур узунлиги бирлигига мос келувчи i сув баландлигининг йўқотилиши — гидравлик оғиш $i=h/l$ формула билан аниқланади. Бунда h — сув баландлиги (босими); l — қувур узунлиги.

Гидравлик огиш қувур узунлигидан ташқари унинг d диаметри, v сув тезлиги, q сув миқдори ва қувурнинг материалига боғлиқ бўлади.

Янги бўлмаган пўлат ва чўян нов (труба) лар учун: сув тезлиги $v \geq 1,2$ м/с бўлган квадратик соҳада

$$i = 0,001735\, q^2/d^{5,3}; \tag{2.7}$$

$v<1,2$ м/с бўлган ўтиш соҳасида:

$$i = 0,00148\,(1+0,867/v)^{0,3}\, q^2/d^{5,3} \tag{2.8}$$

формулалар билан ҳисобланади.

Бундан ташқари гидравлик оғишни ҳисоблашда: асбестцемент новлар учун

$$i = 0,0091(1+3,51/v)^{0,19} q^2/d^{5,19}; \tag{2.9}$$

пластмасса новлар учун

$$i = 0,001052 q^{1,774}/d^{4,774} \tag{2.10}$$

Ф.А.Шевелев; янги бўлмаган металл новлар учун $v \leq 3$м/с бўлган соҳаларда

$$i = 0,00179 q^{1,9}/d^{5,1} \tag{2.11}$$

М. И. Андриянов; асбестцемент новлар учун

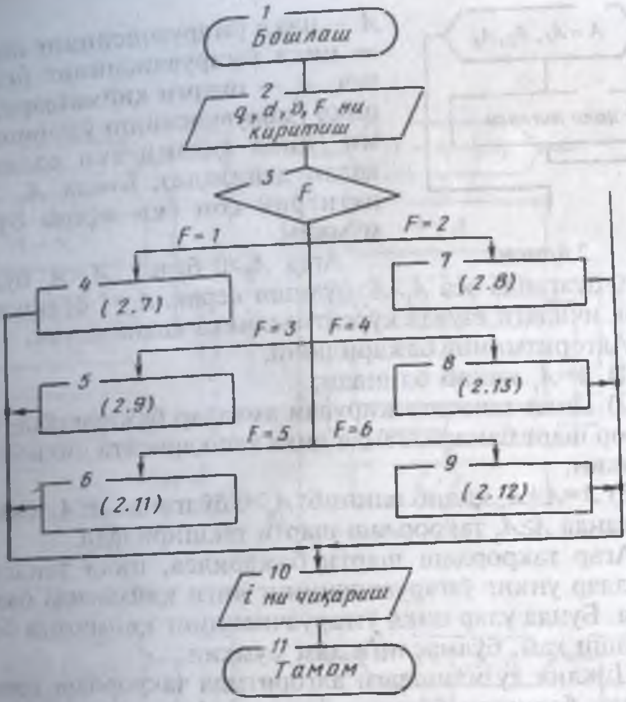
$$i = 0,00118 q^{1,85}/d^{4,89} \tag{2.12}$$

Н. Н. Абрамов формулалари ҳам ишлатилади[1]. У ёки бу формулани ишлатиш мутахассис томонидан танланади. Ҳамма ҳолларда гидравлик оғишни ҳисоблашга имкон берувчи алгоритм блок-схемасини тузамиз.

Бунинг учун нов турини, унинг янги ёки эскилигини аниқлаб юқоридаги формулалардан бирини танлаб олишга имкон берувчи F ўзгарувчини: F=1—(2.7), F=2—(2.8), F=3—(2.9), F=4—(2.10), F=5—(2.11) ва F=6—(2.12) формула билан ҳисоблаганда, қабул қиламиз.

---

[1] Қаранг: *Абрамов Н. Н.* Водоснабжение. М., Стройиздат, 1967.



2.5-расм.

ЭҲМ хотирасига киритиладиган бошланғич маълумотлар: *q*, *D*, *v* ва *F* ўзгарувчиларнинг қийматлари бўлади. Алгоримт *F* қандай қиймат қабул қилишига қараб тармоқланади (олти тармоққа) (2.5-расм).

2.5. ТАКРОРЛАШ АЛГОРИТМЛАРИ

Такрорлаш алгоритмлари цикл танаси деб номланувчи кўп марта такрорланадиган қисмни ўз ичига олади. Такрорлаш бирор шарт бажарилгунча давом этади. Юқорида айтилганидек циклик, итерацион ва чексиз давом этувчи такрорлаш алгоритмлари фарқланади.

Циклик тузилишдаги алгоритмлар такрорлаш ўзгарувчиси (цикл параметри) арифметик прогрессия турида ўзгарганда ҳосил бўлади. Алгоритмнинг блок-схемасида улар модификация блоки билан берилади (2.6-расм). Расмда

2.6-расм.

A — цикл ўзгарувчисининг номи, A_1 — цикл ўзгарувчисининг бошланғич, A_2 — охирги қийматлари, A_3 — цикл ўзгарувчисининг ўзгариш қадами (цикл қадами ёки оддийгина қадам дейилади). Бунда A_1, A_2, A_3 ихтиёрий сон ёки ифода бўлиши мумкин.

Агар $A_3>0$ бўлса, $A_1<A_2$ бўлиши, $A_3<0$ бўлганда эса $A_1>A_2$ бўлиши керак. $A_3=1$ бўлганда уни блок ичидаги ёзувда кўрсатмасликка келишилган.

Алгоритмнинг бажарилиши:

1) $A=A_1$ қилиб олинади;

2) Цикл танасига кирувчи амаллар бажарилади, бунда бирор шарт бажарилганда цикл ташқарисига чиқиб кетиш мумкин;

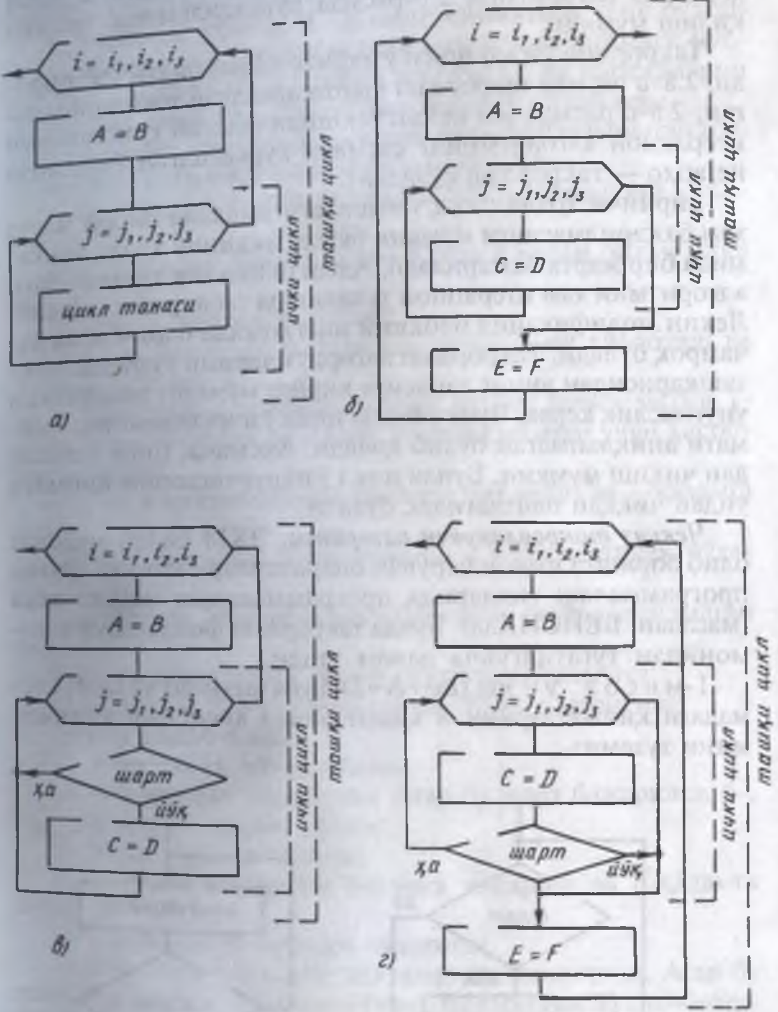
3) $A=A+A_3$ қилиб олиниб: $A_3>0$ бўлганда $A \leq A_3$, ёки $A_3<0$ бўлганда $A \geq A_2$ такрорлаш шарти текширилади.

Агар такрорлаш шарти бажарилса, цикл танасидаги амаллар унинг ўзгарувчисининг янги қийматида бажарилади. Бунда улар цикл ўзгарувчисининг қийматига боғлиқ бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

Циклик тузилишдаги алгоритмда такрорлаш сони аввалдан берилган бўлиши ёки у $n=[(A_2-A_1)/A_3]$ формула билан ҳисобланади. Бунда $[\cdot]$ белги соннинг бутун қисмини ифодалайди.

Ичма-ич жойлашган цикллар. Бир цикл танасида бошқа бир ёки бир неча цикллар жойлашган алгоритмлар ҳам бўлади (2.7-расм).

Расмда j ўзгарувчили цикл i ўзгарувчили цикл ичига жойлашган бўлиб 2.7-*а* расмда j бўйича цикл тугаши билан i нинг навбатдаги қийматига ўтилиши, 2.7-*б* расмда i ўзгарувчили цикл танасига j бўйича циклдан ташқари амаллар ҳам кириши, 2.7-*в* расмда берилган шарт бажарилмаса, ҳеч қандай амал бажармасдан j нинг кейинги қийматига ўтиш, 2.7-*г* расмда берилган шарт бажарилса, j бўйича цикл тугаши, бажарилмаса j нинг кейинги қийматига ўтиш кераклиги тасвирланган. Ичма-ич жойлашган цикл турлари бу тузилишлар билан тугамайди. Бундай циклик тузилишдаги алгоритмларни ишлаб чиққанда ташқи циклдан ички цикл бошини ташлаб ўтиб, унинг ичига кириш мумкин эмаслигини унутмаслик керак.



$i = i_1, i_2, i_3$
$A = B$
$j = j_1, j_2, j_3$
цикл танаси
ички цикл
ташқи цикл
а)
$C = D$
$E = F$
б)
шарт
ҳа
йўқ
в)
г)

2.7-расм

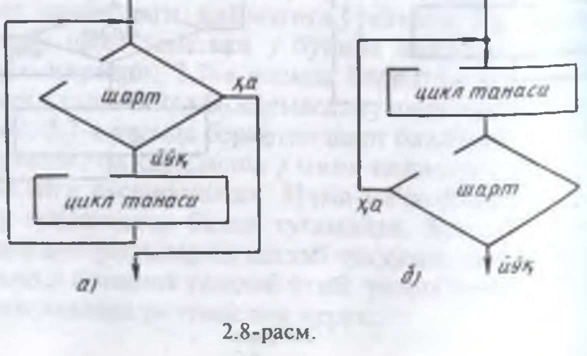
Итерацион алгоритмлар. Кўп ҳолларда амалларни неча марта такрорлашни аввалдан аниқлаб бўлмайди. Такрорлаш маълум бир шарт бажарилгунча давом этади. Бундай ҳолларда алгоритмни 2.8-расмда кўрсатилгандек ташкил қилиш мумкин.

Такрорлаш ўзгарувчиси ўзгармас қадам билан ўзгармайди. 2.8-*а* расмда такрорлаш шарти аввалдан текшириладиган, 2.8-*б* расмда эса кейин текшириладиган тузилишдаги итерацион алгоритмнинг схемаси кўрсатилган (италянча iteratixo — такрорлаш сўзидан).

Биринчи ҳолда цикл танасидаги амаллар бирор марта ҳам бажарилмаслиги мумкин бўлса, иккинчи ҳолда эса камида бир марта бажарилади. Албатта циклик тузилишдаги алгоритмни ҳам итерацион тузилишда тасвирлаш мумкин. Лекин модификация блокини ишлатганда блок-схема ихчамроқ бўлади. Такрорлаш алгоритмларини тузганда цикл ташқарисидан унинг танасига кириш мумкин эмаслигини унутмаслик керак. Чунки бунда цикл ўзгарувчисининг қиймати аниқланмаган бўлиб қолади. Аксинча, цикл танасидан чиқиш мумкин. Бунда цикл ўзгарувчисининг қиймати ундан чиққан пайтдагидек бўлади.

Чексиз такрорланувчи алгоритм. ЭҲМ билан мулоқот олиб боришга имкон берувчи операторлари мавжуд бўлган программалаш тилларида программалашда ишлатилади (масалан, БЕЙСИКда). Бунда такрорлаш фойдаланувчи томонидан тугатилгунча давом этади.

1-мисол. $y = \log_2(ex^2+lx+k)$ функциянинг $x \in [a, b]$ кесмадаги қийматларини h қадам билан ҳисоблаш алгоритмини тузамиз.



2.8-расм.

Бошланғич маълумотлар: *a, b, e, l, k, h* ўзгарувчиларнинг қийматлари бўлади. Улар *a, b, e, l, k, h* $\in$ *R* бўлиб, кўлами $ex^2+lx+k>0$ шарт билан аниқланади.

Тузилган алгоритм: 1. *y* нинг қийматига тенг бўлган ҳақиқий сон; 2. «Логарифм остидаги ифода қиймати мусбат эмас» матнли натижаларга эга бўлади. Бу натижаларни олишнинг икки хил алгоритмини кўриб чиқайлик.

1-алгоритм. Модификация блокидан фойдаланилган ҳол. Ҳисоблаш кетма-кетлиги қуйидагича бўлади:

1) *h, a, b, e, l, k* қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиш;

2) *x* ўзгарувчи бўйича *a* дан *b* гача *h* қадам билан цикл тузиш;

3) $A=ex^2+lx+k$ ни ҳисоблаш;

4) Агар $A>0$ шарт бажарилса, $y=\log_2 A$ ни ҳисоблаш ва 6-қадамга ўтиш;

5) «Логарифм остидаги ифода мусбат эмас» матни 1-ахборотни чиқариш ва *x* нинг бошқа қиймати учун ҳисоблашга ўтиш;

6) *x* ва *y* қийматларини босмага чиқариш ва 3-қадамга ўтиш;

Бу алгоритмнинг блок-схемаси 2.9-расмдагидек бўлади.

2-алгоритм. Модификация блокидан фойдаланилмаган ҳол.

Натижаларни олиш кетма-кетлиги қуйидагича:

1) *h, a, b, e, l, k* қийматларини ЭҲМга киритиш;

2) $x=a$ қилиб олиш;

3) $A=ex^2+lx+k$ ни ҳисоблаш;

4) $A>0$ шартни текшириш. Агар бу шарт бажарилса, 5-, бажарилмаса 7-қадамга ўтиш;

5) $y=\log_2 A$ ни ҳисоблаш;

6) *x, y* қийматларини босмага чиқариш ва 8-қадамга ўтиш;

7) 1-ахборотни босмага чиқариш;

8) $x=x+h$ қилиб олиб, $x\leq b$ шартни текшириш. Агар бу шарт бажарилса, 3-қадамга ўтиш, бажарилмаса, ҳисоблашни тугатиш.

Алгоритмнинг блок схемаси 2.9-расмда келтирилган.

Биринчи алгоритмнинг блок-схемаси иккинчи алгоритмникидан ихчамроқ эканлигини кўрамиз. Бунга модификация блокидан фойдаланилганлиги сабабли эришилди.

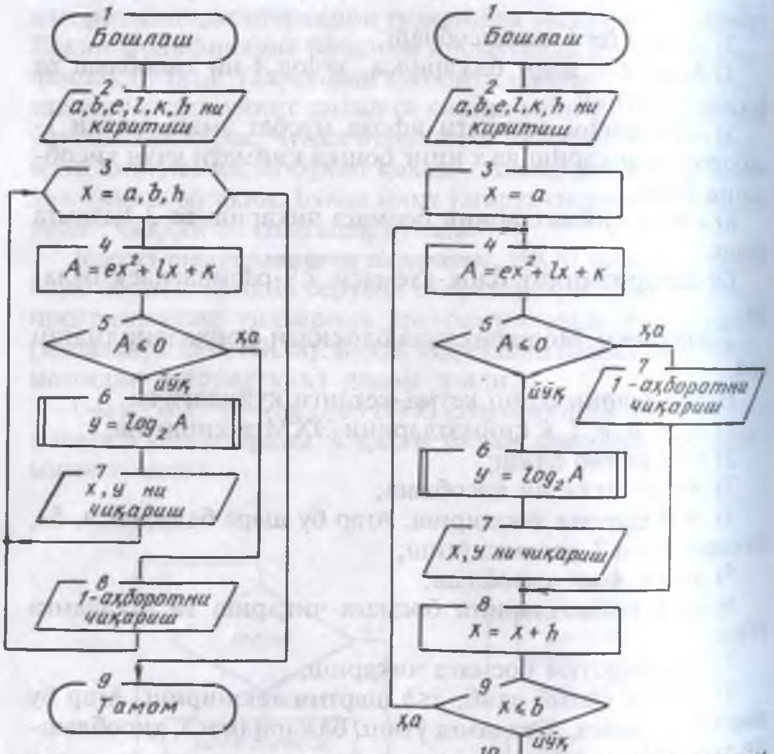
2-мисол.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

қатор қийматини ε аниқликда ҳисоблаш алгоритмини тузамиз.

Қатор $y=\sin x$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидир. $\varepsilon > 10^{-7}$ бўлганда қаторнинг талаб қилинган аниқликдаги қийматини ЭҲМда қуйидагича ҳисоблаш мумкин:

1. x ва ε қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади.
2. $n=1$, $A=x$, $S=A$ қилиб олинади.



2.9-расм.

3. Агар $x=0$ бўлса, $S=0$ қилиб олиниб, 2-бандга ўтилади. $N=2n-1$ ҳисобланади.

4. $P=1$ қилиб олинади.

5. i ўзгарувчи бўйича 1 қадам билан 1 дан N гача цикл ташкил қилинади.

6. $P=P\cdot i$ ($i=\overline{1,\ n}$) кўпайтма ҳисобланади.

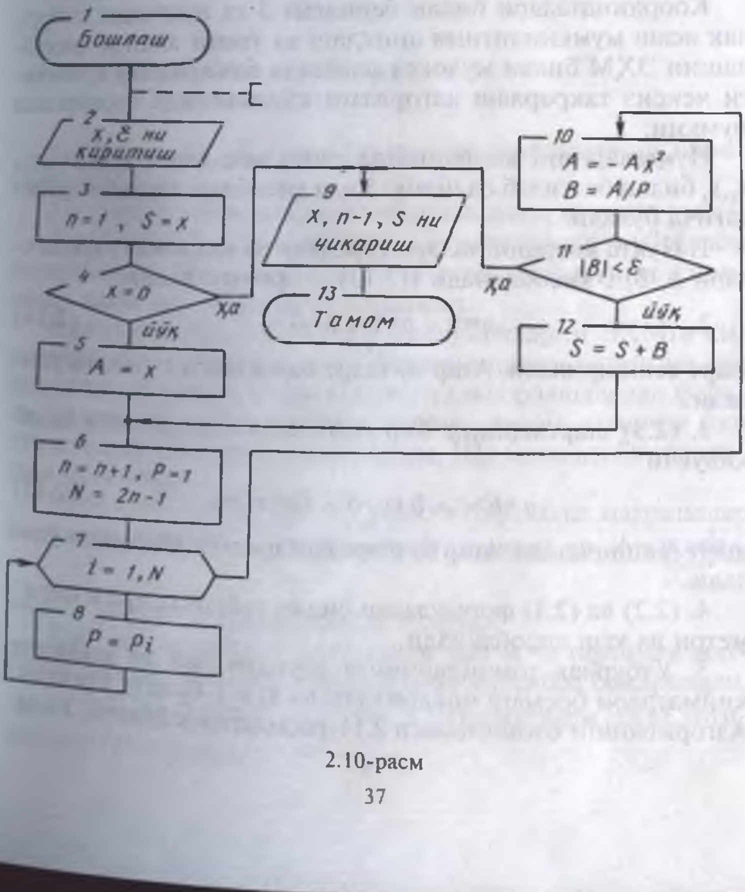
7. $A=-Ax^2$, $B=A/P$ ҳисобланади.

8. $|B|<\varepsilon$ шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса 10—, бажарилмаса, 9-бандга ўтилади.

9. $S=S+B$ ва $n=n+1$ қилиб олиб, 3-қадамга ўтилади.

10. x, n ва S қийматлари босмага чиқарилади.

Бу алгоритм итерацион тузилишдаги алгоритмга мисолдир. Қаторнинг қийматини ε аниқликда ҳисоблаш учун унинг нечта ҳадини олиш кераклиги олдиндан маълум эмас. Бу x нинг қийматига боғлиқ. Алгоритмнинг блок-схемаси 2.10-расмда келтирилган.



2.10-расм

3-м и с о л. Текисликда 3 та $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ нуқталар берилган. Бу нуқталардан ABC учбурчак ясаш мумкинлигини аниқлаб, унинг юзини ЭҲМда ҳисоблашнинг мулоқотли алгоритмини тузамиз.

Берилган нуқталар орасидаги масофалар:

$$a = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$b = BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}, \qquad (2.13)$$
$$c = AC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

формулалар билан ҳисобланади. Агар булардан бирортаси нолга тенг бўлса ёки (2.3) шартлар бажарилмаса учбурчак ясаб бўлмайди. Демак, учбурчак юзини ҳисоблашга ҳожат қолмайди. Бошқа ҳолларда учбурчак юзи (2.1) — Герон формуласи билан ҳисобланади.

Координаталари билан берилган 3 та нуқтадан учбурчак ясаш мумкинлигини аниқлаш ва унинг юзини ҳисоблашни ЭҲМ билан мулоқот шаклида бажаришни қуйидаги чексиз такрорлаш алгоритми кўринишида тасвирлаш мумкин.

Нуқталарнинг координаталарини мос ҳолда x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 билан белгилаб олайлик. Унда ҳисоблаш тартиби қуйидагича бўлади:

1. Нуқта координаталари сўралади ва уларнинг узунликлари a, b, c ҳисобланади ((2.13) — формулалар).

2. $$a=0 \vee b=0 \vee c+0 \qquad (2.14)$$

шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса 1-бандга ўтилади.

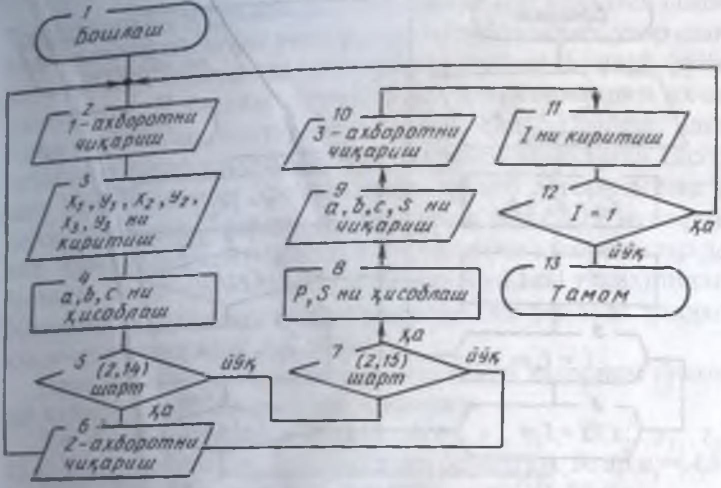
3. (2.3) шартларнинг бир пайтда бажарилишини талаб қилувчи

$$a+b>c \wedge b+c>a \wedge (a+c>b) \qquad (2.15)$$

шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилмаса 1-бандга ўтилади.

4. (2.2) ва (2.1) формулалар билан учбурчак ярим периметри ва юзи ҳисобланади.

5. Учбурчак томонларининг узунликлари ва юзининг қийматлари босмага чиқарилади ва яна 1-бандга ўтилади. Алгоритмнинг блок-схемаси 2.11-расмдагидек бўлади. Унда:



2.11-расм

1-ахборот: «*A, B, C* нуқталар координаталарини киритинг»;

2-ахборот: «Нуқталардан учбурчак ясаш мумкин эмас»;

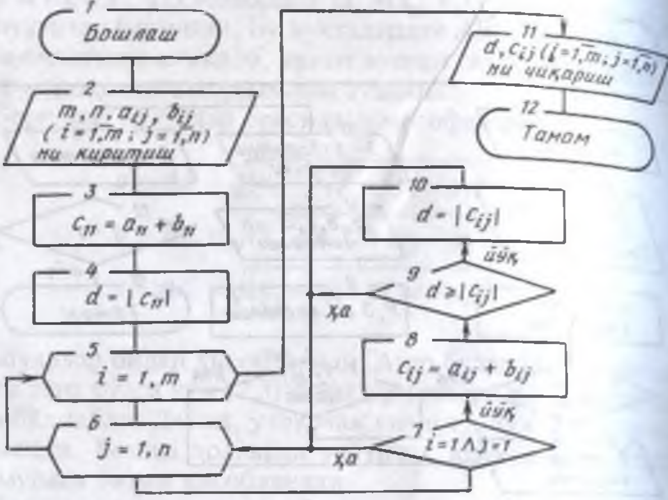
3-ахборот: «Ҳисоблашларни давом эттирасизми? Давом эттирсангиз $I=1$, акс ҳолда $I=2$ нинг қийматини киритинг» каби матнлар қабул қилинган.

Фойдаланувчи 3-блокдаги маълумотларни ЭҲМга киритиши ва ҳисоблашларнинг бажарилишини кузатиши ёки ишни тўхтатиши мумкин. Олдинги такрорлашлардан фарқли ўлароқ бу ҳолда ҳисоблашларни давом эттириш ёки тўхтатиш фойдаланувчи ихтиёрида. Шу маънода бу такрорлаш чексиздир.

4-мисол. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$—$m \times n$ тартибли матрицалар берилган. $C=A+B$ матрица элементларини ва $d = \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |c_{ij}|$ сонни ҳисоблаш алгоритмини тузамиз.

Матрицаларнинг *C* йиғиндиси ҳам $m \times n$ тартибли матрица бўлади. Ҳисоблашлар қуйидаги тартибда бажарилади.

1. m, n, a_{ij}, b_{ij} $(i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n})$ қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади.



2.12-расм

2. Ичма-ич жойлашган цикллар ёрдамида $c_{ij}=a_{ij}+bij$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ ҳисобланади.

3. $d=|c_{11}|$ қилиб олинади.

4. $$d = \begin{cases} |c_{ij}| & \text{агар } d < |c_{ij}| \text{ бўлса;} \\ d & \text{агар } d \ge |c_{ij}| \text{ бўлса} \end{cases}$$

формула билан d қиймати аниқланади.

5. c_{ij} ва d босмага чиқазилади (2.12-расм).

Алгоритмда уч марта ичма-ич жойлашган циклли алгоритмик тузилиш ишлатилган. Схемада биттаси очиб кўрсатилган, 2- ва 11-блокларда маълумотларни киритиш ва чиқариш жараёнларида ҳам икки индексли ўзгарувчиларни ичма-ич жойлашган цикл ёрдамида бажарилади.

2.6. ЁРДАМЧИ (КИЧИК) АЛГОРИТМЛАР ЁРДАМИДА АЛГОРИТМЛАШ

Юқорида кўриб чиқилган алгоритмларда элементар функциялар қийматларини ҳисоблаш керак бўлганда уларнинг номини ёзиб мурожаат қилиш кераклиги айтилди.

Чунки барча программалаш тилларида кўп ишлатиладиган ҳисоблаш жараёнлари учун алгоритмлар тузилиб, улар стандарт шаклда программалаштириб қўйилган. Бундай функциялар ўн, ўн бешдан ортиқ эмас. Алгоритмларни ихчам ёзиш учун ўзгарувчиларнинг ҳар хил қийматларида, алгоритмнинг турли жойларида бир хил такрорланадиган ҳисоблаш жараёнларини алоҳида қисм қилиб алгоритмлаш ва керак жойларда улардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бундай алгоритм бўлаклари ёрдамчи алгоритмлар дейилади. Программалаш тилларида бундай тузилишдаги бўлаклар фойдаланувчи функциялар ёки умумий ҳолдаги қисм-программалар деб аталади.

Ёрдамчи алгоритмлардан фойдаланиб алгоритм тузишни қуйидаги мисолда кўриб чиқамиз:

Уч ўлчовли фазода тўртта $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ ва $D(x_4, y_4, z_4)$ нуқталар берилган. Агар $a_1=|AB|$, $b_1=|AC|$, $C_1=|AD|$, $a_2=|BC|$, $b_2=|BD|$, $c_2=|CD|$ бўлса,

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v = c_1, \\ a_2 u + b_2 v = c_2 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Крамер усули билан ечиш алгоритмини тузамиз.

Уч ўлчовли фазодаги икки $E(k_1, l_1, m_1)$ ва $F(k_2, l_2, m_2)$ нуқталар орасидаги d масофа

$$d = \sqrt{(k_2 - k_1)^2 + (l_2 - l_1)^2 + (m_2 - m_1)^2} \qquad (2.16)$$

формула билан ҳисобланади.

Тенгламалар тизимини Крамер усули билан ечилганда $\Delta=a_1b_2-a_2b_2$ ҳисобланади ва $\Delta\neq0$ бўлса, ечим

$$U=(b_1c_2-b_2c_1)/\Delta,\ v=(a_1c_2-a_2c_1)/\Delta \qquad (2.17)$$

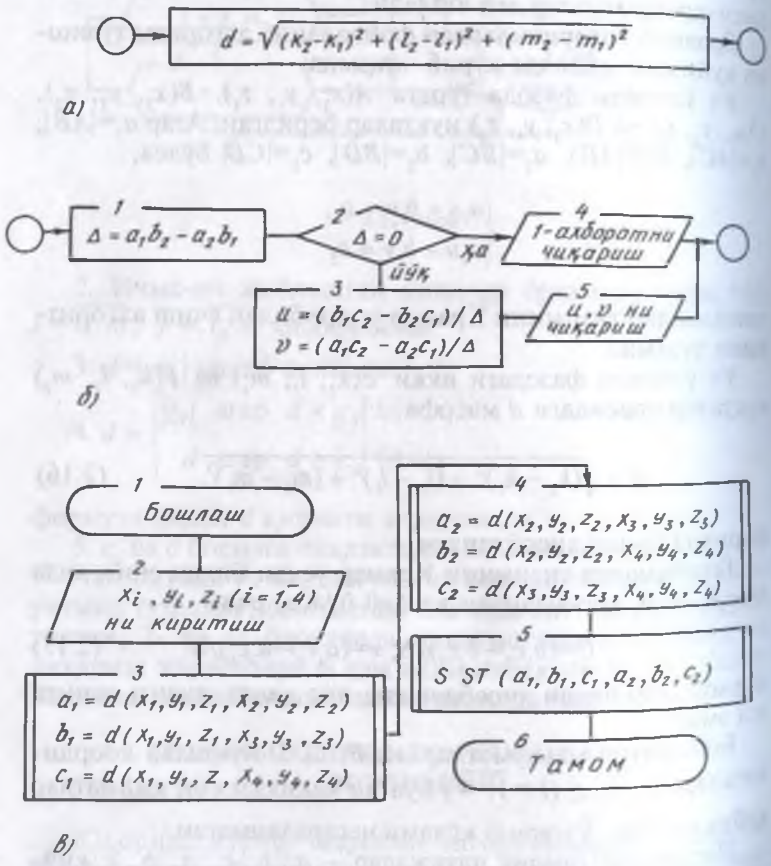
формулалар билан ҳисобланади, акс ҳолда, тизим ечимга эга эмас.

Бошланғич маълумотлар: A, B, C, D нуқталар координаталари x_i, y_i, z_i ($i=\overline{1,\ 4}$) бўлган ҳақиқий сон қийматлар қабул қилади. Ўзгариш кўлами чегараланмаган.

Натижалар: оралиқ натижалар — a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 қийматлари (2.16) формула билан ҳисобланади. Охирги натижа

u, *v* қийматлари (2.17) формулалар билан ҳисобланади ёки «Детерминант нолга тенг. Тизим ечимга эга эмас» матнли ахборот бўлади (блок-схемада 1-ахборот деб олинган).

Тизим коэффициентларининг қийматлари нуқталар орасидаги масофаларга тенг бўлганлиги учун 6 сон бир хил формула билан ҳисобланади. Бундан ташқари, икки номаълумли икки тенглама тизимини ечишни ҳам алоҳида кичик алгоритм қилиб ёзилса мақсадга мувофиқ бўлади. Чунки ундан бошқа тенгламалар тизимини ечганда ҳам фойдаланиш мумкин.



2.13-расм.

Икки нуқта орасидаги масофани (2.16) формула билан ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси 2.13-*а* (*d* ностандарт функция), тизим ечимларини аниқлаш алгоритмининг блок-схемаси 2.13-*б* расмда (SIST (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) қисм-программаси), асосий ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси эса 2.13-*в* расмда келтирилган. Чизмадаги 3,4-блокларда тизим коэффициентларини ҳисоблаш учун d ностандарт функциядан, 5-блокда эса SIST қисм-программасидан фойдаланилгани кўрсатилган. Бунда *d* функциянинг 6 та расмий ўзгарувчилари k_1, l_1, m_1, k_2, l_2, m_2 бўлиб, ҳақиқий ўзгарувчилари 3- ва 4-блокларда, унга мурожаат қилиб фойдаланилганда аниқ қилиб берилган. Шунингдек, SIST қисм-программасининг расмий ўзгарувчилари a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ҳақиқий ўзгарувчилари 5-блокда мурожаат қилингандаги ўзгарувчилари ҳам ўшаларнинг ўзи қилиб олинган.

Машқлар

1. Қуйидаги ифодаларнинг қийматларини ҳисоблаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

1.1. $A = \sqrt[3]{a^2 + \sqrt{\ln k}}$, $B = \operatorname{ctg}\sqrt{x^2 - rx + 5}$ бўлса, $\sigma = \log_3(A^3 + 3AB - B^2)$ ҳисоблансин.

1.2. $m = d^3|\sin\beta|$, $l = \log_4(x^2 - 5) + m^3$ бўлса, $\delta = m^2 + \ln|ml + \sqrt{m}|$ ҳисоблансин.

1.3. $a = m^2 + \delta^{1/3}\ln|d+5|$, $b = \log_3(a^2+5)$ бўлса, $y = ab^2\log_2(a^2+b^2)$ ҳисоблансин.

2. Берилган функция қийматини ҳисоблаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

2.1. $$z = \begin{cases} e^{m-y} + 2{,}85, & \text{агар } 2m \le m + y \text{ бўлса,} \\ \dfrac{\ln|m+y| + \operatorname{tg}5}{y - 27{,}8}, & \text{агар } 2m > m + y \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу ерда $m = e^{2/3} + \sin\frac{a}{b} + a^c$; $y = \sin^2 b - \sqrt{|bm|}$.

2.2. $$y = \begin{cases} \log(x / (ax + r)), & \text{агар } ax^2 - 8 \le q \text{ бўлса,} \\ \sin^2(ax - b) - \sqrt{|ax^2 - b|}, & ax^2 - 8 > q \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу ерда $q = \cos^2\varphi - 3$, $b = \operatorname{tg}(q + \varphi)$.

2.3. $$U = \begin{cases} \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - |x - b|}, & \text{агар } dx\ln x < Q \text{ бўлса,} \\ b\cos|x| + \sqrt{x^2 - r}, & \text{агар } dx\ln x \ge Q \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу ерда $Q = \sqrt{l^2 - 4k^2}$, $d = e^k - rl$.

3. Берилган $y=f(x)$ функция қийматларини $x \in [a, b]$ кесмада h қадам билан ҳисоблаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

3.1. $y = \log_3 |x^2-3| + \sqrt[3]{x-1}$, $x \in [2, 3]$, $h = 0{,}05$

3.2. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[5]{x\sqrt{x}}$, $x \in [4, 5]$, $h = 0{,}1$.

4. Берилган миқдорларни ҳисоблаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

4.1. $y = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$. **4.2.** $Q = \min\limits_{1 \le j \le m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}^2|$.

4.3. $N = \max\limits_{1 \le i \le n} \min\limits_{1 \le j \le m} |a_{ij}|$. **4.4.** $R = \max\limits_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} (a_{ij} - b_{ij})^2}$

5. Берилган s қаторнинг $[a, b]$ кесмада h қадам билан олинган қийматларини ҳисоблаш алгоритмини ва унинг блок-схемасини тузинг.

5.1. $S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1} + \ldots,$

$x \in [0, 1]$, $h = 0{,}1$;

5.2. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cos\frac{\pi \cdot n}{4}$, $x \in [0, 2]$, $h = 0{,}2$.

5.3. $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}1$.

5.4. $S(x) = \sum\limits_{n=c}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in [0, 1{,}5]$, $h = 0{,}3$.

6. Берилган масалаларни ечиш алгоритмининг блок-схемасини тузинг.

6.1. $A = \{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$ сонли тўплам элементлари ўсиш тартибида жойлаштирилсин. Бунда a_i сони

$$(5+i)x^2 + rix - 24 = 0, \ i = \overline{1, n}$$

тенглама ҳақиқий илдизларидан каттаси. Квадрат тенгламани ечиш ёрдамчи алгоритм шаклида ифодалансин.

6.2. $y = u(\cos\alpha, a) + u(\sin^2\alpha, \sqrt{a-1}) +$

$+ u(\cos\alpha - \sin^2\alpha, a^2+1) + u(1+\cos\alpha, a^3-1)$

функция қиймати ҳисоблансин. Бу ерда

$$U(x,z) = \begin{cases} x^2 + \mathrm{tg}z, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса}, \\ 2x + 3z, \text{ агар } x \ge 0 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

III. ПРОГРАММАЛАШ АСОСЛАРИ

Масалаларни ЭҲМда ечиш учун унинг математик модели тузилиб алгоритмлаштирилади ва программалаштирилади. Алгоритмлашни олдинги бўлимда кўриб чиқдик.

Программа — алгоритмнинг машина ёки программалаш тилидаги ёзувидир. Программалаш эса программани тузиш ва созлаш жараёнидан иборат. Машина тили — муайян ЭҲМда қўлланиладиган буйруқлар тизими ва унда қабул қилинган кодлаш ва адреслаш усуллари мажмуидир.

Программалаш тили — алгоритмларни бир маъноли тавсифлаш имконини берадиган белгилар ва қоидалар мажмуи.

Ҳар бир аниқ ЭҲМ программа ўз тилида ёзилгандагина уни бажаради. Программа бевосита машина тилида ёзилганда жуда узун ва мураккаб бўлиб кетади. Бундан ташқари у ўқишга қийин ва тушунарсиздир. Шунинг учун маълум маънода программалаштириш жараёнини автоматлаштириш имконини берадиган ва оддий инсон тилига яқин бўлган программалаш тиллари яратилган. Бундай тилларда ёзилган программалар бевосита бажарилмаганлиги сабабли программани машина тилида тавсифлаш — трансляция (инглизча translator — узатиш, таржима қилиш сўзидан) қилиш керак. Буни махсус программалар мажмуи — трансляторлар бажаради. Улар ишлаш тарзига кўра икки хил бўлади:

1. Аввал барча программа таржима қилиниб, кейин бажариладиган трансляторлар *компиляторлар* дейилади.

