

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. ФОМИН

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*Рекомендовано Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлениям и специальностям "Математика",
"Механика", "Прикладная математика"*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1996

Редактор И. Н. Рязанова

Рецензенты: проф. С. В. Шильман (Нижегородский ун-т),
проф. А. С. Шалыгин (Балтийский техн. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского университета*

УДК 517.977.55; 519.218.82

Фомин В. Н.

Оптимальные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1996. 308 с.
ISBN 5-288-01409-4

В пособии дается последовательное изложение некоторых современных разделов теории оптимальной фильтрации случайных процессов, в том числе теории Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных процессов и теории Калмана — Бьюси рекуррентной фильтрации. Рассматриваются математические проблемы, связанные с неупреждающей фильтрацией. Значительное внимание уделено вопросам разработки конструктивных методов синтеза оптимальных фильтров (включая спектральную факторизацию положительных операторов и представление оптимального фильтра в рекуррентной форме). Отдельная глава посвящена проблеме нелинейной оптимальной фильтрации.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов физико-математических факультетов университетов, специализирующихся по математической кибернетике, и может быть полезна исследователям различных областей теоретической и технической кибернетики, чьи научные и прикладные интересы связаны с обработкой различного рода сигналов.

Библиогр. 163 назв.

1602110000 — 001
Ф 076(02) — 95 46 — 95

ISBN 5-288-01409-4

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 1996

© В. Н. Фомин, 1996

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии в достаточно общем виде формулируется задача линейной оптимальной фильтрации и развиваются необходимые математические средства ее исследования. Хотя в рамках вводимых конструкций и построений может изучаться задача оптимальной фильтрации случайных процессов как в непрерывном, так и дискретном времени, основное внимание уделяется случайным временным рядам, поскольку для них развиваемая теория имеет более завершенный вид и в определенном смысле является "образцовой" для задач фильтрации в непрерывном времени (а также для задач оптимальной фильтрации случайных полей). Основной частью развиваемой теории является классическая теория Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации случайных стационарных процессов. Проводимый ниже анализ задачи оптимальной фильтрации позволяет обобщить задачу Винера — Колмогорова на широкий класс нестационарных процессов, известная теория Калмана — Бьюси рекуррентной фильтрации оказывается составной частью этой общей теории.

Книга состоит из шести глав. В первой ставится задача линейного оптимального оценивания в достаточно общей форме и приводится ее решение в классе устойчивых фильтров. Более содержательная задача оптимальной фильтрации в классе физически реализуемых фильтров исследуется во второй главе. В ней приводится общее решение абстрактной задачи (дискретной) оптимальной фильтрации и исследуются некоторые сопутствующие проблемы (в частности, проблема спектральной факторизации положительных операторов в гильбертовых пространствах в достаточно общей форме). Более подробно задача спектральной факторизации в случае дискретного причинного гильбертова пространства обсуждается в третьей главе.

Первые три главы книги написаны в достаточно формализованном виде, в них делается упор на рассмотрение задачи линейной фильтрации как некоторого раздела теории линейных каузальных (либо финитных) операторов в абстрактном гильбертовом пространстве.

В последующих трех главах изложение задач фильтрации (и связанных с ними проблем) осуществляется в не столь общей форме. В четвертой главе, написанной в соавторстве с О. А. Петровым и Э. Е. Тавгер, дается обзор работ по спектральной факторизации в "конечномерном" случае. Здесь наряду с обсуждением известных методов факторизации положительных на единичной окружности функций предлагаются некоторые новые, основанные на тесной связи задачи спектральной факторизации дробно-рациональных функций с линейно-квадратичной задачей управления. Пятая глава посвящена важной проблеме представимости оптимального фильтра в рекуррентной форме. Рассматривается как ставшая классической задача рекуррентной фильтрации Калмана — Бьюси, так и ее модификация, связанная с рассмотрением случайных процессов с квазивырожденными корреляционными операторами. Хотя, как выясняется, такие процессы описываются конечномерными линейными формирующими фильтрами и поэтому к ним полностью применима теория Калмана — Бьюси, однако построение формирующего фильтра по корреляционным функциям частично наблюдаемого процесса требует значительных вычислительных усилий (в частности, приходится осуществлять спектральную факторизацию некоторых операторов), и построение рекуррентных процедур фильтрации непосредственно в терминах корреляционных операторов может оказаться более предпочтительным. Именно эта проблема и обсуждается в пятой главе. Наконец, шестая глава посвящена проблеме нелинейной оптимальной фильтрации, точнее, той ее части, которая в определенном смысле сводится к проблеме линейной фильтрации, рассмотренной в предыдущих главах книги. Сюда же отнесены некоторые задачи минимаксной фильтрации.

Взгляды автора на обсуждаемые проблемы формировались в течение нескольких последних лет в рамках научного семинара кафедры теоретической кибернетики Ленинградского (Санкт-Петербургского) государственного университета; за эти годы состав участников этого семинара значительно изменился. Автор благодарен всем его участникам, в той или иной степени сотрудничавшим с ним на разных этапах работы. В первую очередь хочется поблагодарить коллег А. Е. Барабанова, В. А. Бондарко, О. Г. Горшкова, О. Н. Граничина, С. В. Гусева, Н. Г. Докучаева, Ю. Ф. Казаринова, Т. П. Красулину, А. С. Матвеева, А. В. Мегрецкого, О. А. Петрова, Д. А. Пляко,

Ю. А. Самохина, Н. А. Санкину, С. Г. Семенова, Б. М. Соколова, Э. Е. Тавгер, А. В. Тимофеева, А. Г. Череменского, А. И. Шепелявого, В. А. Якубовича. Хочется выразить уверенность в том, что представленные в книге точки зрения на различные проблемы фильтрации в целом соответствуют взглядам перечисленных участников творческого коллектива, плодотворно работавших и работающих под научным руководством В. А. Якубовича, чье влияние на научное мировоззрение автора трудно переоценить.

Особую благодарность выражаю супруге Фоминой Наталье Александровне, которая не только в кратчайшие сроки переписала рукопись в $\text{\TeX}$ -формате, но и самоотверженно редактировала и оформляла рукопись.

Работа над большей частью пособия осуществлялась при поддержке госкомитета РФ по высшему образованию в рамках грантов в области фундаментального естествознания (1992–1994 г.).

Чтобы не загромождать основной текст, доказательства лемм и теорем вынесены в приложения в конце каждой главы. Такая структура книги, по мнению автора, позволяет легче воспринять основные идеи и конструкции, не отвлекаясь на частные доказательства.

Каждая глава состоит из разделов, раздел — из пунктов, нумеруемых буквами русского алфавита. Нумерация формул в разделах сквозная и состоит из номеров раздела и формулы. При необходимости сослаться на формулу из другой главы добавляется номер этой главы. Так, например, ссылка (2.8) в главе 3 означает восьмую формулу второго раздела главы 3, тогда как ссылка (1.2.8) означает восьмую же формулу из раздела 2 главы 1. Аналогично осуществляется ссылка на разделы и пункты. Нумерация утверждений — сквозная по главам и состоит из двух цифр: номера главы и номера теоремы (леммы).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $\mathbf{R}$ — упорядоченное множество вещественных чисел;
 $\mathbf{R}^p$ — евклидово пространство размерности p ;
 $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных чисел;
 $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел;
 $\mathbf{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел;
 $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{N} = \mathbf{Z}_+ \setminus 0$;
 $\mathbf{Z}^n = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$ — n -мерная целочисленная решетка в $\mathbf{C}^n$;
 $\mathbf{K}$ — подмножество решетки $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}^n$;
 $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел (комплексная плоскость);
 $\mathbf{C}^p$ — унитарное пространство размерности p (декартово произведение p комплексных плоскостей);
 $\mathbf{D}$ — открытый единичный круг в $\mathbf{C}$ с центром в нуле;
 $\bar{\mathbf{D}}$ — замкнутый единичный круг в $\mathbf{C}$;
 Γ_1 — единичная окружность в $\mathbf{C}$ — граница множества $\mathbf{D}$, $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \cup \Gamma_{\mathbf{D}}$;
 $\mathbf{T} = (t_s, t_f)$ — непустой интервал вещественной оси с началом t_s и концом t_f ($t_s \geq -\infty$, $t_f \leq \infty$);
 $\mathbf{T} = [t_s, t_f]$ — множество целых чисел, заключенных между целыми числами t_s и t_f ;
 t — выделенное дискретное подмножество интервала $\mathbf{T}$;
 $\mathbf{L}(\mathbf{H}'', \mathbf{H}')$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\mathbf{H}''$ в пространство $\mathbf{H}'$;
 $\Omega = \{\omega\}$ — множество элементарных событий ω ;
 $z: \Omega \rightarrow \mathbf{C}^p$ — случайная величина со значениями в $\mathbf{C}^p$ (измеримое отображение z множества Ω в $\mathbf{C}^p$);
 $\mathfrak{A}$ — выделенная в Ω σ -алгебра подмножеств (событий);
 $\mathbf{P}$ — вероятностная мера, определенная на элементах множества $\mathfrak{A}$;
 $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство;
 $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания;

Mz — математическое ожидание (среднее значение) случайной величины z ;

$z = \{z(t), t \in T\}$ — случайный процесс, определенный на множестве T ;

$R_z(t, t') = Mz(t)z(t')^*$ — матрица корреляций (ковариаций) случайного процесса z , $t, t' \in T$;

$*$ — символ эрмитова сопряжения (транспонирования в вещественном случае), R^* — матрица, сопряженная матрице R , $[R_z(t, t')]^* = R_z(t', t)$;

$L_2(p, T)$ — множество вектор-функций со значениями в R^p (или C^p), квадратично интегрируемых на множестве T ;

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{L_2} = \int_T \varphi_1^*(t) \varphi_2(t) dt$ — скалярное произведение в $L_2(p, T)$;

R_z — корреляционный оператор случайного процесса z (оператор квадратичной формы $M|\langle \varphi, z \rangle|^2 = \langle \varphi, R_z \varphi \rangle$);

$F^0(p, T)$ — плотное в $L_2(p, T)$ множество непрерывно дифференцируемых финитных вектор-функций;

D — оператор обобщенного дифференцирования, $D\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ при $\varphi \in F^0(p, T)$;

$w = \{w(t), t \in T\}$ — винеровский процесс на промежутке T (процесс с некоррелированными приращениями, удовлетворяющий условиям $w(t_0) = 0$, $Mw(t) \equiv 0$, $Mw(t)w^*(t') = N \min(t, t')$, N — неотрицательная матрица интенсивностей винеровского процесса);

h — весовой оператор линейного фильтра;

$h(t, t')$ — весовая функция линейного фильтра с интегральным весовым оператором h ;

H — абстрактное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$,

0_H — нулевой элемент в H ;

0 — нулевой оператор в соответствующем пространстве (например, 0_H — нулевой оператор в пространстве H);

I — единичный оператор (I_H — единичный оператор в пространстве H);

H', H'' — подпространства пространства H ;

F — выделенное в H линейное плотное множество основных элементов;

$f(\varphi) = \psi^* \varphi = \langle \psi, \varphi \rangle$, $\varphi \in F$, — линейный функционал, определенный на $F \subseteq H$ с помощью элемента ψ ;

$P_T = \{P_t, t \in T\}$ — монотонное и полное семейство проекторов (разложение единицы), задающее в H временную структуру;

(H, P_T) — причинное гильбертово пространство;

P_t — разложение единицы, отвечающее дискретному множеству $t = \{t_k, k \in K\} \subset T$;

(H, P_t) — дискретное причинное пространство;

$Q_K = \{Q_k = P_{t_{k-1}} - P_{t_k}, k \in K\}$ — ортогональное разложение единицы;

(H, Q_K) — дискретное причинное пространство с ортогональным разложением единицы;

F^0 — множество основных элементов в причинном пространстве (H, P_T) , согласованное с временной структурой;

h — множество устойчивых весовых операторов $h: H'' \rightarrow H'$;

$\tau(\cdot)$ — характеристика финитного оператора, $\tau: R \rightarrow R$, в причинном пространстве (H, P_T) ;

h^τ — множество τ -каузальных операторов, $h^\tau \subset h$;

$\kappa(\cdot)$ — характеристика финитного оператора, $\kappa: K \rightarrow K$, в дискретном причинном пространстве (H, P_t) ;

$\bar{H} = H_{F^0}$ — расширение гильбертова пространства H , полученное с помощью множества F^0 основных элементов;

$R_{[\tau]}, R_{[\bar{\tau}]}$ — τ -каузальная и τ -антикаузальная компоненты оператора R в причинном пространстве (H, P_T) ($R_{[\kappa]}, R_{[\bar{\kappa}]}$ — κ -каузальная и κ -антикаузальная компоненты оператора R в дискретном причинном пространстве (H, P_t));

R_+, R_- — каузальная (0-каузальная) и антикаузальная, (0-антикаузальная) компоненты оператора R ;

$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — частично наблюдаемый случайный элемент с ненаблюдаемой x и наблюдаемой y компонентами ($x: \Omega \rightarrow \bar{H}'$, $y: \Omega \rightarrow \bar{H}''$, $z: \Omega \rightarrow \bar{H} = \bar{H}' \times \bar{H}''$);

$\bar{h}$ — множество весовых операторов $\bar{h}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$;

$\bar{h}^\tau$ — множество τ -каузальных операторов $\bar{h}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$, $\bar{h}_{[\tau]} = \bar{h}$;

$\bar{h}^*$ — множество κ -каузальных операторов $\bar{h}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$, $\bar{h}_{[\kappa]} = \bar{h}$;

$\bar{G}_t$ — множество обратимых отображений $\bar{G}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$, для которых при каждом $t \in t$ операторы $\bar{P}_t \bar{G} \bar{P}_t, \bar{P}_t \bar{G}^{-1} \bar{P}_t$ ограничены в H ;

$J_{\varphi'}(h), J^{(t)}(h)$ — положительные функционалы над выделенным множеством весовых операторов — критерии качества

фильтрации (обычно $J_{\varphi'}(h) = \mathbf{M}|\langle \varphi', x - hy \rangle|_{\mathbf{H}'}^2$, $\varphi' \in \mathbf{F}' \subseteq \mathbf{H}'$, $J^{(t)}(h) = \mathbf{M}|P'_t(x - hy)|_{\mathbf{H}'}^2$);
 $G_R(\lambda)$ — символ стационарного оператора R ,

$$G_R(\lambda) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \lambda^k R_k, \quad R_{k-k'} = Q_k R Q_{k'};$$

$\text{sp} R$ — след (сумма диагональных элементов) квадратной матрицы R ;

$H(\lambda)$ — передаточная функция стационарного фильтра — символ весового оператора стационарного фильтра (символ корреляционного оператора стационарного процесса называется матричной спектральной плотностью процесса);

P_+ — оператор сепарации,

$$(P_+ G_R)(\lambda) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+} \lambda^k R_k;$$

$\bar{\mathfrak{R}}_Q$ — множество Q_K -каузальных операторов в пространстве $\bar{\mathbf{H}}$;

$\bar{\mathfrak{R}}_Q^{-1}$ — множество обратимых операторов в $\bar{\mathbf{H}}$, обратные к которым являются Q_K -каузальными;

U — спектральный фактор оператора $R \in \bar{\mathbf{G}}_t$ ($R = UU^*$, $U \in \mathfrak{R}_Q \cap \mathfrak{R}_Q^{-1}$);

СП — случайный процесс;

ОСП — обобщенный случайный процесс;

ЛКЗ — линейно-квадратичная задача.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ. ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД

Важнейшими разделами современной теории фильтрации являются теория Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных процессов [54, 125, 145, 161] и теория Калмана — Бьюси рекуррентной фильтрации [45, 137, 139, 141]. Первоначально теория оптимальной фильтрации стимулировалась главным образом задачами, возникающими в рамках статистической радиотехники и теории оценивания [17, 43, 60, 67, 98, 104], позднее ее результаты стали широко использоваться в теории оптимального управления, в частности в задаче линейно-квадратичной оптимизации при неполных и зашумленных наблюдениях за вектором состояний объекта управления [3, 5, 14, 32, 37, 40–42, 50, 66, 69, 75, 82, 90, 105, 132, 160].

Теория Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных случайных процессов допускает решение задачи фильтрации в терминах спектральных плотностей наблюдаемых и оцениваемых случайных процессов, позволяя построить передаточную функцию оптимального фильтра с помощью операций факторизации и сепарации над некоторыми функциями, определяемыми данными задачи фильтрации. Вместе с тем основная процедура факторизации спектральной плотности фильтруемого процесса вполне может быть реализована в операторных терминах (путем факторизации корреляционного оператора [80]), что не предполагает стационарности рассматриваемых случайных процессов и соответствует общей форме линейного фильтра.

Необходимость рассматривать нестационарные процессы требует критического анализа многих положений спектральной теории [29, 30, 34–36, 78–80]. Выяснилось, что некоторые идеи, использующие связь проблемы синтеза оптимального неупреждающего фильтра с проблемой спектральной факторизации, могут быть сформулированы в терминах корреляционных операторов,

что позволяет в конечном счете перенести основные результаты теории Винера — Колмогорова на нестационарные процессы [78–90, 132, 154]. Оказалось, в частности, что возможность представления случайного процесса в виде конечномерного формирующего фильтра непосредственно связана с квазивырожденностью корреляционного оператора [69, 80], это укрепило уверенность в том, что многие фундаментальные факты и результаты теории линейной фильтрации естественно выражаются в терминах корреляционных операторов случайных процессов.

Представляется естественной попытка привлечь методы функционального анализа для исследования проблемы линейной фильтрации в возможно более общей форме. Реализация этого подхода приводит к обобщению классической задачи Винера — Колмогорова линейной оптимальной фильтрации и позволяет использовать, в частности, основные идеи этой теории без предположения о конечномерности рассматриваемых фильтров и процессов. Такой "операторный" подход к задаче линейной фильтрации делает ее, по существу, специальным разделом теории линейных операторов в причинном пространстве (т.е. в пространстве, наделенном временной структурой). Операторные подходы к анализу разнообразных задач теории фильтрации и управления получают все большее признание [8, 9, 28, 44, 96, 106–111, 132, 147, 148, 156].

Хотя попытки операторной трактовки теории оптимальной фильтрации делались несколько десятилетий назад [8, 9], однако "операторный подход" к задачам фильтрации стал широко использоваться в последние годы в связи с интенсивным развитием теории линейных операторов в причинном пространстве [132, 156]. Теория причинных (каузальных) операторов в настоящее время развита в такой степени, что позволяет дать содержательное толкование разнообразных задач оптимальной фильтрации и управления [10, 16, 28, 33, 44, 88, 111, 112, 132, 156]. В рамках этой теории, в частности, получила разрешение и соответствующее истолкование важная проблема связи каузальной обратимости дифференциальных операторов с устойчивостью соответствующих дифференциальных уравнений [6, 61, 132, 156, 157].

В этой главе закладываются математические основы абстрактной теории оптимальной фильтрации, когда основные результаты теории (и в первую очередь формула Боде — Шеннона для весового оператора оптимального фильтра) выражаются в

терминах операторов, порождаемых данными задачи фильтрации. Подобное обобщение постановки задачи линейной оптимальной фильтрации требует ревизии ряда основных понятий теории, включая понятие случайного процесса. В качестве подходящего обобщения понятия случайного процесса ниже принято понятие обобщенного случайного элемента со значениями в расширенном гильбертовом пространстве. Подобная конструкция, связанная с распространением по непрерывности (в соответствующей топологии) линейного функционала, определенного на плотном линейном "основных элементов" абстрактного гильбертова пространства, хорошо известна [25]. Полученное при этом представление линейного функционала можно рассматривать как вариант известной теоремы Ф. Рисса о форме линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [7].

Ревизии подверглось также важное понятие физической реализуемости (осуществимости) линейного фильтра. В данной работе физическая реализуемость фильтра определяется в терминах финитных операторов — естественного обобщения понятия каузального (причинного) оператора (в теории фильтрации приходится исследовать задачи прогноза и сглаживания, и, в отличие от теории управления, свойства каузальности рассматриваемых операторов для этого недостаточно).

Основу абстрактной теории линейной фильтрации могут составить результаты разд. 3 о свойствах финитных операторов в причинном пространстве. Они являются непосредственным обобщением соответствующих результатов, известных для каузальных операторов [111, 132].

Ниже приводится постановка задачи оптимальной фильтрации в "операторной" форме и дается ее решение в классе устойчивых фильтров. Более содержательная задача оптимизации линейного фильтра в классе неупреждающих (каузальных) весовых операторов рассматривается во второй главе. Значительное внимание в первой главе уделено разработке математического аппарата, необходимого для исследования задачи неупреждающей фильтрации. Развиваемая здесь теория финитных операторов в причинных гильбертовых пространствах используется во второй главе, посвященной в основном построению абстрактного варианта теории Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации. В качестве самостоятельного результата первой главы можно отметить применение полученных общих ре-

зультатов по линейной фильтрации к задаче оценивания конечногомерного параметра по его зашумленным наблюдениям.

1. Случайные элементы в гильбертовом пространстве

В данной работе линейный фильтр отождествляется с линейным преобразованием одного процесса в другой. Последовательная операторная трактовка процедуры фильтрации приводит к необходимости рассматривать случайный процесс как случайный элемент некоторого, вообще говоря, бесконечномерного пространства. В прикладных задачах часто приходится иметь дело с обобщенными случайными процессами, реализации которых не принадлежат базовому (исходному) функциональному пространству; более того, обобщенные случайные процессы могут вообще не иметь реализаций в виде измеримых функций. Тем не менее такие обобщенные процессы могут рассматриваться как случайные элементы некоторого гильбертова пространства либо его расширения и позволяют дать содержательную трактовку разнообразных задач оптимальной фильтрации и управления. Ниже вводятся основные понятия и достаточно хорошо известные конструкции, связанные с рассмотрением подобного рода случайных обобщенных элементов.

А. Основные и обобщенные элементы гильбертова пространства. Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle$ его элементов φ, ψ [7] (в случае комплексного пространства билинейная форма $\langle \varphi, \psi \rangle$ линейна по ψ и антилинейна по φ). В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $\mathbf{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Скалярное произведение порождает слабую сходимость в пространстве $\mathbf{H}$: последовательность $\{\psi_l, l \in \mathbf{N}, \psi_l \in \mathbf{H}\}$ слабо сходится к элементу $\psi \in \mathbf{H}$, если для любого элемента $\varphi \in \mathbf{H}$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{l, l' \rightarrow \infty} \langle \psi_l - \psi_{l'}, \varphi \rangle = 0. \quad (1.1)$$

Несложно убедиться, что сходимость (1.1) последовательности $\{\psi_l\}$ в себе, равномерная по множеству $\{\varphi: \varphi \in \mathbf{H}, |\varphi|_{\mathbf{H}} = 1\}$, эквивалентна сильной сходимости в себе этой последовательности:

$$\lim_{l, l' \rightarrow \infty} |\psi_l - \psi_{l'}|_{\mathbf{H}} = 0,$$

где $|\cdot|_{\mathbf{H}}$ — норма, порождаемая скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $|\psi|_{\mathbf{H}} = \langle \psi, \psi \rangle^{1/2}$. По определению гильбертова пространства

оно полно по отношению к слабой (и тем более сильной) сходимости: из слабой сходимости (1.1) в себе последовательности $\{\psi_l, l \in \mathbf{N}, \psi_l \in \mathbf{H}\}$ следует существование элемента $\psi \in \mathbf{H}$, для которого при любом $\varphi \in \mathbf{H}$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi_l - \psi, \varphi \rangle = 0. \quad (1.2)$$

При фиксированном элементе $\psi_l \in \mathbf{H}$ формула

$$f_l(\varphi) = \langle \psi_l, \varphi \rangle \quad (1.3)$$

определяет линейный непрерывный функционал на множестве $\mathbf{H}$. В силу сказанного выше множество $\mathbf{H}^*$ всех таких функционалов замкнуто, соотношение

$$f(\varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi_l, \varphi \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad (1.4)$$

определяет взаимоднозначное соответствие между множествами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ — содержание хорошо известной теоремы Ф. Рисса о виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [7].

Требование "поэлементной" сходимости (1.1) лишь на элементах φ из некоторого подмножества пространства $\mathbf{H}$ определяет в нем, вообще говоря, более слабую топологию, по отношению к которой пространство $\mathbf{H}$ может оказаться незамкнутым (неполным). Пополнение множества $\mathbf{H}$ в этой топологии приводит к присоединению к нему новых (идеальных) элементов, называемых обобщенными. Подобная хорошо известная конструкция расширения базового гильбертова пространства полезна во многих приложениях и широко используется в различных разделах функционального анализа и математической физики [25] (доказательство существования решения разнообразных уравнений и (или) краевых задач может оказаться проще в расширенном пространстве, чем в исходном; неразрешимая в базовом пространстве задача может оказаться разрешимой в расширенном и т.д.). Разумеется, полезность процедуры пополнения исходного пространства в немалой степени зависит как от выбора подмножества, определяющего слабую сходимость, так и от возможного учета особенностей исследуемой задачи. Для наших целей упомянутую конструкцию пополнения базового пространства удобно использовать в следующем варианте.

Предположим, что в пространстве $\mathbf{H}$ выделено линейное плотное в нем множество $\mathbf{F}$, которое назовем множеством основных

элементов пространства $\mathbf{H}$. Сходимость (1.1) лишь на элементах $\varphi \in \mathbf{F}$ назовем $\mathbf{F}$ -слабой сходимостью в $\mathbf{H}$. (Из сказанного выше следует, что $\mathbf{H}$ -слабая сходимость совпадает со слабой сходимостью.) Пополнение множества $\mathbf{H}$ состоит в присоединении к нему пределов $\mathbf{F}$ -слабо сходящихся в себе последовательностей элементов из $\mathbf{H}$. Опишем более подробно эту процедуру пополнения.

Рассмотрим множество Φ всех последовательностей $\tilde{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$, $\psi_l \in \mathbf{H}$, $\mathbf{F}$ -слабо сходящихся в себе. Последовательности $\tilde{\varphi}' = \{\psi'_1, \psi'_2, \dots\}$ и $\tilde{\psi}'' = \{\psi''_1, \psi''_2, \dots\}$ будем считать $\mathbf{F}$ -эквивалентными, если

$$\lim_{l, l' \rightarrow \infty} \langle \psi'_l - \psi''_{l'}, \varphi \rangle = 0 \quad (1.5)$$

для любого элемента $\varphi \in \mathbf{F}$. Нетрудно убедиться, что множество $\mathbf{F}$ -слабо сходящихся в себе последовательностей элементов из $\mathbf{H}$ распадается на классы эквивалентных последовательностей. Множество этих классов образует линейное топологическое хаусдорфово пространство, которое обозначим через $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}$. Для каждого элемента $\tilde{\psi} \in \mathbf{H}_{\mathbf{F}}$ на множестве $\mathbf{F}$ определен линейный функционал $\tilde{\psi}^* : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$,

$$\tilde{\psi}^*(\varphi) = \tilde{\psi} \varphi = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi_l, \varphi \rangle, \quad (1.6)$$

где $\{\psi_l, l \in \mathbf{N}, \psi_l \in \mathbf{H}\}$ — произвольная последовательность, принадлежащая классу эквивалентности $\tilde{\psi}$, и учтено обычное соглашение опускать скобки, заключающие аргумент линейной функции. Условимся в дальнейшем этот функционал обозначать так:

$$\tilde{\psi}^*(\varphi) = \langle \tilde{\psi}, \varphi \rangle. \quad (1.7)$$

Если последовательность $\tilde{\psi} = \{\psi_l, l \in \mathbf{N}, \psi_l \in \mathbf{H}\}$ $\mathbf{F}$ -слабо сходится к некоторому элементу $\psi \in \mathbf{H}$, то соответствующий класс эквивалентности содержит "одноэлементную" последовательность $\{\psi, \dots, \psi\}$. Такие классы эквивалентности назовем обычными. Классы эквивалентности, не являющиеся обычными, будем называть обобщенными. Очевидно, каждый класс эквивалентности содержит не более одной одноэлементной последовательности. Таким образом, между обычными классами эквивалентности и элементами пространства $\mathbf{H}$ имеется взаимнооднозначное соответствие. Осуществляя отождествление элементов из $\mathbf{H}$ и соответствующих обычных классов эквивалентности, можем считать установленными включения

$$\mathbf{F} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{H}_{\mathbf{F}}. \quad (1.8)$$

Можно показать, что множество $\mathbf{H}_F$, снабженное F -слабой топологией, является полным топологическим пространством.

Если множество обобщенных классов эквивалентности не пусто, то $\mathbf{H}$ — правильная часть множества $\mathbf{H}_F$. В дальнейшем обобщенные классы эквивалентности будем отождествлять с обобщенными элементами пространства $\mathbf{H}$. Пару множеств $(F, \mathbf{H}_F)$ называют также оснащением гильбертова пространства $\mathbf{H}$, а само пространство, снабженное такой парой, — оснащенный гильбертовым пространством.

Приведенной конструкции пополнения можно дать несколько другую трактовку. Именно, обозначим через F^* множество линейных (т.е. однородных и аддитивных) функционалов, являющихся поточечными пределами на множестве F линейных непрерывных функционалов над $\mathbf{H}$, т.е. включение $f \in F^*$ означает, что существует последовательность $\{f_l, l \in \mathbf{N}\}$ линейных непрерывных функционалов f_l , для которых при каждом $\varphi \in F$ выполнено предельное соотношение

$$f(\varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(\varphi).$$

Очевидно, функционалы $f \in F^*$ линейны и определены на множестве F . Между множеством F^* и введенным ранее множеством $\mathbf{H}_F$ классов эквивалентности существует взаимоднозначное соответствие. Действительно, пусть $\tilde{\psi} \in \mathbf{H}_F$ и $\tilde{\psi} = \{\psi_l, l \in \mathbf{N}\}$ — произвольная последовательность из класса эквивалентности $\tilde{\psi}$. Тогда для любого элемента $\varphi \in F$ числовая последовательность $\langle \psi_l, \varphi \rangle$ сходится в себе, а потому существует предел

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_l(\varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi_l, \varphi \rangle = \langle \tilde{\psi}, \varphi \rangle = f(\varphi), \quad (1.9)$$

который, как нетрудно убедиться, определяет линейный на множестве F функционал f , т.е. каждому классу эквивалентности $\tilde{\psi} \in \mathbf{H}_F$ однозначно сопоставляется линейный функционал $f \in F^*$. Пусть теперь $f \in F^*$ и $\{f_l, l \in \mathbf{N}\}$ — поточечно сходящаяся к f на множестве F последовательность непрерывных на множестве $\mathbf{H}$ функционалов. По теореме Ф. Рисса каждый функционал f_l однозначно порождается некоторым элементом из $\mathbf{H}$, который обозначим через ψ_l . Тогда последовательность $\tilde{\psi} = \{\psi_l, l \in \mathbf{N}\}$ F -слабо сходится в себе, т.е. является элементом множества $\mathbf{H}_F$. Несложно убедиться, что таким образом класс эквивалентности $\tilde{\psi}$ определяется функционалом f однозначно. Это и означает взаимоднозначное соответствие между

множествами F^* и H_F . В силу очевидной полноты множества F^* относительно поточечной на множестве F сходимости пространство H_F полно. Соотношение (1.6) при этом задает способ вычисления значения функционала $\bar{\psi}^*$ на каждом элементе основного множества. Еще раз подчеркнем, что в формуле (1.7) символ $\langle \bar{\psi}, \varphi \rangle$ имеет смысл значения линейного функционала $\bar{\psi}^*$ на элементе $\varphi \in F$. Разумеется, если функционал $\bar{\psi}^*$ ограничен на множестве F^* , т.е. конечна его F^* -норма $|\bar{\psi}^*|_{F^*}$,

$$|\bar{\psi}^*|_{F^*} = \sup_{\varphi \in F} \frac{|\langle \bar{\psi}, \varphi \rangle|}{|\varphi|_H}, \quad (1.10)$$

то функционал $\bar{\psi}^*$ по непрерывности можно распространить с F на все H , и тогда элемент $\bar{\psi}$, порождающий этот функционал, в силу теоремы Ф. Рисса может быть отождествлен с элементом пространства H , а в правой части (1.9) выражение $\langle \bar{\psi}, \varphi \rangle$ в этом случае является скалярным произведением элементов $\bar{\psi}$ и φ . На соотношение (1.9) можно смотреть как на естественное обобщение теоремы Ф. Рисса: оно дает представление произвольного линейного на множестве F функционала с помощью соответствующего элемента множества H_F .

Лемма 1.1. *Элемент $\bar{\psi} \in H_F$ принадлежит пространству H в том и только том случае, если F^* -норма соответствующего ему функционала $\bar{\psi}^*$ конечна (и при этом $|\bar{\psi}^*|_{F^*} = |\bar{\psi}|_H$).*

Утверждение леммы 1.1 следует из предшествующих ее формулировке рассуждений и не требует дополнительных обоснований.

Таким образом, обобщенные элементы пространства H имеют бесконечную H -норму. Множество H_F , полученное с помощью F -слабого пополнения множества H , зависит, естественно, от выбора множества F основных элементов пространства H . Так, если выбрать $F = H$, то $H_F = H$ и понятие обобщенного элемента становится бессодержательным, соотношение (1.9) в этом случае представляет собой утверждение теоремы Ф. Рисса о виде линейного функционала f , непрерывного в гильбертовом пространстве H .

Б. Линейные операторы в гильбертовом пространстве и его пополнениях. Пусть $A: H \rightarrow H$ — некоторый линейный оператор с плотным множеством определения $D(A)$. При фиксированном элементе $\psi \in D(A)$ величина $\langle A\psi, \varphi \rangle$ определяет линейный непрерывный на H функционал. Обратно, при любом

фиксированном $\varphi \in \mathbf{H}$ величина $\overline{\langle A\psi, \varphi \rangle}$ определяет на множестве $D(A)$ линейный функционал. Обозначая этот функционал через f^* , можем написать $f^*(\psi) = \langle f, \psi \rangle$, если соответствующий элемент $f \in \mathbf{H}$ существует (для непрерывного функционала f^* такой элемент в силу теоремы Ф. Рисса существует и однозначно определяется функционалом f^*). Обозначим через $D_* \subseteq \mathbf{H}$ множество всех элементов φ , таких, что для каждого из них найдется элемент $f \in \mathbf{H}$, для которого выполнено соотношение

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, f \rangle, \quad \varphi \in D(A). \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) определяет на D_* линейное отображение $A^*: D_* \rightarrow \mathbf{H}$, называемое *сопряженным* (по отношению к A) оператором.

Таким образом, сопряженный оператор A^* однозначно определяется соотношением

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A^*\varphi \rangle, \quad \varphi \in D(A), \quad (1.12)$$

и множество D_* всех элементов φ , для которых выполнено (1.12), совпадает с множеством определения $D(A^*)$ оператора A^* . Оператор A называется симметричным, если $D(A) \subseteq D(A^*)$ и на $D(A)$ выполнено соотношение

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle, \quad \varphi \in D(A).$$

Симметричный оператор A , у которого $D(A) = D(A^*)$, называется самосопряженным (в случае комплексного пространства $\mathbf{H}$ самосопряженный оператор A называют также эрмитовым). Симметричный оператор A называется неотрицательным, если на множестве $D(A)$ выполнено неравенство $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$. Если при этом $\langle A\varphi, \varphi \rangle > 0$ для любого ненулевого элемента $\varphi \in D(A)$, то оператор A называется положительным, а если, кроме того, существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq \varepsilon \langle \varphi, \varphi \rangle$, то оператор A называется положительно-определенным. Свойства неотрицательности, положительности и положительной определенности оператора A будем записывать соответственно как $A \geq 0_{\mathbf{H}}$, $A > 0_{\mathbf{H}}$, $A \gg 0_{\mathbf{H}}$, где $0_{\mathbf{H}}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ — нулевой оператор.

Хорошо известно (см., например, [7]), что всякий неотрицательный оператор допускает расширение до самосопряженного (это может быть достигнуто расширением по Фридрихсу, т.е. замыканием множества $D(A)$ в метрике, порождаемой квадратичной формой оператора A , точнее, метрика порождается нормой $\|\varphi\| = (\langle A\varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle)^{1/2}$); всякий положительный оператор

A имеет обратный A^{-1} , определенный на плотном в $\mathbf{H}$ множестве; этот обратный ограничен в том и только том случае, если $A \gg 0_{\mathbf{H}}$.

Рассмотрим теперь расширение $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\mathbf{F}}$ гильбертова пространства $\mathbf{H}$, отвечающее множеству $\mathbf{F}$ основных элементов, и предположим, что множество $\mathbf{F} \cap D(A)$ плотно в $\mathbf{H}$. Обозначим через D_* множество всех элементов $\varphi \in \mathbf{F}$, таких, что для каждого из них существует элемент $f \in \mathbf{F}$, удовлетворяющий соотношению

$$\langle \bar{A}\bar{\psi}, \varphi \rangle = \langle \bar{\psi}, f \rangle, \quad \bar{\psi} \in D(\bar{A}). \quad (1.13)$$

Равенством (1.13) определяется линейный оператор $\bar{A}^* : D_* \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$, для которого

$$\langle \bar{A}\bar{\psi}, \varphi \rangle = \langle \bar{\psi}, \bar{A}^*\varphi \rangle, \quad \bar{\psi} \in D(\bar{A}), \quad \varphi \in D_*.$$

Назовем $\mathbf{F}$ -слабое замыкание оператора $\bar{A}^*$ (которое вновь будем обозначать $\bar{A}^*$) оператором, *сопряженным* в $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\mathbf{F}}$ оператору $\bar{A}$. Оператор $\bar{A}$ назовем *симметричным*, если $D(\bar{A}) \subseteq D(\bar{A}^*)$ и оператор A симметричный. Как и раньше, при выполнении равенства $D(\bar{A}) = D(\bar{A}^*)$ симметричный оператор $\bar{A}$ назовем *самосопряженным*. Симметричный в $\bar{\mathbf{H}}$ оператор $\bar{A}$ будем называть *неотрицательным, положительным, положительно-определенным*, если этим свойством обладает его сужение A на множество $\mathbf{H}$.

$\mathbf{F}$ -слабое замыкание $\bar{A}$ линейного непрерывного в $\mathbf{H}$ оператора A не обязано быть определено на всем $\bar{\mathbf{H}}$. Для выполнения последнего условия достаточно, чтобы оператор A обладал свойством $\mathbf{F}$ -слабой непрерывности: для всякой $\mathbf{F}$ -слабо сходящейся последовательности $\{\varphi_n \in D(A), n \in \mathbf{Z}_+\}$ последовательность $\{A\varphi_n, n \in \mathbf{Z}_+\}$ сходится, при этом

$$\mathbf{F} - \lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n = A(\mathbf{F} - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n).$$

В. Пример: линейные операторы в пространстве последовательностей. Рассмотрим линейное множество $\mathbf{I}_2$ числовых последовательностей $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 < \infty.$$

Множество l_2 является вещественным гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению

$$\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \psi_k.$$

Всякий линейный оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$ определяется соотношением

$$(A\varphi)_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \varphi_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

где A_{nk} — некоторые скалярные величины.

Таким образом, каждому линейному оператору A сопоставляется матрица $\{A_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ с элементами A_{nk} , и обратно: всякая такая матрица определяет линейный оператор в l_2 ; множество определения этого оператора плотно в l_2 : оно заведомо включает плотное в l_2 множество F° *финитных последовательностей*, т. е. последовательностей, лишь конечное число элементов которых отлично от нуля,

$$F^\circ = \{\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots), \varphi_k \equiv 0 \text{ при } k \gg 1\}. \quad (1.15)$$

Ограниченность оператора A , определяемого матрицей $\{A_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$, обусловлена ограниченностью ее элементов и их достаточно быстрым убыванием при удалении от главной диагонали. В частности, ограниченными будут операторы, порождаемые *конечнодиagonalными матрицами* (матрицами, у которых отличными от нуля могут быть элементы, расположенные на конечном числе диагоналей, параллельных главной диагонали; при этом элементы матрицы предполагаются ограниченными в совокупности). Примем в качестве множества F основных элементов гильбертова пространства l_2 множество F° финитных последовательностей (см. (1.15)). Нетрудно видеть, что F° -слабое пополнение $\bar{l}_2$ гильбертова пространства l_2 состоит из произвольных числовых последовательностей (абсолютные значения элементов этих последовательностей могут сколь угодно быстро нарастать с увеличением их индекса). Всякая матрица $\{A_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ определяет *линейный оператор A в $\bar{l}_2$* , и множество определения такого оператора заведомо содержит множество F° финитных последовательностей. Оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$ назовем *финитным свергу (снизу)*, если его строки (столбцы) финитны. Несложно убедиться, что только финитные сверху операторы являются F° -слабо непрерывными, и в соответствии со

сказанным выше их F^0 -слабые замыкания определены на всем $\bar{I}_2$.

Симметричность оператора $A: I_2 \rightarrow I_2$ означает симметричность его матрицы, $A_{nk} = A_{kn}$, $k, n = 1, 2, \dots$. Симметричный оператор A F^0 -слабо непрерывен, если он финитен одновременно и сверху, и снизу, в этом случае его F^0 -слабое замыкание задает симметричный оператор $\bar{A}$ на всем пространстве $\bar{I}_2$.

Г. Случайные элементы со значениями в расширенном гильбертовом пространстве. Пусть, как и раньше, F — выделенный плотный в H идеал — множество *основных элементов* гильбертова пространства H . Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — *вероятностное пространство* [26, 114] (совокупность множества Ω элементарных событий, σ -алгебры $\mathfrak{A}$ событий (подмножеств множества Ω) и вероятностной меры P , определенной на событиях). Множество Ω предполагается непустым, вероятностная мера P — полной [114]. Предположим, что определено отображение $z: \Omega \rightarrow H_F$ множества элементарных событий в F -слабое пополнение пространства H . Это, в частности, означает, что для любого элемента $\varphi \in F$ определена скалярная функция $z^*\varphi = (z, \varphi): \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (в вещественном случае эта функция принимает значения в $\mathbb{R}$). Отображение $z: \Omega \rightarrow H_F$ назовем *случайным H_F -элементом*, если при любом элементе $\varphi \in F$ выполнены условия:

1) Функция $z^*\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — случайная величина [26, 114] (т. е. отвечающие этой функции прообразы открытых подмножеств комплексной плоскости $\mathbb{C}$ являются событиями — элементами σ -алгебры $\mathfrak{A}$);

2) $Mz^*\varphi = (Mz)^*\varphi$, $Mz \in H_F$;

3) $M|(z - Mz)^*\varphi|^2 \leq C|\varphi|_H^2$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от выбора $\varphi \in F$.

Первое условие означает "поэлементную" измеримость отображения $z: \Omega \rightarrow H_F$, элемент Mz из второго условия называется средним значением случайного H_F -элемента z . Далее без ограничения общности будем считать рассматриваемые случайные H_F -элементы центрированными ($Mz^*\varphi \equiv 0$, $\varphi \in F$). Тогда формула

$$M|z^*\varphi|^2 = M\overline{z^*\varphi}z^*\varphi = \langle \varphi, R_z \varphi \rangle \quad (1.16)$$

определяет на множестве F квадратичную форму. *Линейный оператор R_z этой квадратичной формы называется корреляционным (ковариационным) оператором случайного H_F -элемента z .*

Третье условие из определения случайного $\mathbf{H}_F$ -элемента означает, что оператор R_z ограничен на множестве F , по непрерывности его можно распространить на все пространство H . В дальнейшем предполагается, что рассматриваемые корреляционные операторы определены как *линейные ограниченные* операторы в H . Из (1.16) следует, что корреляционный оператор эрмитов ($R_z^* = R_z$) и неотрицателен ($R_z \geq 0_H$).

В силу произвольности элемента $\varphi \in F$ соотношение (1.16) можно переписать в виде

$$R_z = Mzz^*, \quad (1.17)$$

если учесть, что $\varphi^*z = \overline{z^*\varphi}$ (φ^* — линейный функционал, порождаемый элементом $\varphi \in F$, $\varphi^*\psi = \langle \varphi, \psi \rangle$, $\psi \in F$).

Возможна и другая трактовка введенного выше понятия случайного $\mathbf{H}_F$ -элемента. Действительно, F -слабая сходимость определяет некоторую топологию на множестве $\mathbf{H}_F$; σ -алгебру, порождаемую открытыми множествами в этой топологии, обозначим через $\mathfrak{B}_F$. Тогда можно убедиться, что случайный $\mathbf{H}_F$ -элемент является измеримым отображением измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ в измеримое пространство $(\mathbf{H}_F, \mathfrak{B}_F)$, имеющим нулевое среднее значение и ограниченный корреляционный оператор. Отметим, что случайный $\mathbf{H}_F$ -элемент может оказаться случайным H -элементом (измеримым отображением $(\Omega, \mathfrak{A})$ в $(H, \mathfrak{B}_H)$), $\mathfrak{B}_H$ — борелевская σ -алгебра подмножеств пространства H , порождаемая его открытыми в сильной топологии множествами). В этом случае можно говорить о реализациях $\psi(\omega)$ случайного элемента ψ , которые являются элементами пространства H (соответствующие линейные функционалы ψ^* имеют конечную F^* -норму). В этом смысле случайный H -элемент z является "обычным", или регулярным. В общей ситуации (при $\mathbf{H}_F \neq H$) говорить о реализациях в H случайного F -элемента затруднительно, в этом смысле случайный элемент является обобщенным. Разумеется, можно говорить о его реализациях в множестве $\mathbf{H}_F$.

В дальнейшем для упрощения изложения будем говорить о случайном обобщенном элементе, имея в виду случайный $\mathbf{H}_F$ -элемент, если из контекста ясно, какое множество основных элементов имеется в виду, либо если такое уточнение несущественно.

В прикладных задачах случайные процессы часто могут рассматриваться как случайные обобщенные элементы при под-

ходящем выборе множества основных элементов. Рассмотрим примеры на эту тему.

Д. Случайные процессы как обобщенные элементы гильбертова пространства. Пусть $T = [t_s, t_f]$ — ограниченный интервал вещественной оси и $H = L_2(m, T)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых на этом интервале m -вектор-функций [7] со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_T \varphi^*(t) \psi(t) dt.$$

Пусть $w = \{w(t), t \in T\}$ — стандартный винеровский процесс, определенный на интервале T , т.е. центрированный процесс с некоррелированными приращениями [26], удовлетворяющий условиям:

$$w(t_s) = 0, \quad Mw(t)w^*(t') = \min(t, t')I_m.$$

Если к тому же w — гауссов процесс, то, как хорошо известно, почти все его реализации являются непрерывными функциями времени [26], т.е. почти все реализации винеровского процесса w принадлежат пространству $L_2(m, T)$. Поэтому в данном случае процесс w можно рассматривать как случайный $L_2(m, T)$ -элемент, т.е. w является "обычным" случайным элементом пространства $L_2(m, T)$. Несложно убедиться, что если почти все реализации случайного процесса w принадлежат пространству $L_2(m, T)$, причем

$$M \int_T |w(t)|^2 dt < \infty,$$

то корреляционный оператор R_w процесса w — ядерный оператор [7] (т.е. R_w — неотрицательный вполне непрерывный оператор, сумма собственных значений которого конечна). Действительно, пусть $\{\varphi_k, k = 1, 2, \dots\}$ — произвольный ортонормированный в $L_2(m, T)$ базис, тогда для случайного процесса w , почти все реализации которого являются элементами пространства $L_2(m, T)$, можно написать $\langle R_w \varphi_k, \varphi_k \rangle = M |\langle w, \varphi_k \rangle|^2$ и потому при любом натуральном N справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^N \langle R_w \varphi_k, \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^N M |\langle w, \varphi_k \rangle|^2. \quad (1.18)$$

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$ в соотношении (1.18), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle R_w \varphi_k, \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} M |\langle w, \varphi_k \rangle|^2 < \infty. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19) показывает, что неотрицательный оператор R_w вполне непрерывен в пространстве $L_2(m, T)$. Это означает, в частности, что спектр оператора R_w дискретный. Из неравенства (1.19) следует, что сам оператор является *ядерным*.

Если множество T не ограничено сверху, то почти все реализации процесса w уже не будут элементами пространства $L_2(m, T)$ (они не убывают при $t \rightarrow \infty$), однако w можно рассматривать как случайный обобщенный элемент, если в качестве множества F основных элементов выбрать финитные функции из $L_2(m, T)$. Действительно, множество $[L_2(m, T)]_F$ — F -слабое замыкание множества $L_2(m, T)$ — в данном случае можно отождествить с множеством локально-квадратично-интегрируемых функций (т.е. функций, квадратично-интегрируемых на произвольных ограниченных интервалах), почти все реализации СП w этим свойством обладают и потому СП w можно рассматривать как случайный $[L_2(m, T)]_F$ -элемент (и его "обобщенность" состоит в том, что почти все его реализации не принадлежат исходному пространству $L_2(m, T)$).

Наконец, рассмотрим ОСП стационарного *белого шума* с единичной матрицей интенсивностей (или *стандартный белый шум*).

Напомним, что так называется процесс, полученный обобщенным дифференцированием стандартного винеровского процесса. Более точно, пусть F° обозначает множество непрерывно дифференцируемых финитных функций из $L_2(m, T)$. Соотношение

$$\langle \psi, D\varphi \rangle = - \int_T [(d/dt) \psi(t)]^* \varphi(t) dt$$

задает при произвольной фиксированной функции $\varphi \in L_2(m, T)$ линейный функционал на множестве F° , который мы отождествим с обобщенным элементом $D\varphi$ пространства $L_2(m, T)$ (т.е. $D\varphi \in [L_2(m, T)]_{F^\circ}$). Линейный оператор

$$D: L_2(m, T) \rightarrow [L_2(m, T)]_{F^\circ}$$

называется оператором *обобщенного дифференцирования* (отметим, что оператор D не является ограниченным как оператор в

$L_2(m, T)$: некоторые функции из $L_2(m, T)$ он переводит в обобщенные функции [25] — элементы из $[L_2(m, T)]_{F^0}$. Разумеется, на плотном в $L_2(m, T)$ линейном F^0 оператор D совпадает с оператором дифференцирования, $(D\varphi)(t) = (d/dt)\varphi(t)$, $\varphi \in F^0$.

Пусть w — стандартный винеровский процесс, реализации которого являются элементами пространства $L_2(m, T)$. В соответствии со сказанным выше случайный элемент Dw , определяемый соотношением

$$\langle Dw, \varphi \rangle = - \int_T w^*(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt, \quad (1.20)$$

будет случайным элементом пространства $[L_2(m, T)]_{F^0}$. Случайный элемент Dw и называется *стандартным белым шумом*. Даже на конечном временном интервале T затруднительно говорить о его реализациях. Однако корреляционный оператор стандартного белого шума Dw ограничен (нетрудно убедиться, что он совпадает с единичным оператором), поэтому определяемый формулой (1.20) случайный функционал $\eta(\varphi) = \langle Dw, \varphi \rangle$, $\varphi \in F^0$, оказывается непрерывным в среднеквадратичном смысле. Следовательно, его можно по непрерывности распространить на все $L_2(m, T)$ и на любом элементе $\varphi \in L_2(m, T)$ вычислять по формуле

$$\langle Dw, \varphi \rangle = \overline{\int_T \varphi^*(t) dw(t)}, \quad (1.21)$$

где в правой части стоит *стохастический интеграл* от функции φ по винеровскому процессу w (см. [26]). Формула (1.21) и означает, что почти все реализации ОСП Dw принадлежат множеству $[L_2(m, T)]_{F^0}$. Таким образом, Dw является случайным обобщенным элементом при выборе в качестве множества F основных элементов множества F^0 непрерывно дифференцируемых финитных на множестве T m -вектор-функций. Заметим, что множество $[L_2(m, T)]_{F^0}$ в данном случае шире множества $L_2(m, T)$ — оно включает "функции", компоненты которых являются дельта-функциями Дирака. "Обобщенность" случайного элемента Dw состоит в том, что нельзя говорить о его реализациях как функциях из исходного пространства $L_2(m, T)$ (но можно говорить о реализациях этого процесса как о "функциях" из множества $[L_2(m, T)]_{F^0}$, включающего, в частности, обобщенные дельта-функции Дирака [25]).

Е. Возможные обобщения понятия случайного элемента. Анализ приведенных выше конструкций, использованных при введении понятия случайного элемента, показывает, что наличие скалярного произведения в множестве $\mathbf{H}$ несущественно и все определения могут быть переформулированы для банахова пространства $\mathbf{B}$. При этом выражение $z^*\varphi$ обозначает лишь значение линейного функционала z^* на элементе φ основного множества $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{B}$. Соотношение

$$M\overline{z^*\varphi}z^*\psi = (R_z\varphi)^*\psi$$

задает теперь билинейную форму на $\mathbf{F}$ (линейную по ψ и антилинейную по φ), которая однозначно порождает линейный оператор R_z , действующий из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{F}$ -слабое пополнение $\mathbf{B}_F$ пространства $\mathbf{B}$ (черта над $z^*\varphi$ означает комплексное сопряжение). Выражение $M|z^*\varphi|^2 = (R_z\varphi)^*\varphi$ определяет неотрицательную квадратичную форму этого оператора. В силу третьего условия из определения случайного элемента на множестве $\mathbf{F}$ выполняется неравенство $(R_z\varphi)^*\varphi \leq C|\varphi|_{\mathbf{B}}^2$, поэтому в действительности оператор R_z действует из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{B}$ и на множестве $\mathbf{F}$ ограничен. По непрерывности оператор R_z однозначно распространяется на все $\mathbf{B}$, это позволяет говорить о линейном ограниченном операторе R_z , определенном на всем пространстве $\mathbf{B}$. Оператор R_z и является корреляционным оператором случайного $\mathbf{B}_F$ -элемента z . Выражение (1.17) для R_z имеет очевидный смысл.

2. Линейное оценивание случайных элементов в классе устойчивых фильтров

Приведем возможные постановку и решение задачи оценивания случайных элементов в классе произвольных линейных оценок. Это наиболее простой вариант задачи оценивания, в котором на весовой оператор фильтра не накладывается никаких условий (кроме предположения о его ограниченности). Более содержательная задача оптимизации в классе физически реализуемых (неупреждающих) фильтров требует уточнения постановки задачи и будет рассматриваться во второй главе.

А. Постановка задачи оценивания в классе линейных оценок. Предположим, что пространство $\mathbf{H}$ является прямым произведением гильбертовых пространств $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' \times \mathbf{H}'' \quad (2.1)$$

со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}'}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}''}$. В этих пространствах предполагаются выделенными множества основных элементов, которые будем обозначать соответственно $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$. Элемент $\varphi \in \mathbf{H}$ будем представлять в виде

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \end{bmatrix}, \quad \varphi' \in \mathbf{H}', \quad \varphi'' \in \mathbf{H}''. \quad (2.2)$$

Пусть x — случайный $\mathbf{H}'_{\mathbf{F}}$ -элемент, который предполагается неизвестным, и y — случайный $\mathbf{H}''_{\mathbf{F}''}$ -элемент, предполагаемый известным. В пространстве $\mathbf{H}$ в качестве множества основных элементов принимается линейное множество

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \times \mathbf{F}''. \quad (2.3)$$

Тогда частично наблюдаемый элемент

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

будет случайным $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}$ -элементом (см. п. 1Г). Корреляционный оператор R_z этого элемента предполагается ограниченным на множестве $\mathbf{H}$ и в силу (2.4) может быть представлен в блочно-операторной форме

$$R_z = \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где $R_x = Mxx^*$, $R_y = Myy^*$, $R_{xy} = (R_{yx})^* = Mxy^*$ — корреляционные и взаимокорреляционные операторы соответствующих случайных элементов. Пусть $h: \mathbf{H}''_{\mathbf{F}''} \rightarrow \mathbf{H}'_{\mathbf{F}}$ — некоторый линейный оператор, определенный на всем $\mathbf{H}''_{\mathbf{F}''}$. Предположим, что существует оператор $h^*: \mathbf{H}'_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{H}''_{\mathbf{F}''}$, определенный на всем $\mathbf{H}'_{\mathbf{F}}$, и для произвольных элементов $\varphi' \in \mathbf{H}'_{\mathbf{F}}$, $\varphi'' \in \mathbf{H}''_{\mathbf{F}''}$ удовлетворяющий соотношению $(h\varphi'')^* \varphi' = (\varphi'')^* (h^* \varphi')$. Этим условием оператор h^* определяется однозначно, и его естественно назвать сопряженным к оператору h (см. лемму 1.6, в которой утверждается существование вводимых так сопряженных операторов для линейных финитных сверху операторов). Предположим также, что $h^* \mathbf{F}'' \subseteq \mathbf{H}'$.

Случайный $\mathbf{H}'_{\mathbf{F}}$ -элемент $\hat{x}$, равный

$$\hat{x} = hy, \quad (2.6)$$

имеет корреляционный оператор

$$R_{\hat{x}} = hR_y h^*: \mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{H}'. \quad (2.7)$$

Элемент $\hat{x}$ естественно интерпретировать как *линейную оценку* "ненаблюдаемой" компоненты x случайного H_F -элемента z , осуществляемую с помощью реализации его наблюдаемой компоненты y . Соотношение (2.6) при этом будем называть *линейным фильтром с весовым оператором h* . Качество фильтра условимся характеризовать с помощью величин

$$\begin{aligned} J_{\varphi'}(h) &= M |\langle \varphi', x - \hat{x} \rangle|^2 = \\ &= \langle \varphi', [R_x - h(R_{xy})^* - R_{xy}h^* + hR_yh^*] \varphi' \rangle_{H'}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где φ' — произвольный элемент из выделенного множества $\Phi' \subseteq F$ (в силу первого равенства (2.8) нет необходимости предполагать существование сопряженного у оператора h). Пусть h — некоторое выделенное множество весовых операторов $h: H''_F \rightarrow H'_F$, тогда задача h -оптимальной фильтрации может быть записана в виде

$$J_{\varphi'}(h) \rightarrow \inf_{h \in \mathfrak{h}}, \quad \varphi' \in \Phi'. \quad (2.9)$$

Если нижняя грань в (2.9) не достигается на множестве $\mathfrak{h}$ при каждом $\varphi' \in \Phi'$, то задача h -оптимальной фильтрации неразрешима. При разрешимости задачи требуется "построить" оптимальный фильтр, при ее неразрешимости приходится довольствоваться построением оптимизирующей последовательности весовых операторов, т.е. последовательности $\{h^{(l)}\}$, $h^{(l)} \in \mathfrak{h}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_{\varphi'}(h^{(l)}) = \inf_{h \in \mathfrak{h}} J_{\varphi'}(h), \quad \varphi' \in \Phi'. \quad (2.10)$$

Если оптимальное решение задачи фильтрации обычно определяется однозначно, то оптимизирующая последовательность может выбираться по-разному, при этом желательны "более простые" последовательности. В любом случае интерес представляет вычисление нижней грани в (2.9).