2. Дастлабки тилнинг ҳар бир операторини ўзгартириш ва бажариш кетма-кет амалга ошириладиган трансляторлар — *интерпретаторлар* дейилади.

Программалаш тиллари машинага боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган бўлади.

Машинага боғлиқ тиллар муайян ЭҲМга мўлжалланган бўлиб, программани шу ЭҲМ буйруқларига таржима

қилишни кўзда тутади. Бундай тиллар ассемблер туридаги тиллар ёки автокодлар дейилади. Трансляторлари эса ассемблер деб аталади.

Машинага боғлиқ бўлмаган тиллар — юқори даражали тиллар деб аталади. Уларга ФОРТРАН, АЛГОЛ, ПЛ/1, ПРОЛОГ, ПАСКАЛ, КОБОЛ, АДА, БЕЙСИК ва бошқа программалаш тилларини мисол қилиш мумкин.

БЕЙСИК (инглизча Beginners All — purpose sumbolic Instruction Code — ўзбекча, бошловчилар учун белгили кўрсатмаларнинг кўп мақсадли тили) программалаш тили кўпроқ иқтисодий масалаларни ечишга ва мулоқотли тизимлар тузишга мўлжалланган. Дастлаб ФОРТРАН тилининг соддалаштирилган тури сифатида яратилиб (шу сабабли бошловчилар учун дейилган) ўзининг соддалиги ва тушунарлилиги билан программаловчилар эътиборини қозонди. Замонавий ЭҲМларнинг барчасида бу тилнинг трансляторлари ва интерпретаторлари бор.

ЭҲМда программалашни енгиллаштириш ва автоматлаштиришга унинг программа (математик) таъминоти хизмат қилади. У программалаштириш жараёнида, программани созлашда ва масалаларни ечишда ЭҲМнинг автоматик ишлашини таъминловчи тавсиф, кўрсатма ва программалар мажмуидир.

Операцион ва дискли операцион тизимлар, транслятор ва компиляторлар, кутубхона программалари ва бошқа махсус хизматчи программалар ЭҲМнинг программа таъминотини ташкил қилади.

ЭҲМлар нафақат техник хусусиятлари билан, балки программа таъминоти билан ҳам баҳоланади. Операцион ва дискли операцион тизимлар ҳақидаги тўлиқ маълумотларни [4, 5, 11] китоблардан олиш мумкин.

ЭҲМларнинг программа таъминотини ташкил қилувчи программаларни ишлаб чиқишга тизимли программалаш дейилади. Аниқ бир илмий, техник, иқтисодий ва бошқа масалаларни ечишга мўлжалланган программалар тўплами амалий программалар тўплами дейилиб, кейинги пайтда кўплаб бундай программалар ишлаб чиқилмоқда.

3.1. ПРОГРАММАЛАШ ТИЛЛАРИНИНГ АЛИФБОСИ ВА АСОСИЙ КОНСТРУКЦИЯЛАРИ

Муайян программалаш тилида алоҳида белгилар мажмуидан — тилнинг алифбосидан фойдаланилади. Программани ёзишда фақат шу белгилардангина фойдаланиш мумкин.

Асосий юқори даражадаги тиллар (ФОРТРАН, БЕЙСИК, АЛГОЛ, ПАСКАЛ ва бошқалар) бир-биридан кўп фарқ қилмаган алифбога эга. Улар қуйидагилардан ташкил қилинган:

1. Ҳарфлар. Лотин алифбосининг 26 та бош ҳарфлари: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z ва булардан шакл жиҳатдан фарқаланувчи 19 та рус алифбосининг бош ҳарфлари: Б, Г, Д. Ж, З, И, Й: Л, П, Ф. Ц, Ч, Ш. Щ, Ы. Ь, Ю, Я.

2. Рақамлар: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Арифметик амаллар белгилари: +; –; *; /; ^ (ёки ↑ ёки ¬).

4. Муносабат (мантиқий амаллар) белгилари: =; >; <; >=; <=; <>.

5. Махсус белгилар: ·; ,;;; : ; ; # — сон; ¤ (ёки $) — пул бирлиги белгиси; %; & — коммерсантча ВА; _ — тагига чизиш белгиси; ‘ — апостроф; “ — қўштирноқ; (;); [;]; ?; @ — коммерсантча „ЭТ”; \ — чап томонга эгилган чизиқ; !.

Кўриниш жиҳатидан бир-бирига яқин бўлган белгиларни ёзганда аниқ қилиб ёзишга эътибор бериш керак. Булар:

0 ҳарфи билан 0 рақами, 0 рақами Q кўринишда ёзилади;

1 рақами билан / оғма чизиқ ва 1 ҳарфи; рақамни 1 кўринишда тасвирланади;

2 рақами билан *z* ҳарфи;

3 рақами билан русча *з* ҳарфи;

4 рақами билан ёзма *ч* ҳарфи;

5 рақами билан *s* ҳарфи;

6 рақами билан *G* ва *C* ҳарфлари;

7 рақами билан 1 рақами;

8 рақами билан В ҳарфи;

x, i, j лотин ҳарфлари ўрнига , , X,I,J ҳарфлари.

Умумий математик тушунчалар: миқдор (ҳарф билан белгиланган) ўзгарувчи (ўзгарувчи миқдор), сон, константа

(ўзгармас), арифметик, алгебраик ва мантиқий ифодалар функция ишлатилади.

Программалаш тилларида ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар тушунчалари кенгайтирилиб, умумийроқ маълумот тушунчаси ишлатилади. Маълумотлар программалаш тилларида фақатгина сон қийматлар бўлмай, балки матн (белгилар мажмуи) ҳам бўлиши мумкин. Шунга мос ҳолда сонли ва матнли ўзгармаслар фарқланади. Матнли ўзгармаслар баъзи программалаш тилларида «Литерал» деб аталади. Масалан, «Қувур» маълумоти: чўян, пўлат, асбест — цементли, пластмасса қийматларни, «Қувур диаметри» маълумоти: 200, 250, 300 қийматларни қабул қилади.

Программалаш тиллари юқоридаги белгилардан ташқари хизматчи сўзларни ўз ичига олади. Хизматчи сўзлар (операторлар) ҳарфлардан тузилиб, маълум, ўзгармас маънога ва шаклга эга бўлади. Хизматчи сўзларни тилнинг транслятори фарқлайди, тушунади ва унга мос ишларни бажаради (3.1-жадвал).

3.1-жадвал

БЕЙСИК тилида кўп ишлатиладиган хизматчи сўзлари

Хизматчи сўз	Талаффуз	Ўзбекча маъноси
1	2	3
DATA	Дейта	Маълумот, катталиклар
DEF FN	Деф фн	Функция
DIM	Дим	Ўлчов, ўлчам
ELSE	Элс	Акс ҳолда
END	Энд	Тамом
FOR	Фо	Учун
GOTO	Гоу ту	га ўт
IF	Иф	Агар
INPUT	Инпут	Киритиш, киритмоқ
LET	Лет	Бўлсин, ўзгарувчига қиймат беришда ишлатилади
NEXT	Некст	Навбатдаги
NOT	Нот	Эмас, мантиқий амал
OR	Ор	Ёки, мантиқий амал
OUTPUT	Оутпут	Чиқармоқ
PLOT	Плот	Чизмоқ
PRINT	Принт	Босиш қурилмасига чиқариш, чоп қилмоқ
READ	Рид	Ўқимоқ
REM(ark)	Римак	Изоҳ

Хизматчи сўз	Талаффуз	Ўзбекча маъноси
1	2	3
RETURN	Ритён	Қайтиш
STEP	Степ	Қадам
STOP	Стоп	Тўхташ
THEN	Зен	У ҳолда
TO	Ту	гача

Идентификаторлар (белгили номлар). Ўзгарувчилар, маълумотлар, ифодалар ва бошқаларни номлаш учун ишлатилади. Улар математикадаги ҳарфли ва ҳарф-рақамли белгиларни ифодалайди.

Идентификатор — ҳарфдан бошланган ҳарф ва рақамлар кетма-кетлигидир. Энг содда идентификатор битта ҳарф билан ёзилади. Уни ташкил қилиш учун БЕЙСИКда 40 тагача лотин ҳарфлари ва рақамлар ишлатиш мумкин. Масалан, S_A «Арматура юзаси» ўзгарувчисини *S*, *S*1, *SA*, *SAR*, ... идентификаторлар билан белгилаш мумкин.

Идентификатор программа тузувчи томонидан танланади. Бунда албатта, ҳар хил ўзгарувчилар ҳар хил идентификаторлар билан белгиланиши керак. Идентификатор сифатида хизматчи сўзларни ишлатиш мумкин эмас. Қуйидаги тавсияларга амал қилган маъқул:

1. Идентификатор аниқланаётган миқдорнинг белгиланиши ва маъносига мос келиши керак. Масалан, *D* (ёки DIAM) — диаметр, L (ёки LUSUN) — узунлик.

2. Ҳаддан ташқари узун белгилашларни ишлатиш мақсадга мувофиқ эмас. Масалан, USUNLIC ўрнига оддийгина L идентификаторини, DIAMETR ўрнига D ва ҳоказо.

Турли программалаш тилларида идентификаторлар турлари ҳар хил аниқланади.

БЕЙСИКда идентификаторлар: бутун, ҳақиқий, белгили (матнли) қийматлар қабул қилиши мумкин. Идентификатор тури ошкора кўрсатилмаган бўлса, у ҳақиқий қиймат қабул қилади. Масалан, A, P2, A1, PØ ҳақиқий қийматлар қабул қилувчи ўзгарувчилардир.

Бутун ўзгарувчи номидан кейин % (фоиз) белгиси қўйилади. Масалан, A%, P2%, Д3% ўзгарувчилар бутун қийматлар қабул қилади. Агар ҳақиқий қийматлар қабул қилув-

чи ўзгарувчига бутун қийматлар берилса, у ноль касрли ҳақиқий сон қилиб олинади. Агар бутун ўзгарувчига каср қиймат берилса, унинг каср қисмини ташлаб юбориб, бутун қиймат қилиб олинади.

Белгили идентификаторлар $ (ёки ¤) белги билан тугалланади. Масалан, A$, B$, E∅$(1∅) ўзгарувчилар белгилидир. Улар узунлиги бўш — белгисиз, ёки 255 тагача белгилардан ташкил қилиниши мумкин. Бир хил ҳарф билан тавсифланган бутун, ҳақиқий ва белгили ўзгарувчилар ҳар хил маъноларни билдиради. Масалан, A3 – ҳақиқий, A3% — бутун ва A3$ — белгили ўзгарувчилардир.

Операторлар. Оператор — берилган программалаш тилида алгоритм — аниқ бир кўрсатмасининг тугал ёзилиши, маъноси машина буйруғидагидек, лекин бир машинадаги бир неча амалларга мос келади. Алгоритм программалаш тилидаги битта операторга трансляция қилингандан кейин унга машина тилидаги ўнлаб буйруқлар мос келиши мумкин.

Операторлар бажариладиган ва бажарилмайдиганга ажралади.

Бажариладиган операторлар машинада маълум бир ишни бажаради. Бажарилмайдиган операторлар эса бажарилувчи операторлар учун ахборот беради.

Сонлар ва арифметик ифодалар. Программалаш тилларида бутун ва ҳақиқий сонлар фарқланади. Бутун сонларнинг умумий кўриниши $\pm m$. Бу ерда m — ўнли рақамлар кетма-кетлиги, моҳиятан ишорасиз бутун сон. Мусбат сон m кўринишда ишорасиз, манфий бутун сон ишораси кўрсатилиб — m қилиб ёзилиши шарт. Масалан, 888, 047, 157, −375, 0,−042 бутун сонлардир.

Бутун сонлар аниқдир. Улар ЭҲМнинг катакчалар турида қўзғалмас нуқтали шаклда тасвирланади. Бунда нуқта энг охирги кичик хонадан кейин жойлашади. Ўн олти катакчали ЭҲМда (IBM PC туридаги, ДВК-2М, ИСКРА-1030 ЭҲМлари) бутун сонларни тасвирлаш кўлами — 32768 дан +32767 гачадир.

Ҳақиқий сонлар. Қўзғалмас ва сузувчи нуқтали шаклларда ёзилади. Масалан, сонни қўзғалмас нуқтали шаклда +47.256, −32.752, 0048. , .475 каби ёзилади. Ўнли тартиб билан ёзганда бу сонлар: +0.47256 E+2, −0.48E+2, −0.475E+00 ва ҳоказо шаклларда тасвирланади.

Ҳақиқий сонлар ЭҲМ катакчалари тўрида 32 катакни эгалласа, абсолют қиймати $0{,}29 \cdot 10^{-38}$ дан $1{,}7-10^{38}$ гача бўлган сонларни ёзиш мумкин. Юқоридаги аниқликдаги ҳисоблашларни бажарганда иккиланган аниқликдаги сонларни ишлатиш мумкин. Бунда сон 64 катакчани эгаллайди. Агар тўри 32 катакчали ЭҲМда вергулдан кейин 7 та хона олинса, 64 катакчали тўрда 17 хона олиниб, яхлитлаб ҳисобланади. Тасвирлаш кўлами ўзгармайди.

Программалаш тилининг конструкцияларидан бири (синтактик элементи) ифода тушунчасидир. Ифодалар арифметик ва мантиқий бўлади.

Арифметик ифодалар математикадаги математик ифода тушунчасига мос келади. Арифметик дейилишига сабаб, биринчидан, улар ҳисоблаш жараёнларини ифодалайди, ҳисоблаш вазифасини бажаради; иккинчидан, мантиқий ва бошқа ифодаларни ўз ичига олмайди. Улар сонлар, арифметик амаллар, даражага кўтариш амали, функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш амаллари ва қавслардан ташкил қилинади. Арифметик ифодаларда қатнашаётган сонлар, идентификаторлар, функциялар номлари операндлар дейилади. Арифметик ифода қийматини ҳисоблаш жараёнида идентификаторлар ўрнига сонлар қўйилиб, кўрсатилган амаллар бажарилади. Уларнинг қийматлари бутун ёки ҳақиқий сон бўлиши мумкин. Улар қуйидаги қоидаларга риоя қилиб ёзилади:

Биринчидан, ҳамма белгилар бир чизиққа ёзилади. Индекслар, даража кўрсаткичи, горизонтал каср белгиси ишлатилмайди. Масалан, x_1, x^2, $\frac{a}{b}$ кўринишда ёзиш мумкин эмас.

Иккинчидан, амаллар бажариш тартибини ҳисобга олиб ёзилади. Бунда амалларнинг «аҳамиятига» қараб бажарилишини эътиборга олиш керак. Улар қуйидаги тартибда бажарилади:

1) функция қийматини ҳисоблаш;
2) даражага кўтариш амали;
3) кўпайтириш ёки бўлиш амаллари;
4) айириш ёки қўшиш амаллари бажарилади.

Бир хил аҳамиятга эга бўлган амаллар ёзилиш тартибида чапдан ўнгга қараб бажарилади. Аммо даражага кўтариш ўнгдан чапга қараб бажарилади. Бу тартибни ўзгартириш учун математикадагидек қавслар ишлатилади (фақат кичик қавслар).

Ифодаларнинг математикада ва БЕЙСИК тилида ёз-
лишига қуйидагилар мисол бўлади:

Математик ифода	БЕЙСИКда ёзилиши
ax^2-bd	$A*x\hat{}2-B*D$
$\frac{ax+b}{b-x}$	$(A*X+B)/(B-X)$
a^{b^c}	A^B^C

Арифметик ифодаларда кетма-кет икки амал белгиси-
ни ёзиш мумкин эмас. Математик ёзувдагидек кўпайтир
белгисини ёзмаслик мумкин эмас. Масалан, *ab* ни *A*B*
кўринишда ёзиш керак. *AB* ёзув идентификаторни билди-
ради.

Мантиқий ифодалар. Мантиқий ифодалар — мантиқий
ўзгарувчилар, муносабат белгилари орқали ёзилган солиш-
тириш амалларидан ташкил бўлади.

БЕЙСИКда мантиқий ифодалар: =(тенг), < > (тенг
эмас), < (кичик), > (катта), >= (катта ёки тенг), <= (ки-
чик ёки тенг) муносабат белгилари ва уларни NOT (рад
қилиш), AND (мантиқий ВА), OR (мантиқий ЁКИ), EQV
(эквивалент) мантиқий амаллар билан бирлашишидан таш-
кил қилинади, бундан ташқари матнли ўзгарувчилар ўза-
ро солиштиришдан ҳам ҳосил қилиниши мумкин.

Стандарт функциялар. Программалаш тилларининг
синтактик элементларидан бири стандарт функция тушун-
часидир. Программалашни енгиллатиш мақсадида кўп иш-
латиладиган функциялар қийматларини ҳисоблаш учун
программалар тузилиб, транслятор таркибига киритилган
(3.2-жадвалга қаранг).

3.2-жадвал

Стандарт функциялар

Математик ёзуви	БЕЙСИКда ёзилиши	Аргументининг ўзгариш кўлами
sinx	sin(x)	$\lvert x \rvert < 2^{18}\pi$
cosx	cos(x)	$\lvert x \rvert < 2^{18}\pi$
tgx	TAN(x)	$\lvert x \rvert < 2^{18}\pi$
arctgx	ATN(x)	$-\frac{\pi}{2}x < x < \frac{\pi}{2}$

Математик ёзуви	БЕЙСИКда ёзилиши	Аргументининг ўзгариш кўлами
e^x	EXP(x)	$x \leq 87$
$\ln x$	LOG(x)	$x>0$
$\lg x$	LOG1Ø(x)	$x>0$
$\sqrt{x}$	SQR(x)	$x \geq 0$
$\sin x$	SGN(x)	$x \in R$
$\vert x \vert$	ABS(x)	$x \in R$
$[x]$	INT(x)	
$]x[$	FIX(x)	
–	RND(x)	

Стандарт функциялар жадвалида бўлмаган элементар функцияларни, мумкин бўлган ҳолларда, улар орқали

$$\arcsin x = \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \arccos x = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\log_a b = \frac{\log_b}{\log_a},\quad \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

каби муносабатлар билан ифодаланади.

Мисол. Стандарт функциялар қатнашган ифодаларнинг ёзилиши:

Математик ёзув	БЕЙСИКдаги ёзуви
$\log_2^3 x$	(LOG(x)/LOG(2))^3
$\sqrt{\vert x \vert}$	SQR(ABS(x))
$a^2\arccos x$	A^2 *ATN(SQR(1−x^2)/x)

3.2. ЧИЗИҚЛИ ТУЗИЛИШДАГИ АЛГОРИТМЛАРНИ ПРОГРАММАЛАШ

Чизиқли тузилишдаги алгоритмлар киритиш-чиқариш, катталиклар блокини ташкил қилувчи ва қиймат бериш операторлари ёрдамида программалаштирилади.

БЕЙСИКда. Чизиқли тузилишдаги алгоритмларни DATA, READ, RESTORE, INPUT, PRINT, LPRINT каби киритиш-чиқариш ва LET(=) қиймат бериш операторла-

ри ёрдамида программалаштирилади. БЕЙСИК тилининг турларида LET операторини ёзмасдан тушириб қолдириш мумкин. Бундай ҳолларда=белгиси қиймат бериш оператори ўрнида ишлатилади.

Идентификаторларга қийматларни уч хил усул билан бериш мумкин.

1. Бевосита қиймат бериш оператори ёрдамида:

```
10  A%=10
20  B$="ТАЛАБА"
30  C=0.1259E03
```

каби ёзилади.

2. Маълумотлар блокини ташкил қилиш ва ундан ўқиб олиш йўли билан. Бунда DATA, READ ва RESTORE операторлари ишлатилади.

```
10  DATA 2.13, "ГУРУҲ", 200
```

оператори ташкил қилган маълумотлар блокидан A, B$, C% ўзгарувчиларга қийматларни

```
20  READ A, B$, C%
```

оператори ёрдамида ўқиб олинади.

Программанинг бажарилиши олдидан БЕЙСИК тизими ҳамма DATA операторларини қараб чиқиб ягона маълумотлар блокини ташкил қилади ва READ операторларининг келиши тартибида кетма-кет ундан маълумотларни ўқиб олади. Бунда маълумотлар блокидаги элементлар сони ва турлари билан ҳамма READ операторларидаги идентификаторлар сони бир хил бўлиши керак. Агар маълумотлар сони кам бўлса, ЭҲМ яна маълумот талаб қилади ва программани бажаришга ўтмайди. Маълумотлар кўп бўлса, ортиқчаси ишлатилмай қолади. Маълумотлар блоки элементлар DATA операторларида қандай кетма-кетликда ёзилган бўлса, шундай тартибда ташкил қилинади. Программада READ оператори учраганда ундаги идентификаторлар қийматларини маълумотлар блокидан ёзилиш тартибида ўқиб олади ва охирги олинган маълумот ҳолат кўрсаткичи орқали эслаб қолинади. Кейинги READ операторида қийматлар охирги олинган маълумотдан кейингисидан бошлаб олинади ва ҳоказо. Кўрсаткич ҳолатини маълумотлар блоки бошига кўчиришни RESTORE оператори бажаради. Бундай операция бир хилдаги маълумотларни ҳар хил ўзгарувчиларга бериш керак бўлганда ишлатилади. Масалан,

```
10  READ A, B, C$
20  RESTORE
30  READ D$, E, F$
40  DATA 2, 4.4, 6, 8, 10
50  END
```

программанинг бажарилиши натижасида A=2, B=4.4, C$=6, D$=2, E=4.4, F$=6 қиймат қабул қилади. Йигирманчи сатрдаги RESTORE оператори 10-сатрдаги READ оператори маълумотлар блокидан учта сонни олгандан кейин ҳолат кўрсаткичини яна блок бошига қайтаради ва 30-сатрдаги учта ўзгарувчи яна бошланғич 3 та қийматларни қабул қилади. Бунда 10-сатрдаги C$ белгили ўзгарувчи сон қиймат қабул қилганини кўрамиз. БЕЙСИК тизими белгили ўзгарувчиларга сон қиймат беришга йўл қўяди, (шу рақамлардан тузилган белгили маълумот) лекин аксинча бўлиши мумкин эмас.

3. ЭҲМ хотирасига маълумотларни клавиатурадан териб киритиш мумкин. Бунинг учун INPUT ва LINPUT операторлари ишлатилади. Программада бу оператор келганда машина экранга сўроқ белгисини чиқаради ва оператордаги рўйхат бўйича маълумотларга қиймат берилгандан кейингина навбатдаги операторни бажаришга ўтади. Маълумотларни киритиш давомида ЭҲМ уларнинг INPUT операторидаги турига мос келишини текшириб боради. Агар киритилаётган маълумот билан идентификаторнинг тури мос келмаса, бу ҳақида машина ахборот беради. Маълумотни бошқатдан киритиш керак бўлади.

Масалан, қуйидагича программаларни ишлатиш мумкин:

```
10  INPUT A, C%, D#
20  RUN
    ? 51.91
    ?? 1991
    ?? ЙИЛ
10  INPUT A#, B#
    RUN
    ? 1991, "ЙИЛ"
    OK
```

Юқорида ишлатилгандек, INPUT операторидаги идентификаторлар сони ва тури киритилаётган маълумотлар

сони ва турига мос келиши керак. Кам бўлса ?? белги ҳосил бўлади, кўп бўлса керагидан ортиғи ишлатилмайди.

Агар маълумот хато терилган бўлса, ёки бажарилаётган бўлса, уни ишлашини тўхтатиш керак бўлади. Буни ctrl ва Break клавишларини бир пайтда босиб бажариш мумкин. Агар бу иш бермаса ЭҲМни ўчириб бошқатдан ишга тушириш керак бўлади.

LINPUT оператори фақат белгили(литерли) катталикларни киритишга мўлжалланган бўлиб, бунда матн бошидаги, орасидаги ва охиридаги бўш ўринларни, вергулларни (маълумотларнинг биридан иккинчисини ажратувчи сифатида эмас) клавиатурадан киритиш имконини беради:

```
10 LINPUT A#
   RUN
   ? ҚУРИЛИШ МУҲАНДИСЛИГИ
   OK
```

Ҳисоблаш натижаларини Дисплей экранига PRINT оператори билан чиқарилади. Операторнинг мумкин бўлган шакллари қуйидагича:

```
cc PRINT
cc PRINT РЎЙХАТ
cc PRINT TAB(X); РЎЙХАТ
```

Биринчи ҳолда PRINT бўш жойлар сатрини экранга чиқаради, яъни белгисиз сатр ҳосил бўлади.

Иккинчи ҳолда маълумотлар кўрсатилган рўйхат бўйича чиқарилади. Бунда РЎЙХАТ — чиқариш элементларининг рўйхати бўлиб, улар бир-биридан вергул ёки нуқта вергул билан ажратилган бўлади. Рўйхат охирида эса ҳеч қандай белги бўлмаслиги, вергул ёки нуқта вергул бўлиши мумкин. Бунга сабаб, экран майдони сатрларга бўлинган бўлиб, ҳар бир сатр узунлиги 72 белгини ёзишга имконият беради ва ёзишнинг қандай тартибда бўлиши юқорида айтилган белгилар билан бошқарилади. Сатр узунлиги ҳар бири 14 тадан қилиб 5 та бўлакка ажратилган. Агар PRINT оператори рўйхатидаги чиқариш элементлари бир-биридан вергул билан ажратилган бўлса, ҳар бири алоҳида бўлакларга ёзилади. Агар ажратувчи белги; бўлса, навбатдаги маълумот битта бўш жой ташлаб ёзилади. Агар чиқариш элементи матн бўлса, у қўштирноқ (") орасига олиб ёзилади:

```
10  A=10
20  B=35
30  PRINT "A+B="; A+B
    RUN
    A+B=45
    OK
10  A=12.23
20  X=3
30  PRINT "A="; A
40  PRINT "A^2="; A^2+X,
50  PRINT SQR(A), X^2
    RUN
    A=12.23
    A^2=152.5729 3.497142       9
    OK
```

Биринчи PRINT охирида ҳеч қандай белги бўлмаганлиги учун кейинги PRINT га мос маълумотлар навбатдаги сатрдан ёзилган.

Иккинчи PRINT рўйхати вергул билан тугаганлиги сабабли учинчи PRINT элементлари шу сатрнинг бўш майдонига кейинги бўлакдан бошлаб чиқарилган.

Баъзи ҳолларда маълумотни сатр бошидан эмас, маълум бир сонда бўш жой қолдириб чиқариш керак бўлади. Бундай ҳолларда TAB(X) стандарт функциясидан фойдаланилади. Функция аргументи сон ёки арифметик ифода бўлиши мумкин. Маълумотни чиқариш кўрсатилган (аргумент ифода бўлса, ҳисобланган) сонда бўш майдон ташлаб бажарилади.

```
10  PRINT TAB(10), 120; TAB(30); 50
```

оператори

```
120                 50
```

кўринишидаги маълумотни экранга чиқаради.

Маълумотларни босиш қурилмасига чиқариш учун программадаги PRINT операторларини LPRINT билан алмаштириб чиқилади. Программа матни эса LLIST оператори билан босмага чиқарилади.

Мисол. Учбурчакнинг a, b, c томонлари маълум бўлса, унинг S юзини ҳисоблаш программасини тузамиз. Алгоритмнинг блок-схемаси 2.1-расмда берилган.

Программани READ ва DATA операторлари ёрдамида a=10, b=15, c=18 бўлганда,

```
10  REM УЧБУРЧАК ЮЗИНИ ҲИСОБЛАШ
20  READ A, B, C
30  DATA 10, 15, 18
40  P=(A+B+C)/2
50  S=SQR(P * (P−A) * (P−B) * (P−C))
60  PRINT "УЧБУРЧАК ЮЗИ S="; S; "КВ.БИРЛИК"
70  END
    RUN
    УЧБУРЧАК ЮЗИ S=347.75875 КВ.БИРЛИК
    OK
```

кўринишда, INPUT оператори ёрдамида эса

```
10  REM УЧБУРЧАК ЮЗИНИ ҲИСОБЛАШ
20  INPUT A, B, C
30  P=(A+B+C)/2
40  S=SQR(P * (P−A) * (P−B) * (P−C))
50  PRINT "УЧБУРЧАК ЮЗИ S="; S; "КВ.БИРЛИК"
60  END
    RUN
    ? 10, 15, 18
    УЧБУРЧАК ЮЗИ S =347.75875 КВ.БИРЛИК
OK
```

кўринишда ёзиб ишлатиш мумкин.

Бошқа учбурчак юзини ҳисоблаш учун биринчи ҳолда программанинг 30-сатридаги DATA оператори элементларини ўзгартириш, иккинчи ҳолда, RUN буйруғидан кейин маълумотларни ўзгартириш керак бўлади. Бунда a, b, c лар қийматлари ҳақиқатда учбурчак томонлари узунликларини ифодалаши, яъни улардан исталган биттаси қолган иккитаси йиғиндисидан кичик бўлиши керак.

3.3. ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТУЗИЛИШДАГИ АЛГОРИТМЛАРНИ ПРОГРАММАЛАШ

Тармоқланувчи тузилишдаги алгоритмларни программалашда киритиш-чиқариш, қиймат бериш, шартсиз ва шартли ҳамда ҳисобланувчи ўтиш операторлари ишлатилади.

Шартсиз ўтиш оператори GO TO N шаклида ёзилади. Бунда GO TO (...га ўт) оператор (хизматчи сўз), N бошқариш узатилаётган сатрнинг тартиб сони (номери).

Ҳисобланадиган шартсиз ўтиш оператори

ON (EXP) GO TO N1, N2, N3, ...

ёки

ON (EXP) THEN N1, N2, N3, ...

кўринишда ёзилади. ON (EXP) GOTO ёки ON (EXP) THEN операторлари EXP – ифоданинг қийматига қараб N1, N2, N3 ... тартиб сонли сатрлардан бирига ўтиш имкониятини беради.

```
190 INPUT B
200 ON(2*B) GO TO 50, 10, 100, 300
```

программа B=1,8 бўлганда 100-сатрга ўтишни таъминлайди.

Оператор қуйидаги вазифаларни бажаради. Олдин ифоданинг сон қиймати ҳисобланади, унинг бутун қисми олинади. Бу сон GO TO оператори рўйхатидаги элементнинг тартиб сони. Агар бу сон 1 бўлса, рўйхатдаги 1-, 2 бўлса, 2– ва ҳоказо элементга мос сатрдан бошлаб программа бажарилиши давом этади. Агар бу сон бирдан кичик ёки рўйхатдаги элементлар сонидан катта бўлса, ЭҲМ хато ҳақида маълумот беради. GO TO рўйхатидаги элементлар сони ихтиёрий бўлиши мумкин.

Шартли ўтиш оператори

IF (E⊗P) THEN S=A

ёки

IF (E⊗P) THEN N1

ёки

IF (E⊗P) GOTO N1

ёки

IF (E⊗P) THEN ... ELSE ...

кўринишда ёзилади. Оператор муносабат ифодасини рост ёки ёлғон қиймат қабул қилишига қараб бошқаришни унга мос вазифани бажаришга узатади.

```
10 INPUT D
20 IF D=3 THEN 50
```

```
30  PRINT "БОШҚАТДАН КИРИТИНГ"
40  GO TO 10
50  PRINT "D="; D
60  END
```

Программанинг 20-сатридаги IF оператори D=3 бўлганда бажаришни 50-сатрга узатади. Натижада D қиймати босмага чиқарилиб, машина тўхтайди. Акс ҳолда, 30-сатрдаги "БОШҚАТДАН КИРИТИНГ" маълумоти экранда ҳосил бўлиб, 40-сатрдаги GO TO оператори бажаришни 10-сатрга узатади.

Мисол. Сув билан таъминлаш тизимидаги гидравлик оғишни ҳисоблаш программасини тузамиз. Керакли формулалар ва ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси 2.4-расмда келтирилган. Программада қуйидаги белгилашларни киритамиз:

Матнда	Программада	Матнда	Программада
d	D	q	Q
v	V	i	I
F	F%		

Программани ON...THEN ва GO TO операторларидан фойдаланиб қуйидагича ёзиш мумкин:

```
10  REM ГИДРАВЛИК  ОҒИШНИ ҲИСОБЛАШ
20  INPUT Q, D, V, F%
30  ON(F%) THEN 40, 60, 80, 100, 120, 140
40  I=0.001735*Q^2/D^5.3
50  GO TO 150
60  I=0.00148*(1+0.867/V)^0,3*Q^2/D^5.3
70  GO TO 150
80  I=0.00091*(1+3.51/V)^0.19*Q^2/D^5.19
90  GO TO 150
100 I=0.001052*Q^1.774/D^4.774
110 GO TO 150
120 I=0.00179*Q^1.9/D^5.1
130 GO TO 150
140 I=0.00118*Q^1.85/D^4.89
150 PRINT "ГИДРАВЛИК ОҒИШ I="; I
160 END
```


Программанинг 30-сатрида келтирилган ON оператори F% бутун сонли ўзгарувчининг 1, 2, 3, 4, 5, 6 қийматларидан бирини қабул қилишига қараб рўйхатдаги мос ўринда турган сатрга ўтишни таъминлайди. Мос формула билан гидравлик оғиш ҳисоблангандан кейин у бошқа формула билан ҳисобланмаслиги учун GO TO оператори билан босмага чиқариш кўзда тутилган сатрга ўтиш бажарилади.

Ҳисоблаш жараёнларини шартсиз ва шартли ўтиш операторларидан фойдаланиб турлича ташкил қилиш мумкин. Бунда эътиборни программанинг ихчам ва самарали бўлишига қаратиш керак.

3.4. ТАКРОРЛАШ АЛГОРИТМЛАРИНИ ПРОГРАММАЛАШ

Такрорланувчи алгоритмлар шартли ўтиш ва цикл операторлари ёрдамида программаланади.

Цикл оператори умумий ҳолда

cc FOR x=x1 TO x2 STEP x3

кўринишда ёзилади. Бу ерда cc — сатр сони, FOR — цикл оператори, x — цикл ўзгарувчиси, x1 ва x2 ўзгарувчининг бошланғич ва охирги қийматлари, x3 — қадам, TO, STEP — хизматчи сўзлар.

Агар x3=1 бўлса, операторни

cc FOR x=x1 TO x2

кўринишда ёзиш мумкин.

Цикл тугаганлиги

cc NEXT x

оператори билан кўрсатилади. Бунда NEXT операторидаги x ўзгарувчи цикл ўзгарувчиси билан бир хил бўлиши шарт.

Мисол. $y = \log_2^2(ex^2 + lx + k)$ функциянинг $x \in [a, b]$ қийматларини h қадам билан ҳисоблаш программасини тузамиз. Алгоритмнинг блок-схемаси 2.9-расмда берилган.

```
10  REM ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШ
20  INPUT A, B, E, L, K, H
30  FOR x=A TO B STEP H
40  A1=E*x^2+L*x+K
50  IF A1<=0 THEN 90
```

```
60 y=LOG(A1)/LOG(2)
70 PRINT "x="; x, "y="; y
80 GO TO 100
90 PRINT"ЛОГАРИФМ ОСТИДАГИ ИФОДА
   МУСБАТ ЭМАС"
100 NEXT x
110 END
```

БЕЙСИКда ЭҲМ билан мулоқотда ишлашни учбурчак юзини ҳисоблаш программасини тузишда кўриб чиқамиз (2.11-расмга қаранг):

```
10 REM УЧБУРЧАК ЮЗИНИ ҲИСОБЛАШ
20 PRINT "А НУҚТА КООРДИНАТАЛАРИНИ
   КИРИТИНГ"
30 INPUT x1, y1
40 PRINT "В НУҚТА КООРДИНАТАЛАРИНИ
   КИРИТИНГ"
50 INPUT x2, y2
60 PRINT "С НУҚТА КООРДИНАТАЛАРИНИ
   КИРИТИНГ"
70 INPUT x3, y3
80 A1=SQR((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)
90 B1=SQR((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)
100 C1=SQR((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)
110 IF A1=0 OR B1=0 OR C1=0 THEN 150
120 IF A1+B1>C1 AND B1+C1>A1 AND A1+C1>B1
    THEN 150
130 PRINT "НУҚТАЛАРДАН УЧБУРЧАК ЯСАШ
    МУМКИН ЭМАС"
140 GO TO 10
150 P=(A1+B1+C1)/2
160 S=SQR(P*(P-A1)*(P-B1)*(P-C1))
170 PRINT "A="; A1; "B="; B1, "C="; C1, "S="; S
180 GO TO 10
```

Программанинг 180-сатридаги 10-сатрга шартсиз ўтиш оператори 10-дан 170-сатрларгача бўлган операторларни исталганча такрорлаш имкониятини беради. Такрорлаш фойдаланувчининг ихтиёри билан тўхтатилади.

3.5. МАССИВЛАР БИЛАН ИШЛАШ

Массив — бир хил хусусиятли, бир номлаги тартибланган маълумотлар мажмуидир. Математикадаги векторлар ва матрицалар массивларга мисолдир. Бунда векторнинг ҳар бир элементи бир индекс билан тартиблаб кўрсатилган, яъни $\bar{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ёки матрица номи битта ҳарф билан белгиланиб, элементлари индекслар билан кўрсатилади, яъни $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Бу белгилашларда $\bar{a}$, A маълумотларнинг умумий номланишини билдирса, a_i, a_{ij} шу номли маълумотни i, (i, j) элементи эканлигини белгилайди, яъни индекслар элементнинг тутган ўрнини кўрсатади. Бундай хусусиятли катталиклар, маълумотлар ҳаётда ҳам кўп учрайди. Масалан, i билан стадиондаги сектор тартибини, j билан қатор тартибини, k билан шу қатордаги ўриннинг тартибини кўрсатишга келишилса, стадиондаги ўринларни уч индексли s массив билан, ҳар бир ўринни эса s_{ijk} массив элементи кўринишида ифодалаш мумкин бўларди. Бунда секторлар, ўринлар ва қаторлар тартиб сонлари бирдан бошлаб тартибланган ва маълум бир сонгача ўзгаради, яъни i, j, k индексларнинг бошланғич ва охирги қийматлари бор.

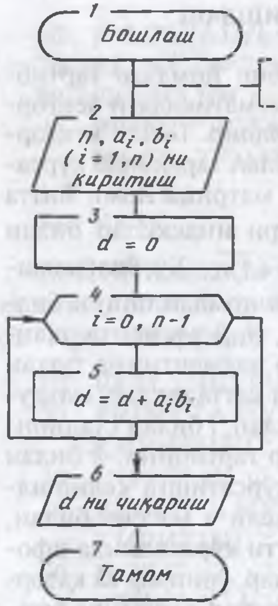
БЕЙСИКда индекслар массив номидан кейин бир-биридан вергул билан ажратилиб, қавс ичида ёзилади. Массив номлари оддий ўзгарувчилардагидек ташкил қилинади. Индексларнинг бошланғич қиймати нолга тенг. Шунинг учун массив элементлари сонини кўрсатганда индекснинг юқори чегараси кўрсатилади. Масалан, *A*(10), *C*(12,13), *B*(5, 3): *A* — массив 11 та, *B* — 7×8=56 та, *C* — 6×4=24 та элементдан иборат эканлигини билдиради.

Массивни ЭҲМ хотирасига киритиш учун аввал ундан жой ажратилади. Бунинг учун DIM (инглизча DIMension — дименшн, ўзбекча — ўлчов) оператори ишлатилади. Масалан

```
20 DIM A(10), C%(12, 13), H(15)
```

Бу оператор бажарилмайдиган оператордир, шунинг учун уни программанинг исталган жойида келтириш мумкин. Унинг вазифаси ЭҲМ тезкор хотирасидан кўрсатилган миқдорда жой ажратишдир.

Бир ўлчовли массивлар ЭҲМ тезкор хотирасида кетма-кет жойлаштирилади. Икки ўлчовли массив ҳам олдин чи-



3.1-расм.

зиқли кўринишда тасвирланиб, кейин хотирага жойлаштирилади. Бунда жойлаштириш сатр элементлари бўйича амалга оширилади. Олдин биринчи сатр элементлари, кейин иккинчи сатр элементлари ва ҳоказо.

Ажратилган майдонга (ячейкаларга) массивларни READ ёки INPUT операторлари ёрдамида ёки ҳисоблаш жараёнида оралиқ ёки якуний натижалар сифатида жойлаштириш мумкин.

Мисол. $\vec{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ва $\bar{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$d=(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

формула билан ҳисобланади. Ҳисоблашни бажариш учун a_i, b_i, $(i=\overline{1,n})$ қийматларини киритишга майдон ажратиш керак. Кейин ўзгарувчи бўйича цикл ташкил қилиб, a_i, b_i қийматларини ЭҲМ хотирасига клавиатурадан битталаб киритилади. Алгоритмнинг блок-схемаси 3.1-расмдагидек бўлади. Программаси қуйидагича:

```
10  REM ВЕКТОРЛАР СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ
20  DIM A(50), B(50)
30  INPUT N
40  FOR I=0 TO N
50  INPUT A(I), B(I)
60  NEXT I
70  D=0
80  FOR I=0 TO N–1
90  D=D+A(I)*B(I)
100 NEXT I
110 PRINT ”КЎПАЙТМА=“; D
120 END
```

```
RUN
? 2
?? 5,6,7
?? 2,1,5
КЎПАЙТМА=36.5
```

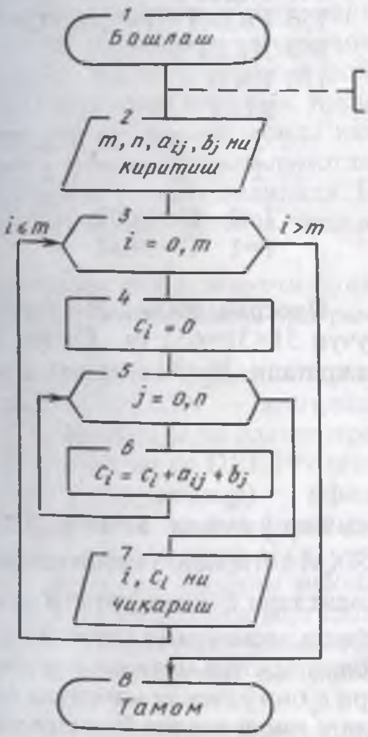
Программанинг 20-сатридаги DIM оператори A ва B массивлар учун 51 талан майдон ажратади. Демак, программани 51 тагача элементли векторлар скаляр кўпайтмасини ҳисоблаш учун қўллаш мумкин. Аниқ нечта элементли векторлар эканлиги N нинг қийматига боғлиқ. 40, 50, 60- сатрларда a_i, b_i қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади ва ажратилган майдонларга ёзилади.

Мисол. $m \times n$ - тартибли $A = (a_{ij})$ матрицани $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ векторга кўпайтириш программасини тузамиз.

A матрицани $\bar{b}$ векторга кўпайтириш натижасида $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ вектор ҳосил бўлади. Бунда кўпайтма вектор элементлари

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_i, \quad i = \overline{1, n}$$

формула билан ҳисобланади. Демак, A матрица элементларини жойлаштириш учун икки ўлчовли $A(M, N)$, $\bar{b}$ вектор элементлари учун бир ўлчовли $B(N)$ ва $\bar{c}$ учун $C(M)$ массивлар ажратиш керак. Индексларнинг бошланғич қиймати 0 дан бошланганлиги учун юқори чегараларини битта кам қилиб олинади, яъни $M=M-1$ ва $N=N-1$. M ва N нинг қийматлари 21 ва 31



3.2-расм.

5—К-20

бўлсин. Программа матни қуйидагича бўлади (Блок-схема-си 3.2-расмда берилган):

```
10  REM МАТРИЦАНИ ВЕКТОРГА КЎПАЙТИРИШ
20  DIM A(20,30), B(30), C(20)
30  INPUT M, N
40  FOR J=0 TO N
50  FOR I=0 TO M
60  INPUT A(I, J)
70  NEXT I
80  INPUT B(JJ)
90  NEXT J
100 FOR I=0 TO M
110 C(I)=0
120 FOR I=0 TO N
130 C(I)=C(I)+A(I, J)*B(J)
140 NEXT J
150 PRINT "I="; I, "C=", C(I)
160 NEXT I
170 END
    RUN
  ? 2   ?? 3.5   ?? 4.2   ?? 3   ?? 1    ?? 1.4
 ?? 2   ?? 2     ?? 2.1   ?? 3   ?? 3.2

    I=0   C=19.02
    I=1   C=19.84
```

Программанинг 20-сатридаги DIM оператори *A* массив учун 31×31=651 та, *B* учун 31 та ва *C* учун 21 та майдон ажратади. 30–90 сатрларда икки ўлчовли

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4.2 \\ 3 & 2 & 1.4 \end{pmatrix}$$

ва бир ўлчовли $\vec{b}$ =(3.5, 3.2, 2.1) массивлар элементлари ЭҲМ хотирасига киритилади. Бунда матрицани устун элементлари бўйича киритилиб, ҳар биридан кейин $\vec{b}$ нинг битта элементини киритиш кўзда тутилган. Программани бажарилиши натижасида ҳосил бўлган вектор элементлари c_i бир ўлчовли массивда сақланади ва ҳар бирини ҳисоблаш пировардида босмага чиқарилади. *C* массив элементлари ҳисоблаш жараёнининг якуний натижаси сифатида

ҳосил қилинади. *A* ва *B* массивлар клавиатурадан киритилади.

Баъзи ҳолларда массив элементлари программанинг маълум бир синф масалалари учун қўлланилганда ўзгармайди, аксинча баъзи бирлари ўзгарувчи бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда ўзгармайдиган массивларни катталиклар блоки орқали ўқиб хотирага ёзиб олиш ёки алоҳида файл сифатида ташкил қилган маъқул. Чунки ўзгармас маълумотларни қайта-қайта клавиатура орқали киритиш кўп вақтни олади ва кўп меҳнат талаб қилади. Программанинг самарадорлигини камайтиради.

3.6. ҚИСМ-ПРОГРАММАЛАР ЁРДАМИДА ПРОГРАММАЛАШ

Қисм-программа — программанинг мустақил аҳамиятга эга бўлган, турли масалаларни ечишда бошқа программаларга ҳам қўшиш мумкин бўлган қисми. У бир марта тузилиб, қайта-қайта ишлатилади ва ёрдамчи алгоритмни программалаш тилидаги ёзувидир. Қисм-программа фойдаланиладиган программа *асосий программа* дейилади. Қисм-программа асосий программанинг турли жойларида ишлатилади. Бунинг учун керакли бошлангич маълумотлар тайёрланади ва қисм-программага мурожаат қилинади. Бу жараён турли программалаш тилларида турлича ташкил қилинади ва номланади.

БЕЙСИКда ёрдамчи алгоритмлар фойдаланувчи функцияси (ностандарт функция) ёки умумий қисм-программа кўринишида ёзилади.

Фойдаланувчи функцияси стандарт функциялардан фарқли равишда DEF FN(DEFINITION — аниқлаш, функция) оператори билан тавсифланади ва одатда программа бошида келтирилади. Оператор сс DEF FN ҳарф (ёки ҳарф рақамлар) (расмий ўзгарувчилар) = ифода шаклида ёзилади. Бунда FN қўшимча ҳамма функциялар учун умумий бўлиб, ундан кейинги ҳарф (ёки ҳарф рақамлар) билан биргаликда функция номини ифодалайди. Расмий ўзгарувчи (ёки бир-биридан вергуллар билан ажратилган ўзгарувчилар) — функция ўзгарувчиси; ўзгармас, ўзгарувчи, индексли ўзгарувчи ёки ифода бўлиши мумкин.

Функциядан фойдаланиш стандарт функциялардагидек бажарилади. Масалан,

IV. ХАТОЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Амалий масалаларни ечганда турли миқдор қийматлари ўлчанади, содда формулалар билан ҳисобланади ва шундай кейин ЭҲМга киритилади. Бу маълумотлар маълум бир хатоликлар билан аниқланади. ЭҲМда бажарилган ҳисоблашлар ҳам яхлитланади ва маълум хатолик билан бажарилади. Шунинг учун хатоликлар тарқалиши ва уларни баҳолаш масаласи ҳамиша пайдо бўлади. Қуйида хатоликлар назариясининг баъзи тушунчаларини кўриб чиқамиз.

4.1. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР ВА ФОРМУЛАЛАР

Соннинг аниқ қиймати A ва тақрибий қиймати a бўлса,

$$\Delta = A - a \tag{4.1}$$

айирмага A ўрнига a олингандаги хатолик дейилади. Агар (4.1) айирма мусбат бўлса, a тақрибий сон ками билан, манфий бўлса, ортиғи билан олинган дейилади. Кўпинча, A номаълум бўлганлиги учун Δ нинг ишорасини аниқлаш мумкин эмас, шунинг учун $\Delta a = |A - a|$ абсолют хато қаралади. Амалда соннинг аниқ қиймати A маълум бўлмаганлиги сабабли хатонинг абсолют қийматини ҳисоблашда унинг юқори чегарасини — лимит абсолют хато деб кўрсатилади ($\Delta(a)$), яъни $\Delta a \leq \Delta(a)$ ёки $|A - a| \leq \Delta(a)$. Демак, $a - \Delta(a) \leq A \leq a + \Delta(a)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу фактни, яъни a тақрибий сон $\Delta(a)$ абсолют хатога эга эканлигини $A = [a\ \Delta(a)]$ кўринишда ёзилади.

Тақрибий соннинг нисбий хатоси $\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|}$ муносабат билан аниқланади. $A \approx a$ бўлгани учун $\delta a = \Delta a / |a|$.

Тақрибий сон a нинг лимит нисбий хатоси $\delta(a)$ деб нисбий хатонинг юқори чегарасиға айтилади, яъни $\delta a \leq \delta(a)$.

Лимит абсолют ва нисбий хатолар ўзаро

$$\Delta(a) = |a|\,\delta(a) \tag{4.2}$$

муносабат билан боғланган. Бундан кейин лимит абсолют ва нисбий хато дейилганда лимит сўзини тушириб қолдирилади.

Сонларни яхлитлаш қоидалари. Сонларни яхлитлаш деб бир ёки бир неча рақамларини ташлаб ёзиш ёки бутун сонларнинг охирги рақамларини 0 га алмаштиришга айтилади. Бунда ташлаб юборилаётган рақам 5 дан катта бўлса, олдидаги рақамга 1 қўшилади, кичик бўлса, қўшилмайди, тенг бўлса, олдиндаги рақам жуфт бўлганда қўшилмайди, тоқ бўлса 1 қўшилади.

М и с о л л а р. 1. 5,3725 сонини ўндан, юздан, мингдан биргача яхлитлаймиз.

Бунда мос ҳолда 5,3725=5,4: 5,3725=5,37; 5,3725=5,372 тенгликларни оламиз.

2. 1203752 сонини ўн, юз, минг ва ўн минггача аниқликда яхлитласак мос ҳолда $1203752=120375\cdot 10$; $1203752=12038\cdot 10^2$; $1203752=1204\cdot 10^3$; $1203752=120\cdot 10^4$ сонларни ҳосил қиламиз.

Сонларни яхлитлаганда уларни ёки берилган ўнли рақамгача, ёки қийматли (маъноли) рақамгача яхлитланади.

Сонли усуллар — тақрибий усуллардир. Шунинг учун олинган ечимлар ҳам маълум бир хатоликлар билан олинади. Мана шу хатоларни баҳолаш уларнинг чегарасини билишни тақозо қилади. Бу хатолар қандай ва қаерлардан ҳосил бўлади? Буни юқорида келтирилган масалаларни ЭҲМда ечиш босқичларидан кўриш мумкин. Ҳар қандай жараённи ЭҲМда тадқиқ қилиш, текшириш учун математик модел тузилади. Математик модел эса бу жараённи фақат тақрибан тасвирлайди холос. Математик модел ҳақиқий жараённи идеаллаштириш, соддалаштиришдан иборат бўлиб, у ҳақиқий жараённи фақат тақрибий ифодалайди. Унга кираётган миқдорлар бевосита ўлчашлар натижасида олинади ва шунинг учун улар ҳам маълум хатога эга бўлади. Ҳисоблаш жараёнида сонлар яхлитланади, тақрибан ҳисобланади. Мана шу хатолар охирги ечимда ўз таъсирини беради. Олинган натижаларни таҳлил қилиш жараёнида бевосита ҳақиқий кечаётган жараёндан олинган натижалар билан солиштириб кўрилиши натижасида моделнинг бу жараённи қанчалик тўғри акслантириши таҳлил қилинади. Бунга моделнинг адекватлик даражаси дейилади. Демак, натижаларни баҳолашда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

1. Ўлчаш натижасидаги хатолар.
2. Математик моделнинг хатоси.
3. Математик усулнинг хатоси.
4. Ҳисоблаш хатоси.
5. Яхлитлаш хатолиги (ЭҲМ турига мос яхлитлашлар ҳам).

Ўнли саноқ тизимидаги a тақрибий соннинг

$$a=a_m \cdot 10^{m}+a_{m-1} \cdot 10^{m-1}+\ldots+a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}$$

ёзувидаги $\alpha_m \neq 0$ бўлса, барча $\alpha_m,\ \alpha_{m-1},\ \ldots,\ \alpha_{m-n+1}$ рақамлар аҳамиятли (қийматли)рақамлар дейилади, яъни соннинг ёзувидаги чапдан биринчи нолдан фарқли рақамдан бошлаб барча рақамлари аҳамиятли рақамлардир. Бунда сон ёзувининг охиридаги ноллар ташлаб юборилган ёки номаълум рақамлар ўрнига ёзилган бўлса аҳамиятли бўлади.

Соннинг ёзувида вергулдан ўнгда турган рақамлар ўнли белгилар дейилади. Масалан, 0,0348 сонида 4 та ўнли белги ва 3 та аҳамиятли рақамлар бор; 473916 сонида 6 та аҳамиятли рақам бўлиб, бирорта ҳам ўнли белги йўқ.

Агар a тақрибий сон учун

$$\Delta(a) \leq \alpha \cdot 10^{m-n+1}$$

шарт бажарилса, яъни соннинг абсолют хатоси сон ёзувидаги охирги сақлаб қолинган ўнли белги тартибидан ортиқ бўлмаса, α_{m-n+1} ва ундан олдин турган барча рақамлар ишончли дейилади. Бунда α_{m-n+1} агар $\alpha=1$ бўлса кенг маънода, $\alpha=0,5$ бўлса тор маънода ишончли рақам дейилади.

Охирги ишончли рақамдан ўнгда турган рақамлар шубҳали рақамлар дейилади. Масалан, $\Delta(a)=0,0001$ бўлса, $a=41,3927$ ёзувда 7 рақами кенг маънода ишончли бўлиб, тор маънода шубҳалидир. Чунки бунда, $m=1$, $n=6$ бўлиб $\Delta a<\Delta(a)=0,0001=10^{-4}$, лекин $\Delta(a) < \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$ деб айта олмаймиз.

Техникавий жадвалларда ва ҳисоблашларда якуний натижалар битта шубҳали рақам қолдириб ёзилади. Математик жадвалларда эса фақат ишончли рақамларгина келтирилади. Бунда сонни яхлитлаганда ҳосил бўлган яхлитлаш хатолиги ҳисобга олиниши керак.

Мисоллар. 1. $a = 10/9=1,11$ ва $b = \sqrt{17} =4,12$ тенгликлардан қайси бири аниқроқ.

Соннинг аниқлиги унинг нисбий хатосига қараб белгиланади. Сонларни кўпроқ ўнли белгилар билан ҳисоблаймиз:

$$a = 10/9=1,1111 \text{ ва } b = \sqrt{17} =4,1231.$$

Ортиғи билан яхлитлаб (абсолют хатонинг юқори чегараси аниқланаётганлиги учун) абсолют хатоларини ҳисоблаймиз: $\Delta(a)=1,1111-1,11<0,002$ ва $\Delta(b)=4,1231-4,12<0,004$.

Лимит нисбий хатоларини аниқлаймиз: $\Delta(a)=0,002/1,11=0,0019=0,19\%$ ва $\Delta(b)=0,004/4,12=0,00078=0,078\%$.

Демак, $\Delta(a)>\Delta(b)$ бўлганлиги учун *в* аниқроқ сон экан.

2. с =0,66385[0,00042] сонини: а) тор маънода; б) кенг маънода ишончли рақамларинигина қолдириб яхлитлаймиз.

Берилганига кўра $\Delta(c)=0,00042<0,0005$. Демак, соннинг 3-ўнли белгисидан бошлаб барча рақамлари тор ва кенг маънода ишончли бўлади. Сонни яхлитлаб $c_1=0,664$ қилиб ёзамиз. Яхлитлагандан кейинги абсолют хатони аниқлаймиз:

$$\Delta(c_1)=\Delta(c)+\Delta_{\text{яхлит}}=0,00042+0,00015=0,00057.$$

Демак, $c_1=0,664$ тақрибий сонда охирги 4 рақами кенг маънода ишончли, чунки $\Delta(c_1)<0,001$, лекин тор маънода ишончли эмас, чунки $\Delta(c_1)=0,00057>\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}=0,0005$. Шунинг учун соннинг 2 та ўнли белгисини қолдириб яхлитлаб ёзамиз $c_2=0,66$. Абсолют хатосини аниқлаймиз: $\Delta(c_2)=\Delta(c)+\Delta_{\text{яхлит}}=0,00042+0,00385=0,00427<0,005$. Демак, $c_2=0,66$ қилиб ёзсак ҳамма рақамлар ҳар икки маънода ишончли бўлади.

Тақрибий сонларни ёзганда: бутун сонлар бўлса охиридаги ноллар ўрнига, уларнинг тартибига мос ўннинг даражасига кўпайтириб ёзилади; каср сонларнинг охирги шубҳали рақамлари ноллар бўлса, улар албатта ёзилади.

Масалан, $127\cdot 10^5$, 12700000 эмас; 4,8700, лекин 4,87 эмас. Шу сабабли 5,47 ёзилган сон 5,470 га тенг эмас, чунки уларнинг хатолари бир хил эмас.

Сонларни яхлитлаш натижасида уларнинг хатолари кўпайишини кўрдик. Шунинг учун йиғиладиган яхлитлаш хатоларини камайтириш учун ҳисоблашларда оралиқ натижалар 2 та ва хатто 3 та шубҳали рақамлари билан олинади.

4.2. ХАТОЛИКЛАРНИ ЭЪТИБОРГА ОЛИБ ҲИСОБЛАШ

Тақрибий сонлар устида амаллар бажариш қоидалари ва ҳисоблаш хатоликларини баҳолашни кўриб чиқамиз.

Қўшиш ва айириш. Чекли сондаги тақрибий сонларни қўшганда ва айирганда уларнинг абсолют хатолари қўшилади, яъни

$$\Delta(a_1+a_2+...+a_n)=\Delta(a_1)+\Delta(a_2)+...+\Delta(a_n), \tag{4.3}$$

$$\Delta(a_1-a_2-...-a_n)=\Delta(a_1)-\Delta(a_2)-...-\Delta(a_n), \tag{4.4}$$

Шунинг учун, тақрибий сонларнинг йиғиндисини ҳисоблаганда қўшилувчилар бир хил сондаги ўнли рақамгача яхлитланади.

Мисоллар. 1. A_1=3,22[0,02], A_2=101048[0,0003] ва A_3=9,6[0,1] сонларини қўшамиз. Хатоларини эътиборга олмай қўшсак: 322+1,0148+9,6=13,8348 бўлади. Лекин бундай ёзиш шарт эмас a_1=3,2, a_2=1,0, a_3=9,6 қилиб олсак 3,2+1,0+9,6=13,8 бўлади. Йиғиндининг абсолют хатоси $\Delta(a_1+a_2+a_3)$=0,02+0,0003+0,1=0,1203<0,13 яхлитлаб ҳисоблаганда Δ=13,8348−13,84=0,0348 яхлитлаш хатоси ҳосил бўлади. Умумий хато 0,0348+0,1202=0,155<0,2. Бир хил натижани оламиз.

2. A=5,874[0,0005] ва B= 2,342[0,0005] сонларининг айирмасини ҳисоблаймиз.

Айирманинг абсолют хатоси $\Delta(a_1-b_2)$= 0,0005+0,0005= = 0,001. Айирмани ҳисоблаймиз 5,874 [0, 0005] − −2,342[0,0005]=3,532[0,001].

Тақрибий сонлар йиғиндиси ва айирмасининг нисбий хатоларини

$$\delta(a_1+a_2+...+a_n)=\frac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)+...+\Delta(a_n)}{a_1+a_2+...+a_n}, \tag{4.5}$$

$$\delta(a_1-a_2-...-a_n)=\frac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)+...+\Delta(a_n)}{|a_1-a_2-...-a_n|} \tag{4.6}$$

формулалар билан ҳисоблаган маъқул.

Кўпайтириш ва бўлиш. Бўлинма ва кўпайтманинг хатоликларини аниқлашда, аввал

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\delta(a_1)+\delta(a_2), \tag{4.7}$$

$$\delta(a_1 \cdot a_2) = \delta(a_1) + \delta(a_2) \quad (4.8)$$

формулалар билан нисбий хатоларини ҳисоблаб кейин абсолют хатоларини топиш қулай.

Тақрибий сонларни кўпайтирганда ва бўлганда аҳамиятли рақамларини бир хил қилиб олинади.

Мисол: $a = \sqrt{5} / \pi$ ни ҳисоблаймиз. Суратдаги сон $\sqrt{5}$ =2,2[0,05], маҳраждаги π=3,1[0,05].

Бўлинма a=2,2/3,1=0,71. Нисбий хато δ(2,2/3,1)=0,05/2,2+0,05/3,1=0,04. Демак, натижа a = 0,71−4% хато билан ҳисобланган.

4.3. ФУНКЦИЯНИНГ ТАҚРИБИЙ ҚИЙМАТИНИ ҲИСОБЛАШДАГИ ХАТОНИ БАҲОЛАШ

Фараз қилайлик, $y=f(x)$ дифференциалланувчи функция бўлсин, x_0 аргумент x ўзгарувчининг тақрибий қиймати бўлиб, хатоси $\Delta x = |x - x_0|$ бўлсин. У ҳолда

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

функциянинг $y_0=f(x_0)$ тақрибий қиймати учун абсолют хато

$$\Delta(y_0) = |f'(x_0)|\,\Delta(x_0), \quad (4.9)$$

нисбий хато

$$\delta(f(x_0)) = \frac{\Delta(f(x_0))}{|f(x_0)|} = \frac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|}\Delta(x_0) \quad (4.10)$$

формулалар билан ҳисобланади.

Қуйидаги жадвалда баъзи бир элементар функциялар хатоликларини ҳисоблаш формулалари берилган.

Функция	Абсолют хато	Нисбий хато
$y=x^n$	$n=\|x^{n-1}\|\,\Delta(x)$	$n\delta(x)$
$y=\sqrt[n]{x^m}$	$\frac{m}{n}\|x\|^{\frac{m-n}{n}}\,\Delta(x)$	$\frac{m}{n}\delta(x)$
$y=\log_a x$	$\|\log_a e\|\,\delta(x)$	$\frac{\|\log_a e\|}{\|\log_a x\|}\delta(x)$
$y=\ln x$	$\delta(x)$	$\delta(x)/\|\ln x\|$
$y=\sin x$	$\|\cos x\|\,\Delta(x)$	$\|\mathrm{ctg}\,x\|\,\Delta(x)$
$y=\cos x$	$\|\sin x\|\,\Delta(x)$	$\|\mathrm{tg}\,x\|\,\Delta(x)$
$y=a^x$	$a^x\|\ln a\|\,\Delta(x)$	$\|\ln a\|\,\Delta(x)$

Унча мураккаб бўлмаган ифодаларнинг қийматларини ҳисоблашдаги хатоликларни (4.2) — (4.10) ва жадвалдаги формулалар билан аниқлаш мумкин.

Мисол:

$$X=(a+b)^3c/(m-n)^2$$

ифоданинг қийматини a=5,2[0,04], b=22,16[0,03], c=7,5[0,05], m=16,825[0,04], n=8,13[0,002] бўлганда ҳисоблаймиз. Натижанинг абсолют ва нисбий хатоларини аниқлаймиз.

Ифоданинг қийматини ҳисоблаймиз:

$a+b$=5,2[0,04]+22,15[0,03]=27,36[0,07],
$(a+b)^3$=20480,864,
$m-n$=16,825[0,004]−8,13[0,002]=8,695[0,006],
$(m-n)^2$=75,603,
X=20480,864·7; 5/75,603=2031,751,

хатоликларни аниқлаймиз: (4.7) ва (4.8) формулаларга асосан

$$\delta(x)=3\delta(a+b)+\delta(c)+2\delta(m-n)$$

эканлигини аниқлаймиз. Бу хатоликларни ҳисоблаймиз:

$\delta(c)$=0,05/7,5=0,0067,
$\delta(a+b)=(\Delta(a)+\Delta(b))/(a+b)$=0,07/27,36=0,0026,
$\delta(m-n)=(\Delta(m)+\Delta(n))/|m-n|$=0,006/8,695=0,00069.

Булардан $\delta(X)$=0,0078+0,0067+0,00138=0,016, $\Delta(X)=X\cdot\delta(X)$=33 эканлигини аниқлаймиз. Демак, $x=20\cdot10^2$, $\Delta(X)$=33, $\delta(X)$=1,59% бўлар экан.

Кўп ўзгарувчининг $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияси аргументлари $\Delta(x_1), \Delta(x_2), \ldots, \Delta(x_n)$ абсолют хатоларга эга бўлган $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n_0}$ тақрибий қийматлар қабул қилсин. Функциянинг $u_0=f(x_{10}, \ldots, x_{n_0})$ қиймати ҳисобланганда ҳосил бўладиган абсолют хатолиги

$$\Delta(U_0)=\left|\frac{\partial U_0}{\partial x_1}\right|\Delta(x_1)+\left|\frac{\partial U_0}{\partial x_2}\right|\Delta(x_2)+\ldots+\left|\frac{\partial U_0}{\partial x_n}\right|\Delta(x_n)$$

формула билан ҳисобланади.

Умуман олганда, ҳисоблаш хатоликларини аниқлаш ўта мураккаб масаладир. Бу айниқса ҳар хил аниқликдаги сонлар устида катта ҳажмдаги ҳисоблашларни талаб қилади-

ган масалаларни ечганда билинади. Шунга қарамай натижанинг мантиқан тўғри эканлигини ва етарлича аниқликда ҳисобланганлигини билиш ўта муҳимдир. Кўпинча бунга умумий таҳлил асосида эришилади.

Машқлар

1. Қуйидаги тенгликларнинг қайси бири аниқроқ эканлигини аниқланг.

1.1. 23/11=2,09 ёки $\sqrt{31}=5{,}57$.

1.2. 13/11=1,18 ёки $\sqrt{7}=2{,}65$.

1.3. 39/37=1,05 ёки $\sqrt{23}=4{,}60$.

2. Берилган сонларнинг: а) кенг маънода; б) тор маънода аниқ рақамларини қолдириб яхлитланг. Натижанинг абсолют хатоларини аниқланг.

2.1. $a=47{,}3217$, $\delta(a)=2{,}13\%$; $b=0{,}174852$ [0,05].

2.2. $a=16{,}4275$, $\delta(a)=0{,}5\%$; $b=425{,}748$ [0,04].

2.3. $a=142{,}327$, $\delta(a)=1{,}2\%$; $b=82{,}875$ [0,003].

3. Қуйидаги мисолларда ифоданинг қийматини ҳисобланг, натижанинг абсолют ва нисбий хатоликларини аниқланг.

3.1. $P=\dfrac{(a+b)^2c}{(m-n)^3}$, $a=5{,}2$ [0,04], $b=22{.}16$ [0,03], $c=7{,}5$ [0,05], $m=16{,}825$ [0,002], $n=8{,}13$ [0,002].

3.2. $y=\dfrac{a^2+2ab}{\sqrt{a+3b^2}}$, $a=5{,}85$ [0,03], $b=17{,}4258$ [0,0002].

3.3. $Q=\dfrac{2p+\sqrt[3]{q}}{\sqrt{ap+q}}$, $a=123{,}17$ [0,04], $r=532{,}16$ [0,04], $q=3{,}1428$ [0,0005].

V. КЎП УЧРАЙДИГАН ЎЗИГА ХОС ҲИСОБЛАШ ЖАРАЁНЛАРИ

Жуда кўп ҳисоблаш жараёнлари таркибига кирадиган ва тузилиши жиҳатидан бир хил бўлган алгоритмларни кўриб чиқамиз.

5.1. ЙИҒИНДИНИ ҲИСОБЛАШ

Йиғиндини ҳисоблаш математика, техника ва иқтисодиёт масалаларини ечишда кўп учрайди. Бунда асосан икки хил ҳолат бўлиши мумкин: қўшилувчилар сони аввалдан маълум бўлган ва маълум бўлмаган ҳоллар.

Б и р и н ч и ҳ о л. Умуман олганда, $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ йиғиндини ЭҲМда ҳисоблаш қуйидаги босқичларда бажарилади.

1. n, $a_i (i = \overline{1, n})$ бошланғич маълумотлар ЭҲМ хотирасига киритилади.

2. Йиғиндининг қиймати йиғиладиган S катакча тозалаб олинади, яъни $S = 0$ ёки биринчи қўшилувчига тенг қилиб олинади, яъни $S = a_1$.

3. Цикл ўзгарувчисининг бошланғич қиймати i=0 ёки i=1 қилиб олинади (агар йиғиндига биринчи қўшилувчи берилган бўлса).

4. i=i+1 ва S нинг аввалги қийматига навбатдаги ҳаднинг қиймати қўшилади, яъни S=S+a_i қилиб олинади.

5. i<n шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса 4-бандга, бажарилмаса 6-бандга ўтилади.

6. Йиғиндининг қиймати босмага чиқазилади.

И к к и н ч и ҳ о л. Агар қўшилувчиларнинг сони аввалдан маълум бўлмаса, яъни йиғинди маълум бир шарт бажарилгунча давом этса, ҳисоблаш қуйидаги тартибда ташкил қилинади.

1. Бошланғич маълумотлар ЭҲМ хотирасига киритилади. Йиғиндининг умумий ҳади формуласи оператор-функция тузилишидаги қисм-программа қилиб ёзилади.

2. $S=0$ қилиб олинади.

3. Навбатдаги қўшилувчи ҳад ҳисобланади ва S нинг илгариги қийматига қўшилади, яъни $S=S+a$ қилиб олинади.

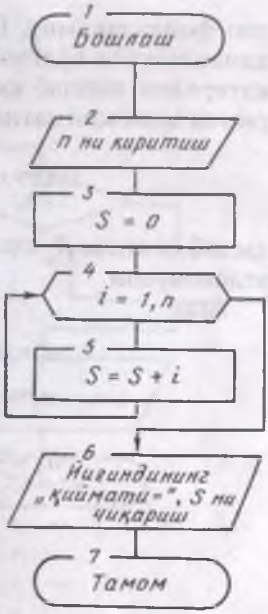
4. Йиғиш шарти текширилади. Агар бу шарт бажарилса, яъни ҳисоблашни давом эттириш керак бўлса, 3-бандга, акс ҳолда 5-бандга ўтилади.

5. Натижа S босмага чиқазилади.

Мисоллар. 1. Биринчи n та натурал сон йиғиндисини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемасини ва программасини тузамиз.

Мисолда қўшилувчилар сони n маълум. Бунда

$$S = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$



5.1-расм.

ни ҳисоблаш талаб қилинади. Шунинг учун биринчи алгоритмга мос келади. Алгоритмнинг блок-схемаси 5.1-расмда берилган. Программаси қуйидагича бўлади.

```
10  REM N ТА НАТУРАЛ СОН ЙИҒИНДИСИ
20  INPUT N
30  S=0
40  FOR I=1 TO N : S=S+I : NEXT I
50  PRINT "ЙИҒИНДИНИНГ ҚИЙМАТИ="; S
60  END
```

Программани $n=25$ бўлганда бажарилса,

ЙИҒИНДИНИНГ ҚИЙМАТИ=325

кўринишдаги натижа олинади.

2. $y=\sin x$ функциянинг $x=\pi/4$ бўлгандаги қийматини $\varepsilon=0{,}001$ гача аниқликда ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Масалани ечиш учун $\sin x$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмаси

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$$

дан фойдаланамиз. Бу қатор яқинлашувчи ва ишоралари алмашинувчи бўлганлиги учун Лейбниц теоремасига кўра қаторнинг ташлаб юборилаётган қисмининг қиймати биринчи ҳади қийматидан катта эмас. Демак, агар

$$\sin x = x - x^3/3! + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

қилиб олинса, R_n хатолик $R_n \le |x|^{2n+1}/(2n+1)!$ шартни қаноатлантиради.

Агар

$$a_1 = x,$$

$$a_2 = -a_1 \cdot \frac{x^2}{2(2-1)(2\cdot 2-1)} = -\frac{x^3}{2\cdot 3},$$

$$a_3 = -a_2 \frac{x^2}{2(3-1)(2\cdot 3-1)} = \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

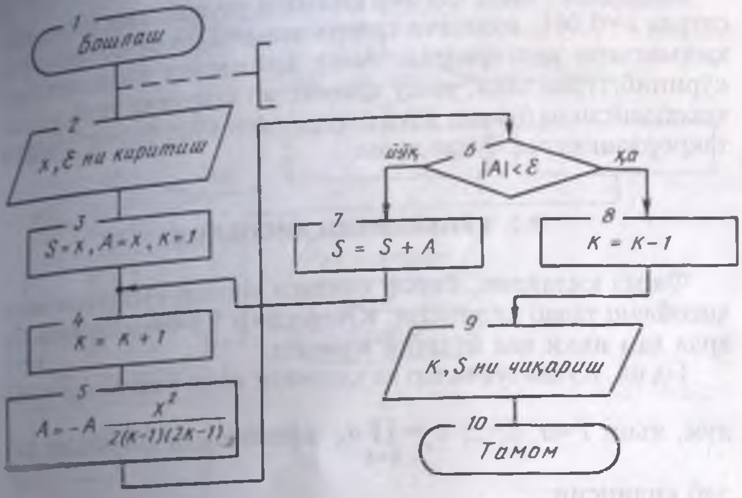
$$a_к = -a_{к-1} \cdot \frac{x^2}{2(к-1)(2к-1)}$$

эканлигини эътиборга олсак, $\sin x$ ни ҳисоблаш иккинчи алгоритмга тўғри келишини кўрамиз. Йиғиш шарти $|a_к| < \varepsilon$ бўлади. Натижа $n=k-1$ ва йиғинди — синуснинг қиймати бўлади (5.2-расм).

Қуйида программа матни ва унинг ёрдамида $x = \pi/4 = 0.7854$ бўлганда $\sin x$ нинг қиймати $\varepsilon=0.001$ ва $\varepsilon=0,0001$ аниқликда ҳисоблаш учун бажарилишининг баёни келтирилган.

```
10  REM SINX ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИНИ
    ҲИСОБЛАШ
20  INPUT X, E
30  S=X : A=X : K=1
40  K=K+1 : A=-A*X^2/(2*(K−1)*(2*K−1))
50  IF ABS(A)<E THEN 70
60  S=S+A : GO TO 40
70  K=K−1 : PRINT "ҲАДЛАР СОНИ="; K, "SINX="; S
80  END

    ? 0,7854, 0,001
    ҲАДЛАР СОНИ=3   SIN X=0.7017144
```



5.2-расм.

OK

? 0.7854, 0.0001
ҲАДЛАР СОНИ=4   SINX=0.707107
OK

Биринчи ҳолда қаторнинг 3 та, иккинчи ҳолда эса 4 та ҳадлари йиғиндиси олинганлигини кўрамиз. Шунингдек, программа ёрдамида ε=0,001 ва ε=0,00001 аниқликда x нинг $\pi/3$ ва $\pi/2$ қийматларида ҳисоблашлар бажарилиб уларнинг натижалари қуйидаги жадвалда келтирилади:

x тақрибий	x аниқ	sinx		аниқ қиймат	фарқ
0,7854		0,707144	3	0,707107	0,000037
		0,707107	4		0,000000
1,0472		0,866297	3	0,866025	0,00027
		0,866023	4		-0,000002
1,5708		0,999848	4	1,000000	0,000152
		1,000010	5		-0,000010

Жадвалда x нинг ҳар бир қиймати учун sin$x$ ни биринчи сатрда $\varepsilon=0{,}001$, иккинчи сатрда эса $\varepsilon=0{,}00011$ бўлгандаги қийматлари келтирилган. Аниқ қийматлар фарқларидан кўриниб турибдики, ушбу қийматлар етарлича аниқликда ҳисобланган ва бунинг учун алгоритмни кўпи билан 5 марта такрорлаш керак бўлар экан.

5.2. КЎПАЙТМАНИ ҲИСОБЛАШ

Фараз қилайлик, бирор сондаги сонлар кўпайтмасини ҳисоблаш талаб қилинсин. Юқоридаги 5.1-банддагидек бу ерда ҳам икки ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳ ол. Кўпайтувчилар ва уларнинг сони n аввалдан маълум, яъни $P=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ кўпайтмани ҳисоблаш талаб қилинсин.

Бу ҳолда кўпайтма қуйидагича ҳисобланади:

1. Бошланғич маълумотлар: $a_i (i=\overline{1,n})$ ва n қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади.
2. $P=a_1$ қилиб олинади.
3. $k=\overline{2,n}$ цикл ташкил қилинади.
4. $P=P \cdot a_k (k=\overline{2,n})$ қилиб олинади.
5. Натижа P босмага чиқазилади.