Сложность поставленной задачи существенно зависит от выбора множества $\mathfrak{h}$ весовых операторов, в котором оптимизируется фильтр. Наиболее простая ситуация имеет место, если в качестве $\mathfrak{h}$ выбрано множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из H'' в H' . Соответствующие фильтры назовем *устойчивыми*.

Отметим, что в качестве множества Φ' в (2.9) часто выбирается все пространство H' . В этом случае иногда удобно качество

фильтрации характеризовать скалярной величиной

$$J(h) = \sup_{\varphi' \in \mathbf{H}'} \frac{\mathbf{M} |\langle \varphi', x - \hat{x} \rangle|^2}{\langle \varphi', \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'}}. \quad (2.11)$$

Конечность величины (2.11) предполагает, что частично наблюдаемый случайный элемент x принимает значения в пространстве $\mathbf{H}$.

Б. Связь задачи оптимальной фильтрации с общей многокритериальной задачей оптимизации. Задача (2.9) по форме может быть отнесена к многокритериальной: рассматривается множество критериев $J_{\varphi'}(h)$, параметризованное элементами из множества Φ' . Множество $\mathbf{h}$ весовых операторов может быть естественным образом полупорядочено в соответствии с правилом: оператор $h' \in \mathbf{h}$ предшествует оператору $h'' \in \mathbf{h}$ ($h' < h''$), если $J_{\varphi'}(h') \leq J_{\varphi'}(h'')$ для любого элемента $\varphi' \in \Phi'$. Это приводит к понятию оптимальности по Парето (или P -оптимальности): весовой оператор $h_0 \in \mathbf{h}$ является P -оптимальным (в множестве $\mathbf{h}$ по отношению к семейству Φ'), если в $\mathbf{h}$ не существует оператора $\tilde{h}$, предшествующего оператору h_0 . Вообще говоря, могут существовать несравнимые между собой P -оптимальные операторы.

Разрешимость задачи (2.9) означает, что множество P -оптимальных операторов состоит из сравнимых между собой операторов, т.е. для любых P -оптимальных операторов h' , h'' при любом элементе $\varphi' \in \Phi'$ справедливо равенство $J_{\varphi'}(h') = J_{\varphi'}(h'')$. Можно сказать, что это означает существование "универсального" фильтра, весовой оператор $h_0 \in \mathbf{h}$ которого доставляет наименьшее значение критерию $J_{\varphi'}(\cdot)$ при каждом φ' . Как выяснится позже (см. теорему 1.1), такая "равномерная" по множеству Φ' разрешимость задачи оптимальной фильтрации обычно имеет место (в отличие, скажем, от задач оптимального управления, в которых "универсальные" регуляторы существуют в исключительных случаях).

В. Решение задачи оптимальной фильтрации в классе устойчивых фильтров. Для решения задачи оптимизации в классе $\mathbf{h}$ всех линейных ограниченных весовых операторов нам потребуется понятие псевдообращения корреляционного оператора R_y случайного элемента y . Пусть Q_R — ортопроектор на пространство значений оператора R_y и предположим, что оператор R_y ограниченно обратим в подпространстве $Q_R \mathbf{H}$ (это

значит, что в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ оператор R_y не имеет точек спектра за возможным исключением самой точки $\lambda = 0$). Обозначим обращение оператора R_y в инвариантном подпространстве $Q_R \mathbf{H}$ через $R_y^{-1} Q_R$. Тогда оператор

$$R_y^+ = Q_R R_y^{-1} Q_R Q_R \quad (2.12)$$

называется *псевдообратным* (*псевдообращением*) для оператора R_y . Из (2.12) следует, что

$$R_y^+ R_y = R_y R_y^+ = Q_R. \quad (2.13)$$

Нетрудно убедиться, что соотношениями (2.13) псевдообратный оператор R_y^+ определяется однозначно.

Возможны и другие эквивалентные определения псевдообращения эрмитова оператора R_y [4, 70]. Например, минимальное по норме решение задачи минимизации

$$\langle R_y g - f, R_y g - f \rangle \rightarrow \inf_{g \in \mathbf{H}}, \quad f \in \mathbf{H},$$

при сформулированных условиях на оператор R_y является линейной функцией элемента f и дается формулой

$$g = R_y^+ f. \quad (2.14)$$

Сформулируем теперь результат о разрешимости задачи оптимальной фильтрации в классе устойчивых фильтров.

Теорема 1.1. *Предположим, что корреляционный оператор R_x случайного $\mathbf{H}_F$ -элемента z ограничен в $\mathbf{H}$, причем корреляционный оператор R_y случайного $\mathbf{H}''$ -элемента y допускает ограниченное псевдообращение R_y^+ в $\mathbf{H}''$ и $R_{xy} \mathbf{F}'' \subseteq \mathbf{H}'$. Тогда задача минимизации (2.9), (2.8) в классе $\mathbf{h}$ ограниченных весовых операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$ разрешима и весовой оператор h_{opt} оптимального фильтра определяется формулой*

$$h_{\text{opt}} = R_{xy} R_y^+. \quad (2.15)$$

При этом

$$J_{\varphi'}(h) = J_{\varphi'}(h_{\text{opt}}) = \langle \varphi', [R_x - R_{xy} R_y^+ (R_{xy})^*] \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'}. \quad (2.16)$$

Оператор (2.15) является оптимальным и в задаче минимизации функционала (2.11), при этом

$$J(h) = J(h_{\text{opt}}) = |R_x - R_{xy} R_y^+ (R_{xy})^*|.$$

Доказательство почти очевидно, соответствующие выкладки приведены в Приложении. Отметим, что весовой оператор (2.15) является оптимальным и в задаче оптимизации (2.9) при произвольном выборе множества Φ' .

Отметим, что если оператор R_y имеет нетривиальное нуль-пространство ($Q_R \neq I_{H''}$), то решение задачи оптимальной фильтрации неединственно. Действительно, как следует из формулы (2.8), весовой оператор

$$h = h_{\text{opt}} + \tilde{h} (I_{H''} - Q_R) \quad (2.17)$$

при любом выборе ограниченного оператора $\tilde{h}: H'' \rightarrow H'$ удовлетворяет условию

$$J(h) = J(h_{\text{opt}}),$$

а потому также является оптимальным. Если $Q_R = I_{H''}$, то оператор R_y ограниченно обратим в H'' , $R_y^+ = R_y^{-1}$, и формула (2.15) принимает вид

$$h_{\text{opt}} = R_{xy} R_y^{-1}, \quad (2.18)$$

определяя единственное решение задачи оптимизации (2.9).

Разумеется, эффективность формулы (2.18) определяется возможностью "явного" обращения положительно-определенного оператора R_y ; в бесконечномерном пространстве эта проблема в общем случае не допускает "конструктивных" решений, так что даваемое теоремой 1.1 "решение" задачи фильтрации является условным, это скорее "теорема существования" оптимального фильтра. В некоторых случаях обращение оператора R_y осуществляется эффективно (например, если имеется возможность "записать" эти операторы в базисе, где они диагональны; аналогичная ситуация имеет место в стационарном случае, когда задачу фильтрации удастся переформулировать в "частотных терминах").

Г. Пример: задача линейного оценивания. В рассмотренную в предыдущем пункте схему оптимальной фильтрации укладывается известная проблема линейного оценивания параметров полезного сигнала по наблюдениям за его реализацией. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Предположим, что наблюдаемый случайный элемент y является случайным процессом, определенным на временном промежутке T и имеющим следующую структуру:

$$Dy = Fy + Dv, \quad (2.19)$$

где D — оператор обобщенного дифференцирования, $y = \{y(t), t \in T, y(t) \in \mathbb{R}^m\}$, F — линейный оператор из евклидова пространства $\mathbb{R}^p$ в гильбертово пространство $L_2(m, T)$ квадратично-интегрируемых на интервале T m -вектор-функций, определяемый как оператор умножения на детерминированную, непрерывную и ограниченную на множестве T $m \times p$ -матричную функцию $F(t)$, $(F\vartheta)(t) = F(t)\vartheta$, известную во все моменты времени $t \in T$. Вектор параметров $\vartheta \in \mathbb{R}^p$,

$$\vartheta = \text{col}(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(p)}), \quad (2.20)$$

предполагается постоянным во времени случайным p -вектором, имеющим статистики

$$\bar{\vartheta} = M\vartheta, \quad R_\vartheta = M(\vartheta - \bar{\vartheta})(\vartheta - \bar{\vartheta})^*, \quad (2.21)$$

наконец, "помеха наблюдения" $v = \{v(t), t \in T, v(t) \in \mathbb{R}^m\}$ предполагается центрированным случайным процессом с известной матрицей корреляций

$$R_v(t, t') = Mv(t)[v(t')]^*, \quad t, t' \in T. \quad (2.22)$$

Предполагается, что корреляционный оператор $R_v: L_2(m, T) \rightarrow L_2(m, T)$ случайного процесса v ограничен и ограниченно обратим, а оператор $F^*F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — положительно-определенный. Оператор F^*F задается соотношением

$$F^*F = \int_T F^*(t)F(t) dt. \quad (2.23)$$

Используя понятие стохастического дифференциала, "линейную схему наблюдения" (2.19) можно переписать в виде

$$dy(t) = F(t)\vartheta dt + dv(t), \quad t \in T. \quad (2.24)$$

Ищется линейная оценка $\hat{\vartheta}$ параметра ϑ

$$\hat{\vartheta} = hDy, \quad (2.25)$$

где $h: L_2(m, T) \rightarrow \mathbb{R}^p$ — линейный оператор (весовой оператор фильтра (2.25)). Если h — интегральный оператор с ядром $h(\cdot)$, то фильтр (2.25) принимает вид стохастического интеграла [26]

$$\hat{\vartheta} = \int_T h(t) dy(t). \quad (2.26)$$

Мы пришли к рассмотренной в п. 1А задаче линейной фильтрации при $H' = R^m$, $H'' = L_2(m, T)$, $x = \vartheta$. Фильтр (2.6) при этом принимает вид (2.26). Отметим, что интегральный оператор Fh имеет вырожденное ядро $F(t)h(t')$, $t, t' \in T$.

Критерий качества оценки $\hat{\vartheta}$, определяемой формулой (2.26), примем в виде

$$\begin{aligned}
 J(h) &= \sup_{\varphi \in L_2} \frac{M |\langle \varphi, G(Dy - F\hat{\vartheta}) \rangle|^2}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \\
 &= \sup_{\varphi \in L_2} \frac{M |\langle \varphi, G(I - Fh)Dy \rangle|^2}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \\
 &= \sup_{\varphi \in L_2} \frac{\langle \varphi, G(I - Fh)R_{Dy}(I - Fh)^*G^*\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \\
 &= |G(I - Fh)R_{Dy}(I - Fh)^*G^*| = \\
 &= |(I - \tilde{F}\tilde{h})GR_{Dy}G^*(I - \tilde{F}\tilde{h})^*|, \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\tilde{F} = GF, \quad \tilde{h} = hG^{-1} \tag{2.28}$$

и G — ограниченный оператор "взвешивания" среднеквадратичной погрешности оценивания. Обозначим через $\mathbf{h}$ множество всех линейных ограниченных операторов $h: L_2(m, T) \rightarrow R^p$. Тогда задача оптимального оценивания может быть записана в виде

$$J(h) \rightarrow \inf_{h \in \mathbf{h}}. \tag{2.29}$$

Ее решение находится достаточно просто: нормы операторов BB^* и B^*B , как хорошо известно, совпадают, поэтому

$$\begin{aligned}
 J(h) &= |\tilde{R}_{Dy}^{1/2}(I - \tilde{F}\tilde{h})^*(I - \tilde{F}\tilde{h})\tilde{R}_{Dy}^{1/2}| = \\
 &= |\tilde{R}_{Dy}^{1/2} [I - \tilde{F}(\tilde{F}^*\tilde{F})^{-1}\tilde{F}^*] \tilde{R}_{Dy}^{1/2} + \\
 &+ \tilde{R}_{Dy}^{1/2} [(\tilde{F}^*\tilde{F})^{1/2}\tilde{h} - (\tilde{F}^*\tilde{F})^{-1/2}\tilde{F}^*]^* \times \\
 &\times [(\tilde{F}^*\tilde{F})^{1/2}\tilde{h} - (\tilde{F}^*\tilde{F})^{-1/2}\tilde{F}^*] \tilde{R}_{Dy}^{1/2}|, \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$\tilde{R}_{Dy} = GR_{Dy}G^*. \tag{2.31}$$

Несложно убедиться, что оптимальный весовой оператор h_{opt} определяется из условия обнуления второго слагаемого под знаком нормы в формуле (2.30) и поэтому

$$h_{\text{opt}} = (F^* G G^* F)^{-1} F^* G^* G. \quad (2.32)$$

При этом

$$\begin{aligned} \inf_{h \in \mathbf{h}} J(h) &= \left| \tilde{R}_{Dy}^{1/2} \left[I - \tilde{F} (\tilde{F}^* \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^* \right] \tilde{R}_{Dy}^{1/2} \right| = \\ &= \left| (G R_{Dy} G^*)^{1/2} \left[I - G F (F^* G^* G F)^{-1} F^* G^* \right] (G R_{Dy} G^*)^{1/2} \right|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отметим, что фильтр (2.26) с учетом формулы (2.32) может быть представлен в виде

$$\hat{\theta} = Q \int_T F^*(t) (G^* G D y)(t), \quad (2.34)$$

где $Q = (F^* G G^* F)^{-1} : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ — $p \times p$ -матрица (предполагается, что в $\mathbf{R}^p$ фиксирован некоторый ортонормированный базис). Таким образом, весовой оператор h_{opt} является ограниченным интегральным оператором. Из формул (2.32), (2.19) получаем соотношение

$$\hat{\vartheta} = h_{\text{opt}} D y = h_{\text{opt}} (F \vartheta + D v) = h_{\text{opt}} F \vartheta + h_{\text{opt}} D v = \vartheta + h_{\text{opt}} D v, \quad (2.35)$$

из которого следует, что $\mathbf{M} \hat{\vartheta} = \mathbf{M} \vartheta = \bar{\vartheta}$. Наиболее просто формула (2.32) выглядит при $G = I$. Тогда

$$h_{\text{opt}} = (F^* F)^{-1} F^*, \quad (2.36)$$

и (2.25) приводит к оценке метода наименьших квадратов [104]:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= (F^* F)^{-1} F^* D y = \\ &= \left[\int F^*(t) F(t) dt \right]^{-1} \int F^*(t) dy(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

При выборе $G = R_{Dy}^{-1/2}$ получаем марковскую оценку (см., например, оценку обобщенного метода наименьших квадратов [104]):

$$\hat{\vartheta} = \left(F^* R_{Dy}^{-1} F \right)^{-1} F^* R_{Dy}^{-1} D y. \quad (2.38)$$

Для несмещенной оценки $(\hat{\vartheta} - M\hat{\vartheta})$ в силу (2.19), (2.25) имеем

$$\hat{\vartheta} - M\hat{\vartheta} = (F^*GG^*F)^{-1} F^*G^*GDv. \quad (2.39)$$

Матрица ковариаций $R_{\hat{\vartheta}} = M(\hat{\vartheta} - M\hat{\vartheta})(\hat{\vartheta} - M\hat{\vartheta})^*$ этой оценки имеет, следовательно, вид

$$R_{\hat{\vartheta}} = (F^*GG^*F)^{-1} F^*G^*GR_vG^*GF(F^*GG^*F)^{-1}. \quad (2.40)$$

Используя неравенство Шварца, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$(F^*GG^*F)^{-1} F^*G^*GR_vG^* (F^*GG^*F)^{-1} \leq (F^*R_{Dy}^{-1}F)^{-1},$$

означающего, что величина (2.33) принимает наименьшее значение при $G = R_{Dy}^{-1/2}$, т.е. марковские оценки являются в этом смысле наилучшими в классе линейных оценок.

В практических задачах процесс y наблюдается в некоторые дискретные моменты времени. Пусть $\{t_l, l = 0, 1, \dots, L, t_0 = t_s, t_L = t_f\}$ — моменты наблюдения реализации процесса y и требуется получить оценку параметра ϑ как линейную функцию величин $y(t_l)$, $l = 0, 1, \dots, L$. Проследим, как изменяется оптимальная оценка в зависимости от числа L , характеризующего объем "данных наблюдения". Воспользуемся описанной выше схемой оптимального оценивания, рассматривая вместо процесса y его *кусочно-линейную аппроксимацию*

$$\tilde{y} = \{\tilde{y}(t) = y(t_l), t_l \leq t < t_{l+1}\}. \quad (2.41)$$

Процесс $\tilde{y}$ имеет "стохастический дифференциал"

$$d\tilde{y}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} [y(t_{l+1}) - y(t_l)] \delta(t - t_l) dt, \quad (2.42)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака [25]. Линейный фильтр (2.26) принимает тогда вид

$$\hat{\vartheta}_L = \int_T h(t) d\tilde{y}(t) = \sum_{l=1}^{L-1} h(t_l) [y(t_{l+1}) - y(t_l)]. \quad (2.43)$$

Марковская оценка (2.38) для "наблюдаемого" процесса $D\tilde{y}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_L &= (F^*R_{D\tilde{y}}^{-1}F)^{-1} F^*R_{D\tilde{y}}^{-1}y^{(L)} = \\ &= [F_L^*[R_{y^{(L)}}^{(L)}]^{-1}F_L]^{-1} F_L^*[R_{y^{(L)}}^{(L)}]^{-1}y^{(L)}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где использованы обозначения

$$F_L = \|F(t_1, \dots, F(t_L)\|,$$

$$R_y^{(L)} = \begin{vmatrix} R_{y(L)}(t_1, t_1) & \dots & R_{y(L)}(t_1, t_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{y(L)}(t_L, t_1) & \dots & R_{y(L)}(t_L, t_L) \end{vmatrix}, \quad (2.45)$$

$$R_{y(L)}(t_l, t_{l'}) = M[y(t_{l+1}) - y(t_l)][y(t_{l'+1}) - y(t_{l'})]^*.$$

Примем, что корреляционная функция $R_y(t, t') = My(t)[y(t')]^*$ непрерывно дифференцируема на множестве $T \times T$. В этом случае корреляционный оператор R_{Dy} является интегральным с непрерывным ядром

$$R_{Dy}(t, t') = \frac{\partial^2 R_y(t, t')}{\partial t \partial t'}.$$

Примем также, что корреляционный оператор R_y является положительным в $L_2(m, T)$.

Поведение оценок $\hat{v}_L$ при $L \rightarrow \infty$ зависит от того, как формируются "моменты наблюдения" $\{t_l\}$. Рассмотрим два возможных способа формирования этих моментов.

В первом случае примем, что интервал $T = \{t_s, t_f\}$ регистрации сигнала $D\hat{y}$ фиксирован и

$$t_l = t_s + (t_f - t_s)l/L, \quad l = 0, 1, \dots, L. \quad (2.46)$$

В силу положительности корреляционного оператора R_{Dy} операторы $R_y^{(L)}$ — положительно-определенные при каждом натуральном L . Тогда марковские оценки $\hat{v}_L$ при каждом L существуют и их совокупность $\{\hat{v}_L, L = 1, 2, \dots\}$ образует оптимизирующую последовательность, хотя эта последовательность не является сходящейся. Действительно, интегральный оператор R_{Dy} с непрерывным ядром не может быть ограниченно обратимым и, следовательно, предельная марковская оценка $\hat{v}$ при "полных наблюдениях" (см. (2.26)), вообще говоря, не существует.

Во втором случае примем, что возрастание объема "данных наблюдения" осуществляется за счет увеличения временного интервала T . Примем, что

$$t_l = t_s + l\Delta, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (2.47)$$

где Δ — шаг дискретизации (в данном случае $T = T_L = [t_s, t_s + L\Delta]$). Марковские оценки $\hat{\vartheta}_L$ вновь вычисляются по формулам (2.44), (2.45). В данном случае

$$\begin{aligned} F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}F_L &= \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L F(t_l)R_{ll'}^{(L)}[F(t_{l'})]^*, \\ F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}v^{(L)} &= \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L F(t_l)R_{ll'}^{(L)}[v(t_{l'+1}) - v(t_{l'})], \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $R_{ll'}^{(L)}$ — матричные элементы матрицы $[R_y^{(L)}]^{-1}$. В типичных случаях в силу закона больших чисел с вероятностью 1

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L F(t_l)R_{ll'}^{(L)}[v(t_{l'+1}) - v(t_{l'})] = 0, \quad (2.49)$$

причем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \sum_{l=0}^L \sum_{l'=0}^L F(t_l)R_{ll'}^{(L)}[F(t_{l'})]^* \gg 0. \quad (2.50)$$

Соотношения (2.49), (2.50) в силу формулы (2.38) означают справедливость равенства

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_\infty &= \lim_{L \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}F_L^{-1}F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}y^{(L)} \right] = \\ &= F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}F_L^{-1}F_L^*[R_y^{(L)}]^{-1}F_L\vartheta = \vartheta, \end{aligned}$$

т. е. марковские оценки ϑ при сделанных выше предположениях сильно состоятельны. Подчеркнем, что вывод о сильной состоятельности оценок ϑ_L справедлив в рассматриваемом случае "бесконечного" временного интервала T без предположения случайности вектора параметров ϑ . В последнем случае говорить об оптимальности марковских оценок ϑ_L при каждом натуральном L , разумеется, нельзя.

Д. Замечания по поводу однокритериальной задачи оптимальной фильтрации. Скалярный критерий (2.11) является не единственно возможным в теории фильтрации. Хорошо известны и другие однокритериальные постановки задачи оптимальной фильтрации. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Предположим, что частично наблюдаемый случайный элемент $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ и множество h весовых операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$

таковы, что случайный элемент $x - hy$ принимает значения в множестве $\mathbf{H}'$, причем

$$\mathbf{M}\langle x - hy, x - hy \rangle < \infty. \quad (2.51)$$

Величина

$$J(h) = \mathbf{M}\langle x - \hat{x}, x - \hat{x} \rangle = \langle x - hy, x - hy \rangle = \mathbf{M}|x - hy|^2 \quad (2.52)$$

представляет собой среднеквадратичную погрешность линейной фильтрации, определяемую весовым оператором h , и часто принимается за критерий оптимальности соответствующего фильтра. Оптимизационная задача

$$J(h) \rightarrow \inf_{h \in \mathbf{h}} \quad (2.53)$$

является типичной в теории фильтрации.

Примем, что выделенное множество $\mathbf{h}$ весовых операторов является подпространством банахова пространства линейных ограниченных операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$; норма элемента h совпадает с операторной нормой:

$$|h| = \left(\sup_{\varphi'' \in \mathbf{H}''} \frac{\langle h\varphi'', h\varphi'' \rangle_{\mathbf{H}'}}{\langle \varphi'', \varphi'' \rangle_{\mathbf{H}''}} \right)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Предположим, что множество $\mathbf{h}$ допускает гильбертизацию, т. е. на $\mathbf{h}$ может быть введено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{h}}$, $|h| = (\langle h, h \rangle_{\mathbf{h}})^{1/2}$, по отношению к которому $\mathbf{h}$ является гильбертовым пространством. Такая ситуация возникает, например, в случае, когда $\mathbf{h}$ — множество стационарных операторов, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{\text{ст}}$, символы которых суть матричные функции (см. гл. 3, п. 2Г). Так, если стационарным операторам h' , h'' отвечают символы $h'(\cdot)$, $h''(\cdot)$, то

$$\langle h, h \rangle_{\mathbf{h}} = \frac{1}{2\pi i} \oint \text{sp}\{[h'(\lambda)]^* h''(\lambda)\} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (2.55)$$

где справа стоит контурный интеграл по единичной окружности и $\text{sp}\{\cdot\}$ — след соответствующей квадратной матрицы. Гильбертизация множества $\mathbf{h}$ возможна и в том важном случае, когда оно составлено из весовых операторов, являющихся *операторами Гильберта — Шмидта*, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ (см. гл. 3, п. 2В; норма элемента $h \in \mathbf{h}_0$ определяется формулой (2.16) гл. 3). Скалярное произведение в этом случае вводится по формуле

$$\langle h, h \rangle_{\mathbf{h}} = \text{sp}\{(h')^* h''\}, \quad (2.56)$$

где справа стоит сумма собственных значений оператора Гильберта—Шмидта $(h')^* h''$. Если теперь принять, что частично-наблюдаемый процесс z является стационарным и имеет ограниченный корреляционный оператор, то критерий оптимальности (2.52) имеет вид квадратичной функции, определенной на гильбертовом пространстве $\mathbf{h}$,

$$J(h) = \langle h, Rh \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle r, h \rangle + \rho, \quad (2.57)$$

где $R: \eta \rightarrow \mathbf{h}$ — линейный оператор, r — элемент из $\mathbf{h}$ и ρ — скалярная величина, вычисляемые по формулам

$$Rh = hR_y, \quad r = -R_{xy}, \quad \rho = \operatorname{sp}\{R_x\}, \quad (2.58)$$

и R_x, R_y, R_{xy} — составляющие корреляционного оператора R_z (см. (1.12), (2.5), подчеркнем, что оператор R_{xy} по предположению принадлежит множеству $\mathbf{h}$).

Минимизация квадратичной функции (2.57) — хорошо известная задача (эта задача часто встречается в различных разделах функционального анализа, математической физики и вариационного исчисления). Минимизирующий функцию (2.57) элемент h обязан удовлетворять линейному уравнению

$$Rh = -r, \quad (2.59)$$

и на всяком решении уравнения (2.59) функционал (2.57) достигает наименьшего значения. В силу альтернативы Фредгольма разрешимость уравнения (2.59) имеет место в том и только том случае, если элемент r принадлежит множеству значений оператора R . В частности, если корреляционный оператор R_y положительно-определенный, то уравнение (2.59) имеет единственное решение и в силу обозначений (2.58) *весовой оператор* h_{opt} оптимального фильтра находится по формуле

$$h_{\text{opt}} = -R_{xy} R_y^{-1}. \quad (2.60)$$

Формула (2.60) хорошо известна, она определяет оптимальный фильтр и без предположения возможности ввести структуру гильбертова пространства на множестве $\mathbf{h}$ допустимых весовых операторов (см., например, теорему 1.1).

Использование формулы (2.60) предполагает умение обращаться оператор R_y (в гильбертовом пространстве $\mathbf{h}$), в общем случае эта проблема может оказаться достаточно сложной. Математически более содержательной является задача оптимизации

$$J(h) \rightarrow \inf_{h \in \mathbf{h}}, \quad (2.61)$$

где $\tilde{\mathbf{h}}$ — выделенное подпространство гильбертова пространства $\mathbf{h}$. Если ввести ортопроектор Q на это подпространство, $\tilde{\mathbf{h}} = Q\mathbf{h}$, то функционал (2.57) переписывается в виде

$$J(h) = \langle \tilde{h}, \tilde{R}\tilde{h} \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{r}, \tilde{h} \rangle + \rho, \quad (2.62)$$

где (см. (2.58)) оператор $\tilde{R}: \tilde{\mathbf{h}} \rightarrow \tilde{\mathbf{h}}$ и элемент $\tilde{r} \in \tilde{\mathbf{h}}$ определяются формулами

$$\tilde{R} = QR_yQ, \quad \tilde{r} = Qr, \quad (2.63)$$

и вновь приходим к задаче оптимизации (2.53), (2.57), но уже для гильбертова пространства $\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}}$. Уравнение (2.59) теперь принимает вид

$$\tilde{R}h = -\tilde{r}, \quad (2.64)$$

но теперь его решение ищется в подпространстве $\tilde{\mathbf{h}} = Q\mathbf{h}$. В частности, если корреляционный оператор R_y положительно-определенный в $\mathbf{h}$, то он является положительно-определенным и в подпространстве $\tilde{\mathbf{h}}$, а потому уравнение (2.64) имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$h_{\text{opt}} = -QR_{xy}(QR_yQ)^{-1}, \quad (2.65)$$

где через $(QR_yQ)^{-1}$ обозначено обращение оператора QR_yQ в подпространстве $\tilde{\mathbf{h}} = Q\mathbf{h}$. "Вычислить" оператор $(QR_yQ)^{-1}$ может оказаться значительно сложнее, чем оператор R_y^{-1} . Приведем пример подобной ситуации.

Предположим, что $\tilde{\mathbf{h}} \subset \mathbf{h}$ — подмножество τ -каузальных операторов (см. гл. 2, п. 2Б). Роль ортопроектора $Q = Q^\tau$ играет оператор сепарации (см. гл. 3, п. 2Б). Уравнение (2.64) может быть переписано в виде

$$[Rh]_{[\tau]} = -[r]_{[\tau]}, \quad (2.66)$$

где символ $[\cdot]_{[\tau]}$ обозначает операцию сепарации, $[r]_{[\tau]} = Q^\tau r$. При $\tau = 0$ уравнение (2.66) представляет собой абстрактный аналог уравнения Винера — Хопфа; к Винеру восходит способ решения этого уравнения, основанный на операции факторизации. Именно, если корреляционный оператор R_y допускает представление (спектральную факторизацию) в виде

$$R_y = UU^*, \quad (2.67)$$

где U — каузальный ограниченный оператор, имеющий ограниченный каузальный обратный U^{-1} , то единственное решение

уравнения (2.66) с учетом обозначений (2.58) может быть представлено в виде

$$h = [R_{xy}(U^*)^{-1}]_{[\tau]} U^{-1}. \quad (2.68)$$

Действительно, из (2.68) имеем

$$\begin{aligned} Rh &= hR_y = [R_{xy}(U^*)^{-1}]_{[\tau]} U^* = R_{xy}(U^*)^{-1} U^* + \\ &+ [R_{xy}(U^*)^{-1}]_{[\bar{\tau}]} U^* R_{xy} + (I_h - Q^r) R_{xy}(U^*)^{-1} U^* = \\ &= -r + (I_h - Q^r) R_{xy}(U^*)^{-1} U^*. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Из (2.69) непосредственно следует, что $Q^r Rh = Q^r r$, т.е. элемент (2.68) действительно удовлетворяет уравнению (2.66). Однозначная разрешимость уравнения (2.66) следует из положительной определенности оператора R , являющейся следствием предположения о спектральной факторизации (2.67). Таким образом, в данном случае обращение оператора $\tilde{R} = Q^r R Q^r$ в подпространстве $h = Q^r h$ оказалось возможным, если известна спектральная факторизация корреляционного оператора R_y .

Задачу минимизации квадратичной функции (2.57), определенной на множестве финитных операторов, естественно назвать *задачей Винера*, в гл. 2 дается постановка задачи Винера в более общей форме, не предполагающей гильбертизацию множества h допустимых весовых операторов (см. также [110]). Такая возможность связана с рассмотрением задачи минимизации симметричной операторной функции (см. (2.8))

$$f(h) = R_x - h(R_{xy})^* - R_{xy}h^* + hR_yh^*, \quad (2.70)$$

определенной на множестве h каузальных операторов h . Множество симметричных операторов полуупорядоченно (в смысле неравенства между их квадратичными формами), и можно поставить задачу нахождения оператора $h_{\text{opt}} \in h$, на котором операторная функция (2.70) принимает наименьшее значение. Если такой оператор h_{opt} существует, то, очевидно, функционалы (2.8) принимают наименьшее значение при любом элементе φ' , т.е. оператор h_{opt} определяет в этом случае решение задачи оптимизации (2.9). Содержательным моментом приведенных рассуждений является то обстоятельство, что операторная функция (2.70) при достаточно общих условиях достигает наименьшего значения на множестве каузальных операторов, и минимизирующий ее оператор h_{opt} может быть найден с помощью спектральной факторизации оператора R_y . Задачу минимизации операторной функции (2.70) будем называть *операторным*

аналогом задачи Винера, исследованию этой (и несколько более общей) задачи (при тех или иных уточняющих условиях) посвящены гл. 2, 3.

Решение задачи Винера или ее операторного аналога в форме (2.68) допускает естественную интерпретацию действия оптимального фильтра (см. п. 4Б), данную Боде и Шенноном [125]. В дальнейшем формулу (2.68) будем называть представлением весового оператора оптимального фильтра в форме Боде — Шеннона. В гл. 2 устанавливаются условия, при которых эта задача допускает решение в форме Боде — Шеннона.

3. Причинное пространство и финитные в нем преобразования

Математическая содержательность теории Винера — Колмогорова связана с рассмотрением *неупреждающих (физически реализуемых) линейных оценок* ненаблюдаемой компоненты частично наблюдаемого процесса. Это дополнительное ограничение на множество линейных фильтров возникает в прикладных задачах, когда требуется получать оценки тех или иных случайных величин до завершения процесса наблюдения, т. е. когда приходится довольствоваться "данными наблюдения", доступными к соответствующему моменту времени. Подобные задачи достаточно распространены [70, 104], в математической статистике сложился специальный раздел (последовательный анализ), в котором обсуждаются проблемы оперативного использования информации, доступной в каждый данный момент времени.

Операторная переформулировка задачи неупреждающего оценивания требует формализации понятия физической реализуемости (физической осуществимости) фильтра. Строгое понятие физической реализуемости удастся ввести на основе понятий, разработанных в теории каузальных (причинных, неупреждающих) операторов — современном разделе теории линейных операторов в причинных пространствах (т. е. в пространствах, наделенных временной структурой). Соответствующая теория развита в степени, позволяющей с ее помощью дать содержательную интерпретацию разнообразных задач фильтрации и управления [132].

Ниже в основу понятия неупреждающей фильтрации положено понятие *финитного оператора* — так называется линейный оператор, обладающий специальными свойствами по отношению к однопараметрическому семейству проекторов, определя-

ющему временную структуру рассматриваемого пространства. На уровне интерпретации финитность означает конечность влияния оператора на будущее и (или) прошлое, определенное соответствующим образом. Глубина влияния описывается некоторой вещественной конечной функцией — характеристикой финитности. Равенство нулю этой функции финитного сверху оператора определяет каузальный оператор. В данном разделе обсуждаются также некоторые свойства финитных операторов, позволяющих дать содержательную операторную трактовку теории Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации.

А. Гильбертово пространство, наделенное временной структурой. Предположим, что гильбертово пространство $\mathbf{H}$ наделено временной структурой. Это означает, что выделено семейство

$$P_T = \{P_t, t \in T\} \quad (3.1)$$

коммутирующих проекторов $P_t: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, ($P_t = P_t^2$, $P_t P_{t'} = P_{t'} P_t$), параметризованное вещественным параметром $t \in T = (t_s, t_f)$, $t_s < t_f$ (не исключается $t_s = -\infty$ и (или) $t_f = +\infty$), и обладающее свойствами

а) монотонности:

$$P_t P_{t'} = P_{t'} \quad \text{при } t \geq t', \quad t, t' \in T; \quad (3.2)$$

б) полноты:

$$\lim_{t \rightarrow t_s} P_t = 0_{\mathbf{H}}, \quad \lim_{t \rightarrow t_f} P_t = I_{\mathbf{H}}. \quad (3.3)$$

Здесь $0_{\mathbf{H}}$ и $I_{\mathbf{H}}$ — нулевой и единичный операторы в пространстве $\mathbf{H}$. Пределы в (3.3) понимаются в сильном смысле, соотношение (3.2) равносильно включениям $P_t \mathbf{H} \subseteq P_{t'} \mathbf{H}$ при всех $t \leq t'$ ($t, t' \in T$). Вещественный параметр t интерпретируется как "время" и изменяется в интервале $T = (t_s, t_f)$. Предполагается,

что семейство P_T равномерно по t ограничено $\left(\sup_{t \in T} |P_t| < \infty \right)$ и сильно непрерывно слева, т.е. для любого элемента $\varphi \in \mathbf{H}$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_{t-\varepsilon} \varphi = P_t \varphi. \quad (3.4)$$

Всякое такое семейство сильно непрерывных слева и ограниченных в совокупности коммутирующих проекторов, обладающее свойствами монотонности (3.2) и полноты (3.3), называется *разложением единицы* соответствующего пространства

[93]. Если разложение единицы в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ состоит из ортопроекторов ($P_t = P_t^*$), то будем говорить об эрмитовом разложении единицы, для этих проекторов условие равномерной ограниченности заведомо выполнено, поскольку $|P_t| \leq 1$. В дальнейшем выделенное разложение единицы P_T предполагается фиксированным и упоминание о нем, как правило, будет опускаться. Иногда возникает необходимость вводить временную структуру в пространствах, не являющихся гильбертовыми, там условие ограниченности монотонного и полного семейства проекторов существенно.

Если гильбертово пространство является прямым произведением гильбертовых пространств $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$, в которых временные структуры введены с помощью разложений единиц $P_{T'}'$, P_T'' с одинаковым временным интервалом T , то в $\mathbf{H}$ временная структура естественно порождается с помощью семейства ортопроекторов

$$P_t = \left\| \begin{array}{cc} P_t' & 0_{12} \\ 0_{21} & P_t'' \end{array} \right\|, \quad t \in T, \quad (3.5)$$

(0_{12} , 0_{21} — нуль-операторы, действующие соответственно из $\mathbf{H}''$ в $\mathbf{H}'$ и из $\mathbf{H}'$ в $\mathbf{H}''$). Пара $(\mathbf{H}, P_T)$, состоящая из пространства $\mathbf{H}$ и выделенного в нем разложения единицы P_T , называется также причинным (точнее, P_T -причинным) пространством.

Б. Финитные операторы в причинном пространстве. Линейный оператор A с плотной областью определения $D\mathbf{H} \subseteq \mathbf{H}$ будем называть *финитным сверху*, если существует измеримая в существенном ограниченная функция $\tau: T \rightarrow T$, такая, что при почти всех $t \in T$, $t < t_f$, оператор $P_t A$ ограничен в $\mathbf{H}$ и на множестве $D(A) \cap P_{t-\tau(t)} D(A)$ выполнено соотношение

$$P_t A = P_t A P_{t-\tau(t)}. \quad (3.6)$$

Функцию $\tau = \tau_+(\cdot)$ назовем (верхней) характеристикой оператора A ; финитный сверху оператор A с характеристикой $\tau_+(\cdot)$ будем называть τ_+ -каузальным (или τ_+ -финитным). Множество всех τ_+ -финитных операторов, имеющих одинаковую характеристику $\tau(\cdot)$, обозначим $\mathbf{A}^\tau$, а их объединение — множество всех финитных сверху операторов — через $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$,

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \bigcup_{\tau} \mathbf{A}^\tau. \quad (3.7)$$

В причинном пространстве (H, P_T) каждому элементу $\varphi \in H$ может быть сопоставлена траектория

$$\tilde{\varphi}(\varphi) = \{P_t\varphi, t \in T\}, \quad (3.8)$$

соединяющая его с нулевым элементом 0_H пространства H . Соотношение (3.6) показывает, что τ -каузальный оператор A , рассматриваемый как "оператор сдвига" вдоль этих траекторий, осуществляет их преобразование в определенном смысле независимо от будущего. Именно, значение $P_t A\varphi$ такой траектории в "момент времени" t не зависит от того, как поведет себя траектория $\{P_{t'}\varphi, t' \in T\}$ в моменты времени $t' > t - \tau(t)$ — следствие монотонности (3.2) семейства P_T . Таким образом, характеристика $\tau(\cdot)$ финитного сверху оператора A свидетельствует о "глубине" его воздействия на "будущее" преобразуемых им траекторий. Финитные сверху операторы с нулевой характеристикой, $\tau(t) \equiv 0$, называются также *каузальными* (причинными, неупреждающими, неантисипативными, запаздывающими, вольтеровыми, наследственными) — этот важный класс операторов естественным образом возникает в задачах управления [69, 105] с использованием обратных связей (которые, в силу принципа причинности системы управления, должны быть неупреждающими). В теории фильтрации рассматриваются задачи прогноза и сглаживания, что также требует введения финитных отображений.

Финитность снизу вводится аналогично при замене "будущего" на "прошлое". Именно, линейный оператор A , действующий в причинном пространстве (H, P_T) и имеющий плотную область определения $D(A)$, называется *финитным снизу*, если существует измеримая вещественная в существенном ограниченная функция $\tau: T \rightarrow T$, такая, что при почти каждом $t \in T$, $t \neq t_f$, $t - \tau(t) \in T$, оператор $(I_H - P_t)A$ определен на $D(A)$ и на множестве $D(A) \cap (I_H - P_{t-\tau(t)})D(A)$ выполняется соотношение

$$(I_H - P_t)A = (I_H - P_t)(I_H - P_{t-\tau(t)})A. \quad (3.9)$$

Функция $\tau = \tau_-(\cdot)$ при этом называется (*нижней*) *характеристикой* финитного снизу оператора A , сам оператор A называется τ -антикаузальным (τ_- -финитным).

Из соотношений (3.9), (3.6) непосредственно следует, что в случае эрмитового разложения единицы оператор A финитен снизу в том и только том случае, если сопряженный ему оператор A^* финитен сверху, при этом нижняя характеристика оператора A совпадает с верхней характеристикой оператора A^* .

Операторы 0-упреждающие известны как *антикаузальные* (упреждающие, антисипативные). Множество всех финитных снизу операторов с характеристикой $\tau(\cdot)$ будем обозначать A_τ , множество всех финитных снизу операторов — через A_0 ,

$$A_0 = \bigcup_{\tau} A_\tau. \quad (3.10)$$

Оператор $A \in \overset{\circ}{A} \cap A_0$, являющийся финитным сверху и снизу, будем называть *двухсторонне финитным* (финитным). Таким образом, финитный оператор обладает двумя характеристиками: верхней и нижней, которые в общем случае различны. Если $\tau_+(t) = \tau_-(t) = \tau(t)$, то оператор называется τ -*локальным* (при $\tau(\cdot) \equiv 0$ — *локальным*, или *нейтральным*). Примером локального оператора является единичный (тождественный) оператор I_H . Локальным является любой линейный оператор, коммутирующий с проекторами разложения единицы P_T ; в частности, локальными являются проекторы P_i .

Лемма 1.2 Пусть A', A'' — финитные сверху (снизу) операторы с характеристиками $\tau'(\cdot), \tau''(\cdot)$ соответственно. Тогда их произведение $A = A'A''$ (если оно имеет смысл) является финитным сверху (снизу) оператором с характеристикой

$$\tau(t) = \tau'(t) + \tau''[t - \tau'(t)]. \quad (3.11)$$

Утверждение леммы 1.2 следует непосредственно из соотношений (3.6), (3.9) и не нуждается в особом доказательстве.

Таким образом, множества $\overset{\circ}{A}, A_0$ полуфинитных операторов обладают полугрупповым свойством относительно операции произведения их элементов. Из формулы (3.11) следует, что умножение финитного сверху (снизу) оператора на каузальный (антикаузальный) оператор не изменяет характеристики их произведения. В силу леммы 1.2 полугрупповым свойством обладают двухсторонне финитные операторы, при этом умножение их (слева либо справа) на локальный оператор не изменяет характеристик финитного оператора.

Финитные сверху операторы с неотрицательной (неположительной) характеристикой $\tau(\cdot)$ будем называть τ -*неупреждающими* (соответственно τ -*упреждающими*). Для финитных снизу

операторов также можно выделить операторы с неотрицательными и неположительными нижними характеристиками, но специальных названий для них вводить не будем.

Временную структуру можно вводить не только в гильбертовых пространствах, но и в пространствах более общей структуры, например в банаховых пространствах. Более того, в ряде случаев предпочтительнее вводить временную структуру не с помощью разложения единицы, а с помощью семейства расширяющихся подпространств. Действительно, проекторы $P_t \in P_T$ определяют семейство подпространств $H^t = (I_H - P_t)H$, $t \in T$ (обладающих естественным свойством монотонности $H^t \supseteq H^{t'}$ при $t \leq t'$ и полноты $H^{t^*} = H$, $H^{t^*} = \{0_H\}$), называемое цепочкой подпространств. В терминах цепочки подпространств свойство τ -каузальности оператора A ($D(A) \subseteq H$) выглядит так: $AH^{t-\tau(t)} \subseteq H^t$; τ -антикаузальность определяется аналогично.

Таким образом, неупреждаемость оператора A означает его *инвариантность* относительно подпространств цепочки. При этом нет необходимости упоминать о разложении единицы, хотя, разумеется, разложение единицы однозначно определяется цепочкой подпространств. Равномерная по t ограниченность проекторов разложения единицы эквивалентна отделенности от нуля раствора ("угла") между соответствующими подпространствами. Предположение о положительности раствора между подпространствами (т.е. равномерная ограниченность проекторов) является упрощающим, многие результаты теории каузальных операторов справедливы без этого предположения.

В. Пример: интегральные операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Для пояснения введенных выше понятий финитности, упреждаемости, неупреждаемости рассмотрим гильбертово пространство $H = L_2(\mathbb{R})$ квадратично-интегрируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$ скалярных функций. Пусть h — линейный интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R})$,

$$(h\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t')\varphi(t') dt'. \quad (3.12)$$

Пространство $L_2(\mathbb{R})$ будем рассматривать как причинное по отношению к семейству проекторов P_t , $t \in \mathbb{R}$, определяемых формулой

$$(P_t\varphi)(t') = 1(t - t')\varphi(t') = \begin{cases} \varphi(t') & \text{при } t' \leq t, \\ 0 & \text{при } t' > t, \end{cases} \quad (3.13)$$

т.е. проектор P_t является операцией "срезки" функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ в момент $t \in \mathbf{R}$. В силу (3.13)

$$(P_t h \varphi)(t') = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t', t'') \varphi(t'') dt'' & \text{при } t' \leq t, \\ 0 & \text{при } t' > t, \end{cases}$$

$$(P_t h P_{t-\tau(t)} \varphi)(t') = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t', t'') \varphi(t'') dt'' & \text{при } t' \leq \min\{t, t - \tau(t)\}, \\ 0 & \text{при } t' > \min\{t, t - \tau(t)\}, \end{cases}$$

и соотношение (3.6) для τ -финитного интегрального оператора h означает, что его ядро $h(t, t')$ удовлетворяет условию $h(t, t') = 0$ при $t' > \min\{t, t - \tau(t)\}$; формула (3.12) принимает вид

$$(h\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\min\{t, t-\tau(t)\}} h(t, t') \varphi(t') dt'. \quad (3.14)$$

Таким образом, финитность сверху интегрального оператора h означает, что значения функции $h\varphi$ в произвольный момент t не зависят от поведения функции φ в окрестности точки $t_f = +\infty$, эта окрестность характеризуется величиной $\tau(t)$. При $\tau(t) \geq 0$ значение функции $h\varphi$ в момент времени t зависит от φ неупреждающим образом, степень этой неупреждаемости и есть $\tau(t)$. При $\tau(t) \leq 0$ это значение зависит от φ упреждающим образом, степень этой "упреждаемости" есть $[-\tau(t)] = |\tau(t)|$.

Аналогичные выкладки в случае τ -финитного снизу интегрального оператора $h: L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})$ приводят к формуле

$$(h\varphi)(t) = \int_{\max\{t, t-\tau(t)\}}^{\infty} h(t, t') \varphi(t') dt', \quad (3.15)$$

т.е. значения функции $h\varphi$ в момент времени t теперь не зависят от поведения функции φ в соответствующей окрестности точки $t_f = -\infty$.

Для интегрального оператора совпадение нижней и верхней характеристик возможно лишь при нулевом операторе.

4. Расширенное причинное пространство и линейные в нем преобразования

В прикладных задачах, связанных с рассмотрением случайных процессов на неограниченном сверху временном интервале, иногда приходится иметь дело с процессами, которые неограниченно возрастают во времени. Подобная ситуация постоянно возникает при рассмотрении процессов, задаваемых рекуррентными соотношениями (дифференциальными либо разностными уравнениями). Введение временной структуры в гильбертовом пространстве позволяет расширить класс случайных элементов, включить в рассмотрение процессы, неограниченные на бесконечном промежутке времени. Такое расширение основано на специальном выборе в гильбертовом пространстве множества основных элементов (см. п. 1А), согласованного с временной структурой. Отметим, что описываемая ниже процедура расширения (пополнения) причинного пространства содержательна лишь для неограниченного сверху временного интервала T и бесконечномерного пространства H . Гильбертовость пространства H роли не играет, с равным успехом описываемые ниже построения могут быть реализованы в банаховом пространстве.

А. Расширение причинного пространства, согласованное с временной структурой. Рассмотрим причинное гильбертово пространство (H, P_t) (см. п. 1А). элемент $\varphi \in H$ назовем *финитным* (точнее, финитным сверху), если существует конечное число $t_* = t_*(\varphi) \in T$, такое, что $P_t \varphi = \varphi$ при $t \geq t_*$. Линейное множество F^0 всех финитных элементов плотно в H , назовем его множеством основных элементов пространства H , согласованным с временной структурой. Производя F^0 -слабое пополнение пространства H (см. п. 1А), получаем множество $\tilde{H} = H_{F^0}$, которое наряду с элементами множества H (элементами с конечной H -нормой) содержит обобщенные элементы (H -норма таких элементов бесконечна). Множество $\tilde{H}$ иногда для краткости будем называть t -расширением (t -пополнением) пространства H .

Полезно дать другое описание множества $\tilde{H}$. С этой целью наряду с исходной (сильной) топологией в H введем топологию, согласованную с временной структурой (t -топологию), определяемую с помощью следующей t -сходимости: будем говорить, что последовательность $\{\varphi_l, l \in N, \varphi_l \in H\}$ t -сходится к элементу $\varphi \in H$, если при каждом $t \in T$ справедливо предельное

соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_l \varphi_l = P_t \varphi, \quad (4.1)$$

что будем записывать как

$$t - \lim \varphi_l = \varphi.$$

Здесь t -сходимость определяет хаусдорфову топологию на $\mathbf{H}$, t -топология слабее исходной (слабой) топологии гильбертова пространства $\mathbf{H}$ и множество $\mathbf{H}$ в этой топологии не полно.

Лемма 1.3. *Полношение множества $\mathbf{H}$ в t -топологии совпадает с Γ^0 -слабым полношением $\bar{\mathbf{H}}$ множества $\mathbf{H}$.*

Утверждение леммы 1.3 почти очевидно и состоит, по существу, в расшифровке введенных понятий. Соответствующие рассуждения приведены в Приложении.

Таким образом, t -полношение пространства $\mathbf{H}$, снабженного t -топологией, является полным хаусдорфовым пространством. В силу леммы 1.3 элемент $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$ принадлежит пространству $\mathbf{H}$ в том и только том случае, если его $\mathbf{H}$ -норма конечна.

Б. Линейные преобразования в t -расширении гильбертова пространства. Линейный оператор A (с плотной в $\mathbf{H}$ областью определения $D(A)$) называется t -непрерывным (непрерывным в t -топологии), если для всякой последовательности $\{\varphi_l, l \in \mathbf{N}, \varphi_l \in D(A)\}$ справедлива импликация

$$t - \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l = 0_{\mathbf{H}} \rightarrow t - \lim_{l \rightarrow \infty} A\varphi_l = 0_{\mathbf{H}}. \quad (4.2)$$

Линейный ограниченный в $\mathbf{H}$ оператор может быть или не быть t -непрерывным, несложно привести соответствующие примеры.

Лемма 1.4. *Финитные свертку ограниченные операторы в $\mathbf{H}$ являются t -непрерывными.*

Доказательство леммы 1.4 приведено в Приложении.

Можно распространить t -непрерывный оператор A по непрерывности (путем замыкания в t -топологии) на t -расширение пространства $\mathbf{H}$, обозначим так полученный оператор через $\bar{A}$. В частности, локальные операторы $P_t \in P_{\mathbf{T}}$ в силу леммы 1.4 могут быть продолжены по непрерывности до проекторов $\bar{P}_t$, определенных на множестве $\bar{\mathbf{H}}$, которые, как нетрудно убедиться, образуют разложение единицы $\bar{P}_{\mathbf{T}} = \{\bar{P}_t, t \in \mathbf{T}\}$. Разложение единицы $\bar{P}_{\mathbf{T}}$ определяет временную структуру на множестве $\bar{\mathbf{H}}$.

Таким образом, пространство $(\bar{\mathbf{H}}, \bar{P}_T)$ является причинным. Тем самым на линейные операторы $\bar{A}$ переносятся определения $\bar{P}_T$ -финитности (сверху, снизу, двухсторонней) — см. п. 3Б. Очевидно, проекторы $\bar{P}_t$ являются локальными операторами в пространстве $\bar{\mathbf{H}}$.

Лемма 1.5. При любых $t \in T$, $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$ справедливо включение $\bar{P}_t \bar{\varphi} \in P_t \mathbf{H}$.

Доказательство леммы 1.5 приведено в Приложении.

Следствие. Сужение τ -финитного сверху оператора $\bar{A}$ на множество $\mathbf{H}$ порождает τ -финитный оператор A .

Действительно, в силу равенства $\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi} = P_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}$, справедливого для произвольного элемента $\bar{\varphi} \in D(A) \subseteq \mathbf{H}$, имеем

$$\begin{aligned} P_t A \bar{\varphi} &= P_t \bar{A} \bar{\varphi} = \bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi} = \bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi} = \\ &= \bar{P}_t \bar{A} P_{t-\tau(t)} \bar{\varphi} = \bar{P}_t A P_{t-\tau(t)} \bar{\varphi} = P_t A P_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}, \end{aligned}$$

откуда и следует справедливость соотношения (3.6), определяющего τ -финитность оператора A .

Здесь не предполагается, что сужение A оператора $\bar{A}$ на $\mathbf{H}$ действует в $\mathbf{H}$, т.е. оператор A может оказаться неограниченным как оператор в $\mathbf{H}$, однако во всяком случае его область определения плотна в $\mathbf{H}$ (в силу каузальности оператора $\bar{A}$ область определения оператора A заведомо содержит финитные элементы пространства $\mathbf{H}$).

Таким образом, при любых $t \in T$, $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$ справедливо включение $\bar{P}_t \bar{\varphi} \in \mathbf{H}$ и потому элемент $\bar{P}_t \bar{\varphi}$ имеет конечную $\mathbf{H}$ -норму. Пространство $\bar{\mathbf{H}}$ можно рассматривать как "нормированное" пространство с нормой элементов, определяемой формулой

$$|\bar{\varphi}|_{\bar{\mathbf{H}}} = \sup_{t \in T} |\bar{P}_t \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}}, \quad (4.3)$$

если принять, что оно включает элементы с бесконечной нормой. При этом все элементы $\bar{\varphi}$ с конечной $\bar{\mathbf{H}}$ -нормой (и только они) в силу леммы 1.1 являются элементами пространства $\mathbf{H}$, в этом случае $|\bar{\varphi}|_{\bar{\mathbf{H}}} = |\varphi|_{\mathbf{H}}$.

Из леммы 1.5 следует, что множества $\mathbf{H}_t = P_t \mathbf{H}$ инвариантны для проекторов $\bar{P}_t \in \bar{P}_T$ (напомним, что сужения этих проекторов на множество $\mathbf{H}$ совпадают с проекторами $P_t \in P_T$). В действительности этим свойством обладают, как выяснится несколько позже (см. лемму 1.7), произвольные финитные сверху

операторы, удовлетворяющие некоторому условию ограниченности.

Лемма 1.6. Для всякого линейного τ -финитного сверху оператора $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ существует оператор $\bar{A}^*: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$, однозначно определяемый при произвольном $\varphi \in F^0$ соотношением

$$(\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi})^* \varphi = (\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi})^* \bar{A}^* \bar{P}_t \varphi, \quad t \in T, \quad \bar{\varphi} \in \bar{H}. \quad (4.4)$$

Оператор $\bar{A}^*$ (будем называть его сопряженным оператору $\bar{A}$) удовлетворяет соотношению

$$\bar{A}^* \bar{P}_t = \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{A}^* \bar{P}_t, \quad t \in T. \quad (4.5)$$

Доказательство леммы 1.6 приведено в Приложении.

Отметим, что при $\tau(t) \equiv \tau$ соотношение (4.5) означает, что оператор $\bar{A}^*$ является $(-\tau)$ -антикаузальным (см. (3.9)).

Очевидными переобозначениями из леммы 1.6 следует существование "сопряженного" оператора у τ -финитного снизу оператора, определяемого соответствующим аналогом соотношения (4.5).

Оператор $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ назовем τ -ограниченным, если существует измеримая функция $\tau(\cdot): T \rightarrow T$, такая, что выполнено неравенство

$$\sup_{\bar{\varphi} \in \bar{H}} \sup_{t \in T} \frac{|\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi}|_{\bar{H}}}{|\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}|_{\bar{H}}} < \infty. \quad (4.6)$$

Отметим, что в силу леммы 1.5 элементы $\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi}$ и $\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}$ принадлежат пространству H и поэтому их нормы конечны при любых $t \in T$.

Оператор 0-ограниченный в $\bar{H}$ (т.е. финитный сверху оператор в $\bar{H}$ с характеристикой $\tau(t) \equiv 0$) называют также устойчивым оператором.

Лемма 1.7. Пространство H является инвариантным для всякого линейного τ -ограниченного оператора $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$, причем сужение A такого оператора на H является линейным ограниченным оператором в гильбертовом пространстве H .

Доказательство леммы 1.7 приведено в Приложении.

Лемма 1.8. Если τ -ограниченный оператор $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ имеет неотрицательную характеристику $\tau(t) \geq 0$, то оператор $\bar{A}$ является τ -неупреждающим по отношению к разложению единицы $\bar{P}_T$.

Доказательство леммы 1.8 приведено в Приложении.

Ввиду важности для приложений понятия устойчивых (ограниченных) операторов приведем следствие лемм 1.7, 1.8 в виде отдельного утверждения.

Теорема 1.2. *Для того чтобы линейный оператор $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:*

- 1) *оператор $\bar{A}$ каузальный;*
- 2) *множество H инвариантно относительно оператора $\bar{A}$;*
- 3) *сужение A оператора $\bar{A}$ на множество H является ограниченным оператором в пространстве H .*

Доказательство теоремы 1.2 приведено в Приложении.

Приведенные выше построения, связанные с рассмотрением линейных операторов в причинном пространстве (H, P_T) , очевидным образом распространяются на линейные операторы, действующие из одного причинного пространства (H'', P_T'') в другое причинное пространство (H', P_T') , в которых временные структуры определены на одинаковом "временном" интервале T . Отметим лишь, что, например, τ -ограниченность оператора $\bar{A}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ означает выполнение неравенства

$$\sup_{\varphi'' \in \bar{H}''} \sup_{t \in T} \frac{|\bar{P}'_t \bar{A} \bar{\varphi}''|_{H'}}{|P''_{t+\tau(t)} \varphi''|_{H''}} < \infty,$$

а инвариантность множества H для сужения A оператора $\bar{A}$ на это множество теперь означает включение $AH'' \subseteq H'$.

В. Пример: операторы, порождаемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Следуя [132], проиллюстрируем описанные выше конструкции и, в частности, соответствие между свойствами каузальности и устойчивости линейных операторов, установленное в теореме 1.2, на примере стационарных дифференциальных операторов.

Предположим, что имеется некоторая линейная инвариантная во времени система с m входами и l выходами. На каждый поступающий "входной" сигнал $u = \{u(t), t \in T, u(t) \in \mathbb{R}^m\}$ система "вырабатывает" l -мерный выходной сигнал $y = \{y(t), t \in T, y(t) \in \mathbb{R}^l\}$. Характер сигналов u, y пока уточнять не будем, это могут быть детерминированные либо стохастические вектор-функции с теми или иными свойствами. Время T функционирования системы будем предполагать совпадающим с вещественной осью, $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Возможны различные модели линейного соответствия между множествами входных и выходных сигналов. Ниже принимается достаточно распространенная модель, описываемая соотношениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \overset{\circ}{A}x(t) + \overset{\circ}{B}u(t), \quad y(t) = \overset{\circ}{C}x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

где $x = \{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ — вспомогательный сигнал, предполагаемый абсолютно непрерывной n -вектор-функцией, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}$ — матрицы соответственно размеров $n \times n$, $m \times n$ и $n \times l$. Разумеется, определяемое соотношениями (4.7) соответствие между входными и выходными сигналами можно представлять и в других формах. Например, вводя полиномы

$$a(\nu) = \det(2\pi i \nu I_n - \overset{\circ}{A}), \quad b(\nu) = a(\nu) \overset{\circ}{C} (2\pi i \nu I_n - \overset{\circ}{A})^{-1} \overset{\circ}{B} \quad (4.8)$$

с постоянными коэффициентами, можно преобразовать систему (4.7) к виду

$$a \left[-i(2\pi)^{-1} \frac{d}{dt} \right] y(t) = b \left[-i(2\pi)^{-1} \frac{d}{dt} \right] u(t), \quad (4.9)$$

где исключена вспомогательная переменная $x(t)$. Использование "входо-выходной" модели (4.9) предполагает, что процессы u, y достаточно гладкие. Стандартными переобозначениями уравнение (4.9) с полиномиальными дифференциальными операторами $a[-i(2\pi)^{-1}D]$, $b[-i(2\pi)^{-1}D]$ может быть записано в виде системы (4.7). Таким образом, если отвлечься от вопросов гладкости сигналов, то модели (4.7), (4.9) дают по существу одно и то же описание линейного соответствия между входными и выходными сигналами.

Для операторной трактовки такого соответствия следует более точно описать множества входных и выходных сигналов. В качестве базовых пространств примем гильбертовы пространства $L_2(m, \mathbb{R})$ для входных, $L_2(n, \mathbb{R})$ для вспомогательных и $L_2(l, \mathbb{R})$ для выходных сигналов. Полагая, что $u \in L_2(m, \mathbb{R})$, $x \in L_2(n, \mathbb{R})$, $y \in L_2(l, \mathbb{R})$, перепишем систему (4.7) в виде

$$Dx = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (4.10)$$

где, как и раньше, D — оператор обобщенного дифференцирования, $A: L_2(n, \mathbb{R}) \rightarrow L_2(n, \mathbb{R})$, $B: L_2(m, \mathbb{R}) \rightarrow L_2(n, \mathbb{R})$,

$C: L_2(n, \mathbf{R}) \rightarrow L_2(l, \mathbf{R})$ — операторы умножения на матрицы $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}$:

$$(Ax)(t) = \overset{\circ}{A}x(t), \quad (Bu)(t) = \overset{\circ}{B}u(t), \quad (Cx)(t) = \overset{\circ}{C}x(t). \quad (4.11)$$

Несложно убедиться, что если матрица $\overset{\circ}{A}$ не имеет чисто мнимых собственных значений, то оператор $D - A$ ограниченно обратим в $L_2(n, \mathbf{R})$ и из соотношений (4.10) находим

$$y = Wu, \quad (4.12)$$

где

$$W = C(D - A)^{-1}B. \quad (4.13)$$

Весовой оператор W линейного фильтра (4.12) можно назвать передаточным оператором от u к y системы (4.10). Формула (4.12) дает явное "входо-выходное" соответствие между входными сигналами (элементами пространства $L_2(m, \mathbf{R})$) и выходными сигналами (элементами пространства $L_2(l, \mathbf{R})$).

Введенные гильбертовы пространства обладают естественной временной структурой, определяемой проекционными "операторами срезки" — операциями обнуления сигналов с соответствующего момента времени. Так, в пространстве $L_2(m, \mathbf{R})$ проекционные операторы P'_t , $t \in \mathbf{R}$, задаются соотношениями

$$(P'_t u)(t') = \begin{cases} u(t') & \text{при } t' \leq t, \\ 0 & \text{при } t' > t \end{cases} = \mathbf{1}(t - t')u(t'). \quad (4.14)$$

Семейство $P'_\mathbf{R} = \{P'_t, t \in \mathbf{R}\}$ таких операторов обладает свойствами монотонности и полноты (см. п. 3А) и является эрмитовым разложением единицы в пространстве $L_2(m, \mathbf{R})$. Аналогичные разложения единиц в пространствах $L_2(l, \mathbf{R})$, $L_2(n, \mathbf{R})$ будем обозначать $P''_\mathbf{R}$, $P'''_\mathbf{R}$. Оператор $W: L_2(m, \mathbf{R}) \rightarrow L_2(l, \mathbf{R})$ является интегральным стационарным оператором ($P''_t W = W P'_t$, $t \in \mathbf{R}$), его символ $H(\nu)$ — передаточная функция системы (4.7) от u к y — находится по формуле

$$H(\nu) = \frac{b(\nu)}{a(\nu)}, \quad (4.15)$$

где полиномы $a(\nu)$, $b(\nu)$ задаются формулами (4.8). Отсутствие чисто мнимых собственных значений у матрицы $\overset{\circ}{A}$ гарантирует отсутствие вещественных корней у полинома $a(\nu)$, так что элементы матричной функции $H(\nu)$, определяемой формулой

(4.15), являются правильными дробно-рациональными функциями, ограниченными на вещественной оси. Поэтому *передаточный оператор* h (или *весовой оператор линейного фильтра* (4.12)) ограничен, $h: L_2(m, \mathbb{R}) \rightarrow L_2(m, \mathbb{R})$. Он является интегральным стационарным оператором,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')u(t-t') dt',$$

его ядро $h(\cdot)$ — *весовая функция фильтра* (4.12) — находится по формуле

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2\pi i \nu t\} H(\nu) d\nu = \begin{cases} \sum_{l \in l_{st}} H_l \exp\{\mu_l t\}, & t \geq 0, \\ -\sum_{l \notin l_{st}} H_l \exp\{\mu_l t\}, & t < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

где μ_l — собственные значения матрицы $\overset{\circ}{A}$,

$$l_{st} = \{l: \operatorname{Re} \mu_l < 0\} \quad (4.17)$$

— множество индексов "устойчивых" собственных значений матрицы $\overset{\circ}{A}$; $H_l: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ — вычет матричной функции $H(\nu)$ в точке $\nu_l = -i(2\pi)^{-1}\mu_l$,

$$H_l = \oint_{\Gamma_\varepsilon(\mu_l)} H(\mu) d\mu \quad (4.18)$$

(интегрирование в (4.18) ведется против часовой стрелки по окружности $\Gamma_\varepsilon(\mu_l)$ радиусом ε , центр окружности расположен в точке $-i(2\pi)^{-1}\mu_l$, радиус ε выбран столь малым, что внутри этой окружности матрица $-i(2\pi)^{-1}\overset{\circ}{A}$ не имеет собственных значений, отличных от $[-i(2\pi)^{-1}\mu_l]$). Для простоты предполагается, что все собственные значения матрицы $\overset{\circ}{A}$ различны. Матрицы H_l определяют представление передаточной функции $H(\nu)$ в виде

$$H(\nu) = \sum_{l=1}^n \frac{H_l}{\nu - \nu_l}. \quad (4.19)$$

Если матрица $\overset{\circ}{A}$ гурвицева (все ее собственные значения расположены в открытой левой полуплоскости), формула (4.16)

упрощается и принимает вид

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{l=1}^n \{H_l \exp\{\mu_l t\}\}, & t \geq 0, \\ O_{l \times m}, & t < 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Здесь $O_{l \times m}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ — нуль-оператор. Формула (4.20) определяет весовую функцию неупреждающего фильтра (4.12). Таким образом, гурвицевость матрицы $\overset{\circ}{A}$ является необходимым и достаточным условием каузальности оператора (4.13). Другими словами, неупреждаемость соответствия между входными и выходными сигналами в системе (4.7) оказалась эквивалентной гурвицевости матрицы $\overset{\circ}{A}$, или экспоненциальной устойчивости системы (4.7).

Связь каузальности передаточного оператора системы с ее устойчивостью может принимать различные формы. Так, если входной сигнал u — ОСП стационарного белого шума, то, как хорошо известно, при отсутствии у матрицы $\overset{\circ}{A}$ чисто мнимых собственных значений существует единственный стационарный процесс y , связанный с u соотношениями (4.7) (понимаемыми как стохастические дифференциальные уравнения), и этот процесс определяется формулой (4.12). Передаточный оператор (4.13) ограничен, но может не быть каузальным. Поскольку в этом случае зависимость (4.12) не каузальная, процесс u белого шума не является порождающим (обновляющим) для процесса y . Система (4.7) будет для процесса y формирующим фильтром, лишь если она устойчивая (т.е. если матрица $\overset{\circ}{A}$ гурвицева).

Разумеется, сказанное о соответствии между устойчивостью и причинностью справедливо и для системы (4.9), возбуждаемой белым шумом. Она будет формирующим фильтром для процесса y , лишь если полином $a(\mu)$ устойчивый, т.е. не имеет собственных значений в нижней замкнутой полуплоскости. Для системы (4.10) ее устойчивость оказалась эквивалентной условию причинной (каузальной) обратимости оператора $D - A$, именно тогда оператор (4.13) будет каузальным как произведение каузальных операторов $C, (D - A)^{-1}, B$. Отмеченный факт связи каузальности оператора $(D - A)^{-1}$ и устойчивости соответствующей системы и составляет содержание теоремы 1.2. В ее условиях отсутствует связь рассматриваемых операторов с какой-либо системой, а под устойчивостью понимается ограниченность (0-ограниченность) оператора, порождаемого оператором

$(D-A)^{-1}$ в расширенном пространстве "траекторий" (см. п. 4Б). Покажем, что в рассматриваемом случае 0-ограниченность расширения оператора $(D-A)^{-1}$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости системы (4.7).

Оператор $(D-A)^{-1}: L_2(n, \mathbb{R}) \rightarrow L_2(n, \mathbb{R})$ стационарный, передаточная функция $\tilde{H}(\lambda)$ фильтра

$$(D-A)x = f, \quad f = Bu \quad (4.21)$$

имеет вид $\tilde{H}(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$, а потому весовая функция $\tilde{h}(\cdot)$ фильтра (4.21) по аналогии с формулой (4.16) может быть записана в виде

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \sum_{l \in I_{st}} \tilde{Q}_l \exp\{\mu_l t\}, & t \geq 0, \\ -\sum_{l \notin I_{st}} \tilde{Q}_l \exp\{\mu_l t\}, & t < 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

где множество I_{st} определяется формулой (4.17) и

$$\tilde{Q}_l = \oint_{\Gamma_\varepsilon(\mu_l)} \left(2\pi i \mu I_n - \overset{\circ}{A} \right)^{-1} d\mu \quad (4.23)$$

— проекторы на корневые подпространства матрицы $\overset{\circ}{A}$, отвечающие собственным значениям μ_l . Напомним, что здесь $\Gamma_\varepsilon(\mu_l)$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $-i(2\pi)^{-1}\mu_l$. Если через $\tilde{Q}$ обозначить проектор на "устойчивое" подпространство матрицы $\overset{\circ}{A}$

$$\tilde{Q} = \sum_{l \in I_{st}} \tilde{Q}_l, \quad (4.24)$$

то соотношения (4.22) можно записать в виде

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \tilde{Q} \exp\{\overset{\circ}{A}t\} & \text{при } t \geq 0, \\ -(I_n - \tilde{Q}) \exp\{\overset{\circ}{A}t\} & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Таким образом, решение уравнения (4.21) в $L_2(n, \mathbb{R})$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(t') Bu(t') dt' &= \int_0^{\infty} \tilde{Q} \exp\{\overset{\circ}{A}t'\} f(t-t') dt' - \\ &- \int_{-\infty}^0 (I_n - \tilde{Q}) \exp\{\overset{\circ}{A}t'\} f(t-t') dt'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Формула (4.26) имеет смысл, если матрица $\overset{\circ}{A}$ не имеет чисто мнимых собственных значений и $f(\cdot) = Bu(\cdot) \in L_2(n, \mathbf{R})$. Из (4.26) следует, что для каузальности оператора $(D - A)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $\overset{\circ}{A}$ была гурвицевой — только в этом случае исчезает второе слагаемое в правой части (4.26), именно с ним связана "упреждаемость" вектор-функции $x(\cdot)$. Ограниченный и каузальный оператор $(D - A)^{-1}$ допускает расширение по непрерывности на множество $\bar{L}_2(\bar{n}, \bar{\mathbf{R}})$, определяя интегральный оператор с ядром

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} Q \exp\{\overset{\circ}{A}t\} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Обратно, если оператор $\overline{(D - A)^{-1}}$ устойчив, то по теореме 1.2 он каузальный и его сужение $(D - A)^{-1}$ на $L_2(n, \mathbf{R})$ — ограниченный каузальный оператор. Но как следует из формулы (4.26), каузальность оператора $(D - A)^{-1}$ эквивалентна гурвицевости матрицы $\overset{\circ}{A}$, т. е. 0-ограниченность оператора $\overline{(D - A)^{-1}}$ эквивалентна устойчивости системы (5.7).

Рассмотрим теперь систему (4.7) на полуоси $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ при нулевом начальном данном $x(0) = 0$. Оператор $D - A$ обратим в пространстве $L_2(n, \mathbf{R}_+)$, если матрица $\overset{\circ}{A}$ не имеет чисто мнимых собственных значений. Однако оператор $(D - A)^{-1}$ ограничен в том и только том случае, если матрица $\overset{\circ}{A}$ гурвицева. Действительно, формула

$$y(t) = \int_0^t \overset{\circ}{C} \exp\{\overset{\circ}{A}(t - t')\} \overset{\circ}{B}u(t') dt' \quad (4.28)$$

представляет собой более подробную запись равенства (4.12). Из формулы (4.28) следует, что оператор W финитен сверху (с характеристикой $\tau(t) \equiv 0$), в силу леммы 1.4 оператор W может быть по t -непрерывности распространен на множество $\bar{L}_2(m, \mathbf{R}_+)$, которое в данном случае является множеством локально квадратично-интегрируемых m -вектор-функций (его значения будут принадлежать множеству $\bar{L}_2(m, \mathbf{R}_+)$ локально квадратично-интегрируемых l -вектор-функций). Если $u \in \bar{L}_2(m, \mathbf{R}_+)$, то

$$(\bar{W}u)(t) = y(t) = \int_0^t \overset{\circ}{C} \exp\{\overset{\circ}{A}(t - t')\} \overset{\circ}{B}u(t') dt'. \quad (4.29)$$

Сужение W оператора $\bar{W}$ на $L_2(m, R_+)$ определяет каузальный оператор, для которого пространство $L_2(m, R_+)$ в общем случае не является инвариантным (т. е. некоторые функции из $L_2(m, R_+)$ могут переводиться оператором W в обобщенные элементы пространства $L_2(l, R_+)$). Другими словами, оператор W неограничен как оператор из $L_2(m, R_+)$ в $L_2(l, R_+)$. Для его ограниченности необходимо и достаточно гурвицевости матрицы $\bar{A}$. Это, в свою очередь, влечет 0-ограниченность оператора $\bar{W}: \bar{L}_2(m, R_+) \rightarrow \bar{L}_2(l, R_+)$. Таким образом, и здесь каузальность оператора $(D - A)^{-1}$ эквивалентна устойчивости системы (4.7).

Приложение к главе 1

А. Доказательство теоремы 1.1. Формулу (2.8) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} J_{\varphi'}(h) &= \left\langle \varphi', \left[R_x - R_{xy} [R_y^+]^{1/2} (R_{xy})^* + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(h R_y^{1/2} - R_{xy} [R_y^+]^{1/2} \right) \left(h R_y^{1/2} - R_{xy} [R_y^+]^{1/2} \right)^* \right] \varphi' \right\rangle_{\mathbf{H}'} = \\ &= \langle \varphi', [R_x - R_{xy} R_y^+ (R_{xy})^*] \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'} + \\ &\quad + \langle \varphi', (h - R_{xy} R_y^+) R_y (h - R_{xy} R_y^+)^* \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'} \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

Здесь учтено равенство $R_{xy} R_y^+ R_y = R_{xy}$, следующее из формулы (2.12) и соотношений $R_{xy} = Mxy^*$, $R_y = Myy^*$. В правой части формулы (П.1) лишь последнее слагаемое зависит от весового оператора h , и это слагаемое неотрицательно при любом выборе оператора h и элемента $\varphi' \in \mathbf{H}'$. Весовой оператор (2.15) обращает это слагаемое в ноль, следовательно, ему отвечает оптимальный фильтр. Теорема 1.1 доказана.

Б. Доказательство леммы 1.3. Пусть $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$, это означает, что существует последовательность $\{\varphi_l, l \in \mathbf{N}, \varphi_l \in \mathbf{H}\}$, $\mathbf{F}^0$ -слабо сходящаяся к $\bar{\varphi}$, т. е. для любого элемента $\psi \in \mathbf{F}^0$ выполнено

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \varphi_l, \psi \rangle = \langle \bar{\varphi}, \psi \rangle.$$

В частности, это означает, что для произвольного элемента $\psi \in \mathbf{F}^0$ числовая последовательность $\langle P_t \varphi_l, \psi \rangle$ сходится при каждом $t \in \mathbf{T}$ и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \langle P_t \varphi_l, \psi \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \varphi_l, P_t \psi \rangle = \langle \bar{\varphi}, P_t \psi \rangle,$$

т. е. последовательность $\{P_t \varphi_l\}$ F° -слабо сходится в подпространстве $P_t \mathbf{H}$, а потому для нее существует (слабый) предел

$$\varphi^{(t)} = \lim_{l \rightarrow \infty} P_t \varphi_l, \quad \varphi^{(t)} \in P_t \mathbf{H}, \quad \langle \varphi^{(t)}, \psi \rangle = \langle \bar{\varphi}, P_t \psi \rangle.$$

Пусть $\{t_l, l = 1, 2, \dots\}$ — произвольная последовательность точек из $\mathbf{T}$, сходящаяся к t . Тогда последовательность элементов $\varphi^{(t_l)}, l = 1, 2, \dots$, является t -сходящейся: $P_t \varphi^{(t_l)} = \varphi^{(t)}$ при $l \rightarrow \infty$. При любом финитном элементе $\psi \in P_t \mathbf{H} \subseteq F^\circ$ очевидным образом выполняется соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \varphi^{(t_l)}, \psi \rangle = \langle \varphi^{(t)}, \psi \rangle = \langle \bar{\varphi}, P_t \psi \rangle.$$

Оно означает, что последовательность $\{\varphi^{(t_l)}\}$, $\varphi^{(t_l)} \in \mathbf{H}$, t -сходится к элементу $\bar{\varphi}$. Итак, для любого элемента $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$ существует последовательность элементов из $\mathbf{H}$, t -сходящаяся к нему. Если элемент $\bar{\varphi}$ является t -пределом для некоторой последовательности $\{\varphi_l\}$ элементов из $\mathbf{H}$, то последовательность элементов $P_t \varphi_l$, очевидно, $P_t F^\circ$ -слабо сходится к соответствующему пределу, т. е. $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$. Лемма 1.3 доказана.

В. Доказательство леммы 1.4. Пусть финитный сверху оператор A имеет характеристику $\tau(\cdot)$. Тогда из формулы (3.6) следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_t A \varphi_l = \lim_{l \rightarrow \infty} P_t A P_{t-\tau(t)} \varphi_l; \quad (\text{II.2})$$

t -сходимость последовательности $\{\varphi_l\}$ означает, что для любого $\psi \in F^\circ$ при каждом $t \in \mathbf{T}$ существует $\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi, P_t \varphi_l \rangle$, тогда в силу конечности характеристики $\tau(\cdot)$ можем утверждать, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi, P_{t-\tau(t)} \varphi_l \rangle$ существует при каждом $t \in \mathbf{T}$, а потому в силу (II.2) и ограниченности при каждом $t \in \mathbf{T}$ оператора $P_t A$ существует $\lim_{l \rightarrow \infty} \langle \psi, P_t A \varphi_l \rangle$, т. е. существует $t - \lim P_t A \varphi_l$. Поэтому если при достаточно больших t выполнено равенство $\lim_{l \rightarrow \infty} P_t \varphi_l = 0_{\mathbf{H}}$, то при достаточно больших t выполнено и равенство $\lim_{l \rightarrow \infty} P_t A \varphi_l = 0_{\mathbf{H}}$. Тем самым установлена t -непрерывность финитного сверху оператора A . Лемма 1.4 доказана.

Г. Доказательство леммы 1.5. Включение $\bar{P}_t \bar{\varphi} \in \mathbf{H}$ означает, что существует последовательность $\{\varphi_l\}$, $\varphi_l \in \mathbf{H}$, t -сходящаяся к элементу $\bar{P}_t \bar{\varphi}$. Но последнее означает, что последовательность $\{P_t \varphi_l\}$ слабо сходится в себе, а в силу слабой полноты гильбертова пространства $P_t \mathbf{H}$ ее t -предел $P_t \bar{\varphi}$ является элементом пространства $P_t \mathbf{H}$, что и утверждается в лемме 1.5.

Д. Доказательство леммы 1.6. Для произвольных элементов $\bar{\psi} \in \bar{\mathbf{H}}$ и фиксированного $t \in \mathbf{T}$ выражение $\langle \bar{P}_t \bar{\varphi}, \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi} \rangle$ в силу леммы 1.5 определяет билинейную форму на множестве $\mathbf{H}$, оператор $\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)}$ этой билинейной формы является линейным в $\mathbf{H}$ (фактически этот оператор действует из подпространства $P_{t-\tau(t)} \mathbf{H}$ в подпространство $P_t \mathbf{H}$). Пусть A — сужение на $\mathbf{H}$ оператора $\bar{A}$, тогда в силу леммы 1.5 выполнено соотношение $\langle \varphi, \bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\psi} \rangle = \langle P_t \varphi, \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\psi} \rangle$. Обозначим через A^* оператор, сопряженный в $\mathbf{H}$ оператору A ,

$$\langle P_t \varphi, \bar{A} \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\psi} \rangle = \langle A^* P_t \varphi, \bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\psi} \rangle. \quad (\text{П.3})$$

Оператор $A^* : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ однозначно порождает оператор $\bar{A}^* : \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$ с помощью соотношений

$$\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{A}^* \bar{P}_t = (P_t A P_{t-\tau(t)})^*, \quad t \in \mathbf{T}. \quad (\text{П.4})$$

В силу каузальности оператора $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ (см. (3.6)) выполнено соотношение $P_{t-\tau(t)} A^* P_t = A^* P_t$, что позволяет переписать (П.4) в виде (4.5). Рассматривая в соотношении (П.3) лишь элементы $\bar{\psi} \in \mathbf{F}^0$, убеждаемся, что оно совпадает с равенством (4.4). Тем самым оператор $\bar{A}^*$, определяемый соотношениями (П.3), (П.4), является "сопряженным" оператору $\bar{A}$. Лемма 1.6 доказана.

Е. Доказательство леммы 1.7. Пусть A — линейный ограниченный оператор в $\bar{\mathbf{H}}$ и $\bar{\varphi} \in \bar{\mathbf{H}}$. Тогда при любом $t \in \mathbf{T}$ в силу (4.6) имеем

$$|\bar{P}_t \bar{A} \bar{\psi}|_{\mathbf{H}} \leq C |\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}} \leq C |\bar{\varphi}|_{\mathbf{H}},$$

а потому элемент $\bar{A} \bar{\varphi}$ имеет конечную $\mathbf{H}$ -норму. В силу леммы 1.1 элемент $\bar{A} \bar{\varphi}$ принадлежит пространству $\mathbf{H}$. Тем самым установлено, что множество $\mathbf{H}$ инвариантно для τ -устойчивого оператора $\bar{A} : \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$. Ограниченность сужения A оператора $\bar{A}$ на множество $\mathbf{H}$ теперь тривиально следует из неравенства (4.6). Лемма 1.7 доказана.

Ж. Доказательство леммы 1.8. В силу неравенства (4.6) при любом $t \in \mathbf{T}$ имеем

$$|\bar{P}_t \bar{A} (I_{\bar{\mathbf{H}}} - \bar{P}_{t-\tau(t)}) \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}} \leq C |\bar{P}_t (I_{\bar{\mathbf{H}}} - \bar{P}_{t-\tau(t)}) \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}},$$

где

$$C = \sup_{t \in \mathbf{T}} \sup_{\varphi \in \mathbf{H}} \frac{|\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}}}{|\bar{P}_{t-\tau(t)} \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}}}.$$

В силу неотрицательности функции $\tau(\cdot)$ и монотонности семейства проекторов $P_t \in P_T$ справедливо тождество

$$\bar{P}_t (I_{\bar{H}} - \bar{P}_{t-\tau(t)}) = 0_{\bar{H}},$$

а потому для любого элемента $\bar{\varphi} \in \bar{H}$ выполнено

$$\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi} = \bar{P}_t \bar{A} (I_{\bar{H}} - \bar{P}_{t-\tau(t)}) \bar{\varphi},$$

что в силу произвольности элемента $\bar{\varphi} \in \bar{H}$ эквивалентно соотношению (3.6). Этим лемма 1.8 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2. Пусть линейный оператор $\bar{A}: \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ устойчив (0-ограничен). Тогда по лемме 1.8 он каузальный. По лемме 1.7 множество $\bar{H}$ инвариантно относительно оператора $\bar{A}$ и его сужение A на множество H является линейным ограниченным в H оператором. Обратно, пусть каузальный оператор $\bar{A}$ оставляет множество H инвариантным и на этом множестве ограничен. Тогда для любого элемента $\bar{\varphi} \in H$ в силу каузальности оператора $\bar{A}$ и инвариантности для него множества H справедливы равенства

$$\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi} = \bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \bar{\varphi},$$

$$\bar{P}_t \bar{A} \bar{\varphi} = P_t A P_t \bar{\varphi},$$

где A — сужение оператора $\bar{A}$ на множество H , причем по условию оператор A ограничен. Поэтому при $\bar{\varphi} \in H$ имеем

$$|\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \bar{\varphi}|_H \leq |A| |\bar{P}_t \bar{\varphi}|_H,$$

или

$$\frac{|\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \bar{\varphi}|_H}{|\bar{P}_t \bar{\varphi}|_H} \leq |A|, \quad \bar{\varphi} \in H. \quad (\Pi.5)$$

Пусть $\bar{\varphi}$ — произвольный элемент множества H и $\{\varphi_l, l \in N\}$ — последовательность элементов из H , сходящаяся к $\bar{\varphi}$ в t -топологии, $\bar{\varphi} = t - \lim \varphi_l, l \rightarrow \infty$. Формула (П.5) при $\bar{\varphi} = \varphi$ принимает вид

$$\frac{|\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \varphi_l|_H}{|\bar{A}| |\bar{P}_t \varphi_l|_H} \leq |A|.$$

Переходя к пределу $l \rightarrow \infty$ и учитывая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \varphi_l|_H = |\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \bar{\varphi}|_H, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} |\bar{P}_t \varphi_l|_H = |\bar{P}_t \bar{\varphi}|_H,$$

получаем неравенство (П.5) для произвольного $\bar{\varphi} \in \mathbf{H}$ и, поскольку правая часть в этом неравенстве не зависит от $\bar{\varphi} \in \mathbf{H}$ и $t \in \mathbf{T}$, можем написать

$$C = \sup_{\varphi \in \mathbf{H}} \sup_{t \in \mathbf{T}} \frac{|\bar{P}_t \bar{A} \bar{P}_t \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}}}{|\bar{P}_t \bar{\varphi}|_{\mathbf{H}}} < \infty,$$

т. е. оператор $\bar{A}$ 0-ограничен (устойчив). Теорема доказана.

ГЛАВА 2

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ВАРИАНТ ТЕОРИИ ВИНЕРА–КОЛМОГОРОВА)

В первой главе была поставлена и решена задача оптимальной фильтрации в классе устойчивых фильтров. Основу теории Винера—Колмогорова представляет задача оптимальной фильтрации в классе *неупреждающих (физически реализуемых) фильтров*. Рассмотрение в "абстрактной форме" этой задачи требует уточнения понятия случайного процесса и неупреждающего фильтра. Необходимые для этого понятия и конструкции введены на основе теории операторов в причинных пространствах в первой главе. Ниже последовательно развивается операторная теория неупреждающей оптимальной фильтрации, определяются условия разрешимости задачи и возможность представления весового оператора оптимального фильтра в форме Боде—Шеннона.

В теории Винера—Колмогорова центральной является проблема синтеза оптимального неупреждающего фильтра (т.е. проблема построения весового оператора линейного фильтра, минимизирующего в классе каузальных фильтров среднеквадратичную погрешность фильтрации). Эту проблему можно интерпретировать как задачу минимизации квадратичного функционала, определенного на множестве каузальных операторов. Важнейшим этапом нахождения минимума такого функционала (в случае разрешимости задачи минимизации) является процедура факторизации положительного оператора, определяющего квадратичный функционал (в задаче оптимальной фильтрации в качестве такого оператора выступает корреляционный оператор наблюдаемого процесса). Эта же процедура используется и при решении линейно-квадратичной задачи оптимального управления, именно в результате спектральной факторизации обеспечивается физическая реализуемость оптимального фильтра либо неупреждаемость оптимальной обратной связи — формализованное выражение принципа причинности. Как хорошо известно, проблема спектральной факторизации непосред-

ственно связана с проблемой представления случайного процесса как выхода некоторого физически реализуемого фильтра (формирующего фильтра), возбуждаемого обновляющим (порождающим) белым шумом [43, 80, 100, 147, 148].

Задаче факторизации линейных положительно-определенных операторов в абстрактном причинном гильбертовом пространстве (т. е. в пространстве, наделенном временной структурой) посвящено большое число исследований. (В "конечномерном" случае спектральная факторизация совпадает с *факторизацией Холецкого* положительной матрицы и используется в разнообразных методах решения систем линейных уравнений [101].) Эта задача (ниже называемая задачей спектральной факторизации) является одной из центральных в современной теории линейных операторов, действующих в причинных пространствах. В настоящее время такая теория (теория каузальных операторов в причинном пространстве) развита в достаточной степени, чтобы в ее терминах было возможно дать содержательное толкование различных задач оптимальной фильтрации и управления [32].

Основу развиваемой ниже абстрактной теории линейной фильтрации составляют результаты раздела 1.4 о свойствах финитных операторов в причинном гильбертовом пространстве. Приведенные там утверждения являются непосредственным обобщением соответствующих результатов, известных для каузальных операторов [132]. С их помощью в данной главе разрабатывается абстрактный вариант теории Винера-Колмогорова оптимального оценивания случайных элементов и ряд сопутствующих результатов. В частности, обсуждается проблема спектральной факторизации положительного оператора в причинном гильбертовом пространстве; исследование этой проблемы будет продолжено в третьей главе. Методы факторизации матричных и скалярных спектральных плотностей стационарных случайных процессов, позволяющие получать эффективные алгоритмы спектральной факторизации, будут обсуждаться в четвертой главе.

В случае гильбертова пространства с "дискретной временной структурой" задача синтеза оптимального физически реализуемого фильтра получила в определенном смысле исчерпывающее решение. Кроме того, установлена возможность сколь угодно точной аппроксимации "сверху" и "снизу" оптимальных неупреждающих оценок в пространстве с непрерывной временной

структурой посредством оптимальных фильтров, построенных для соответствующей задачи дискретной фильтрации. Такой подход позволяет строить оптимизирующие последовательности дискретных фильтров, оценивающих среднеквадратичную погрешность фильтрации как сверху, так и снизу. В целом, разработанная теория охватывает широкий класс задач линейной оптимальной фильтрации случайных процессов и полей.

1. Абстрактный вариант теории Винера — Колмогорова оптимального оценивания случайных элементов

Теория линейной оптимальной фильтрации случайных процессов может быть существенно обобщена, если переформулировать ее в терминах случайных элементов и финитных операторов в причинном пространстве, введенных в первой главе. Это позволяет реализовать основные конструкции теории Винера-Колмогорова без использования спектральных характеристик сигнальных и шумовых процессов и без предположения конечномерности этих процессов.

В данном разделе исследуется общий вариант бесконечномерной задачи линейного оптимального оценивания. В "абстрактной" (бесконечномерной) задаче ненаблюдаемая x и наблюдаемая y компоненты *частично наблюдаемого случайного элемента* $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ являются обобщенными случайными элементами некоторых гильбертовых пространств H' , H'' . Содержательную теорию оптимального оценивания возможно построить, видимо, лишь при достаточно богатом наборе гипотез о свойствах случайного элемента z и существенных ограничениях на множество h неупреждающих весовых операторов, в котором осуществляется оптимизация фильтра. Такими гипотезами могут быть, например, предположения об ограниченности корреляционного оператора R_z случайного элемента z и положительной определенности корреляционного оператора R_y ($R_y \gg 0$) наблюдаемой компоненты y .

Решение задачи фильтрации обычно удается получить в терминах спектральной факторизации оператора R_y и сепарации некоторых операторов, связанных с оператором R_z . В бесконечномерном пространстве каждая из этих процедур может оказаться неэффективной либо даже невозможной, поэтому исследование задачи оптимальной фильтрации "до конца" (как на уровне установления условий ее разрешимости, так и алгорит-

мизации процедуры "построения" оптимального фильтра) возможно лишь при сужении класса рассматриваемых случайных элементов и множества допустимых фильтров.

Достаточно общие результаты при исследовании "абстрактной" задачи оптимального оценивания случайных элементов удастся получить в случае дискретных причинных пространств, возникающих при описании временных рядов (случайных процессов в дискретном времени).

Прежде чем переходить к последовательному описанию "операторной" задачи неупреждающей фильтрации, полезно привести ее конечномерный аналог, сохраняя операторную терминологию. Разумеется, все результаты по оптимальному оцениванию в этом случае достаточно тривиальны и их формулировка преследует лишь чисто иллюстративные цели.

А. Элементарная ("конечномерная") задача оптимальной фильтрации. Рассматриваемая в этом пункте "конечномерная" задача фильтрации является хорошей моделью для уяснения особенностей общей задачи фильтрации и ее обобщений.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ определена случайная величина z со значениями в евклидовом пространстве R^{2n} , $z: \Omega \rightarrow R^{2n}$. Эту случайную величину будем называть частично наблюдаемой, если она имеет структуру

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где x — ненаблюдаемая и y — наблюдаемая компоненты случайной величины z , $x \in X = R^n$, $y \in Y = R^n$, X, Y — n -мерные евклидовы пространства, $X \times Y = R^{2n}$.

Задача линейной фильтрации состоит в построении линейной оценки $\hat{x}$ случайной величины x .

Будем случайную величину z предполагать центрированной, $Mz = 0$. В этом случае *линейная оценка* $\hat{x}$ имеет вид

$$\hat{x} = hy, \quad (1.2)$$

где $h: X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Соотношение (1.2) называют линейным фильтром, h — весовым оператором фильтра. Обычно предполагается, что выделено (задано) некоторое множество h весовых операторов и требуется найти в этом множестве весовой оператор, доставляющий *наилучшую (оптимальную) оценку* $\hat{x}$. Понятие оптимальной оценки связано с зада-

нием критерия качества фильтра. В рамках теории Винера — Колмогорова таким критерием служит среднеквадратичная погрешность фильтрации

$$J(h) = M |x - \hat{x}|^2. \quad (1.3)$$

Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма в пространстве X , запись (1.3) предполагает, что случайная величина z имеет статистические моменты второго порядка. Это, в частности, означает, что у случайной величины z имеется корреляционный (ковариационный) оператор

$$R_z = Mzz^* \quad (1.4)$$

(в рассматриваемом вещественном случае звездочка означает эрмитово сопряжение). С учетом (1.2), (1.4) среднеквадратичный критерий (1.3) качества фильтрации может быть переписан в виде

$$J(h) = \text{sp} \{ R_x - hR_{yx} - R_{yx}^*h^* + hR_yh^* \}, \quad (1.5)$$

где $\text{sp}\{\cdot\}$ — след (сумма собственных значений) симметричного оператора $\{\cdot\}$, действующего в пространстве R^n ,

$$R_x = Mxx^*, \quad R_{xy} = (R_{yx})^* = Mxy^*, \quad R_y = Myy^*.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача оптимальной фильтрации может быть записана в виде

$$\text{sp} \{ R_x - hR_{yx} - R_{yx}^*h^* + hR_yh^* \} \rightarrow \inf_{h \in H}. \quad (1.6)$$

Сложность минимизации квадратичного функционала $J(h)$ зависит от вида множества H . Если множество H замкнуто, то в силу конечномерности рассматриваемых случайных величин нижняя грань в (1.6) достигается, т.е. задача оптимальной фильтрации разрешима. Особенно просто решение задачи (1.6) получается в случае, если H — множество всех весовых операторов $h: X \rightarrow Y$; здесь оптимальный оператор h_{opt} , как нетрудно убедиться, определяется формулой

$$h_{\text{opt}} = R_{xy}R_y^+, \quad (1.7)$$

где R_y^+ — псевдообращение оператора R_y (см. теорему 1.1). Если симметричный оператор R_y положителен, то $R_y^+ = R_y^{-1}$, т.е. псевдообращение совпадает с обратным оператором. Формула (1.7) подразумевает, что нуль-пространство матрицы R_y

является частью нуль-пространства оператора R_{xy} . Это условие в явной форме может быть выражено соотношением

$$R_{xy}R_y^+R_y = R_{xy}. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) всегда выполнено для корреляционного оператора. Действительно, пусть $R_y a = 0$, $a \neq 0$. Тогда $y^* a = 0$ с вероятностью 1 и $R_{xy} a = Mxy^* a = 0$.

В рамках теории Винера — Колмогорова основное внимание уделяется случаю, когда $\mathbf{h}$ — множество неупреждающих весовых операторов. Понятие неупреждающего оператора связано с введением в пространстве R^{2n} временной структуры. Простейший способ введения такой структуры связан с фиксацией некоторых ортонормированных базисов в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. В этом случае будем говорить, что весовой оператор $h: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ является неупреждающим, если отвечающая ему в выбранных базисах $n \times n$ -матрица является нижнетреугольной матрицей. Линейный фильтр с неупреждающим весовым оператором называется *физически реализуемым*. Пусть

$$z = \text{col}(z^{(1)}, \dots, z^{(2n)}) = \text{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \quad (1.9)$$

— представление случайной величины z в выбранном базисе (col означает, что величина z рассматривается как вектор-столбец). Тогда физически реализуемый фильтр (1.2) может быть представлен в виде

$$\hat{x}_i = \sum_{i'=1}^i h_{ii'} y_{i'}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.10)$$

где $\|h_{ii'}\|_{i,i'=1}^n$ — матрица, отвечающая весовому оператору h в выбранном базисе.

Обозначим через $\mathbf{h}_0$ множество всех неупреждающих операторов, действующих из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Весовой оператор (1.7) не является неупреждающим, а потому не решает задачу оптимизации

$$J(h) = \inf_{h \in \mathbf{h}_0}. \quad (1.11)$$

Для описания структуры оптимального в множестве $\mathbf{h}_0$ фильтра введем понятие о спектральной факторизации корреляционного оператора R_y . Будем говорить, что неотрицательный в $\mathbf{Y}$ оператор R_y допускает *спектральную факторизацию*, если существует нижнетреугольная и обратимая в $\mathbf{Y}$ матрица U , такая, что справедливо представление

$$R_y = UU^*. \quad (1.12)$$

Из приведенного определения следует, что факторизация (1.12) возможна, лишь если оператор $R_y: Y \rightarrow Y$ положительный (обратимость оператора U влечет обратимость неотрицательного оператора R_y , т.е. R_y должен быть положительным оператором). С другой стороны, хорошо известно, что всякий положительный оператор $R_y: Y \rightarrow Y$ допускает спектральную факторизацию (она называется также факторизацией Холецкого и используется в различных реализациях численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений [101]). Оператор $U: Y \rightarrow Y$ соотношением (1.12) определяется в существенном однозначно (с точностью до диагональной матрицы с диагональными элементами ± 1). Очевидно, всякий оператор $Q: Y \rightarrow Y$ допускает представление в виде

$$Q = Q_+ + Q_-, \quad (1.13)$$

где Q_+ — линейный неупреждающий оператор, Q_- — линейный строго упреждающий оператор (операторам Q_+ , Q_- отвечают соответственно нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы, причем оператору Q_- отвечает матрица с нулевой главной диагональю). Соотношение (1.13) назовем сепарацией оператора Q .

Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть $R_y \gg 0$. Тогда задача оптимизации (1.11) разрешима и оптимальный в h_0 оператор h_{opt} имеет вид

$$h_{\text{opt}} = \{R_{xy}(U^*)^{-1}\}_+ U^{-1}, \quad (1.14)$$

где U — оператор из соотношения факторизации (1.12) и $\{\}_+$ — результат сепарации (с.м. (1.13)) оператора $\{\}$. При этом

$$\inf_{h \in h_0} J(h) = J(h_{\text{opt}}) = \text{sp} \{R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx}\} + \\ + \text{sp} \{[R_{xy}(U^*)^{-1}]_- ([R_{xy}(U^*)^{-1}]_-)^*\}. \quad (1.15)$$

Доказательство теоремы 2.1 достаточно очевидно. Представление (1.14) оптимального весового оператора соответствует интерпретации Боде—Шеннона действия оптимального фильтра: неупреждающий оператор U^{-1} "выбеливает" наблюдаемую последовательность $y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\}$, неупреждающий оператор $[R_{xy}(U^*)^{-1}]_+$ осуществляет оптимальную обработку "выбеленной" последовательности.

Таким образом, весовой оператор оптимального "физически реализуемого" фильтра получен по "исходным данным" задачи фильтрации с помощью операций факторизации (1.12) и сепарации (1.13) некоторых операторов, построенных по корреляционному оператору R_z частично наблюдаемого случайного "процесса" (1.9). Аналогичная ситуация имеет место и в "бесконечномерном" случае, когда z является временным рядом, определенным на неограниченном промежутке времени, либо случайным процессом в непрерывном времени. Однако в "бесконечномерном" случае проблема факторизации и сепарации усложняется. Известно, что не любой положительно-определенный оператор допускает сепарацию. Разумеется, при этом следует уточнить, как вводится временная структура в "бесконечномерном" пространстве. В данном разделе формула (1.14) для весового оператора физически реализуемого оптимального фильтра обосновывается в достаточно общей ситуации.

Перейдем к строгой постановке задачи оптимальной фильтрации.

Б. Постановка задачи оптимального неупреждающего оценивания случайных элементов. Достаточно общая постановка задачи оптимального оценивания дана в п. 1.2А, однако решение ее было получено (см. п. 2Б) лишь в классе ограниченных весовых операторов (без учета физической реализуемости). В данном пункте сосредоточим внимание на задаче оптимизации фильтра в классе физически реализуемых фильтров. С этой целью примем, что в гильбертовых пространствах H' , H'' введены временные структуры с помощью эрмитовых разложений единиц $P'_T = \{P'_t, t \in T\}$ и $P''_T = \{P''_t, t \in T\}$ соответственно. Тогда в гильбертовом пространстве $H = H' \times H''$ временная структура определяется разложением единицы P_T , состоящей из ортопроекторов P_t (см. формулу (1.3.5)). Через h^τ обозначим класс всех линейных ограниченных τ -каузальных операторов $h: H'' \rightarrow H'$. При этом задача оптимального оценивания может быть записана так:

$$J_{\varphi'}(h) \rightarrow \inf_{h \in h^\tau}, \quad \varphi' \in \varphi', \quad (1.16)$$

где φ' — выделенное множество элементов из H' . При каждом $\varphi' \in \varphi'$ функционал $J_{\varphi'}$ определен на множестве h^τ формулой

$$J_{\varphi'}(h) = M |\langle \varphi', x - hy \rangle|^2. \quad (1.17)$$

Предположение об ограниченности операторов h усложняет решение задачи (1.16). Поэтому обобщим постановку задачи оптимизации, отказавшись от условия ограниченности весовых операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$, но обеспечив безусловность ее разрешимости. Анализируя решение обобщенной задачи оптимального оценивания, можно получить условия разрешимости и исходной задачи (1.16).

В. Обобщение задачи оптимального оценивания. Обозначим через $\bar{\mathbf{H}}'$, $\bar{\mathbf{H}}''$ расширения гильбертовых пространств $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$, полученные с помощью их t -пополнения. Через $\bar{h}^t$ обозначим множество всех линейных t -каузальных операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$, таких, что при каждом $t \in \mathbf{T}$ операторы $\bar{P}_t' \bar{h} \bar{h}^* \bar{P}_t'$, действующие в силу леммы 1.5 в инвариантном подпространстве $\bar{P}_t' \mathbf{H}'$, имеют конечную норму. Напомним, что $\bar{h}^*$ — оператор, сопряженный оператору $\bar{h}$ (см. лемму 1.6), $\bar{h}^*: \bar{\mathbf{H}}' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}''$. Заметим, что нормы $C_t = |\bar{P}_t' \bar{h} \bar{h}^* \bar{P}_t'|$ операторов $\bar{P}_t' \bar{h} \bar{h}^* \bar{P}_t'$ не предполагаются ограниченными равномерно по t , так что оператор $\bar{h}: \bar{\mathbf{H}}'' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$ может не быть ограниченным в каком-либо разумном смысле. Предположим также, что корреляционный оператор $R_z = Mzz^*$ случайного частично наблюдаемого $\mathbf{H}$ -элемента $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ограничен на множестве $\mathbf{F}^0$ финитных в $\mathbf{H} = \mathbf{H}' \times \mathbf{H}''$ элементов (см. п. 1А), а потому по непрерывности может быть распространен на все $\mathbf{H}$. Теперь можно поставить задачу получения линейной оценки

$$\hat{x} = \bar{h}y \quad (1.18)$$

случайного $\mathbf{H}'$ -элемента x по реализации случайного $\mathbf{H}''$ -элемента y , минимизирующей при каждом $t \in \mathbf{T}$ функционал

$$J^{(t)}(\bar{h}) = M |\bar{P}_t(x - \hat{x})|_{\mathbf{H}'}^2 = M |\bar{P}_t(x - \bar{h}y)|_{\mathbf{H}'}^2. \quad (1.19)$$

Величина $J^{(t)}(\bar{h})$ в силу ограниченности корреляционного оператора частично наблюдаемого случайного $\mathbf{H}$ -элемента z конечна на множестве $\bar{h}^t$ при каждом $t \in \mathbf{T}$, и потому задача оптимального оценивания

$$J^{(t)}(\bar{h}) \rightarrow \inf_{\bar{h} \in \bar{h}^t}, \quad t \in \mathbf{T}, \quad (1.20)$$

имеет смысл.

Можно было бы рассмотреть более сложную ситуацию, когда случайные элементы x принимают значения в некотором $\mathbf{F}'$ -слабом расширении $\mathbf{H}'_{\mathbf{F}'}$ пространства $\mathbf{H}'$ при $\mathbf{F}' \neq (\mathbf{F}')^0$, тогда

следует рассматривать весовые операторы $\bar{h}: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'_{\mathbf{F}'}$. Можно и случайный элемент y считать обобщенным, принимающим значения в $\mathbf{F}''$ -слабом расширении пространства $\mathbf{H}''$, при этом следует полагать $\bar{h}: \mathbf{H}''_{\mathbf{F}''} \rightarrow \mathbf{H}'_{\mathbf{F}'}$. Чтобы не затемнять существа дела усложненными обозначениями, ограничимся рассмотрением случая $\mathbf{F}' = (\mathbf{F}')^{\circ}$, $\mathbf{F}'' = \mathbf{H}''$, тогда $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$; указанные обобщения задачи оптимального оценивания достаточно очевидны.

Задачу оптимизации (1.20) удобно представить в следующем виде: пусть φ' — произвольный элемент пространства $\bar{P}_t \bar{\mathbf{H}} = P'_t \mathbf{H}'$ (см. лемму 1.5). Тогда величина

$$\begin{aligned} J_{\varphi'}^{(t)}(\bar{h}) &= \mathbf{M} |\langle \varphi', (x - \hat{x}) \rangle_{\mathbf{H}'}|^2 = \mathbf{M} |\langle \varphi', (x - \bar{h}y) \rangle_{\mathbf{H}'}|^2 = \\ &= -\langle \varphi', [R_x - R_{xy}\bar{h}^* - \bar{h}R_{yx} + \bar{h}R_y\bar{h}^*] \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'} = \\ &= \langle \varphi', \bar{P}'_t [R_x - R_{xy}\bar{h}^* - \bar{h}R_{yx} + \bar{h}R_y\bar{h}^*] \bar{P}'_t \varphi' \rangle_{\mathbf{H}'} \end{aligned} \quad (1.21)$$

при любом фиксированном $\varphi' \in \bar{P}'_t \mathbf{H}'$ определяет неотрицательный функционал на множестве $\bar{\mathbf{h}}^T$ весовых операторов $\bar{h}: \mathbf{H}'' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$ физически реализуемых фильтров. Поэтому можно рассмотреть задачу оптимизации

$$J_{\varphi'}^{(t)}(\bar{h}) \rightarrow \inf_{\bar{h} \in \bar{\mathbf{h}}^T}, \quad \varphi' \in \varphi'_t, \quad (1.22)$$

где φ'_t — заданное подмножество элементов множества $\bar{P}'_t \mathbf{H}'$. Очевидно, при выборе $\varphi'_t = \bar{\mathbf{H}}'$ задачи (1.22) и (1.20) эквивалентны. Возможность выбора множества $\varphi'_t \neq \bar{\mathbf{H}}'$ делает постановку задачи оптимизации более гибкой (например, в качестве множества φ'_t может быть выбрано пересечение множества $\mathbf{F}'$ основных элементов пространства $\bar{\mathbf{H}}'$ с множеством $(\mathbf{F}')^{\circ}$ финитных элементов этого пространства). Впрочем, при сформулированных выше предположениях задача оптимизации (1.22) разрешима и ее решение не зависит от выбора множества φ'_t , это означает, что рассмотрение задачи оценивания "обобщенных" случайных элементов приводит к тому же оптимальному фильтру, что и задача оценивания "обычных" случайных элементов.

Г. Разрешимость задачи оптимального оценивания и структура оптимального фильтра. Задача оптимизации (1.22) проще, чем задача (1.16), ее разрешимость устанавливается достаточно элементарно.

Теорема 2.2. *Предположим, что корреляционный оператор $R_z = Mzz^*$ частично наблюдаемого случайного $\bar{H}'$ -элемента $z = -\binom{x}{y}$ обладает следующими свойствами:*

1) *при каждом $t \in T$ оператор $R_z^{(t,t)} = \bar{P}_t R_z \bar{P}_t: P_t H \rightarrow P_t H$ ограничен;*

2) *при каждом $t \in T$ корреляционный оператор $P_t'' R_y P_t'': \bar{H}'' \rightarrow H''$ положительно-определен в инвариантном подпространстве $\bar{P}_t'' H''$.*

Тогда при каждом $t \in T$ существует элемент $\hat{x}_t \in P_t' H'$, удовлетворяющий при любом элементе $\varphi' \in \varphi'_t$ условию

$$M |\langle \varphi', x - \hat{x}_t \rangle_{H'}|^2 = \inf_{h \in \bar{H}'} M |\langle \varphi', x - \bar{P}_t' h y \rangle_{H'}|^2.$$

Оценка $\hat{x}_t$ определяется формулой

$$\hat{x}_t = R_{xy}^{(t,t-\tau(t))} \left[R_y^{(t-\tau(t),t-\tau(t))} \right]^{-1} \bar{P}_{t-\tau(t)}'' y. \quad (1.23)$$

Здесь

$$R_{xy}^{(t,t-\tau(t))} = P_t' R_{xy} P_{t-\tau(t)}'', \quad R_y^{(t,t)} = P_t'' R_y P_t'' \quad (1.24)$$

и $\left[R_y^{(t,t)} \right]^{-1}$ обозначает обращение оператора $R_y^{(t,t)}$ в инвариантном подпространстве $P_t'' H''$. При этом

$$M |\langle \varphi', x - \hat{x}_t \rangle_{H'}|^2 = \left\langle \varphi', \left[P_t' R_x P_t' - R_{xy}^{(t,t-\tau(t))} \left[R_y^{(t-\tau(t),t-\tau(t))} \right]^{-1} R_{yx}^{(t-\tau(t),t)} \right] \varphi' \right\rangle_{H'}. \quad (1.25)$$

Теорема 2.2 является почти непосредственным следствием теоремы 1.4. Действительно, с учетом равенств $\bar{P}_t' \varphi' = \bar{\varphi}'$ и (1.23) функционал (1.21) переписывается в виде

$$J_{\varphi'}^{(t)}(\bar{h}) = \left\langle \varphi', \left[\bar{P}_t' R_x \bar{P}_t' - R_{xy}^{(t,t-\tau(t))} \bar{h}^* - \bar{h} R_{yx}^{(t,t-\tau(t))} + \bar{h} R_y^{(t-\tau(t),t-\tau(t))} \bar{h}^* \right] \varphi' \right\rangle_{H'}, \quad (1.26)$$

а задача оптимизации (2.22) сводится к минимизации функционала (1.26) в инвариантном для оператора $R_y^{(t-\tau(t),t-\tau(t))}$ подпространстве $H_{t-\tau(t)}'' = P_{t-\tau(t)}'' H''$. Тем самым пришли к задаче оптимизации (1.2.9) при $H' = P_t H'$, $H'' = P_{t-\tau(t)}'' H''$, ее решение дается теоремой 1.1. В условиях теоремы 2.2 оператор

$R_y^{(t)}$ ограниченно обратим в подпространстве $\mathbf{H}''$, так что нет необходимости использовать его псевдообращение. Формулы (1.2.15), (1.2.16) с учетом обозначений (1.24) принимают тогда вид (1.23), (1.25), что и составляет содержание теоремы 2.1.

Теорема 2.2 не утверждает разрешимости задачи оптимизации (1.22); это имело бы место, если бы удалось установить существование каузального оператора $\bar{h}: \bar{\mathbf{H}}' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$, удовлетворяющего условиям $\hat{x}_t = \bar{P}_t' \bar{h} y, t \in T$. Для этого полученные оценки $\{x_t, t \in T\}$ во всяком случае должны при $t' \geq t$ удовлетворять соотношениям

$$\bar{P}_t' \bar{P}_{t'}' \hat{x}_{t'} = \bar{P}_t' \hat{x}_t,$$

что, вообще говоря, не так.

Д. Локальное оценивание. Приведенное в теореме 2.2 решение задачи оптимального оценивания неудобно в том смысле, что дает оценку случайного элемента $\bar{P}_t' \hat{x}$. В применении к задаче фильтрации это означает, что в фиксированный момент времени t оценивается вся предыстория случайного процесса. Обычно желательно получать оптимальную оценку значения процесса в тот или иной момент времени, т.е. локальную оценку. Представляется, что такие оценки проще реализовать при использовании ЭВМ. Однако в принятой выше постановке задачи случайные элементы $\hat{x}$ могут не иметь значений в отдельные моменты времени. Это затруднение можно иногда преодолеть, если искать оценки, локализованные на некотором временном интервале. Схема получения таких локализованных оценок полностью укладывается в приведенную выше схему оптимального оценивания, достаточно лишь распорядиться подходящим выбором функций φ' в задаче оптимизации (1.16). Поясним эту мысль подробнее.

Пусть $t \in T$ и Δ — фиксированные числа, $\Delta > 0$. Случайный элемент $x(t, \Delta) = (P_t - P_{t-\Delta})x$ в естественном смысле локализован на интервале $(t, t - \Delta]$ (предполагается, что этот интервал принадлежит множеству T). Можно поставить вопрос о получении линейной оптимальной оценки $\hat{x}(t, \Delta)$ случайного элемента $x(t, \Delta)$ по наблюдениям за реализацией случайного элемента $(P_{t-\tau(t)} - P_{t-\tau(t)-\Delta})y$,

$$\begin{aligned} M |\langle \varphi', x(t, \Delta) - \hat{x}(t, \Delta) \rangle_{\mathbf{H}}|^2 = \\ = \inf_{\bar{h} \in \bar{\mathbf{H}}'} M |\langle \varphi', x(t, \Delta) - (P_t - P_{t-\Delta}) \bar{h} y \rangle_{\mathbf{H}}|^2, \quad (1.27) \end{aligned}$$

где φ' — произвольный элемент множества $\bar{P}'_t \bar{H}' = P' H'$. Таким образом, пришли к задаче оптимизации, рассмотренной в теореме 1.2. При выполнении условий теоремы 1.2 существует искомая оптимальная оценка $\hat{x}(t, \Delta)$.