Агар a_i аввалдан берилмаган — у лекин уларни ҳисоблаш қоидаси маълум бўлса, 2- ва 4-бандларда аввал a_1 ва a_k ҳисоблаб олинади.

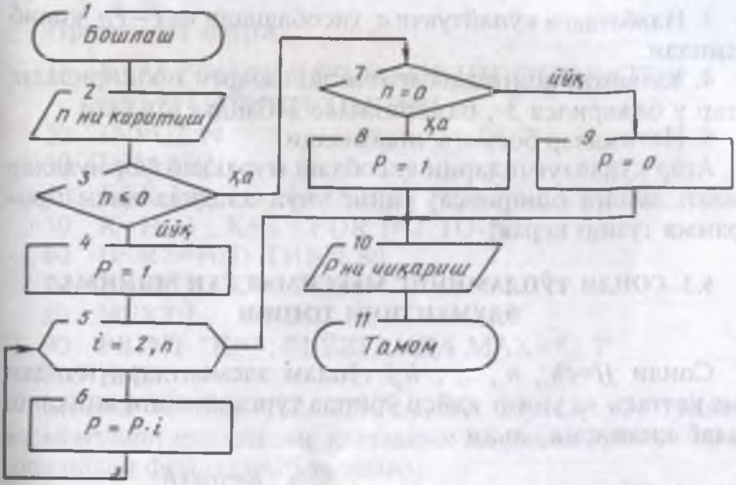
Мисол. $P=n!$ ни ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси ва программасини тузамиз.

Таърифга асосан

$$n! = \begin{cases} 0, & \text{агар } n < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } n = 0 \text{ бўлса,} \\ 1 \cdot 2 \ldots n, & \text{агар } n > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Энди $n!=(n-1)! \cdot n$ эканлигини эътиборга олсак $n!$ ни юқоридагидек алгоритм билан ҳисоблаш мумкин. Алгоритмнинг блок-схемаси 5.3-расмдагидек бўлади.

Программанинг матни қуйидагича:



5.3-расм.

```
10   REM УМУМИЙ ҲОЛДА n! НИ ҲИСОБЛАШ
20   INPUT N : IF N<= 0 THEN 60
30   P=1 : FOR  I=2 TO N
40   P=P*I : NEXT I
50   GO TO 90
60   IF N=0 THEN 80
70   P=0 : GO TO 90
80   P=1
90   PRINT "N="; N; "БЎЛГАНДА N!="; P
100  END
```

Программани n=6 бўлганда бажарилса,

N=6 БЎЛГАНДА N!=720

кўринишдаги маълумот босмага чиқади.

2-ҳол. Кўпайтувчилар сони олдиндан маълум эмас, лекин уларни ҳисоблаш қоидаси берилган. Бу ҳолда кўпайтириш маълум бир шарт бажарилгунча давом эттирилади. Ҳисоблаш қуйидагича ташкил қилинади.

1. Бошланғич маълумотлар ЭҲМ хотирасига киритилади.

2. Биринчи кўпайтувчи a_1 ҳисобланади ва $P=a_1$ қилиб олинади.

3. Навбатдаги кўпайтувчи $a_к$ ҳисобланади ва $P=Pa_к$ қилиб олинади.

4. Кўпайтиришни давом эттириш шарти текширилади. Агар у бажарилса 3-, бажарилмаса 5-бандга ўтилади.

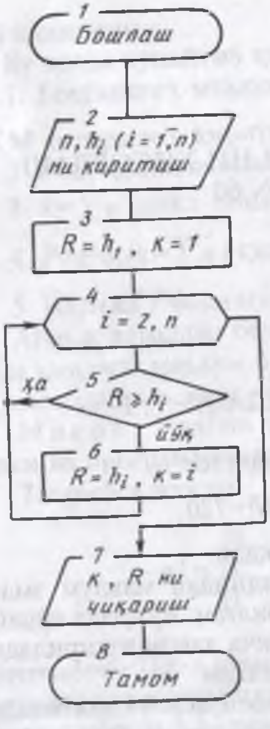
5. Натижалар босмага чиқазилади.

Агар кўпайтувчиларни ҳисоблаш мураккаб формулалар билан амалга оширилса, унинг учун алоҳида қисм-программа тузиш керак.

5.3. СОНЛИ ТЎПЛАМНИНГ МАКСИМАЛ ЁКИ МИНИМАЛ ЭЛЕМЕНТИНИ ТОПИШ

Сонли $H=(h_1, h_2, \dots, h_n)$ тўплам элементлари ичидан энг каттаси ва унинг қайси ўринда турганлигини аниқлаш талаб қилинсин, яъни

$$R=\max_{1\le i\le n} h_i$$



5.4-расм.

ва бунга эришадиган $i=i_1$ сонни топиш керак бўлсин. Бу қуйидаги босқичларда амалга оширилади.

1. Бошланғич маълумотлар: n, h_i, $(i=\overline{1,n})$ ЭҲМ хотирасига киритилади.

2. $R=h_1$, $к=1$ қилиб олинади.

3. $R\ge h_i$ шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса, R ва $к$ ларнинг қийматларини ўзгаришсиз қолдириб i нинг кейинги қийматига ўтилади. Аксинча, агар шарт бажарилмаса, $R=h_i$ ва $к=i$ қилиб олиб яна i ни навбатдаги қийматида 3-бандга ўтилади. Барча $i(i=\overline{1,n})$ учун 3-бандни бажариб чиқилгандан кейин 4-бандга ўтилади.

4. Натижалар R ва k қийматлари босмага чиқазилади.

Алгоритмнинг блок-схемаси 5.4-расмда кўрсатилган.

Программа матни:

```
10  REM СОНЛИ ТЎПЛАМНИНГ ЭНГ КАТТА
    ЭЛЕМЕНТИНИ ТОПИШ
20  INPUT N
30  DIM H(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT H(I) : NEXT I
50  R=H(1) : K=1 : FOR I=2 TO N
60  IF R>=H(I) THEN 80
70  R=H(I) : K=I
80  NEXT I
90  PRINT "K="; "БЎЛГАНДА МАХ=" : P
100 END
```

Мисол. H=(56, −32, 123, 62, 62, 32, 42, −3) тўплам элементлари ичидан энг каттасини ва унинг ўрнини программадан фойдаланиб топамиз.

Мисолда $n=8$, $h_1=56$, $h_2=32$; $h_3=123$; $h_4=62$, $h_5=62$, $h_6=32$, $h_7=42$, $h_8=-3$. Буларни ЭҲМга киритиб

K=3 БЎЛГАНДА МАХ=123.000

кўринишдаги маълумот олинган.

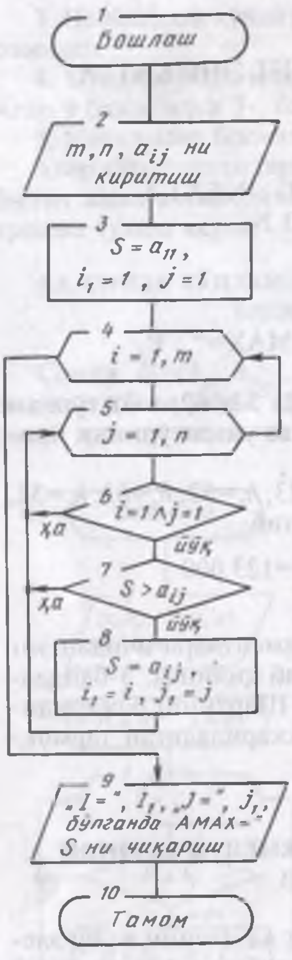
Агар $H=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ тўплам элементлари ичидан энг кичиги ва унинг ўрнини топиш талаб қилинса, 3-банддаги шарт ўрнига $R \le h_i$ шарт олинади. Шартнинг бажарилиши ёки бажарилмаслигига қараб бажариладиган тармоқлардаги ишлар ўзгармайди.

5.4. МАТРИЦАНИНГ ЭНГ КАТТА ЭЛЕМЕНТИ ВА УНИНГ ЎРНИНИ ТОПИШ

Матрица элементлари ичидан энг каттасини ва бу элемент жойлашган сатр ва устун тартибини топиш талаб қилинган бўлсин. Бунинг учун $A=a_{ij}$, $(i=\overline{1,m}\ , j=\overline{1,n}\,)$ тартибли матрица элементлари, унинг m сатрлар ва n устунлари сони бошланғич маълумот сифатида ЭҲМ хотирасига киритилади.

Матрица элементларини солиштириш ва уларнинг энг кичигини топиш вектор элементларидан максимал элементни топгандагидек бажарилади. Алгоритмнинг блок-схемаси 5.5-расмда келтирилган.

Программа матни ва унинг 5×3 тартибли



5.5-расм.

$$A = \begin{bmatrix} 123 & 45 & 23 \\ 26 & 265 & 352 \\ 452 & 263 & 25 \\ 15 & 25 & 42 \\ 2 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

матрицага татбиқан бажарилишининг баёни қуйидагича:

```
10  REM МАТРИЦАНИНГ ЭНГ КАТТА ЭЛЕМЕНТИНИ ТОПИШ
20  INPUT M, N
30  DIM A(M, N)
40  FOR I=1 TO M : FOR J=1 TO N
50  INPUT A(I, J)
60  NEXT J, I
70  S=A(1,1) : I1=1 : J1=1
80  FOR I=1 TO M : FOR J=1 TO N
90  IF I=1 AND J=1 THEN 120
100 IF S>A(I, J) THEN 120
110 S=A(I, J) : I1=I : J1=J
120 NEXT J, I
130 PRINT "I="; I, "J="; J; "БЎЛГАНДА А MAX="; A(I, J)
140 END
    RUN
    I=3 J=1 БЎЛГАНДА А MAX=452.0000
    OK
```

5.5. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Фазодаги икки $A(x_1, x_2 ..., x_n)$ ва $B(y_1, y_2, ..., y_N)$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

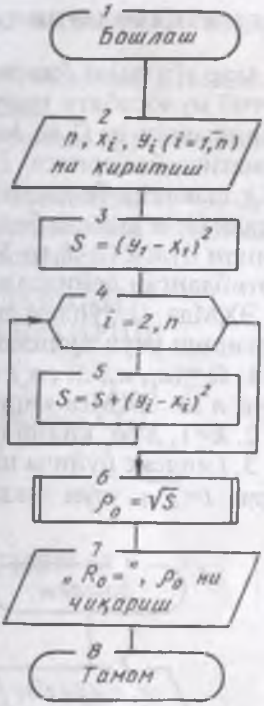
формула билан ҳисобланади. Демак. n- ўлчовли фазодаги нуқталар координаталари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ билан берилган бўлса, улар орасидаги масофани ҳисоблаш учун

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$$

йиғиндини ҳисоблаш ва уни квадрат илдиздан чиқариш керак бўлар экан. Алгоритмнинг блок-схемаси 5.6-расмда келтирилган.

Программа матни ва уни 5 ўлчовли фазодаги $A(1, 3, -3, -5, 2)$ ва $B(-2, 2, 4, -3, 1)$ векторлар орасидаги масофани ҳисоблашга нисбатан бажарилиши қуйидагича.

```
10  REM ИККИ НУҚТА
    ОРАСИДАГИ МАСОФА
20  INPUT N
30  DIM X(N), Y(N)
40  FOR I=1 TO N
50  INPUT X(I), Y(I)
60  NEXT I
70  S=(Y(1)−X(1))^2
80  FOR I=2 TO N
90  S=S+(Y(I)−X(I))^2 : NEXT I
100 R0=SQR(S)
110 PRINT "RO="; R0
120 END
    RUN
      RO=8.0000
OK
```



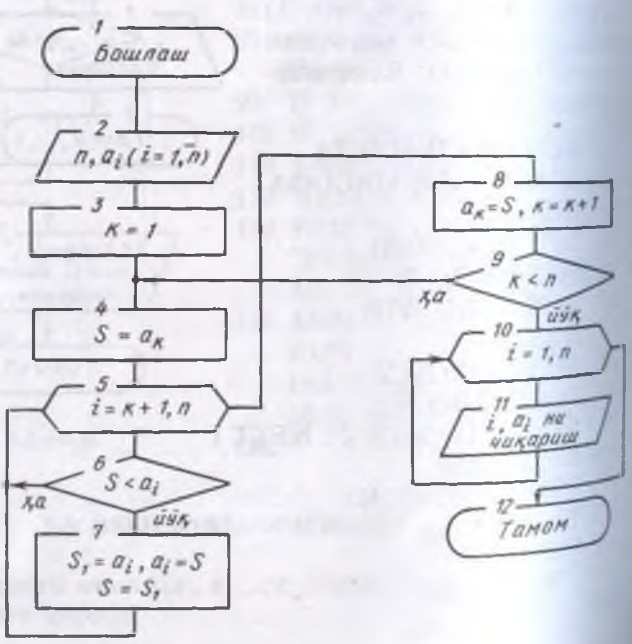
5.6-расм.

5.6. ТЎПЛАМЛАРНИ ТАРТИБЛАНГАН ҲОЛГА КЕЛТИРИШ

Агар тўпламда (сонли тўпламда) кичик (<) (ёки катта >) тартиб муносабати тушунчаси киритилган бўлса, яъни ихтиёрий икки $a \in \Omega$ ва $b \in \Omega$ элементлар учун қуйидаги альтернатива бажарилса: ёки *a* элемент *в* дан олдин келади ($a<b$ шаклида белгиланади), ёки *в* элемент *a* дан олдин келади ($b<a$ шаклда белгиланади) ва транзитивлик хоссаси ўринли бўлса ($a<b$ ва $b<c$ бўлганда $a<c$ бўлади), Ω тўплам тартибланган дейилади (ўсиш тартибида).

ЭҲМда Ω тўплам элементларини тартибланган ҳолга келтириш учун қуйидаги ишлар бажарилади:

1. $\Omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ тўплам элементларини ва уларнинг сони *n* ни ЭҲМга киритилади.
2. $k=1$, $S=a_1$ қилиб олинади.
3. *i* индекс бўйича цикл ташкил қилинади. $S<a_i$ шартни барча $i=\overline{2,n}$ учун текшириб чиқилади, агар бу шарт ба-



5.7-расм.

жарилса, $S=a_i$, $a_i=S$ қилиб олинади, акс ҳолда S нинг қиймати ўзгармай қолади.

4. Цикл тугагандан сўнг $a_k=s$, $k=k+1$ қилиб олинади.

5. Агар $k<n$ бўлса, 3-бандга ўтилади.

Алгоритмнинг блок-схемаси 5.7-расмда кўрсатилгандек бўлади.

Программа матни ва уни 10 та элементли A=(3, 2, 5, 7, 6, 3, 5, 8, 10, 15) тўплам элементларини тартиблаш учун ишлатиб олинган натижа қуйидагича.

```
10  REM ТЎПЛАМ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИ
    ТАРТИБЛАНГАН ҲОЛГА КЕЛТИРИШ
20  INPUT N
30  DIM A(N) : K=I
40  FOR I=1 TO N : INPUT A(I) : NEXT I
50  S=A(K) : FOR I=K+1 TO N
55  IF S<A(I) THEN 70
60  S1=A(I) : A(I)=S : S=S1
70  NEXT I
80  A(K)=S : K=K+1 : IF K<N THEN 50
90  FOR I=1 TO N
100 PRINT "A("; I; ")="; A(I)
110 NEXT I
120 END
    RUN
    A(1)=2.000
    A(2)=3.000
    A(3)=3.000
    A(4)=5.000
    A(5)=5.000
    A(6)=6.000
    A(7)=7.000
    A(8)=8.000
    A(9)=10.000
    A(10)=15.000
OK
```

Натижада берилган тўплам элементларини тартибланган ҳолга келганлигини кўрамиз.

5.7. КЎПХАД ҚИЙМАТЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ. ГОРНЕР СХЕМАСИ

Ихтиёрий n даражали $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ кўпхаднинг қийматларини ҳисоблаш учун, уни

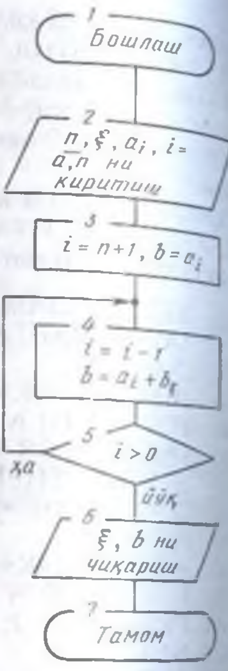
$$p_n(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+...+x(a_{n-1}+ +a_n x)...))$$

кўринишда ёзиб олинади. Кўпҳаднинг $x=\xi$ бўлгандаги қиймати кетма-кет

$$b_n=a_n,$$
$$b_{n-1}=a_{n-1}+b\xi_n,$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; ,$$
$$... \; ... \; ... \; ...$$
$$... \; ... \; ... \; ...$$
$$b_i=a_{i-1}+b_{i+1}+b_{i+1}\xi,$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; .$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; .$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; .$$
$$b_a=a_0+b_1\xi$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади. Бундай ҳисобланганда $P_n(\xi)=b_0$ бўлади. Алгоритмнинг блок-схемаси 5.8-расмда келтирилган.

Программада қуйидаги белгилашлар қабул қилинган



5.8-расм.

Математик белги	ξ	$\vec{a}$	n
Программадаги белги	KSI	A(N)	N

Бошланғич маълумотлар: N, kSI, a_i, $(i=\overline{0,n})$ тартиб[illegible] киритилади.

Программа матни ва уни $P_7(x)=2x^7+3x^6+2x^4-4x^2-x+5$ кўпҳаднинг $x=1,5$ бўлгандаги қийматини ҳисоблашга тат-биқан бажарилиши натижаси қуйида келтирилгандек бўл[illegible]-ди. Бунда, $n=7$, $\vec{a}$ = (5, −1, −4, 0, −2, 0, 3, 2) ва $\xi=1,5$

Программанинг бажарилиши натижасида $P(1.5)=72.96$[illegible] кўринишдаги маълумот босмага чиқарилган.

```
10  REM ГОРНЕР СХЕМАСИ
20  INPUT N : DIM N
30  FOR I=0 TO N
40  INPUT A(I) : NEXT I
```

```
50  I=N : B=A(I)
60  I=I−1 : B=A(I)+B∗KSI
70  IF I>1 THEN 60
80  PRINT "P("; KSI;")="; B
90  END
    RUN
    P(1.50)=72.969
OK
```

5.8. СОНЛАРНИНГ ЎРТАЧАСИНИ ҲИСОБЛАШ

Сонларнинг ўрта қиймати тушунчаси физика, механика, техника ва айниқса, иқтисодий фанларда кўп учрайди.

Умуман олганда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларининг a ўртачаси $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le a < \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ шартни қаноатлантириши керак.

Бундай шартни қаноатлантирувчи сонларни чексиз кўп хилда

$$A_\alpha = \left(\frac{P_1 a_1^\alpha + P_2 a_2^\alpha + \ldots + P_n a_n^\alpha}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} \right)^{1/\alpha} \qquad (5.1)$$

формула билан аниқлаб олиш мумкин. Бу ерда α ва $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ихтиёрий мусбат сонлар. Ўрта қийматни ҳисоблашнинг (5.1) формуласига тортилган даражали ўрта қиймат дейилади.

Ҳамма $P_i=1$ $(i=\overline{1,n})$ бўлганда

$$A_\alpha = [(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha) / n]^{1/\alpha} \qquad (5.2)$$

даражали ўртача формуласи ҳосил бўлади. Бу формуладан $\alpha=1$ бўлганда

$$A_1 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n \qquad (5.3)$$

ўрта арифметик, $\alpha=0$ бўлганда,

$$A_2 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (5.4)$$

ўрта геометрик, $\alpha=-1$ бўлганда,

$$A_3 = n / [\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}] \qquad (5.5)$$

ўрта гармоник ва α=2 бўлганда,

$$A_4 = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2+\ldots+a_n^2) / n} \tag{5.6}$$

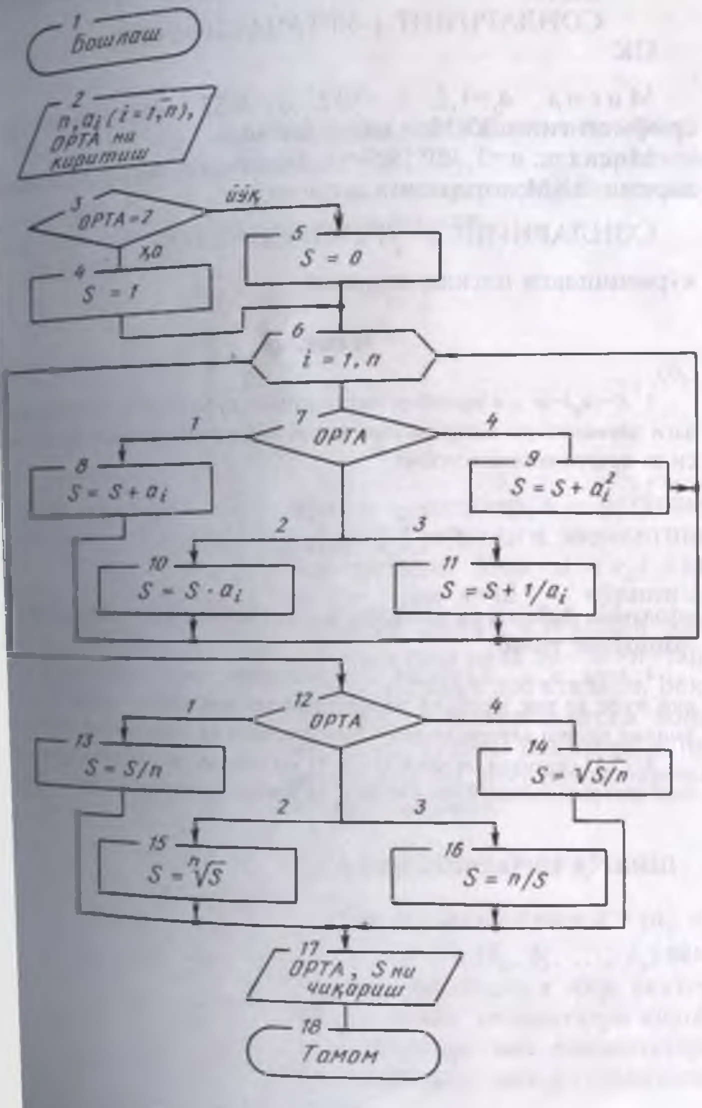
ўрта квадратик қийматлар формулалари ҳосил бўлади. Бу ўрта қийматларни ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси 5.9-расмдагидек бўлади.

Қуйида матни келтирилган программада (5.3)–(5.6) формулаларга мос ҳолда сонларнинг ўрта арифметигини — биринчи, ўрта геометригини — иккинчи, ўрта гармонлигини — учинчи ва ўрта квадратини — тўртинчи ўртача деб қабул қилинган. Ундан фойдаланиш учун n, a_1, a_2, ..., a_n ўзгарувчиларнинг қийматлари ва қайси ўртача ҳисобланаётганлиги (ОРТА% бутун ўзгарувчининг қиймати) келтирилган тартибда ЭҲМ хотирасига киритилади. Натижада

СОНЛАРНИНГ ... ЎРТАЧАСИ=...

кўринишдаги маълумот босмага чиқади.

```
10  REM СОНЛАРНИНГ ЎРТАЧАСИ: ОРТА%=
    1 – АРИФМЕТИК, ОРТА%=
20  REM 2 – ГЕОМЕТРИК, ОРТА%=3 –
    ГАРМОНИК, ОРТА%=4 –
30  REM КВАДРАТИК ЎРТА ҲИСОБЛАНГАНДА
40  INPUT N
50  DIM A(N)
60  FOR I=1 TO N : INPUT A(I) : NEXT I
70  INPUT OPTA%
80  IF OPTA=2 THEN S=1 ELSE S=0
90  FOR I=1 TO N
100 ON (OPTA%) THEN 110, 120, 130, 140
110 S=S+A(I) : GO TO 150
120 S=S*A(I) : GO TO 150
130 S=S+1/A(I) : GO TO 150
140 S=S+A(I)*A(I)
150 NEXT I
160 ON(OPTA%) THEN 170, 180, 190, 200
170 S=S/N : GO TO 210
180 S=S^(1/N) : GO TO 210
190 S=N/S : GO TO 210
200 S=SQR(S/N)
```


1 Бошлаш
2 n, aᵢ (i = 1, n), ОРТА ни киритиш
3 ОРТА = 7
йўқ
ҳа
4 S = 1
5 S = 0
6 i = 1, n
7 ОРТА
1
2
3
4
8 S = S + aᵢ
9 S = S + aᵢ²
10 S = S · aᵢ
11 S = S + 1/aᵢ
12 ОРТА
13 S = S/n
14 S = √S/n
15 S = ⁿ√S
16 S = n/S
17 ОРТА, S ни чиқариш
18 Тамом

5.9-расм.

```
210 PRINT "СОНЛАРНИНГ"; ОРТА%;
    "ЎРТАЧАСИ="; S
220 END
    RUN
    СОНЛАРНИНГ 1-ЎРТАЧАСИ=3.6133
OK
```

Мисол. a_1=1,2, a_2=3.12, a_3=6,52 сонларининг ўрта арифметигини ЭҲМда ҳисоблаймиз.

Мисолда: n=3, ОРТА%=1. Булар ва a_i ларнинг қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиб,

СОНЛАРНИНГ 1- ЎРТАЧАСИ=3.6133

кўринишдаги натижа олинган.

Машқлар

1. $A=(a_{ij})-m \times n$ тартибли матрицанинг жуфт сатр ва тоқ устунларидаги элементлари йиғиндисини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси ва программасини тузинг.

2.

$$P = \left[\sum_{i=0}^{m} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)!} \right]$$

ифоданинг қийматини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси ва программасини тузинг.

4. $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тўплам элементларини тартибланган ҳолга келтириб жуфт ва тоқ тартибли элементларидан алоҳида-алоҳида тўпламлар ташкил қилиш алгоритмининг блок-схемаси ва программасини тузинг.

5. (5.1) формула билан n та $a_i(i=\overline{1,n})$ сонларнинг ўртачасини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси ва программасини тузинг.

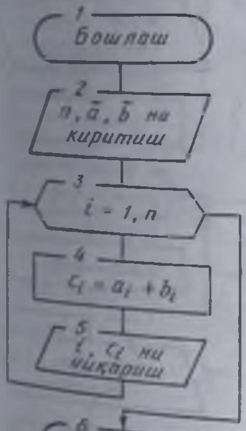
VI. ВЕКТОРЛАР ВА МАТРИЦАЛАР УСТИДА ҲИСОБЛАШ ЖАРАЁНЛАРИ

Вектор деб n- ўлчовли Евклид фазосидаги n та тартибланган сонларга айтилади ва $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ кўринишда ёзилади. Бунда $a_1, a_2, \dots, a_n$ — сонлар векторнинг элементлари ёки координаталари дейилади.

Матрица деб

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

жадвалга айтилади. Бу ёзувда m — сатрлар, n — устунлар сони. a_{ij} матрицанинг i - сатр, j - устундаги элементини билдиради. Уни $A=(a_{ij})$ ёки $A=[a_{ij}]$ ёки $A=\{a_{ij}\}_{m,n}$ кўринишлардаги ихчам ёзувлари ҳам қўлланилади ва (6.1)— $m \times n$ -тартибли матрица деб аталади. Векторлар ва матрицаларга доир амаллар, уларни бажариш алгоритмлари ва программаларини кўриб чиқамиз.



6.1-расм.

6.1. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ

Евклид фазосидаги $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ва $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ векторлар йиғиндиси яна вектор бўлиб, унинг элементлари қўшилувчиларнинг мос элементлари йиғиндисидан ташкил қилинади, яъни

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \dots\ ,\ a_n + b_n)$$

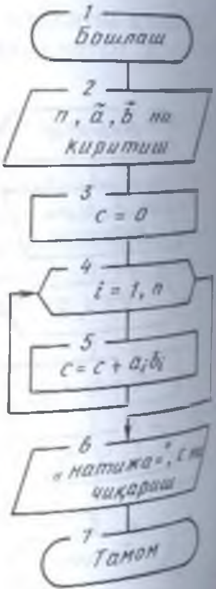
Демак, икки вектор йиғиндисини ҳисоблаш учун $a_i + b_i (i = \overline{1,n})$ йиғиндиларни ҳисоблаш керак бўлар экан. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.1-расмда берилган. Программани тузиш цикл оператори билан амалга оширилади ва кўп қийинчилик туғдирмайди (буни ўзингиз бажаринг).

6.2. ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси $(\vec{a}, \vec{b})$ ёки $\vec{a} \cdot \vec{b}$ кўринишда ёзилади ва

$$c = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

формула билан ҳисобланади. Бу формула билан векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси (6.2) расмдагидек бўлади. Бунда, бошланғич маълумотлар, $n, a_i, b_i\ (i = \overline{1,n})$ қийматлари бўлади. Кўпайтмани ҳисоблаш учун йиғиндини ҳисоблаш алгоритмидан фойдаланиш мумкин (программани ўзингиз тузинг).



6.2-расм.

6.3. ИККИ ВЕКТОР ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Фазодаги икки $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ва $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ векторлар орасидаги бурчак

$$\alpha = \arccos\ [\vec{a}, \vec{b}\ /\ (\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|)]$$

формула билан ҳисобланади.

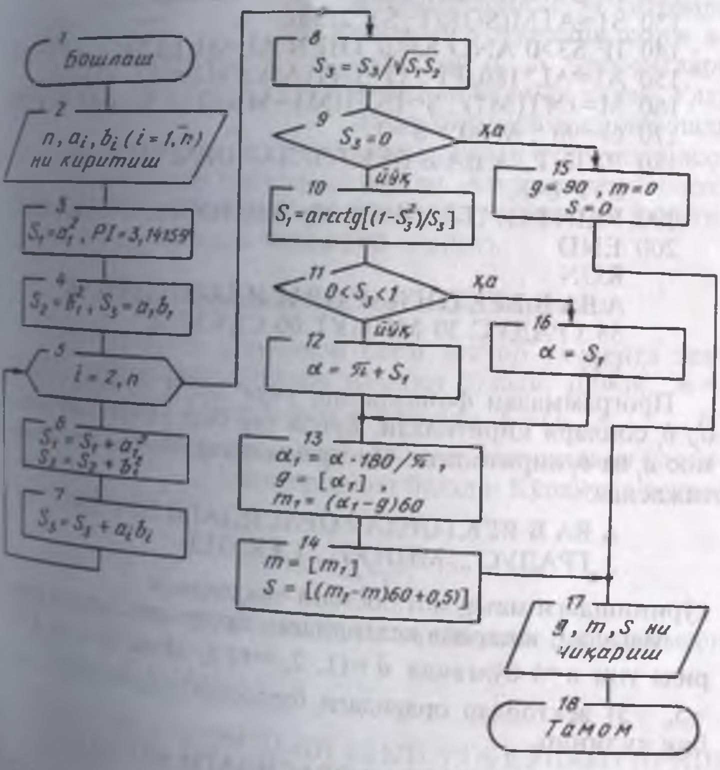
Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва нормаси таърифларидан фойдаланиб, формулани

$$\alpha = \arccos\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right]$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижа радианда чиқади. Ўқишга ва кейинги ҳисоблашларда осон бўлиши учун уни градус, минут, секундларда ифодалаган маъқул. Бунинг учун аввало α ни ҳисоблаш керак. БЕЙСИКда arccos*x* ни ҳисоблаш учун стандарт функция бўлмаганлиги учун

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \le 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

муносабатдан фойдаланиб α ни ҳисоблаймиз. Сўнг $\alpha_1=\alpha\cdot 180/\pi$, $g_0=[\alpha_1]$, $m_1=(\alpha_1-g)\cdot 60$, $m=[m_1]$, $s=[(m_1-m)60+0{,}5]$ формулалар билан *g* градус, *m* минут, *s* секундга



6.3-расм.

ўтамиз. Бу ерда [·] соннинг бутун қисмини белгилайди. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.3-расмда берилган, программаси қуйидагича бўлади.

```
10  REM A BA B ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАК
20  INPUT N
30  DIM A(N), B(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT A(I), B(I) : NEXT I
50  PI=3.14159
60  S1=A(1)^2 : S2=B(1)^2 : S3=A(1)*B(1)
70  FOR I=2 TO N
80  S1=S1+A(I)^2 : S2=S2+B(I)^2
90  S3=S3+A(I)*B(I) : NEXT I
100 S1=SQR(S1*S2)
110 S3=S3/S1
120 IF S3=0 THEN 170
130 S1=ATM(SQR(1-S3^2)/S3)
140 IF S3>0 AND S3<1 THEN AL=S1 ELSE Al=PI+S1
150 A1=AL*180/PI : G=INT(A1) : M1=(A1-G)*60
160 M=INT(M1) : S=INT((M1-M)*60+0,5) : GO TO170
170 G=90 : M=0 : S=0
180 PRINT "A BA B ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ
    БУРЧАК:"
190 PRINT G; "ГРАДУС"; M; "МИНУТ"; S;"СЕКУНД"
200 END
    RUN
    A BA B ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАК:
    58 ГРАДУС 30 МИНУТ 00 СЕКУНД
    OK
```

Программадан фойдаланиш учун ЭҲМ хотирасига n, a_i, b_i сонлари киритилади. Бунда ҳар бир i учун биттадан мос a_i ва b_i киритилади. Программанинг бажарилиши натижасида:

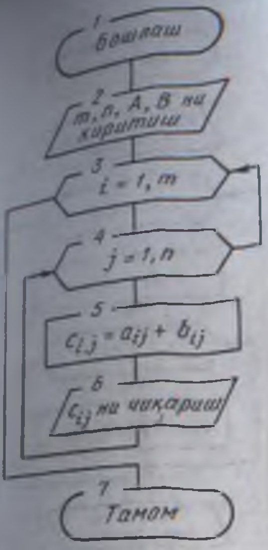
A BA B ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАК:
... ГРАДУС ... МИНУТ ... СЕКУНД

кўринишдаги маълумот босмага чиқазилади.

Масалан, юқорида келтирилган программа матни охирида уни n=5 бўлганда $\bar{a}$=(1, −1, 1, 3, 2) ва $\bar{b}$=(3, 4, 2, −5, −3) векторлар орасидаги бурчакни ҳисоблашга татбиқ қилиниб,

A BA B ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАК:
58 ГРАДУС 30 МИНУТ ... СЕКУНД

кўринишдаги натижа олинганлиги келтирилган.



6.4-расм.

6.4. МАТРИЦАЛАРНИ ҚЎШИШ

Бир хил $m \times n$ тартибдаги икки A ва B матрицаларнинг йиғиндиси C яна $m \times n$ тартибли матрица бўлиб, унинг элементлари $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ формула билан ҳисобланади. Шунинг учун матрицалар йиғиндисини топиш учун ичма-ич жойлаштирилган циклардан фойдаланилади. Бунинг учун матрицаларнинг m сатрлари сони, n устунлари сони ва уларнинг a_{ij}, b_{ij} элементлари берилган бўлиши керак. Улар ЭҲМ хотирасига киритилади ва юқоридаги формулага асосан ҳисоблашлар ташкил қилинади. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.4-расмда келтирилган (программасини ўзингиз тузиб бирор мисолда текшириб кўринг).

6.5. МАТРИЦАНИ ВЕКТОРГА КЎПАЙТИРИШ

Матрицанинг устунлари сони вектор ўлчовига тенг бўлса, уларни кўпайтириш мумкин бўлади. Демак, $m \times n$ тартибли $A=(a_{ij})$ матрицани n ўлчовли $\bar{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ векторга кўпайтириш мумкин бўлади, натижада m ўлчовли $\bar{c}=(c_1, c_2, \dots, c_m)$ вектор ҳосил бўлади. Кўпайтма вектор элементлари

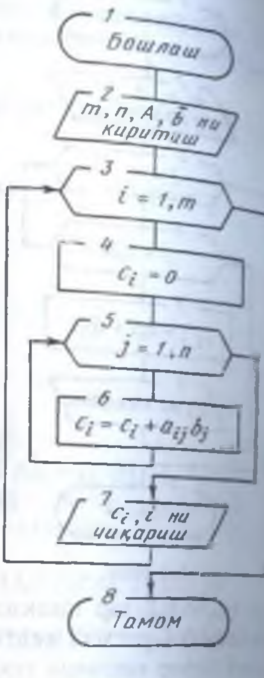
$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$$

формула билан ҳисобланади. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.5-расмдагидек бўлади.

Программа матни.

```
10 REM МАТРИЦАНИ ВЕКТОРГА КЎПАЙТИРИШ
20 INPUT M, N
```

```
30 DIM A(M. N), B(N),
   C(M)
40 FOR J=1 TO N : FOR
   I=1 TO M
50 INPUT A(I, J) : NEXT I
60 INPUT B(J) : NEXT J
70 FOR I=1 TO M :
   C(I)=0: FOR J=1 TO N
80 C(I)=C(I)+A(I, J)*B(J)
90 PRINT "C("; I;")=";
   C(I) : NEXT I
100 END
```



6.5-расм.

Программа $m \times n$ тартибли матрицаларни n ўлчовли векторларга кўпайтириш учун ишлатилади. ЭҲМ хотирасига m, n, $\bar{b}$ — вектор ва A матрица элементлари киритилади, натижада $c_1, c_2, \ldots, c_m$ кўпайтма вектор элементларининг қийматлари босмага чиқазилади. Бунда A матрицанинг j устун элементлари киритилгандан кейин $\bar{b}$ векторнинг битта b_j элементи киритилади.

Масалан, программани n=3 бўлганда,

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -56 & -56 \\ 42 & 23 & 25 \\ -23 & 42 & 42 \end{bmatrix}$$

матрицани $\bar{b}$ =(23, −52, −42) векторга кўпайтирилса, $\bar{c}$ =(5839.00, −1280.00, −4477.00) натижа олинади.

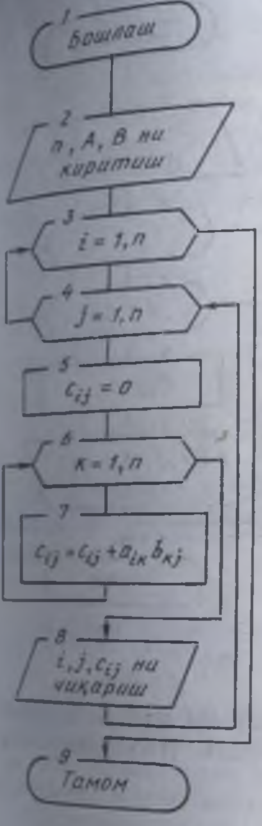
6.6. МАТРИЦАЛАРНИ КЎПАЙТИРИШ

Матрицаларнинг $A \cdot B$ кўпайтмаси A матрица устунлари сони B нинг йўллари сонига тенг бўлганда аниқланган. Агар A матрица $m \times n$ тартибли, B — $n \times k$ тартибли матрица бўлса, улар кўпайтмаси $C = A \cdot B$ мавжуд ва у $m \times k$ тартибли матрица бўлади. Кўпайтма матрицанинг элементлари

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,k}$$

формула билан ҳисобланади.