В некоторых случаях полученная оптимальная оценка $\hat{x}(t, \Delta)$ такова, что, например, случайная величина $\Delta^{-1} \hat{x}(t, \Delta)$ при $\Delta \rightarrow 0$ имеет предельное в среднеквадратичном смысле значение. Тогда приходим к "точечной" (локальной) оценке

$$\hat{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \hat{x}(t, \Delta)$$

случайной величины

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} (P_t - P_{t-\Delta})x,$$

если эта величина имеет смысл. В ряде случаев для локальной оценки $\hat{x}(t)$ удастся установить представление в виде "стохастического" интеграла

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t-\tau(t)} h(t, t') dy(t') \quad (1.28)$$

с некоторой функцией $h(\cdot)$, $h(t, t'): \bar{P}'_t \bar{H}'' \rightarrow \bar{P}'_t \bar{H}'$ ($t, t' \in T$). Если "интегральный" оператор $\bar{h}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ с *весовой функцией* $h(\cdot)$ является $\tau(\cdot)$ -ограниченным, то в соответствии с теоремой 1.2 его сужение на пространство $\bar{H}''$ является ограниченным каузальным оператором. Другими словами, в этом случае разрешима задача оптимизации

$$J_{\varphi'}^{(t)}(h) \rightarrow \inf_{\bar{h} \in \bar{H}^{\tau}}, \quad \varphi' \in \varphi',$$

в классе $\bar{H}^{\tau}$ τ -каузальных ограниченных операторов.

Для локальных оценок иногда удастся получить рекуррентные представления, удобные для вычисления этих оценок в "реальном масштабе времени". Типичным примером подобного рода рекуррентного представления фильтра является известный фильтр Калмана — Бьюси [45, 141].

2. Оптимальное оценивание случайных элементов в пространстве с дискретной временной структурой

Если разложение единицы P_T определено на "временном интервале" T как кусочно-постоянная операторная функция (с ко-

нечным либо счетным числом точек разрыва), то естественно говорить о *дискретной* временной структуре. Обычно упомянутое множество точек разрыва не имеет точек сгущения внутри множества T . В этом случае говорят о "дискретном" разложении единицы — последовательности "скачков" кусочно-постоянной функции P_T .

Рассмотрение причинных пространств с дискретной временной структурой в прикладных задачах соответствует случаю, когда "данные наблюдения" поступают в дискретные моменты времени. В некоторых отношениях такая ситуация представляется более реалистичной по сравнению с ситуацией, отвечающей "непрерывному потоку данных", и приводит к рассмотрению процессов в "дискретном времени", или временных рядов. Обычно уменьшение "шага дискретизации" при обработке случайных процессов приводит к результатам, мало отличающимся от предельно возможных; вместе с тем, использование цифровых ЭВМ при обработке сигналов предполагает, как правило, их дискретизацию, т.е. "кусочно-постоянную" аппроксимацию. Исследование задачи линейной оптимальной фильтрации случайных временных рядов позволяет значительно продвинуться в ее решении и в ряде случаев получить в определенном смысле законченные результаты.

А. Дискретизация временной структуры причинного пространства. Пусть причинное гильбертово пространство H наделено временной структурой с помощью эрмитова разложения единицы P_T , определенного на "временном интервале" $T = (t_s, t_f)$. Пусть t — некоторое конечное либо счетное линейно упорядоченное множество точек из T , не имеющее точек сгущения внутри множества T и содержащее точки t_s, t_f ,

$$t = \{t_k, k \in K\}, \quad (2.1)$$

где

$$K = K_t = Z \cap (k_s, k_f) \quad (2.2)$$

— множество целочисленных индексов точек из t , $t_k = t_s, t_{k_f} = t_f$. Семейство

$$P_t = \{P_t, t \in t\} \quad (2.3)$$

ортопроекторов P_t является разложением единицы, отвечающим "дискретному" множеству $t \subset T$; семейство P_t определяет дискретную временную структуру (P_t -структуру) гильбертова пространства H . Таким образом, в случае $T = R$ имеем $K = Z$.

Дискретную временную структуру удобнее описывать с помощью приращений операторной функции $\{P_t, t \in T\}$ на интервалах, определяемых множеством t . Пусть $t_k, t_{k-1}, k \in K$, — некоторые соседние точки множества t , формула

$$Q_k = P_{t_k} - P_{t_{k-1}} \quad (2.4)$$

определяет ортопроектор, а семейство $Q_K = \{Q_k, k \in K\}$ всех таких ортопроекторов определяет временную структуру пространства H , поскольку формула

$$P_t = \sum_{\{k: t_k \leq t\}} Q_k, \quad t \in t, \quad (2.5)$$

однозначно задает проекторы из дискретного разложения единицы P_t . Проекторы (2.4) взаимно ортогональны в том смысле, что

$$Q_k Q_{k'} = Q_{k'} Q_k = 0_H, \quad k \neq k', \quad k, k' \in K. \quad (2.6)$$

Семейство $Q_K = \{Q_k, k \in K\}$ взаимно ортогональных проекторов, обладающих свойством полноты ($Q_k \rightarrow 0_H$ при $k \rightarrow k_s$ и $\sum_{k' \leq k} Q_{k'} \rightarrow I_H$ при $k \rightarrow k_f$), будем называть *ортогональным разложением единицы*, а пару (H, Q_K) — дискретным причинным пространством.

Использование ортогонального разложения единицы Q_K в ряде отношений удобнее, чем эквивалентное ему "монотонное" разложение единицы P_t . Отметим, что в общем случае "непрерывного" разложения единицы P_T сопоставить эквивалентное ему семейство взаимно ортогональных проекторов затруднительно.

Б. Финитные операторы в дискретном причинном пространстве. Пусть $R: H \rightarrow H$ — произвольный линейный оператор, действующий в причинном гильбертовом пространстве (H, Q_K) . Ему можно сопоставить операторы

$$R_{kk'} = Q_k R Q_{k'}, \quad (2.7)$$

где ортопроекторы Q_k определяются формулой (2.4). Операторы $R_{kk'}$ однозначно определяют оператор R :

$$R = \sum_{k \in K} \sum_{k' \in K} R_{kk'}. \quad (2.8)$$

Понятие финитности оператора в дискретном причинном пространстве вводится следующим образом. Пусть $\tau_t: t \rightarrow t$ — некоторое отображение дискретного множества t в себя. Соотношение

$$t_{k'} = \tau(t_k), \quad k \in K, \quad (2.9)$$

однозначно определяют отображение $\kappa = \{\kappa(k), k \in K\}$ множества K в себя, $t_{\kappa(k)} = \tau(t_k)$. Оператор $R: H \rightarrow H$ назовем κ -каузальным, если выполнены соотношения

$$R_{kk'} = 0_H \quad \text{при} \quad k' > k - \kappa(k), \quad (2.10)$$

т. е. "блоки" $R_{kk'}$ оператора (2.8) нулевые при достаточно больших k' . Если к тому же они нулевые и при $k' = k - \kappa(k)$, то оператор R назовем строго κ -каузальным. Оператор $R: H \rightarrow H$ называется κ -антикаузальным (строго κ -антикаузальным), если выполнены соотношения $R_{kk'} = 0_H$ при $k' < k - \kappa(k)$ (соответственно при $k' \leq k - \kappa(k)$). Оператор R , являющийся одновременно κ -каузальным и κ -антикаузальным, назовем κ -нейтральным. Как и для непрерывного времени, κ -каузальные операторы с неотрицательной (неположительной) характеристикой $\kappa(\cdot)$ будем называть κ -неупреждающими (соответственно κ -упреждающими). Смысл введенных терминов особенно прозрачен, если характеристика $\kappa(\cdot)$ — постоянная величина (в этом случае κ -каузальный оператор является либо κ -упреждающим, либо κ -неупреждающим в зависимости от знака κ).

Представим оператор $R: H \rightarrow H$ в виде блочно-операторной матрицы

$$R = \|\tilde{R}_{kk'}\|, \quad k, k' \in K, \quad (2.11)$$

где блочные операторы $\tilde{R}_{kk'}: Q_k H \rightarrow Q_{k'} H$ определяются однозначно оператором R (они являются сужениями на соответствующие подпространства операторов (2.7)). Свойство κ -каузальности (строгой κ -каузальности) оператора R с постоянной характеристикой κ ($\kappa(k) \equiv \kappa(k_s)$, $k \in K$) означает нижнетреугольность блочно-операторной матрицы $\|\tilde{R}_{kk'}\|$, причем отличными от нулевых могут быть лишь операторы, стоящие на и ниже (соответственно ниже) диагонали с номером κ , параллельной главной диагонали. Для κ -антикаузального оператора блочное представление имеет верхнетреугольный характер, κ -локальный оператор может иметь отличные от нулевых блоки лишь на диагонали с номером κ . Операторы 0-каузальные ($\kappa = 0$) называются *каузальными, причинными или неупреждающими*.

Аналогичный смысл имеют понятия строго каузального, антикаузального, строго антикаузального и нейтрального (0-нейтрального) операторов, действующих из одного гильбертова пространства в другое (в каждом из этих пространств предполагается введенной временная структура с одинаковым дискретным "временным" множеством t). Отметим, что соотношения, определяющие при $\varkappa = 0$ нейтральный оператор, эквивалентны условиям

$$Q_k R = R Q_k, \quad k \in K. \quad (2.12)$$

По произвольному линейному ограниченному оператору $R: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ формулы

$$R_{[\varkappa]} = \sum_{\{k' \leq k - \varkappa(k)\}} R_{kk'}, \quad R_{[\bar{\varkappa}]} = \sum_{\{k' \geq k - \varkappa(k)\}} R_{kk'} \quad (2.13)$$

(операторы $R_{kk'}$ определяются соотношениями (2.7), (2.8)) порождают соответственно $\varkappa$ -каузальный и $\varkappa$ -антикаузальный линейные операторы, называемые компонентами оператора R .

Отметим, что компоненты ограниченного в пространстве $\mathbf{H}$ оператора в случае неограниченного множества K могут оказаться неограниченными операторами (но они заведомо определены как операторы, действующие в $\mathbf{F}^0$ -слабом пополнении $\bar{\mathbf{H}}$ пространства $\mathbf{H}$). Известны примеры ограниченных операторов, причинная компонента которых — неограниченный в $\mathbf{H}$ оператор (см., например [132]). В дальнейшем будем говорить, что оператор R имеет $\varkappa$ -каузальную и (или) $\varkappa$ -антикаузальную компоненты в $\mathbf{H}$, предполагая, что операторы (2.13) ограничены в $\mathbf{H}$. В этом случае оператор

$$R_{[[\varkappa]]} = R_{[\varkappa]} + R_{[\bar{\varkappa}]} - R - \sum_{\{k' = k - \varkappa(k)\}} R_{k,k'} = \sum_{\{k' = k - \varkappa(k)\}} R_{k,k'} \quad (2.14)$$

является ограниченным $\varkappa$ -нейтральным оператором (и называется $\varkappa$ -нейтральной компонентой оператора R). Операторы

$$R_{[\varkappa]}^0 = R_{[\varkappa]} - R_{[[\varkappa]]}, \quad R_{[\bar{\varkappa}]}^0 = R_{[\bar{\varkappa}]} - R_{[[\varkappa]]} \quad (2.15)$$

являются соответственно строго $\varkappa$ -каузальной и строго $\varkappa$ -антикаузальными компонентами оператора R . Формула

$$R = R_{[\varkappa]}^0 + R_{[\bar{\varkappa}]}^0 + R_{[[\varkappa]]} \quad (2.16)$$

задает разложение линейного ограниченного оператора на сумму строго κ -каузального, строго κ -антикаузального и κ -нейтрального операторов.

Аналогично вводятся понятия κ -каузальных, κ -антикаузальных и κ -нейтральных компонент операторов, действующих в пространствах $\mathbf{H}'', \mathbf{H}'$ либо из пространства $\mathbf{H}''$ в $\mathbf{H}'$ и обратно. Так, для оператора $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$ его κ -каузальная компонента определяется формулами

$$h_{[\kappa]} = \sum_{\{k' \leq k - \kappa(k)\}} h_{k,k'}, \quad h_{k,k'} = Q'_k h Q''_{k'}, \quad (2.17)$$

$$Q'_k = P'_{t_k} - P'_{t_{k-1}}, \quad Q''_k = P''_{t_k} - P''_{t_{k-1}}, \quad k \in K, \quad (2.18)$$

$$P'_{t_{i,-1}} = 0_{\mathbf{H}'}, \quad P''_{t_{i,-1}} = 0_{\mathbf{H}''}, \quad (2.19)$$

где ортопроекторы P'_{t_k}, P''_{t_k} определяют временную структуру в пространствах $\mathbf{H}', \mathbf{H}''$. Множество всех κ -каузальных операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$ обозначим через $h^* = h^*(\mathbf{H}'', \mathbf{H}')$.

Пространство $(\mathbf{H}, Q_K)$ и его $\mathbf{F}^0$ -расширение имеют простую геометрическую интерпретацию. Действительно, разложение

$$\varphi = \sum_{k \in K} \varphi_k, \quad (2.20)$$

$$\varphi_k = Q_k \varphi, \quad (2.21)$$

справедливое для произвольного элемента $\varphi \in \mathbf{H}$, показывает, что существует взаимнооднозначное соответствие между пространством $\mathbf{H}$ и множеством $\tilde{l}_2(\mathbf{H})$ последовательностей

$$\tilde{\varphi} = \{\varphi_k: \varphi_k = Q_k \varphi, k \in K\}, \quad (2.22)$$

которое является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению

$$\langle \tilde{\varphi}', \tilde{\varphi}'' \rangle_{l_2} = \sum_{k \in K} \langle \varphi'_k, \varphi''_k \rangle_{\mathbf{H}}, \quad (2.23)$$

при этом в силу взаимной ортогональности ортопроекторов Q_k справедливо равенство Парсеваля — Пифагора

$$\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle_{l_2} = \sum_{k \in K} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_{\mathbf{H}} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathbf{H}}. \quad (2.24)$$

Множество F^0 элементов в $\tilde{l}_2(H)$ состоит из финитных вправо последовательностей, т.е. из последовательностей $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k\}$, для которых $\varphi_k \equiv 0$ при достаточно больших k .

Поточечная сходимость в $\tilde{l}_2(H)$ определяет слабую топологию в этом множестве, пополнение в слабой топологии множества $\tilde{l}_2(H)$ совпадает с F^0 -слабым пополнением и приводит к множеству

$$\tilde{l}_2(H)_{F^0} = \{\tilde{\varphi}: \tilde{\varphi} = \{\varphi_k, k \in K, \varphi_k \in Q_k H\}\} \quad (2.25)$$

последовательностей с взаимно ортогональными элементами. Если элементы $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k, k \in K, \varphi_k \in Q_k H\}$ имеют конечную $\tilde{l}_2(H)$ -норму,

$$|\tilde{\varphi}|_{\tilde{l}_2}^2 = \sum_{k \in K} \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_H < \infty, \quad (2.26)$$

то этот элемент может быть отождествлен с элементом

$$\varphi = \sum_{k \in K} \varphi_k \quad (2.27)$$

базового пространства H . Все элементы множества $\tilde{l}_2(H)_{F^0}$ с бесконечной $\tilde{l}_2(H)$ -нормой образуют множество обобщенных элементов пространства $\tilde{l}_2(H)$. Подчеркнем, что для обобщенного элемента $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k, k \in K, \varphi_k \in Q_k H\}$ не устанавливается никаких ограничений на нормы его компонент, важно лишь, чтобы при каждом $k \in K$ компонента φ_k этого элемента принадлежала подпространству $Q_k H$. Проекторы Q_k допускают расширение по непрерывности в слабой топологии до проекторов $\tilde{Q}_k$ в множестве $\tilde{l}_2(H)_{F^0}$, их действие на элементы $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k, k \in K, \varphi_k \in Q_k H\}$ определяется очевидным соотношением

$$\tilde{Q}_k \tilde{\varphi} = \varphi_k \in Q_k H \subseteq H. \quad (2.28)$$

Каждый линейный оператор $\tilde{R}$, действующий в пространстве $\tilde{l}_2(H)$, может рассматриваться как блочно-операторная матрица

$$\tilde{R} = \|R_{kk'}\|, \quad R_{kk'} = \tilde{Q}_k \tilde{R} \tilde{Q}_{k'}. \quad (2.29)$$

Каждая матрица $\|R_{kk'}\|$, блоки $R_{kk'}$ которой являются линейными ограниченными операторами из подпространства $Q_{k'} H$ в подпространство $Q_k H$, определяет линейный оператор в $\tilde{l}_2(H)_{F^0}$. Из этих рассуждений следует, что всякий линейный оператор $\tilde{R}: \tilde{l}_2(H) \rightarrow \tilde{l}_2(H)$ допускает разложение

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{[x]}^0 + \tilde{R}_{[x]} + \tilde{R}_{[[x]]}$$

на строго κ -каузальную, строго κ -антикаузальную и κ -нейтральную компоненты с произвольным конечным индексом $\kappa(\cdot)$ (см. (2.17)), которые являются линейными операторами в $\tilde{l}_2(\mathbf{H})_{\mathbf{F}}$. В этом смысле проблема сепарации операторов в расширенном пространстве $\tilde{l}_2(\mathbf{H})_{\mathbf{F}}$ тривиальна: κ -каузальная и κ -антикаузальная компоненты оператора $\tilde{R}: \tilde{l}_2(\mathbf{H})_{\mathbf{F}} \rightarrow \tilde{l}_2(\mathbf{H})_{\mathbf{F}}$ определяются формулами (2.16).

Обобщение описанных построений на случай линейных операторов $\tilde{R}$, действующих из одного гильбертова пространства в другое, очевидны, и на этом останавливаться не будем.

В. Задача неупреждающей фильтрации. Теория Винера-Колмогорова имеет дело с задачей построения линейного фильтра, оптимизированного в классе $\mathbf{h}^*(\mathbf{H}', \mathbf{H}'')$ κ -каузальных (по отношению к выделенному разложению единицы Q_K) весовых операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$. В обозначениях

$$\hat{x}_k = Q'_k \hat{x}, \quad y_k = Q''_k y, \quad h_{k,k'} = Q'_k h Q''_{k'}, \quad (2.30)$$

(где ортопроекторы $Q'_k Q$, $Q''_k Q$ определены в (2.19)) κ -каузальный линейный фильтр можно записать как

$$\hat{x}_k = \sum_{\{k' \leq k - \kappa(k)\} \cap K} h_{k,k'} y_{k'}, \quad (2.31)$$

т.е. в привычной форме κ -каузального линейного преобразования "наблюдаемого" временного ряда $y = \{y_k, k \in K\}$ во временной ряд $\hat{x} = \{\hat{x}_k, k \in K\}$ оценок "ненаблюдаемого" ряда $x = \{x_k, x_k = Q'_k x, k \in K\}$. При постоянной характеристике κ целочисленный параметр κ определяет глубину прогноза ($\kappa > 0$) или сглаживания ($\kappa < 0$). Подчеркнем, что случайные элементы x_k, y_k могут быть "бесконечномерными", конечномерность подпространств $Q'_k \mathbf{H}', Q''_k \mathbf{H}''$ не предполагается.

Линейный фильтр с κ -каузальным весовым оператором будем также называть физически реализуемым, если из контекста ясно, о каком множестве K (определяемому разложением единицы Q_K) и значении параметра κ идет речь, либо если их уточнение не играет роли в соответствующем контексте. Если через $\mathbf{h}^* = \mathbf{h}^*(\mathbf{H}', \mathbf{H}'')$ обозначить множество всех κ -каузальных операторов $h: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$ и критерий качества фильтрации принять в виде

$$J_{\varphi'}(h) = \mathbf{M} |\langle \varphi', x - hy \rangle|^2,$$

то задача оптимальной фильтрации в классе физически реализуемых фильтров может быть записана так:

$$J_{\varphi'}(h) \rightarrow \inf_{h \in \mathbf{h}^*}, \quad \varphi' \in \varphi'. \quad (2.32)$$

Ее уточнение (условия разрешимости, построение оптимального фильтра либо оптимизирующей последовательности весовых операторов) имеет тот же характер, что и в задаче оптимизации в классе устойчивых фильтров.

В случае $\varphi' = \mathbf{H}'$ задачу (2.32) можно переписать в виде

$$J_k(h) = \mathbf{M} |x_k - \hat{x}_k|^2 \rightarrow \inf_{h \in \mathbf{h}^*} \quad (2.33)$$

при любом $k \in \mathbf{K}$, где $x_k = Q'_k x$, $\hat{x}_k = Q'_k \hat{x}$, $Q'_k x = P'_{i_k} - P'_{i_k-1}$.

Г. Обобщение задачи оптимальной фильтрации. Как следует из предыдущего, физически реализуемый весовой оператор $h \in \mathbf{h}^*$ может быть описан с помощью набора линейных ограниченных операторов $h_{k,k'}: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$, $k, k' \in \mathbf{K}$,

$$h_{k,k'} = 0 \quad \text{при } k' > k - \kappa(k), \quad (2.34)$$

$$h_{k,k'} Q''_{k'} = Q'_k h_{k,k'} = Q'_k h_{k,k'} Q''_{k'}. \quad (2.35)$$

По предположению, оператор

$$h = \sum_{k,k' \in \mathbf{K}} h_{k,k'} \quad (2.36)$$

ограничен как оператор из $\mathbf{H}''$ в $\mathbf{H}'$. Расширим множество $\mathbf{h}^*$, заменив условие ограниченности операторов h условием ограниченности операторов

$$h_k = Q'_k h = \sum_{k' \in \mathbf{K}} h_{k,k'}: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}', \quad k \in \mathbf{K}. \quad (2.37)$$

Множество всех линейных операторов h , удовлетворяющих условиям (2.34), (2.35) и $|Q'_k h| < \infty$, $k \in \mathbf{K}$, обозначим $\bar{\mathbf{h}}^* = \bar{\mathbf{h}}^*(\mathbf{H}'', \mathbf{H}')$. Очевидно, $\mathbf{h}^* \in \bar{\mathbf{h}}^*$. Операторы $h \in \bar{\mathbf{h}}^*$ определены на плотном в $\mathbf{H}''$ множестве (содержащем подпространства $P''_k \mathbf{H}''$ при любом конечном индексе $k \in \mathbf{K}$), но могут быть неограниченными как операторы из $\mathbf{H}''$ в $\mathbf{H}'$.

Нетрудно убедиться, что для произвольного оператора $h \in \bar{\mathbf{h}}^*$ при любом $k \in \mathbf{K}$ величины

$$J_k(h) = \left| \mathbf{M} x_k - \sum_{k' \in \mathbf{K}} h_{k,k'} y_{k'} \right|^2 \quad (2.38)$$

конечны при ограниченном корреляционном операторе R_z $\bar{H}$ -элемента $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, поэтому осмысленна задача оптимизации

$$J_k(h) \rightarrow \inf_{h \in \bar{H}^{\kappa}}, \quad k \in K. \quad (2.39)$$

Задача оптимизации (2.39) непосредственно связана со схемой слабого пополнения причинного гильбертова пространства, описанной в п. 1А. Действительно, пусть (H', P'_t) , (H'', P''_t) — причинные гильбертовы пространства с дискретными разложениями единиц P'_t, P''_t . Через F', F'' обозначим множества финитных (по отношению к P'_t, P''_t) элементов этих пространств, а через $\bar{H}', \bar{H}'' = F', F''$ -слабые замыкания пространств H', H'' соответственно. Тогда множество κ -каузальных операторов $\bar{h}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ является множеством $\bar{H}^{\kappa}$, фигурирующем в задаче (2.29). Сама задача может быть переписана в виде

$$M |Q_k(x - \bar{h}y)|_{\bar{H}'}^2 \rightarrow \inf_{\bar{h} \in \bar{H}^{\kappa}}, \quad k \in K. \quad (2.40)$$

Д. Существование оптимального фильтра и его структура. Задача оптимизации (2.40) более проста по сравнению с задачей (2.33), ее разрешимость устанавливается достаточно легко.

Теорема 2.3. *Предположим, что корреляционный оператор R_z частично наблюдаемого случайного $\bar{H}$ -элемента $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ограничен, причем корреляционный оператор R_y случайного $\bar{H}''$ -элемента y удовлетворяет условию $P_{t_k} R_y P_{t_k} \geq \epsilon P_{t_k}$ при некотором $\epsilon > 0$ и произвольном $k \in K$. Тогда задача (2.40) оптимальной фильтрации однозначно разрешима и весовой оператор $h_{\text{opt}}: \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ оптимального фильтра определяется формулой*

$$\begin{aligned} h_{\text{opt}} &= \sum_{k, k' \in K} Q'_k R_{xy} P''_{t_{k-\kappa(k)}} \left(P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}} \right)^{-1} P''_{t_{k-\kappa(k)}} Q''_{k'} = \\ &= \sum_{k \in K} Q'_k R_{xy} P''_{t_{k-\kappa(k)}} \left(P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}} \right)^{-1} P''_{t_{k-\kappa(k)}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

При этом

$$\begin{aligned} \inf_{h \in \bar{H}^{\kappa}} J_k(h) &= J_k(h_{\text{opt}}) = \left| P'_{t_k} \left[R_x - R_{xy} P''_{t_{k-\kappa(k)}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}} \right)^{-1} P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_{yx} \right] P'_{t_k} \right|. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь ортопроекторы Q'_k, Q''_k определяются формулами (2.19) через ортопроекторы P'_{t_k}, P''_{t_k} , задающие временную структуру пространства $\mathbf{H}$; $\left(P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}}\right)^{-1} P''_{t_{k-\kappa(k)}}$ — оператор, обратный к оператору $P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}}$, положительно-определенному в подпространстве $P'_{t_{k-\kappa(k)}} \mathbf{H}''$, и $|| \cdot ||$ — норма (спектральный радиус) линейного положительного оператора, действующего в $\mathbf{H}'$.

Доказательство теоремы 2.3 мало чем отличается от доказательства теоремы 2.1 и основано на вычислении оптимальной оценки $\hat{x}_k$ при каждом $k \in \mathbf{K}$ как ортогональной проекции элемента y на гильбертово пространство случайных $\mathbf{H}''$ -элементов $y_k = Q_k y$, $k' \leq k - \kappa(k)$. Отметим лишь, что в отличие от теоремы 2.2 в дискретном случае формула (2.41) определяет каузальный оператор в $\bar{\mathbf{H}}$, который и является весовым оператором оптимального фильтра.

Теорема 2.4. В условиях теоремы 2.3 задача оптимизации (2.33) в классе физически реализуемых весовых операторов разрешима в том и только том случае, если весовой оператор $h_{\text{opt}}: \bar{\mathbf{H}}'' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$, определенный формулой (2.41), κ -ограничен. Тогда этот оператор переводит множество $\mathbf{H}''$ в множество $\mathbf{H}'$ и его сужение на множество $\mathbf{H}''$ является весовым оператором h^* -оптимального фильтра. Последовательность операторов

$$h^{(n)} = \sum_{\{k| \leq n, k'| \leq n\} \cap \mathbf{K}} \sum Q'_k R_{xy} P''_{t_{k-\kappa(k)}} \times \\ \times \left(P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}}\right)^{-1} P''_{t_{k-\kappa(k)}} Q''_k, \quad (2.43)$$

является h^* -оптимизирующей:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k(h^{(n)}) = \inf_{h \in \mathbf{h}^*} J_k(h). \quad (2.44)$$

Утверждение теоремы 2.4 почти очевидно: в ее условиях формула (2.41) определяет линейный оператор, минимизирующий при каждом $k \in \mathbf{K}$ величины $J_k(h)$ (см. (2.33)). Если этот оператор κ -ограничен, то его сужение на множество $\mathbf{H}''$ определяет ограниченный оператор, который является, очевидно, весовым оператором h^* -оптимального фильтра. С учетом лемм 1.7, 1.8 нетрудно убедиться, что если оператор (2.41) не является κ -ограниченным, то задача оптимизации (2.33) неразрешима. В любом случае последовательность $\{h^{(n)}\}$ ограниченных

κ -каузальных операторов $h^{(n)}$ сильно сходится к оператору h_{opt} , а потому является h^* -оптимизирующей. Этих пояснений достаточно, чтобы убедиться в справедливости теоремы 2.4.

Е. Аппроксимация оптимального фильтра. Пусть $t^{(n)}$ — некоторое семейство линейно-упорядоченных множеств точек из "временного" множества T , зависящее от натурального параметра n и обладающее свойствами: 1) каждое из множеств $t^{(n)}$ не более чем счетно и имеет "концевые" точки $t_s^{(n)} = t_s, t_f^{(n)} = t_f$; 2) $t^{(n)} \subseteq t^{(n+1)}, n \in \mathbb{N}$; 3) $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} t^{(n)}} = T$. Здесь черта обозначает замыкание соответствующего множества из $\mathbb{R}$. Таким образом, $t^{(n)}$ — монотонная последовательность разбиений множества T , "неограниченно сгущающихся" с ростом n .

При фиксированном n обозначим через $\bar{h}_{\text{opt}}^{(n)}$ весовой оператор $\bar{h}^{*\kappa}$ -оптимального фильтра, доставляемый теоремой 2.5 при $\kappa = \kappa^n$ (κ^n — отображение в себя множества $K^{(n)} = \mathbb{Z} \cap [k_s^{(n)}, k_f^{(n)}]$ целочисленных индексов точек из $t^{(n)}, t_s^{(n)} = t_{k_s^{(n)}}, t_f^{(n)} = t_{k_f^{(n)}}$, определяемое соотношением $t_{\kappa n(k)} = \tau(t_k), t_k \in t^{(n)}, k \in K^{(n)}$ (см. (2.9)). Здесь, напомним, $\tau(\cdot)$ — верхняя характеристика рассматриваемых финитных операторов (см п. 1.3А). Будем далее предполагать, что функция $\tau(\cdot)$ монотонно невозрастающая, $\tau(t) \geq \tau(t')$ при $t \leq t'$. Если $t \in [t_k, t_{k+1}], t_k, t_{k+1} \in t^{(n)}$, то в силу монотонности разложения единицы P_T справедливы неравенства

$$\begin{aligned} M \left| P'_{t_{k+1}}(x - \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y) \right|_{H'}^2 &\leq \inf_{\bar{h} \in \bar{H}'} M \left| P'_t(x - \bar{h} y) \right|_{H'}^2 \leq \\ &\leq M \left| P'_{t_k}(x - \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y) \right|_{H'}^2, \quad t_k, t_{k+1} \in t^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

из которых следует, что случайные элементы

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^{(n)} &= \bar{P}'_{t_{k+1}} \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y = \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} \bar{P}''_{t_{k+1}-\tau(t_{k+1})} y, \\ \hat{x}_k^{(n)} &= \bar{P}'_{t_k} \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y = \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} \bar{P}''_{t_k-\tau(t_k)} y, \end{aligned} \quad (2.46)$$

получаемые с помощью теоремы 2.4, могут рассматриваться соответственно как "нижняя" и "верхняя" оценки случайного элемента $\bar{P}'_t h y = \bar{P}'_t \bar{h} \bar{P}''_{t-\tau(t)} y$.

Пусть $(t_{k(n)}, t_{k(n)+1})$ — последовательность пар точек, удовлетворяющих условиям: $t_{k(n)} \leq t \leq t_{k(n)+1} \quad (t_{k(n)}, t_{k(n)+1} \in t^{(n)}).$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ приходим к случайным элементам

$$\begin{aligned}\hat{x}(t \mid t - \tau(t) - 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}'_{t_{k(n)}} \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y, \\ \hat{x}(t \mid t - \tau(t) + 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}'_{t_{k(n)+1}} \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y,\end{aligned}\tag{2.47}$$

которые можно интерпретировать как оценки случайного элемента $\bar{P}_t x$ соответственно по "наблюдениям" за реализациями случайных элементов $\bar{P}_{t-\tau(t)-0} y$ и $\bar{P}_{t-\tau(t)+0} y$. При непрерывности разложения единицы P_T справа оценка $\hat{x}(t \mid t - \tau(t) + 0)$ является $\bar{h}^T$ -оптимальной оценкой случайного элемента $P_t x$ (если семейство проекторов P_T считать непрерывным слева, то аналогичную роль играет оценка $\hat{x}(t \mid t - \tau(t) + 0)$). Разумеется, если разложение единицы P_T сильно непрерывно, то случайный элемент $\hat{x}(t) = \hat{x}(t \mid t - \tau(t) - 0) = \hat{x}(t \mid t - \tau(t) + 0)$ является $\bar{h}^T$ -оптимальной оценкой случайного элемента $\bar{P}_t x$. При этом последовательность весовых операторов $\bar{h}_{\text{opt}}^{(n)}$ определяет оптимизирующую последовательность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \bar{P}_t(x - \bar{h}_{\text{opt}}^{(n)} y) \right|^2 = \inf_{\bar{h} \in \bar{h}^T} M \left| \bar{P}_t(x - \bar{h} y) \right|^2.$$

3. Спектральная факторизация положительных операторов

В разд. 2 решение задачи оптимальной фильтрации (теорема 2.3) дано в терминах, связанных с обращением операторов $P''_{t_{k-\kappa(k)}} R_y P''_{t_{k-\kappa(k)}}$ при каждом $k \in K$. Даже если вычисление обратного оператора при каждом k возможно (в общем случае нет конструктивных методов обращения операторов в бесконечномерных пространствах), то формулы теорем 2.3, 2.4 все равно неудобны при многократном вычислении оптимальных оценок. В рамках теории Винера — Колмогорова разработан другой способ вычисления оптимального весового оператора в форме, допускающей естественную интерпретацию действия оптимального фильтра. Кроме того, при дополнительных предположениях о свойствах частично наблюдаемого случайного элемента z получаемый в рамках теории Винера — Колмогорова оптимальный фильтр позволяет установить линейные зависимости между оптимальными оценками, что приводит к рекуррентным методам их вычисления (наиболее известная модель такого рода — рекуррентный фильтр Калмана — Бьюси [45, 141]).

В теории Винера—Колмогорова структура оптимального фильтра описывается в терминах факторизации и сепарации некоторых операторов, порождаемых задачей фильтрации. Перейдем к описанию этих понятий.

А. Факторизация положительных операторов. Пусть $(\mathbf{H}, P_T)$ — причинное гильбертово пространство, временная структура в котором введена с помощью эрмитова разложения единицы P_T (см. п. 1.3А), и $\bar{\mathbf{H}} = F^\circ$ -слабое (пополнение) замыкание пространства $\mathbf{H}$ (см. п. 1.4А). Пусть t — некоторое дискретное линейно упорядоченное подмножество "временного интервала" T . Через G_t обозначим множество всех взаимно однозначных отображений $\bar{G}$ множества $\bar{\mathbf{H}}$ в себя, для которых при каждом $t \in t$ операторы $\bar{P}_t \bar{G} \bar{P}_t$, $\bar{P}_t \bar{G}^{-1} \bar{P}_t$, действующие в инвариантном подпространстве $P_t \mathbf{H}$ (см. лемму 1.5), ограничены.

Отметим, что сужения операторов $\bar{G}$, $\bar{G}^{-1}$ на множество $\mathbf{H}$ определяет операторы G , G^{-1} в $\mathbf{H}$, имеющие плотные области определения, поскольку последние заведомо включают в себя множество F° финитных в $\mathbf{H}$ элементов. Однако эти операторы G , G^{-1} могут быть неограниченными. Отметим также, что G_t включает в себя каузальные каузально обратимые в $\mathbf{H}$ операторы.

Будем говорить, что оператор $\bar{G} \in G_t$ допускает (спектральную) факторизацию, если существует каузальный (по отношению к разложению единицы P_T) оператор $\bar{U}: \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$, каузально обратимый в $\bar{\mathbf{H}}$, для которого выполнено соотношение

$$\bar{G} = \bar{U} \bar{U}^*, \quad (3.1)$$

где $\bar{U}^*$ — оператор, "сопряженный" каузальному оператору $\bar{U}$ (см. лемму 1.6).

Оператор $\bar{G} \in G_t$ будем называть *положительным*, если при любом $t \in t$ неотрицательны операторы $\bar{P}_t \bar{G} \bar{P}_t$, $\bar{P}_t \bar{G}^{-1} \bar{P}_t: P_t \mathbf{H} \rightarrow P_t \mathbf{H}$. Из соотношения факторизации (3.1) следует, что оператор $\bar{G}$ положительный. Таким образом, положительность оператора $\bar{G} \in G_t$ — необходимое условие существования для него спектральной факторизации.

Теорема 2.5. *Всякий положительный оператор $\bar{G} \in G_t$ допускает спектральную факторизацию. Каузальный (по отношению к дискретному разложению единицы $\bar{P}_t$) оператор $\bar{U}: \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$ в соотношении (3.1) определяется оператором $\bar{G}$ однозначно с точностью до умножения справа на нейтральный оператор $\bar{D}: \bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}}$, такой, что $\bar{D} \bar{D}^* = I$.*

Доказательство теоремы 2.5 приведено в Приложении.

Б. Усиленная спектральная факторизация. Если оператор $\bar{U}$ в (3.1) — устойчивый вместе со своим обращением $\bar{U}^{-1}$, то его сужение на множество $\mathbf{H}$ в силу теоремы 2.2 является ограниченным в $\mathbf{H}$ каузальным (по отношению к разложению единицы P_t) оператором, обратный к которому также является ограниченным каузальным оператором. Из (3.1) тогда следует, что сужение G оператора $\bar{G}$ на множество $\mathbf{H}$ будет ограниченным положительно-определенным оператором, так что вместо (3.1) можно написать

$$G = UU^*. \quad (3.2)$$

Представление (3.2) оператора $G: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ с каузальным ограниченным оператором U , имеющим каузально-ограниченный обратный U^{-1} , будем называть усиленной спектральной факторизацией оператора G .

Операторы U, U^{-1} тесно связаны с формирующим и выбеливающим фильтрами, поэтому усиленная спектральная факторизация для прикладных задач имеет особое значение. Из теоремы 2.5 в качестве следствия несложно получить утверждение об усиленной спектральной факторизации, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2.6. *Предположим, что сужение G положительно-го оператора $\bar{G} \in G_k$ является ограниченным положительно-определенным на множестве $\mathbf{H}$ оператором. Тогда оператор G допускает усиленную спектральную факторизацию (3.2). Каузальный по отношению к разложению единицы Q_k оператор U из (3.2) определяется однозначно с точностью до умножения справа на нейтральный оператор $D: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, удовлетворяющий условию $DD^* = I$.*

Доказательство теоремы 2.6 приводится в Приложении.

Следствие. Всякий ограниченный и ограниченно обратимый оператор R , действующий в причинном пространстве $(\mathbf{H}, Q_k)$, допускает представление вида

$$R = UV, \quad (3.3)$$

где U — ограниченный каузальный и ограниченно каузально-обратимый (по отношению к разложению единицы Q_k) оператор, V — унитарный в $\mathbf{H}$ оператор.

Действительно, применяя к оператору $G = RR^*$ теорему 2.5, получаем

$$U^{-1}G(U^{-1})^* = U^{-1}RR^*(U^{-1})^* = I,$$

т.е. оператор $V = (U^{-1}R)^{-1}$ унитарный, что приводит к представлению (3.3). Представление (3.3) возможно и для некоторых операторов в причинном пространстве $(\mathbf{H}, P_T)$ с "непрерывным" разложением единицы P_T и оператором U , каузальным в этом пространстве. Если G — ограниченный положительно-определенный в $\mathbf{H}$ оператор и оператор $R = G^{1/2}$ — положительный корень оператора G — допускает представление (3.3) с каузальным по отношению к разложению единицы P_T оператором U , то для оператора G , очевидно, справедлива спектральная факторизация (3.2). При установлении представления (3.3) существенно использована дискретность причинного пространства.

Представление (3.3) имеет особенно простой смысл, если эти подпространства одномерны и множество $\mathbf{K}$ ограничено снизу ($k_s > -\infty$). Действительно, оператор R можно представить в виде матрицы

$$R = \|R_k\|, \quad k \in \mathbf{K}, \quad (3.4)$$

со столбцами R_k ,

$$R_k = \text{col}(Q_k R Q_{k'}), \quad k' \in \mathbf{K}. \quad (3.5)$$

Проводя ортогонализацию столбцов R_k , $k \in \mathbf{K}$, по Граму — Шмидту, получим последовательность ортонормированных векторов V_k , V_{k+1} , ..., причем при любом $k \in \mathbf{K}$ вектор V_k является линейной комбинацией векторов $R_{k'}$, $k' \in \mathbf{K}$. Матрица

$$U = RV^{-1} = RV^*, \quad V = \|V_k, V_{k+1}, \dots, V_{k_j}\|, \quad (3.6)$$

нижнетреугольная (т.е. оператор U каузальный). Формула (3.6) и приводит к соотношению (3.3). Подчеркнем, что в условиях теоремы 2.5 отсутствуют предположения о конечномерности подпространств $Q_k \mathbf{H}$, $k \in \mathbf{K}$. При таком дополнительном предположении известно достаточно простое доказательство представления (3.3) (см., например, [132]).

Замечание. Множество операторов G_k иногда удобно обозначать G_K , если имеем дело с причинным пространством $(\mathbf{H}, Q_K)$. Множество G_K состоит из взаимоднозначных отображений пространства $\mathbf{H}$ в себя, причем для этих отображений

при каждом $k \in K$ ограничены операторы

$$\sum_{k'=k_*}^k \sum_{k''=k_*}^k \bar{Q}_{k'} \bar{G} \bar{Q}_{k''}, \quad \sum_{k'=k_*}^k \sum_{k''=k_*}^k \bar{Q}_{k'} \bar{G}^{-1} \bar{Q}_{k''}, \quad (3.7)$$

действующие в инвариантном подпространстве

$$H^k = \sum_{k'=k_*}^k \oplus \bar{Q}_{k'} H. \quad (3.8)$$

Положительность оператора $\bar{G}: \bar{H} \rightarrow \bar{H} \in G_K$ означает в этом случае неотрицательность операторов (3.7) при каждом $k \in K$. Теорему 2.5 очевидным образом можно сформулировать и для операторов $\bar{G} \in G_K$.

4. Структура оптимального фильтра в дискретном случае

Установленные в теоремах 2.5, 2.6 условия спектральной факторизации положительных операторов могут быть использованы для представления весовых операторов оптимальных фильтров в форме, отличной от установленной в теореме 2.3. В терминах операций факторизации и сепарации формуле Боде—Шеннона (1.24) может быть придан смысл в достаточно общем случае оптимального оценивания случайных временных рядов, компоненты которых являются обобщенными случайными элементами. Как и в теоремах 2.5, 2.6, при этом существенно используется дискретность причинного пространства.

Ниже предполагается, что в базовом гильбертовом пространстве $H = H' \times H''$ введена временная структура с помощью ортогонального разложения единицы Q_K (см. п. 2А),

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q'_k & 0 \\ 0 & Q''_k \end{bmatrix},$$

где $Q'_k \in Q'_K$, $Q''_k \in Q''_K$ и Q'_K , Q''_K — ортогональные разложения единиц, определяющих временную структуру гильбертовых пространств H' , H'' . Физически реализуемый фильтр имеет вид

$$\hat{x}_k = \sum_{k'=k_*}^{k-\kappa(k)} h_{kk'} y_{k'}, \quad (4.1)$$

где $h_{kk'}: Q''_k H'' \rightarrow Q'_k H'$ — линейные ограниченные операторы. Оператор $h = \|h_{kk'}\|$, $k, k' \in K$, действует из $[F^0]''$ -слабого расширения $\bar{H}''$ пространства H'' в $[F^0]'$ -слабое расширение $\bar{H}'$ пространства H' .

А. Представление Боде — Шеннона для оптимального весового оператора. Аналог теоремы 3.1 решения задачи оптимизации (2.39) в классе $\bar{h}^*$ физически реализуемых фильтров (4.1) приведем в следующей редакции.

Теорема 2.7. *Предположим, что корреляционный оператор R_x частично наблюдаемого случайного $\bar{H}$ -элемента $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ принадлежит множеству G_K (см. разд. 9), причем оператор $R_y : \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ положительный. Тогда задача (2.39) оптимальной фильтрации в классе $\bar{h}^*$ разрешима и весовой оператор $\bar{h}_{opt}$ оптимального фильтра имеет вид*

$$\bar{h}_{opt} = \left[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* \right]_{[x]} \bar{U}^{-1}, \quad (4.2)$$

где $\bar{U}$ — каузальный оператор, реализующий спектральную факторизацию оператора R_y ,

$$R_y = \bar{U} \bar{U}^* \quad (4.3)$$

(см. разд. 9), $\left[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* \right]_{[x]}$ — x -каузальная компонента оператора $R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* : \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$ (см. (3.16)). При этом

$$\inf_{h \in \bar{h}^*} J_k(h) = J_k(\bar{h}_{opt}) = \left| Q_k \left[R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx} + \right. \right. \\ \left. \left. + [R_{xy} (\bar{U}^{-1})^*]_{\bar{x}} \right] [[R_{xy} (\bar{U}^{-1})^*]_{\bar{x}}]^* Q_k \right|. \quad (4.4)$$

Доказательство теоремы 2.7 приведено в Приложении.

Таким образом, в условиях теоремы 2.5 справедлива формула Боде — Шеннона (4.2) для $\bar{h}^*$ -оптимального весового оператора.

Что касается разрешимости задачи оптимальной фильтрации в классе $\bar{h}^*$ физически реализуемых ограниченных операторов $h : \bar{H}'' \rightarrow \bar{H}'$, то можно утверждать, что если корреляционный оператор $R_x : \bar{H} \rightarrow \bar{H}$ случайного элемента z 0-ограничен (устойчив), причем оператор R_y имеет ограниченный обратный в $\bar{H}$ и устойчивый оператор $\left[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* \right]$ имеет при этом устойчивую x -каузальную компоненту, то из сказанного выше следует, что задача оптимальной фильтрации в классе $\bar{h}^*$ ограниченных физически реализуемых весовых операторов разрешима и $\bar{h}^*$ -оптимальный весовой оператор является сужением оператора (4.2) на инвариантное множество $\bar{H}''$. В этом смысле теорема 2.7 дает "почти законченное" решение задачи (2.33)

h^* -оптимальной фильтрации. К сожалению, простые достаточные общие условия "устойчивой" сепарации устойчивых операторов в расширенном гильбертовом пространстве неизвестны. (Исключение составляют конечномерные стационарные процессы, для которых проблема сепарации и факторизации сводится к достаточно хорошо изученным задачам теории аналитических функций — см. разд. 3.)

Б. Интерпретация Боде — Шеннона действия оптимального фильтра. Как и в "конечномерном" случае (см. п. 1А) оператор $\bar{U}^{-1}$ "выбеливает" наблюдаемый H'' -элемент y , тогда как оператор $\left[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* \right]_{[x]}$ осуществляет оптимальную обработку выбеленного случайного элемента. Формулы

$$v = \bar{U}^{-1}y, \quad y = \bar{U}v \quad (4.5)$$

определяют соответственно выбеливающий и формирующий фильтры. Следует отметить, что в общем случае соотношения (4.5) между случайным элементом y и отвечающим ему "порождающим" элементом v связывают между собой обобщенные случайные элементы, корреляционные операторы которых могут быть неограниченными операторами в пространстве H .

В. Построение оптимизирующей последовательности весовых операторов. Теорема 2.7 не носит конструктивного характера: не ясно, как осуществить спектральную факторизацию (4.3), задача оптимизации (2.33) может оказаться неразрешимой в классе ограниченных весовых операторов. Покажем, как можно построить h^* — минимизирующую последовательность весовых операторов на основе теоремы 2.7.

Предположим, что "дискретное время" ограничено снизу (т.е. $k_s > -\infty$), без ограничения общности примем $k_s = 1$. Тогда квадратичные формы операторов

$$\tilde{R}_z^{(n)} = R_z^{(n)} + \sum_{k' > n} \bar{Q}_{k''}, \quad R_z^n = \sum_{k, k' \leq n} \bar{Q}_k R_z \bar{Q}_{k'} \quad (4.6)$$

сходятся на множестве F^0 финитных элементов пространства H к квадратичной форме оператора R_z , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, \tilde{R}_z^{(n)} \varphi \rangle_H = \langle \varphi, R_z \varphi \rangle_H, \quad \varphi \in F^0, \quad (4.7)$$

причем на каждом элементе $\varphi \in F^0$ предел в (4.7) достигается при конечном n .

Операторы $R_z^{(n)}$ при каждом натуральном n действуют в пространстве $\mathbf{H}^n = \sum_{k \leq n} Q_k \mathbf{H}$, оператор $\sum_{k > n} Q_k$ является единичным в ортогональном дополнении к подпространству $\mathbf{H}^n$, поэтому линейные операторы $\tilde{R}_z^{(n)}$ ограничены на множестве $\mathbf{H}$ при каждом натуральном n , если ограничены операторы $R_z^{(n)}$. Если оператор R_z обратимый в $\tilde{\mathbf{H}}$, то операторы $R_z^{(n)}$ обратимые в инвариантном подпространстве $\mathbf{H}^n$ при любом натуральном n . Тогда с учетом κ -каузальности весового оператора $\tilde{h}$ можем переписать формулу (1.20) в виде

$$J_{\varphi'}^{(n)}(h) = \left\langle \varphi', \left[\tilde{R}_x^{(n)} - \tilde{R}_{xy}^{(n)} h^* - h \tilde{R}_{yx}^{(n)} + h R_y^{(n)} h^* \right] \varphi' \right\rangle + \varepsilon_n(\varphi', h), \quad \varphi' \in \mathbf{F}^0, \quad (4.8)$$

где $\{\varepsilon_n(\varphi', h)\}$ — некоторая финитная числовая последовательность (финитность последовательности $\{\varepsilon_n(\varphi', h)\}$ равномерна на множестве $\tilde{\mathbf{H}}^*$).

Спектральная факторизация оператора $R_y^{(n)}$, или, что то же самое, блочно-операторной матрицы

$$\left\| \left[R_y^{(n)} \right]_{k, k'} \right\|, \quad \left[R_y^{(n)} \right]_{k, k'} = Q_k'' R_y Q_{k'}'', \quad k, k' = 1, 2, \dots, n, \quad (4.9)$$

осуществляется так же, как факторизация Холецкого обычной матрицы (см. п. 1А), при этом, правда, нужно уметь факторизовать операторы типа $\left[R_y^{(n)} \right]_{k, k'}$ — диагональные блоки матрицы (4.9). Этой трудности можно избежать, если искать операторную $n \times n$ -матрицу

$$V^{(n)} = \left\| V_{kk'}^{(n)} \right\|_{k, k'=1}^n \quad (4.10)$$

из соотношений

$$\left[R_y^{(n)} \right]_{k, k'} = \sum_{k''=1}^{\min(k, k')} V_{kk''}^{(n)} D_{k''}^{(n)} \left[V_{kk''}^{(n)} \right]^*, \quad (4.11)$$

$k, k' = 1, 2, \dots, n$, где операторы $D_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} D_k^{(n)} Q_k'' &= Q_k'' D_k^{(n)}, & k &= 1, 2, \dots, n, \\ V_{kk'}^{(n)} &= Q_k'' \text{ при } k' = k, & V_{kk'}^{(n)} &= 0 \text{ при } k > k'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Условия (4.11), (4.12) однозначно определяют операторы $V_{kk'}^{(n)}$, $D_k^{(n)}$ с указанными свойствами и позволяют последовательно определить их из соотношений (4.12). Нетрудно убедиться, что оператор

$$W^{(n)} = \sum_{k,k'=1}^n V_{kk'}^{(n)} + \sum_{k'>n} Q_{k'}'' \quad (4.13)$$

обладает свойствами

$$W^{(n)} R_y^{(n)} [W^{(n)}]^* = D^{(n)}, \quad (4.14)$$

$$D^{(n)} = \sum_{k=1}^n D_k^{(n)} + \sum_{k>n} Q_k''. \quad (4.15)$$

Операторы $R_{xy}^{(n)} [W^{(n)}]^*$ в блочно-операторном представлении могут иметь лишь конечное число ненулевых блоков вне главной диагонали, поэтому их κ -каузальные компоненты являются ограниченными операторами, действующими из H'' в H' . Введем операторы

$$h_n = \left[R_{xy}^{(n)} [W^{(n)}]^* \right]_{[\kappa]}^* D^{(n)} W^{(n)}, \quad (4.16)$$

которые в силу сказанного существуют при каждом натуральном n как ограниченные операторы,

$$h_n: \sum_{k \leq n} Q'' H'' \rightarrow \sum_{k \leq n} Q' H'. \quad (4.17)$$

Выделяя в (3.7) "полный квадрат" по h , убеждаемся, что выполняется равенство

$$J_{\varphi'}^{(n)}(h_n) = \inf_{h \in H^*} J_{\varphi'}^{(n)}(h) + \varepsilon(\varphi', h_n). \quad (4.18)$$

В силу равномерной по $h_n \in H^*$ сходимости последовательности $\{\varepsilon_n\}$ к нулю, из формулы (4.18) следует, что последовательность $\{h_n\}$ весовых операторов, определяемая формулой (4.16), является оптимизирующей в задаче (2.33). Из этого, в частности, вытекает соотношение

$$\inf_{h \in H^*} J_{\varphi'}^{(n)}(\bar{h}) = \inf_{\bar{h} \in \bar{H}^*} J_{\varphi'}^{(n)}(\bar{h}) \quad \forall \varphi' \in F^0, \quad (4.19)$$

что, впрочем, следует и из общих соображений. Если задача оптимизации (2.33) разрешима, то весовые операторы (4.16) сильно сходятся к оптимальному весовому оператору h_{opt} .

Г. Рекуррентное представление оптимального фильтра.

Если в условиях теоремы 2.7 операторы R_{xy} , R_y конечно-диагональные, то в формуле Боде — Шеннона (4.2) оператор $\bar{U}$ конечно-диагональный, оператор $(R_{xy} [\bar{U}]^{-1})^*$ финитный снизу (как произведение финитного оператора R_{xy} на "верхнетреугольный" оператор $[\bar{U}^{-1}]^*$), а потому каузальный оператор $[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*]_{[x]}$ конечно-диагональный. Таким образом, весовой оператор $\bar{h}_{\text{opt}}$ оптимального фильтра является "отношением" двух конечно-диагональных каузальных операторов. Другими словами, оптимальный фильтр (4.1) может быть записан в рекуррентной форме

$$\hat{x}_k = \sum_{k'} \left[[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*]_{[x]} \right]_{kk'} v_{k'}, \quad (4.20)$$

$$v_k = \sum_{k'} [\bar{U}]_{kk'} y_{k'}, \quad k \in K, \quad (4.21)$$

причем временной ряд $v = \{v_k, k \in K\}$ белозумный. Поскольку каузальные операторы $\bar{U}$ и $(R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*)_{[x]}$ имеют лишь конечное число "ненулевых диагоналей", суммирование в (4.20), (4.21) ведется по конечному числу индексов. Таким образом, соотношения (4.20), (4.21) представляют собой линейные разностные уравнения (в общем случае с изменяющимися в дискретном времени операторными коэффициентами).

Формула Боде — Шеннона (4.2) определяет весовой оператор $\bar{h}_{\text{opt}}$ как правое "отношение" двух каузальных операторов (именно операторов $(R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*)_{[x]}$ и $\bar{U}$). В некоторых случаях правая часть формулы (4.2) может быть переписана как левое "отношение" каузальных операторов, т. е.

$$\bar{h}_{\text{opt}} = \bar{A}^{-1} \bar{B} \quad (4.22)$$

($\bar{A}, \bar{B}$ — каузальные операторы). В этом случае фильтр (4.20), (4.21) допускает представление в виде

$$\sum_{k' \leq k} \bar{A}_{kk'} \hat{x}_{k'} = \sum_{k' \leq k} \bar{B}_{kk'} y_{k'}, \quad k \in K, \quad (4.23)$$

$$\bar{A}_{kk'} = \bar{Q}_k \bar{A} \bar{Q}_{k'}, \quad \bar{B}_{kk'} = \bar{Q}_k \bar{B} \bar{Q}_{k'}.$$

При $\bar{A}_{kk'} = \bar{A}_{k-k'}$, $\bar{B}_{kk'} = \bar{b}_{k-k'}$ фильтр (4.23) стационарный. Особенно простой вид соотношение (4.23) принимает в случае,

когда операторы $\bar{A}$, $\bar{B}$ конечно-диагональные, тогда суммирование в (4.23) осуществляется по конечному множеству индексов и фильтр принимает вид линейного разностного уравнения.

В общем случае оператор $\bar{A}^{-1}$ не обязан быть устойчивым. В силу теоремы 1.2 устойчивость оператора $\bar{A}^{-1}$ эквивалентна его каузальности и ограниченности на инвариантном множестве $\mathbf{H}'$, что, в свою очередь, эквивалентно устойчивости разностного уравнения (4.23) (см. п. 1.1В). Рекуррентный фильтр (4.23) в отличие от фильтра (4.20), (4.21) не использует вспомогательных переменных $v = \{v_k, k \in \mathbf{K}\}$.

Возможность представления оптимального фильтра в форме (4.23) связана с разрешимостью относительно операторов $\bar{A}$, $\bar{B}$ уравнения

$$\bar{A} \left[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^* \right]_{[x]} = \bar{B} \bar{U} \quad (4.24)$$

при "заданных" каузальных операторах $[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*]_{[x]}$ и $\bar{U}$, причем оператор $\bar{A}$ должен быть обратимым. В случае стационарных операторов R_{xy} , $\bar{U}$ уравнение (4.24) может быть переписано в терминах символов соответствующих операторов и в случае конечно-диагональных операторов $[R_{xy} [\bar{U}^{-1}]^*]_{[x]}$, $\bar{U}$ принимает вид диофантова уравнения. Если базовое пространство $\mathbf{H}$ конечномерно, тогда достаточно просто устанавливается разрешимость уравнения (4.24), при этом оператор $\bar{A}^{-1}$ оказывается каузальным. Для бесконечномерного $\mathbf{H}$ проблема разрешимости уравнения (4.24) в классе конечно-диагональных операторов $\bar{A}$, $\bar{B}$ сложна даже в стационарном случае.