Матрицалар кўпайтмасини ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси 6.6-расмдагидек бўлади.



6.6-расм.

Программа матни.

```
10  REM МАТРИЦАЛАРНИ
    КЎПАЙТИРИШ
20  INPUT M, N, K
30  DIM A(M, N), B(N, K),
    C(M,K)
40  FOR I=1 TO M : FOR J=1
    TO N
50  INPUT A(I, J) : NEXT J, I
60  FOR I=1 TO N : FOR J=1
    TO K
70  INPUT B(I, J) : NEXT J, I
80  FOR I=1 TO M : FOR J=1
    TO K : C(I, J)=0
90  FOR L=1 TO N
100 C(I,  J)=C(I,J)+A(I,L)*
    *B(L,J): NEXT L
110 PRINT "C("; I;", "J;")=",
    C(I, J)
120 NEXT J, I
130 END
    RUN
C(1,1)=400.0000      C(1,2)=−242.000
C(1,3)=3501.0000     C(2,1)=340.0000
C(2,2)=−8.0000       C(2,3)=3311.0000
C(3,1)=470.0000      C(3,2)=−64.0000
C(3,3)=4516,0000
OK
```

Программани

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 63 & 1 \\ 41 & 25 & 3 \\ 52 & 42 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 62 \\ 4 & -5 & 31 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

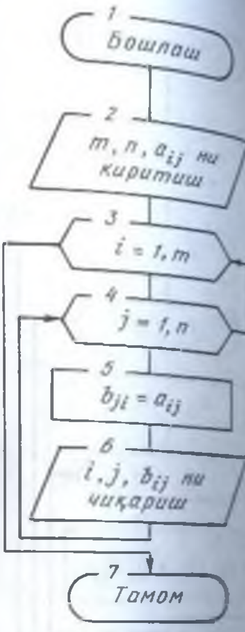
матрицаларни кўпайтириш учун ишлатилиб,

$$C = \begin{bmatrix} 400 & -242 & 3501 \\ 1340 & -8 & 3311 \\ 470 & -64 & 4516 \end{bmatrix}$$

матрица ҳосил қилинганлиги унинг матни охирида берилган.

6.7. МАТРИЦАНИ ТРАНСПОНИРЛАШ

Берилган $H=(h_{ij})$ матрицанинг транспонирланганини $B=H'=(b_{ij})$ бўлса, унинг элементлари $b_{ij}=h_{ji}$ формула билан аниқланади. Демак, H — $m\times n$ тартибли матрица бўлса унинг устун элементлари йўл элементлари қилиб ёзилиши натижасида ҳосил қилинади, яъни B — $n\times m$ тартибли матрица бўлади. Бу жараён алгоритмининг блок-схемаси 6.7-расмдагидек бўлади. Программасини ўзингиз тузиб



6.7-расм.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицани транспонирлашга татбиқ қилинг.

6.8. ВЕКТОРНИНГ НОРМАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

Вектор нормаси тушунчаси Евклид фазосидаги вектор узунлиги тушунчасини умумлашганидир. Норма $||\bar{a}||$ — $\bar{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ векторга мос қўйилган шундай сонки,

1. $||\bar{a}||\geq 0$ ва $||\bar{a}||=0$ ва фақатгина $\bar{a}=(0,0,\dots,0)$ вектор учун ўринли бўлади;

2. $\alpha\in R$ учун $||\alpha\bar{a}||=|\alpha|\,||\bar{a}||$.

3. $||-\vec{a}||=||\vec{a}||$.

4. $||\vec{a}+\vec{b}||\le||\vec{a}||+||\vec{b}||$ (учбурчак қоидаси).

шартларни қаноатлантириши керак.

Бу муносабатларни қаноатлантирувчи $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ векторга мос келувчи сонни турли усуллар билан танлаб олиш мумкин. Масалан, қуйидагича аниқланган сонларни вектор нормаси сифатида қабул қилиш мумкин:

1. $||\vec{a}||_1=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{1/2}$,

2. $||\vec{a}||_2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

3. $||\vec{a}||_3=\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$.

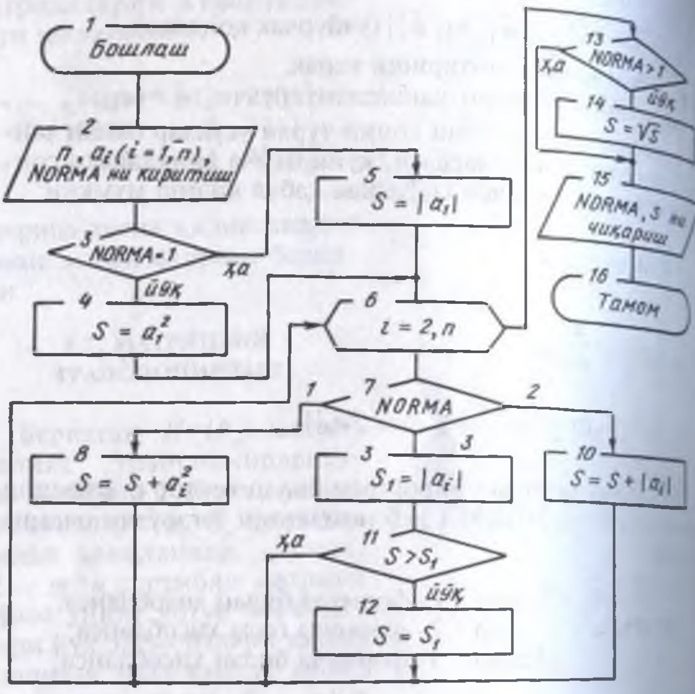
Бу формулалардан бирортаси билан вектор нормасини ҳисоблаш учун NORMA деб номланган ўзгарувчи оламиз ва уни

$$\text{NORMA}=\begin{cases}1 \text{ агар } & 1\text{ - формула билан ҳисобланса;}\\ 2 \text{ агар } & 2\text{ - формула била ҳисобланса;}\\ 3 \text{ агар } & 3\text{ - формула билан ҳисобланса;}\end{cases}$$

муносабатлар билан аниқлаймиз. У ёки бу формула билан ҳисоблашни ташкил қилиш учун NORMA нинг қийматини ўзгартириш етарли бўлади. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.8-расмда келтирилган.

Программа матни.

```
10  REM ВЕКТОРНИНГ НОРМАСИНИ ҲИСОБЛАШ
20  INPUT N, NORMA%
30  DIM A(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT A(I) : NEXT I
50  IF NORMA%=1 THEN 70
60  S=ABS(A(1)) : GO TO 80
70  S=A(1)^2
80  FOR I=2 TO N
90  ON NORMA% GO TO 100, 110, 120
100 S=S+A(I)^2 : GO TO 130
110 S=S+ABS(A(I)) : GO TO 130
120 S1=ABS(A(I)) : IF (S>S1) THEN 130 ELSE S=S1
```



6.8-расм.

```
130 NEXT I
140 IF NORMA%>1 THEN 160
150 S=SQR(S)
160 PRINT "А ВЕКТОРНИНГ"; NORMA% "-НОРМА-
СИ="; S
170 END
180 RUN
А ВЕКТОРНИНГ I – НОРМАСИ=8.4262
OK
```

Программани ишлатиш учун *n*, NORMA ва $a_i(i=\overline{1,n})$ қийматлари ёзилган тартибда ЭҲМ хотирасига киритилади. Унинг бажарилиши натижасида

А ВЕКТОРНИНГ ... – НОРМАСИ=...

кўринишдаги маълумот босмага чиқазилади. Юқорида келтирилган программа матни охирида, уни n=4 бўлганда a_1=1, a_2=3, a_3=–5, a_4=6 элементли векторнинг 1 формула билан ҳисобланган нормасини ҳисоблаш учун ишлатилиб,

А ВЕКТОРНИНГ 1-НОРМАСИ=8.4262 кўринишдаги натижа олинганлиги кўрсатилган.

6.9. МАТРИЦАНИНГ НОРМАСИ

Матрица нормаси $||\cdot||$ билан белгиланиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи мусбат сонга айтилади.

1. Ҳар қандай А матрица учун $||A|| \geq 0$ бўлади. Бунда фақат A=0 бўлгандагина $||A|| = 0$ бўлади.
2. $||\alpha A||=|\alpha|\,||A||$ ва $||-A||=||A||$
3. $||A+B||\leq||A||+||B||$
4. $||A\cdot B||\leq||A||\cdot||B||$

Булардан ташқари, агар $|a_{ij}|\leq||A||$ ва $|A|\leq|B|$ шартнинг бажарилишидан $|A||\leq||B||$ бўлиши келиб чиқса, A норма каноник норма дейилади.

Умуман олганда, юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи матрица нормасига мос келувчи сонларни кўплаб топиш мумкин. Масалан, қуйидагича аниқланган сонлар $A=(a_{ij})$ матрица нормалари бўлади.

1. $||A||_m = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, m — норма;

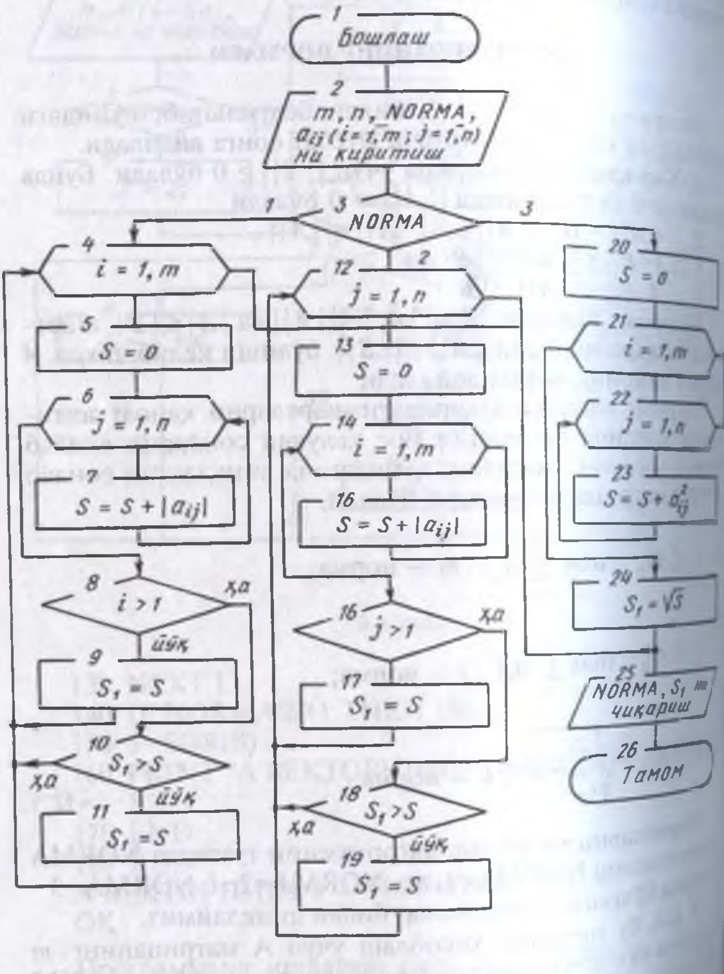
2. $||A||_l = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, l — норма;

3. $||A||_k = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 j}$, k — норма.

Нормаларни ҳисоблаш алгоритмини тузганда NORMA ўзгарувчисини NORMA=1, m; NORMA=2–l, NORMA=3–k норма бўлганда, тенгликлар билан аниқлаймиз.

У ёки бу нормани ҳисоблаш учун А матрицанинг m сатрлари ва n устунлари сонлари ҳамда a_{ij} элементлари ЭҲМ хотирасига киритилади. Алгоритмнинг блок-схемаси 6.9-расмда келтирилган.

Программа матни.



1 Бошлаш
2 m, n, NORMA, a_{ij} (i = 1,m ; j = 1,n) ни киритиш
3 NORMA
4 i = 1, m
5 S = 0
6 j = 1, n
7 S = S + |a_{ij}|
8 i > 1
ҳа
йўқ
9 S_1 = S
10 S_1 > S
11 S_1 = S
12 j = 1, n
13 S = 0
14 i = 1, m
15 S = S + |a_{ij}|
16 j > 1
17 S_1 = S
18 S_1 > S
19 S_1 = S
20 S = 0
21 i = 1,m
22 j = 1,n
23 S = S + a_{ij}^2
24 S_1 = √S
25 NORMA, S_1 ни чиқариш
26 Тамом

```
10  REM МАТРИЦАНИНГ НОРМАСИ:
20  REM NORMA=1–M, NORMA=2–L, NORMA=
    3–K НОРМА
30  INPUT M, N, NORMA%
40  FOR I=1 TO M : FOR J=1 TO N
50  INPUT A(I, J) : NEXT J, I
60  ON NORMA% GO TO 70, 140, 210
70  FOR I=1 TO M : S=0
80  FOR J=1 TO N : S=S+ABS(A(I, J)) : NEXT J
90  IF I>1 THEN 110
100 S1=S : GO TO 130
110 IF S1>S THEN 130
120 S1=S
130 NEXT I : GO TO 240
140 FOR J=1 TO N : S=0
150 FOR I=1 TO M : S=S+ABS(A(I, J)) : NEXT I
160 IF J>1 THEN 180
170 S1=S : GO TO 200
180 IF S1>S THEN 200
190 S1=S
200 NEXT J : GO TO 240
210 S=0 : FOR I=1 TO M : FOR J=1 TO N
220 S=S+A(I, J)^2 : NEXT J, I
230 S1=SQR(S)
240 PRINT "A МАТРИЦАНИНГ"; NORMA%;
    "НОРМАСИ="; S1
250 END
    RUN
    A МАТРИЦАНИНГ 3-НОРМАСИ=13.0104
OK
```

Келтирилган программа матнида n=3 бўлганда,

$$B = \begin{bmatrix} 3.1 & 0.9 & 7.2 \\ 2.4 & -3.5 & 5.1 \\ -5.7 & 3.7 & 4.1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг k — нормаси ҳисобланиб,

A МАТРИЦАНИНГ 3-НОРМАСИ=13.0104

натижа босмага чиқазилганлиги кўрсатилган.

Шунингдек, NORMA=1 ва NORMA=2 бўлганда мос holda m ва l нормалар ҳисобланиб, $||B||_m$=11.00 ва $||B||_l$=8.1 натижалар олинган.

Машқлар

Қуйидаги ҳисоблаш жараёнлари алгоритмларининг блок-схемаларини ва программаларини тузинг. Ўзгарувчиларнинг ҳар хил қийматларида ЭҲМда натижалар олиб, уларни таҳлил қилинг.

1. $\alpha, \beta \in R$, A, B — $m \times n$ — тартибли матрицалар бўлса, $D = \alpha A^{*} + \beta B^{*}$ матрица элементлари ҳисоблансин.

2. A — $m \times n$ тартибли квадрат матрица, $k \in N$ бўлса, $C = A^{k}$ матрица элементлари ҳисоблансин.

3. $a = \|A\|_m$, $b = \|A\|_l$, $c = -\|A\|_k$ бўлса, $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари ҳисоблансин.

4. $\vec{a} = b \cdot \vec{x} + c + d$ вектор элементлари ҳисоблансин.

5. $d = \sqrt{2(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{a}\|_1 \cdot \|\vec{b}\|_2}$ сон ҳисоблансин.

VIII. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Риёзий таҳлил фанидан маълумки, аниқ интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

кўринишда ёзилади ва таърифга кўра, у

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (7.2)$$

лимитга тенг. Бу ерда $\int$ — интеграл белгиси, a — интеграллаш оралиғининг қуйи, b — юқори чегараси, $f(x)$ — интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ — интеграл остидаги ифода, x — интеграллаш ўзгарувчиси, Δx_k−$[a, b]$ кесмани n га бўлакка бўлгандаги k бўлагининг узунлиги, ξ_k−k — кесма ичидаги бирор нуқта.

Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш (7.2) формулага асосланган бўлиб, Δx_k ва ξ ларни ҳар хил танлаб олиб, турли тақрибий интеграллаш формулалари ҳосил қилинади. Улардан амалда энг кўп қўлланиладигани тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулаларидир.

7.1. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКЛАР ФОРМУЛАСИ

Интеграллаш оралиғи $[a, b]$ − $x=x_k(k=\overline{0,n})$ нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлинади. Агар $h=(b-a)/n$ қилиб олсак, бўлиниш нуқталари $x_k=a+(k-1)h(k=\overline{1,n+1})$ формула билан ҳисобланади. Ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ кесмадан ξ_k нуқтани, бу кесмани қуйи ёки юқори чегарасига ёки $(x_{k-1}+x_k)/2$ ўртасига тенг қилиб олиб, тақрибий ҳисоблаш формулаларини ҳосил қиламиз. Аниқлик учун кесмаларнинг $\xi_k=(x_{k-1}+x_k)/2$ ўрталарини олиб

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \quad (7.3)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар $f(x)$ функция икки марта дифференциалланувчи бўлса (7.1) интегрални (7.3) формула билан ҳисоблаш хатолиги

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{2n^2} f''(\xi) \quad (a \le \xi \le b)$$

формула билан аниқланади.

Аниқ интегрални ЭҲМ ёрдамида (7.3) формула билан ҳисоблаш қуйидаги босқичларда амалга оширилади.

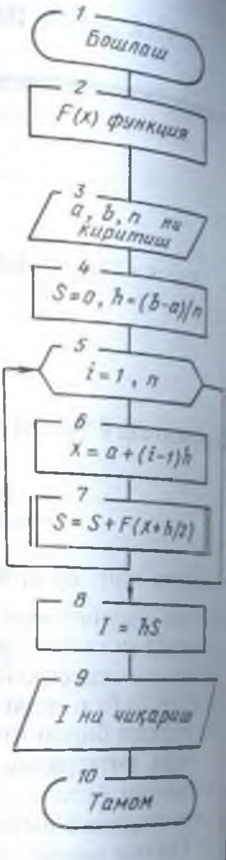
1. Бошланғич маълумотлар: a, b, n қийматлари тайёрланиб ЭҲМ хотирасига киритилади. $f(x)$ қийматини ҳисоблаш учун қўлловчи функцияси туридаги қисм-программа тузилади.

2. $h=(b-a)/n$ интеграллаш қадами ҳисобланади.

3. $S = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})$

йиғинди ҳисобланади.

4. Интегралнинг қиймати $I=hs$ формула билан ҳисобланади ва босмага чиқазилади.



7.1-расм.

Алгоритмнинг блок-схемаси 7.1-расмда берилган.

Программа матни.

```
10  REM ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКЛАР ФОРМУЛАСИ
20  DEF FNF(X)=LOG(X^2+3*X+1)
30  INPUT A, B, N
40  S=0 : H=(B-A)/N
50  FOR I=1 TO N
60  S=S+FNF((2*I-1)*H/2) : NEXT I
70  INT=H*S
80  PRINT "ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ="; INT
```

```
90 END
   RUN
   ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=2.98176
OK
```

Программани

$$\int_0^2 \ln(x^2 + 3x + 1)dx$$

интегрални ҳисоблашга татбиқ қилинган. Бунда $a=0$, $b=2$, $f(x)=\ln(x^2+3x+1)$. Кесмани бўлишлар сонини $n=20$ қилиб олиб, программанинг 20-сатрига

DEF FNF(X)=LOG(X^2+3*X+1)

ифодани ёзамиз, a, b, n қийматларини ЭҲМ хотирасига киритамиз. Программанинг бажарилиши натижасида

ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=2.98176

кўринишдаги маълумот босмага чиққанлигини кўрамиз.

Тузилган программада a, b интеграллаш чегаралари ва n кесмани бўлишлар сонини ўзгартириб ҳар хил аниқликдаги ечимлар олиш ва уларни солиштириб таҳлил қилиш мумкин. Бошқа функция интегралини ҳисоблаш учун программанинг 20-сатридаги функция ифодасини шу функцияга мос ифода билан алмаштириш керак бўлади, унинг қолган қисми ўзгармайди.

7.2. ТРАПЕЦИЯЛАР ФОРМУЛАСИ

Трапециялар формуласи (7.2) ифодада

$$f(\xi_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$$

қилиб олинганда ҳосил бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] \quad (7.4)$$

кўринишда ёзилади. Бу формула геометрик нуқтаи назардан ҳар бир элементар эгри чизиқли трапецияни $x_{k-1}ABx_k$ тўғри трапеция билан алмаштирилганда ҳосил қилинади (7.2-расмга қаранг).

Ҳисоблаш хатолиги

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta) \quad (a \leq \eta \leq b)$$

формула билан аниқланади. Аниқ интегрални бу усул билан ҳисоблаш алгоритмининг блок-схемаси 7.3-расмда келтирилган.

М и с о л . $\int_0^1 \ln(x^2 + 3x + 1)dx$

интегрални трапециялар формуласи билан ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Мисолда $a=0$, $b=1$, $f(x)=\ln(x^2+3x+1)$. Кесмани бўлишлар сонини $n=20$ қилиб олиб, программанинг 20-сатрига

DEF FNF(X)=LOG(X^2+3*x+1)

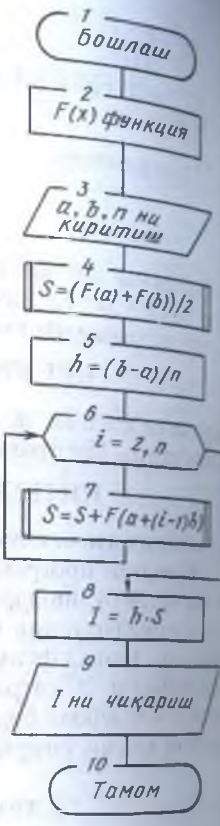
ифодани ёзамиз. Бошланғич маълумотларни ЭҲМга киритиб,

ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=0.94716

шаклидаги натижани оламиз.

Программа матни.

```
10 REM ТРАПЕЦИЯЛАР
   ФОРМУЛАСИ
20 DEF FNF(X)=LOG(X^2+
   +3*X+1)
30 INPUT A, B, N
40 S=(FNF(A)+FNF(B))/2 : H=(B-A)/N
50 FOR I=1 TO N-1
60 S=S+FNF(A+I*H) : NEXT I
70 INT=S*H
80 PRINT "ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=": INT
90 END
   RUN
   ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=0.94716
OK
```



7.2-расм.

7.3. СИМПСОН ФОРМУЛАСИ

Симпсон формуласи (7.2) ифодада

$$f(\xi_k) = (f(x_{k+1}) + 4f(x_k) + f(x_{k-1}))/6 \ (k = 2,\ 4,\ \ldots,\ 2m-2)$$

қилиб олинганда, ҳосил бўлади ва

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i})\right] \quad (7.5)$$

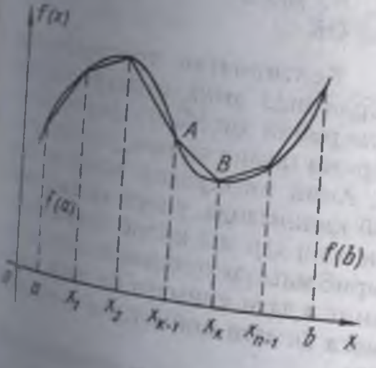
кўринишда ёзилади. Бу ерда $m=n/2$. Бўлинишлар сони жуфт бўлиши керак. Геометрик жиҳатдан (7.5) формула элементар эгри чизиқли трапецияларни параболик трапециялар билан алмаштирилганда ҳосил бўлади.

Интегрални тақрибий қийматини Симпсон формуласи билан ҳисоблаш учун (7.5) формулани

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + \sum_{i=2}^{n-1}(3+k)f(x_{i-1})\right]$$

кўринишда ёзиб олган маъқулдир. Бунда

$$k = \begin{cases} 1, & \text{агар } i - \text{ жуфт бўлса,} \\ -1, & \text{агар } i - \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

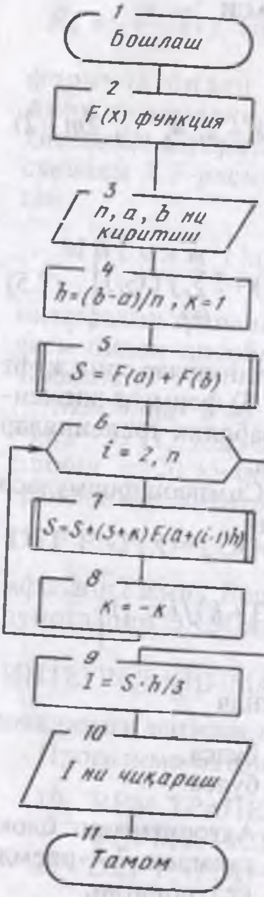


7.3-расм.

Алгоритмнинг блок-схемаси 7.4-расмда келтирилган.

Мисол сифатида 7.1-банддаги интегрални Симпсон формуласи билан ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Мисолда $a = 0$, $b= 2$. Қуйида матни келтирилган программанинг 20-сатрига интеграл остидаги функция қий-



7.4-расм.

матларини ҳисоблашни таъмин-лайдиган қулловчи функциясини ёзамиз ва $a=0$, $b=2$ ва $n=20$ қий-матларни ЭҲМга киритиб

ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=2.98075

кўринишдаги маълумотни ола-миз.

Программа матни.

```
10  REM СИМПСОН
    ФОРМУЛАСИ
20  DEF FNF(X)=LOG
    (X^2+3*X+1)
30  INPUT A, B, N
40  H=(B−A)/N
50  S=FNF(A)+FNF(B) :
    K=1
60  FOR I=2 TO N
70  S=S+(K+3)*FNF(A+
    (I−1)*H) : K=−K : NEXT
    INT=S*H/3
80  PRINT "ИНТЕГРАЛ
    ҚИЙМАТИ=“; INT
90  END
    RUN
ИНТЕГРАЛ ҚИЙМАТИ=
=2.98075
OK
```

Келтирилган программа ёрдамида аниқ интеграллар тақрибий ҳисоблаш формула-рининг амалий аниқликларини таҳлил қилиш, уларни ... ро солиштириш мумкин. Аниқ интегрални маълум б... аниқликда ҳисоблаш талаб қилинганда, унинг қиймати... кесманинг бўлишлар сони *n* ни ҳар хил қилиб олинганда... ги қийматларини солиштириб маълум хулосага келиш мум-кин. Масалан, интегралнинг *n* даги қиймати 2*n* даги қий-матидан катта фарқ қилмаса 2*n* даги қийматини интеграл қиймати деб олиш мумкин.

Назарий томондан Симпсон формуласи юқоридаги ик... формулага нисбатан анча аниқдир, чунки бунда хато

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\eta), \quad a \le \eta \le b$$

формула билан аниқланади. Аммо бу интеграл остидаги функциянинг 4-тартибли ҳосиласи мавжудлигини талаб қилади. Шунинг учун баъзи бир функциялар учун Симпсон формуласи тўғри тўртбурчаклар ва трапециялар формулаларидан ёмонроқ натижа бериши мумкин.

Тақрибий қийматни аниқлигини текшириш учун аниқ интегралланадиган функция учун у ёки бу формулани қўллаб кўриш фойдали бўлади.

Машқлар

Қуйидаги мисолларда берилган аниқ интегралнинг тақрибий қийматларини бўлинишлар сони $n = 6$, 12, 24 бўлганда юқорида келтирилган формулалар ёрдамида ЭҲМда ҳисобланг. Натижаларини ўзаро таққосланг ва уларнинг хатоликларини назарий формулалар билан олинган қийматлар билан солиштиринг.

1. $\int_1^2 \sqrt{8 - x^3} \sin x \, dx,$ 2. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \operatorname{tg} x \, dx,$

3. $\int_1^2 \sqrt{1 + x^4} \cos x \, dx.$ 4. $\int_1^2 e^{-x^2} \sqrt{11 - x^3} \, dx,$

5. $\int_2^3 \frac{e^{-x}}{\ln x} dx,$ 6. $\int_2^5 \frac{\sin x}{\ln x} dx,$

7. $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} e^{2x} dx.$ 8. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2^x \sqrt[3]{\sin^2 x} \, dx,$

9. $\int_1^2 e^{x^2} \cos(2x + 3) dx,$ 10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 0{,}1 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$

VIII. БИР НОМАЪЛУМНИНГ АЛГЕБРАИК ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Бир номаълумнинг алгебраик ва трансцендент тенгламаси умумий ҳолда

$$f(x)=0 \tag{8.1}$$

кўринишда ёзилади.

Номаълум x нинг f функциясининг маъносини йўқотмайдиган қийматларига унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари дейилади ва D билан белгиланади. Демак, D тўпламдан олинган ҳар қандай x учун $f(x)$ қийматини ҳисоблаш мумкин бўлади.

Тенгламанинг ечими деб x номаълумнинг шундай қийматларига айтиладики, уларни $f(x)$ га қўйганда (8.1) тенглама сонли айниятга айланади. Лекин амалда бундай тенгламалар мураккаб бўлиб, унинг ечимларининг аниқ қийматларини топиш жуда қийин ёки умуман мумкин бўлмайди. Бундай ҳолларда ечимнинг тақрибий қийматини топишга имкон берадиган тақрибий ҳисоблаш усуллари қўлланилади.

Юқоридаги тенгламанинг ε аниқликдаги ечими деб номаълумнинг қабул қилиши мумкин бўлган соҳасидан олинган $x_\varepsilon \in D$

$$|x_\varepsilon - x^*| \le \varepsilon \tag{8.2}$$

шартни қаноатлантирганда $f(x)$ функция

$$|f(x_\varepsilon) - f(x^*)| \le \delta(\varepsilon)$$

шартни қаноатлантирадиган қийматига айтилади. Бу ерда $\delta(\varepsilon)$ умуман олганда ε га боғлиқ бўлган етарлича кичик мусбат сон; x^* тенгламанинг аниқ, x_ε эса тақрибий ечими.

Тенгламани ЭҲМда ечиш асосан икки босқичдан иборат. Биринчи босқичда тенгламанинг ягона илдизи ётган оралиқ (ёки оралиқлар) ажратилади. Иккинчи босқичда, ажратилган илдиз талаб қилинган аниқликда ҳисобланади.

8.1. ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ

Тенгламанинг илдизларини ажратиш қуйидаги далиларга асосланади. Агар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ узлуксиз, монотон ва кесманинг учларида ҳар хил ишорага эга бўлган қийматларни қабул қилса, у ҳолда бу кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг биргина илдизи ётади.

Илдизларни турли усуллар билан ажратиш мумкин. Масалан, аналитик, график, жадвал ва алгоритмик усуллар.

1. Аналитик усул. Бу усулда (8.1) тенглама ечимларини топишдан кўра $f'(x)=0$ тенглама ечимларини топиш осон бўлганда фойдалидир. Фараз қилайлик (8.1) тенгламанинг илдизлари $[a, b]$ кесмада изланаётган ва кейинги тенгламанинг илдизлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар топилган бўлсин. $f(x)$ функциянинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лардаги қийматлари ишоралари жадвалини тузамиз ва уларнинг ўзгарадиган оралиқларини аниқлаймиз. Булар (8.1) — тенгламанинг ягона илдизлари ётадиган оралиқлар бўлади.

1-мисол. $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини аналитик усулда ажратинг.

Ечиш. $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-5$. Бу функция кўпҳад бўлганлиги учун барча ҳақиқий сонлар учун маънога эга.

Функция ҳосиласини олиб,

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$$

тни нолга тенглаймиз:

$$x(x^2+x-2)=0$$

Бу тенгламани ечиб, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$ илдизларини топиб, функция ишоралари жадвалини тузамиз.

1-жадвал

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-s$ функция ишоралари

x	-2	-2	0	1	∞
$f(x)$	+	−	−	−	+

1-жадвалдан $\xi_1 \in (-\infty; -2]$ ва $\xi_2 \in [1, \infty)$ эканлигини аниқлаймиз. Берилган тенгламанинг иккита ҳақиқий илдизи

мавжуд. Топилган илдизлар ётган кесмалар чексиз. Бу кесмаларнинг узунликларини 1 гача келтириб олиш мумкин. Бунинг учун *f(x)* функциянинг $x=-3$ ва $x=2$ даги қийматлари ишораларини аниқлаб қуйидаги жадвални тузамиз.

2-жадвал

Функция ишораларини аниқлаштириш

x	-3	-2	1	2
$f(x)$	+	−	−	+

2-жадвалдан $\xi_1 \in [-3; -2]$ ва $\xi_2 \in [1, 2]$ эканлигини аниқлаймиз. Бир бутунгача аниқликда биринчи ξ_1 ва иккинчи ξ_2 илдиз сифатида бу кесмаларни қуйи ёки юқори чегараларини олишимиз мумкин, яъни $\xi_1=-3[1]$ ёки $\xi_1=-2[1]$ ва $\xi_2=1[1]$ ёки $\xi_2=2[1]$.

2-мисол. $e^{x^2-4x} - x^2 + 4x - 3$ тенгламанинг илдизларини ажратинг.

Ечиш. Бу ҳолда $f(x) = e^{x^2-4x} - x^2 + 4x - 3$. Унинг ҳосиласини топиб, нолга тенглаштирамиз ва илдизларини аниқлаймиз:

$$f'(x) = (2x-4)e^{x^2-4x} - 2x + 4,$$

$$(2x-4)(e^{x^2-4x} - 1) = 0,$$

$$2x-4=0,\ x=2,$$

$$e^{x^2-4x} - 1 = 0,$$

$$x^2-4x=0,$$

$$x=0,\ x=4.$$

Энди

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{x^2-4x} - x^2 + 4x - 3) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{x^2-4x} - x^2 + 4x - 3) = +\infty$$

ларни аниқлаб 3-жадвални тузамиз

3-жадвал

$f(x) = e^{x^2-4x} - x^2 + 4x - 3$ **функция ишоралари**

x	$-\infty$	0	2	4	∞
$f(x)$	+	—	+	—	+

Бу жадваллан $\xi_1 \in [-\infty; 0]$, $\xi_2 \in [0, 2]$, $\xi_3 \in [2, 4]$ ва $\xi_4 \in [4, \infty)$ эканлигини топамиз.

2. Юқоридаги (8.1) кўринишдаги тенгламанинг берилган $[a, b]$ кесмадаги ҳақиқий илдизлари сонини ва улар жойлашган кесмаларни аниқлаш ЭҲМда қуйидагича амалга оширилади.

1. Илдиз аниқланадиган кесма узунлиги Δ ни танлаб олинади.

2. $[x_i, x_{i+1}]$ кесмаларда функция ишоралари ўзгарадиган оралиқлар ва уларнинг сони аниқланади. Бунинг учун:

а) $n=0$, $x_2=a$, $x_1=x_2$, $x_2=x_2+\Delta$ қилиб олинади;

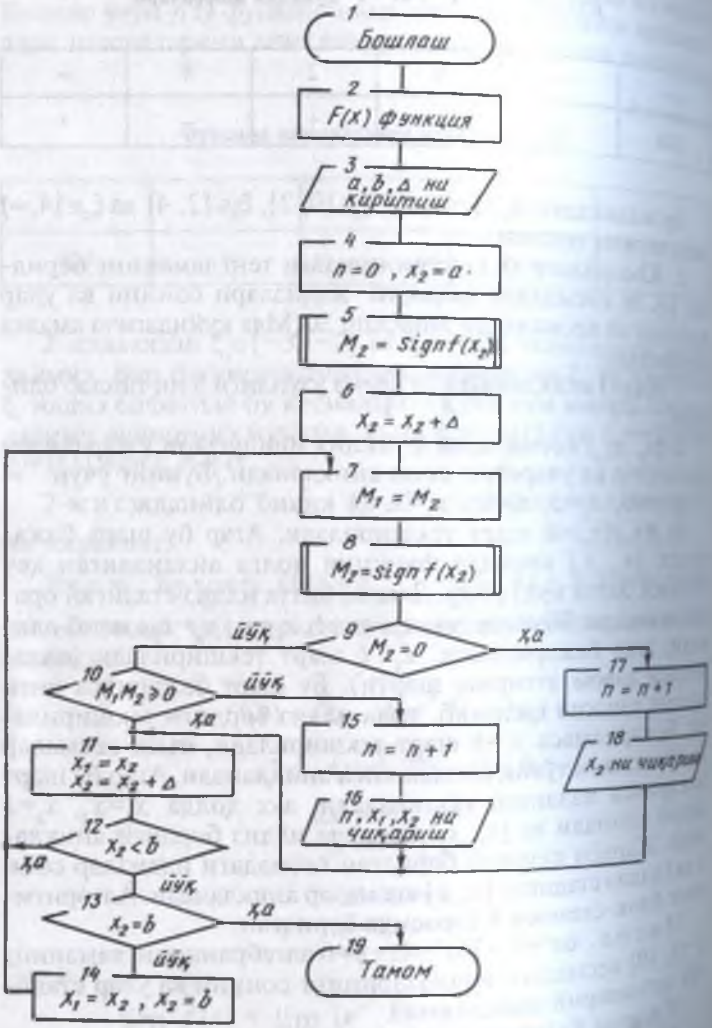
б) $f(x_1)f(x_2)<0$ шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса: $[x_1, x_2]$ кесмада функция нолга айланадиган ҳеч бўлмаса битта нуқта бор. Демак, битта илдиз ётадиган оралиқ топилди. Шунинг учун $n=n+1$, $x_n=x_1$, $y_n=x_2$ қилиб олинади; агар бажарилмаса, $x_2< b$ шарт текширилади (изланишни давом эттириш шарти). Бу шарт бажарилса янги оралиқ ташкил қилиниб, унда илдиз борлиги текширилади, бажарилмаса $x_2=b$ шарт текширилади, яъни кесмалар $[a, b]$ кесмани тўлиқ қоплашлиги аниқланади. Агар бу шарт бажарилса изланиш тўхтатилади, акс ҳолда $x_1=x_2$, $x_2=b$ қилиб олинади ва $[x_1, x_2]$ кесмада илдиз борлиги аниқланади. Жараён якунида берилган кесмадаги илдизлар сони n ва i илдиз ётадиган $[x_i, y_i]$ кесмалар аниқланади. Алгоритмнинг блок-схемаси 8.1-расмда берилган.

Мисол. $6x^4+x^3-26x^2-4x+8=0$ алгебраик тенгламанинг $[-10, 10]$ кесмадаги илдизларининг сонини ва улар ётадиган кесмаларни аниқлаймиз.

Мисолда $f(x)=6x^4+x^3-26x^2-4x+8$.

Тенглама илдизлари сонини ва улар ётадиган кесмаларни биргача аниқликда топамиз. Бунинг учун $\Delta=1$ қилиб олиш керак. Бу маълумотлар ЭҲМга киритилади.

Программа матни.


1
Бошлаш
2
F(X) функция
3
a, b, Δ ни киритиш
4
n=0 , X2=a
5
M2 = Signf(X2)
6
X2 = X2 + Δ
7
M1 = M2
8
M2=Sign f(X2)
9
M2=0
йўқ
ҳа
10
M1M2 ≥ 0
йўқ
ҳа
11
X1 = X2
X2 = X2 + Δ
12
X2 < b
ҳа
йўқ
13
X2=b
ҳа
йўқ
14
X1 = X2 , X2 = b
15
n = n + 1
16
n, X1, X2 ни чиқариш
17
n = n + 1
18
19
Тамом

8.1-расм.

```
10 REM ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ
20 DEF FNF(X)=6*X^4+X^3−26*X^2−4*X+8
30 INPUT A, B, DELTA
40 N=0 : X2=A : M2=SGN(FNF(X2)
50 X2=X2+DELTA : M1=M2 : M2=SGN(FNF(X2))
60 IF M2=0 GO TO 140
70 IF (M1*M2>0) GO TO 80
80 N=N+1
90 PRINT "N="; N, "X1="; "X2="; X2
100 X1=X2 : X2=X2+DELTA
110 IF (X2<B) GO TO 50
120 FI X2=B GO TO 150
130 X1=X2 : X2=B : GO TO 50
140  N=N+1
150 PRINT "X="; X2; "ТЕНГЛАМАНИНГ ИЛДИЗИ"
   GO TO 100
160 END
   RUN
   X=−2.0000 ТЕНГЛАМАНИНГ ИЛДИЗИ
   I=2   XI=−1.0000   X2=0.0000
   I=3   XI=  0.0000   X2=1.0000
   X=2.0000 ТЕНГЛАМАНИНГ ИЛДИЗИ
  OK
```

Программанинг бажарилиши натижасида тенгламанинг [−10, 10] кесмада 4 та ҳақиқий илдизи борлиги, $x_1=-2$ ва $x_4=2$ сонлари унинг аниқ илдизлари, бир бутунгача аниқликда x_3 ва x_4 илдизлари [−1, 0] ва [0, 1] кесмаларда ётишлиги аниқланган.

Эслатма: программа ёрдамида топилган оралиқда илдизнинг ягоналигига ҳам, баъзи бир илдизларни аниқланмай қолишлигига ҳам асос бор. Чунки Δ етарлича катта бўлганда функция ишоралари ҳар хил бўлган оралиқда у OX ўқини бир неча марта кесиб ўтган ҳам, аксинча ишора аслида ўзгарган-у, лекин оралиқ четларида ҳисобланган қийматлар бир хил ишорали бўлиб қолиши ва илдизи йўқолиши ҳам мумкин. Шунинг учун олинган натижаларни текшириш мақсадида уларни Δ нинг ҳар хил қийматларида олиб кўриш мақсадга мувофиқдир. Агар натижалар барча ҳолда такрорланса уларни ҳақиқатга яқин деб айтиш мумкин бўлади.

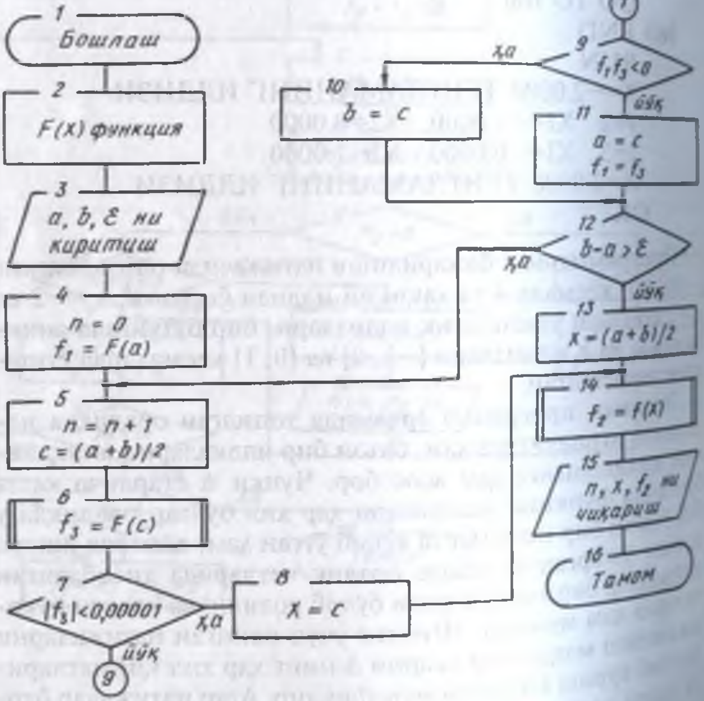
8.2. КЕСМАНИ ИККИГА БЎЛИШ УСУЛИ

Юқоридаги (8.1) тенгламанинг $\xi \in [a, b]$ ажратилган илдизини ε аниқликда ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади. Функциянинг оралиқни чап четидаги қиймати ҳисобланади. Кесманинг ўртасининг координатаси $c=(a+b)/2$ ва функциянинг бу нуқтадаги қиймати $f(c)$ ҳисобланади. Кейин қуйидаги шартлар текширилади:

1. $|f(c)| < \delta$. Бунда δ етарлича кичик сон. Бу ҳолда $\xi = c$ ва ҳисоблаш жараёни тўхтатилади.

2. $f(a) \cdot f(c) < 0$. Бу ҳолда $\xi \in [a, c]$ бўлади. Демак, илдиз ётган кесманинг юқори чегарасини $b=c$ қилиб олиш керак.

3. Агар 2-бандлаги шарт бажарилмаса $\xi \in [c, b]$ бўлади. Демак, илдиз ётадиган кесманинг қуйи чегараси ўзгаради, яъни $a=c$ қилиб олиш керак.



8.2-расм.

4. Янги ҳосил бўлган $[a, b]$ кесма учун $b-a \le \varepsilon$ шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса, илдиз талаб қилинган аниқликда топилган бўлади, акс ҳолда юқорида бажарилган ишлар янги оралиқ учун такрорланади. Алгоритмнинг блок-схемаси 8.2-расмда келтирилган.

Мисол. $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$ тенгламанинг $\xi\in[1, 2]$ илдизини кесмани иккига бўлиш усули билан $\varepsilon=0,001$ гача аниқликда ҳисоблаймиз. Қаралаётган мисолда $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-5$, $a=1$, $b=2$, $\varepsilon=0,001$. Бу маълумотларни ЭҲМ хотирасига киритамиз, $f(x)$ ни ҳисоблаш учун функция тузамиз. Программанинг бажарилиши натижасида кесмани бўлишлар сони 10 га, илдиз талаб қилинган аниқликдаги қиймати 1,592 га тенг, яъни $\xi=1,592[0,001]$ эканлигини аниқлаймиз. Булардан ташқари x аргументнинг шу қийматида функция қиймати 0,00082 га тенг эканлиги ҳам аниқланган. Буни деярли нолга тенг деб айтиш мумкин.

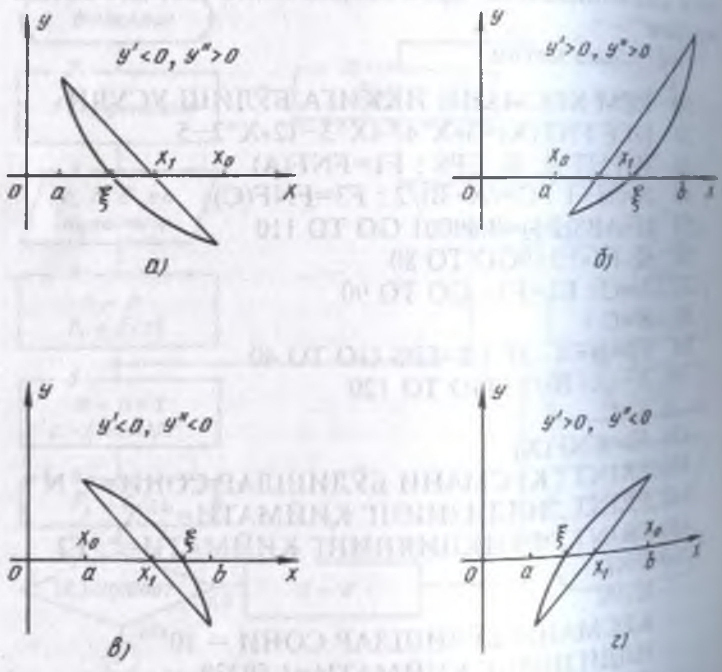
Программа матни.

```
10  REM КЕСМАНИ ИККИГА БЎЛИШ УСУЛИ
20  DEF FNF(X)=3*X^4+4X^3-12*X^2-5
30  INPUT A, B, EPS : F1=FNF(A)
40  N=N+1 : C=(A+B)/2 : F3=FNF(C)
50  IF ABS(F3)<0,00001 GO TO 110
60  IF F1*F3<0GO TO 80
70  A=C : F1=F3 : GO TO 90
80  B=C
90  F2=B-A : IF F2>EPS GO TO 40
100 X=(A+B)/2 : GO TO 120
110 X=C
120 F2=FNF(X)
130 PRINT "КЕСМАНИ БЎЛИШЛАР СОНИ="; N
140 PRINT "ИЛДИЗНИНГ ҚИЙМАТИ="; X
150 PRINT "ФУНКЦИЯНИНГ ҚИЙМАТИ="; F2
160 END
    RUN
    КЕСМАНИ БЎЛИШЛАР СОНИ = 10
    ИЛДИЗНИНГ ҚИЙМАТИ=1.59229
    ФУНКЦИЯНИНГ ҚИЙМАТИ = 0.00082
    OK
```

8.3. ВАТАРЛАР УСУЛИ

Ватарлар усули [*a*, *b*] кесмага тўғри келувчи *f(x)* эгри чизиқ ёйини туташтирувчи ватар ОХ ўқини шу кесма ичида кесиб ўтишига асосланган. Ватарнинг ОХ ўқи билан кесишган нуқтаси илдизга яқинроқ (8.3-расмда x_1 ва ξ га мос нуқталар). Агар илдиз ётган кесма сифатида [a, x_1] ёки [x_1, *b*] олинса, аввалги [*a*, *b*] кесмага нисбатан кичикроқ кесма ҳосил бўлади. Янги кесмада мос *f(x)* ёйига яна ватар ўтказиб, илгаригидан кўра торроқ оралиқни аниқлаш мумкин ва ҳоказо. Бу жараённи давом эттириб, илдиз ётган оралиқни исталганча кичрайтириш мумкин бўлади.

Тенгламанинг $\xi \in [a, b]$ ажратилган илдизини ξ аниқликда ҳисоблаш учун x_0 бошланғич яқинлашиш танлаб олинади. Бу 8.3-расмда кўрсатилгандек *f(x)* функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларининг ишораларига



8.3-расм.

боғлиқ. Агар $y'<0$ ва $y''<0$ (8.3 а-расм) ёки $y'>0$ ва $y''<0$ (8.3 г-расм) бўлса $x_0=b$, бошқа ҳолларда $x_0=a$ қилиб олиш керак (8.3-б ва 8.3 в-расмлар).

Биринчи $x_0=a$ бўлган ҳолда $x=b$ қўзғалмас нуқта бўлади ва илдизга кейинги яқинлашишлар

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(a)} \qquad (8.3)$$

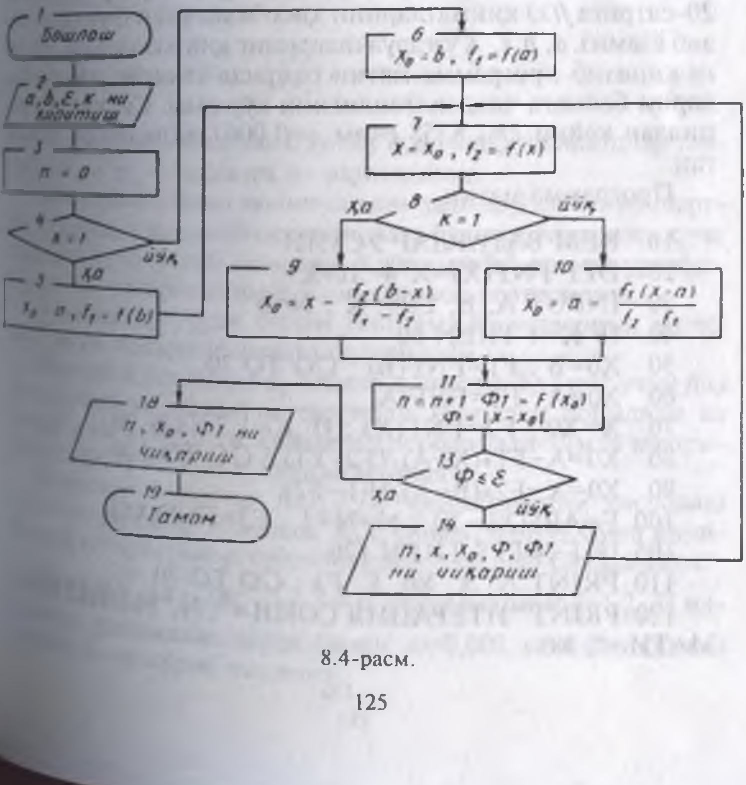
формула билан ҳисобланади. Бу ерда $n=0, 1, 2, \ldots$ яқинлашиш тартиби, x_n — n- тартибли яқинлашиш.

Иккинчи, $x_0=b$ бўлган ҳолда $x=a$ қўзғалмас нуқта бўлади. Кейинги яқинлашишлар

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(a)(x_n-a)}{f(x_n)-f_{(a)}} \qquad (8.4)$$

формула билан ҳисобланади.

Яқинлашиш жараёни $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ шарт бажарилгунча давом этади.



8.4-расм.

Бу усул алгоритмининг блок-схемаси 8.4-расмда кўрсатилган.

Қуйида матни келтирилган программада (8.3) ва (8.4) формулаларига К ўзгарувчининг K=1 ва K=2 қийматлари мос қилиб олинган. Ундан фойдаланиш учун *a, b, ξ* ва *K* ўзгарувчиларнинг қийматлари тайёрланиб, ЭҲМ хотирасига киритилади. Программанинг бажарилиши натижасида ҳар бир яқинлашишда n, x_n, x_{n+1}, $|x_n - x_{n+1}|$ ва $f(x_{n+1})$ қийматлари босмага чиқади. Якуний натижа

ИТЕРАЦИЯ СОНИ=... ИЛДИЗ ҚИЙМАТИ= ... (КСИ)=...

кўринишда бўлади.

Мисоллар. 1. $x^4-10x+7=0$ тенгламанинг [1, 2] кесмадаги илдизини $\varepsilon=0,0001$ аниқликда ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Мисолда $f(x)=x^4-10x+7$, $a=1$, $b=2$. Функция ҳосилаларининг ишораларини текширамиз: $f'(x)=4x^3-10<0$ ва $f''(x)=12x^2>0$. Демак, илдиз (8.1) формула билан аниқлаштирилади, яъни $K=1$ қилиб олиш керак. Программанинг 20-сатрига $f(x)$ қийматларини ҳисоблаш учун функция тузиб ёзамиз. a, b, ε, K ўзгарувчиларнинг қийматларини ЭҲМ-га киритиб программа матни охирида ёзилган маълумотларни босмага чиқазилганлигини кўрамиз. Саккиз итерациядан кейин $\xi=1,8358$ ечим $\varepsilon=0,0001$ аниқликда топилган.

Программа матни.

```
10  REM ВАТАРЛАР УСУЛИ
20  DEF FNF(X)=X^4-10*X+7
30  INPUT A, B, EPS, K : N=0
40  IF K=1 THEN 60
50  X0=B : F1=FNF(B) : GO TO 70
60  X0=A : F1=FNF(A)
70  X=X0 : F2=FNF(X) : IF K=1 THEN 90
80  X0=A-F1*(X-A)/(F2-F1) : GO TO 100
90  X0=X-F2*(B-X)/(F1-F2)
100 F=ABS(X0-X) : N=N+1 : F3=FNF(X0)
105 IF F<=EPS THEN 120
110 PRINT N, X, X0, F, F3 : GO TO 70
120 PRINT "ИТЕРАЦИЯ СОНИ="; N, "ИЛДИЗ ҚИЙМАТИ="; X0
```

```
130 PRINT "F(KSI)="; F3
140 END
    RUN
 1      1.0000      1.4000      0.4000      -2.0000
 2      1.4000      1.7077      0.3077      -3.1584
 3      1.7077      1.8002      0.1005      -1.5724
 4      1.8082      1.8347      0.0283      -0.0796
 5      1.8304      1.8347      0.0043      -0.0767
 6      1.8347      1.8356      0.0008      -0.0156
 7      1.8356      1.8358      0.0001      -0.0031
ИТЕРАЦИЯ СОНИ=8  ИЛДИЗ ҚИЙМАТИ=1.8358
 F(KSI)=-0.00060
OK
```

8.4. УРИНМАЛАР (НЬЮТОН) УСУЛИ

Бу усул қўлланилганда тенгламанинг ажратилган $\xi \in [a, b]$ илдизига бошланғич яқинлашиш x_0 танлаб олинади ва кет-ма-кет яқинлашишлар

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

формула билан ҳисобланади. Бу ерда n яқинлашишлар тартиб сони, x_n — илдизга n - яқинлашиш.

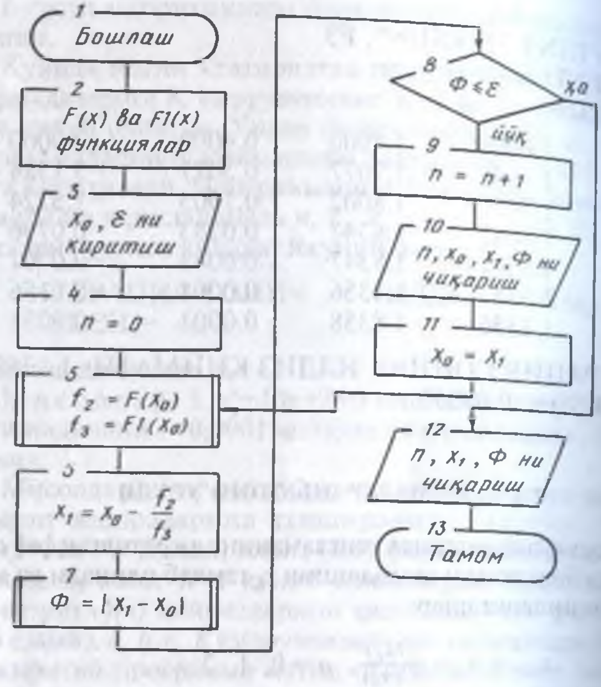
Бошланғич, яъни нолинчи яқинлашиш $f(a)f''(a)>0$ шартни бажарадиган қилиб олинади. Агар бу шарт бажарилса $x_0=a$, аксинча $x_0=b$ қилиб олинади. Қуйидаги 8.5-расмда уринмалар усули алгоритмининг блок-схемаси келтирилган.

Уринмалар усули билан тенглама илдизларини аниқлаш икки босқичда амалга оширилади.

Биринчи босқичда x_0 танлаб олинади. Бунинг учун $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилади ва унинг $x=a$ нуқтадаги қиймати ҳисобланади ҳамда юқоридаги шартга асосан x_0 танлаб олинади.

Иккинчи босқичда $f(x)$, $f'(x)$ қийматларини ҳисоблаш учун функциялар тузилади, x_0, ξ қийматлари ЭҲМга киритилади ва программа ёрдамида ҳисоблашлар бажарилади.

М и с о л. $(x-2)e^{x^2-x} - 3 = 0$ тенгламанинг $\xi \in [2, 3]$ илдизини уринмалар усули билан $\varepsilon=0{,}001$ гача аниқликда ҳисоблашни кўриб чиқамиз.



8.5-расм.

Мисолда $f(x) = (x-2)e^{x^2-x} - 3$, a=2, b=3.

Бошланғич маълумотларни аниқлаймиз. Бунинг учун $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = e^{x^2-x}(2x^2 - 5x + 3),$$

$$f''(x) = e^{x^2-x}(4x^3 - 12x^2 + 15x - 8)$$

Бу ҳосиланинг ва f функциянинг $x=a=2$ бўлгандаги қийматларини ҳисоблаймиз ва ишораларини аниқлаймиз: $f(2)=-3<0$, $f''(2)=6>0$. Демак, x_0=3 қилиб олиш керак.

Функция ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи қийматларини ҳисоблаш учун қўлловчи функцияларини тузамиз. бошланғич маълумотлар: x_0=3 ва ξ=0,001 ларни ЭҲМга киритиб оралиқ маълумотларни ва n=8 итерациядан кейин ξ=2,208 тенг эканлигини аниқлаймиз.

Уринмалар усули алгоритмининг қаралаётган мисолга татбиқан ёзилган программаси қуйидагича:

```
10  REM УРИНМАЛАР УСУЛИ
20  DEF FNF(X)=(X−2)*EXP(X*X−3)−3
30  DEF FNF1(X)=(2*X*X−5*X+3)*EXP(X*X−X)
40  INPUT X0, EPS : N=0
50  F2=FNF(X0) : F3=FNF1(X0) : X1=X0−F1/F3
60  F3=ABS(X1−X0) : IF F3<=EPS THEN 90
70  N=N+1 : PRINT N, X0, X1, F3
80  X0=X1 : GO TO 50
90  PRINT "N="; N, "КСИ="; X1, "ФАРК="; F3
100 END
    RUN
    1   3.0000      2.8346      0.1654
    2.  2.8346      2.6675      0.1670
    3.  2.6675      2.5051      0.1624
    4.  2.5051      2.3618      0.1440
    5.  2.3610      2.2585      0.1025
    6.  2.2585      2.2147      0.0437
    7.  2.2147      2.2083      0.0063
    N=7      КСИ=2.2082      ФАРК=0.0001
    OK
```

Программани бошқа масалаларни ечишга татбиқ қилиш учун йигирманчи ва ўттизинчи сатрлардаги функцияларни мос ҳолда алмаштириш керак бўлади.

8.5. ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Тенгламанинг ажратилган $\xi \in [\,a,\, b]$ илдизини итерация усули билан талаб қилинган аниқликда ҳисоблаш қуйидаги босқичларда бажарилади.

1. Итерация жараёни қурилади. Тенглама $x=\varphi(x)$ кўринишда ёзиб олинади. Бунда $\varphi(x)$ функцияси $x \in [\,a,\, b]$ кесмада

$$||\varphi'(x)||<1 \qquad (8.5)$$

шартни қаноатлантирадиган функция бўлиши керак. Функция нормаси

$$||\varphi'(x)||= \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$$

9—К-20

формула билан аниқланади.

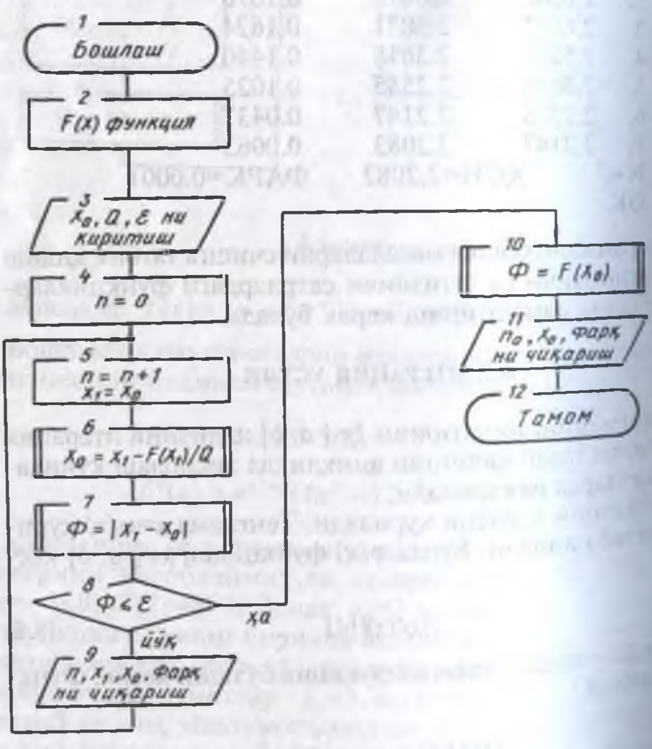
Функция (8.5) шартни қаноатлантирадиган бўлиши учун уни $\varphi(x)=x-f(x)/Q$ кўринишда олинади. Бу ерда

$$|Q|\geq \frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

муносабатни қаноатлантирадиган сон бўлиб, ишораси $f'(x)$ ҳосиланинг $[a, b]$ кесмадаги ишораси билан бир хил қилиб олинади.

Бошланғич яқинлашиш сифатида $[a, b]$ кесмадаги ихтиёрий сонни олиш мумкин. Масалан, $x_0=a$. Кейинги яқинлашишлар

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\ n-1,\ 2,\ \ldots$$



8.6-расм.

формула билан ҳисобланади. Ҳисоблаш жараёни $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ шарт бажарилгунча давом этади.

2. Бошланғич маълумотларни ЭҲМга киритиб ҳисоблашларни бажариш ва натижаларни таҳлил қилиш. Биринчи босқичда аниқланган маълумотлар ЭҲМ хотирасига киритилади ва $f(x)$ функция қийматларини ҳисоблаш учун бошқарувчи функцияси тузилади, бевосита ҳисоблашлар бажарилади ва улар таҳлил қилинади. Бу алгоритмнинг блок-схемаси 8.6-расмдагидек бўлади.

М и с о л. $x^4-2x^3+4x^2-9=0$ тенгламанинг $\xi \in [1, 2]$ илдизини $\varepsilon=0{,}01$ аниқликда ЭҲМда ҳисоблашни кўриб чиқамиз. Бошланғич маълумотларни аниқлаймиз. Бунинг учун $f(x)=x^4-2x^2+4x^2-9$ функция ҳосиласининг [1, 2] кесмадаги максимумини топамиз. $f'(x)=4x^3-6x^2+8x$ ҳосилани [1, 2] кесмада экстремал қийматлари йўқ. Шунинг учун

$$\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = \max_{x\in[1,2]} \{|4x^3 - 6x^2 + 8x|\} = \max\{6{,}24\} = 24$$

ҳосила ишораси эса мусбат. Демак, Q=15 қилиб олиш мумкин. Программанинг 20-сатрига $f(x)$ қийматларини ҳисоблаш учун функция тузиб ёзамиз. Маълумотларни ЭҲМ хотирасига киритиб, программанинг бажарилиши натижасида:

1	1.0000	1.4000	0.4000
2	1.4000	1.5871	0.1870
3	1.5871	1.6254	0.0383

оралиқ маълумотлардан кейин

ИТЕРАЦИЯ СОНИ=4 КСИ=1.6281 КСИ=−0.0017

якуний маълумотлар босмага чиққанлигини кўрамиз.

Программа матни.

```
10 REM F(X)=0 ТЕНГЛАМАНИ ИТЕРАЦИЯ
   УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ
20 20 DEF FNF(X)=X^4−2*X^3+4*X^2−9
30 INPUT X0, EPS, Q : N=0
40 N=N+1 : X1=X0 : X0=X1−FNF(X1)/Q
50 F3=ABS(X1−X0) : IF F3<=EPS THEN 70
60 PRINT N, X1, X0, F3 : GO TO 40
70 F=FNF(X0)
```

```
80  PRINT "ИТЕРАЦИЯ СОНИ="; N, "КСИ="; X0,
    "F(КСИ)="; F
90  END
    RUN
    1    1.0000    1.4000    0.4000
    2    1.4000    1.5871    0.1870
    3    1.5871    1.6254    0.0383
ИТЕРАЦИЯ СОНИ=4  КСИ=1.6281   F(КСИ)=-0.0017
OK
```

Машқлар

Қуйидаги тенгламаларнинг $[a, b]$ кесмадаги ҳақиқий илдизларини ажратинг. Улардан бирини кесмани иккига бўлиш, ватарлар, уринмалар ва оддий итерация усуллари билан $\varepsilon=0{,}001$ ва $\varepsilon=0{,}0001$ аниқликларда ЭҲМда ҳисобланг. Натижаларни ўзаро солиштириб таҳлил қилинг.

1. $2x^3+3\lg x-7\sin(x/3)=0,\ x\in[0,2\pi]$.
2. $x^2\sin(x+3)-2\sqrt{x+r}=0,\ x\in[0,1]$.
3. $x^5-7x^3+2=0,\ x\in R$.
4. $\log_2(x^2+3x-1)+2x^3\sin(x+2)=0,\ x\in[1,\ 10]$.
5. $3x^4+5x^3+2x^2-17=0,\ x\in R$.
6. $\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\frac{2x^2+1}{3x^3+2}=0,\ x\in[-1,\ 10]$.
7. $(x+2)\,e^{2x^2-3}-4x^3+3=0,\ x\in[0,\ 5]$.
8. $2x^3-3x^2-7x+5=0,\ x\in R$.
9. $7x^5-3x^3+2x^2-12=0,\ x\in R$.
10. $x^5+3x^4-8x^2-18=0,\ x\in R$.

IX. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ

Бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган *n* номаълумли *n* та чизиқли алгебраик тенгламалар тизими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{9.1}$$

кўринишда ёзилади. Бунда a_{ij} — i — тенгламадаги j номаълум олдидаги коэффициент, x_i — i — номаълум, b_i — i — тенгламанинг озод ҳади. Тенгламалар тизими бир жинсли бўлмаганда унинг ҳеч бўлмаганда битта озод ҳади нолдан фарқли бўлиши керак. Биз бир жинсли бўлмаган тенгламалар тизимини ечиш усулларини кўриб чиқамиз.

Тизимни

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{9.2}$$

кўринишдаги ихчам шаклда ёзиб олиш мумкин. Бунинг учун

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$ қилиб олиниши етарли.

Олий алгебра фанидан маълумки, агар A матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, яъни $|A| \neq 0$ шарт ба-

жарилса, тизим ягона ечимга эга бўлади. Биз бу шарт ҳамиша бажарилади деб ҳисоблаймиз.

9.1. ГАУСС УСУЛИ

Тизим матрицаси A озод ҳадлар устуни билан кенгайтирилса, яъни $n+1$ — устун қилиб озод ҳадлар ёзилса, уни

$$A_1 \bar{x} = 0 \tag{9.3}$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда A_1 — кенгайтирилган матрица, унинг элементлари $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ учун A матрица элементларига, $n+1$ — устуни озод ҳадларга тенг қилиб олинган, яъни

$$a_{1ij}=a_{ij},\ j=\overline{1,n};\ a_{1in+1}=-b_i,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Юқоридаги (9.1) чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини Гаусс усули билан ечиш икки босқичда бажарилади. Биринчи босқич Гаусс усулининг тўғри йўли деб аталиб, бунда (9.3) тизимнинг матрицаси уч бурчакли ҳолга, яъни

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{n-1}^1 & a_{1n-2}^1 & a_{n+1}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n-1}^2 & a_{2n}^2 & a_{2n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1n}^{n-1} & a_{n-1n+1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{nn+1}^{n} \end{bmatrix}$$

кўринишга келтирилади. Бу матрицанинг элементлари $k=1, 2; \dots, n$ учун кетма-кет

$$\begin{cases} a_{kj}^k = a_{kj}^k \,/\, a_{kk}^{k-1} \\ a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{kj}^k a_{ik}^{k-1},\ i=\overline{k+1,n}, \\ j=\overline{k+1,n+1}. \end{cases} \tag{9.4}$$

формулалар билан ҳисобланади.

Иккинчи босқич тескари йўл деб аталади. Бунда тенгламанинг ечимлари кетма-кет

$$x_n = -a_{nn+1}^n,$$
$$x_{n-1} = -a_{n_1+1}^{n-1} - a_{nn}^{n-1} x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_i = -a_{in+1}^i - a_{ii+1}^i x_{i+1} - \dots - a_{in}^i x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1 = -a_{1n+1}^1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n}^1 x_n$$

формулалар билан ҳисобланади.

Тизим Гаусс усули билан ечилганда ҳар бир қадамда бир марта бўлиш амали бажарилади. Шунинг учун K қадамда $a_{kk}^k \neq 0$ шартни текшириб бориш керак. Бу шарт бажарилмаса K устун элементлари ичидан нолдан фарқлиси изланади ва унга мос сатр элементлари $к$ сатр элементлари билан алмаштирилади, яъни $к$ тенгламада x_k номаълум олдидаги коэффициент нолга тенг бўлса, у x_k номаълуми олдидаги коэффициенти нолдан фарқли бўлган тенглама билан алмаштирилади. Агар $к$ устун элементлари ичида бирорта ҳам нолдан фарқли элементи бўлмаса, қуйидаги икки натижадан бирига келиш мумкин.

Биринчи ҳолда барча $a_{ik} = 0$ ва $a_{in+1} = 0$ бўлади. Бунда тенгламалар тизими чексиз кўп ечимга эга бўлади. Бу ҳол $|A| = 0$ га мос келади.

Иккинчи ҳолда барча $a_{ik} = 0$ $(i = \overline{k+1, n})$, лекин ҳеч бўлмаса битта i учун $a_{in+1} \neq 0$ шарт бажарилади $(i = \overline{k+1, n})$. Бунда тизим ечимга эга эмас, яъни биргаликда бўлмайди.

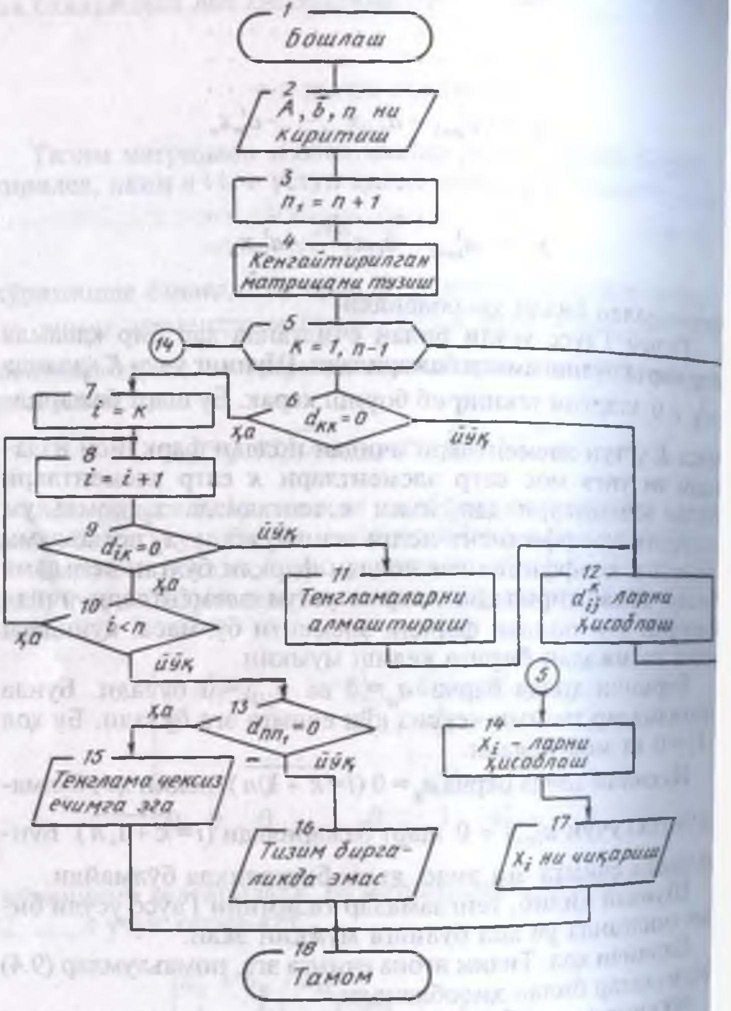
Шундай қилиб, тенгламалар тизимини Гаусс усули билан ечилганда уч ҳол бўлиши мумкин экан.

Биринчи ҳол. Тизим ягона ечимга эга, номаълумлар (9.4) формулалар билан ҳисобланади.

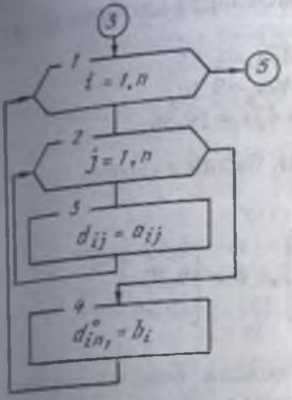
Иккинчи ҳол. Тенгламалар тизими чексиз кўп ечимга эга. Бунда биринчи l та номаълум қолган $n-l$ та номаълумлар орқали ифодаланади.

Учинчи ҳол. Тенгламалар тизими биргаликда эмас.

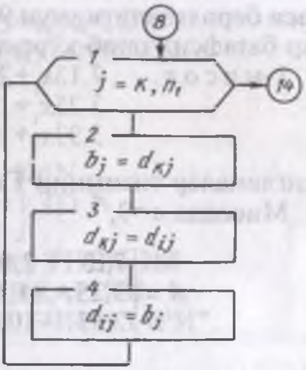
Алгоритмнинг блок-схемалари 9.1—9.5-расмларда келтирилган. 9.1-расмда алгоритмнинг умумлашган блок-схе-


1
Бошлаш
2
A, $\bar{b}$, n ни киритиш
3
$n_1 = n + 1$
4
Кенгайтирилган матрицани тузиш
5
K = 1, n-1
14
6
$d_{kk} = 0$
ҳа
йўқ
7
i = K
8
i = i + 1
9
$d_{ik} = 0$
йўқ
ҳа
10
i<n
ҳа
йўқ
11
Тенгламаларни алмаштириш
12
d_{ij}^{K} ларни ҳисоблаш
5
13
$d_{nn_1} = 0$
ҳа
йўқ
14
x_i - ларни ҳисоблаш
15
Тенглама чексиз ечимга эга
16
Тизим бирга-ликда эмас
17
x_i ни чиқариш
18
Тамом

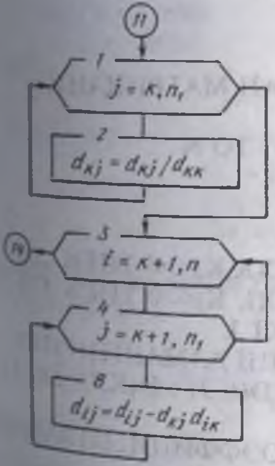
9.1-расм.



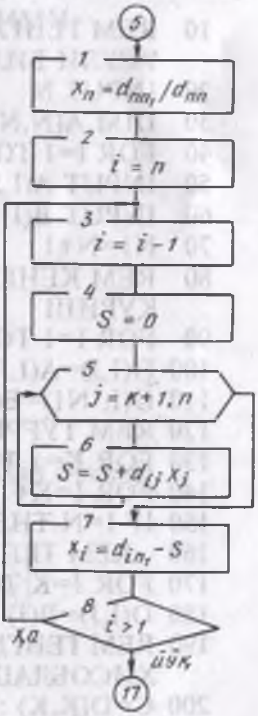
9.2-расм.



9.3-расм.



9.4-расм.



9.5-расм.

маси берилганлиги учун 9.2−9.5-расмларда каттарок блок-лар батафсил очиб кўрсатилган.

1-мисол. $7.13x_1+2.05x_2+1.47x_3=6.55,$
$3.25x_1+1.54x_2+7.49x_3=9.20,$
$3.93x_1+10.20x_2+5.43x_3=19.56$

тенгламалар тизимини Гаусс усули билан ечамиз.