Приложение к главе 2

А. Доказательство теоремы 2.5. Введем обозначения

$$y^k = \sum_{k' \leq k} \bar{Q}_{k'} \bar{y} = \bar{P}_{t_k} \bar{y}, \quad y_k = \bar{Q}_k \bar{y} \quad (\text{П.1})$$

и рассмотрим квадратичный функционал

$$J_{y_k}(y^{(k-1)}) = \left\langle y_k + y^{(k-1)}, \bar{R}^{-1}(y_k + y^{(k-1)}) \right\rangle_{\mathbf{H}''}, \quad \bar{R} = \bar{G}^{-1}, \quad (\text{П.2})$$

элементов $y^{(k-1)} \in P_{t_{k-1}} \mathbf{H}$ при фиксированном элементе y_k . Задача минимизации

$$J_{y_k}(y^{(k-1)}) \rightarrow \inf_{y^{(k-1)} \in P_{t_{k-1}} \mathbf{H}} \quad (\text{П.3})$$

однозначно разрешима в силу положительности оператора $\bar{R}$ (см. п. 1.1А), и несложно убедиться, что ее минимум достигается на элементе

$$y_{\text{opt}}^{(k-1)} = y_{\text{opt}}^{(k-1)}(y_k) = - \left[R^{(k-1)} \right]^{-1} P_{t_{k-1}} R^{(k)} y_k, \quad (\text{П.4})$$

где $R^{(k-1)} = \bar{P}_{t_{k-1}} \bar{R} \bar{P}_{t_{k-1}}$, $\left[R^{(k-1)} \right]^{-1} P_{t_{k-1}}$ — обращение оператора $R^{(k-1)}$ в инвариантном подпространстве $P_{t_{k-1}} \mathbf{H}$. Необходимым и достаточным условием оптимальности элемента $y^{(k-1)} \in P_{t_k} \mathbf{H}$ является равенство ("уравнение Винера—Хопфа")

$$\begin{aligned} \langle y_k, \bar{R}^{-1}(y_k + y^{(k-1)}) \rangle_{\mathbf{H}''} &= 0 \quad \text{при любом } k' < k, \text{ или} \\ \langle y_k, \bar{R}^{-1} \bar{W}_k^* y_k \rangle_{\mathbf{H}''} &= 0, \quad k' < k, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где

$$\bar{W}_k = Q_k - Q_k \bar{R} P_{t_{k-1}} \left[R^{(k-1)} \right]^{-1} P_{t_{k-1}} \quad (\text{П.6})$$

и $\bar{W}_k^*$ — оператор, сопряженный оператору $\bar{W}_k$. Оператор $\bar{W}_k$ действует в инвариантном подпространстве $\bar{P}_{t_k} \bar{\mathbf{H}} = P_{t_k} \mathbf{H}$, ограничен в нем и является каузальным — это непосредственно следует из формулы (П.6). Сопряженный ему оператор $\bar{W}_k^*$ является, очевидно, антикаузальным. Оператор

$$\bar{W} = I_{\mathbf{H}} - \sum_{k \in \mathbf{K}} \bar{W}_k = I_{\mathbf{H}} - \sum_{k \in \mathbf{K}} Q_k \bar{R} P_{t_{k-1}} \left[R^{(k-1)} \right]^{-1} P_{t_{k-1}} \quad (\text{П.7})$$

является линейным каузальным оператором в причинном пространстве $(\bar{\mathbf{H}}, \bar{Q}_{\mathbf{K}})$, поскольку $Q_k W = W_k$ и $\bar{Q}_k \bar{W} \bar{Q}_{k'} = 0_{\mathbf{H}}$ при $k' > k$. Учитывая, что при любом элементе $k' \in \mathbf{K}$ справедливо включение $\bar{W}^* y_{k'} = \bar{W}_{k'}^* y_{k'} \in P_{t_{k'}} \mathbf{H}$, можем переписать условие (П.5) в виде

$$\langle y_k, \bar{W} \bar{R}^{-1} \bar{W}^* y_k \rangle_{\mathbf{H}}'' = 0, \quad k' < k. \quad (\text{П.8})$$

Соотношение (П.8) означает, что оператор

$$\bar{D} = \bar{W} \bar{R}^{-1} \bar{W}^* \quad (\text{П.9})$$

антикаузальный, а в силу симметричности оператора $\bar{P}_{t_k} \bar{D} \bar{P}_{t_k}$ при любом $k \in \mathbf{K}$ оператор $\bar{D}$ нейтральный в причинном пространстве $(\bar{\mathbf{H}}, \bar{Q}_{\mathbf{K}})$. Операторное равенство (П.9) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} \bar{D}_k &= \bar{P}_{t_k} \bar{D} = \bar{D} \bar{P}_{t_k} = \bar{P}_{t_k} \bar{D} \bar{P}_{t_k} = \\ &= \bar{W}_k \left[R^{(k-1)} \right]^{-1} \bar{W}_k^*, \quad k \in \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Нетрудно убедиться, что операторы D_k в инвариантном подпространстве $P_{t_k} \bar{H}$ положительно-определенные, а операторы W_k ограниченно обратимы, тогда

$$R^{(k-1)} = [G^{-1}]^{(k-1)} = \bar{P}_{t_k} (\bar{U}_k^{-1})^* \bar{U}_k^{-1} \bar{P}_{t_k}, \quad k \in K, \quad (\text{П.11})$$

где обозначено

$$\bar{U}_k = W_k^{-1} D_k^{-1/2} \quad (\text{П.12})$$

и обращение операторов понимается в подпространстве $\bar{P}_{t_k} \bar{H}$. В операторной форме соотношение (П.11) может быть переписано в виде

$$\bar{G} = \bar{U} \bar{U}^*, \quad (\text{П.13})$$

где оператор $\bar{U}$, действующий в $\bar{H}$, определяется соотношениями

$$\bar{P}_{t_k} \bar{U} \bar{P}_{t_k} = \bar{P}_{t_k} \bar{U}_k \bar{P}_{t_k}, \quad k \in K. \quad (\text{П.14})$$

Очевидно, оператор $\bar{U}$ является каузальным в причинном пространстве $(\bar{H}, Q_K)$, но не обязан быть устойчивым оператором (а потому его сужение на множество H может быть неограниченным оператором). Теорема 2.5 доказана.

Б. Доказательство теоремы 2.6. Из формулы (3.1) для любого элемента $\varphi \in H$ имеем

$$\varphi^* \bar{G} \varphi = |\bar{U} \varphi|_H^2. \quad (\text{П.15})$$

Ограниченность оператора $\bar{G}$ в силу (П.15) влечет устойчивость оператора $\bar{U}$. В силу теоремы 1.2 множество H для каузального оператора $\bar{U}$ инвариантно и сужение U оператора $\bar{U}$ на множестве H является ограниченным оператором. В силу положительной определенности оператора $\bar{G}$ оператор U ограниченно обратим в H и его обратный является каузальным оператором (этот обратный факторизует оператор $\bar{G}^{-1}$). Теорема 2.6 доказана.

В. Доказательство теоремы 2.7. Учитывая соотношение факторизации (3.1), перепишем функционал из (2.40) в виде

$$\begin{aligned} M |\langle \varphi', Q'_k(x - \bar{h}y) \rangle|_{H'}^2 &= \\ &= \langle \varphi', Q'_k [R_x - R_{xy} \bar{h}^* - \bar{h} R_{yx} + \bar{h} R_y \bar{h}^*] Q'_k \varphi' \rangle_{H'} = \\ &= \left\langle \varphi', Q' \left[R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\bar{h} \bar{U} - R_{xy} (\bar{U}^{-1})^*] [\bar{h} \bar{U} - R_{xy} (\bar{U}^{-1})^*]^* \right] Q'_k \varphi' \right\rangle, \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

где φ' — произвольный элемент множества $[\mathbf{F}']^0 \in \mathbf{H}'$ основных элементов. Осуществляя сепарацию оператора $R_{xy}(\bar{U}^{-1})^* : \bar{\mathbf{H}}' \rightarrow \bar{\mathbf{H}}'$

$$R_{xy}(\bar{U}^{-1})^* = [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]} + [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\bar{\kappa}]}$$

и учитывая равенство

$$\left\langle \varphi', [\bar{h}\bar{U} - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}] [[R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\bar{\kappa}]}]^* \varphi' \right\rangle = 0,$$

справедливое для произвольного элемента $\varphi' \in Q'_k [\mathbf{F}']^0$ в силу строгой κ -каузальности оператора

$$\begin{aligned} & [\bar{h}\bar{U} - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}] [[R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}]^* = \\ & = [\bar{h}\bar{U} - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}] [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^* - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}]^*, \end{aligned}$$

перепишем формулу (П.16) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\langle \varphi', Q'_k(x - \bar{h}y) \rangle|_{\mathbf{H}'}^2 &= \left\langle \varphi', Q'_k \left[R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx} + \right. \right. \\ &+ [[R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\bar{\kappa}]}] [[R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\bar{\kappa}]}]^* Q'_k \varphi' \left. \right\rangle_{\mathbf{H}'} + \\ &+ \left\langle \varphi', Q'_k [\bar{h}\bar{U} - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}] \times \right. \\ &\times [\bar{h}\bar{U} - [R_{xy}(\bar{U}^{-1})^*]_{[\kappa]}]^* Q'_k \varphi' \left. \right\rangle_{\mathbf{H}'} . \quad (\text{П.17}) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части формулы (П.17) не зависит от весового оператора $\bar{h}$, второе — неотрицательно при любом выборе оператора $\bar{h}$ и обращается в ноль при выборе его в виде (4.2), следовательно, формула (4.2) определяет $\bar{\mathbf{h}}^*$ -оптимальный оператор. Формула (4.4) следует теперь из (П.17). Теорема доказана.

ГЛАВА 3

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В первых двух главах были установлены условия представления оптимального фильтра в форме Боде—Шеннона. Эти условия связаны с возможностью спектральной факторизации корреляционного оператора наблюдаемого процесса.

В данной главе проблема спектральной факторизации положительных операторов в причинном гильбертовом пространстве выделена как самостоятельная задача. Основное внимание сосредоточено на пространствах с дискретной временной структурой, это соответствует рассмотрению случайных процессов в дискретном времени (случайных временных рядов). "Дискретный" вариант проблемы спектральной факторизации имеет не только самостоятельный прикладной интерес, но и в силу его существенного упрощения позволяет получить в ряде случаев законченные результаты.

Неразумно надеяться на конструктивность методов факторизации в общем операторном случае, поэтому большинство обсуждаемых ниже результатов носят характер "теорем существования". Удовлетворить стремление сделать методы операторной факторизации более конструктивными можно лишь при сужении класса факторизуемых операторов. Такая возможность появляется, например, когда корреляционные операторы стационарные с конечномерным частотным пространством либо квазивырожденные. В каждом из этих случаев операторная факторизация может быть выражена в "конечномерных" терминах, что придает ей свойство эффективности. Эти вопросы более подробно будут обсуждаться в четвертой главе.

Развитие теории оптимальной неупреждающей фильтрации случайных процессов обнаружило глубокую связь между задачей построения оператора оптимального фильтра, являющейся основной задачей этой теории, и проблемой факторизации корреляционного оператора "наблюдаемого" процесса. Под *спектральной факторизацией корреляционного оператора* понимается его представление в виде произведения каузального (при-

чинного, неупреждающего) и антикаузального (антипричинного, упреждающего) операторов. При этом каузальная составляющая факторизации предполагается обратимой и этот обратный оператор также должен быть каузальным. Если случайный процесс представляет собой конечный набор линейно независимых случайных величин (т.е. конечный "временной ряд"), то его корреляционный оператор действует в конечномерном евклидовом пространстве и представляет собой положительную матрицу в естественном базисе этого пространства. Спектральная факторизация такого оператора состоит в представлении его в виде произведения нижнетреугольной матрицы на верхнетреугольную и называется *факторизацией Холецкого*. Факторизация Холецкого широко используется при решении линейных алгебраических систем [101].

В теории оптимальной фильтрации стационарных процессов важнейшей является проблема факторизации *спектральной плотности*, которая представляет собой символ корреляционного оператора [80], отвечающего стационарному процессу, и естественно интерпретировать проблему спектральной факторизации как проблему факторизации корреляционного оператора, если заметить, что функция, факторизирующая спектральную плотность, является символом некоторого стационарного каузального оператора. Этот каузальный оператор каузально обратим, поскольку факторизирующая функция не имеет нулей в соответствующей области ее аналитического продолжения. Такое расширительное толкование проблемы спектральной факторизации весьма полезно, так как не связано с предположением стационарности корреляционного оператора, но требует уточнения понятия каузального оператора. "Операторная" трактовка проблемы спектральной факторизации позволяет распространить теорию оптимальной фильтрации и оптимального управления на широкий класс нестационарных процессов и объектов управления. Многие содержательные факты и результаты теории линейной фильтрации естественно выражаются в терминах корреляционных операторов случайных процессов.

Ниже обсуждается общая проблема спектральной факторизации положительных операторов в дискретном причинном гильбертовом пространстве. Приводимые здесь результаты нельзя назвать конструктивными, скорее это "теоремы существования", поскольку в бесконечномерном пространстве обычно ис-

пользуемые операции перемножения и обращения операторов в общем случае не являются эффективными. Важным представляется случай квазивырожденных операторов [69, 80] (квазивырожденные корреляционные операторы отвечают случайным процессам со значениями в конечномерном пространстве). В этом случае проблему спектральной факторизации удастся свести к нахождению решения матричного нелинейного разностного уравнения типа дискретного уравнения Риккати. Подобного рода уравнения возникают в разнообразных задачах оптимальной фильтрации и управления [43, 45, 66, 69, 71, 105, 119].

1. Пример: спектральная факторизация в задаче линейной неупреждающей фильтрации

Прежде чем переходить к непосредственному обсуждению проблемы спектральной факторизации, полезно привести пример задачи фильтрации, в которой возникает необходимость в факторизации.

А. Линейная оптимальная фильтрация. Рассмотрим кратко некоторый вариант задачи оптимальной неупреждающей фильтрации и приведем ее решение, полученное с помощью факторизации соответствующего корреляционного оператора [80].

Пусть $L_2(p, T)$ — гильбертово пространство p -мерных вектор-функций, определенных и квадратично-интегрируемых на "временном" интервале $T \subseteq \mathbb{R}$ [7]. Скалярное произведение в $L_2(p, T)$ определяется естественным образом:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_T [\varphi(t)]^* \psi(t) dt. \quad (1.1)$$

Пусть

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

— частично наблюдаемый случайный процесс, в общем случае обобщенный. Последнее означает, что на множестве F° финитных гладких функций из $L_2(p, T)$ определена случайная величина

$$\eta(\varphi) = \langle z, \varphi \rangle, \quad \varphi \in F^\circ, \quad (1.3)$$

причем

$$M\langle z, \varphi \rangle = 0, \quad M|\langle z, \varphi \rangle|^2 \leq C\langle z, z \rangle, \quad \varphi \in F^\circ \quad (1.4)$$

(M — символ математического ожидания). Равенство в (1.4) означает, что процесс z центрированный. Вообще говоря, так понимаемый обобщенный случайный процесс может не иметь реализаций, поэтому затруднительно говорить о его значениях в те или иные моменты времени. Однако для него определен ограниченный корреляционный оператор. Действительно, величина $M|\langle z, \varphi \rangle|^2$ является квадратичным функционалом, определенным на множестве F^0 , оператор R_z этой квадратичной формы,

$$M|\langle z, \varphi \rangle|^2 = \langle \varphi, R_z \varphi \rangle, \quad (1.5)$$

и называется корреляционным (ковариационным) оператором обобщенного случайного процесса z . В силу неравенства (1.4) этот оператор ограничен и по непрерывности может быть распространен с плотного в $L_2(p, T)$ множества F^0 на все пространство $L_2(p, T)$. В дальнейшем будем предполагать, что корреляционный оператор определен на всем $L_2(p, T)$. Неравенство (1.4) означает, что линейный на множестве F^0 гладких финитных функций случайный функционал $\langle z, \varphi \rangle$ является непрерывным в среднеквадратичном смысле.

Пусть $h(t, t')$ — определенная и измеримая на множестве T матричная функция (размером $n \times m$, $n + m = p$), через h обозначим интегральный оператор,

$$(h\varphi)(t) = \int_T h(t, t') \varphi(t') dt'. \quad (1.6)$$

Интегральный оператор $h: L_2(m, T) \rightarrow L_2(n, T)$ далее предполагается ограниченным. Соотношение

$$\hat{x} = hy \quad (1.7)$$

определяет обобщенный случайный процесс $\hat{x}$ с корреляционным оператором

$$R_{\hat{x}} = h R_y h^*, \quad (1.8)$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение. Говорят, что соотношение (1.7) является *линейным фильтром с весовым оператором h* . В некоторых случаях обобщенный процесс $\hat{x}$, "формируемый" фильтром (1.7), является "обычным" случайным процессом. Пусть, например, наблюдаемая компонента y процесса z обладает стохастическим дифференциалом, т. е. $y(t) = d\tilde{y}(t)$ для некоторого случайного "измеримого" процесса $\tilde{y} = \{\tilde{y}(t), t \in$

$\mathbf{T}$ }, тогда фильтр (1.7) может быть записан в виде стохастического интеграла [26]

$$\hat{z}(t) = \int_{\mathbf{T}} h(t, t') d\tilde{y}(t'), \quad (1.9)$$

$n \times m$ — матрица $h(t, t')$, $t, t' \in \mathbf{T}$, называется *весовой (импульсной) функцией фильтра* (1.9). Примем, что частично наблюдаемый процесс z имеет (обобщенную) корреляционную функцию $R_z(t, t') = Mz(t)z^*(t')$ вида

$$R_z(t, t') = \left\| \begin{array}{cc} R_x(t, t') & R_{xy}(t, t') dt' \\ R_{yx}(t, t') dt & [I_m \delta(t - t') + r_y(t, t')] dt dt' \end{array} \right\|, \quad (1.10)$$

где I_m — единичная $m \times m$ — матрица; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; $R_x(t, t') = Mx(t)x^*(t')$, $R_{xy}(t, t') = Mx(t)y^*(t') = [R_{yx}(t, t')]^*$, $r_y(t, t')$ — квадратично-интегрируемые на множестве $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ матричные функции соответствующих размеров, функция $r_y(t, t')$ предполагается *положительной* по Бохнеру [7]. Качество фильтра (1.9) условимся характеризовать величинами

$$\begin{aligned} J_t(h) = M|x(t) - \hat{x}(t)|^2 = \text{sp} \left\{ R_x(t, t') - \right. \\ \left. - \int_{\mathbf{T}} h(t, t') R_{yx}(t', t) dt' - \int_{\mathbf{T}} R_{xy}(t, t') h^*(t', t) dt' + \right. \\ \left. + \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} h(t, t') r_y(t', t'') h^*(t'', t) dt' dt'' \right\}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Для завершения постановки задачи оптимальной фильтрации следует указать множество весовых операторов, на которых определены функционалы $J_t(h)$.

Интегральный оператор h назовем *каузальным (неупреждающим, причинным)*, если его весовая функция $h(t, t')$ удовлетворяет условию

$$h(t, t') = 0 \quad \text{при } t' \geq t. \quad (1.12)$$

Фильтр (1.9) с каузальным интегральным оператором h называется физически реализуемым (физически осуществимым). Обозначим через h_0 множество всех интегральных каузальных операторов. Задача оптимальной фильтрации может быть теперь записана в виде

$$J_t(h) \rightarrow \inf_{h \in h_0}, \quad t \in \mathbf{T}. \quad (1.13)$$

Более подробно задача оптимальной фильтрации может быть сформулирована следующим образом: при каждом $t \in T$ вычислить нижнюю грань в (1.13) и выяснить условия разрешимости задачи (условия достижимости нижней грани), при разрешимости задачи указать способ нахождения минимизирующего (оптимального) оператора, при неразрешимости — построить оптимизирующую последовательность $\{h_n\}$ весовых операторов, т. е. последовательность операторов $h_n \in h_0$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_t(h_n) = \inf_{h \in h_0}, \quad t \in T.$$

Для приложений первостепенный интерес представляют алгоритмы нахождения минимумов функционалов $J_t(h)$. Таким образом приходим к задаче минимизации квадратичного функционала (1.11) при каждом $t \in T$ на множестве h_0 каузальных операторов.

Б. Связь задачи оптимальной фильтрации с проблемой спектральной факторизации. Наметим схему, позволяющую решить оптимизационную задачу (1.12), если известна спектральная факторизация оператора $R_y: L_2(m, T) \rightarrow L_2(m, T)$ наблюдаемого процесса y . Из соотношений (1.10) следует, что оператор R_y имеет вид

$$R_y = I + r_y, \quad (1.14)$$

где I — единичный в $L_2(m, T)$ оператор и r_y — неотрицательный интегральный оператор с ядром $r_y(t, t')$. Итак, пусть известна спектральная факторизация оператора (1.14), т. е. его представление в виде

$$R_y = (I + B)(I + B^*), \quad (1.15)$$

где B — интегральный каузальный оператор. Хорошо известно, что оптимальное ядро $h(t, t')$ определяется уравнением Винера — Хопфа (в общем случае нестационарным)

$$h(t, t') + \int_{t_0}^t h(t, t'') r_y(t'', t') dt'' = R_{xy}(t, t'), \quad t \geq t', \quad (1.16)$$

или в операторной форме

$$h(I + r_y) = [R_{xy}]_+, \quad (1.17)$$

где $[\cdot]_+$ — каузальный интегральный оператор, полученный в результате сепарации интегрального оператора $[\cdot]$:

$$([\cdot]_+)(t, t') = \begin{cases} [\cdot](t, t'), & t \geq t' \\ 0, & t \leq t'. \end{cases}$$

В предположении факторизации (1.15) решение уравнения (1.17) находится по формуле [78, 79]

$$h_{opt} = \left[R_{xy} (I + B^*)^{-1} \right]_+ (I + B)^{-1}. \quad (1.18)$$

Формулой (1.18) определяется структура оптимального фильтра. Несложно убедиться, что оператор $(I + B)^{-1}$ "выбеливает" процесс y , т.е. случайный процесс $(I + B)^{-1} y$ имеет единичный корреляционный оператор. Неупреждающий оператор $\left[R_{xy} (I + B^*)^{-1} \right]_+$ осуществляет оптимальную обработку выбеленного процесса. Эта интерпретация действия оптимального физически реализуемого фильтра принадлежит Боде и Шеннону [125], ими же получена формула (1.18) в стационарном случае. Несложно убедиться, что

$$\inf_{h \in H_0} J_t(h) = J_t(h_{opt}) = \text{sp} \left\{ \left[R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{xy} + \right. \right. \\ \left. \left. + [R_{xy} (I + B^*)]_- [R_{xy} (I + B^*)]_-^* \right] (t, t') \right\},$$

где для краткости обозначено $[\cdot]_- = [\cdot] - [\cdot]_+$.

Таким образом, в рассмотренном примере оптимальный фильтр был "построен" с использованием процедур факторизации (1.15) и сепарации $[\cdot]_+$. Проблема спектральной факторизации положительных операторов вида (1.14), несущественно отличающихся от единичного оператора, изучена достаточно хорошо [29, 44]. Ситуация усложняется, если, например, корреляционный оператор — произвольный положительно-определенный оператор. Кроме того, предположение об интегральности весового оператора h фильтра (1.7) может оказаться излишне ограничительным. При рассмотрении линейных фильтров (1.7) общего вида понятие каузальности линейного оператора становится более сложным, соответственно усложняется минимизация квадратичного функционала из-за усложнения спектральной факторизации. Известно, что не всякий положительно-определенный оператор в бесконечномерном

гильбертовом пространстве допускает спектральную факторизацию и не всякий ограниченный оператор допускает сепарацию [132]. Исследование этой и родственной проблем и составляет основное содержание данной главы. Относительно полные результаты удалось получить в случае "дискретной" временной структуры, в теории фильтрации это соответствует рассмотрению случайных процессов в дискретном времени, т.е. случайных последовательностей (временных рядов).

Отметим, что если "дискретное" разложение единицы, определяющее временную структуру причинного пространства, имеет лишь конечномерные "скачки", то возможность спектральной факторизации положительно-определенных операторов может быть установлена достаточно просто [132].

2. Каузальные операторы в причинном пространстве

А. Каузальные операторы и некоторые их свойства. Каузальность весового интегрального оператора h , определяемая условиями (1.12) в терминах его весовой функции, можно переформулировать в более удобной форме, если ввести в рассмотрение операторы "срезки". Ограничимся для простоты рассмотрением случая $m = n$. Тогда весовой оператор h действует в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(m, T)$. Оператор P_t "срезки" функции $\varphi \in L_2$ в момент времени t определяется соотношением

$$(P_t \varphi)(t') = \varphi(t') 1(t - t'), \quad (2.1)$$

где

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

— функция единичного скачка (функция Хевисайда). Операторы $P_t, t \in T$, коммутируют между собой и являются ортопроекторами в L_2 , обладающими свойствами монотонности:

$$P_{t'} P_t = P_t \quad \text{при } t' \geq t, \quad t, t' \in T, \quad (2.3)$$

и полноты:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} P_t = I \quad (2.4)$$

(пределы понимаются в сильном смысле, 0 и I обозначают соответственно нулевой и единичный операторы). Таким образом, определена непрерывная справа операторная функция $P_T = \{P_t, t \in T\}$, являющаяся разложением единицы пространства

L₂. Нетрудно убедиться, что вводимая условиями (1.12) каузальность интегрального оператора h эквивалентна выполнению операторного соотношения

$$P_t h = P_t h P_t \quad (2.5)$$

при каждом $t \in T$. Такая формулировка свойства каузальности оператора h удобна тем, что не связана с предположением об его интегральности и может вводиться по отношению к произвольному выделенному разложению единицы гильбертова пространства **L₂**. Именно таким образом вводится понятие каузального оператора в произвольном гильбертовом пространстве.

Пусть **H** — абстрактное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle$ его элементов φ, ψ . Предположим, что в **H** выделено семейство $P_T = \{P_t, t \in T\}$ взаимно коммутирующих ортопроекторов, определенных на "временном" интервале $T = (t_s, t_f)$ вещественной оси и обладающих свойствами монотонности (2.3) и полноты (2.4). (Разумеется, 0 и I теперь — нулевой и единичный операторы в пространстве **H**.) Предполагая для определенности, что операторная функция P_T сильно непрерывна справа, будем говорить, что в гильбертовом пространстве **H** введена временная структура с помощью разложения единицы P_T . Пару (H, P_T) назовем причинным пространством.

Линейный ограниченный оператор $h: H \rightarrow H$ назовем каузальным (точнее, P_T -каузальным), если при каждом $t \in T$ для него выполнено соотношение (2.5).

Б. Дискретное причинное пространство. Пусть в множестве **T** выделено не более чем счетное линейно упорядоченное подмножество $t = \{t_k, k \in K \subseteq Z\}$, причем определенная на нем операторная функция $P_t = \{P_t, t \in t\} = \{P_{t_k}, k \in K\}$ является разложением единицы. По определению, разложение единицы P_t определяет "дискретную" временную структуру в **H**, пару (H, P_t) будем называть дискретным причинным пространством. Каузальность оператора h , действующего в причинном пространстве (H, P_t) (или P_t -каузальность оператора h), означает выполнение соотношений (2.5) лишь при $t \in t$.

В случае дискретного причинного пространства **H** временную структуру удобнее задавать не с помощью "монотонного" разложения единицы P_t , а с помощью эквивалентного ему "ортого-

нального" разложения единицы

$$Q_K = \{Q_k, k \in K\}, \quad Q_k = P_{t_k} - P_{t_{k-1}} \quad \left(P_{t_k} = \sum_{k' \leq k} Q_{k'} \right). \quad (2.6)$$

Оператор h определяет набор операторов $h_{kk'} = Q_k h Q_{k'}$, $k, k' \in K$, и этим набором однозначно определяется:

$$h = \sum_{k, k' \in K} h_{kk'} = \sum_{k, k' \in K} Q_k h Q_{k'}. \quad (2.7)$$

Оператор $Q_k h Q_{k'}$ действует из подпространства $Q_{k'} H \subseteq H$ в подпространство $Q_k H \subseteq H$ и определяет соответствующий "блок" оператора h . Правая часть формулы (2.7) может рассматриваться как "блочное" представление оператора h . Оператор h будем называть (блочным) *конечнодиагональным*, если существуют натуральные числа N_1, N_2 , такие, что $Q_k h Q_{k'} \equiv 0$ при $|k| > N_1, |k'| > N_2$, число $N = N_1 + N_2$ определяет при этом число возможных ненулевых "блочных диагоналей" оператора h .

Свойство P_t -каузальности (Q_K -каузальности) оператора h означает выполнение соотношений

$$Q_k h Q_{k'} = 0, \quad k' > k, \quad k, k' \in K. \quad (2.8)$$

Антикаузальность оператора h означает выполнение соотношений

$$Q_k h Q_{k'} = 0, \quad k' < k, \quad k, k' \in K, \quad (2.9)$$

т.е. "верхнетреугольность" блочного представления оператора h . Оператор h , являющийся одновременно каузальным и антикаузальным, будем называть *нейтральным*, последний характеризуется соотношениями

$$Q_k h Q_{k'} = 0, \quad k' \neq k, \quad k, k' \in K. \quad (2.10)$$

Произведение каузального и нейтрального операторов (независимо от порядка действия операторов) является каузальным оператором, аналогичное свойство справедливо для антикаузальных операторов.

В. Сепарация линейных операторов в дискретном причинном пространстве. Обозначим через $h = \{h: H \rightarrow H\}$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в дискретном причинном пространстве (H, Q_K) . Множество h

является банаховым пространством, норма элементов в котором совпадает с операторной нормой

$$|h| = \left[\sup_{\varphi \in \mathbf{H}} \frac{\langle h\varphi, h\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

На множестве $\mathbf{h}$ введем линейный оператор P_+ , определяемый соотношением

$$P_+h = \sum_{k \geq k'} Q_k h Q_{k'} \quad (2.12)$$

и сопоставляющий произвольному оператору $h \in \mathbf{h}$ его каузальную компоненту P_+h . Оператор P_+ будем называть сепарирующим. Он заведомо определен на множестве конечнодиагональных операторов, но не является непрерывным на $\mathbf{h}$: известно, что в общем случае гильбертова пространства $\mathbf{H}$ формула (2.11) может определять неограниченный оператор P_+h , хотя $h \in \mathbf{h}$ [132]. Если оператор P_+h ограничен в $\mathbf{H}$, то приходим к разложению (сепарации) оператора h

$$h = P_+h + (I - P_+)h \quad (2.13)$$

на его каузальную P_+h и (строго) антикаузальную $(I - P_+)h$ компоненты. Каузальную компоненту P_+h также иногда удобно представлять в виде

$$P_+h = \tilde{P}_+h + (P_+ - \tilde{P}_+)h, \quad (2.14)$$

где оператор $\tilde{P}_+$ определяется соотношением

$$\tilde{P}_+h = \sum_{k > k'} Q_k h Q_{k'} \quad (2.15)$$

и называется (строго) сепарирующим оператором. При этом оператор $(P_+ - \tilde{P}_+)h$ называется нейтральной компонентой оператора h . В дальнейшем, говоря о сепарации ограниченного оператора h , будем подразумевать, что его (строго) каузальная $\tilde{P}_+h$, нейтральная $(P_+ - \tilde{P}_+)h$ и (строго) антикаузальная $(I - P_+)h$ компоненты суть элементы пространства $\mathbf{h}$.

В приложениях представляет интерес описание классов банаховых пространств линейных операторов $h: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, в которых оператор сепарации является непрерывным. Приведем пример такого пространства.

Обозначим через h_0 нормированное пространство операторов Гильберта—Шмидта, норма $\|\cdot\|$ в котором совпадает с абсолютной нормой соответствующего оператора [7]:

$$\|h\| = \left(\sum_{k,k' \in K} |Q_k h Q_{k'}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k,k' \in K} |Q_k h Q_{k'} h^* Q_k| \right)^{1/2}, \quad (2.16)$$

где $|h|$ — обычная норма оператора h , определяемая формулой (2.11). Из соотношений (2.16), (2.12) следует, что выполнены неравенства

$$\|P_+ h\| \leq \|h\|, \quad \|\tilde{P}_+ h\| \leq \|h\|, \quad \|(I_{h_0} - P_+) h\| \leq \|h\| \quad (2.17)$$

(I_{h_0} — единичный оператор в h_0), т. е. сепарирующие операторы P_+ , $\tilde{P}_+$ являются в банаховом пространстве h_0 не только непрерывными, но и нестрого сжимающими. Таким образом, произвольный оператор h Гильберта—Шмидта допускает разложение

$$h = \tilde{P}_+ h + (P_+ - \tilde{P}_+) h + (I_{h_0} - P_+) h$$

на (строго) каузальную, нейтральную и (строго) антикаузальную компоненты, которые также являются операторами Гильберта—Шмидта.

Г. Стационарные операторы и их символы. Предположим, что множество K , на котором задано разложение единицы Q_k , совпадает с множеством Z всех целых чисел, а каждое подпространство $Q_k H$, $k \in Z$, унитарно эквивалентно некоторому гильбертову пространству $\tilde{H}$, которое будем называть *частотным пространством*. В этом случае блоки $h_{k,k'} = Q_k h Q_{k'}$ можно рассматривать как операторы, действующие в пространстве $\tilde{H}$, а сам оператор h как блочный оператор

$$h = \|h_{k,k'}\|, \quad k, k' \in Z, \quad (2.18)$$

действующий в $H^\infty = \tilde{H} \times \tilde{H} \times \dots \times \tilde{H} = H$ — бесконечном произведении частотных пространств. В описанной ситуации оператор h будем называть *стационарным*, если

$$h_{k,k'} = h_{k-k'}, \quad k, k' \in Z, \quad (2.19)$$

где $\{h_k = h_{k,0}; k \in Z\}$ — последовательность ограниченных в $\tilde{H}$ операторов. Если для этой последовательности операторов выполнено условие

$$\sum_{k \in Z} |h_k h_k^*| < \infty \quad (2.20)$$

(h_k^* — оператор, сопряженный в $\tilde{H}$ оператору h_k , $|h_k h_k^*|$ — спектральная норма неотрицательного оператора $h_k h_k^*$, совпадающая с максимальной точкой его спектра), то формула

$$G_h(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda^k h_k \quad (2.21)$$

определяет операторную функцию комплексного аргумента λ , называемую *символом оператора h* . В силу (2.20) ряд в (2.21) сходится (в операторной топологии) в среднеквадратичном смысле на множестве $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$. Для конечнодиагональных стационарных операторов суммирование в (2.21) осуществляется по конечному множеству индексов, поэтому символ $G_h(\lambda)$ для них представляет собой операторный *квазиполином* и определен формулой (2.21) при всех комплексных λ (за возможным исключением точки $\lambda = 0$).

Из (2.21) стандартными рассуждениями может быть получено "операторное" равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i} \oint G_h(\lambda) [G_h(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_k^*, \quad (2.22)$$

где в левой части интегрирование проводится в комплексной плоскости по окружности единичного радиуса с центром в начале координат (направление интегрирования — против часовой стрелки, $\oint (d\lambda/\lambda) = 2\pi i$).

Формула (2.21) определяет дискретное *преобразование Фурье* последовательности $\{h_k, k \in \mathbb{Z}\}$ линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$; обратное преобразование имеет вид

$$h_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-k} [G_h(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.23)$$

Если h — положительный в H оператор, то значениями функции $G_h(\lambda)$ являются при почти всех $\lambda \in \Gamma_1$ положительные операторы в частотном пространстве $\tilde{H}$. Более тонкое соответствие между стационарным оператором h и его символом $G_h(\lambda)$ имеет вид

$$|h| = \operatorname{esssup}_{|\lambda|=1} |G_h(\lambda)|, \quad (2.24)$$

где $|h| = |h h^*|^{1/2}$ — норма оператора h в H , $|G_h(\lambda)|$ — норма оператора $G_h(\lambda)$ в $\tilde{H}$, esssup — существенный супремум. Таким

образом, стационарный оператор h ограничен в $\mathbf{H}$, если его символ $G_h(\lambda)$ в существенном ограничен на единичной окружности Γ_1 .

Если стационарный оператор h является Q_Z -каузальным, то $h_k = 0$ при $k < 0$ и формула (2.21) принимает вид

$$G_h(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k h_k, \quad (2.25)$$

т.е. операторная функция $G_h(\lambda)$ в этом случае допускает аналитическое продолжение в единичный круг. (Более точно: при любом $\varphi \in \tilde{\mathbf{H}}$ скалярная функция $\langle \varphi, G_h(\lambda) \varphi \rangle$ аналитична в единичном круге.)

Отмеченная связь каузальности стационарного оператора и аналитичности в единичном круге его символа лежит в основе спектральных методов решения задач оптимальной фильтрации и оптимального управления. Отметим, что конечнодиагональному стационарному каузальному оператору отвечает полиномиальный символ.

Если оператор h ограниченно обратим в $\mathbf{H}$ и его обратный h^{-1} является каузальным оператором, то говорят о *каузальной обратимости оператора h* .

Если h_1, h_2 — линейные ограниченные в $\mathbf{H}$ стационарные операторы, то их произведение $h_1 h_2$ является стационарным оператором и символ $G_{h_1 h_2}(\lambda)$ этого произведения равен произведению символов перемножаемых операторов:

$$G_{h_1 h_2}(\lambda) = G_{h_1}(\lambda) G_{h_2}(\lambda). \quad (2.26)$$

Если R — стационарный корреляционный оператор некоторого случайного процесса, то его символ $G_R(\cdot)$ называется (*операторной*) *спектральной плотностью*. В силу неотрицательности корреляционного оператора значениями его символа при почти всех $\lambda \in \Gamma_1$ являются неотрицательные операторы. Если h — весовой оператор стационарного фильтра, то его символ $G_h(\cdot)$ называется (*операторной*) *передаточной функцией*.

Множество $\mathbf{h}_{\text{ст}}$ стационарных операторов в причинном пространстве $(\mathbf{H}, Q_Z)$ является банаховым пространством, если определить норму $|h|_{\mathbf{h}_{\text{ст}}}$ оператора $h \in \mathbf{h}_{\text{ст}}$ по формуле

$$|h|_{\mathbf{h}_{\text{ст}}} = \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} Q_k h Q_0 h^* Q_k \right|^{1/2} = \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k h_k^* \right|^{1/2}. \quad (2.27)$$

(Множество $\mathbf{h}_{\text{ст}}$ содержит все стационарные операторы из $\mathbf{h}$, но включает и некоторые неограниченные в $\mathbf{H}$ операторы.) Символы $G_h(\cdot)$ стационарных операторов h образуют банахово пространство $\mathbf{G}$, если норму $|G_h(\cdot)|_{\mathbf{G}}$ в нем определить по формуле

$$|G_h(\cdot)|_{\mathbf{G}} = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint G_h(\lambda) [G_h(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda} \right|^{1/2}. \quad (2.28)$$

В силу равенства Парсеваля (2.22) пространства $\mathbf{h}_{\text{ст}}$ и $\mathbf{G}$ изометрично эквивалентны. (Напомним, что в силу равенства (2.24) ограниченным в $\mathbf{H}$ стационарным операторам отвечают символы, ограниченные в существенном на единичной окружности Γ_1 . Оператор сепарации P_+ в пространстве $\mathbf{h}_{\text{ст}}$, как и в пространстве $\mathbf{h}_0$, является нестрогим сжимающим, $|P_+ h|_{\mathbf{h}_{\text{ст}}} \leq |h|_{\mathbf{h}_{\text{ст}}}$ (ср. с (2.17).) Оператору P_+ в пространстве $\mathbf{G}$ отвечает оператор (который вновь будем обозначать P_+ и называть оператором сепарации), определяемый с помощью соотношения

$$[P_+ G_h(\cdot)](\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k h_k, \quad (2.29)$$

где операторы h_k определяются по функции $G_h(\lambda)$ формулами (2.23), т. е. операторная функция $[P_+ G_h(\cdot)](\lambda)$ — каузальная составляющая символа $G_h(\lambda)$ — является аналитической в единичном круге. Отметим, что в пространстве $\mathbf{h}_{\text{ст}}$ оператором Гильберта — Шмидта является лишь нулевой оператор.

Для приложений наиболее интересен частный случай, когда частотное пространство $\tilde{\mathbf{H}}$ конечномерно, например совпадает с унитарным пространством $\mathbf{C}^n$.

3. Факторизация операторов в дискретном причинном пространстве

А. Спектральная факторизация в дискретном причинном пространстве. Пусть $(\mathbf{H}, Q_K)$ — дискретное причинное гильбертово пространство, временная структура в котором введена с помощью "ортогонального" разложения единицы Q_K (см. п. 2Б). Обозначим через $\mathfrak{H}_Q$ множество всех Q_K -каузальных операторов, действующих в $\mathbf{H}$, через $\mathfrak{H}_Q^{-1}$ — множество всех обратимых в $\mathbf{H}$ операторов, обращения которых принадлежат множеству $\mathfrak{H}_Q$ (сами операторы не обязаны принадлежать $\mathfrak{H}_Q$). Будем го-

ворить, что оператор $R: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ допускает спектральную факторизацию, если существует оператор $U \in \mathfrak{R}_Q \cap \mathfrak{R}_Q^{-1}$, такой, что

$$R = UU^*. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) следует, что положительная определенность оператора R — необходимое условие существования для него спектральной факторизации. Замечательным представляется утверждение и о достаточности этого условия (см. теорему 2.7, а также работу [28]).

Теорема 3.1. *Всякий ограниченный положительно-определенный оператор $R: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ допускает спектральную факторизацию (3.1).*

Известно, что в случае общего причинного пространства $(\mathbf{H}, P_T)$ с "непрерывным" разложением единицы P_T теорема 3.1 не верна. В случае дискретного причинного пространства $(\mathbf{H}, Q_K)$ в предположении конечномерности подпространств $Q_k \mathbf{H}$, $k \in K$, изящное доказательство теоремы 3.1 приводится в работе [132]. Если множество K конечно, то спектральная факторизация положительно-определенного оператора R вне зависимости от конечной или бесконечной размерности подпространств $Q_k \mathbf{H}$ устанавливается столь же просто, как и факторизация Холецкого в конечномерном случае. Обоснование теоремы 3.1 в общем случае дискретного причинного пространства требует несколько более изощренных рассуждений [28].

Б. Левосторонняя факторизация обратимых операторов в причинном пространстве. Теореме 3.1 можно придать другую, по существу эквивалентную, форму, не связанную с положительной определенностью оператора R . Будем говорить, что линейный оператор $h: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ допускает левостороннюю Q_K -факторизацию, если существуют оператор $U \in \mathfrak{R}_Q \cap \mathfrak{R}_Q^{-1}$ и унитарный в $\mathbf{H}$ оператор V , такие, что

$$h = UV. \quad (3.2)$$

Следствие 1. *В дискретном пространстве $(\mathbf{H}, Q_K)$ всякий линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор h допускает левостороннюю Q_K -факторизацию.*

Действительно, оператор $R = hh^*$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, а потому для оператора U из соотношения (3.1) следует справедливость представления $U^{-1}hh^*(U^{-1})^* = I$, т.е.

оператор $V = U^{-1}h$ является унитарным, откуда непосредственно вытекает следствие 1. Столь же просто проверяется, что если для положительного квадратного корня $R^{1/2}$ оператора R справедлива левосторонняя факторизация

$$R^{1/2} = UV \quad (3.3)$$

с унитарным оператором V и оператором $U \in \mathfrak{A}_Q \cap \mathfrak{A}_Q^{-1}$, то для оператора R справедливо представление (3.1). Важно подчеркнуть, что и в причинном пространстве $(\mathbf{H}, P_T)$ общего вида некоторые операторы $R^{1/2}$ могут допускать левостороннюю факторизацию (3.3), тогда соответствующий оператор R допускает спектральную факторизацию (3.1). Из комментариев к теореме 3.1 следует, что в общем случае причинного пространства $(\mathbf{H}, P_T)$ не всегда существует левосторонняя P_T -факторизация (3.3).

Следствие 2. Если оператор R в условиях теоремы 3.1 конечнодиагональный, то оператор U в соотношении факторизации (3.1) также конечнодиагональный.

Действительно, оператор U^{-1} нижнетреугольный, поэтому оператор $U^{-1}R$ может иметь лишь конечное число ненулевых блочных диагоналей над главной диагональю. Но поскольку оператор $U^{-1}R = U^*$ верхнетреугольный, то в действительности он конечнодиагональный, следовательно, сопряженный к нему оператор U также конечнодиагональный.

В. Метод последовательных приближений в задаче спектральной факторизации. Изложим один из возможных способов построения факторизирующего оператора $U \in \mathfrak{A}_Q \cap \mathfrak{A}_Q^{-1}$ в соотношении (3.1).

Пусть $R: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ — произвольный ограниченный положительно-определенный оператор, допускающий сепарацию

$$R = R_+ + R_0 + R_-$$

(см. (2.13), (2.14)) с ограниченными в $\mathbf{H}$ компонентами $R_+ = \tilde{P}_+ R$, $R_0 = (P_+ - \tilde{P}_+) R$, $R_- = (I - P_+) R$. Здесь, напомним, $\tilde{P}_+$ — строго сепарирующий и P_+ — сепарирующий операторы в пространстве $\mathbf{h}$, определяемые соответственно соотношениями (2.15), (2.12). Нейтральная компонента R_0 оператора R в этом

случае также положительно определена, что позволяет представить оператор R в виде

$$R = R_0^{1/2} \left[I + R_0^{-1/2} (R_+ + R_-) R_0^{-1/2} \right] R_0^{1/2}, \quad (3.4)$$

где $R_0^{1/2}$ — положительный квадратный корень оператора R_0 ($R_0^{1/2}$ — также нейтральный оператор).

Формула (3.4) показывает, что спектральная факторизация оператора R сводится к спектральной факторизации оператора

$$R = I + R', \quad R' = R_0^{-1/2} (R_+ + R_-) R_0^{-1/2}, \quad (3.5)$$

причем R' — ограниченный оператор, нейтральная компонента R которого равна нулю, $R'_0 = 0$. Отсюда следует, что спектральная факторизация оператора (3.5) имеет вид

$$I + R' = (I + B) (I + B)^*, \quad (3.6)$$

где B — строго каузный оператор ($B = \tilde{P}_+ B$). Поэтому $[B^*]_0 = 0$ и из (3.6) получаем операторное уравнение для определения строго каузального оператора B :

$$P_+ R' = B + P_+ [B B^*]. \quad (3.7)$$

Построим последовательность операторов B_k , $k = 1, 2, \dots$, с помощью рекуррентного соотношения

$$B_k = P_+ R' - P_+ [B_{k-1} B_{k-1}^*] \quad (3.8)$$

при начальном условии

$$B_0 = P_+ R'. \quad (3.9)$$

Если последовательность операторов B_k сходится к строго каузальному оператору B , то, очевидно, оператор B удовлетворяет уравнению (3.7), а потому для оператора B выполнено соотношение факторизации (3.6).

Г. Спектральная факторизация положительно-определенных операторов, каузальная и антикаузальная компоненты которых имеют конечные абсолютные нормы. Можно приводить различные достаточные условия сходимости итерационной процедуры (3.8). Приведем следующий простой результат.

Теорема 3.2. *Предположим, что каузальная $R_+ = \tilde{P}_+ R$ и антикаузальная $R_- = (I_{h_0} - P_+)$ компоненты оператора R (а потому и оператора R' — см. (3.5)) имеют конечную абсолютную норму (см. (2.16)), причем $\|R'\| < 1$. Тогда последовательность операторов B_k , определяемая соотношениями (3.8), (3.9), сходится в абсолютной топологии к строго каузальному оператору B ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B, \quad \|B\| < 1, \quad (3.10)$$

удовлетворяющему соотношению факторизации (3.6).

Доказательство теоремы 3.2 очевидно, если учесть, что в абсолютной топологии операция сепарации является нестрого сжимающей (см. (2.17)). Для исходного оператора R (см. (3.4)) справедливо соотношение (3.1) при

$$U = R_0^{1/2} (I + B). \quad (3.11)$$

Каузальная обратимость оператора U очевидна, так как $R_0^{1/2}$ — нейтральный положительно-определенный оператор и $\|B\| < 1$.

Д. Спектральная факторизация стационарных операторов. Пусть $h_{ст}$ — банахово пространство стационарных операторов в дискретном причинном пространстве (H, Qz) , норма $|\cdot|_{h_{ст}}$ в $h_{ст}$ определяется формулой (2.27). Хотя единственным оператором Гильберта — Шмидта в пространстве $h_{ст}$ является нулевой оператор, но в метрике $|\cdot|_{h_{ст}}$ оператор P_+ обладает свойством нестрогой сжимаемости (см. п. 3Г). Это обстоятельство позволяет, как и в теореме 3.2, установить сходимость (в пространстве $h_{ст}$) итерационной процедуры (3.8) при начальном условии (3.9).

Предположим, что симметричный оператор $R \in h_{ст}$ удовлетворяет неравенствам

$$mI \leq R \leq MI \quad (3.12)$$

с некоторыми постоянными $0 < m \leq M < \infty$. При этом предположении без ограничения общности можно считать, что оператор R имеет вид

$$R = I + R', \quad (3.13)$$

где R' — симметричный стационарный оператор, удовлетворяющий условию

$$|R'|_{h_{ст}} < 1. \quad (3.14)$$

Действительно, для оператора

$$\tilde{R} = \frac{2}{M+m} R \quad (3.15)$$

в силу условий (3.12) соотношение (3.13) выполнено при

$$R' = -I + \frac{2}{M+m} R \quad \left(|R'|_{\mathfrak{h}_{\text{ст}}} \leq \frac{M-m}{M+m} < 1 \right). \quad (3.16)$$

Задачи факторизации операторов R и $\tilde{R}$ эквивалентны. Рассуждения, сопутствующие теореме 3.2, позволяют сформулировать ее аналог в следующей форме.

Теорема 3.3. *Предположим, что оператор $R \in \mathfrak{h}_{\text{ст}}$ удовлетворяет условиям (3.13), (3.14). Тогда последовательность операторов B_k , определяемая соотношениями (3.8), (3.9), сходится в $\mathfrak{h}_{\text{ст}}$ к строго каузальному оператору B ,*

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k, \quad |B|_{\text{ст}} < 1,$$

удовлетворяющему соотношению факторизации (3.6).

Используя формулы (3.16), (3.13), теорему 3.3 можно очевидным образом сформулировать для оператора $R \in \mathfrak{h}_{\text{ст}}$, удовлетворяющего лишь условиям (3.12).

Е. Спектральная факторизация квазивырожденных операторов. Корреляционный оператор конечномерного случайного процесса (процесса на выходе конечномерного линейного фильтра, возбуждаемого белым шумом) обладает свойством квазивырожденности [69, 80]. Это свойство позволяет предложить достаточно эффективную процедуру спектральной факторизации таких операторов. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Линейный оператор $R: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ назовем *квазивырожденным*, если для его "блоков"

$$R_{kk'} = Q_k R Q_{k'}, \quad k, k' \in \mathbf{K}, \quad (3.17)$$

справедливо представление

$$R_{kk'} = F_k G_{k'}^* 1(k - k') + G_k F_{k'}^* 1(k' - k), \quad k, k' \in \mathbf{K}, \quad (3.18)$$

где $1(t)$ — функция Хевисайда (см. (2.2)) и F_k, G_k — некоторые линейные ограниченные операторы, действующие из евклидова пространства $\mathbf{R}^N$ в подпространство $Q_k \mathbf{H}$, $k \in \mathbf{K}$. Операторы

F_k, G_k в дальнейшем предполагаются известными и в их терминах дается описание процедуры спектральной факторизации квазивырожденного оператора R .

Удобнее вместо оператора R иметь дело с оператором

$$\tilde{R} = R_0^{-1/2} R R_0^{-1/2},$$

где $R_0^{1/2}$ — положительный квадратный корень нейтральной компоненты R_0 оператора R . Очевидно, оператор $\tilde{R}$ имеет вид (3.5) и также является квазивырожденным оператором. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что оператор R уже имеет вид

$$R = I + R', \quad (3.19)$$

где оператор R' квазивырожден и имеет нулевую нейтральную компоненту. Задача спектральной факторизации такого оператора сводится, как пояснялось выше, к решению операторного уравнения (3.7) относительно строго каузального оператора B , который в случае квазивырожденного оператора R' также оказывается квазивырожденным, и для его нахождения может быть предложена достаточно эффективная процедура.

Итак, пусть $Q_k R' Q_{k'} = F_k G_{k'}^*$, $F_k: \mathbb{R}^N \rightarrow Q_k \mathbb{H}$, $G_{k'}: \mathbb{R}^N \rightarrow Q_{k'} \mathbb{H}$, $k, k' \in \mathbb{K}$. Тогда операторное уравнение (3.7) можно переписать в виде

$$F_k G_{k'}^* = B_{kk'} + \sum_{k'' < \min(k, k')} B_{kk''} B_{k''k'}^*, \quad (3.20)$$

где $B_{kk'} = Q_k B Q_{k'}$ — "блоки", отвечающие оператору B . Будем искать решение этого уравнения в виде

$$B_{kk'} = \begin{cases} F_k \tilde{G}_{k'}^*, & \text{при } k \geq k', \\ 0 & \text{при } k < k'. \end{cases} \quad (3.21)$$

Тогда при $k \geq k'$ соотношение (3.20) принимает вид

$$F_k G_{k'}^* = F_k \left(\tilde{G}_{k'}^* + \sum_{k'' < k'} \tilde{G}_{k''} \tilde{G}_{k'''}^* \right) F_{k'}^*, \quad (3.22)$$

откуда следует, что операторы $\tilde{G}_{k''}$ могут быть определены из соотношения

$$\tilde{G}_{k'}^* = G_{k'}^* - r_{k'} F_{k'}^*, \quad (3.23)$$

где

$$r_{k'} = \sum_{k'' < k'} \tilde{G}_{k''} \tilde{G}_{k''}^* \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует, что последовательность неотрицательных операторов r_k определяется соотношениями

$$r_{k+1} = r_k + \tilde{G}_k \tilde{G}_k^* = r_k + (G_k - F_k r_k)^* (G_k - F_k r_k), \\ k = k_s, k_s + 1, \dots, \quad r_{k_s} = 0. \quad (3.25)$$

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Предположим, что линейный ограниченный положительно-определенный оператор R имеет вид (3.19), где R' — квазивырожденный оператор с нулевой нейтральной компонентой,*

$$Q_k R' Q_{k'} = \begin{cases} F_k G_{k'}^*, & k > k', \\ 0, & k = k', \\ G_k F_{k'}^*, & k < k'. \end{cases} \quad (3.26)$$

Тогда оператор R допускает спектральную факторизацию (3.6) с Q_k -каузальным оператором B , который является квазивырожденным и однозначно определяется соотношениями

$$Q_k B Q_{k'} = \begin{cases} F_k (G_{k'} - F_{k'} r_{k'})^*, & k > k', \\ 0, & k \leq k', \end{cases} \quad (3.27)$$

где положительные операторы r_k , $k \in K$, определяются согласно (3.25).

Операторное уравнение в (3.25) имеет вид дискретного уравнения Риккати, подобные уравнения возникают в различных задачах оптимальной фильтрации и управления [43, 46, 66, 69–71, 105, 119, 126, 133, 143].

4. Связь задачи спектральной факторизации с задачей минимизации квадратичных функционалов

Имеется определенная связь между задачей факторизации квадратичного положительного функционала, определенного на множестве каузальных операторов, и задачей спектральной факторизации положительных операторов в причинном гильбертовом пространстве. Задача минимизации квадратичного функционала является в некотором смысле канонической и возникает в теории оптимальной фильтрации и управления.

Традиционно методы спектральной факторизации использовались для нахождения минимума квадратичного функционала. Однако в настоящее время задача минимизации квадратичного функционала изучена достаточно подробно, для ее решения разработаны методы, не использующие каких-либо факторизаций. В связи с этим появились исследования, в которых делается попытка решения проблемы спектральной факторизации путем сведения ее к задаче минимизации квадратичных функционалов. Цель данного пункта — развить эту идею на достаточно абстрактном уровне. Возникающие на этом пути эффективные методы спектральной факторизации дробно-рациональных конечномерных символов стационарных положительно-определенных операторов будут обсуждаться более подробно в четвертой главе.

А. "Абстрактная" линейно-квадратичная задача оптимального управления. Отмеченная выше связь между задачами спектральной факторизации и минимизацией квадратичного функционала естественным образом возникает в задаче оптимального управления линейным объектом при квадратичном критерии качества (или, более кратко, в линейно-квадратичной задаче). Приведем "абстрактный" аналог этой задачи [88, 106].

Пусть $(\mathbf{H}', Q'_K), (\mathbf{H}'', Q''_K)$ — причинные гильбертовы пространства, временные структуры в которых введены с помощью дискретных "ортогональных" разложений единиц Q'_K, Q''_K , определенных на одном и том же множестве $K \subseteq \mathbb{Z}$. Пространство $\mathbf{H}'$ интерпретируется как пространство состояний объекта управления, $\mathbf{H}''$ — как пространство управлений. "Объект управления" предполагается линейным и описывается уравнением

$$x = Ax + Bu + v, \quad (4.1)$$

где $x \in \mathbf{H}'$ — "состояние" объекта, $u \in \mathbf{H}''$ — управление, $v \in \mathbf{H}'$ — набор "начальных условий" и "помехи". Структура объекта полностью определяется линейными операторами $A: \mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{H}', B: \mathbf{H}'' \rightarrow \mathbf{H}'$, которые предполагаются строго каузальными (строгая каузальность оператора B , действующего из одного гильбертова пространства в другое, означает, как и раньше, его "нижнетреугольность", в данном случае — выполнение соотношений $Q'_k B Q''_{k'} = 0$ при $k < k'$). Будем также предполагать, что оператор

$$L = (I_{\mathbf{H}'} - A)(I_{\mathbf{H}'} - A)^* + BB^* \quad (4.2)$$

положительно-определенный. Таковы обычные условия, которым удовлетворяют дискретные объекты управления, описываемые линейными разностными уравнениями (более подробно об этом говорится в [88, 106]). Положительная определенность оператора (4.2) соответствует "полной управляемости" объекта, для "устойчивого" объекта управления оператор $I_{H'} - A$ каузально обратимый.

Примем, что "качество управления" характеризуется квадратичным функционалом

$$J = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $Q: H' \rightarrow H'$, $R: H'' \rightarrow H''$, $S: H'' \rightarrow H'$ — нейтральные операторы, причем операторы Q , R эрмитовы ($Q = Q^*$, $R = R^*$). Задача оптимального управления формулируется теперь следующим образом:

$$J \rightarrow \inf_{(x,u): (4.1)}, \quad (4.4)$$

где нижняя грань функционала (4.3) берется по всем $x \in H'$, $u \in H''$, удовлетворяющим соотношению (4.1).

Для конечномерных стационарных задач управления линейными объектами при квадратичном критерии качества хорошо известна частотная теорема [111, 118], которую можно интерпретировать как утверждение о спектральной факторизации оператора квадратичной формы (4.3) на аффинном множестве пар (x, u) , определяемых уравнением объекта (4.1). Тем самым решение линейно-квадратичной задачи (4.1), (4.3) оказывается увязанным с проблемой спектральной факторизации некоторого положительного функционала, определенного на множестве каузальных операторов. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Б. Линейно-квадратичная задача управления и проблема спектральной факторизации. В поставленной задаче оптимального управления операторы A , B , Q , S , R и элемент $v \in H'$ предполагаются известными, а элементы x , u — искомыми. Таким образом, рассматривается задача управления с "известными помехами". В первую очередь нас будут интересовать условия разрешимости задачи оптимизации (4.4) (достижимости функционалом J наименьшего значения на множестве пар (x, u) , удовлетворяющих "линейной связи" (4.1)), а также спе-

циальная форма представления этого функционала, использование которой позволяет "синтезировать" оптимальную обратную связь.

Исключая x в силу соотношения (4.1), перепишем функционал (4.3) в виде

$$J = u^* \left\| \begin{pmatrix} (I_{H'} - A)^{-1} B \\ I_{H''} \end{pmatrix} \right\|^* \left\| \begin{pmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} (I_{H'} - A)^{-1} B \\ I_{H''} \end{pmatrix} \right\| u + \\ + 2\operatorname{Re} \left\{ u^* \left[(I_{H'} - A)^{-1} BQ + S^* \right] v \right\} + v^* Qv, \quad (4.5)$$

где $I_{H'}$, $I_{H''}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах. Несложно убедиться, что для разрешимости задачи (4.4) необходимо, чтобы оператор

$$N = \left\| \begin{pmatrix} (I_{H'} - A)^{-1} B \\ I_{H''} \end{pmatrix} \right\|^* \left\| \begin{pmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} (I_{H'} - A)^{-1} B \\ I_{H''} \end{pmatrix} \right\| \quad (4.6)$$

был неотрицательным. В дальнейшем это условие будет предполагаться выполненным в усиленном смысле: будем предполагать оператор N положительно-определенным,

$$N \gg 0. \quad (4.7)$$

При выполнении условия (4.7) задача оптимизации (4.4) однозначно разрешима, а для функционала (4.3) справедливо представление [88, 106]

$$J = |\alpha u - \beta x - \varepsilon v|_{H''}^2 + J_*, \quad (4.8)$$

где $\alpha: H'' \rightarrow H''$, $\beta: H' \rightarrow H''$, $\varepsilon: H' \rightarrow H''$ — линейные ограниченные операторы, причем операторы α , β каузальные, а ε строго антикаузальный, J_* — некоторая постоянная и (x, u) — произвольная пара элементов пространства $H = H' \times H''$, связанная соотношением (4.1). Кроме того, каузальный оператор

$$\left\| \begin{pmatrix} I_{H'} - A & B \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right\|$$

ограниченно обратимый и оператор

$$\left\| \begin{pmatrix} I_{H'} - A & B \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right\|^{-1} \quad (4.9)$$

является каузальным.

Предположим, что $v = 0$ в соотношении (4.1) (это соответствует "отсутствию помех и нулевым начальным данным" в соответствующей задаче управления). Поскольку в этом случае

наименьшее значение J_* функционала (4.3) равно нулю, то, исключая в (4.8) элемент x в силу (4.1) и используя произвольность элемента u , приходим к соотношению

$$N = [\alpha - \beta(I_{H'} - A)B][\alpha - \beta(I_{H'} - A)B]^*. \quad (4.10)$$

Из каузальности оператора (4.9) непосредственно следует обратимость оператора $\alpha - \beta(I_{H'} - A)B$ и каузальность оператора

$$U = [\alpha - \beta(I_{H'} - A)B]^{-1}. \quad (4.11)$$

Таким образом, формула (4.10) приводит к спектральной факторизации положительно-определенного оператора N^{-1} ,

$$N^{-1} = UU^*. \quad (4.12)$$

Итак, если заданному положительно-определенному оператору N удастся сопоставить линейно-квадратичную задачу (4.1), (4.3) со строго каузальными операторами A, B , для которых оператор (4.2) положительно определен, а оператор (4.6) совпадает с заданным оператором N , то оператор N^{-1} допускает спектральную факторизацию (4.12), (4.11). Важно отметить, что построение каузальных операторов α, β в формуле (4.11) может быть осуществлено без использования операции факторизации.

Идея о связи линейно-квадратичной задачи управления с проблемой спектральной факторизации более подробно будет раскрыта в четвертой главе.

ГЛАВА 4

ФАКТОРИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В первых двух главах были установлены условия представления оптимального фильтра в форме Боде — Шеннона. Эти условия связаны с возможностью спектральной факторизации корреляционного оператора наблюдаемого процесса. Проблема факторизации корреляционного оператора обсуждалась также в третьей главе.

В прикладных задачах первостепенный интерес представляют эффективные алгоритмы спектральной факторизации. Такая возможность появляется, когда корреляционные операторы обладают специальными свойствами, например являются стационарными с конечномерным частотным пространством либо квазивырожденными. В каждом из этих случаев операторная факторизация может быть выражена в "конечномерных" терминах, что придает ей свойство эффективности. Именно эти вопросы обсуждаются в данной главе, написанной совместно с О. А. Петровым и Э. Е. Тавгер.

По существу, четвертая глава является обзорной по методам спектральной факторизации. Представляется невероятным дать сколько-нибудь полный обзор методов спектральной факторизации; ежегодно появляются десятки работ на эту тему. Поэтому ниже обсуждаются лишь отдельные, на наш взгляд, наиболее интересные и эффективные методы спектральной факторизации стационарных операторов с конечномерным частотным пространством.

Термин "спектральная факторизация" возник впервые, видимо, в теории оптимальной фильтрации Винера — Колмогорова стационарных процессов [27, 44, 54, 72, 73, 87, 89, 125, 129, 142, 161]. Первоначально теория оптимальной фильтрации стимулировалась главным образом задачами, возникающими в рамках статистической радиотехники и теории оценивания [67, 69, 104], позднее ее результаты стали широко использоваться в теории оптимального управления, в частности в линейно-квадратичной задаче оптимизации при неполных и зашумленных наблюдениях

за вектором состояний объекта управления [14, 40–42, 50, 66, 75, 133, 160]. В последние десятилетия наибольшее развитие получило направление теории оптимальной фильтрации, связанное с рекуррентной фильтрацией Калмана — Бьюси [45, 69, 80, 104, 137, 140, 141]. В рамках этого направления получены в ряде случаев окончательные результаты, связанные с фильтрацией нестационарных процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями [70, 137].

В рамках теории Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных скалярных процессов факторизация состоит в представлении спектральной плотности наблюдаемого процесса, определенной на единичной окружности (для процессов в "дискретном" времени) либо на вещественной оси (для процессов в "непрерывном" времени), в виде квадрата модуля некоторой функции, допускающей аналитическое продолжение соответственно в единичный круг либо нижнюю полуплоскость и не имеющей там нулей. Эта проблема достаточно подробно изучена как в скалярном, так и матричном вариантах. В ряде случаев получены исчерпывающие или близкие к ним результаты [21, 44, 84, 89, 100, 117, 121, 125, 129, 145–147, 152].

Проблема спектральной факторизации матричных функций привлекает внимание в первую очередь специалистов по неупреждающей фильтрации [43, 69, 89, 116, 130, 162, 163]. Эта же проблема возникает и при решении линейно-квадратичной задачи оптимального управления [35, 37, 38, 50, 66, 75, 84, 88, 105, 109, 119], именно в результате спектральной факторизации обеспечивается физическая реализуемость оптимального фильтра либо неупреждаемость оптимальной обратной связи — математическое выражение принципа причинности. Как хорошо известно, проблема спектральной факторизации непосредственно связана с проблемой представления случайного процесса как выходного процесса некоторого физически реализуемого фильтра (формирующего фильтра), возбуждаемого обновляющим (порождающим) белым шумом [43, 69, 80, 89].

Теория Винера — Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных процессов основывается на глубоко разработанной теории спектрального анализа [72, 73, 87, 116, 129, 142]. В последние годы методы спектрального анализа стали применяться для исследования однородных полей [92, 131].

Необходимость рассматривать нестационарные процессы привела к ревизии многих положений теории спектральной фак-

торизации [28, 29, 35]. Выяснилось, что некоторые идеи, используемые при спектральной факторизации, могут быть сформулированы в терминах корреляционных операторов, что позволяет в конечном итоге перенести основные результаты теории Винера — Колмогорова на нестационарные процессы [79, 80]; в рамки расширенной таким образом теории естественным образом оказывается включенная теория рекуррентной фильтрации Калмана — Бьюси. Возможность представления случайного процесса в виде конечномерного формирующего фильтра [124, 138] непосредственно связана с квазивырожденностью корреляционного оператора [80], эти результаты укрепили уверенность в том, что многие содержательные факты и результаты теории линейной фильтрации естественно выражаются в терминах корреляционных операторов случайных процессов и, по существу, эта теория может трактоваться как некоторый специальный раздел теории линейных операторов.

В данной главе изучаются некоторые задачи спектральной факторизаций. Именно, рассматривается проблема "скалярно-матричной" факторизации символов стационарных положительных операторов, представляющаяся важнейшей в рамках теории оптимальной неупреждающей фильтрации стационарных процессов.

Приводимые ниже результаты относятся к стационарным операторам с конечномерным частотным пространством. Задача спектральной факторизации допускает в этом случае формулировку в терминах символов этих операторов, и методы факторизации, неэффективные в бесконечномерном случае, могут оказаться здесь вполне приемлемыми. Основное внимание уделено случаю, когда эти символы дробно-рациональные либо даже являются квазиполиномами. В ряде случаев задача спектральной факторизации конечномерных символов стационарных операторов сводится к задаче скалярной спектральной факторизации, в заключительном разделе рассмотрены некоторые методы факторизации скалярных функций (не обязательно дробно-рациональных). В приложениях именно этот специальный случай представляет наибольший интерес.

Книга не претендует на исчерпывающую полноту обсуждения проблемы спектральной факторизации, литература по спектральной факторизации поистине необозрима. Во многих работах по спектральной факторизации, связанных, как правило, с линейно-квадратичной задачей управления, факторизируемая

функция может вырождаться (ее значениями являются неотрицательные, а не положительные на единичной окружности матрицы), требование аналитичности в единичном круге обращения факторизующей функции снимается. Возможность вырождения факторизуемой функции значительно усложняет проблему факторизации, делает ее математически более содержательной. Мы будем избегать называть такие матричные функции спектральными, в теории оптимальной фильтрации подобное вырождение обычно исключается, и приводимые ниже результаты относятся лишь к спектральным функциям. Приводимый ниже материал составляет содержание работ [81, 97, 107]. Более полное представление о проблеме факторизации матричных функций может быть составлено по работам [18, 21, 28, 29, 35, 43, 44, 50, 69, 74, 84, 89, 116, 117, 118, 123, 129, 136, 142, 150] и приводимой в них библиографии.

1. Факторизация положительных на единичной окружности операторных функций

Рассматриваемые в данном и последующем разделах операторные функции определены на единичной окружности Γ_1 комплексной плоскости $\{\lambda\}$ с центром в начале координат и могут рассматриваться как символы линейных стационарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (см. п. 3.2Г). Значениями рассматриваемых функций являются линейные ограниченные операторы в частотном гильбертовом пространстве $\tilde{H}$. Далее ограничимся рассмотрением лишь случая, когда $\tilde{H}$ конечномерно и совпадает с унитарным пространством C^n . Обычно в C^n предполагается фиксированным некоторый ортонормированный базис и вместо операторных функций рассматриваются матричные функции, порождаемые операторными функциями в этом базисе. В приложениях, связанных с фильтрацией случайных процессов, эти функции играют роль (матричных) спектральных плотностей, по этой причине их часто называют спектральными функциями. Мы также будем придерживаться такой терминологии, называя *спектральной функцией* произвольную операторную функцию в C^n , неотрицательную на единичной окружности. В приложениях, связанных с теорией оптимального управления, важен случай вырождающейся спектральной функции, в теории фильтрации такая ситуация не типична. В дальнейшем будем предполагать, что спектральная функция не вырождается: на единичной окружности ее значе-

ниями являются положительные (а не неотрицательные) в S^n операторы. В приложениях теории фильтрации рассматриваются обычно вещественные процессы, частотное пространство $\tilde{H}$ в этом случае изометрично некоторому евклидову пространству R^N . При необходимости мы будем отмечать особенности, присущие вещественному случаю. С прикладной точки зрения важен случай одномерного пространства $\tilde{H}$ ($n = 1$), отвечающий рассмотрению скалярных процессов, проблема спектральной факторизации здесь допускает более простые решения, и ей в разд. 6 также будет уделено внимание.

В данном разделе рассмотрены методы спектральной факторизации, основанные на алгебраических преобразованиях факторизуемых функций. Более "изошренные" методы, использующие связь задачи спектральной факторизации с хорошо изученной линейно-квадратичной задачей управления, будут обсуждаться в последующих двух разделах.

Спектральная факторизация операторной функции $G_R(\cdot)$ означает ее представление в виде

$$G_R(\lambda) = U(\lambda)U^\nabla(\lambda), \quad (1.1)$$

где $U(\lambda): R^n \rightarrow R^n$ — операторная функция, ограниченная и ограниченно обратимая при почти всех $|\lambda| = 1$, причем операторные функции $U(\lambda)$, $U^{-1}(\lambda)$ являются каузальными: $(P_+U)(\lambda) = U(\lambda)$, $(P_+U^{-1})(\lambda) = U^{-1}(\lambda)$, где P_+ — сепарирующий оператор (см. гл. 3), определяемый соотношениями

$$G(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k G_k, \quad (P_+G)(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k G_k$$

для любой функции $G(\lambda)$, ряд Фурье которой сходится в среднеквадратичном смысле, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |G_k G_k^*| < \infty.$$

Кроме того, в (1.1) использовано обозначение

$$U^\nabla(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-k} U_k^*, \quad U_k^* = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-k} [U(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (1.2)$$

Таким образом, операторные функции $U(\lambda)$, $U^{-1}(\lambda)$ аналитичны в единичном круге, причем их предельные значения квадратично-интегрируемы на единичной окружности. Напомним,

что если G — стационарный оператор в дискретном причинном пространстве (H, Q_Z) (см. гл. 3), то $G_{k-k'} = Q_k G Q_{k'}$ (Q_k — ортопроекторы, задающие дискретную временную структуру в пространстве (H, Q_Z)), функция $G(\lambda)$ называется *символом* стационарного оператора G . Всюду в дальнейшем предполагается, что подпространства $Q_k H$ изометричны конечномерному пространству C^N (частотному пространству), так что рассматриваемые символы являются конечномерными *операторными функциями*. В соответствии со сказанным выше, будем также говорить о символах как о *матричных функциях*.

Описанная задача спектральной факторизации (1.1) операторной функции $G_R(\cdot)$, определенной и положительной на единичной окружности, является одной из основных в спектральном анализе и достаточно хорошо изучена. В силу равенства Парсеваля (см. ниже формулу (1.6)) нетрудно убедиться, что ограниченность стационарного оператора эквивалентна ограниченности в существенном его символа на единичной окружности. Из теоремы 3.4 тогда следует, что если функция $G_R(\cdot)$ в существенном ограничена и положительно определена на множестве $|\lambda| = 1$, то она допускает спектральную факторизацию. Перейдем к описанию методов, с помощью которых может быть осуществлена спектральная факторизация таких функций.

А. Итерационный метод факторизации. Метод был впервые предложен, по-видимому, П. Мазани [150] и получил дальнейшее развитие в совместной работе Н. Винера и П. Мазани [162]. Этот метод позволяет факторизовать операторную функцию $G(\cdot)$, $G(\lambda): R^N \rightarrow R^N$, удовлетворяющую при почти всех λ , $|\lambda| = 1$, условиям

$$mI_N \leq G(\lambda) \leq MI_N, \quad (1.3)$$

где I_N — единичный оператор в R^N , m, M — положительные постоянные, $0 < m \leq M < \infty$. Операторный аналог итерационного метода описывается соотношениями (3.3.8), (3.3.9).

Операторная функция $G(\cdot)$, обладающая свойством (1.3), допускает разложение в ряд Фурье

$$G(\lambda) = \sum_{t=Z} \lambda^t G_t, \quad |\lambda| = 1, \quad (1.4)$$

где G_t — ограниченные операторы, действующие в унитарном пространстве C^N (в евклидовом пространстве R^N в веществен-

ном случае) и удовлетворяющие условию

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{sp} \{G_i G_i^*\} < \infty, \quad (1.5)$$

$\text{sp}\{ \}$ — сумма собственных значений соответствующего конечногомерного неотрицательного оператора. В силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i} \oint G(\lambda) [G(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} G_i G_i^* \quad (1.6)$$

(см., например, формулу (3.2.22)) операторная функция $G(\cdot)$ квадратично-интегрируема на множестве $|\lambda| = 1$ и ряд в (1.4) сходится в среднеквадратичном смысле.

Без ограничения общности можно считать, что функция $G(\cdot)$ представима в виде

$$G(\lambda) = I_N + g(\lambda), \quad (1.7)$$

где $g(\lambda)$ — операторная функция, удовлетворяющая условию

$$|g|_G = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint g(\lambda) [g(\lambda)]^* \frac{d\lambda}{\lambda} \right|^{1/2} < 1. \quad (1.8)$$

Действительно, функция

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{2}{m+M} G(\lambda)$$

представима в виде $\tilde{G}(\lambda) = I_N + \tilde{g}(\lambda)$ с функцией

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{2}{m+M} G(\lambda) - I_N,$$

удовлетворяющей в силу условий (1.3) неравенству (1.8). Факторизация функций $G(\cdot)$, $I_N + \tilde{g}(\cdot)$, очевидно, — эквивалентные задачи.

Итак, пусть $G(\cdot)$ — символ стационарного оператора R , удовлетворяющий условиям (1.7), (1.8). Через $b_n(\cdot)$ обозначим символы (см. гл. 3) стационарных каузальных операторов B_n . В силу формулы (3.2.26) операторное равенство (3.3.8) переписывается в терминах символов входящих в него стационарных операторов следующим образом:

$$\begin{aligned} b_n(\lambda) &= (P_+ g)(\lambda) - (P_+ (b_{n-1} b_{n-1}^*))(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_0(\lambda) &= (P_+ g)(\lambda), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где сепарирующий оператор P_+ определяется соотношениями (3.2.29), (3.2.23). Поскольку по условию выполняется неравенство $|g|_G < 1$ и сепарирующий оператор в пространстве G не строго сжимающий (см. п. 3.2Г), то нетрудно убедиться, что последовательные приближения $b_n(\cdot)$ в метрике пространства G сходятся к некоторой функции $b(\cdot)$, удовлетворяющей условиям

$$|b|_G < 1, \quad (P_+ b)(\lambda) = b(\lambda), \quad (1.10)$$

и эта функция факторизует операторную функцию (1.7),

$$G(\lambda) [I_N + b(\lambda)] [I_N + b(\lambda)]^*, \quad \lambda \in \Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}. \quad (1.11)$$

Приведенные рассуждения резюмируем в виде следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Для операторной функции (1.7), удовлетворяющей условию (1.8), справедлива факторизация (1.11), где $b(\lambda)$, $b(0) = 0$, — операторная функция, удовлетворяющая условиям (1.10). Функция $b(\cdot)$ является пределом (в пространстве G) приближений $b_n(\cdot)$, определяемых соотношениями (1.9).*

Отметим, что неравенство (1.10) гарантирует обратимость оператора $I_N + b(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \Gamma_1$ и каузальность операторной функции $[I_N + b(\lambda)]^{-1}$.

Теорема 4.1 является очевидной переформулировкой теоремы 3.4, если учесть формулу (3.2.26) для символа произведения двух стационарных операторов. Конечномерность частотного пространства $\tilde{H}$ здесь роли не играет. В несколько других обозначениях подробное доказательство теоремы 4.1 (в случае конечномерного пространства $\tilde{H}$) имеется в работе [89].

Б. Сведение задачи факторизации дробно-рациональных матричных функций к последовательности задач скалярной факторизации. Факторизация дробно-рациональных матричных функций является, по-видимому, первой задачей факторизации, в которой были получены результаты завершающего характера. Это обстоятельство связано с некоторыми специальными свойствами рациональных матричных функций, которые позволяют получить в определенном смысле полное решение задачи факторизации. Один из получивших признание подходов восходит к известной работе Н. П. Векуа [18], посвященной решению векторной краевой задачи с рациональными

коэффициентами, а также более поздней работе Д. Юла [163]. Остановимся на этом методе подробнее.

Операторная функция $G(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, значениями которой являются линейные операторы в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$, называется дробно-рациональной, если для любого элемента $\varphi \in \mathbb{C}^n$ скалярная функция $\varphi^* G(\lambda) \varphi$ является отношением двух полиномов. Если в $\mathbb{C}^n$ фиксирован некоторый базис, то матричная функция, отвечающая операторной функции $G(\lambda)$ в этом базисе, имеет дробно-рациональные матричные элементы. Обсуждаемый метод основан на хорошо известном результате теории матриц: любую дробно-рациональную матричную функцию $G(\lambda)$ можно с помощью элементарных преобразований привести к виду

$$G(\lambda) = P(\lambda)D(\lambda)Q(\lambda), \quad (1.12)$$

где $D(\lambda)$ — диагональная матрица, а $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ — полиномиальные матрицы с не зависящими от λ ненулевыми определителями [20].

Если матричная функция $G(\lambda)$ положительна при $|\lambda| = 1$, то при этих λ функции $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ в представлении (1.12) связаны соотношением $P(\lambda) = Q^*(\lambda)$ (и установление этого факта достаточно нетривиально), а отличные от нулевых матричные элементы функции $D(\lambda)$ положительны. Факторизация диагональной матричной функции $D(\lambda)$ сводится к факторизации ее скалярных диагональных элементов. Если для каждого из этих элементов осуществлена спектральная факторизация, то для $D(\lambda)$ получается представление $D(\lambda) = D_+(\lambda)D_+^\nabla(\lambda)$, где $D_+(\lambda)$ — диагональная матричная функция с аналитическими в единичном круге диагональными матричными элементами, не имеющими там нулей, и использовано обозначение $D^\nabla(\lambda) = D^T(\lambda^{-1})$ (D^T — матрица, транспонированная по отношению к матрице D). Тогда для исходной функции $G(\lambda)$ справедлива спектральная факторизация

$$G(\lambda) = U(\lambda)U^\nabla(\lambda) \quad (1.13)$$

с матричной функций $U(\lambda) = P(\lambda)D_+(\lambda)$. Очевидно, матрица $U(\lambda)$ имеет обратную $U^{-1}(\lambda)$ и обе эти матрицы имеют аналитические в единичном круге матричные элементы. Тем самым установлена нужная факторизация положительной на единичной окружности матричной функции $G(\lambda)$ с дробно-рациональными матричными элементами. Подробности обоснования обсуждаемого метода могут быть найдены в работах [69, 163].

Описанный метод (иногда называемый методом Юла) сводит задачу спектральной факторизации матричной функции $G(\lambda)$ к серии спектральных факторизаций скалярных функций (диагональных элементов матричной функции $D(\lambda)$). Для решения задачи факторизации скалярных функций известен ряд специфических методов, некоторые из которых обсуждаются в разд. 7. Метод Юла достаточно трудоемок из-за сложности получения представления (1.12), в настоящее время известен ряд альтернативных методов спектральной факторизации рациональных матричных функций.

В. Основное утверждение о факторизации дробно-рациональной спектральной функции. Приведем утверждение о спектральной факторизации дробно-рациональной функции, восходящее к Юлу [163] (см. также [69]). Приводимое доказательство отлично от оригинального и в определенном смысле конструктивно (хотя и достаточно трудоемко).

Теорема 4.2. *Предположим, что $G(\lambda)$ — дробно-рациональная $n \times n$ -матричная функция, положительная и ограниченная на единичной окружности $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Тогда существует дробно-рациональная $n \times n$ -матричная функция $U(\lambda)$ со свойствами:*

- 1) $\sup_{\lambda \in \Gamma_1} \text{sp} \{U(\lambda)U^\nabla(\lambda)\} < \infty$;
- 2) $\det U(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in D_1 = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$;
- 3) при $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо представление (1.13).

Здесь $\text{sp}\{\cdot\}$ и $\det\{\cdot\}$ обозначают соответственно след (сумму собственных значений) и определитель матрицы $\{\cdot\}$. Доказательство теоремы 4.2 приведено в Приложении.

Г. Спектральная факторизация дробно-рациональной матричной функции, основанная на факторизации Холецкого. Перейдем к изложению другого метода решения задачи спектральной факторизации положительной на единичной окружности дробно-рациональной матричной функции $G(\lambda)$. При фиксированном $\lambda \in \Gamma_1$ матрица $G(\lambda)$ положительна и потому допускает факторизацию Холецкого

$$G(\lambda) = P(\lambda)D(\lambda)P^*(\lambda), \quad (1.14)$$

где $P(\lambda)$ — нижнетреугольная и $D(\lambda)$ — диагональная матричные функции, $\det P(\lambda) = 1$. Значения этих функций при фиксированном значении λ могут быть определены с использова-

нием достаточно эффективных вычислительных процедур. Отличные от нулевых матричные элементы функции $P(\lambda)$ являются дробно-рациональными. Матрица $D(\lambda)$ диагональная и положительная при $|\lambda| = 1$, ее диагональные элементы также являются дробно-рациональными функциями. Матричные элементы функции $P(\lambda)$ могут иметь особенности (типа полюсов) в единичном круге (и в этом существенное отличие рассматриваемого метода от метода Юла — см. п. 1Б). Пусть $p(\lambda)$ — полином наименьшей степени, такой, что матричные элементы функции $\tilde{U}(\lambda) = p(\lambda)P(\lambda)$ не имеют особенностей внутри единичного круга (т.е. являются аналитическими функциями в единичном круге). Проводя факторизацию положительной на множестве $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$ диагональной матричной функции $D(\lambda)|p(\lambda)|^2$, получаем представление

$$G(\lambda) = U(\lambda)U^\nabla(\lambda), \quad (1.15)$$

где $U(\lambda) = \tilde{U}(\lambda)d(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — аналитическая в единичном круге диагональная матричная функция — результат спектральной факторизации функции $D(\lambda)|p(\lambda)|^2$.

Недостатком полученного решения, затрудняющего его непосредственное использование, является то обстоятельство, что матричная функция $U^{-1}(\lambda)$ может иметь особенности типа полюсов внутри единичного круга, т.е. ее матричные элементы могут не быть аналитическими функциями в единичном круге. Однако от этого недостатка можно избавиться следующим образом (см. [89, с. 90]).

Пусть $\det U(\lambda_0) = 0$ и $|\lambda_0| \leq 1$. Для простоты примем, что функция $\det U(\lambda)$ имеет в точке λ_0 простой корень, $\det U(\lambda)(\lambda - \lambda_0)$ не обращается в ноль при $\lambda = \lambda_0$. Воспользуемся полярным представлением матрицы $U(\lambda_0) = V_1(\lambda_0)H(\lambda_0)$, где $V_1(\lambda_0)$ — некоторая унитарная матрица и $H(\lambda_0) = [U(\lambda_0)U^*(\lambda_0)]^{1/2}$ — неотрицательная матрица. С помощью унитарного преобразования, обозначим его V_2 , неотрицательная матрица $H(\lambda_0)$ может быть приведена к диагональному виду, $V_2H(\lambda_0)V_2^* = D$. В силу предположения $\det U(\lambda_0) = 0$ диагональная матрица D будет иметь на главной диагонали нулевой элемент. Не ограничивая общности, можно считать, что этот ноль находится в левом верхнем углу. Введем матрицу $d(\lambda) = V_2^*D_1$, где диагональная матрица D_1 имеет в левом верхнем углу элемент $[(1 - \bar{\lambda}_0\lambda)(\lambda - \lambda_0)]^{-1}$ (если $\lambda_0 \neq 0$, при $\lambda_0 = 0$ — элемент λ^{-1}),

а остальные диагональные элементы равны единице. Легко проверить, что матрица $U_1(\lambda) = U(\lambda)d(\lambda)$ аналитическая в единичном круге, удовлетворяет условию

$$U(\lambda)U^\nabla(\lambda) = U_1(\lambda)U_1^\nabla(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma_1, \quad (1.16)$$

и при этом $\det U_1(\lambda_0) \neq 0$. Поскольку в "дробно-рациональном" случае $\det U(\lambda)$ может иметь лишь конечное число нулей, то повторяя эту операцию, можно получить функцию $\tilde{U}(\lambda)$, аналитическую внутри единичного круга, причем функция $\tilde{U}^{-1}(\lambda)$ также будет аналитической внутри единичного круга, при этом выполнено равенство

$$G(\lambda) = \tilde{U}(\lambda)\tilde{U}^\nabla(\lambda), \quad (1.17)$$

т.е. матричная функция $\tilde{U}(\lambda)$ осуществляет спектральную факторизацию матричной функции $G(\lambda)$.

Сравнивая изложенные два метода факторизации дробно-рациональной матричной функции, следует отметить, что последний метод менее громоздок, особенно в том случае, если не требуется дополнительной процедуры "избавления" от нулей функции $\det U(\lambda)$.

2. Факторизация дробно-рациональных операторных спектральных функций

Задача спектральной факторизации операторной дробно-рациональной спектральной функции допускает эффективные алгоритмы, если эту функцию рассматривать как вещественную часть некоторой операторной функции, аналитической в единичном круге. Следуя работе [123], изложим метод спектральной факторизации, основанный на тесной связи рассматриваемой задачи факторизации спектральной функции с линейно-квадратичной задачей оптимального управления. Последняя изучена весьма полно, существуют различные способы синтеза оптимального регулятора [3, 5, 37, 38, 50, 68, 75, 105]. Следует подчеркнуть, что в настоящее время разработаны методы решения линейно-квадратичной задачи, не использующие спектральную факторизацию операторных функций, в ряде случаев удается обойтись "скалярной" факторизацией либо даже чисто алгебраическими методами (последнее обычно удается при использовании итерационных методов решения линейно-квадратичной задачи).

А. Положительно-вещественные функции и их спектральные факторы. Пусть $g(\cdot)$ — дробно-рациональная функция, значениями которой являются линейные операторы в n -мерном унитарном пространстве C^n (для приложений важен случай, когда "коэффициенты" дробно-рациональной функции $g(\cdot)$ являются линейными операторами в евклидовом пространстве R^n , другими словами, когда операторы $g(\lambda)$ действуют в R^n при $\lambda \in R$; ниже "вещественный" случай будет лишь упоминаться при некоторых уточнениях результатов, формулируемых в общем (комплексном) случае). Будем предполагать, что операторная функция $g(\cdot)$ является аналитической в замкнутом единичном круге $\bar{D}_1 = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$, т.е. допускает разложение в ряд Тейлора

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k g_k, \quad g_k: C^n \rightarrow C^n, \quad (2.1)$$

равномерно сходящийся в некоторой окрестности множества $\bar{D}_1$. Такая функция $g(\cdot)$ называется *положительно-вещественной*, если ее вещественная часть $G(\cdot)$,

$$\operatorname{Re} g(\lambda) = \frac{1}{2} [g(\lambda) + [g(\lambda)]^*], \quad (2.2)$$

неотрицательна на единичной окружности $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$, т.е. значения функции $\operatorname{Re} g(\cdot)$ суть симметричные неотрицательные в C^n операторы (см., например, [122]).

Хорошо известным результатом теории систем является утверждение о том, что для каждой дробно-рациональной конечномерной операторной функции $g(\cdot)$ существует четверка конечномерных операторов $\{A, B, C, D\}$, определенных на некоторых унитарных пространствах (евклидовых пространствах в вещественном случае), таких, что справедливо соотношение

$$g(\lambda) = D + \lambda C^* (I - \lambda A)^{-1} B. \quad (2.3)$$

Операторы $\{A, B, C, D\}$, называемые *реализацией дробно-рациональной функции $g(\cdot)$* , строятся по ней с помощью алгебраических методов, мы не будем входить в эти подробности, при этом реализация может быть построена таким образом, что размерность пространства, в котором действует оператор A , минимальна (другими словами, пара операторов (A, B) удовлетворяет условию "полной управляемости", а пара (A, C) — условию

"полной наблюдаемости"), соответствующая четверка называется минимальной реализацией функции $g(\cdot)$ [123]. В дальнейшем реализация $\{A, B, C, D\}$ функции $g(\cdot)$ предполагается минимальной и известной (построенной).

Как хорошо известно, условие положительной вещественности функции $g(\cdot)$ в терминах ее реализации $\{A, B, C, D\}$ эквивалентно условию существования отрицательного оператора Y , действующего в унитарном пространстве соответствующей размерности, такого, что неотрицателен блочный оператор

$$M(Y) = \begin{vmatrix} A^*YA - Y & A^*YB + C \\ B^*YA + C^* & B^*YB + D + D^* \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

(см., например, [123]).

Операторная функция $U(\cdot)$, значениями которой являются линейные операторы в C^n , называется *спектральным фактором* (множителем) вещественно-положительной функции $g(\cdot)$, если $U(\cdot)$ обратима в единичном круге D_1 , функции $U(\cdot)$ и $U^{-1}(\cdot)$ аналитические в множестве D_1 , а также справедливо тождество

$$G(\lambda) = U^\nabla(\lambda)U(\lambda), \quad (2.5)$$

где обозначено (см. (2.1), (2.3))

$$G(\lambda) = g(\lambda) + g^\nabla(\lambda),$$

$$g^\nabla(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k} g_k^* = D + B^*(\lambda I - A^*)^{-1}C, \quad (2.6)$$

т. е. операторная функция $U(\cdot)$ реализует факторизацию спектральной функции $G(\lambda)$, совпадающей на единичной окружности с вещественной частью функции $g(\cdot)$ (см. (2.2)). В [123] показано, что такие операторы Y имеют верхнюю грань H , $Y \leq H$, которая является решением уравнения Лурье [118]

$$H = A^*HA - [A^*HB + C][B^*HB + D + D^*]^+ [A^*HB + C]^*, \quad (2.7)$$

где $[\cdot]^+$ обозначает псевдообращение оператора $[\cdot]$. Отметим, что если функция $G(\lambda)$ положительна на множестве Γ_1 , то $D + D^* > 0$ и при $H \geq 0$ в (2.7) псевдообращение совпадает с обращением. В [123] также показано, что в этом случае 0-симметричный оператор H является максимальным среди отрицательных решений Y уравнения Лурье (2.7), для которых выполнено неравенство $M(Y) \geq 0$ (см. (2.4)). При известном

операторе H спектральный фактор $U(\cdot)$ функции $g(\cdot)$ определяется следующим образом. Представим неотрицательную матрицу $M(H)$ в виде

$$M(H) = \|K^*, V\|^* \|K^*, V\| \quad (2.8)$$

с некоторыми операторами K, V (оператор $\|K^*, V\|$ при сделанных предположениях невырожден). Тогда

$$U(\lambda) = V + \lambda K^* (I - \lambda A)^{-1} B \quad (2.9)$$

—спектральный фактор, отвечающий операторной функции $g(\cdot)$. Оператор $K = K(H)$ из соотношения факторизации (2.8) определяется оператором H по формуле

$$K = -[B^*HB + D + D^*]^+ [A^*HB + C]^*, \quad (2.10)$$

при этом все собственные значения оператора $A - BK$ расположены в открытом единичном круге (т.е. оператор $A - BK$ устойчивый). Последнее условие однозначно определяет оператор H как максимальный среди симметричных решений Y , удовлетворяющих уравнению Лурье (2.10). Проблема факторизации функции (2.2) сводится, таким образом, к нахождению отрицательного оператора H , для которого оператор $A - BK$ устойчивый.

Б. Связь задачи спектральной факторизации с линейно-квадратичной задачей. Оператор H , определяемый уравнением (2.7), естественным образом возникает при решении линейно-квадратичной задачи и определяет оптимальный регулятор. Эта задача имеет вид

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad x_0 = a, \quad (2.11)$$

где x_t — вектор состояний объекта управления; u_t — вектор управляющих воздействий в момент времени t , $t = 0, 1, \dots, T$; a — начальное состояние объекта. Качество управления характеризуется квадратичным функционалом

$$J[a, u] = \sum_{t=0}^{+\infty} [u_t^* Du_t + x_t^* C u_t]. \quad (2.12)$$

Линейно-квадратичная задача управления состоит в определении управления $u = \{u_t, t = 0, 1, \dots\}$, для которого функционал (2.12) принимает наименьшее значение:

$$J[a, u] \rightarrow \inf_u. \quad (2.13)$$

В предположении полной управляемости пары (A, B) несложно установить (см., например, [123]), что для разрешимости линейно-квадратичной задачи (2.11)–(2.13) необходимо и достаточно, чтобы функция (2.3) была положительно-вещественной. Положительность функции $G(\cdot)$ (см. (2.6)), как показывается в следующем разделе, эквивалентна выполнению *частотного условия*, при этом задача оптимизации разрешима и оптимальное управление $u^{\text{opt}} = \{u_t, t = 0, 1, \dots\}$ определяется линейной обратной связью

$$u_t = -Kx_t, \quad (2.14)$$

где оператор K определяется по максимальному отрицательному решению H уравнения Лурье (2.7) формулой (2.10). В разд. 2.3 приводятся способы построения оператора H , не использующие факторизацию операторной спектральной функции (удаётся построить оператор H лишь с помощью алгебраических операций и операции скалярной факторизации).

В. Итерационный метод решения уравнения Лурье. В [123] для определения нужного решения H уравнения Лурье (2.7) предлагается использовать *уравнение Риккати*

$$H_{t+1} = A^* H_t A - [A^* H_t B + C][B^* H_t B + D + D^*]^{-1} [A^* H_t B + C]^* \quad (2.15)$$

при начальном условии

$$H_0 = 0. \quad (2.16)$$

Итерационная процедура (2.15), (2.16) определяет последовательность неположительных операторов H_t , монотонно сходящихся к отрицательному оператору H — решению уравнения Лурье (2.7), при этом скорость сходимости операторов H_t к H экспоненциальная. После нахождения оператора H с приемлемой точностью факторизуется оператор $M(H)$ в виде (2.8), а затем по формуле (2.9) находится операторная функция $U(\lambda)$ из соотношения факторизации (2.3). Численные эксперименты показали практическую работоспособность итерационной схемы (2.15), (2.16) [123].

Г. Спектральная факторизация операторного квазиполинома, положительного на единичной окружности. Пусть $G(\cdot)$ — операторный квазиполином,

$$G(\lambda) = \sum_{k=-L}^L \lambda^k G_k, \quad (2.17)$$

где $\lambda \in \Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$, $G_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные операторы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что квазиполином $G(\lambda)$ положителен при всех $\lambda \in \Gamma_1$.

Предположение, что на единичной окружности значениями квазиполинома (2.17) являются симметричные положительные в $\mathbb{C}^n$ операторы, означает, в частности, его возвратность; $G_k^* = G_{-k}$ и положительность оператора G_0 . С квазиполиномом $G(\lambda)$ очевидным образом можно связать положительно-вещественную функцию, для которой он является вещественной частью. Эта функция имеет вид операторного полинома

$$g(\lambda) = \frac{G_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k G_k. \quad (2.18)$$

Минимальная реализация для положительно-вещественного полинома (2.18) выписывается очень просто:

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0 & \dots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \dots & 0_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} G_L^* \\ G_{L-1}^* \\ \vdots \\ G_1^* \end{bmatrix}, \quad D = \frac{G_0}{2}. \quad (2.19)$$

Отметим, что матрица A в данном случае устойчива. Простые вычисления показывают, что в силу (2.19) выполнено

$$(I - \lambda A)^{-1} B = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \quad C^* = \|G_L, \dots, G_1\|,$$

и с учетом (2.18) убеждаемся в справедливости (2.3). Специальный вид (2.3) минимальной реализации $\{A, B, C, D\}$ положительно-вещественного полинома (2.18) позволяет достаточно просто найти нужное решение H уравнения Лурье (2.7).

3. Спектральная факторизация и частотная теорема

В третьей главе уже отмечалась связь задачи спектральной факторизации с линейно-квадратичной задачей управления. В случае, если рассматриваемые в задаче управления (3.4.1), (3.4.3) операторы стационарны, соотношение (3.4.10) операторной факторизации, переписанное в терминах символов этих операторов, представляет так называемую частотную теорему [23,

118], являющуюся одним из замечательных результатов теории оптимального управления линейными объектами. Алгоритмы построения символов операторов, участвующих в частотном соотношении, в силу сказанного в п. 2В определяют нужную факторизацию соответствующей спектральной матричной функции.

Частотная теорема и проблема спектральной факторизации первоначально рассматривались для задач управления и фильтрации в непрерывном времени. Постановки задач в дискретном времени вполне аналогичны, более того, задачи в дискретном и непрерывном времени по существу эквивалентны, между ними можно установить определенное соотношение (в [123], в частности, установлены соотношения, позволяющие по "дискретной" факторизации получать "непрерывную" факторизацию и обратно). Ниже будет рассматриваться лишь "дискретный" вариант частотной теоремы и обсуждаться ее связь с факторизацией функции, положительной на единичной окружности.

А. Частотная теорема. Следуя [5, 118], приведем основные результаты, связанные с "дискретной" частотной теоремой. Рассмотрим линейную систему управления, описываемую разностным уравнением

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad x_0 = a, \quad (3.1)$$

где $t = 0, 1, \dots$; x_t — вектор состояний объекта управления, u_t — вектор управляющих воздействий в момент времени t , a — начальное состояние объекта. Здесь A, B — комплексные матрицы размером $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, в "вещественном" случае они имеют вещественные коэффициенты. Далее будем предполагать полную управляемость пары (A, B) [14, 84].

Примем, что качество управления характеризуется квадратичным функционалом

$$J[u, a] = \sum_{t=0}^{+\infty} N(x_t, u_t), \quad (3.2)$$

где квадратичная форма $N(x_t, u_t)$ имеет вид

$$N(x_t, u_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

и задается матрицами Q, S, R соответствующих размеров, причем матрицы Q и R эрмитовы, $Q^* = Q, R^* = R$ и $R > 0$. В [118]

показано, как задача построения квадратичных функций Ляпунова вида $x^* H x$, приращение которых на траекториях системы управления (3.1) неположительно, приводит к тождеству

$$(Ax + Bu)^* H (Ax + Bu) - x^* H x - |\kappa(Kx - u)|^2 + N(x, u) = 0, \quad (3.4)$$

которое должно выполняться для любых $x \in \mathbb{C}^n$, $u \in \mathbb{C}^m$. Ставится задача о нахождении условий существования матриц $H^* = H$, K , κ соответствующих размеров, для которых выполнено тождество (3.4). Несложно получить необходимое условие существования указанных матриц.

С этой целью для произвольного комплексного числа $\lambda \in \Gamma_1$, для которого $\det(I_n - \lambda A) \neq 0$, определим матрицу

$$A_\lambda = I_n - \lambda A. \quad (3.5)$$

Если тождество (3.4) имеет место, то при выборе $x = \lambda A_\lambda^{-1} Bu$, $|\lambda| = 1$, получим тождество по $u \in \mathbb{C}^m$:

$$N(A_\lambda^{-1} Bu, u) = |\kappa(\lambda K A_\lambda^{-1} B - I_m) u|^2. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования матриц $H = H^*$, K , κ , для которых выполнено тождество (3.4), является выполнение неравенства

$$N(A_\lambda^{-1} Bu, u) \geq 0 \quad (3.7)$$

для всех $u \in \mathbb{C}^m$, $\lambda \in \Gamma_1$. Неравенство (3.7) называется частотным. Оказывается, что выполнение частотного неравенства (3.7) не только необходимо, но и достаточно для существования указанных матриц.

Теорема 4.3 [118]. *Для существования матрицы $H = H^*$, такой, что для любых $x \in \mathbb{C}^n$, $u \in \mathbb{C}^m$ выполнено неравенство*

$$(Ax + Bu)^* H (Ax + Bu) - x^* H x - G(x, u) \geq 0, \quad (3.8)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda \in \Gamma_1$, для которого

$$\delta(\lambda) = \det(I_n - \lambda A)^{-1} \neq 0, \quad (3.9)$$

и любого $u \in \mathbb{C}^m$ было справедливо частотное неравенство (3.7).

При выполнении (3.7) существуют матрицы $H = H^$, K , κ , вещественные в вещественном случае, такие, что имеет место тождество (3.4).*

Б. Дискретное уравнение Лурье. Тожество (3.4) эквивалентно матричным соотношениям

$$\begin{aligned} Q &= H - A^* H A + K \kappa \kappa^* K^*, \\ S &= -A^* H B - K^* \kappa \kappa^*, \\ R &= -B^* H B + \kappa^* \kappa, \end{aligned} \quad (3.10)$$

называемым разрешающими уравнениями Лурье [71, 84, 105, 118, 119, 140], точнее, их дискретным аналогом. Если задаться матрицей $H \geq 0$, определить матрицу K по формуле

$$K = K(H) = -(B^* H B + R)^{-1} (B^* H A + S^*) \quad (3.11)$$

и матрицу κ из последнего соотношения (3.10), то первые два соотношения (3.10) будут выполнены, если матрица H удовлетворяет матричному уравнению

$$H = A^* H A - (A^* H B + S) (B^* H B + R)^{-1} (B^* H A + S^*) + Q, \quad (3.12)$$

которое будем называть дискретным уравнением Лурье. Оно также известно как алгебраическое уравнение Риккати (в дискретном варианте). (Ср. формулы (3.11) и (2.10), а также уравнения (3.12) и (2.7).) Таким образом, установление частотного соотношения (3.4) тесно связано с решением $H = H^*$ уравнения Лурье. При этом в задачах оптимального управления интерес представляет то решение H , для которого матрица $A + B K(H)$ устойчива. Хорошо известно (см., например, [104, 118, 158]), что такое решение уравнения Лурье единственно и является максимальным среди всех симметричных решений уравнения Лурье.

Утверждение теоремы 4.4 дополнено в [118] методом нахождения матриц $H = H^*$, K , κ , в котором кроме алгебраических операций используется лишь операция скалярной факторизации. Прежде чем обсуждать этот метод, остановимся на связи частотной теоремы с задачей спектральной факторизации.

В. Частотная теорема и спектральная факторизация. В разд. 3.4. уже обсуждалась связь линейно-квадратичной задачи управления с задачей спектральной факторизации в операторных терминах. В данном случае соответствующие операторы являются стационарными и нейтральными, что позволяет уточнить задачу факторизации.

В дальнейшем удобно считать, что матрица A в уравнении (3.1) устойчива, т.е. ее спектр расположен в открытом единичном круге D_1 . Если это не так, то введением новых управляющих воздействий $\tilde{u}_t$,

$$\tilde{u}_t = L x_t + u_t,$$

где L — некоторая $m \times n$ -матрица, преобразуем уравнение (3.1) к виду

$$x_{t+1} = \tilde{A}x_t + B\tilde{u}_t, \quad \tilde{A} = A - BL.$$

В силу полной управляемости пары (A, B) можно так выбрать матрицу L (вещественную в вещественном случае), что матрица $\tilde{A}$ будет устойчивой (в действительности достаточно предполагать стабилизируемость пары (A, B) [84]). Обратная связь $u_t = -Lx_t$ в этом случае "стабилизирует" объект управления (3.1). Существуют различные методы построения "стабилизирующего" матричного коэффициента усиления K [23]. Они носят алгебраический характер и потому представляются более простыми, чем "функциональные" методы спектральной факторизации. Функционал (3.2) качества управления по-прежнему имеет вид (3.2), но теперь

$$\begin{aligned} N(x, u) = \tilde{N}(x, \tilde{u}) &= \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -L & I_m \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -L & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^* & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= Q - 2 \operatorname{Re} \{SL\} + L^*RL, \\ \tilde{S} &= S - L^*R. \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к точно такой же линейно-квадратичной задаче, но с устойчивой матрицей $\tilde{A}$. Поэтому в дальнейшем будем писать линейно-квадратичную задачу в исходных обозначениях, но предполагать матрицу A в (3.1) устойчивой.

В силу произвольности вектора $u \in \mathbb{C}^m$ в тождестве (3.6) оно эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= [\lambda K(I_n - \lambda A)^{-1}B - I_m]^\nabla \kappa^* \kappa \\ &\quad [\lambda K(I_n - \lambda A)^{-1}B - I_m], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \left\| \lambda \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ I_m \end{bmatrix}^{-1} B \right\|^\nabla \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \left\| \lambda \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ I_m \end{bmatrix}^{-1} B \right\| = \\ &= (A^{-1}\lambda B)^\nabla Q A^{-1}\lambda B + 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda (A^{-1}\lambda B)^\nabla S \right\} + R \end{aligned} \quad (3.14)$$

(матрица A_λ определяется формулой (3.5)). В условиях теоремы 4.2 матричная функция (3.14) положительна на единичной окружности Γ_1 , а функция

$$U(\lambda) = \kappa \left[\lambda K (I_n - \lambda A)^{-1} B - I_m \right] \quad (3.15)$$

в силу устойчивости матрицы A является аналитической в единичном круге дробно-рациональной матричной функцией. Поэтому тождество (3.13) представляет собой соотношение факторизации спектральной матричной функции $G(\lambda)$. Итак, если заданной спектральной функции $G(\lambda)$ удалось сопоставить линейно-квадратичную задачу (3.1)–(3.3) с устойчивой матрицей A так, что выполнено соотношение (3.14), то соотношение (3.13) определяет спектральную факторизацию этой функции, где K , κ — матрицы из частотного соотношения (3.4). О том, как сопоставить спектральной функции $G(\lambda)$ линейно-квадратичную задачу, достаточно подробно говорилось в предыдущем пункте. Для завершения решения задачи спектральной факторизации положительной (на единичной окружности Γ_1) функции $G(\lambda)$ осталось показать, как находить указанные матрицы K , κ .

Г. Метод построения матриц, определяющих частотное соотношение. Для формулировки метода введем следующие обозначения. Функция $G(\lambda)$, определяемая формулой (3.14), является матричным квазиполином степени n , значениями которого при $\lambda \in \Gamma_1$ являются эрмитовы матрицы. Формулы

$$\varphi(\lambda) = \det \Phi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = G(\lambda) \det (I_n - \lambda A) \det (I_n - \lambda)^\nabla \quad (3.16)$$

в силу (3.14) определяют скалярный возвратный квазиполином степени $2n$

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{-n} \varphi_{-n} + \dots + \lambda^n \varphi_n, \quad \bar{\varphi}_k = \varphi_k, \quad (3.17)$$

и в силу устойчивости матрицы A он не имеет корней на единичной окружности Γ_1 .

Матрицы $H = H^*$, K , κ могут быть найдены следующим образом ([118, теорема 4.1]):

1) Определяется матрица Ψ_0 , вещественная в вещественном случае, из уравнения

$$G(\lambda_0) = \Psi_0^* \Psi_0, \quad (3.18)$$

где λ_0 — произвольное число на единичной окружности (в вещественном случае $\lambda_0 = 1$ или $\lambda_0 = -1$). В качестве Ψ_0 может

быть выбрана, в частности, верхнетреугольная матрица (тогда (3.18) — факторизация Холецкого).

2) Из скалярного уравнения факторизации

$$\varphi(\lambda) = [\psi(\lambda)]^\nabla \psi(\lambda) \quad (3.19)$$

определяется устойчивый полином $\psi(\lambda)$ степени не выше n , вещественный в вещественном случае (т.е. имеющий вещественные коэффициенты).

3) Определим функцию $\Omega(\lambda)$ по формуле

$$\Omega(\lambda) = \varphi(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda). \quad (3.20)$$

Оказывается, $m \times m$ - и $n \times m$ -матричные функции $\lambda^n \Omega(\lambda)$ и $\lambda^n A_\lambda^{-1} B \Omega(\lambda)$ являются полиномами степени не выше $2n$.

4) Определим матричные полиномы $D(\lambda)$, $\Omega_0(\lambda)$ как остатки от деления соответственно полиномов $\lambda^{n+1} A_\lambda^{-1} B \Omega(\lambda)$, $\lambda^n \Omega(\lambda)$ на полином $\psi(\lambda)$,

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \text{ост}(\lambda^{n+1} A_\lambda^{-1} B \Omega(\lambda) \mid \psi(\lambda)), \\ \Omega_0(\lambda) &= \text{ост}(\lambda^n \Omega(\lambda) \mid \psi(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

5) Матрицы K , κ (вещественные в вещественном случае) находятся из соотношений

$$\Omega_0(\lambda) = K D(\lambda), \quad \kappa = \Psi_0 (I_n - \lambda_0 K A_{\lambda_0}^{-1})^{-1}, \quad (3.22)$$

где число λ_0 взято согласно п. 1. После приравнивания коэффициентов в первом уравнении (3.22) при одинаковых степенях λ приходим к системе nm^2 линейных уравнений относительно nm элементов матрицы K . Эта переопределенная система имеет решение, и притом единственное. Отметим, что первое из соотношений (3.22) равносильно требованию, чтобы $m \times m$ -матрица $\lambda^n (I_n - \lambda K A_\lambda^{-1} B) \Omega(\lambda) / \psi(\lambda)$ была полиномом. Матрица κ будет неособой.

6) Матрица $H = H^*$ (вещественная в вещественном случае) определяется (однозначно) из уравнения

$$A^* H A - H - K^* \kappa^* \kappa K = -Q, \quad (3.23)$$

где Q — матрица из (3.3).

В [118] показано, что если факторизацию (3.19) осуществлять обязательно с устойчивым полиномом $\psi(\lambda)$, то полученная в результате несущественно отличающейся от описанной выше процедуры матрица H будет являться симметричным решением уравнения Лурье (и, перебирая всевозможные факторизации квазиполинома $\varphi(\lambda)$, получим все симметричные решения этого уравнения).

Д. Метод Басса. Имеется обширная литература, посвященная исследованию уравнения Лурье (3.12), разработаны аналитические и итерационные методы его решения. Следуя работам [1, 2, 50, 65, 144, 151], остановимся на одном из них — методе Басса.

В методе Басса нахождение нужного (максимального среди симметричных) решения уравнения Лурье сводится к решению линейной алгебраической системы, само сведение использует процедуру факторизации скалярной спектральной функции.

В предположении обратимости матриц A , R введем матрицу

$$Z = \begin{bmatrix} A + BA^{-1}(A^*)^{-1}Q & -BR^{-1}B(A^*)^{-1} \\ -(A^*Q) & (A^*)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

и допустим, что она не имеет собственных значений на единичной окружности Γ_1 . Нетрудно убедиться, что характеристический полином матрицы Z является *спектральной функцией* (т.е. положительной на множестве Γ_1), а потому допускает факторизацию

$$\det(I_{2n}\mu - Z) = \psi(\mu) [\psi(\mu)]^\nabla, \quad (3.25)$$

где полином $\psi(\mu)$ не имеет корней вне единичного круга D_1 . Тогда исконое решение H уравнения Лурье (3.12) удовлетворяет линейной системе уравнений

$$\psi(Z) \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad (3.26)$$

где $\psi(Z)$ — функция матричного аргумента. Уравнением Басса (3.26) можно воспользоваться для нахождения искомого решения уравнения Лурье (3.12). Если матрицу $\psi(Z)$ представить в виде

$$\psi(Z) = \|\psi_1, \psi_2\|, \quad (3.27)$$

где ψ_1, ψ_2 — $n \times 2n$ -матрицы, то уравнение (3.26) принимает вид

$$\psi_1 + \psi_2 H = 0. \quad (3.28)$$

Если матрица $\psi_2^* \psi_2$ неособая, то

$$H = -(\psi_2^* \psi_2)^{-1} \psi_2^* \psi_1. \quad (3.29)$$

Таким образом, нахождение максимального решения H уравнения Лурье (3.12) по методу Басса помимо алгебраических операций использует операцию факторизации скалярной спектральной функции $\det(I_{2n}\mu - Z)$.

Уравнение (3.26) можно преобразовать к более простому виду, если ввести *сигнум-матрицу* $\text{sign } Z$. С этой целью обозначим через P проектор на корневые подпространства матрицы Z , расположенные внутри единичного круга,

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint (\mu I_{2n} - Z)^{-1} d\mu. \quad (3.30)$$

Тогда по определению

$$\text{sign } Z = 2P - I_{2n}. \quad (3.31)$$

Матрица $\text{sign } Z$ имеет те же собственные векторы, что и матрица Z , а собственные числа матрицы $\text{sign } Z$ суть ± 1 . Поэтому в соотношении Басса (3.26) вместо матрицы Z можно использовать матрицу $\text{sign } Z$. Характеристический полином матрицы $\text{sign } Z$ допускает факторизацию

$$\det (I_{2n}\mu - \text{sign } Z) = (\mu + 1)^n (\mu - 1)^n, \quad (3.32)$$

и уравнение (3.26) оказывается равносильным уравнению

$$(I_{2n} + \text{sign } Z)^n \left\| \begin{matrix} I_n \\ H \end{matrix} \right\| = 0, \quad (3.33)$$

а поскольку $(\text{sign } Z)^2 = I_{2n}$, то уравнение (3.33) принимает особенно простой вид

$$(I_{2n} + \text{sign } Z) \left\| \begin{matrix} I_n \\ H \end{matrix} \right\| = 0. \quad (3.34)$$

Если представить матрицу $\text{sign } Z$ в виде

$$\text{sign } Z = \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix} \right\|, \quad (3.35)$$

то решение H алгебраической системы (3.34) будет

$$H = [z_{12}^* z_{12} + (z_{22} + I_n)^* (z_{22} + I_n)]^{-1} \times \\ \times [z_{12}^* (z_{11} + I_n) + (z_{22} + I_n)^* z_{21}]. \quad (3.36)$$

Таким образом, проблема нахождения нужного решения уравнения Лурье по методу Басса свелась к построению сигнум-матрицы $\text{sign } Z$. Исходя из формул (3.31), (3.30), для приближенного вычисления этой матрицы можно воспользоваться итерационной процедурой

$$Z_{k+1} = (1/2) [Z_k + Z_k^{-1}], \quad k = 0, 1, \dots, \quad Z_0 = Z. \quad (3.37)$$

Можно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k = \text{sign } Z,$$

использование в формуле (3.36) вместо матрицы $\text{sign } Z$ ее приближения Z_k позволяет получить соответствующее приближение H_k решения H уравнения Лурье.