Мисолда $n=3$,

$$A=\begin{bmatrix}7{,}13 & 2{,}05 & 1{,}47\\ 3{,}25 & 1{,}54 & 7{,}47\\ 3{,}93 & -10{,}20 & 5{,}43\end{bmatrix},\quad \bar{b}=\begin{bmatrix}6{,}55\\ 9{,}20\\ 19{,}56\end{bmatrix}$$

Бу мисол биринчи ҳолга тўғри келади. Бошланғич маълумотлар: n, A, $\bar{b}$ қийматларини ЭҲМга киритиб $x_1=1{,}00$, $x_2=-1{,}00$, $x_3=1{,}00$ натижа олинганлигини қуйидаги программа матнидан кўрамиз.

```
10  REM ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ГАУСС
    УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ
20  INPUT N
30  DIM A(N,N), D(N, N+1), B(N), X(N)
40  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N
50  INPUT A(I,J) : NEXT J
60  INPUT B(I) : NEXT I
70  N1=N+1
80  REM КЕНГАЙТИРИЛГАН МАТРИЦАНИ
    ҚУРИШ
90  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N
100 D(I,J)=A(I,J) : NEXT J
110 D(I, N1)=B(I) : NEXT I
120 REM ТЎҒРИ ЙЎЛ
130 FOR K=1 TO N−1 : IF D(K,K)<>0 THEN 200
140 FOR I=K+1 TO N : IF D(I, K)<>0 THEN 170
150 IF I=N THEN 360 : NEXT I
160   REM ТЕНГЛАМАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ
170 FOR J=K TO N1 : B(J)=D(K,J) : D(K,J)=D(I,J)
180 D(I,J)=B(J) : NEXT J
190 REM ТЕНГЛАМАЛАР КОЭФФИЦИЕНТЛАРИНИ
    ҲИСОБЛАШ
200 C=D(K,K) : FOR J=K TO N1
210 D(K,J) = D(K,I)/C : NEXT J
```

```
220 FOR I=K+1 TO N : FOR J=K+1 TO N1
230 D(I,J)=D(I,J)−D(K,J)*D(I,K) : NEXT J, I
240 NEXT K
250 REM  ТЕСКАРИ ЙЎЛ
260 IF D(N,N)=0 THEN 360
270 X(N)=D(N,N1)/D(N,N) : K=N
280 K=K−1 : S=0 : FOR J=K+1 TO N
290 S=S+D(K,J)*X(J) : NEXT J
300 X(K)=D(K,N1)−S : IF(K>1) THEN 280
310 REM НАТИЖАЛАРНИ ЧИҚАРИШ
320 PRINT TAB(10); "ТИЗИМ ЕЧИМЛАРИ"
330 FOR I=1 TO N
340 PRINT "X("; I;")=" X(I) : NEXT I
350 GO TO 400
360 IF D (N,N1)<>0 THEN 390
370 PRINT "ТИЗИМ ЧЕКСИЗ КЎП ЕЧИМГА ЭГА"
380 GO TO 400
390 PRINT "ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ
    БИРГАЛИКДА ЭМАС"
400 END
    RUN
      ТИЗИМ ЕЧИМЛАРИ
    X(1)=1,0000
    X(2)=−1,0000
    X(3)=1.0000
OK
```

2-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Гаусс усули билан ечамиз.

Мисолда $n=3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Бу маълумотларни ЭҲМга киритиб:

ТИЗИМ ЧЕКСИЗ КЎП ЕЧИМГА ЭГА

кўринишдаги маълумотни оламиз. Чунки тизимнинг учинчи тенгламаси биринчисини 3 га кўпайтиришдан ҳосил бўлган, яъни тизим аслида иккита тенгламадан иборат, икки номаълумни қолган бир номаълум орқали ифодалаб олиш мумкин. Демак, бу мисол 2-ҳолга тўғри келади.

3-мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

тенгламалар тизими 3-ҳолга мисол бўлади. Бошланғич маълумотларни ЭҲМга киритиб

ТИЗИМ БИРГАЛИКДА ЭМАС

кўринишдаги маълумотни оламиз.

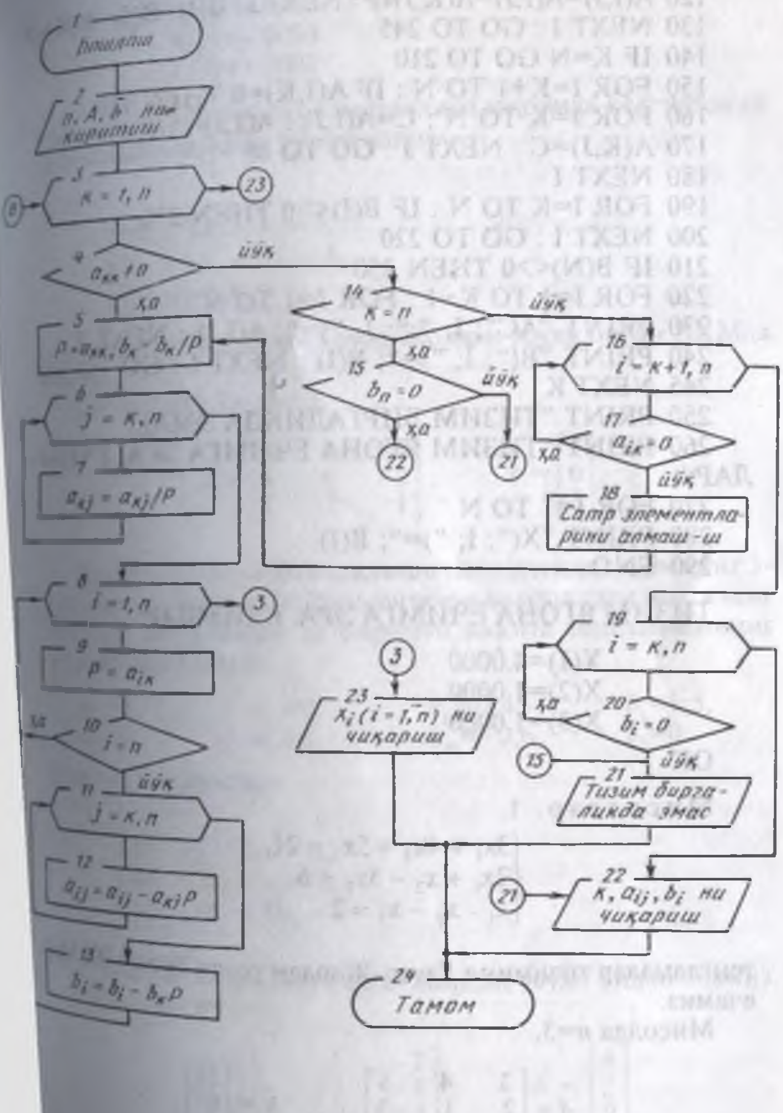
9.2. ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛИ

Гаусс-Жордан усули тенгламалар тизимининг матрицасини ўзгартириб бирлик матрицага келтиришга асосланган. Бунда ҳам (9.8) формулалар бўйича ўзгаришлар қилинади. Фақат ҳар бир қадамда i индекс бирдан, j эса k дан ўзгартирилади. Агар тизим ягона ечимга эга бўлса, номаълумларнинг қийматлари тўғридан-тўғри $x_i = b_i^n$, $i = \overline{1,n}$ формула билан аниқланади.

Бунда ҳам Гаусс усулидагидек уч хил натижага келиш мумкин. Алгоритмнинг блок-схемаси 9.6-расмда келтирилган.

ЭҲМ хотирасига: n — тенгламалар сони, A тизим матрицасининг элементлари ва $\bar{b}$ озод ҳадларидан тузилган вектор элементлари киритилади. Натижалар Гаусс усулидагидек шаклларда ва мазмунларда ҳосил бўлади.

```
10  REM ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛИ
20  INPUT N
30  DIM A(N,N), B(N)
40  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N
50  INPUT A(I,J) : NEXT J
60  INPUT B(I) : NEXT I
70  FOR K=1 TO N : IF A(K,K)=0 THEN 140
80  P=A(K,K) : B(K)=B(K)/P : FOR J=K TO N
```


Бошлаш
n, A, b ни киритиш
k = 1, n
23
$a_{kk} \ne 0$
йўқ
ҳа
$p = a_{kk}, b_k = b_k/p$
j = k, n
$a_{kj} = a_{kj}/p$
i = 1, n
3
$p = a_{ik}$
i = n
j = k, n
$a_{ij} = a_{ij} - a_{kj}p$
$b_i = b_i - b_k p$
k = n
$b_n = 0$
22
21
i = k+1, n
$a_{ik} = 0$
Сатр элементларини алмаштириш
i = k, n
$b_i = 0$
15
Тизим биргаликда эмас
$x_i (i = \overline{1,n})$ ни чиқариш
k, a_{ij}, b_i ни чиқариш
Тамом

9.6-расм.

```
90  A(K,J)=A(K,J)/P : NEXT J
100 FOR I=1 TO N : P=A(I,K) : IF I=K THEN 130
110 FOR J=K TO N
120 A(I,J)=A(I,J)−A(K,J)*P : NEXT J : B(I)=B(I)−B(K)*P
130 NEXT I : GO TO 245
140 IF K=N GO TO 210
150 FOR I=K+1 TO N : IF A(I,K)=0 THEN 180
160 FOR J=K TO N : C=A(I,J) : A(I,J)=A(K,J)
170 A(K,J)=C : NEXT J : GO TO 80
180 NEXT I
190 FOR I=K TO N : IF B(I)<>0 THEN 250
200 NEXT I : GO TO 220
210 IF B(N)<>0 THEN 250
220 FOR I=1 TO K−1 : FOR J=1 TO N
230 PRINT "AC"; I; ","; J, ")="; A(I,J) : NEXT J
240 PRINT "B("; I; ")="; B(I) : NEXT I : GO TO 290
245 NEXT K
250 PRINT "ТИЗИМ БИРГАЛИКДА ЭМАС"
260 PRINT "ТИЗИМ ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА. ЕЧИМ-
ЛАР:"
270 FOR I=1 TO N
280 PRINT "X("; I; ")="; B(I)
290 END
```

ТИЗИМ ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА. ЕЧИМЛАР:

X(1)=4.0000
X(2)=1.0000
X(3)=1.0000

OK

Мисоллар. 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 21, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Гаусс-Жордан усули билан ЭХМда ечамиз.

Мисолда n=3,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 21 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

бу маълумотларни ЭҲМга киритиб,

ТИЗИМ ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА. ЕЧИМЛАР:

X(1)=4.0000
X(2)=1.0000
X(3)=1.0000

кўринишдаги ечимлар олинганлиги юқорида келтирилган программа матнида кўрсатилган.

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Гаусс-Жордан усули билан ЭҲМда ечамиз.

Бу мисолда ҳам n=3,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Программанинг бажарилиши натижасида тизимнинг 3-тенгламаси барча коэффициентлари ва озод ҳади нолга тенг бўлиши аниқланади ва биринчи иккита тенгламасининг коэффициентлари:

a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=0,4, b_1=1,5,
a_{21}=0, a_{22}=1, a_{23}=−0,6, b_2=0

босмага чиқарилади.

3.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Гаусс-Жордан усули билан ечамиз.

Мисолда n=3 ва

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Тизим 3-тенгламасининг барча коэффициентлари 1-тенгламани мос коэффициентларини иккига кўпайтириб ҳосил қилинган. Лекин озод ҳади бундай пропорционалликка эга эмас. Демак, тизим биргаликда эмас, яъни (x_1, x_2, x_3) учликларнинг ҳар қандайи учала тенгламани бир пайтда қаноатлантирмайди.

Тенгламалар тизимининг берилганларини ЭҲМга киритиб,

ТИЗИМ БИРГАЛИКДА ЭМАС

кўринишдаги жавобни оламиз.

9.3. ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Гаусс-Жордан усули билан детерминантларни ҳисоблаш мумкин. Буни

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

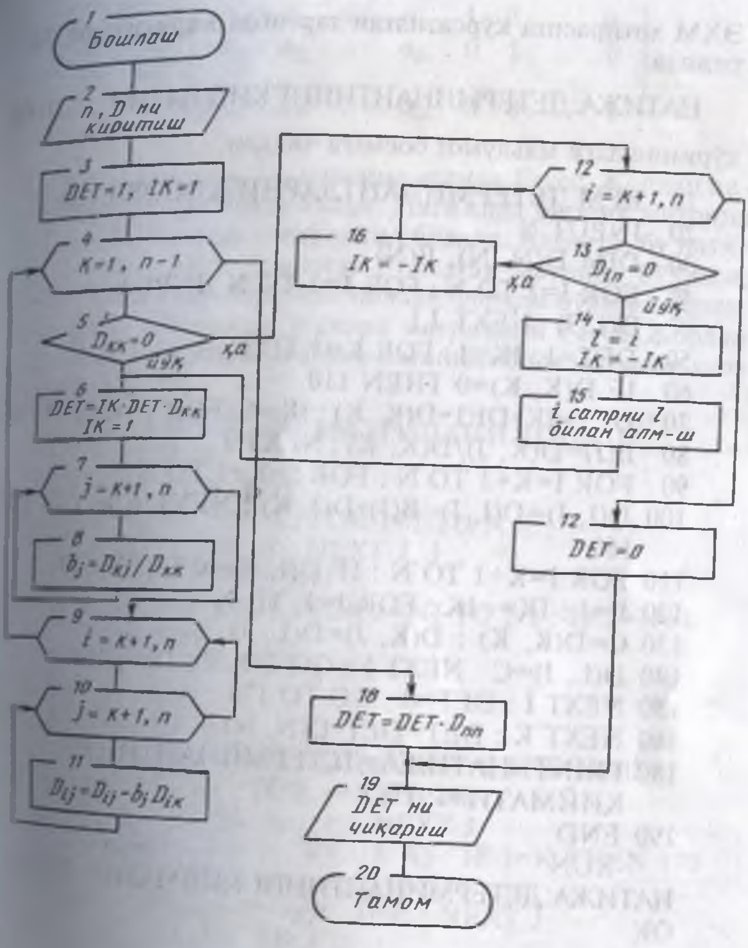
детерминантни ҳисоблашда кўриб чиқамиз. Бунинг учун Гаусс-Жордан алмаштиришларини бажариб, детерминантнинг қиймати

$$D = d_{11} d_{22}^{1} \cdot \ \dots \ \cdot d_{nn}^{n-1}$$

формула билан ҳисобланади.

Агар бирор бир қадамда детерминантнинг диагонал элементи нолга тенг бўлиб қолса, у шу устундаги нолдан фарқли элементи бор сатр билан алмаштириб олинади. Детерминантнинг ҳар бир сатри бошқа сатри билан алмаштирилганда унинг абсолют қиймати ўзгармай, фақат ишораси ўзгаради холос. Шунинг учун ҳисоблаш давомида неча марта сатр алмаштирилганлиги белгилаб борилади. d_{ij}^{K} $(i = \overline{1, n}, \ K = \overline{1, n-1})$ коэффициентлар (9.4) формулалар билан ҳисобланади. Алгоритмнинг блок-схемаси 9.7- расмда келтирилган.

Мисол.



9.7-расм.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 12 & 1 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Мисолда n=4. Қуйидаги программа ёрдамида ҳисоблашларни бажариш учун n ва D_{ij} ларнинг қийматларини

ЭҲМ хотирасига кўрсатилган тартибда киритилади. Натижада:

НАТИЖА: ДЕТЕРМИНАНТНИНГ ҚИЙМАТИ= – 129.000

кўринишдаги маълумот босмага чиққан.

```
10  REM ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ
20  INPUT N
30  DIM  D(N, N), B(N)
40  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N : INPUT
    D(I, J) : NEXT J,I
50  DET=1 : IK=1 : FOR K=1 TO N−1
60  IF D(K, K)=0 THEN 110
70  DET=IK*DET*D(K, K) : IK=1 : FOR J=K+1 TO N
80  B(J)=D(K, J)/D(K, K) : NEXT J
90  FOR I=K+1 TO N : FOR J=K+1 TO N
100 D(I, J)=D(I, J)−B(J)*D(I, K) : NEXT J, I : GO TO
    160
110 FOR I=K+1 TO N : IF D(I, K)=0 THEN 150
120 L=1 : IK=−IK : FOR J=K TO N
130 C=D(K, K) : D(K, J)=D(L, J)
140 D(L, J)=C : NEXT J : GO TO 70 : IK=−IK
150 NEXT I : DET=0 : GO TO 170
160 NEXT K : DET=DET*D(N, N)
180 PRINT «НАТИЖА: ДЕТЕРМИНАНТНИНГ
    ҚИЙМАТИ=»; DET
190 END
    RUN
НАТИЖА: ДЕТЕРМИНАНТНИНГ ҚИЙМАТИ=−129.0000
OK
```

9.4. ТЕСКАРИ МАТРИЦАНИ ТОПИШ

Гаусс-Жордан усули ёрдамида A матрицага тескари бўлган A^{-1} матрица элементларини ҳисоблаш, яъни тескари матрицани топиш мумкин.

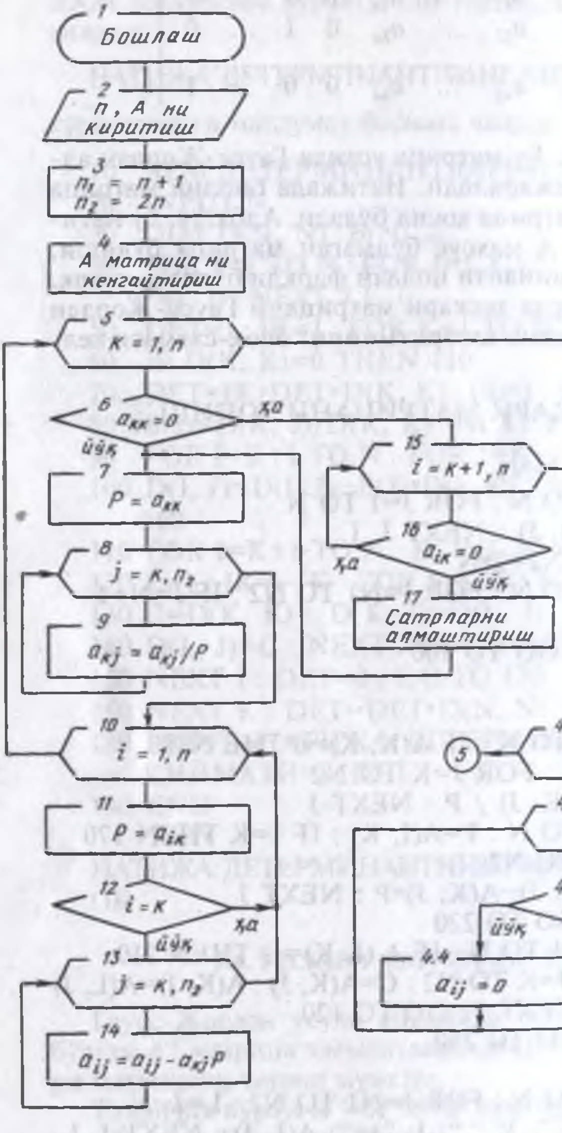
Таърифга кўра $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$ шартлар бажарилиши керак. Бу ерда E бирлик матрица.

Тескари матрица элементларини ҳисоблаш учун A матрица бирлик матрица билан кенгайтирилади, яъни

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & . & \dots & . & \dots & . & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

матрица тузилади. Бу матрица устида Гаусс-Жордан алмаштиришлари бажарилади. Натижада бирлик матрица ўрнида тескари матрица ҳосил бўлади. Албатта, бу натижани олиш учун A махсус бўлмаган матрица бўлиши, яъни унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши керак. 9.8 ва 9.9- расмларда тескари матрицани Гаусс-Жордан усули ёрдамида топиш алгоритмининг блок-схемаси келтирилган.

```
10  REM ТЕСКАРИ МАТРИЦАНИ ТОПИШ
20  INPUT N
30  DIM A(N, 2*N)
40  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N
50  INPUT A(I, J) : NEXT J, I
60  N1=N+1 : N2=2*N
70  FOR I=1 TO N : FOR J=N1 TO N2 : IF J=N+1
    THE N90
80  A(I, J)=0 : GO TO 100
90  A(I, J)=1
100 NEXT J, I
110 FOR K=1 TO N : IF A(K, K)=0 THE N180
120 P=A(K, K) : FOR J=K TO N2
130 A(R, J)=A(K, J) / P : NEXT J
140 FOR I=1 TO N : P=A(I, K) : IF I=K THEN 170
150 FOR J=K TO N2
160 A(I, J)=A(I, J)–A(K, J)*P : NEXT J
170 NEXT I : GO TO 220
180 FOR I=K+1 TO N : IF A (I, K)=O THEN 210
190 L=I : FOR J=K TO N2 : C=A(K, J) : A(K, J)=A(L, J)
200 A(L, J=C NEXT J : GO TO 120
210 NEXT I : GO TO 250
220 NEXT K
230 FOR I=1 TO N : FOR J=N1 TO N2 : L=J–N
240 PRINT "BC", I; ","; J; ")="; A(I, J) : NEXT J, I
    GO TO 260
250 PRINT "A — МАХСУС МАТРИЦА"
260 END
```



9.8-расм.

9.9-расм.

```
RUN
B(1, 1)=-0,5000
B(1, 2)= 0,5000
B(1, 3)= 0,5000
B(2, 1)=     0.0
B(2, 2)= 1,0000
B(2, 3)=-1,0000
B(3, 1)= 0,5000
B(3, 2)=-0,5000
B(3, 3)= 0,5000
OK
```

Келтирилган программанинг бажарилиши натижасида икки хил хулосага келиш мумкин. Биринчи ҳолда, қаралаётган матрица махсус эмас, натижа сифатида тескари матрицанинг элементлари босмага чиқади. Иккинчи ҳолда эса *A* матрица махсус бўлиб, бунда

А — МАТРИЦА МАХСУС

кўринишдаги маълумот босмага чиқади ва программанинг бажарилиши тўхтайди.

Мисол:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топишни қараймиз. Матрицанинг детерминанти $detA=-2\neq0$. Шунинг учун тескари матрица мавжуд. Унинг элементларини келтирилган программа ёрдамида ҳисоблаш учун матрицанинг тартиби $n=3$ ва унинг элементларини кўрсатилган тартибда ЭҲМ хотирасига киритилади. Программанинг бажарилиши натижасида тескари матрица элементларининг қийматлари босмага чиқазилган.

9.5. ОДДИЙ ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Юқоридаги (9.2) чизиқли алгебраик тенгламалар тизими қандайдир усул билан $\bar{x}$ га нисбатан ечилиб

$$\bar{x} = c\bar{x} + \bar{d} \tag{9.5}$$

кўринишга келтириб ёзилади.

Ечимга бошланғич яқинлашиш $\bar{x}_0 = \bar{d}$ қилиб олинади ва кейинги яқинлашишлар

$$\bar{x}_s = C\bar{x}_{s-1} + \bar{d} \tag{9.6}$$

рекуррент формула билан ҳисобланади. Бу муносабатни аниқлаш итерация жараёнини қуриш деб аталади.

Итерация жараёни яқинлашувчи бўлиши учун C матрицанинг

$$||C||_m = \max_{1\le i\le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|,$$

$$||C||_l = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|,$$

$$||C||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2}$$

формулалардан бирортаси билан аниқланган $||C||$ нормаси учун

$$||C|| < 1 \tag{9.7}$$

шартнинг бажарилиши етарлидир.

Одатда (9.6) итерация жараёнини яқинлашадиган қилиб қуриш, яъни (9.7) шарт бажариладиган бўлиши учун тизимни (9.9) шаклидаги ёзувида А матрицани диагонали кучайтирилган ҳолга келтирилади. Бунинг учун тизим устида чизиқли алмаштиришлар бажариш йўли билан тизим матрицаси элементлари кучайтирилганлик

$$|a_{ii}| \ge |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{in}|$$

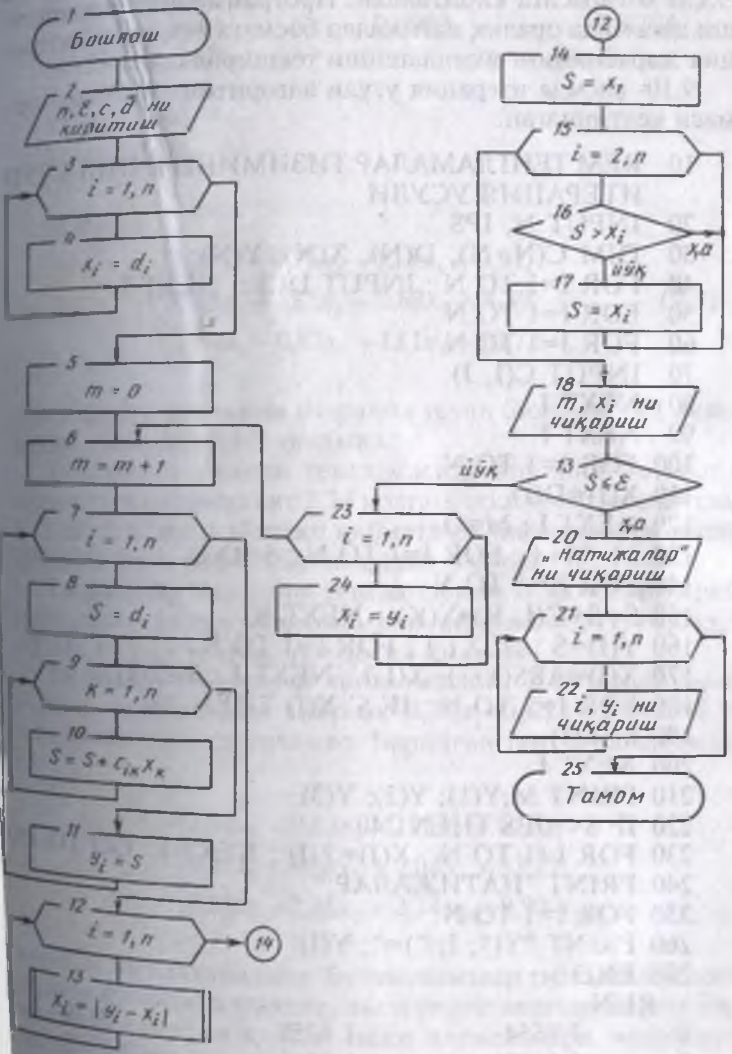
шартини бажарадиган ҳолга келтирилади. Сўнг тизимнинг ҳар бир i — тенгламаси x_i номаълумга нисбатан ечилса, ҳосил бўлган (9.5) кўринишдаги тизим ёзувидаги C матрица (9.7) шартни қаноатлантирадиган бўлади.

Итерация жараёнини тўхтатиш учун икки қўшни яқинлашишлар $\bar{x}_s$ ва $\bar{x}_{s-1}$ орасидаги фарқ талаб қилинган аниқликни қаноатлантириши текширилади, яъни

$$||\bar{x}_s - \bar{x}_{s-1}|| = \max_{1\le i\le n} |x_{is} - x_{is-1}| \le \varepsilon \tag{9.8}$$

шарт яқинлашиш мезони (критерийси) бўлади. Бу шарт бажарилса $\bar{x} = \bar{x}_s$ қилиб олинади.

Шундай қилиб, тенгламалар тизими ечимларини талаб қилинган ε аниқликда ҳисоблаш икки босқичдан иборат



9.10-расм.

бўлади. Биринчи босқичда тизим (9.5) ҳолга келтирилади ва (9.6) итерация жараёни қурилади. Бунда (9.7) шарт бажарилишини таъминлаш керак.

Иккинчи босқичда *C* матрица ва $\bar{d}$ вектор элементлари, *n* — номаълумлар сони, ε ечимни ҳисоблаш аниқлиги ЭҲМ хотирасига киритилади. Программанинг бажарилиши давомида оралиқ натижалар босмага чиқазилиб итерация жараёнининг яқинлашиши текширилади.

9.10- расмда итерация усули алгоритмининг блок-схемаси келтирилган.

```
10  REM ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШ УЧУН
    ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ
20  INPUT N, IPS
30  DIM C(N, N), D(N), X(N), Y(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT D(I) :  NEXT I
50  FOR I=1 TO N
60  FOR J=1 TO N
70  INPUT C(I, J)
80  NEXT J
90  NEXT I
100 FOR I=1 TO N
110 X(I)=D(I)
120 NEXT I : M=O
130 M=M+1 : FOR I=1 TO N : S=D(I)
140 FOR K=1 TO N
150 S=S+C(I, K)*X(K) : NEXT K
160 Y(I)=S : NEXT I : FOR I=1 TO N
170 X(I)=ABS(Y(1)−X(I)) : NEXT I : S=X(I)
180 FOR I=2 TO N : IF S>X(I) THEN 200
190 S=X(I)
200 NEXT I
210 PRINT M;Y(1); Y(2); Y(3)
220 IF S<=IPS THEN 240
230 FOR I=1 TO N : X(I)=Y(I) : NEXT I : GO TO 130
240 PRINT ”НАТИЖАЛАР:“
250 FOR I=1 TO N
260 PRINT ”Y(“; I; ”)=“; Y(I)
270 END
   RUN
1       1.8654        1.6758        1.7638
2       2.3696        1.5746        2.3832
```

3	2.6585	1.3833	2.7499
4	2.8116	1.1083	2.9353
5	2.8885	1.1003	3.0151
6	2.9263	1.0451	3.0384
7	2.9460	1.0136	3.0374
8	2.9577	1.0004	3.0294
9	2.9661	0.9963	3.0204

НАТИЖАЛАР:
У(1)=2.9661
У(2)=2.9963
У(3)=3.0284
OK

Мисол.

$$\begin{cases} 1{,}25x_1 + 0{,}76x_2 - 1{,}18x_3 = 0{,}91, \\ 0{,}65x_1 + 1{,}85x_2 + 0{,}63x_3 = 4{,}89, \\ 2{,}74x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}11x_3 = 10{,}72 \end{cases} \qquad (9.9)$$

тенгламалар тизимини итерация усули билан ε=0,01 аниқликда ечишни кўриб чиқамиз.

Тизимнинг учинчи тенгламасида биринчи номаълум олдидаги коэффициент 2.74 қолган икки коэффициентлар 1.11 ва −0.83 нинг абсолют қийматлари йиғиндисидан катта. Шунинг учун уни биринчи қилиб оламиз.

Тизимнинг иккинчи тенгламасини 5 га кўпайтириб, натижадан учинчи тенгламани айириб $0.51x_1+6{,}08x_2+2{,}04x_3=13{,}73$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Тизимнинг биринчи тенгламасини 2 га кўпайтириб учинчи тенгламадан айирсак $0{,}28x_1+0{,}68x_2+2{,}04x_3=8{,}90$ тенгламани ҳосил қиламиз. Берилган тенгламалар тизими

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}11x_3 = 10{,}72, \\ 0{,}51x_1 + 6{,}08x_2 + 2{,}04x_3 = 13{,}72, \\ 0{,}28x_1 - 2{,}35x_2 + 3{,}74x_3 = 8{,}90 \end{cases}$$

кўринишга келтирилади. Бу тенгламалар тизимининг матрицаси кучайтирилгандир, яъни унинг диагоналидаги элементлари модули қолган икки элементлари модуллари йиғиндисидан катта:

$$10x_1=7,26x_1+0,83x_2-1,11x_3+10,72$$
$$10x_2=-0,51x_1+3,92x_2-2,04x_3+13,73$$
$$10x_3=-0,28x_1+2,35x_2-6,53x_3+8,90$$

ёки

$$\begin{aligned} x_1&=1,072+0,726x_1+0,083x_2-0,111x_3;\\ x_2&=1,373-0,051x_1+0,392x_2-0,204x_3;\\ x_3&=0,890-0,028x_1+0,235x_2-0,653x_3 \end{aligned} \qquad (9.10)$$

Охирги тенгламалар тизимини (9.6) кўринишда ёзиш учун

$$C=\begin{bmatrix} 0,726 & 0,083 & -0,111 \\ -0,051 & 0,392 & -0,204 \\ -0,028 & 0,235 & 0,653 \end{bmatrix} \quad \bar{d}=\begin{bmatrix} 1,072 \\ 1,373 \\ 0,890 \end{bmatrix}$$

қилиб олиш керак. Ҳосил бўлган C матрицанинг m нормаси

$$\| C\|_m=\max\{0,920,\ 0,647,\ 0,916\}=0,920$$

бирдан кичик эканлигини кўрамиз.

(9.9) тенгламалар тизимини итерация усули билан ечиш мумкин эканлигини аниқладик.

Тизимни (9.10) кўринишда ёзилишидан фойдаланиб

$$\begin{aligned} x_{1s}&=1,072+0,726x_{1s-1}+0,083x_{2s-1}-0,111x_{3s-1};\\ x_{2s}&=1,373-0,051x_{1s-1}+0,392x_{2s-1}-0,204x_{3s-1};\\ x_{3s}&=0,890-0,028x_{1s-1}+0,235x_{2s-1}+0,653x_{3s-1} \end{aligned} \qquad (9.10)$$

итерация жараёнини ва $x_{10}=1,072$, $x_{20}=1,373$, $x_{30}=0,890$ бошланғич яқинлашишларни аниқлаймиз.

Бошланғич маълумотлар: n, ε, d_i ва c_{ij} ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$) қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади. Келтирилган программа матни охирида x_i ($i=\overline{1,n}$) қийматларига кетма-кет яқинлашишлар ва якуний натижа: $Y(1)=2,9661$, $Y(2)=0,9963$, $Y(3)=3,0204$ босмага чиққанлиги кўрсатилган. Булар ечимга икки қўшни яқинлашишлар орасидаги фарқ 0,01 дан катта бўлмаганда олинди. Ечимнинг аниқ қийматлари: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=3$ ва уларнинг тақрибий қийматлари орасидаги фарқ 0,04 дан катта эмас.

Булардан кўриниб турибдики, итерация жараёнини 10 қадамдан кейин тўхтатиш мумкин ва ечим сифатида $x_1=x_{10}=2,97$, $x_2=x_{2,10}=1,00$, $x_3=x_{3,10}=3,01$ лар олинади.

9.6. ЗЕЙДЕЛЬ УСУЛИ

Чизиқли тенгламалар тизими оддий итерация усули билан ечилганда ечимга навбатдаги яқинлашиш фақат ундан аввалги яқинлашишгагина асосланиб ҳисобланади. Зейдель усулида эса шу қадам натижаларидан ҳам фойдаланилади. Тизим (9.5) кўринишга келтирилади, $\bar{x}^{(0)}$ танлаб олинади ва у аниқлаштирилади. Агар ечимга $k-1$ — яқинлашиш маълум бўлса, k — яқинлашиш қуйидаги формулалар билан ҳисобланади.

$$x_1^{(K)} = d_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j^{(K-1)},$$

$$x_2^{(K)} = d_2 + c_{21} x_2^{(K)} + \sum_{j=2}^{n} c_{2j} x_j^{(K-1)},$$

$$\ldots \quad . \quad \ldots \quad . \quad \ldots$$

$$x_i^{(K)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(K-1)},$$

$$\ldots \quad . \quad \ldots \quad . \quad \ldots$$

$$x_n^{(K)} = d_n \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{K} + c_{nn} x_n^{(K-1)}$$

Итерация жараёни (9.8) шарт бажарилгунча давом эттирилади.

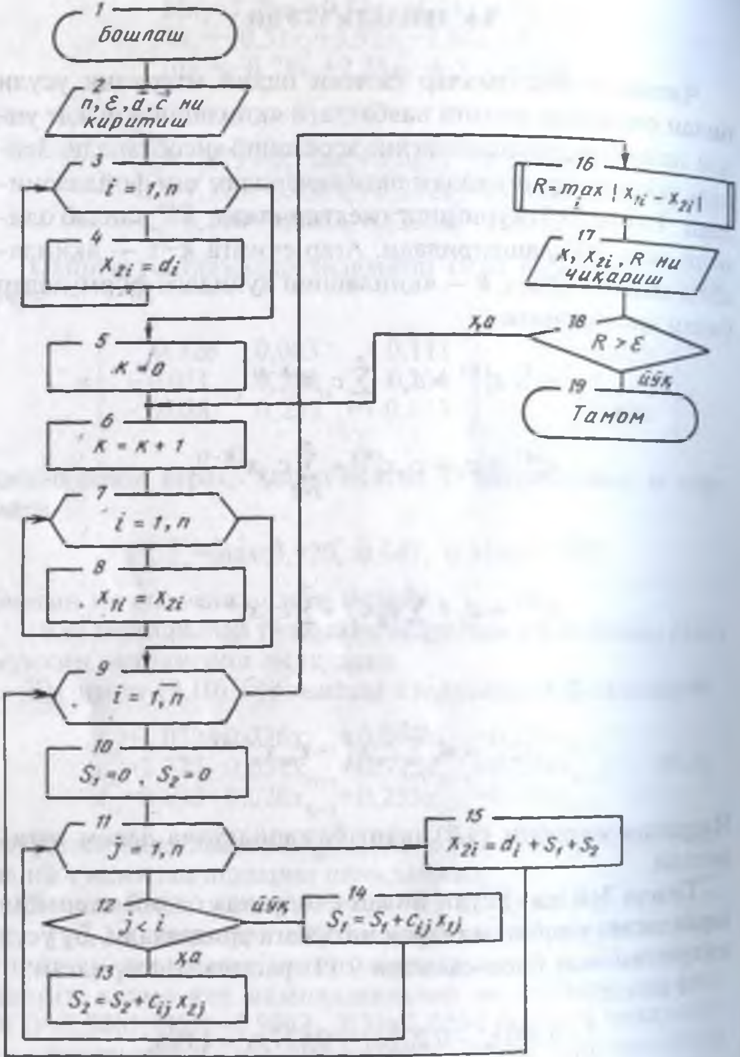
Тизим Зейдель усули билан ечилганда оддий итерация усулидагига нисбатан тезроқ натижага эришилади. Бу усул алгоритмининг блок-схемаси 9.11- расмда келтирилган.

Мисол.

$$\begin{cases} -0{,}301x_1 - 0{,}207x_2 + 0{,}627x_3 = 1{,}165, \\ 0{,}729x_1 - 0{,}417x_2 + 0{,}203x_3 = 0{,}504, \\ 0{,}085x_1 - 0{,}555x_2 + 0{,}401x_3 = 0{,}178 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини Зейдель усули билан ечишни кўриб чиқамиз.

Тизим тенгламаларининг тартибини ўзгартириб,



9.11-расм.

$$\begin{cases} 0{,}729x_1 - 0{,}417x_2 + 0{,}203x_3 = 0{,}504, \\ 0{,}085x_1 - 0{,}555x_2 + 0{,}401x_3 = 0{,}178, \\ -0{,}301x_1 - 0{,}207x_2 + 0{,}627x_3 = 1{,}165 \end{cases}$$

кўринишга келтириб ёзиб оламиз. Буни (9,6) кўринишга келтирамиз. Бунинг учун 1- тенгламанинг ҳар икки томонига x_1, 2- сига x_2 ва 3- сига x_3 ни қўшамиз. Унда тенгламалар тизимини

$$\begin{cases} x_1 = 0,504 + 0,271x_1 + 0,417x_2 - 0,203x_3, \\ x_2 = 0,178 + 0,085x_1 + 0,445x_2 + 0,401x_3, \\ x_3 = 1,165 + 0,301x_1 + 0,207x_2 + 0,373x_3 \end{cases}$$

кўринишга келтириб ёзиш мумкин бўлади. Бундан $\bar{d} = (0,504,\ -0,178,\ 1,165)$,

$$C = \begin{bmatrix} 0,271 & 0,417 & -0,203 \\ 0,085 & 0,445 & 0,401 \\ 0,301 & 0,207 & 0,373 \end{bmatrix}$$

эканлигини аниқлаймиз. C матрицанинг m нормаси (9,7) шартни қаноатлантиради. Демак, охирги тизимга Зейдель усулини қўллаш мумкин.