4. "Расширенная" линейно-квадратичная задача

В разд. 2, 3 уже обсуждались методы факторизации, основанные на решении ЛКЗ. В данном разделе предлагается другой, на наш взгляд, более простой способ решения ЛКЗ, точнее, нахождение максимального неотрицательного решения Лурье (стационарного уравнения Риккати). Идея обсуждаемого ниже метода решения ЛКЗ состоит в переходе от задачи управления на "полубесконечном" множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел к задаче управления на "бесконечном" множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Если первая задача обычно решается с использованием спектральной факторизации матричных функций, то вторая не требует какой-либо факторизации, и ее решение представляется в виде контурного интеграла от дробно-рациональной матричной функции, полученной перемножением и обращением матричных функций, порождаемых данными задачи управления. В то же время существует простая связь между исходной и "расширенной" ЛКЗ. Это в конечном счете позволяет получить почти "явное" выражение для матричного коэффициента усиления оптимальной обратной связи (калмановского коэффициента), после чего нужное решение уравнения Лурье может быть найдено алгебраическими методами.

Перейдем к краткому описанию метода "расширенной" ЛКЗ, основываясь на работах [88, 97].

А. Исходная и "расширенная" линейно-квадратичные задачи. Будем называть ЛКЗ (3.1)–(3.3) исходной, управление $u = \{u_t, t = 0, 1, \dots\}$ назовем допустимым, если оно обеспечивает выполнение неравенства

$$\sum_{t=0}^{+\infty} (|x_t|^2 + |u_t|^2) < \infty. \quad (4.1)$$

Очевидно, множество допустимых управлений непусто, если пара матриц (A, B) вполне управляемая, что и будет в дальнейшем предполагаться выполненным. В этом случае линейными

заменами можно перейти к новой ЛКЗ, в которой матрица A будет устойчивой (все ее собственные значения расположены в открытом единичном круге D_1). Нам удобно предполагать, что необходимые преобразования уже проделаны и матрица A устойчивая. При устойчивой матрице A управление $u_t \equiv 0$ допустимое (в действительности, для решения ЛКЗ предлагаемым ниже методом достаточно предполагать, что матрица A не имеет собственных значений на единичной окружности Γ_1 , устойчивость матрицы A требуется для использования полученного решения при факторизации соответствующей спектральной функции — см. разд. 3). Исходную ЛКЗ можно рассматривать как задачу нахождения пары $x = \{x_t, t = 0, 1, \dots\}$, $u = \{u_t, t = 0, 1, \dots\}$ временных рядов, связанных линейными соотношениями (3.1) (начальное состояние $x_0 = a$ фиксировано) и минимизирующих функционал (3.2).

Наряду с задачей (3.1)–(3.3) рассмотрим "расширенную" задачу

$$\tilde{x}_{t+1} = A\tilde{x}_t + B\tilde{u}_t, \quad \tilde{x}_0 = a, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{J}(\tilde{u}, \tilde{x}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} N(\tilde{x}_t, \tilde{u}_t) \rightarrow \min, \quad (4.3)$$

где квадратичная форма $N(x, u)$ определяется формулой (3.3), матрицы A, B те же, что и в задаче (3.1)–(3.3), а минимум в (4.3) берется по множеству пар последовательностей $(\tilde{u}, \tilde{x})$, связанных линейными соотношениями (4.2) и удовлетворяющих условию

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} (|\tilde{u}_t|^2 + |\tilde{x}_t|^2) < \infty \quad (4.4)$$

(предполагается, что задача разрешима). Подчеркнем, что значение состояния $\tilde{x}_0$ в задаче (4.2), (4.3) фиксировано и совпадает с начальным значением a в задаче (3.1), (3.2).

Нетрудно убедиться, что в силу полной управляемости пары (A, B) множество допустимых управлений в "расширенной" ЛКЗ непусто. Основным моментом обсуждаемого подхода к ЛКЗ является следующее достаточно очевидное утверждение.

Лемма 4.1. Пусть

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_t^{\text{opt}} \\ \tilde{u}_t^{\text{opt}} \end{bmatrix}, t \in \mathbf{Z} \right\} \quad (4.5)$$

— оптимальное решение "расширенной" ЛКЗ (4.2), (4.3). Тогда пара

$$\begin{bmatrix} x^{\text{opt}} \\ u^{\text{opt}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_t^{\text{opt}} \\ \tilde{u}_t^{\text{opt}} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{N} \right\} \quad (4.6)$$

является оптимальным решением исходной ЛКЗ (3.1)–(3.3).

Доказательство леммы основано на стандартной форме уравнения объекта управления и совпадении вектора $\tilde{x}_0$ с начальным значением a в исходной задаче. Формальные выкладки приведены в Приложении.

Таким образом, сепарация оптимального решения в "расширенной" ЛКЗ приводит к оптимальному решению исходной ЛКЗ.

Б. Решение "расширенной" ЛКЗ. Задача (4.2), (4.3) решается достаточно просто с использованием дискретного преобразования Фурье. Введем вектор-функцию

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(\lambda) \\ \tilde{u}(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \lambda^t \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Тогда ЛКЗ (4.2), (4.3) преобразуется в линейно-квадратичную задачу

$$(I_n - \lambda A) \tilde{x}(\lambda) = \lambda B \tilde{u}(\lambda), \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{x}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = a, \quad (4.9)$$

$$\tilde{J}(\tilde{u}, \tilde{x}) = \frac{1}{2\pi i} \oint N(\tilde{x}(\lambda), \tilde{u}(\lambda)) \frac{d\lambda}{\lambda} \rightarrow \min, \quad (4.10)$$

где минимум берется по множеству пар $\tilde{x}(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot)$ вектор-функций, связанных соотношениями (4.8), (4.9) и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi i} \oint (|\tilde{x}_t(\lambda)|^2 + |\tilde{u}_t(\lambda)|^2) \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty. \quad (4.11)$$

Исключая вектор-функцию $\tilde{x}(\lambda)$ в силу уравнения (4.8), приходим к более простой ЛКЗ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint L(\lambda) \tilde{u}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \dot{a}, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint |\tilde{u}(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint [\tilde{u}(\lambda)]^\top G(\lambda) \tilde{u}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \rightarrow \min, \quad (4.14)$$

где

$$G(\lambda) = \left\| \begin{array}{c} \lambda(I_n - \lambda A)^{-1} B \\ I_m \end{array} \right\|^\nabla \left\| \begin{array}{cc} Q & S \\ S^* & R \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \lambda(I_n - \lambda A)^{-1} B \\ I_m \end{array} \right\|, \quad (4.15)$$

$$L(\lambda) = \lambda(I_n - \lambda A)^{-1} B.$$

Можно убедиться, что для разрешимости ЛКЗ (4.12)–(4.14) матричная функция (4.15) должна быть спектральной, т.е. положительной на единичной окружности Γ_1 ,

$$G(\lambda) > 0, \quad \lambda \in \Gamma_1. \quad (4.16)$$

Предполагая частотное условие (4.16) выполненным, а пару (A, B) вполне управляемой, нетрудно убедиться в невырожденности матрицы

$$R = -\frac{1}{2\pi i} \oint L(\lambda) G^{-1}(\lambda) [L(\lambda)]^\nabla \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (4.17)$$

Тогда

$$u^{opt}(\lambda) = -G^{-1}(\lambda) L(\lambda) R^{-1} a \quad (4.18)$$

— оптимальное решение задачи (4.12)–(4.14). В частности, если

$$u_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{u}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (4.19)$$

то из (4.18) следует

$$u_0 = K x_0, \quad (4.20)$$

где

$$K = -\frac{1}{2\pi i} \oint G^{-1}(\lambda) L(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} R^{-1}. \quad (4.21)$$

Можно показать, что в силу леммы 4.1 и стационарности ЛКЗ (3.1)–(3.3) оптимальная обратная связь в ЛКЗ (3.1)–(3.3) имеет вид

$$u_t = K x_t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

где $m \times n$ -матрица K , определяемая формулами (4.21), (4.17), (4.15), и является калмановским коэффициентом.

В. Нахождение максимального решения уравнения Лурье при известном калмановском коэффициенте. При известной матрице K решение $H \geq 0$ уравнения Лурье (3.12) находится из решения линейного уравнения (см. (3.11))

$$H = A^* H A - K^* (B^* H B + R) K + Q, \quad (4.23)$$

после чего матрица κ определяется как результат факторизации матрицы $B^*HB + R$, например $\kappa = (B^*HB + R)^{1/2}$ (можно использовать и другие факторизации матрицы $B^*HB + R$, скажем, факторизацию Холецкого). После определения матриц K , κ факторизация спектральной функции (3.14) реализуется с помощью матричной функции (3.15), которая аналитична в единичном круге D_1 в силу сделанного предположения об устойчивости матрицы A .]

5. Сведение задачи факторизации положительного квазиполинома к решению линейной системы

Изложим еще один метод факторизации квазиполинома

$$N(\lambda) = \sum_{k=-L}^L \lambda^k N_k \quad (5.1)$$

с операторными коэффициентами $N_k: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$. Предполагается, что квазиполином (5.1) положителен на единичной окружности Γ_1 , т.е. для любого ненулевого вектора $\varphi \in \mathbf{R}^l$ и любого комплексного числа $\lambda \in \Gamma_1$ скалярная величина $\varphi^* N(\lambda) \varphi = \langle \varphi, N(\lambda) \varphi \rangle$ положительна ($\langle \varphi, \psi \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^l$ элементов φ, ψ).

Для построения операторного полинома $U(\lambda)$ из соотношения факторизации (2.5) (при $G(\cdot) = N(\cdot)$) ниже используется идея восстановления коэффициентов авторегрессионного уравнения по спектральной плотности стационарного процесса, описываемого этим уравнением.

А. Временной ряд, описываемый авторегрессионным уравнением, и его спектральная плотность. Предположим, что стационарный случайный временной ряд $y = \{y_t, t \in \mathbf{Z}, y_t \in \mathbf{R}^l\}$ определяется разностным уравнением

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_L y_{t-L} = e_t, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (5.2)$$

где $a_l: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$ — линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^l$, $e_t = \{e_t, t \in \mathbf{Z}\}$ — случайный временной ряд со свойствами

$$M e_t = 0, \quad M e_t e_{t'}^* = N \delta_{tt'}, \quad (5.3)$$

где M — символ математического ожидания; N — положительный оператор в $\mathbf{R}^l$; $\delta_{tt'}$ — символ Кронекера. Процесс e с описанными свойствами называется дискретным (l -векторным) белым

шумом, оператор N характеризует его интенсивность. Будем предполагать, что разностное уравнение (5.2) *устойчиво*, т. е. полином

$$\det a(\lambda), \quad a(\lambda) = I_l + \lambda a_1 + \dots + \lambda^L a_L, \quad (5.4)$$

не имеет корней в замкнутом единичном круге. Другими словами, обращение $a^{-1}(\lambda)$ полинома $a(\lambda)$ допускает разложение в ряд Тейлора

$$a^{-1}(\lambda) = \sum_{l=0}^{+\infty} \lambda^l \tilde{a}_l, \quad (5.5)$$

который сходится в операторной топологии в замкнутом единичном круге (т. е. $a^{-1}(\lambda)$ — аналитическая операторная функция в некоторой окрестности единичного круга).

Хорошо известно, что для устойчивого авторегрессионного уравнения (5.2) существует единственный удовлетворяющий ему стационарный временной ряд и этот ряд определяется формулой

$$y_t = \sum_{l=0}^{+\infty} \tilde{a}_l e_{t-l}, \quad (5.6)$$

где $\tilde{a}_l$ — коэффициенты разложения (5.5). Пусть

$$R_y[t - t'] = M y_t y_{t'}^*, \quad (5.7)$$

— корреляция (ковариация) стационарного временного ряда y . Тогда формула

$$G_y(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t R_y[t] \quad (5.8)$$

определяет (операторную) спектральную плотность стационарного временного ряда y . Из соотношений (5.2), (5.3) очевидным образом выводится формула

$$G_y(\lambda) = a^{-1}(\lambda) N [a^\nabla(\lambda)]^{-1}, \quad (5.9)$$

где

$$a^\nabla(\lambda) = I_l + \lambda^{-1} a_1^* + \dots + \lambda^{-L} a_L^*. \quad (5.10)$$

Формула (5.9) показывает, что функция $G_y^{-1}(\lambda)$ является квазиполиномом и операторный полином $N^{-1/2} a(\lambda)$ осуществляет спектральную факторизацию квазиполинома $G_y^{-1}(\lambda)$:

$$G_y^{-1}(\lambda) = N^{-1/2} a(\lambda) \left[N^{-1/2} a(\lambda) \right]^\nabla. \quad (5.11)$$

Таким образом, если по спектральной плотности (5.8) (или, что то же самое, по корреляции $R_y[\cdot]$) удастся найти полином $a(\lambda)$ и оператор N , то тем самым реализуется спектральная факторизация операторного квазиполинома $G_y^{-1}(\lambda)$. Восстановление коэффициентов авторегрессионного уравнения (5.2) (полинома $a(\lambda)$) по известной корреляции $R_y[\cdot]$ стационарного временного ряда y , определяемого этим уравнением — задача хорошо известная, и ее решение сводится к решению некоторой алгебраической системы линейных уравнений.

Действительно, из формул (5.6), (5.3) следует, что $Me_i y_{i-k}^* = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а потому из соотношения (5.2) получаем уравнение

$$R_y[k] + a_1 R_y[k-1] + \dots + a_L R_y[k-L] = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.12)$$

связывающее значения корреляций временного ряда y . Полагая $k = 1, 2, \dots, L$ в (5.12), получаем систему линейных уравнений

$$R_y^{(L)} a^* = r^*, \quad (5.13)$$

где обозначено

$$R_y^{(L)} = \begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[1] & \dots & R_y[L-1] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[L-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[L-1] & R_y[L-2] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$a = \|a^1, \dots, a^L\|, \quad r = \|R_y[1], R_y[2], \dots, R_y[L]\|.$$

При известных корреляциях $R_y[0], R_y[1], \dots, R_y[L]$ уравнение (5.13) можно рассматривать как систему для определения оператора a , т. е. набора коэффициентов операторного полинома $a(\lambda)$ (см. (5.4), (5.14)). Нетрудно убедиться, что оператор $R_y^{(L)}: \mathbb{R}^{iL} \rightarrow \mathbb{R}^{iL}$ в силу положительности оператора N (см. (5.3)) положительный, а потому система (5.13) однозначно разрешима. Если операторный полином $a(\lambda)$ найден, то оператор N ищется по формуле (см. (5.9))

$$N = a(\lambda_0) G_y(\lambda_0) a^\nabla(\lambda_0),$$

где λ_0 — произвольное комплексное число, $\lambda_0 \in \Gamma_1$. Из соотношения (5.2) несложно получить формулу для оператора N

$$N = \sum_{k=0}^L \sum_{k'=0}^L a_k R_y[k' - k] a_{k'}^*, \quad a_0 = I_l. \quad (5.15)$$

Обратно, если заданы корреляции $R_y[0], R_y[1], \dots, R_y[L]$ и составленный из них оператор (5.14) положительно определен, то система (5.13) однозначно определяет набор $a_1, \dots, a_L$ операторов, при этом несложно убедиться, что построенная по ним операторная функция $a^{-1}(\lambda)$ (см. (5.4)) является аналитической в единичном круге ($\det a(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| \leq 1$, напомним, что $\det$ означает произведение собственных значений соответствующего положительного оператора).

Б. "Алгебраический" метод факторизации положительного квазиполинома. Изложенные в предыдущем пункте соображения приводят к следующему алгоритму факторизации операторного квазиполинома (5.1), положительного на единичной окружности.

Пусть известны коэффициенты $\{\tilde{N}_k, k = 0, 1, \dots, L\}$ разложения операторной функции $N^{-1}(\lambda)$ в ряд Фурье

$$N^{-1}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \tilde{N}_k. \quad (5.16)$$

(Поскольку $N^{-1}(\lambda)$ — дробно-рациональная операторная функция, ряд в (5.16) сходится в некоторой окрестности единичной окружности Γ_1 , т.е. является рядом Лорана функции $N^{-1}(\lambda)$.) В силу положительности функции $N^{-1}(\lambda)$ операторы $\tilde{N}_k$ удовлетворяют условию симметричности ($\tilde{N}_k^* = \tilde{N}_{-k}$). По операторам $\{\tilde{N}_k, k = 0, 1, \dots, L\}$ найдем операторы $a_1, \dots, a_L$ из линейной системы

$$\begin{vmatrix} \tilde{N}_0 & \tilde{N}_1 & \dots & \tilde{N}_{L-1} \\ \tilde{N}_1^* & \tilde{N}_0 & \dots & \tilde{N}_{L-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{N}_{L-1}^* & \tilde{N}_{L-2}^* & \dots & \tilde{N}_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_L^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{N}_1^* \\ \tilde{N}_2^* \\ \vdots \\ \tilde{N}_L^* \end{vmatrix}. \quad (5.17)$$

Блочный оператор коэффициентов этой системы, как нетрудно убедиться, является положительным оператором в пространстве $\mathbf{R}^{1L} = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \dots \times \mathbf{R}^1$ в силу положительности операторной функции $N^{-1}(\lambda)$, поэтому система (5.17) однозначно определяет операторы $a_1, \dots, a_L$. Нетрудно убедиться, что операторный полином $a(\lambda) = I_l + \lambda a_1 + \dots + \lambda^L a_L$ обратим в множестве $|\lambda| \leq 1$ и операторная функция $a^{-1}(\lambda)$ является аналитической в единичном круге (т.е. допускает разложение в степенной ряд — ряд Тейлора, сходящийся равномерно в операторной топологии в единичном круге; в действительности, в силу дробной

рациональности функции $a^{-1}(\lambda)$ ряд Тейлора сходится в некоторой окрестности единичного круга) — соответствующие аргументы аналогичны тем, что использовались в предыдущем пункте. Определим оператор D по формуле

$$D = \sum_{k=0}^L \sum_{k'=0}^L a_k \tilde{N}_{k'-k} a_{k'}^*, \quad a_0 = I_l. \quad (5.18)$$

Тогда для операторной функции $N(\lambda)$ справедлива спектральная факторизация

$$N^{-1}(\lambda) = U(\lambda) [U(\lambda)]^\nabla, \quad U(\lambda) = a^{-1}(\lambda) D^{1/2}. \quad (5.19)$$

Разумеется, факторизация (5.19) эквивалентна факторизации

$$N(\lambda) = [\tilde{a}(\lambda)]^\nabla \tilde{a}(\lambda), \quad \tilde{a}(\lambda) = D^{-1/2} a(\lambda). \quad (5.20)$$

В. Определение коэффициентов "обращенного" квазиполинома. Нахождение решения линейной системы (5.17) алгебраических уравнений — задача достаточно рутинная, если иметь в виду использование современных ЭВМ с развитым математическим обеспечением. В предложенном методе факторизации осталось уточнить, как вычислять первые L коэффициентов разложения (5.16) по заданным коэффициентам N_k квазиполинома $N(\lambda)$ (см. (5.1)). Делать это можно по-разному, укажем лишь на один из возможных способов нахождения операторов $\tilde{N}_k$.

Пусть

$$n(\lambda) = \det N(\lambda) \quad (5.21)$$

— скалярный квазиполином, определяемый при каждом $\lambda \in \Gamma_1$ как произведение собственных значений положительного "конечномерного" оператора $N(\lambda)$. Тогда операторная функция

$$\tilde{N}(\lambda) = N^{-1}(\lambda) n(\lambda) \quad (5.22)$$

является квазиполиномом,

$$\tilde{N}(\lambda) = \sum_{k=-L}^L \lambda^k \tilde{N}_k, \quad (5.23)$$

и определение ее операторных коэффициентов $\tilde{N}_k$ по функциям $N(\cdot)$, $n(\cdot)$ каких-либо принципиальных трудностей не представляет. Таким образом,

$$N^{-1}(\lambda) = \tilde{N}(\lambda) / n(\lambda) \quad (5.24)$$

и для определения коэффициентов $\tilde{N}_k$ разложения

$$N^{-1}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \tilde{N}_k \quad (5.25)$$

достаточно найти скалярные коэффициенты $\tilde{n}_k$ разложения

$$n^{-1}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \tilde{n}_k. \quad (5.26)$$

Если коэффициенты $\tilde{n}_k$ найдены, то из формул (5.23)–(5.26) следует

$$\tilde{N}_k = \sum_{k'=-L}^L \tilde{N}_k n_{k-k'}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.27)$$

Непосредственный способ определения коэффициентов $\tilde{n}_k$ по формуле

$$\tilde{n}_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^{-k} n^{-1}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.28)$$

может быть осуществлен, если известны корни скалярного квазиполинома $n(\lambda)$, расположенные в единичном круге; в этом случае можно воспользоваться теоремой о вычетах. Впрочем, формула (5.28) позволяет приближенно находить коэффициенты $\tilde{n}_k$, если контурный интеграл в (5.28) вычислять с помощью подходящих квадратурных формул.

Пусть M — некоторое натуральное число и

$$\lambda_m = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{M} m \right\}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (5.29)$$

Предполагая значения функции $n^{-1}(\lambda)$ известными в точках λ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, можно рассмотреть задачу аппроксимации

$$\sum_{m=1}^M \left| n^{-1}(\lambda_m) - \sum_{k=-L}^L \lambda_m^k \tilde{n}_m^{(M)} \right|^2 \rightarrow \min_{\tilde{n}_m^{(M)}}. \quad (5.30)$$

Коэффициенты $\tilde{n}_m^{(M)}$ в задаче аппроксимации (5.30) находятся как решения системы нормальных уравнений Эйлера, соответствующей задаче (5.30). Несложно убедиться, что при любом $k = 0, \pm 1, \dots, \pm L$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{n}_k^{(M)} = \tilde{n}_k,$$

которое позволяет вычислять коэффициенты $\tilde{n}_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$, разложения (5.26) сколь угодно точно.

6. Иллюстрация методов спектральной факторизации

Покажем, как "работают" описанные в предыдущих разделах методы факторизации на примере матричной функции

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2\lambda^{-1} + 6 + 2\lambda & -2 + \lambda \\ \lambda^{-1} - 2 & -2\lambda^{-1} + 5 - 2\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \lambda^{-1} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \lambda. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Несложно убедиться в положительности на единичной окружности Γ_1 матричной функции $G(\lambda)$. Требуется ее факторизовать, т. е. представить в виде (1.13) с матричной функцией $U(\lambda)$, элементы которой аналитические в единичном круге D_1 . Покажем, как это можно сделать с помощью методов, описанных в предыдущих разделах.

А. Факторизация с помощью метода, основанного на частотной теореме (см. п. 3В). В данном случае (см. (2.19))

$$\begin{aligned} n &= 2, \\ A &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ C &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{vmatrix}, \\ \varphi(\lambda) &= \det G(\lambda) = -4\lambda^{-2} + 17 - 4\lambda^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

1) Выберем $\lambda_0 = -1$, тогда

$$G(-1) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в результате факторизации числовой матрицы $G(-1)$ получаем нижнетреугольную числовую матрицу

$$\Psi_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

2) Факторизуем скалярный полином $\varphi(\lambda) = \det G(\lambda)$: $\varphi(\lambda) = (\lambda^{-2} - 4)(\lambda^2 - 4)$, откуда получаем $\psi(\lambda) = \lambda^2 - 4$.

3) Вычисляем матричные функции $\Omega(\lambda)$, $\lambda^{n+1}A_\lambda^{-1}B\Omega(\lambda)$, $\lambda^n\Omega(\lambda)$ (см. (3.20)) при $n = 2$:

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2\lambda^{-1} + 5 - 2\lambda & 2 - \lambda \\ -\lambda^{-1} + 2 & 2\lambda - 1 + 6 + 2\lambda \end{vmatrix}, \\ \lambda^2\Omega(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda & 2\lambda^2 - \lambda^3 \\ -\lambda + 2\lambda^2 & 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda \end{vmatrix}, \\ \lambda^3A_\lambda^{-1}B\Omega(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2\lambda^4 + 5\lambda^3 - 2\lambda^2 & 2\lambda^3 - \lambda^4 \\ -\lambda^2 + 2\lambda^3 & 2\lambda^4 + 6\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

4) Формулы (3.21) принимают вид

$$\begin{aligned}D(\lambda) &= \text{ост}(\lambda^3A_\lambda^{-1}B\Omega(\lambda)|\psi(\lambda)) = \begin{vmatrix} 20\lambda - 40 & 8\lambda - 16 \\ 8\lambda - 4 & 24\lambda + 40 \end{vmatrix}, \\ \Omega_0(\lambda) &= \text{ост}(\lambda^2\Omega(\lambda)|\psi(\lambda)) = \begin{vmatrix} -10\lambda + 20 & -4\lambda + 8 \\ -\lambda + 8 & 10\lambda + 24 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

5) Найдем элементы матрицы $K = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ из соотношений (3.22), которые в данном случае принимают вид

$$\begin{vmatrix} -10\lambda + 20 & -4\lambda + 8 \\ -\lambda + 8 & 10\lambda + 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20\lambda - 40 & 8\lambda - 16 \\ 8\lambda - 4 & 24\lambda + 40 \end{vmatrix}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получаем систему из восьми уравнений для определения четырех элементов матрицы K . Эта система имеет единственное решение $a = -1/2$, $b = 0$, $c = -1/4$, $d = 1/2$, т.е.

$$K = \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{vmatrix}$$

и

$$\kappa = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{vmatrix} \right] - 1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 - 2 & \end{vmatrix}.$$

Тогда с помощью (3.15) окончательно получаем требуемое представление спектральной функции $G(\lambda)$ в виде

$$G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^{-1} + 2 & I \\ 0 & \lambda^{-1} - 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ I & \lambda - 2 \end{vmatrix}. \quad (6.3)$$

Б. Факторизация, основанная на решении "расширенной" ЛКЗ (см. разд. 2-4).

1) По формулам (2.19) находим матрицы A, B, C, D .

2) Следует найти матрицу H — максимальное решение уравнения Лурье (2.7) (с этой целью можно воспользоваться рекуррентной процедурой (2.15)).

3) Находим матрицу T как результат факторизации числовой матрицы $B^*HB + D + D^* = TT^*$ (в качестве T может быть выбрана, например, нижнетреугольная матрица либо неотрицательный квадратный корень матрицы $B^*HB + D + D^*$).

4) Матричная функция $U(\lambda)$ из (2.5) находится по формуле

$$U(\lambda) = T \left[I_2 + \lambda (B^*HB + D + D^*)^{-1} (A^*HB + C)^* (I_2 - \lambda A)^{-1} B \right].$$

Нахождение калмановского коэффициента K в "явном" виде с помощью предложенного в разд. 4 решения "расширенной" ЛКЗ позволяет избежать использования итерационного метода. В этом случае описанный выше метод факторизации видоизменяется следующим образом.

2') Вычисляется матрица K с помощью формул (4.21), (4.17), (4.15).

3') Из уравнения Ляпунова

$$H = A^*HA - K^* (B^*HB + D + D^*) K \quad (6.4)$$

определяется матрица H .

4') Матричная функция $U(\lambda)$, факторизующая спектральную функцию $G(\lambda)$ (см. (1.13)), определяется по формуле

$$U(\lambda) = T \left[I_2 - \lambda K (I_2 - \lambda A)^{-1} B \right], \quad (6.5)$$

где матрица T определяется так же, как и в п. 3).

Для примера вновь рассмотрим матрицу $G(\lambda)$ (см. (6.1)). Из (4.15) следует

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} G^{-1}(\lambda) &= \frac{1}{\det G(\lambda)} \begin{bmatrix} -2\lambda^{-1} + 5 - 2\lambda & 2 - \lambda \\ -\lambda^{-1} + 2 & 2\lambda^{-1} + 6 + 2\lambda \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda \det G(\lambda)} \begin{bmatrix} -2\lambda^2 + 5\lambda - 2 & 2\lambda - \lambda^2 \\ -1 + 2\lambda & 2\lambda^2 + 6\lambda + 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\det G(\lambda) = -4\lambda^{-2} + 17 - 4\lambda^2 = -4\lambda^{-2}(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1/4).$$

Тогда по формуле (4.17) находим матрицу

$$R = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\left\| \begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix} \right\| \Phi(\lambda) \left\| \begin{smallmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix} \right\|}{-4\lambda^2(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1/4)} \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{15} \left\| \begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix} \right\|,$$

где для краткости использовано обозначение

$$\Phi(\lambda) = \left\| \begin{smallmatrix} -2\lambda^2 + 5\lambda - 2 & 2\lambda - \lambda^2 \\ -1 + 2\lambda & 2\lambda^2 + 6\lambda + 2 \end{smallmatrix} \right\|.$$

Таким образом,

$$R^{-1} = -\frac{15}{26} \left\| \begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix} \right\|.$$

Используя теорему о вычетах, из (4.21) будем тогда иметь

$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Phi(\lambda) \left\| \begin{smallmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix} \right\|}{-4\lambda^2(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1/4)} \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= \left(-\frac{15}{26} \right) \left\| \begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{smallmatrix} \right\|.$$

5) Приравняв левую и правую части матричного уравнения (6.4), получим систему линейных уравнений относительно элементов симметричной квадратной матрицы

$$H = \left\| \begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix} \right\|;$$

$$\left\| \begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{smallmatrix} \right\| \left\| \begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix} \right\| +$$

$$+ \left\| \begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix} \right\| \left\| \begin{smallmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{smallmatrix} \right\|,$$

т. е. находим

$$H = \left\| \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right\|.$$

6) Итак, для матриц (6.2) имеем

$$B^*HB + D + D^* = \left\| \begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix} \right\| \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix} \right\|$$

(выбрана одна из возможных факторизаций), следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} U(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{vmatrix} \right] = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

откуда вновь приходим к формуле (6.3).

Замечание. При использовании итерационного метода решения уравнения Лурье (2.7) получается последовательность матриц

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ H_1 &\cong \begin{vmatrix} -0,77 & -0,08 \\ -0,08 & -0,85 \end{vmatrix}, & H_2 &\cong \begin{vmatrix} -0,90 & 0,00 \\ 0,00 & -0,96 \end{vmatrix}, \\ H_3 &\cong \begin{vmatrix} -0,97 & 0,00 \\ 0,00 & -0,99 \end{vmatrix}, & H_4 &\cong \begin{vmatrix} -0,99 & 0,00 \\ 0,00 & -0,99 \end{vmatrix}, \dots \end{aligned}$$

сходящаяся к найденному ранее точному решению уравнения Лурье.

В. Алгоритм факторизации матричного квазиполинома (см. разд. 5). Напомним алгоритм факторизации квазиполинома (5.1), положительного на единичной окружности Γ_1 .

1) Находятся коэффициенты $\tilde{N}_k$ разложения в ряд Лорана функции $N^{-1}(\lambda)$ (см. (5.16)). Процесс вычисления этих коэффициентов описан в п. 5В.

2) Определяются коэффициенты матричного полинома $a(\lambda)$ из линейной системы (5.17).

3) Находится нормирующая матрица D по формуле (5.18).

4) Находится матрица $\tilde{D}$ как результат факторизации числовой матрицы $D^{-1} = \tilde{D}^* \tilde{D}$ (в качестве $\tilde{D}$ можно взять неотрицательный квадратный корень матрицы D либо нижнетреугольную матрицу из факторизации Холецкого матрицы D).

5) По формулам (5.20) находим матричный полином $\tilde{a}(\lambda)$ и требуемую факторизацию матричного квазиполинома $N(\lambda)$.

Обратимся вновь к примеру (6.1), полагая $G(\lambda) = N(\lambda)$. Согласно п. 5В вычислим коэффициенты

$$\tilde{N}_0 = \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad \tilde{N}_1 = \frac{1}{60} \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим систему (5.17). Из уравнения $a_1 \tilde{N}_0 = -\tilde{N}_1$ найдем коэффициент

$$a_1 = -\tilde{N}_1 \tilde{N}_0^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$a(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2\lambda + 1 & 0 \\ 1/4\lambda + 1 & -1/2\lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицу D :

$$D = \tilde{N}_0 + a_1 \tilde{N}_{-1} + \tilde{N}_1 a_1^* + a_1 \tilde{N}_0 a_1^* = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},$$

отсюда

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\lambda) &= \tilde{D}a(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2\lambda + 1 & 0 \\ 1/4\lambda & -1/2\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая факторизация имеет вид (6.3).

7. Факторизация скалярных функций, положительных на единичной окружности

Проблема факторизации скалярных функций изучена весьма подробно. В случае дробно-рациональной функции задача в теоретическом плане тривиальна и описание различных факторизаций может быть дано в терминах нулей и полюсов факторизуемой функции. Разумеется, методы факторизации дробно-рациональных функций могут значительно различаться с точки зрения их вычислительной сложности, устойчивости к погрешностям вычислений и т. д.

В данном разделе обсуждаются некоторые возможные методы факторизации скалярных функций, не обязательно являющиеся дробно-рациональными.

А. Факторизация спектральной плотности, имеющей кепстр. Проблема факторизации положительной на единичной окружности функции решается существенно проще в случае, если ее логарифм раскладывается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. В этом случае проблема спектральной факторизации сводится к более простой проблеме сепарации (аддитивной факторизации). Идея о сведении задачи факторизации к задаче сепарации связана со многими выдающимися именами (Н. Винер, Дж. Дуб, П. Леви и др.), известны различные ее уточнения и обобщения. В основе такого подхода к задаче факторизации лежит классическая теорема Винера — Леви, вариант которой сформулируем в следующем виде.

Теорема Винера — Леви. Пусть скалярная функция $G(\lambda)$ непрерывна и положительна на множестве $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$. Тогда функция $\ln G(\lambda)$ допускает разложение в абсолютно-сходящийся на множестве Γ_1 ряд Фурье:

$$\ln G(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t g_t, \quad \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |g_t| < \infty. \quad (7.1)$$

В задачах оптимальной фильтрации роль функции $G(\cdot)$ играет спектральная плотность наблюдаемого (регистрируемого) стационарного временного ряда. Последовательность $\{g_t\}$ коэффициентов Фурье функции $\ln G(\lambda)$, удовлетворяющая условию (7.1), называется **кепстром** спектральной плотности $G(\lambda)$. Таким образом, теорема Винера — Леви утверждает, что если спектральная плотность положительна и непрерывна на единичной окружности Γ_1 , то она имеет кепстр. Мы и дальше будем иногда говорить о спектральной функции некоторого временного ряда, имея в виду положительную на единичном круге функцию (всякая такая функция является спектральной плотностью некоторого стационарного временного ряда). В условиях теоремы Винера — Леви формула

$$\pi(\lambda) = \sum_{t=1}^{+\infty} \lambda^t g_t + 1/(2g_0) \quad (7.2)$$

определяет на множестве Γ_1 непрерывную функцию $\pi(\lambda)$, допускающую аналитическое продолжение внутрь единичного круга $\bar{D}_1$, причем в силу вещественности функции $\ln G(\lambda)$ справедливо равенство $\ln G(\lambda) = \pi(\lambda) + \overline{\pi(\lambda)}$. Следовательно, формула

$U(\lambda) = \exp\{\pi(\lambda)\}$ определяет на множестве Γ_1 функцию, допускающую аналитическое продолжение в единичный круг $\bar{D}_1$, и эта функция факторизует функцию $G(\lambda)$. Приведенными рассуждениями намечено доказательство следующего утверждения, восходящего к Н. Винеру и Дж. Дубу.

Теорема 4.4. *Предположим, что скалярный временной ряд $y = \{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ имеет спектральную плотность $G(\lambda)$, которая непрерывна и положительна на множестве $\Gamma_1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$. Тогда для функции $G(\lambda)$ справедлива факторизация*

$$G(\lambda) = U(\lambda)U^*(\lambda), \quad (7.3)$$

где $U(\lambda) = \exp \pi(\lambda)$ — функция, не обращающаяся в ноль на множестве $\bar{D}_1 = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ и удовлетворяющая условию

$$U(\lambda) = \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} \lambda^t \pi_t, \quad \operatorname{esssup}_{\lambda \in \Gamma_1} |U(\lambda)| < \infty. \quad (7.4)$$

Б. Использование преобразования Гильберта для факторизации спектральной плотности. Приведенная в предыдущем пункте процедура факторизации спектральной плотности может оказаться неэффективной с вычислительной точки зрения, если ряд Фурье функции $\ln G(\lambda)$ (см. (7.1)) сходится достаточно медленно — в этом случае для приемлемой точности факторизации пришлось бы оперировать с чрезмерно большим числом коэффициентов Фурье g_t . Поэтому естественно пытаться осуществить требуемую факторизацию, избегая вычисления коэффициентов Фурье функции $\ln G(\lambda)$. Такая возможность может быть реализована, например, следующим образом.

Если спектральная плотность $G(\lambda)$ положительна на единичной окружности Γ_1 , то вещественную на Γ_1 функцию $\varphi(\lambda) = (1/2) \ln G(\lambda) = \ln [G(\lambda)]^{1/2}$, $\lambda \in \Gamma_1$, будем рассматривать как вещественную часть некоторой функции $\pi(\lambda)$, допускающей аналитическое продолжение в единичный круг D_1 . Тогда мнимая часть $\psi(\lambda)$ этой функции определяется по $\varphi(\lambda)$, как известно, с помощью (дискретного) преобразования Гильберта (отвечающего единичному кругу $D_1 = \{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$). В данном случае соответствие между функциями $\varphi(\lambda) = \operatorname{Re} \pi(\lambda)$ и $\psi(\lambda) = \operatorname{Im} \pi(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma_1$, получается особенно просто, если устанавливать его в терминах коэффициентов Фурье этих функций. Именно, пусть

для простоты принято $\pi(0) = 0$ и разложение в ряд Фурье функции $\varphi(\cdot)$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t \varphi_t. \quad (7.5)$$

Тогда

$$\psi(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t \psi_t, \quad (7.6)$$

где

$$\psi_t = -i\varphi_t \operatorname{sign} t, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (7.7)$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad \operatorname{sign} t = \begin{cases} +1 & \text{при } t \geq 0, \\ -1 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Здесь учтено, что в силу вещественности на множестве Γ_1 функций $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ для их коэффициентов Фурье выполнены соотношения: $\bar{\varphi}_{-t} = \varphi_t$, $\bar{\psi}_{-t} = \psi_t$, $t \in \mathbf{Z}$. Соотношения (7.7) и определяют (дискретное) преобразование Гильберта [64, 94], связывающее функции $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$. Введем функцию

$$h(\lambda) = -i \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t \operatorname{sign} t. \quad (7.9)$$

Выражение в правой части формулы (7.9) понимается как (дискретное) обобщенное преобразование Фурье последовательности $\{-i \operatorname{sign} t, t \in \mathbf{Z}\}$. Другими словами, функция $h(\lambda)$ понимается как сумма предельных значений функций

$$h_1(\lambda) = -i \sum_{t=0}^{+\infty} \lambda^t, \quad h_2(\lambda) = -i \sum_{t=-\infty}^{-1} \lambda^t, \quad (7.10)$$

определенных соответственно внутри и вне единичного круга $\mathbf{D}_1$. Полагая $\lambda \in \mathbf{D}_1$ и $\lambda \notin \mathbf{D}_1$, соответственно получим

$$h_1(\lambda) = -i(1 - \lambda)^{-1}, \quad h_2(\lambda) = -i(1 - \lambda)^{-1}.$$

Таким образом, функция $h(\lambda)$ определена на множестве Γ_1 за исключением точки $\lambda = 1$ формулой

$$h(\lambda) = -i(1 - \lambda)^{-1}. \quad (7.11)$$

Умножая обе части формулы (7.7) на λ^t , суммируя по $t \in \mathbf{Z}$ и учитывая формулы (7.9), (7.11), получаем для функций (7.5), (7.6)

соотношение

$$\begin{aligned}
 \psi(\lambda) &= -i \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t \varphi_t \operatorname{sign} t = \\
 &= -i \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \lambda^t \operatorname{sign} t \frac{1}{2\pi i} \oint \mu^{-t} \varphi(\mu) \frac{d\mu}{\mu} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \oint \varphi(\mu) \frac{d\mu}{\mu} \sum_{t=-\infty}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^t \operatorname{sign} t = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} h\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \varphi(\mu) \frac{d\mu}{\mu} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} \varphi(\mu) \frac{d\mu}{\mu}, \quad \lambda \in \Gamma_1. \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

Функция

$$U(\lambda) = \exp\{\varphi(\lambda) + i\psi(\lambda)\} = \exp\{\pi(\lambda)\} \quad (7.13)$$

совпадает, очевидно, с факторизующим множителем в соотношении (7.3). Формула (7.12) определяет интегральный оператор h Гильберта с ядром $h(\lambda)$ (см. (7.11)). Несложно убедиться, что оператор h является унитарным в гильбертовом пространстве функций, квадратично-интегрируемых на множестве Γ_1 . Формула (7.12) эквивалентна, очевидно, соотношениям (7.7), но не связана с вычислением коэффициентов Фурье функции $\ln G(\lambda)$ и потому в случае плохой сходимости ее ряда Фурье может оказаться предпочтительнее, чем приведенный ранее метод факторизации, использующий кепстр функции $G(\lambda)$.

В. Непосредственное вычисление сепарирующего оператора. Приведенные рассуждения подсказывают, как избежать непосредственного вычисления коэффициентов Фурье функции $\ln G(\lambda)$ при осуществлении ее сепарации. Действительно, обозначим через q линейный оператор в $L_2(\Gamma_1)$, определяемый соотношениями

$$(q\varphi)(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{-1} \lambda^t \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_0 = \sum_{t=-\infty}^{-\infty} \lambda^t \mathbf{1}[t] \varphi_t, \quad (7.14)$$

где $1[t]$ — функция единичного скачка и $\varphi(\cdot) \in L_2(\Gamma_1)$,

$$1[t] = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 1/2 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad \varphi(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \lambda^t \varphi_t. \quad (7.15)$$

Те же рассуждения, что и при рассмотрении преобразования Гильберта в предыдущем пункте, показывают, что оператор q является интегральным оператором в $L_2(\Gamma_1)$ с ядром $q(\lambda)$, определяемым по формуле

$$q(\lambda) = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}. \quad (7.16)$$

С помощью оператора q формула (7.2) может быть переписана в виде

$$\pi(\lambda) = (q \ln G)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1 + \lambda - \mu}{1 - \lambda + \mu} \ln G(\mu) \frac{d\mu}{\mu}. \quad (7.17)$$

Функция $U(\lambda) = \exp \pi(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в единичный круг D_1 и является факторизующим множителем в формуле (7.3). Как и в случае преобразования Гильберта (7.12), интегральное преобразование (7.17) может оказаться более предпочтительным (по сравнению с "кепсторным" методом) для факторизации спектральной плотности $G(\lambda)$, когда ее разложение в ряд Фурье сходится недостаточно быстро.

Г. "Скалярная" факторизация, основанная на использовании формулы Коши. Необходимость в факторизации скалярной функции, определенной на замкнутом гладком контуре комплексной плоскости и не обязательно положительной на нем, возникает при исследовании различных краевых задач. Наиболее известной задачей такого рода является, например, задача Римана. Под факторизацией функции при этом понимается ее представление в виде произведения граничных значений пары функций, одна из которых аналитична в области, охватываемой контуром, а вторая — в области вне этого контура. Одно из первых решений этой задачи дано Д. Гильбертом, ее простое решение, основанное на использовании интеграла Коши, предложено Ф. Д. Гаховым. Остановимся на этом подробнее, следуя работе [64].

Пусть $G(\lambda)$ — скалярная функция, определенная на единичной окружности Γ_1 комплексной плоскости, $G(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \Gamma_1$,

причем функция $\ln G(\lambda)$ однозначная. При $\mu \notin \Gamma_1$ рассмотрим функцию $g(\mu)$, определяемую формулой Коши:

$$g(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda - \mu} \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (7.18)$$

Хорошо известно [64], что при малоограничительных условиях на функцию $G(\lambda)$ (связанных с ее гладкостью на множестве Γ_1) формула (7.18) определяет при $\mu \in D_1 = \{\lambda: |\lambda| < 1\}$ и при $\mu \in C \setminus (D_1 \cup \Gamma_1)$ аналитические функции, обозначим их соответственно через $g_+(\mu)$, $g_-(\mu)$, причем эти функции имеют предельные значения при $\mu \rightarrow \Gamma_1$ и $g_+(\lambda) - g_-(\lambda) = \ln G(\lambda)$. Введем функции

$$\begin{aligned} U_+(\mu) &= \exp\{g_+(\mu)\}, & \mu \in D_1, \\ U_-(\mu) &= \exp\{-g_-(\mu)\}, & \mu \in C/(D_1 \cup \Gamma_1), \end{aligned} \quad (7.19)$$

тогда при $\lambda \in \Gamma_1$ справедливо представление

$$G(\lambda) = \exp\{\ln G(\lambda)\} = U_+(\lambda)U_-(\lambda). \quad (7.20)$$

Из формул (7.19) следует, что функция $U_+(\mu)$ аналитична внутри единичного круга, а $U_-(\mu)$ — вне его, т.е. формула (7.20) определяет искомое представление функции $G(\lambda)$. Несложно убедиться, что функции $U_+(\mu)$, $U_-(\mu)$ определены однозначно с точностью до произвольной постоянной, отличной от нуля. Если функция $G(\lambda)$ положительна и ограничена на множестве Γ_1 , то на Γ_1 вещественна и ограничена функция $\ln G(\lambda)$ и из формулы (7.18) следует, что $[U_-(\mu)]^\nabla = U_+(\mu)$, т.е. формула (7.20) определяет спектральную факторизацию функции $G(\lambda)$.

Приложение к главе 4

А. Доказательство теоремы 4.2. Существуют различные методы доказательства устанавливаемой в теореме 4.2 факторизации матричных спектральных плотностей. Каждый из них обычно указывает конструктивный способ нахождения матричной функции $U(\lambda)$ с указанными в теореме 4.2 свойствами. Изложим вариант решения задачи матричной факторизации, основанный на возможности приведения полиномиальных матриц к диагональной форме с помощью так называемых элементарных преобразований; соответствующий алгоритм был одним из первых, опубликованных по этой проблематике [163] (см. также [69]). С помощью упомянутых преобразований проблема факторизации дробно-рациональной матричной функции сводится к

задаче факторизации некоторого конечного набора скалярных дробно-рациональных функций, положительных на единичной окружности Γ_1 . Последняя задача может быть решена путем нахождения корней скалярных полиномов, определяющих эти рациональные функции, или с помощью других известных методов скалярной факторизации.

Очевидно, всякую дробно-рациональную матричную функцию $G(\lambda)$ можно представить в виде отношения квазиполиномов (причем в знаменателе будет стоять скалярный квазиполином, обозначим его $p(\lambda)$), тогда функция

$$\hat{G}(\lambda) = p(\lambda)G(\lambda) \quad (\text{П.1})$$

будет матричным квазиполиномом,

$$\hat{G}(\lambda) = \sum_{l=-L}^L \lambda^l G_l. \quad (\text{П.2})$$

Следуя [20, с. 118], обозначим через $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_m(\lambda)$ инвариантные многочлены полиномиальной $m \times m$ -матричной функции $\lambda^L G(\lambda)$, определяемые соотношениями

$$i_1(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}, \dots, i_{m-1}(\lambda) = \frac{D_{m-1}(\lambda)}{D_{m-2}(\lambda)}, i_m(\lambda) = \frac{D_m(\lambda)}{D_{m-1}(\lambda)},$$

$$D_0(\lambda) \equiv 1, \quad i_k(0) = 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (\text{П.3})$$

где $D_k(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров k -го порядка матричного полинома $\lambda^L G(\lambda)$, $k = 1, 1, \dots, m$. Согласно [20], существуют полиномиальные матрицы $P(\lambda), Q(\lambda)$, такие, что

$$\det P(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0, \quad \det Q(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0, \quad (\text{П.4})$$

$$\lambda^L \hat{G}(\lambda) = P(\lambda) i(\lambda) Q(\lambda), \quad (\text{П.5})$$

где

$$i(\lambda) = \text{diag} \| i_1(\lambda), \dots, i_m(\lambda) \| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} i^1(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & i^m(\lambda) \end{array} \right\|. \quad (\text{П.6})$$

Там же указан алгоритм построения матриц $P(\lambda), Q(\lambda)$. Формулу (П.5) перепишем в виде

$$\tilde{G}(\lambda) = P(\lambda) \tilde{i}(\lambda) Q(\lambda), \quad (\text{П.7})$$

где обозначено

$$\tilde{i}(\lambda) = \text{diag} \|\tilde{i}_1(\lambda), \dots, \tilde{i}_m(\lambda)\| = \lambda^{-L} i(\lambda).$$

Корни каждого квазиполинома $\tilde{i}_k(\lambda)$ в силу (П.2) расположены в комплексной плоскости симметрично относительно единичной окружности. Представим квазиполиномы $\tilde{i}_k(\lambda)$ в виде

$$\tilde{i}_k(\lambda) = \pi_k(\lambda) \tilde{\pi}_k(\lambda), \quad (\text{П.8})$$

где $\pi_k(\lambda)$ — полином, корни которого лежат вне $\bar{D}_1$, а $\tilde{\pi}_k(\lambda)$ — квазиполином, все корни которого расположены в D_1 . Обозначим

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \text{diag} \|\pi_1(\lambda), \dots, \pi_m(\lambda)\|, \\ \tilde{\pi}(\lambda) &= \text{diag} \|\tilde{\pi}_1(\lambda), \dots, \tilde{\pi}_m(\lambda)\|, \end{aligned}$$

тогда

$$\tilde{i}(\lambda) = \pi(\lambda) \tilde{\pi}(\lambda). \quad (\text{П.9})$$

Перепишем формулу (П.7) в виде

$$\hat{G}(\lambda) = P(\lambda) \pi(\lambda) \tilde{Q}(\lambda) \pi^\nabla(\lambda) P^\nabla(\lambda), \quad (\text{П.10})$$

где обозначено

$$\tilde{Q}(\lambda) = \tilde{\pi}(\lambda) Q(\lambda) [P^\nabla(\lambda)]^{-1} [\pi^\nabla(\lambda)]^{-1}. \quad (\text{П.11})$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. При выполнении условий (П.2), (П.4) матрица $\tilde{Q}(\lambda)$ не зависит от λ ,

$$\tilde{Q}(\lambda) = \tilde{Q}, \quad \tilde{Q}^* = \tilde{Q}. \quad (\text{П.12})$$

Доказательство леммы. В силу условий (П.4) выполняется условие $\det P^\nabla(\lambda) = \text{const} \neq 0$, а потому матрица $[P^\nabla(\lambda)]^{-1}$ полиномиальная. Формулу (П.7) можно записать и так:

$$i^{-1}(\lambda) \tilde{G}(\lambda) = Q(\lambda) [P^\nabla(\lambda)]^{-1}, \quad (\text{П.13})$$

где обозначено

$$\tilde{G}(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \hat{G}(\lambda) [P^\nabla(\lambda)]^{-1}. \quad (\text{П.14})$$

Из формулы (П.13) следует, что величины $\tilde{G}_{kk'}(\lambda)/\tilde{i}_k(\lambda)$ — полиномы по λ . Рассмотрим величину

$$\frac{\tilde{G}_{kk'}(\lambda)}{\pi_k(\lambda) \pi_{k'}^\nabla(\lambda)} = \frac{\pi_k^\nabla(\lambda)}{\tilde{\pi}_{k'}(\lambda)} \frac{\tilde{G}_{kk'}(\lambda)}{\pi_k(\lambda) \pi_k^\nabla(\lambda)} = \frac{\pi_k^\nabla(\lambda)}{\tilde{\pi}_{k'}(\lambda)} \frac{\tilde{G}_{kk'}(\lambda)}{\tilde{i}_k(\lambda)}. \quad (\text{П.15})$$

Пусть для определенности $k \geq k'$. Тогда квазиполином $\tilde{i}_k(\lambda)$ делится нацело на $\tilde{i}_{k'}(\lambda)$ (см. (П.3)). Поэтому, очевидно, что $\pi_k^\nabla(\lambda)/\tilde{\pi}_{k'}(\lambda)$ — квазиполином. Следовательно, при $k \geq k'$ величины $\tilde{G}_{kk'}(\lambda)/[\pi_k(\lambda)\pi_{k'}^\nabla(\lambda)]$ — квазиполиномы. Нетрудно видеть, что эти величины являются элементами полиномиальной матрицы (см. (П.11), (П.13))

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\lambda) &= \tilde{\pi}(\lambda)Q(\lambda)[P^\nabla(\lambda)]^{-1}[\pi^\nabla(\lambda)]^{-1} = \\ &= \tilde{\pi}(\lambda)\tilde{i}^{-1}(\lambda)\tilde{G}(\lambda)[\pi^\nabla(\lambda)]^{-1} = \pi^{-1}(\lambda)\tilde{G}(\lambda)[\pi^\nabla(\lambda)]^{-1}\end{aligned}$$

для индексов $k, k', k \geq k'$. Таким образом, элементы матрицы $\tilde{Q}(\lambda)$, лежащие под главной диагональю и на самой главной диагонали, — квазиполиномы по λ . Так как из (П.10) следует, что

$$\tilde{Q}^\nabla(\lambda) = \tilde{Q}(\lambda), \quad (\text{П.16})$$

то и остальные элементы матрицы $\tilde{Q}(\lambda)$ — квазиполиномы. Из (П.11) следует равенство

$$\det \tilde{Q}(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0. \quad (\text{П.17})$$

Квазиполиномиальная матрица $\tilde{Q}(\lambda)$, обладающая свойствами (П.16), (П.17), как нетрудно убедиться, не может зависеть от λ , условие (П.16) теперь означает эрмитовость матрицы $\tilde{Q}(\lambda)$. Тем самым получено соотношение (П.12) и лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. С учетом леммы формула (П.10) принимает вид

$$G(\lambda) = P(\lambda)\pi(\lambda)\tilde{Q}\pi^\nabla(\lambda)P^\nabla(\lambda). \quad (\text{П.18})$$

В условиях теоремы матрица $\tilde{Q}$ положительная (так как матрица (П.1) положительна на единичной окружности). Обозначим через

$$U(\lambda) = P(\lambda)\pi(\lambda)\tilde{Q}^{1/2} \quad (\text{П.19})$$

полиномиальную матрицу, тогда

$$G(\lambda) = \frac{U(\lambda)U^\nabla(\lambda)}{p(\lambda)}.$$

Факторизуем положительный на единичной окружности квазиполином $p(\lambda)$,

$$p(\lambda) = \rho(\lambda)\rho^\nabla(\lambda), \quad (\text{П.20})$$

таким образом, чтобы полином $\rho(\lambda)$ не имел корней внутри единичного круга D_1 , окончательно получим

$$G(\lambda) = \frac{U(\lambda)}{\rho(\lambda)} \left[\frac{U(\lambda)}{\rho(\lambda)} \right]^{\nabla}.$$

Обозначая $\Pi(\lambda) = U(\lambda)/\rho(\lambda)$, получаем факторизацию (1.13), где полиномиальная матрица $\Pi(\lambda)$ удовлетворяет очевидным образом всем перечисленным в теореме 4.3 условиям. Теорема 4.3 доказана.

Отметим, что если коэффициенты полиномов, определяющих элементы дробно-рациональной матрицы спектральных плотностей, суть вещественные числа, то коэффициенты у дробно-рациональной матричной функции $\Pi(\lambda)$ будут также вещественными.

Б. Доказательство леммы 4.1. Рассуждая от противного, примем, что минимум в исходной задаче (3.1)–(3.3) достигается на последовательности

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, t = 0, 1, \dots \right\},$$

отличной от последовательности

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}, t = 0, 1, \dots \right\}.$$

Обозначим

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}_- = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}, t = \dots, -2, -1, \right\}, \quad (\text{П.21})$$

и рассмотрим последовательность

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}_- + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix}_+. \quad (\text{П.22})$$

Очевидно, что последовательность (П.22) будет допустимой в "расширенной" задаче (4.2)–(4.4), так как значение состояния $\tilde{x}_0$ в "расширенной" задаче предполагается фиксированным и совпадающим с начальным значением x_0 в исходной задаче, и, кроме того, эта последовательность удовлетворяет уравнению

(4.2) и условию (4.4). Но на последовательности (П.22) функционал (4.3) принимает значение, меньшее оптимального,

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{t=-\infty}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix} + \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{u}_t \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{t=-\infty}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix} + \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix} < \\
 &< \sum_{t=-\infty}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix} + \sum_{t=0}^{t=+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}^* N \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

что невозможно по определению оптимальности пары $\begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}$.

Поэтому $\begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}^{\text{opt}} \\ \tilde{u}^{\text{opt}} \end{bmatrix}$, $t = 0, 1, \dots$, вопреки сделанному предположению. Лемма 4.1 доказана.