Бошланғич маълумотлар: n=3, ε=0,01, d_i, c_{ij}($i = \overline{1,\ 3}$; $j = \overline{1,\ 3}$) қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиб, s=17 итерациядан кейин x_1=0,9856, x_2=1,9725, x_3=2,9791 ечимлар олинганлиги қуйидаги программа матни охирида келтирилган.

Программа матни ва унинг келтирилган мисол учун бажарилиши:

```
10  REM ЗЕЙДЕЛЬ УСУЛИ
20  INPUT N, EPS
30  DIM C(N, N), D(N), X1(N), X2(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT D(I) :  NEXT I
50  FOR I=1 TO N : FOR J=1 TO N : INPUT C(I, J) :
    NEXT J, I
60  PRINT "K"; SPC(5), "X1"; SPC(8), "X2", SPC(8),
    "X3", SPC(6), "ФАРК"
70  FOR I=1 TO N :  X2(I)=D(I) : NEXT I : K=O
80  K=K+1 : FOR I=1 TO N J
90  X1(I)=X2(I) : NEXT I : FOR I=1 TO N : S1=0 :
    52=0
```

```
100 FOR J=1 TO N
110 IF J<I THEN 130
120 S1=S1+C(I, J)*X1(J) : GO TO 140
130 S2=S2+C(I, J)*X2(I)
140 NEXT J
150 X2(I)=D(I)+S1+S2 : NEXT I
160 R=ABS(X1(1)-X2(1)) : FOR I=2 TO N : R1=ABS(X1(I)-X2(I))
170 IF R>=R1 THEN 190
180 R=R1
190 NEXT I
200 PRINT K; SPC(2); X2(1); SPC(2); X2(2); SPC(2); X2(3); SPC(2); R
210 IF R>EPS THEN 80
220 END
    RUN
```

K	X1	X2	X3	ФАРК
1	0.3298	0.2379	1.7481	0.5831
2	0.3377	0.6576	2.0548	0.4196
3	0.4526	0.9770	2.2700	0.3194
4	0.5733	0.2158	2.4359	0.2387
5	0.6718	1.3970	2.5650	0.1811
6	0.7479	1.5358	2.6648	0.1388
7	0.8061	1.6425	2.7416	0.1067
8	0.8508	1.7246	2.8007	0.0821
9	0.8852	1.7878	2.8462	0.0631
10	0.9116	1.8364	2.8812	0.0485
11	0.9319	1.8738	2.9081	0.0373
12	0.9475	1.9025	2.9287	0.0287
13	0.9596	1.9246	2.9447	0.0221
14	0.9698	1.9416	2.9569	0.0170
15	0.9759	1.9547	2.9663	0.0130
16	0.9814	1.9647	2.9735	0.0100
17	0.9856	1.9725	2.9791	0.0077

OK

Программанинг бажарилиши давомида ечимга яқинлашиш қандай кетаётганлигини таҳлил қилиш мақсадида ҳар қадамда x_1, x_2, x_3 қийматлари ва икки қўшни яқинлашишлар орасидаги максимум фарқ босмага чиқазилган. Унинг 60- ва 200- сатрларидаги PRINT оператори рўйхати 3 номаълумли тенгламалар тизимини ечиш натижаларини чиқаришга мослаштирилган. Мақсад, натижаларни тушунар-

лироқ чиқаришдир. Учдан кам ва кўп номаълумли тизимлар ечилганда мана шу сатрлар ўзгартирилиши керак.

Машқлар

1. Берилган тенгламалар тизимини Гаусс-Жордан, оддий итерация ва Зейдель усуллари билан ечинг. Бунда ҳисоблаш аниқлигини $\varepsilon=0{,}01$ ва $\varepsilon=0{,}001$ қилиб олинг. Натижаларни солиштириб таҳлил қилинг.

$$1.\ \begin{cases} 7.13x_1 + 2.05x_2 + 1{,}47x_3 = 6{,}55, \\ 3.25x_1 + 1.54x_2 + 7.49x_3 = 9{,}20, \\ 3.93x_1 - 10{,}20x_2 + 5{,}43x_3 = 19.56. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 1.41x_1 + 2.42x_2 + 4{,}51x_3 = 9{,}42, \\ 1{,}25x_1 + 5.04x_2 - 0{,}59x_3 = 4{,}36, \\ 7{,}01x_1 + 5{,}03x_2 \pm 1{,}02x_3 = 11{,}03. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} 2{,}12x_1 - 9{,}13x_2 + 3{,}73x_3 = -8{,}68, \\ -4{,}05x_1 + 1{,}05x_2 + 9{,}05x_3 = 8{,}10, \\ 7{,}28x_1 + 2{,}52x_2 - 3{,}41x_3 = 5{,}50. \end{cases}$$

2. Қуйидаги детерминантларни Гаусс-Жордан усули программасидан фойдаланиб, ЭҲМда ҳисобланг.

$$1.\ \begin{vmatrix} 0{,}52 & 1{,}83 & 1{,}21 \\ 0.63 & -0{,}42 & 2{,}71 \\ 2{,}53 & 0{,}52 & 0.44 \end{vmatrix} \qquad 2.\ \begin{vmatrix} 2{,}51 & 0{,}36 & 3{,}12 \\ 0{,}16 & 2{,}42 & 0{,}57 \\ 0{,}63 & -0{,}23 & -{,}0\ 08 \end{vmatrix}$$

3. Қуйидаги матрицаларга тескари матрицани Гаусс-Жордан усулидан фойдаланиб, аниқланг ва $A \cdot A^{-1}$ кўпайтмани бирлик матрица эканлигини текшириб кўринг.

$$1.\ \begin{bmatrix} 2{,}47 & 1{,}17 & 5{,}54 \\ 3{,}86 & 1{,}73 & 0{,}58 \\ 1{,}24 & 4.18 & 1{,}57 \end{bmatrix} \qquad 2.\ \begin{vmatrix} 3{,}45 & 6{,}78 & -0.43 \\ 6.56 & 8{,}43 & 3{,}53 \\ 1{,}25 & -5.46 & 4{,}36 \end{vmatrix}$$

X. ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ ВА ҚОНУНИЯТЛАРНИ ОЧИШ

Интерполяциялаш тажриба ёки кузатиш натижаларини умумлаштириш, қийин ҳисобланадиган функцияларнинг қийматларини ҳисоблашда ишлатилади.

Тажрибалар ўтказиш ёки кузатиш натижасида:

x_i	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

статистик маълумотлар олинган бўлса, x ва y ўзгарувчилар орасида боғланиш борми, бор бўлса қандай қонуният билан боғланган деган саволларга жавоб изланади. Умуман олганда, қонуниятни жадвалда берилганларга асосланиб бир қийматли аниқлаш мумкин эмас. (Бу масала коррект эмас). Шунинг учун $y=y(x)$ функция ўрнига унга маълум маънода яқин бўлган $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ тақрибий муносабат ўрнатилади. Кейин бу муносабат x ўзгарувчининг жадвалда берилмаган қийматларида $y=y(x)$ функция қийматларини ҳисоблашда ишлатилади. Қурилган қонуният қандай мақсадда ишлатилишига қараб интерполяцион ёки экстраполяцион деб аталади. Агар $x \in [x_{min}, x_{max}]$ учун $y(x)$ ни ҳисоблашга ишлатилса, интерполяциялаш, акс ҳолда экстраполяциялаш деб айтилади. Бу ерда $x_{min}=min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ва $x_{max}=max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Одатда яқинлик мезони сифатида:

1. Қурилаётган функциянинг $x=x_i$ даги қийматлари $\tilde{y}(x_i)$ функциянинг жадвалдаги мос қийматларига тенг бўлиши, яъни

$$\tilde{y}(x_i) = y_i \qquad (10.1)$$

шартни бажарилиши талаб қилинади.

2. Функциянинг қийматлари уни жадвалдаги мос қийматларига тенг бўлмасада, уларнинг фарқлари квадрат-

ларининг йиғиндиси энг кичик бўлиши талаб қилинади, яъни

$$\sum_{i=0}^{n} (y(x_i) - y_i)^2 \to \min \qquad (10.2)$$

Бунда мусбат ва манфий фарқлар ўзаро йўқолиб кетмаслиги учун уларнинг квадратлари олинган.

3. Ўзгарувчи x нинг $(x_1, x_2, ..., x_n)$ қийматлари ўсиш тартибида тартибланади ва $y=y(x)$ функция ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада узлуксиз ва бир неча тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функциялар билан алмаштирилади.

Кўпинча интерполяциялаш функцияси сифатида

$$P_m(x)=a_0+ a_x + ... + a_m x^m$$

кўпҳад олинади. Кўпҳалнинг коэффициентларини аниқлаш учун $m+1$ та тенглама тузиш керак. Табиийки $P_m(x)$ кўпҳаднинг қийматлари жадвалдаги c_i, ($x_i (i = \overline{0, n})$ нуқталарда y_i га тенг бўлишини талаб қилиш ўринлидир, яъни (10.1) мезон олинади. Натижада $a_0, a_1, ..., a_m$ ларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар тизими ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^m = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^m = y_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^m = y_n \end{cases} \qquad (10.3)$$

Тизимни бирор усул билан аниқ ёки тақрибий ечиб, қийматлари $x= x_i$ нуқталарда $y=y(x)$ функция қийматлари билан устма-уст тушадиган $y=P_n(x)$ кўпҳад ҳосил қилинади. Шу маънода даражали кўпҳадлар ичидан изланаётган қонуниятни энг яхши очадиган қонуният топилган бўлади. Аммо (10.3) кўринишдаги тизимни ечиш анча мураккаб бўлганлиги учун (n катта бўлса, тизим ҳам катта бўлиб кетади) $P_m(x)$ кўпҳадни махсус тузилишда танлаб олинади. Бунда $P_m(x_i)=y_i$ бўлиши ва a_i қийматлари осон ҳисобланиши керак. Бундай махсус тузилган кўпҳадларга Лагранж ва

Ньютон интерполяцион кўпҳадларини мисол қилиш мумкин.

10.1. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Лагранж формуласи (интерполяцион кўпҳади)

$$L_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots+ \qquad (10.4)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

кўринишда ёзилади.

Лагранж формуласи ёрдамида қонуниятни қуриш ва функциянинг қийматларини (сонли тажриба ўтказиш) ҳисоблаш алгоритмини тузиш учун (10.4) формулани

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x-x_j)y_i\,/\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}(x-x_j)\Big)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан кўриниб турибдики, $x=x^*$ қийматда y^* функция қийматини ҳисоблаш учун $n+1$ та йиғиндида $2n$ та кўпайтмани ҳисоблашни ташкил қилиш керак бўлар экан.

Ҳисоблаш хатолиги

$$R_n(x)=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,\,b]}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|$$

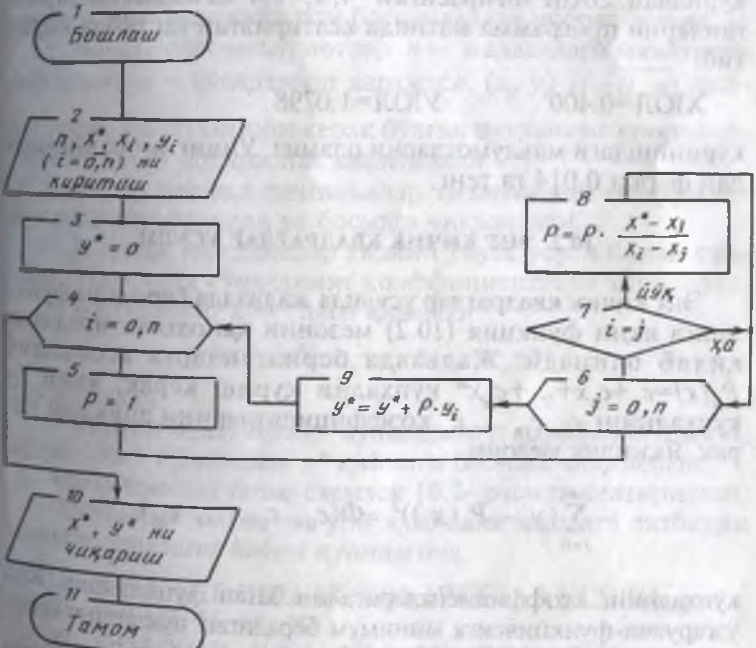
формула билан аниқланади. Бу ерда

$$M_{n+1}=\max_{x\in[a,\,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Жалвалда берилган (x_i, y_i) жуфтликлар ва уларнинг сони n ҳамда x^* ўзгарувчининг қийматлари бошланғич маълумотларни ташкил қилади. Алгоритмнинг блок-схемаси 10.1-расмда берилган.

Программа матни.

```
10  REM ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУ-
    ЛАСИ
20  INPUT N, J(X1)
30  DIM X(N), Y(N)
40  FOR I=1 TO N : INPUT X(I), Y(I) :  NEXT I
50  Y1=0
60  FOR I=1 TO N : P1=1 : FOR J=1 TO N
70  IF I=J THEN 90
80  P1=P1*(X1−X(J)) / (X(J)−X(J))
90  NEXT J : Y1=Y1+P1*Y(I) : NEXT I
100 PRINT "ХЮЛ=“; X1, SPC(3); "УЮЛ=“; Y1
110 END
    RUN
    ХЮЛ=0.400          УЮЛ=1.0798
OK
```



10.1-расм.

М и с о л . 10.1- жадвалда берилганларга асосланиб Лагранж интерполяцион кўпҳадини қуриш ва $x^*=0,4$ бўлганда функция қийматини ҳисоблашни ЭҲМда бажаринг. Функциянинг бу нуқтадаги аниқ қиймати 1,0935 га тенг, яъни $y(0,4)=y^+=1,0936$.

10.1- жадвал

Мисол тарзида берилганлари

x_i	0,212	0,315	0,421	0,532	0,679
y_i	1,0222	1,0484	1,0880	1,1327	1,2087

Қаралаётган мисолда берилганлар сони бешта, демак, $n=4$ қилиб олиш керак, яъни тўртинчи тартибли кўпҳад қурилади. ЭҲМ хотирасига $n=4$, $x_1=0,4$ ва жадвалда берилганларни программа матнида келтирилган тартибда киритиб:

ХЮЛ=0.400 УЮЛ=1.0798

кўринишдаги маълумотларни оламиз. Унинг аниқ қийматдан фарқи 0,014 га тенг.

10.2. ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР УСУЛИ

Энг кичик квадратлар усулида жадвалда берилган функцияга яқин функция (10.2) мезонни қаноатлантирадиган қилиб олинади. Жадвалда берилганларга асосланиб $P_m(x)=c_0+c_1x+...+c_mx^m$ кўпҳадни қуриш керак, яъни бу кўпҳаднинг c_0, c_1, ..., c_m коэффициентларини аниқлаш керак. Яқинлик мезони

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - P_m(x_i))^2 = \Phi(c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_m)$$

кўпҳаднинг коэффициентларига нисбатан функциядир. Кўп ўзгарувчи-функциясига минимум берадиган нуқтанинг координаталари $\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0 \ \ (i = \overline{0,\ m})$ тизимнинг ёки очиб ёзилганда

$$
\begin{cases}
(n+1)c_0 + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i + \ldots + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\
c_0\sum_{i=0}^{n} x_i + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \ldots + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
c_0\sum_{i=0}^{n} x_i^m + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m
\end{cases}
\qquad (10.5)
$$

нормал тенгламалар тизимининг ечимлари бўлади. Тизимни Гаусс-Жордан усули билан ечиб $P_m(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, энг кичик квадратлар усули билан энг яхши яқинлашувчи кўпҳадни қуриш ва унинг $x=x^*$ даги қийматини ҳисоблаш қуйидаги босқичлардан иборат бўлади.

1. Бошланғич маълумотлар: n — жадвалдаги маълумотлар сони; m — кўпҳаднинг даражаси, (x_i, y_i) $(i = \overline{0, n})$ қийматлари, ҳисобланиши керак бўлган нуқтанинг координатаси x^* ЭҲМ хотирасига киритилади.

2. (10.5) нормал тенгламалар тизимининг коэффициентлари ҳисобланади ва босмага чиқазилади.

3. Нормал тенгламалар тизими Гаусс усули билан ечилади. Натижада кўпҳаднинг коэффициентлари топилади.

4. Кўпҳаднинг $x=x^*$ даги қиймати

$$y^*=P_m(x^*)=c_0+c_1x^*+\ldots+c_mx^{*m}$$

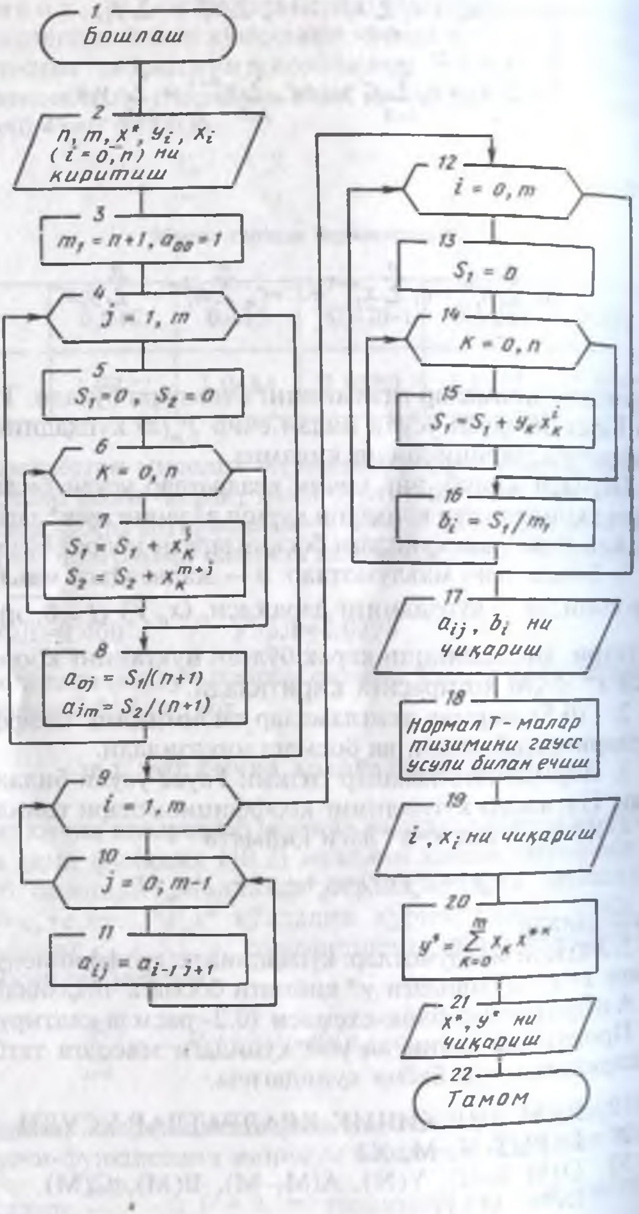
ҳисобланади.

5. Якуний маълумотлар: кўпҳаднинг c_i коэффициентлари, унинг $x=x^*$ бўлгандаги y^* қиймати босмага чиқазилади.

Алгоритмнинг блок-схемаси 10.2- расмда келтирилган.

Программа матни ва уни қуйидаги мисолга татбиқан бажарилишининг баёни қуйидагича.

```
10  REM ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР УСУЛИ
20  INPUT N, M, X1
30  DIM X(N), Y(N), A(M, M), B(M), C(M),
    D(M, M+1)
```


1
Бошлаш
2
n, m, x*, y_i, x_i
(i = 0, n) ни
киритиш
3
$m_1 = n+1$, $a_{00} = 1$
4
j = 1, m
5
$S_1 = 0$, $S_2 = 0$
6
K = 0, n
7
$S_1 = S_1 + x_K^j$
$S_2 = S_2 + x_K^{m+j}$
8
$a_{0j} = S_1/(n+1)$
$a_{jm} = S_2/(n+1)$
9
i = 1, m
10
j = 0, m-1
11
$a_{ij} = a_{i-1\,j+1}$
12
i = 0, m
13
$S_1 = 0$
14
K = 0, n
15
$S_1 = S_1 + y_K x_K^i$
16
$b_i = S_1/m_1$
17
a_{ij}, b_i ни
чиқариш
18
Нормал Т-малар
тизимини гаусс
усули билан ечиш
19
i, x_i ни чиқариш
20
$y^* = \sum_{K=0}^{m} x_K x^{*K}$
21
x*, y* ни
чиқариш
22
Тамом

10.2-расм.

```
40  FOR I=1 TO N : INPUT X(I), Y(I) : NEXT I
50  M1=M+1 : A(0, 0)=1
60  FOR J=1 TO M : S1=0 : S2=0
70  FOR K=1 TO N : S1=S1+X(K)^ J
80  S2=S2+X(K) ^ (M+J) : NEXT K : A(0, J)=S1/(N+1)
90  A(J, M)=S2/(N+1) : NEXT J
100 FOR I=1 TO M : FOR J=0 TO M — 1
110 A(I, J)=A(I—1, J+1) : NEXT J, I
120 FOR J=0 TOM : S1=0 : FOR K=0 TO N
130 S1=S1+Y(K)*X(K) ^ J : NEXT K
140 B(J)=S1/(N+1) : NEXT J
150 PRINT ”НОРМАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ-
    НИНГ КОЭФ-ТИ“
160 FOR I=0 TO M : FOR J=0 TO M
170 PRINT ”A(“ ; I; ”,“; J; ”)=“; A(I, J) : NEXT J
180 PRINT ”B(“; I; ”)=“; B(I) : NEXT I
190 FOR I=0 TO M
200 FOR J=0 TO M
210 D(I, J)=A(I, J) : NEXT J
220 D(I, M1)=B(I) : NEXT I : FOR K=O TO M−1
230 P=D(K, K) : FOR J=K TO M1
240 D(K,J)=D(K,J)/P : NEXT J
250 FOR I=K+1 TO M : FOR J=K+1 TO M1
260 D(I,J)=D(I, J)−D(K, J)*D(I, K) : NEXT J, I, K
270 X(M)=D(M, M1) / D(M, M) : K=M
280 K=K−1 : S=0 : FOR J=K+1 TOM : S=S+D(K,
    J)*X(J) : NEXT J
290 X(K)=D(K, M1)−S : IF K>0 THEN 280 : FOR I=0
    TO M
300 PRINT ”C“; I; ”)=“; X(I) : NEXT I : Y1=X(0)
310 FOR I=1 TO M : Y1=Y1+X(I)*X1 I : NEXT I
320 PRINT ”ХЮЛ=“; X1, ”УЮЛ=“; Y1 : END
```

НОРМАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ

A(0,0)=1.0000 B(0)=1.1000	A(0,1)=0.4318	A(0,1)=0,2131
A(1,0)=0.4318 B(1)=0.4856	A(1,1)=0.2131	A(1,2)=0,1158
A(2,0)=0.2131 B(2)=0.2441	A(2,1)=0.1158	A(2,2)=0,0671

ЯКУНИЙ НАТИЖАЛАР:

С(0)=0,9866 С(1)=0.0913 С(2)=0.3466
ХЮЛ=0.4000 УЮЛ=1.0787
OK

Программада нормал тенгламалар тизими m нинг қийматига мос ҳолда ЭҲМда автоматик равишда ҳосил қилинади.

Мисол. 10.1-жадвалдаги маълумотларга асосланиб $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ квадратик учҳад коэффициентларини ва унинг $x^*=0,4$ бўлгандаги қийматини ҳисоблаймиз.

Юқорида келтирилган программа ёрдамида ҳисоблашларни бажариш учун $n=4$, $m=2$, $x1=0,4$, (x_i, y_i) жуфтликлар қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиб: нормал тенгламалар тизими коэффициентлари $a_{ij}(i=\overline{0,2};\ j=\overline{0,2})$, b_0, b_1, b_2 озод ҳадларини, c_0, c_1, c_2 кўпҳаднинг коэффициентларини ҳамда

ХЮЛ=0.4000 УЮЛ=1.0737

якуний натижаларни босмага чиқазилганлигини кўрамиз. Демак, 10.1-жадвалдаги қонуниятга квадрат учҳадлар ичидан энг яхши яқинлашадигани $P_2(x)=0.9866+0,0913x+$ $+0,3466x^2$ бўлар экан.

Эслатмалар. 1. Программани ҳар хил даражали кўпҳадларни қуриш учун ишлатиш мумкин. Масалан, 10.1-жадвалда берилган қонуниятга (10.2) мезон бўйича энг яхши яқинлашувчи биринчи $P_1(x)$, учинчи $P_3(x)$ ва тўртинчи $P_4(x)$ даражали кўпҳадларни қуриш ва уларнинг $x^*=0,4$ бўлгандаги қийматларини ҳисоблаш учун ишлатсак, $P_1(x)=0,9639+0,3150x$, $P_1(x^*)=1,0900$; $P_3(x^*)=P_3(x)=$ $=0,1981+0,3109x^2+0,5320x^3$, $P_3(x^*)=0,8867$; $P_4(x)=0,2517+$ $+0,4221x+0,4908x^2+0,5066x^3+7,4825x^4$, $P_4(x^*)=0,7230$ натижаларни оламиз.

Буларни $y^*=1,0936$ билан солиштирсак, бу қийматга энг яхши яқинлашувчи кўпҳад $P_1(x)$ эканлигини кўрамиз. Кўпҳаднинг даражаси ошиши билан берилган нуқтадаги функция қийматлари узоқлашиб бормоқда. (Бу фақат берилган нуқтадаги қиймат эканлигини унутмаслик керак. Ҳамма нуқталарда бундай бўлмаслиги мумкин.)

2. Энг кичик квадратлар усули билан аниқланган $P_m(x)$ кўпҳад m- даражали кўпҳад учун қўлланилса, шу функцияни аниқлашга олиб келади, яъни агар $y(x)$ функция m- дара-

жали кўпҳад бўлса, $y(x)=P_m(x)$ бўлади. Масалан, $y=x^2$ функциянинг 5 та нуқтадаги қийматларидан тузилган

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5

жадвалдаги маълумотларга асосланиб, юқоридаги программа ёрдамида қуйидаги натижалар олинди:

1. $m=1$, $P_1(x)=-0{,}7+6\cdot x$,
2. $m=2$, $P_2(x)=0+0\cdot x+10\cdot x^2=10\cdot x^2$
3. $m=3$, $P_3(x)=0+0\cdot x+10\cdot x^2+0\cdot x^3=10\cdot x^2$.

3. Программани бошланғич маълумотларни олишда йўл қўйилган хато ёки хатоларнинг охирги натижага қандай таъсир қилишини ўрганиш учун ҳам ишлатиш мумкин. Бунинг учун жадвалдаги y_i нинг қийматларидан бирортаси қандайдир ε хатолик билан ЭҲМга киритилиши ва натижани хато бўлмагандаги натижа билан солиштириш етарлидир.

10.3. КУБИК СПЛАЙНЛАР

Фараз қилайлик, $x\in[a, b]$ кесмада $y=y(x)$ функцияга яқин бўлган функцияни қуриш талаб қилинган бўлсин. Қаралаётган $[a, b]$ кесмани n та тенг бўлакка $x_i=a+ih$ нуқталар билан бўламиз. Бунда $h=(b-a)/n$ бўлиш қадами. Ҳосил бўлган $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, n-1}$ бўлаклар узунлиги $b-a$ га тенг.

Таъриф. *Ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ кесмада алгебраик кўпҳад бўлган ва $[a, b]$ кесмада маълум тартибгача ҳосилага эга бўлган узлуксиз функцияга сплайн дейилади.*

Берилган функцияга яқинлашувчи сплайнларни қуришга сплайнлар ёрдамида интерполяциялаш дейилади. Бунда кесмалардаги кўпҳадларнинг даражалари бир хил бўлиши шарт эмас. Интерполяция учун ишлатилган кўпҳадларнинг энг юқори даражаси сплайннинг даражаси, ундан олинган энг юқори тартибли узлуксиз ҳосиласининг тартибини айирилганига сплайннинг дефекти (нуқсони) дейилади. Агар сплайн q даражали, узлуксиз ҳосилалари m тартибли бўлса, унинг нуқсони $d=q-m$ бўлади.

Техника, иқтисодий ва бошқа масалаларда кубик сплайн кўп ишлатилади. Кубик сплайнлар ҳар бир кесмада

$$s_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2[2(x-x_i)+h]}{h^3}y_i + \frac{(x-x_i)^2[2(x_{i+1}-x)+h]}{h^3}y_{i+1} +$$

$$+\frac{(x_{i+1}-x_i)^2(x-x_i)}{h^2}m_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2}m_{i+1} \qquad (10.6)$$

формула билан аниқланади. Бунда m_i, m_{i+1} сонлари сплайннинг $x=x_i$ нуқтадаги оғиши дейилади.

Агар (10.6) формулада $s_3(x)$ ва $s_3'(x)$ ларнинг $x=x_{i+1}$ ва x_i нуқталардаги қийматларини ҳисобласак

$$s_3(x_i)=y_i, \qquad s_3(x_{i+1})=y_{i+1},$$
$$s_3'(x_i)=m_i \qquad s_3'(x_{i+1})=m_{i+1} \qquad (10.6)$$

эканлигини кўрамиз.

Одатда кубик сплайнларни $x=x_i$ нуқталарда иккинчи тартибли ҳосилаларининг узлуксизлиги, яъни $s_3''(x_{i+0})=s_3''(x_{i-0})$ бўлиш талаб қилинади. Бу шартлар асосида m_i оғмаларни топиш

$$\begin{cases} m_{i+1}+4m_i+m_{i-1}=\frac{3}{h}(y_{i+1}-y_{i-1}), \quad i=\overline{1,\ n-1} \\ m_0=\frac{1}{6h}(-11y_0+18y_1-9y_2+2y_4), \\ m_n=\frac{1}{6h}(11y_n-18y_{n-1}+9y_{n-2}-2y_{n-3}) \end{cases} \qquad (10.7)$$

тенгламалар тизимини ечишга олиб келади. Бу тизим матрицаси уч диагоналлидир. Шунинг учун уни чап ёки ўнг тарқатиш усули билан ечилади. Тизимни ечиб m_i оғмаларни ва демак, $s_3(x)$ сплайнларни аниқлаймиз. Сплайн даражаси $q=3$, биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари узлуксиз бўлганлиги учун $m=2$, сплайн нуқсони $d=1$ бўлади.

Кубик сплайннинг $y(x)$ функцияни аппроксимациялаш хатолиги $o(h^4)$ тартибда бўлади.

Шундай қилиб, $y(x)$ функцияга $[a, b]$ кесмада яқинлашувчи кубик сплайнларни қуриш ва $x=x^*$ нуқтадаги қийматини ЭҲМда ҳисоблаш қуйидаги босқичларда бажарилади.

1. $a, b, n, y_i (i=\overline{0,\ n})$, x^* ўзгарувчиларнинг қийматлари ЭҲМ хотирасига киритилади.

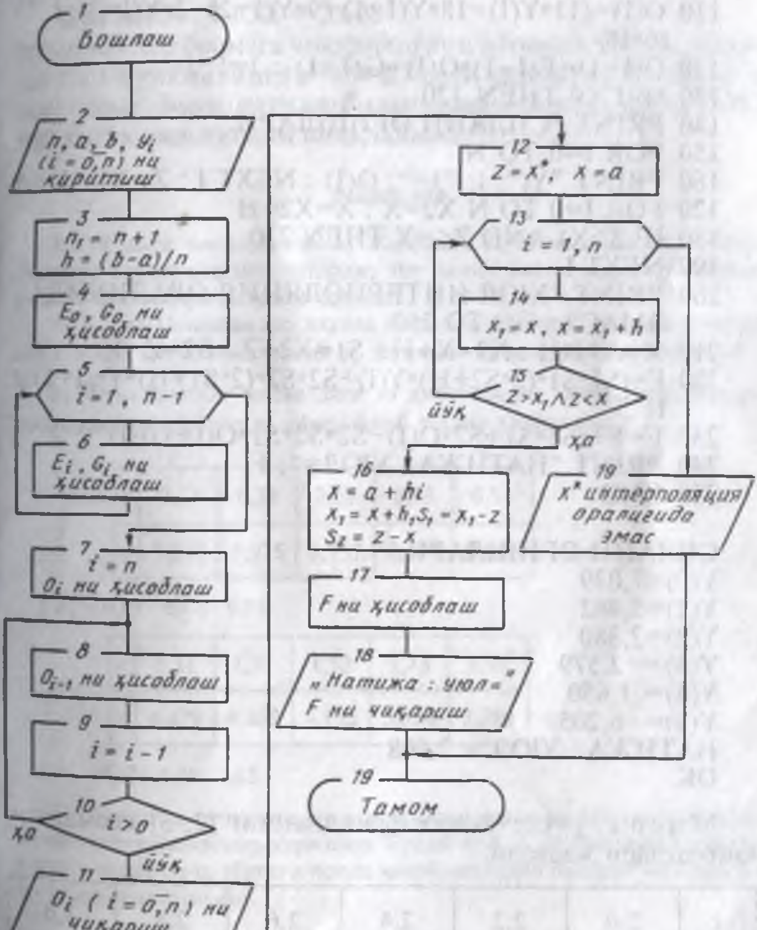
2. Чап тарқатиш усули билан (10.7) тенгламалар тизими ечилади. Натижада сплайн оғмалари аниқланади.

3. Сплайннинг $x=x^*$ бўлгандаги қиймати ҳисобланади.

4. Натижалар: Сплайн оғмалари m_i ва $s_3(x^*)$ қийматларини босмага чиқарилади.

Алгоритмнинг блок-схемаси 10.3- расмда келтирилган. Программа матни.

```
10  REM КУБИК СПЛАЙНЛАР
20  INPUT N, A, B, X1
30  DIM Y(N), E(N), G(N), O(N)
```



10.3-расм.

```
40  FOR I=0 TO N : INPUT Y(I) : NEXT I
50  N1=N+1 : H=(B−A) / N
60  E(0)=0 : G(0)=−11*Y(0)+18*Y(1)−9*Y(2)+2*Y(3)
70  G(0)=G(0) / (G*H)
80  FOR I=1 TO N−1 : E(I)=−1/(4+E(I−1))
90  G(I)=(3*(Y(I+1)−Y(I−1)) / H−G(I−1)) / (4+E(I−
    1)) : NEXT I
100 I=N
110 O(I)=(11*Y(I)−18*Y(I−1)+9*Y(I−2)−2*Y(I−3))/
    (6*H)
120 O(I−1)=E(I−1)*O(I)+G(I−1) : I=I−1
130 IF I > 0 THEN 120
140 PRINT "СПЛАЙН ОҒИШЛАРИ:"
150 FOR I=0 TO N
160 PRINT "Y("; I; ")="; O(I) : NEXT I : Z=X1 : X=A
170 FOR I=0 TO N X2=X : X=X2+H
180 IF Z>X1 AND Z<=X THEN 210
190 NEXT I
200 PRINT "ХЮЛ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОРАЛИҒИДА
    ЭМАС" : GO TO 250
210 X=A+I*H : X2=X+H : S1=X2−Z : S2=Z−X
220 F=(S1*S1*(2*S2+H)*Y(I)+S2*S2*(2*S1+H)*Y*(I+1))/
    H^3
230 F=F+(S1*S1+S2*O(I)−S2*S2*S1*O(I+1))/H ^ 2
240 PRINT "НАТИЖА : УЮЛ="; F
250 END

СПЛАЙН ОҒИШЛАРИ:
Y(0)=7,039
Y(1)=5,462
Y(2)=2,380
Y(3)=−2,579
Y(4)=_1,650
Y(5)=−6,205
НАТИЖА : УЮЛ = 2.608
OK
```

Мисол. $y=\ln x+2\sin \pi x$ функциянинг [2, 3] кесмадаги қийматлари жадвали:

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y_i	0,6931	1,9641	2,7776	2,8576	0,2052	1,0986

берилган. Бунга асосланиб функцияга кубик сплайнлар ёрдамида яқинлашишни аниқлаймиз ва унинг $x^*=2{,}7$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз.

Мисолда $a=2$, $b=3$, [2, 3] кесма $n=5$ та бўлакка бўлинган. Буларни ва y_i қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиб

СПЛАЙН ОҒИШЛАРИ: $y_0=7{,}039$, $y_1=5{,}462$, $y_2=2{,}388$, $y_3=-1{,}579$, $y_4=-4{,}650$, $y_5=-6{,}205$.

НАТИЖА : УЮЛ = 2.608

маълумотлар босмага чиққанлигини кўрамиз. Демак, қаралаётган функциянинг $x=x^*=2.7$ даги қиймати $y^*=2.6113$ га тенг экан. Буни натижа билан солиштирсак, фарқ 0,003 дан катта эмаслигини аниқлаймиз.

Машқлар

1.Қуйидаги масалаларда: а) Жадвалда берилганларга асосланиб: Лагранж интерполяцион кўпҳади; энг кичик квадратлар усули билан $y=ax^2+bx+c$ квадрат учҳадни қуринг;

б) Ҳосил қилинган ҳар иккала формулалар билан x эркин ўзгарувнинг $x_j^*(j=\overline{1,3})$ қийматларида y_j^* функция қийматлари ҳисоблансин.

в) Функциянинг жадвалдаги ва ҳисобланган қийматлари Декарт координаталар тизимида ифодаланиб таҳлил қилинсин.

1.

x_i	0,21	0,33	0,51	0,72	0,91
y_i	5,549	5,975	6,757	7,874	9,063

$x_j^* = 0{,}15;\ \ 0{,}42;\ \ 0{,}85.$

2.

x_i	1,21	1,35	1,52	1,73	1,95
y_i	4,479	4,357	4,192	3,984	3,789

$x_j^* = 1{,}12;\ \ 1{,}45;\ \ 1{,}85.$

11. Берилган функцияларга кўрсатилган оралиқда энг яхши яқинлашувчи кубик сплайнлар қурилсин. Бунда: $n=4$, 8, 16 бўлганда берилган кесма ичида ётувчи тўртта нуқтада ҳисоблашларни бажариб натижаларни ўзаро солиштиринг.

1. $y=\dfrac{e^{2x^2}[\ln(1+x^2)-1]}{\sqrt{x^3+2x+1}}, \quad x\in[3;\ 5];$

2. $y=\dfrac{\log_3(7x^3+5x-1)}{4+\cos^2\sqrt[3]{8x-1}}, \quad x\in[2;\ 4];$