ГЛАВА 5

РЕКУРРЕНТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Проведенное в предыдущих главах исследование проблемы синтеза оптимального фильтра (в рамках теории Винера — Колмогорова) показывает, что эффективное решение задачи оптимизации обработки реализации случайного сигнала возможно в "стационарном и конечномерном" случае: передаточная функция оптимального фильтра может быть построена с использованием операций факторизации и сепарации над некоторыми функциями, порождаемыми спектральными плотностями частично наблюдаемого процесса. Несмотря на совершенствование методов спектральной факторизации, процедура синтеза передаточной функции оптимального многомерного фильтра остается сложной вычислительной задачей. В последние три десятилетия основным направлением теории оптимальной фильтрации стало направление, связанное с рекуррентной фильтрацией [15, 30, 31, 45, 46, 53, 55, 57, 113, 127, 137, 139, 141, 145, 149, 155]. Алгоритмы рекуррентной фильтрации не используют аналитических средств типа факторизации и сепарации матричных функций комплексного аргумента.

В конце 50-х годов было замечено, что для важных классов случайных процессов (не обязательно стационарных) оптимальный в среднеквадратичном смысле неупреждающий фильтр может быть построен в рекуррентной форме. Матрица корреляций погрешности фильтрации при этом удовлетворяла нелинейному дифференциальному (в непрерывном времени) либо разностному (в дискретном времени) уравнению — уравнению Риккати, и ее вычисление не требовало применения сложных процедур факторизации и сепарации. Появившиеся в начале 60-х годов известные работы Калмана и Бьюси стимулировали бурное развитие нового направления в теории оптимальной фильтрации — теории рекуррентной фильтрации.

Хорошо известно (см., например [89]), что оптимальный стационарный фильтр в случае процессов с дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей может быть представлен в

виде дифференциально-разностного уравнения. Такая рекуррентная форма представления оптимального фильтра удобна при реализации его с помощью современных ЭВМ: объем информации, необходимой для вычисления текущей оценки, ограничен независимо от того, в какой момент времени осуществляется вычисление оценки. Рекуррентная форма представления оптимального фильтра возможна, разумеется, не для любых случайных процессов. Упомянутый выше случай процесса с дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей представляет собой важный пример конечномерных процессов, допускающих формирующий фильтр в виде дифференциального либо разностного уравнения, возбуждаемый белым шумом процессом (порождающим, или обновляющим процессом). При этом важна именно конечномерность процесса, а не его стационарность. Конечномерный случайный процесс в более общей ситуации также допускает формирующий фильтр, описываемый линейными дифференциальными либо разностными уравнениями, но коэффициенты этих уравнений не обязаны быть постоянными во времени. Именно для оптимального оценивания таких конечномерных процессов был разработан получивший широкую известность рекуррентный фильтр Калмана — Бьюси. Теория Калмана — Бьюси, несмотря на относительно небольшой промежуток времени с момента появления основополагающих работ (начало 60-х годов нашего столетия) приобрела достаточно законченную форму, и основные результаты теории стали классическими. Фильтр Калмана — Бьюси получается в рамках общей схемы линейной оптимальной фильтрации при дополнительных предположениях о свойствах сигналов и помех.

Данная глава книги посвящена теории рекуррентной фильтрации. Здесь обсуждается как собственно теория рекуррентной фильтрации Калмана — Бьюси, так и ее модификация, не требующая знания формирующего фильтра для наблюдаемого процесса и описывающая рекуррентный фильтр в терминах корреляционной функции частично наблюдаемого процесса. Приводимые ниже результаты, относящиеся к фильтру Калмана — Бьюси, в целом хорошо известны; основной акцент делается на подчеркивании того обстоятельства, что оптимальный фильтр Калмана — Бьюси является рекуррентной формой оптимального фильтра Винера — Колмогорова (в рамках теории оптимальной неупреждающей фильтрации случайных (вообще говоря, нестационарных) процессов). Соответствие между оптимальным

фильтром Винера — Колмогорова и его рекуррентными модификациями в разных формах обсуждается в литературе по оптимальной фильтрации [39, 77, 85, 104, 154].

1. Фильтр Калмана — Бьюси

Пусть $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \{z_t, t \in T, z_t \in R^p\}$ — частично наблюдаемый центрированный случайный процесс с известным корреляционным оператором $R_z = Mzz^*$. В соответствии с теоремой 2.7 для оценки ненаблюдаемой компоненты x может быть получена линейная неупреждающая функция $\hat{x} = hy$, минимизирующая среднеквадратичное отклонение оценки $\hat{x}$ от оцениваемой величины x . Приведем формулировку этой теоремы в несколько иной форме и в специальном случае, предполагая, что корреляционный оператор R_{Dy} имеет вид

$$R_{Dy} = I + K, \quad (1.1)$$

где K — неотрицательный ограниченный в $L_2(m, T)$ интегральный оператор с интегрируемым на множестве $T \times T$ ядром $K(t, t')$. Такая ситуация имеет место, например, если корреляционный оператор $R_x = Mxx^*$ ненаблюдаемого процесса является интегральным оператором с абсолютно интегрируемым на множестве $T \times T$ ядром $K(t, t')$ и наблюдаемый процесс y связан с процессом x "линейной схемой наблюдения":

$$Dy = Cx + Dw'', \quad (1.2)$$

где $C: L_2(m, T) \rightarrow L_2(n, T)$ — оператор умножения на измеримую ограниченную $n \times m$ -матричную функцию $C(t)$,

$$(C\varphi)(t) = C(t)\varphi(t), \quad \varphi \in L_2(m, T); \quad (1.3)$$

Dw'' — процесс стандартного белого шума ($MDw''(Dw'')^* = I$), не коррелированный с полезным сигналом x , $Mx(Dw'')^* = 0$. "Схема наблюдения" (1.2), (1.3) часто встречается в приложениях.

Теорема 2.7 в этом случае может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 5.1. *Предположим, что для частично наблюдаемого СП $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ выполнены условия:*

1) Процесс y допускает обобщенное дифференцирование, причем корреляционный оператор ОСП Dy ограничен в пространстве $L_2(m, T)$.

2) Корреляционный оператор R_{Dy} наблюдаемого процесса имеет вид (1.1), где K — оператор, множество значений которого входит в область определения оператора D обобщенного дифференцирования, причем оператор DK ограничен в $L_2(m, T)$ и является интегральным оператором с ядром $\frac{\partial K(t, t')}{\partial t}$.

3) Взаимокорреляционный оператор $R_{xDy} = Mx(Dy)^* = R_{xy}D^*$ процессов x, y является ограниченным интегральным оператором с ядром $R_{xDy}(t, t')$, $R_{xDy}: L_2(m, T) \rightarrow L_2(n, T)$.

4) Интегральное уравнение

$$Q(t, t') + \int_{t_0}^t Q(t, t'') K(t'', t') dt = K(t, t'), \quad t \geq t', \quad (1.4)$$

разрешимо относительно матричной функции $Q(t, t')$, $Q(t, t') = 0$ при $t' > t$, и эта функция определяет ограниченный оператор Q ,

$$(Q\varphi)(t) = \int_{t_0}^t Q(t, t') \varphi(t') dt', \quad \varphi \in L_2(m, T). \quad (1.5)$$

Тогда задача оптимальной в классе h^r фильтрации разрешима и оптимальный фильтр имеет вид

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t-\tau} g(t, t') dv(t'), \quad (1.6)$$

где весовая функция $g(\cdot)$ оптимального фильтра при $t' \leq t - \tau$ определяется формулой

$$g(t, t') = R_{xDy}(t, t') - \int_{t_0}^t R_{xDy}(t, t'') Q^*(t'', t') dt'', \quad (1.7)$$

$dv(t)$ — стохастический дифференциал случайного процесса $v = \{v(t), t \in T\}$, определяемого уравнением

$$dv(t) = dy(t) - \int_{t_0}^t Q(t, t') dy(t') \quad (1.8)$$

(для определения самого процесса v следует задать еще начальное значение $v(t_s)$).

Доказательство теоремы 5.1 приведено в Приложении.

Наиболее важным этапом построения оптимального фильтра в соответствии с теоремой 5.1 является нахождение матричной функции $Q(t, t')$, удовлетворяющей условию $Q(t, t') = 0$ при $t' > t$ и интегральному уравнению (1.4). Это уравнение возникает не только при решении задачи оптимальной фильтрации [24, 33], оно представляет собой специальный вариант уравнения Винера — Хопфа и часто называется *уравнением Гельфанда — Левитана*. Вопросу разрешимости уравнения Гельфанда — Левитана посвящен ряд публикаций.

Важно отметить, что решение уравнения Гельфанда — Левитана эквивалентно нахождению интегрального неупреждающего оператора Q с ядром $Q(t, t')$ в так называемой задаче обратной факторизации

$$(I + K)^{-1} = (I - Q^*)(I - Q). \quad (1.9)$$

Действительно, с помощью элементарных преобразований можно переписать операторное равенство (1.9) в виде

$$K = Q(I + K) + (I - Q^*)^{-1}Q^*. \quad (1.10)$$

Представляя операторное равенство (1.10) в виде соотношения между ядрами соответствующих операторов и учитывая, что ядро $G(t, t')$ оператора $G = (I - Q^*)^{-1}Q^*$ при $t' > t$ обращается в нулевую матрицу, приходим к уравнению Гельфанда — Левитана (1.4).

Предположим теперь, что случайный процесс $x = \{x(t), t \in T, x(t) \in C^n\}$ порождается линейным дифференциальным уравнением

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + dw'(t), \quad (1.11)$$

где $A(t)$ — детерминированная (вообще говоря, изменяющаяся во времени) измеримая матричная функция, определенная и ограниченная на множестве $T = (t_s, t_f)$, $t_s > -\infty$,

$$w = \begin{bmatrix} w' \\ w'' \end{bmatrix}, \quad w(t) \in C^{n+l}, \quad (1.12)$$

— *винеровский процесс*, т.е. процесс с некоррелированными

приращениями, с матрицей "интенсивностей" $N(t)$,

$$\begin{aligned} MDw(t)(Dw(t'))^* &= N(t)\delta(t-t') dt dt' = \\ &= \begin{vmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & I_l \end{vmatrix} \delta(t-t') dt dt'. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Напомним, что w'' — стандартный белый шум из схемы наблюдения (1.2), которая может быть переписана также в виде

$$dy(t) = C(t)x(t)dt + dw''(t). \quad (1.14)$$

Из формулы (1.13) следует, что помеха w' коррелирована с помехой w'' и является винеровским процессом с матрицей "интенсивностей" $N_{11}(t)$. Для однозначного определения процессов x, y (при заданном "входном" процессе w) требуется задать начальный вектор $x(t_0) = a$, который будем считать случайным n -вектором, не коррелированным с процессом w , $Maw^*(t) = 0$, $t \in T$, и имеющим статистические характеристики

$$Ma = \bar{a}, \quad R_a = M(a - \bar{a})(a - \bar{a})^*, \quad (1.15)$$

которые предполагаются известными.

Соотношения (1.11), (1.14) задают формирующий фильтр для конечномерного процесса y . Уравнение (1.11) описывает эволюцию во времени состояний $x(t)$ формирующего фильтра, уравнение (1.14) — связь процесса y на выходе фильтра с процессом x состояний фильтра. Соотношения (1.11), (1.14) часто используются для описания динамического объекта, состояния $x(t)$ которого изменяются под действием аддитивных случайных воздействий $w'(t)$. При этом состояния недоступны наблюдению, а наблюдаются (регистрируются, измеряются) лишь зашумленные (также аддитивной помехой) выходные переменные $y(t)$. Соотношение (1.14) описывает "канал наблюдения". Матричная функция $N_{12}(t)$ в (1.13) определяет корреляцию между помехами, действующими в объекте (на объект) и в канале наблюдения.

Часто возникает задача получения оценок состояний $x(t)$ как неупреждающей функции реализации выходного процесса y . При естественном уточнении линейной оценки и среднеквадратичном критерии оптимальности приходим к рассмотренной ранее задаче Винера — Колмогорова построения оптимального неупреждающего фильтра, формирующего нужные оценки. В данном случае процессы x, y являются, вообще говоря, нецентрированными, но их можно центрировать с помощью вектор-

функции $x(t)$, определяемой соотношениями

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A(t)\bar{x}(t), \quad t > t_s, \quad \bar{x}(t_s) = \bar{a}. \quad (1.16)$$

В результате приходим к центрированному частично наблюдаемому процессу

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}, \quad s(t) = x(t) - \bar{x}(t), \quad du(t) = dy(t) - C(t)\bar{x}(t) dt, \\ s &= \{s(t), t \in T\}, \quad u = \{u(t), t \in T\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

для которого может быть построен оптимальный фильтр в соответствии с теоремой 5.1.

По формируемым оптимальным оценкам $\hat{s}(t)$ может быть найдена оптимальная оценка

$$\hat{x}(t) = \hat{s}(t) + \bar{x}(t) \quad (1.18)$$

состояния $\hat{x}(t)$ объекта (1.11).

Оценка $\hat{s}(t)$ ищется в виде линейного неупреждающего фильтра

$$\hat{s}(t) = \int_{t_s}^t h(t, t') [dy(t') - C(t')\hat{x}(t') dt'], \quad (1.19)$$

где весовая функция $h(\cdot)$ выбирается из условия минимума функционала

$$J_1(h) = M|s(t) - \hat{s}(t)|^2. \quad (1.20)$$

Если $N_{12}(t) = 0$, то $Mx(Dw'')^* = 0$ и корреляционный оператор R_{Dy} "наблюдаемого" процесса Dy в силу уравнения (1.14) имеет вид

$$R_{Dy} = I + CR_x C^*, \quad (1.21)$$

где C — оператор умножения в пространстве $L_2(n, T)$ на матричную функцию $C(t)$ (размером $l \times n$),

$$(C\varphi)(t) = C(t)\varphi(t), \quad \varphi \in L_2(n, T). \quad (1.22)$$

Оператор R_{Dy} имеет вид (1.1). Условия теоремы 5.1 очевидным образом выполнены при ограниченных матричных функциях $A(t)$, $C(t)$ и конечном интервале T , в случае неограниченного интервала T для требуемой в теореме 5.1 ограниченности корреляционных операторов нужны дополнительные предположения об устойчивости уравнения (1.11). Если это уравнение

неустойчиво, то оптимальный фильтр следует синтезировать в расширенном пространстве (см. гл. 1). Мы не будем входить в дальнейшие подробности, связанные с этим вопросом. Для нас важно, что оценки $\hat{x}(t)$, оптимальные в классе h^0 , сами удовлетворяют рекуррентному соотношению, и это именно та проблема, которая изучается в данном разделе.

Приведем центральный результат, относящийся к этой проблеме, в виде следующего утверждения.

Терема 5.2. *Предположим, что случайные процессы s и формируются в соответствии с соотношениями (1.17), (1.11), (1.13), (1.16), в которых СП (1.12) винеровский (со значениями в пространстве C^{n+l}), имеющий матрицу интенсивностей (1.13). Предполагается, что измеримые детерминированные матричные функции $A(t)$, $C(t)$ соответственно размером $n \times n$, $l \times n$ ограничены на множестве T , а начальное состояние $x(t_s) = a$ объекта имеет известные характеристики $\bar{a}$, R_a (см. (1.15)) и не коррелировано со случайным процессом (1.12). Тогда линейные оценки $\hat{x}(t)$, минимизирующие функционал (1.20) и формируемые с помощью фильтра (1.19), удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$d\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t)dt + K(t)[dy(t) - C(t)\hat{x}(t)dt], \quad (1.23)$$

$$\hat{x}(t_s) = \bar{a} = Ma, \quad (1.24)$$

где калмановский коэффициент усиления $K(t): C^l \rightarrow C^n$ назовидится по формуле

$$K(t) = [P(t)C(t)^* + N_{12}(t)] [I_l + C(t)P(t)C^*(t)]^{-1} \quad (1.25)$$

через матрицу

$$P(t) = M[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^* \quad (1.26)$$

ковариаций погрешности оценивания, которая, в свою очередь, определяется матричным уравнением Риккати

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} = & [A(t) - K(t)C(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^* + \\ & + P(t)C^*(t)C(t)P(t) + N_{11}(t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

при начальном условии

$$P(t_s) = R_a = M(a - \bar{a})(a - \bar{a})^*. \quad (1.28)$$

Доказательство теоремы 5.2 приведено в Приложении.

Рекуррентные соотношения (1.23), (1.25), (1.27) описывают фильтр Калмана — Бьюси. Вычисление оценок $\hat{x}(t)$ в соответствии с фильтром Калмана — Бьюси при начальных условиях (1.24), (1.28) не связано с необходимостью факторизации корреляционного оператора R_{Du} наблюдаемого процесса Du или, что эквивалентно (см. теорему 5.1), решения интегрального уравнения Гельфанда — Левитана. Это обстоятельство определяет преимущество фильтра Калмана — Бьюси по сравнению с рассмотренным в теореме 5.1 0-неупреждающим фильтром Винера — Колмогорова. Разумеется, если в силу соотношений (1.11), (1.13) выразить оценки $\hat{x}(t)$ как функции наблюдений $y(t')$, $t' < t$, исключив предшествующие оценки, то приходим к фильтру Винера — Колмогорова (вообще говоря, в расширенном пространстве, если весовой оператор оптимального фильтра окажется неограниченным — см. гл. 2), так что эти фильтры определяют одни и те же оптимальные в среднеквадратичном смысле оценки $\hat{x}(t)$. Однако для получения оценки $\hat{x}(t)$ в некоторый момент времени t согласно рекуррентным соотношениям Калмана — Бьюси требуется вполне определенный (ограниченный независимо от момента t) объем памяти вычислительных устройств, на которых обычно реализуются оптимальные фильтры. В случае фильтра Винера — Колмогорова объем машинной памяти может оказаться недопустимо большим при больших t из-за необходимости хранить реализацию $\{y(t'), t' \leq t\}$ процесса y . Подчеркнем, что отмеченное преимущество фильтра Калмана — Бьюси далось не даром: частично наблюдаемый процесс $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ должен быть конечномерным и, более того, надо знать формирующий его фильтр (1.11), (1.13), да и оптимальные оценки получены лишь в классе h^0 (для фильтров Винера — Колмогорова различие в вычислительной сложности оценок в классах h^τ при разных τ несущественно).

Рекуррентный характер фильтра Калмана — Бьюси делает актуальным вопрос о его устойчивости — неизбежные погрешности вычислений и разброс в задании начальных данных не должны существенно влиять на погрешности оценивания при сколь угодно больших t (в случае ограниченного интервала T проблема устойчивости фильтра не столь существенна). Известны некоторые результаты об устойчивости фильтра Калмана — Бьюси при некоторых ограничениях на матрицы $A(t)$, $C(t)$, характеризующих фильтр. В стационарном случае (когда ма-

трицы A , B , N не зависят от времени) при $N_{12} = 0$ эти условия сводятся к требованию детектируемости пары матриц (A, B) и стабилизируемости пары матриц (A, N_{11}) , что заведомо выполнено в случае гурвицевой матрицы A (все ее собственные значения расположены в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости). В последнем случае фильтр Калмана — Бьюси "глобально устойчив" — доставляемые им оценки $\hat{x}(t)$ сходятся к оптимальным оценкам Винера — Колмогорова при $t \rightarrow \infty$ независимо от выбора начальных условий $\hat{x}(t_s)$, $P(t_s) \geq 0$ в фильтре Калмана — Бьюси. В терминах расширенного пространства (см. гл. 1) это означает, что весовой оператор оптимального фильтра при сформулированных выше условиях "детектируемости и стабилизируемости" оказывается устойчивым в соответствующем расширенном пространстве.

Более скромные результаты известны в случае, когда сами матрицы A , C заданы неточно (т.е. модель объекта (1.9) задана с некоторой погрешностью либо ее коэффициенты "дрейфуют", медленно изменяясь во времени). В этом случае фильтр Калмана — Бьюси может оказаться неустойчивым при сколь угодно малой погрешности в задании матриц A , C : доставляемые им оценки с ростом t могут неограниченно возрастать, не имея видимого отношения к оцениваемым величинам $x(t)$.

2. Рекуррентные формы представления оптимального фильтра

Фильтр Калмана — Бьюси получен в предположении, что оцениваемый процесс конечномерен и, более того, известен формирующий фильтр этого процесса. Вместе с тем, восстановление коэффициентов формирующего фильтра по корреляционным функциям частично наблюдаемого процесса хотя и возможно, но в общем случае достаточно трудоемко. Поэтому представляется естественной попытка отыскания рекуррентных форм оптимального фильтра в терминах корреляционных и взаимокорреляционных функций конечномерного наблюдаемого и оцениваемого процессов. Такой подход, как показывается ниже, плодотворен и позволяет получать рекуррентные представления оптимального фильтра более простым способом, чем возможный способ восстановления формирующего фильтра оцениваемого процесса с последующим использованием рекуррентных соотношений фильтра Калмана — Бьюси.

Проблема рекуррентной фильтрации может рассматривать-

ся в двух аспектах. Первый является принципиальным, и в его рамках рекуррентность трактуется как возможность построения оценки $\hat{x}(t)$ в произвольный момент времени t в виде функции от оптимальной оценки $\hat{x}(t')$ в некоторый предшествующий момент $t' < t$ и реализации $\{y(t''), t' \leq t'' \leq t\}$ наблюдаемого процесса на промежутке времени $[t', t]$, т.е.

$$\hat{x}(t) = \Phi_{t,t'}[\hat{x}(t'), \{y(t''), t' \leq t'' \leq t\}]. \quad (2.1)$$

При этом синтез (построение) функции $\Phi_{t,t'}(\cdot)$ не требует знания процесса y и может быть осуществлен до начала оценивания (фильтрации). Вопрос о сложности функции $\Phi_{t,t'}(\cdot)$ не ставится.

В рамках второго аспекта ставится вопрос об упрощении алгоритма вычисления функции $\Phi_{t,t'}(\cdot)$. Поясним оба эти аспекта на примере фильтра Калмана — Бьюси. Центральным здесь является соотношение (1.23), в котором матричный коэффициент $K(t)$ не зависит от "данных наблюдения" и тем или другим способом может быть вычислен до начала процесса фильтрации, например интегрированием уравнения Риккати (1.27). Соотношение (1.23) в этом случае определяет функцию $\Phi_{t,t'}(\cdot)$ (см. (2.1)). Однако целесообразно не вычислять матричную функцию $K(t)$ заранее (и тем самым не заботиться о выделении ресурсов на ее "хранение" в памяти вычислительного устройства), а совместить алгоритм ее вычисления с процессом вычисления оценок $\hat{x}(t)$ по мере поступления новых "данных наблюдения". Соответствующий алгоритм дается соотношениями (1.4), (1.16), (1.17), согласно этому алгоритму вычисление коэффициентов $K(t)$ осуществляется в "реальном масштабе времени", по мере поступления значений матриц $A(t)$, $C(t)$, $N(t)$. Таким образом, вместо запоминания матричной функции $K(t)$ оказывается проще "заложить" в память ЭВМ алгоритм вычисления этой функции (такой подход, видимо, целесообразен, когда реализация большого числа арифметических операций обходится "дешевле", чем хранение в памяти вычислительного устройства больших цифровых массивов). К сожалению, проблему упрощения алгоритма рекуррентного вычисления оптимальных оценок трудно формализовать, фильтр Калмана — Бьюси в этом смысле является образцом по определению.

Ниже обсуждается проблема собственно фильтрации (оптимизации фильтра в классе $\mathbf{h}^0$) в предположении, что ненаблюдаемый процесс x конечномерный, а "данные наблюдения" соответствуют "линейной схеме наблюдения".

А. Рекуррентное представление оптимального фильтра в предположении конечномерности случайных процессов.

Будем предполагать, что СП $x = \{x(t), t \in T\}$, $Mx(t) = \bar{x}(t)$, со значениями в C^n имеет матрицу ковариаций $R_x(t, t') = M[x(t) - \bar{x}(t)][x(t') - \bar{x}(t')]^*$, обладающую свойствами $R_x(t, t') = F(t)G^*(t')$, $t \geq t'$, или

$$R_x(t, t') = F(t)G^*(t')1(t - t') + G(t)F^*(t')1(t' - t), \quad (2.2)$$

где $F(t)$, $G(t)$ — детерминированные матричные функции размером $n \times p$, т.е. СП x конечномерный. Несложно убедиться, что свойство квазивырожденности (полувыврожденности (2.2)) матрицы $R_x(t, t')$ связано с возможностью представления СП как выхода некоторого конечномерного фильтра, возбуждаемого на входе процессом белого шума (см., например, [69, 80, 124, 138]).

Будем предполагать, что при каждом $t \in N$ матрица $F(t)F^*(t)$ невырождена,

$$\det F(t)F^*(t) \neq 0 \quad (2.3)$$

(при $p = n$ это эквивалентно условию $\det F(t) \neq 0$). Предположим, что "наблюдаемый" СП $y = \{y(t), t \in T\}$ со значениями в C^l связан с СП x соотношением

$$Dy = Cx + Dw'', \quad (2.4)$$

где D — оператор обобщенного дифференцирования, w'' — стандартный винеровский процесс со значениями в C^l , некоррелированный с процессом x ,

$$Mw''(t) = 0, \quad Mw''x^* = 0, \quad R_D w'' = Mw''(w'')^* = I, \quad (2.5)$$

C — оператор умножения на матричную функцию $C(t)$ размером $l \times n$,

$$(C\varphi)(t) = C(t)\varphi(t), \quad \varphi \in L_2(n, T). \quad (2.6)$$

Теорема 5.3. При выполнении условий (2.4), (2.6), (2.5), (2.2) оптимальные (в классе h^0) оценки $\hat{x}(t)$, формируемые фильтром (1.6), могут быть представлены в виде

$$\hat{x}(t) = F(t)\eta(t) + \bar{x}(t), \quad (2.7)$$

где детерминированная вектор-функция $\bar{x}(t)$ — среднее значение процесса x , $\bar{x}(t) = Mx(t)$, и СП $\eta = \{\eta(t), t \in T\}$ определяется соотношениями

$$d\eta(t) = L(t)[dy(t) - C(t)[F(t)\eta(t) + \bar{x}(t)] dt], \quad \eta(t_s) = 0, \quad (2.8)$$

$$L(t) = G^*(t) - \int_{t_s}^t G^*(t')Q^*(t', t) dt'. \quad (2.9)$$

Здесь $Q(t, t')$ — матричная (размером $m \times m$) функция, определяемая уравнением Гельфанда — Левитана (1.4).

Доказательство теоремы 5.3 приведено в Приложении.

Таким образом, оптимальные оценки $\hat{x}(t)$ могут рассматриваться как выходы линейного конечномерного фильтра (2.7)–(2.9).

Б. Упрощение рекуррентной формы оптимального фильтра. Использование фильтра (2.7)–(2.9) для построения оптимальных оценок $\hat{x}(t)$ связано с необходимостью решать уравнение Гельфанда — Левитана и "хранить" матричное решение $Q(t, t')$ этого уравнения, что может оказаться неудобным с вычислительной точки зрения. Поэтому представляют интерес ситуации, когда вычисление оценок $\hat{x}(t)$ требует использования лишь "локальных" операций и не связано с необходимостью "хранить" большие массивы чисел. Чтобы продемонстрировать возможность получения таких рекуррентных представлений оптимального фильтра, рассмотрим частный случай квазивырождения матрицы корреляций (2.2), когда $p = n$, т.е. $F(t)$, $G(t)$ — квадратные невырожденные при каждом $t \in T$ матрицы. Предположим также, что матричная функция $F(t)$ дифференцируемая, и для простоты записи временно примем, что СП x центрированный ($\bar{x}(t) \equiv 0$). Тогда из соотношения (2.7) с учетом (2.8) имеем

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= \frac{dF(t)}{dt} \eta(t) dt + F(t) d\eta(t) = \frac{dF(t)}{dt} F^{-1}(t) [F(t) \eta(t)] dt + \\ &+ F(t) L(t) [dy(t) - C(t) [F(t) \eta(t)] dt] = \\ &= A(t) \hat{x}(t) dt + K(t) [dy(t) - C(t) \hat{x}(t) dt], \quad (2.10) \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения

$$A(t) = \frac{dF(t)}{dt} F^{-1}(t), \quad K(t) = F(t) L(t). \quad (2.11)$$

Уравнение (2.10) совпадает по форме с уравнением (1.23) фильтра Калмана — Бьюси, однако коэффициент $K(t)$ в (2.10) вычисляется не рекуррентно, а по второй из формул (2.11), где матричная функция $L(t)$, в свою очередь, выражается по формуле (2.9) через решение $Q(t, t')$ уравнения Гельфанда — Левитана (1.4). Сходство уравнения (2.10) с уравнением (1.23) позволяет предложить рекуррентный алгоритм вычисления матричной функции $L(t)$ в соотношениях (2.7), (2.8), не связанный с решением уравнения Гельфанда — Левитана.

С этой целью рассмотрим СП w' , определяемый формулой

$$w'(t) = x(t) - \int_{t_0}^t A(t')x(t') dt', \quad (2.12)$$

где матричная функция $A(t)$ вычисляется по первой из формул (2.11).

Лемма 5.1. *Предположим, что в условиях теоремы 5.3 матричные функции $F(t)$, $G(t)$ квадратные ($p = n$), причем матричная функция $F(t)$ при всех $t \in T$ неособая и дифференцируемая. Тогда СП w' , определяемый формулой (2.12), допускает обобщенное дифференцирование и ОСП Dw' является δ -коррелированным СП с матрицей интенсивностей*

$$N_{11}(t) = \left[\frac{dG(t)}{dt} - A(t)G(t) \right] F^*(t). \quad (2.13)$$

Доказательство леммы 5.1 приведено в Приложении.

Напомним, что указанная в лемме δ -коррелированность процесса Dw' означает выполнение соотношения

$$Mdw'(t)[dw'(t')]^* = N_{11}(t)\delta(t - t') dt dt', \quad (2.14)$$

т. е. СП w' имеет некоррелированные приращения.

Соотношение (2.12) можно переписать в виде стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + dw'(t), \quad (2.15)$$

совпадающего по форме с первым уравнением системы (1.1). В силу леммы 5.1 ОСП Dw' — обновляющий процесс для СП Dy . Дополним уравнение (2.15) начальным данным $x(t_0) = a$, где a — случайный n -вектор, не коррелированный с ОСП Dw' , имеющим статистические характеристики (1.15). Условия (2.5) означают, что ОСП Dw' и Dw'' некоррелированы, т. е.

$$R_{Dw} = M \begin{bmatrix} Dw' \\ Dw'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dw' \\ Dw'' \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Соотношение (2.10) определяет оптимальные (в среднеквадратичном смысле) неупреждающие оценки "состояний" $x(t)$ объекта (2.15), осуществляемые в соответствии с "линейной схемой наблюдения" (2.14). Согласно теореме 5.2 оптимальный коэффициент $K(t)$ определяется формулой (1.25), в данном случае принимающей вид

$$K(t) = P(t)C(t)^*,$$

где $P(t)$ — матрица ковариаций погрешности оценивания (см. (1.26)) — удовлетворяет матричному уравнению Риккати (1.27) при начальном условии (1.28). Таким образом, оптимальный коэффициент $L(t)$ в фильтре (2.7), (2.8) можно вычислять не по формуле (2.9), а по формуле (см. (2.11))

$$L(t) = F^{-1}(t)P(t)C(t)^*, \quad (2.17)$$

где неотрицательная матричная функция $P(t)$ определяется уравнением (1.27) при начальном условии (1.28). Напомним, что в уравнении (1.16) матричная функция $A(t)$ определяется первой из формул (2.11), а матричная функция $N(t)$ — формулой (2.13).

В. Рекуррентные соотношения в общем случае процесса с квазивырожденной матрицей корреляций. В предыдущем пункте предполагалось, что матрицы $F(t)$, $G(t)$ в соотношении (2.3) квадратные. Рассмотрим теперь случай, когда $p > n$. Ограничимся для простоты случаем $p = qn$, где q — некоторое натуральное число, и предположим, что $n \times p$ -матричная функция $F(t)$ дифференцируема по крайней мере q раз, причем $p \times p$ -матричная функция

$$\tilde{F}(t) = \begin{pmatrix} D^{q-1}F(t) \\ D^{q-2}F(t) \\ \vdots \\ F(t) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

неособая,

$$\det \tilde{F}(t) \neq 0. \quad (2.19)$$

Здесь D — оператор обобщенного дифференцирования, в данном случае

$$DF(t) = \frac{dF(t)}{dt} dt. \quad (2.20)$$

Введем ОСП

$$\zeta = \begin{pmatrix} D^{q-1}x \\ D^{q-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

определенный на промежутке T и принимающий значения в пространстве C^p . Нетрудно убедиться, что корреляционный оператор $R_\zeta = M\zeta\zeta^*$ квазивырожден и

$$R_\zeta(t, t') = \tilde{F}(t)\tilde{G}^*(t'), \quad t > t', \quad (2.22)$$

где

$$\tilde{G}(t) = \begin{pmatrix} D^{q-1}G(t) \\ D^{q-2}G(t) \\ \vdots \\ G(t) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

При этом

$$x(t) = E\zeta(t), \quad E = \|0, 0, \dots, I_n\|, \quad E: \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad p = qn. \quad (2.24)$$

Для ОСП ζ можно поставить задачу нахождения его наилучших в среднеквадратичном смысле линейных оценок $\hat{\zeta}(t)$ по реализации процесса $y(t')$, $t' \leq t$, связанного с СП ζ "линейной схемой наблюдения"

$$\begin{aligned} dy(t) &= C(t)x(t)dt + dw''(t) = C(t)E\zeta(t)dt + dw''(t) = \\ &= \tilde{C}(t)\zeta(t)dt + dw''(t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\tilde{C}(t) = C(t)E. \quad (2.26)$$

В силу условия (2.19) и предположения о дифференцируемости матричной функции $\tilde{F}(t)$ можно воспользоваться результатами предыдущего пункта, согласно которым оценки $\hat{\zeta}(t)$ могут быть получены с помощью рекуррентных соотношений фильтра Калмана — Бьюси, тогда искомая оценка $\hat{x}(t)$ будет иметь вид

$$\hat{x}(t) = E\hat{\zeta}(t), \quad (2.27)$$

где матрица E определена в (2.24). Приведем окончательный результат в виде следующего утверждения.

Лемма 5.2. *Предположим, что матрица корреляций $R_x(t, t')$ оцениваемого процесса x допускает представление (2.2) при $p = qn$, в котором матрица $F(t)$ имеет производные до порядка q , причем составная матрица (2.18) невырождена при всех $t \in T$. Тогда оптимальные оценки $\hat{x}(t)$, являющиеся линейными неупреждающими функционалами от СП y , связанного с СП x "линейной схемой наблюдения" (2.4), могут быть определены по формуле (2.27), где случайные величины $\hat{\zeta}(t)$ определяются рекуррентными соотношениями*

$$\hat{\zeta}(t) = \hat{F}(t)\hat{\eta}(t), \quad (2.28)$$

$$d\hat{\eta}(t) = \tilde{F}^{-1}(t)\tilde{K}(t) \left[dy(t) - \tilde{C}(t)\tilde{F}(t)\hat{\eta}(t)dt \right], \quad (2.29)$$

$$\hat{\eta}(t_s) = 0, \quad (2.30)$$

и симметричная матричная функция $\tilde{P}(t)$ определяется уравнением Риккати

$$\frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = [\tilde{A}(t) - \tilde{K}(t)\tilde{C}(t)]\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)[\tilde{A}(t) - \tilde{K}(t)\tilde{C}(t)]^* + \tilde{N}_{11}(t) + \tilde{P}(t)\tilde{C}^*(t)\tilde{C}(t)\tilde{P}(t) \quad (2.31)$$

при начальном условии

$$\tilde{P}(t_s) = \tilde{F}(t_s)\tilde{G}^*(t_s). \quad (2.32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= \frac{d\tilde{F}(t)}{dt}\tilde{F}^{-1}(t), \\ \tilde{K}(t) &= \tilde{A}(t)\tilde{P}(t)\tilde{C}^*(t) [I_1 + \tilde{C}(t)\tilde{P}(t)\tilde{C}^*(t)]^{-1}, \\ N_{11}(t) &= \left[\frac{d\tilde{G}(t)}{dt} - \tilde{A}(t)\tilde{G}(t) \right] \tilde{F}^*(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Матрицы $\tilde{F}(t)$, $\tilde{G}(t)$, $\tilde{C}(t)$ определяются по формулам (2.18), (2.23), (2.26) соответственно.

Доказательство леммы 5.2 повторяет рассуждения предыдущего пункта и не требует дополнительных пояснений.

Г. Формирующие фильтры конечномерных случайных процессов. Приведенная в предыдущем пункте конструкция, связанная с СП ζ (см. (2.21)), определяет, по существу, формирующий фильтр для СП. Действительно, в условиях леммы 5.2 процесс x может рассматриваться как выход конечномерного фильтра

$$d\zeta(t) = \tilde{A}(t)\zeta(t)dt + d\tilde{w}(t), \quad x(t) = E\zeta(t), \quad (2.34)$$

где $p \times n$ -матрица E введена в формулах (2.24),

$$\tilde{A}(t) = \frac{d\tilde{F}(t)}{dt}\tilde{F}^{-1}(t), \quad (2.35)$$

матричная функция $\tilde{F}(t)$ вычисляется по формуле (2.18), СП $\tilde{w}'$ определяется соотношением (см. (2.12))

$$\tilde{w}'(t) = \zeta(t) - \int_{t_s}^t \tilde{A}(t') dt'. \quad (2.36)$$

В соответствии с леммой 5.1 процесс $\tilde{w}'$ имеет некоррелированные приращения. Нетрудно убедиться, что

$$R_{\tilde{w}'}(t, t') = R_{\zeta}(t, t') - \int_{t_*}^t \tilde{A}(t'') R_{\zeta}(t'', t') dt'' - \int_{t_*}^{t'} R_{\zeta}(t, t'') \tilde{A}^*(t'') dt'' + \\ + \int_{t_*}^t \int_{t_*}^{t''} \tilde{A}(t'') R_{\zeta}(t'', t''') \tilde{A}^*(t''') dt'' dt''', \quad (2.37)$$

где

$$R_{\zeta}(t, t') = \tilde{F}(t) \tilde{G}^*(t') 1(t - t') + \tilde{G}(t) \tilde{F}^*(t') 1(t' - t), \quad (2.38)$$

$1(t)$ — функция единичного скачка ($1(t) = 0$ при $t < 0$, $1(t) = 1$ при $t > 0$). В соответствии с формулами (2.18), (2.23) $p \times p$ -матричная функция $R_{\zeta}(t, t')$ выражается через матричную функцию $R_x(t, t')$ и ее производные по t, t' . Формирующий фильтр (2.34) для СП x использует дополнительные переменные $\zeta(t)$ — "состояния" конечномерного фильтра. Можно написать дифференциальное уравнение, непосредственно связывающее СП w' и x , если исключить вспомогательные переменные $\zeta(t)$. Именно, представим $p \times p$ -матричную функцию $\tilde{A}(t)$ в блочной форме

$$\tilde{A}(t) = \| A_{k, k'}(t) \|, \quad k, k' = 1, \dots, q, \quad (2.39)$$

где $A_{k, k'}(t)$ — $n \times n$ -матричные функции. Тогда с учетом формулы (2.21) фильтр (2.34) может быть переписан в виде системы линейных дифференциальных стохастических уравнений. Первое уравнение этой системы имеет вид

$$x^{(q)}(t) = \sum_{k'=1}^q A_{1, q-k'}(t) x^{(q-k')}(t) + D w_1'(t), \quad (2.40)$$

где $w_1'(t)$ — n -вектор, являющийся q -й компонентой представления p -вектора $\tilde{w}'(t)$ в виде

$$\tilde{w}'(t) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{w}_1'(t) \\ \tilde{w}_2'(t) \\ \vdots \\ \tilde{w}_q'(t) \end{array} \right\|. \quad (2.41)$$

Здесь $x^{(q-k')} = D^{q-k'}x$ — обобщенные производные СП x соответствующих порядков; СП $w'_q = \{w'_q(t), t \in T\}$ имеет некоррелированные приращения и матрицу корреляций

$$R_{w'_1}(t, t') = M w'_1(t) [w'_1(t')]^* = \\ = \|I_n, 0, \dots, 0\| R_{\tilde{w}'}(t, t') \|I_n, 0, \dots, 0\|^*, \quad (2.42)$$

где матричная функция $R_{\tilde{w}'}(t, t')$ определяется по формуле (2.37). Вводя обозначения

$$A_k(t) = -A_{1, q-k}(t), \quad k = 1, \dots, q, \\ A_0(t) = I_n, \quad w'(t) = w'_1(t), \quad (2.43)$$

перепишем уравнение (2.40) в виде

$$\sum_{k=0}^q A_k(t) (D^{(q-k)}x)(t) = (Dw')(t). \quad (2.44)$$

Соотношения (2.44) также определяют формирующий фильтр для СП x , но этот фильтр записан в форме "вход-выход".

Лемма 5.3. В условиях леммы 5.2 матричная функция $F(t)$ из формулы (2.2) удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^q A_k(t) \frac{d^k F(t)}{dt^k} = 0. \quad (2.45)$$

Доказательство леммы 5.3 приведено в Приложении.

Представление СП x в виде выхода конечномерного формирующего фильтра (2.34) позволяет уточнить разложение (2.2).

Лемма 5.4. В условиях леммы 5.2 матричные функции $F(t)$, $G(t)$ в представлении (2.2) связаны соотношением

$$G(t) = F(t)H(t), \quad (2.46)$$

где $H(t)$ — $r \times r$ -эрмитова неотрицательная матричная функция, неубывающая (в смысле квадратичных форм) при возрастании t .

Доказательство леммы 5.4 приведено в Приложении.

Используя формулу (2.46), можем переписать соотношение (2.2) в более изящной форме

$$R_x(t, t') = F(t)H[\min(t, t')]F^*(t'), \quad t, t' \in T. \quad (2.47)$$

Из доказательства леммы 5.4 следует, что матричная функция $H(t)$ имеет вид

$$H(t) = \tilde{\Phi}(t, t_s) R_{\zeta}(t_s, t'_s) \tilde{\Phi}^*(t_s, t) + \\ + \int_{t_s}^t [\tilde{\Phi}(t', t_s)]^{-1} R_{\tilde{w}'}(t', t') [\tilde{\Phi}^*(t_s, t')]^{-1} dt', \quad (2.48)$$

где $\tilde{\Phi}(t, t')$ — переходная функция уравнения (2.34), определяемая соотношениями

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(t, t')}{\partial t} = \tilde{A}(t) \tilde{\Phi}(t, t'), \quad t \neq t', \quad \tilde{\Phi}(t', t') = I_p. \quad (2.49)$$

Нетрудно заметить, что справедлива формула

$$F(t) = E \tilde{\Phi}(t, t_s), \quad (2.50)$$

где $n \times p$ -матрица E определена в (2.24).

3. Рекуррентное представление фильтра Винера — Колмогорова в случае временных рядов

Возможность представления оптимального фильтра Винера — Колмогорова в случае конечномерных временных рядов устанавливается теми же приемами и примерно при тех же условиях, что и в предыдущем разделе при рассмотрении конечномерных непрерывных случайных процессов. Формирующие фильтры в дискретном времени имеют свои особенности (например, переходная функция дискретного фильтра может вырождаться, что невозможно для переходных функций непрерывных фильтров). Ниже в краткой форме переизлагаются результаты разд. 2 в случае "дискретного времени", при этом переменные временных рядов могут принимать значения в бесконечномерном пространстве.

А. Оптимальный фильтр в задаче Винера — Колмогорова в случае временных рядов. Задача линейной оптимальной фильтрации центрированных временных рядов, постановка которой восходит к А. Н. Колмогорову (начало 40-х годов), рассмотрена в п. 2.2Д, 2.4А (в отличие от задачи, рассмотренной А.Н.Колмогоровым, в разд. 2.2, 2.4 частично наблюдаемый временной ряд $\tilde{z} = \text{col}(\tilde{x}, \tilde{y})$ не предполагается стационарным, а его составляющие $\tilde{x}, \tilde{y}$ являются случайными элементами. Унитарные пространства $H_k = Q_k H$, $Q_k = P_{t_k} - P_{t_{k-1}}$

(см. п. 2.2А) могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными; κ -неупреждающий линейный фильтр, формирующий оценки $\hat{x}_k$ составляющих временного ряда $\tilde{x}$, имеет вид (см. формулу (2.2.31))

$$\hat{x}_k = \sum_{\{k' \leq k - \kappa\} \cap K} h_{k,k'} y_{k'}, \quad (3.1)$$

где y_k — составляющие временного ряда $\tilde{y}$; K — "дискретное время" — выделенное подмножество множества целых чисел Z , $K = T \cap Z$. Весовая функция $h_{k,k'}$ фильтра (3.1) при фиксированных индексах k, k' является линейным ограниченным оператором, действующим из гильбертова пространства $H_k'' = Q_k'' H''$ в гильбертово пространство $H_{k'}' = Q_{k'}' H'$ ($H = H' \times H''$). Весовая функция предполагается оптимизированной по отношению к критерию

$$J_{\varphi'}^{(k)}(h) = M \left| \langle \varphi', x_k - \hat{x}_k \rangle_{H'} \right|^2, \quad (3.2)$$

зависящему от индекса $k \in K$ и элемента $\varphi' \in H'$.

Предположим, что оператор $R_{\tilde{y}}$ — корреляционный оператор временного ряда $\tilde{y}$ — положительно-определенный и его обратный $R_{\tilde{y}}^{-1}$ допускает факторизацию

$$R_{\tilde{y}}^{-1} = W^* W, \quad (3.3)$$

где W — каузальный оператор ($W_{[0]} = W$, см. п. 2.2Б), ограниченно обратимый в $l_2(H, K)$, причем оператор W^{-1} также является каузальным оператором. Предположим, что κ -неупреждающая компонента $[R_{\tilde{y}} W^*]_{[\kappa]}$ оператора $R_{\tilde{y}} W^*$ является ограниченным оператором (из пространства $l_2(H'', K)$ в пространство $l_2(H', K)$). Тогда в соответствии с теоремой 2.7 оптимальный фильтр существует и может быть записан в виде

$$\hat{x} = [R_{\tilde{y}} W^*]_{[\kappa]} W \tilde{y}. \quad (3.4)$$

Примем, что временной ряд $\tilde{y}$ определяется по $\tilde{x}$ с помощью "линейной схемы наблюдения"

$$y_k = C_k x_k + w_k'', \quad (3.5)$$

где C_k , $k \in K$, — линейные ограниченные операторы, действующие из гильбертова пространства $H_k' = Q_k' H'$ в гильбертово пространство $H_k'' = Q_k'' H''$; w_k'' — обобщенные случайные H_k'' -элементы, обладающие свойствами

$$M w_k'' = 0_{H_k''}, \quad k \in K, \quad M w_k'' (w_{k'}'')^* = Q_k \delta_{k,k'} \quad (3.6)$$

(напомним, что $Q'_k = P'_{t_k} - P'_{t_{k-1}}$, $Q''_k = P''_{t_k} - P''_{t_{k-1}}$ — ортопроекторы в пространствах H' и H''). Будем также предполагать, что временные ряды $\tilde{x}$ и $w'' = \{w''_k, k \in K\}$ удовлетворяют условию

$$Mx_k(w''_k)^* = 0, \quad k, k' \in K. \quad (3.7)$$

Условия (3.5), (3.7) обеспечивают положительную определенность корреляционного оператора $R_{\tilde{y}}$ временного ряда $\tilde{y}$:

$$R_{\tilde{y}} = M\tilde{y}\tilde{y}^* = I_{l_2} + CR_{\tilde{x}}C^*, \quad (3.8)$$

действующего в гильбертовом пространстве $l_2(H'', K)$ последовательностей

$$\tilde{\varphi}'' = \left\{ \tilde{\varphi}''_k, k \in K, \sum_{k \in K} \langle \varphi''_k, \varphi''_k \rangle_{H''} < \infty \right\}. \quad (3.9)$$

В формуле (3.8) $R_{\tilde{x}}$ — корреляционный оператор временного ряда $\tilde{x}$: $R_{\tilde{x}} = l_2(H'', K) \rightarrow l_2(H', K)$ и C — линейный ограниченный оператор, $C: l_2(H'', K) \rightarrow l_2(H', K)$, определяемый соотношением

$$(C\tilde{\varphi}'')_k = C_k\varphi''_k, \quad \varphi''_k \in H''. \quad (3.10)$$

В силу теоремы 2.6 для оператора $R_{\tilde{y}}$ (см. (3.8)) существует нужная факторизация (3.3). В силу предположений (3.5)–(3.7) также выполнено

$$R_{\tilde{x}\tilde{y}} = R_{\tilde{x}}C^*. \quad (3.11)$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением задачи оптимальной фильтрации с одношаговым прогнозом ($\kappa = 1$). Предположим, что фильтрация начинается с конечного момента времени, без ограничения общности примем, что $K = N = \{1, 2, \dots\}$. Сделанные предположения позволяют упростить оптимальный фильтр (3.4) и представить его в рекурсивной форме

$$\hat{x}_k = \sum_{k'=1}^{k-1} g_{k,k'}(y_{k'} - C_{k'}\hat{x}_{k'}), \quad (3.12)$$

где

$$g_{k,k'} = \sum_{k'' \in K} (R_{\tilde{x}})_{k,k''} C_{k''}^* [Q''_{k'} \delta_{k'',k'} - (D^*)_{k'',k'}], \quad (3.13)$$

$Q''_k = P''_k - P''_{k-1}$ и операторная функция $D_{k,k'}$ определяется соотношениями

$$D_{k,k'} + \sum_{k'' \in K} D_{k,k''} C_{k''} (R_{\tilde{x}})_{k'',k'} C_{k'}^* = C_k (R_{\tilde{x}})_{k,k'} C_{k'}^*, \quad k > k';$$

$$D_{k,k'} = 0, \quad k \leq k'. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) является дискретным аналогом уравнения Гельфанда — Левитана (см. (1.4)), которое эквивалентно операторному соотношению (см. разд. 1)

$$(I_{l_2} + CR_{\bar{x}}C^*)^{-1} = (I_{l_2} - D)(I_{l_2} - D^*), \quad (3.15)$$

где строго каузальный оператор $D: l_2(H'', N) \rightarrow l_2(H'', N)$ определяется блочно-операторной матрицей $\|D_{k,k'}\|$, $k, k' \in N$,

$$(D\varphi''_k) = \sum_{k'=1}^k D_{k,k'}\varphi''_{k'}, \quad k \in N, \quad \varphi'' \in H''. \quad (3.16)$$

Б. Рекуррентная форма представления оптимального фильтра в квазивырожденном случае. Приведенное выше представление (3.12)–(3.14) оптимального фильтра позволяет получить его рекуррентные представления в случае, когда корреляционная функция $(R_{\bar{x}})_{k,k'}$ квазивырождена, т. е. допускает представление

$$(R_{\bar{x}})_{k,k'} = F_k G_{k'}^*, \quad k \geq k', \quad k, k' \in N, \quad (3.17)$$

где F_k, G_k — линейные ограниченные операторы, действующие из некоторого гильбертова пространства H''' в гильбертово пространство H'_k . Из формулы (3.13) непосредственно следует, что строго каузальный оператор $g: l_2(H'', K) \rightarrow l_2(H', K)$, определяемый соотношением

$$(g\varphi'')_k = \sum_{k'=1}^k g_{k,k'}\varphi''_{k'}, \quad (3.18)$$

является квазивырожденным:

$$g_{k,k'} = F_k \tilde{G}_{k'}^*, \quad \text{при } k \geq k', \quad (3.19)$$

где в соответствии с формулой (3.13)

$$\tilde{G}_{k'}^* = \sum_{k''=k'}^{k-1} G_{k'}^* C_{k''}^* [Q_{k'}'' \delta_{k'',k'} - (D^*)_{k'',k'}]. \quad (3.20)$$

Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Оценки $\hat{x}_k$ оптимальной фильтрации с одношаговым прогнозом могут быть представлены в виде*

$$\hat{x}_k = F_k \eta_k, \quad k \in N, \quad (3.21)$$

где случайные H'' -элементы η_k формируются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\eta_{k+1} &= \eta_k + L_k(y_k - C_k F_k \eta_k), \\ L_k &= \tilde{G}_k^*, \quad \eta_1 = 0_{H'''},\end{aligned}\quad (3.22)$$

$0_{H'''}$ — нулевой элемент пространства H''' .

Теорема 5.4 непосредственно следует из формулы

$$\eta_k = \sum_{k'=1}^{k-1} \tilde{G}_{k'}^*(y_{k'} - C_{k'} \hat{x}_{k'}),$$

а также формул (3.12), (3.18), (3.19), и ее доказательство не требует дополнительных пояснений. Фильтр (3.22) определяет последовательность случайных H''' -элементов η_k , $M\eta_k = 0_{H''''}$.

В. Пример: мультипликативный формирующий фильтр.
Примем, что пространства $H'_k = Q'_k H'$ конечномерны и имеют одинаковую размерность n . Тогда их можно отождествить с унитарным пространством C^n . Предположим также, что пространства $H''_k = Q''_k H''$ также конечномерны и имеют одинаковую размерность l , отождествим их с унитарным пространством C^l . Таким образом, временные ряды $\hat{x}$, $\hat{y}$ в данном случае являются последовательностями случайных комплексных векторов соответственно размером n и l . Примем, что случайные n -векторы x_k порождаются разностным уравнением

$$x_{k+1} = A_k x_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

где A_k — случайные независимые матрицы со свойствами

$$\begin{aligned}MA_k &= \bar{A}, \quad \det \bar{A} \neq 0, \\ M(A_k - \bar{A})_{p,q}(A_k^* - \bar{A}^*)_{q',p'} &= R_{p,p',q,q'} \delta_{p,q} \delta_{p',q'}, \\ p, p', q, q' &= 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Уравнение (3.23) предполагает задание начального вектора $x_1 = a$, который будем считать случайным n -вектором, имеющим моменты до второго порядка и стохастически независимым с матрицами A_k :

$$Ma = \bar{a}, \quad R_a = M(a - \bar{a})(a - \bar{a})^*, \quad MA_k a = \bar{A} \bar{a}. \quad (3.25)$$

Квадратные $n \times n$ -матрицы $\bar{A}$, R_a , вектор $\bar{a}$ и величины $R_{p,p',q,q'}$ предполагаются известными.

Уравнение (3.23) описывает способ формирования временного ряда $x = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ из "белозумного" временного ряда $\{A_k - \bar{A}, k \in \mathbb{N}\}$. В отличие от обычного формирующего фильтра, в котором белый шум действует аддитивно, в фильтре (3.23) белозумный процесс действует мультипликативно, по этой причине соотношение (3.23) можно назвать мультипликативным формирующим фильтром. Такие фильтры иногда используются для описания параметрических колебаний в механических системах (см., например, [102, 120]). Разумеется, фильтр (3.23) можно записать и в обычной форме

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + e_{k+1}, \quad e_{k+1} = (A_k - \bar{A})x_k, \quad (3.26)$$

где временной ряд $\tilde{e} = \{\tilde{e}_k, k \in \mathbb{K}\}$ в силу условия (3.24) является нестационарным дискретным белым шумом. Отметим, что при $x_0 \neq 0$ временной ряд $\tilde{x} = \{\tilde{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$, вообще говоря, нецентрирован, но его несложно центрировать, а в окончательных формулах учесть его нецентрированность.

Нетрудно убедиться, что матрица ковариаций

$$(R_{\tilde{x}})_{k,k'} = M(x_k - Mx_k)(x_{k'} - Mx_{k'})^* \quad (3.27)$$

процесса $\tilde{x}$ квазивыврождена, т.е. представима в виде

$$(R_{\tilde{x}})_{k,k'} = F_k H[\min(k, k')] F_{k'}^*, \quad (3.28)$$

где

$$F_k = \bar{A}^k,$$

$$H[k] = R_0 + \sum_{k'=1}^k \bar{A}^{-k'} M(A_{k'} - \bar{A})(R_{\tilde{x}})_{k,k'}(A_{k'} - \bar{A})^* (\bar{A}^*)^{-k'}. \quad (3.29)$$

Г. Связь рекуррентной формы оптимального фильтра с фильтром Калмана — Бьюси. Как и в "непрерывном времени", коэффициенты L_k в фильтре (3.22) удовлетворяют рекуррентным соотношениям, если оцениваемый процесс обладает некоторым дополнительным свойством. Проиллюстрируем возможность получения рекуррентного алгоритма для вычисления коэффициентов L_k , предполагая, что операторы F_k, G_k в формуле (3.17) при каждом $k \in \mathbb{K}$ имеют ограниченные обратные F_k^{-1}, G_k^{-1} , действующие из гильбертова пространства $\mathbf{H}'_k$ в гильбертово пространство $\mathbf{H}'''$.

Рассмотрим временной ряд $\tilde{w}' = \{w'_k, k \in K\}$, определяемый по временному ряду $\tilde{x}$ соотношением

$$w'_{k+1} = x_{k+1} - \bar{A}_k x_k, \quad (3.30)$$

где

$$\bar{A}_k = F_{k+1} F_k^{-1} \quad (3.31)$$

— ограниченный оператор, $\bar{A}_k: H'_k \rightarrow H'_{k+1}$. Как и в лемме 5.1, несложно убедиться, что временной ряд $\tilde{w}'$ имеет ограниченный корреляционный оператор $R_{\tilde{w}'}$ и этот оператор нейтральный, поскольку

$$M w'_k (w'_{k'})^* = 0 \quad \text{при } k \neq k'. \quad (3.32)$$

Таким образом, случайные H'_k -элементы x_k удовлетворяют разностному уравнению

$$x_{k+1} = \bar{A}_k x_k + w'_{k+1}, \quad (3.33)$$

возбуждаемому белым шумом $\tilde{w}' = \{w'_k, k \in K\}$, некоррелированным с начальным H'_1 -элементом $x_1 = a$.

С другой стороны, фильтр (3.21), (3.22) с учетом обозначения (3.31) можно записать в виде

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{A}_k \hat{x}_k + F_{k+1} L_k (y_k - C_k \hat{x}_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

$$\hat{x}_1 = M x_1 = \bar{a}, \quad \bar{A}_k = F_{k+1} F_k^{-1}. \quad (3.35)$$

Напомним, что фильтр (3.34) при начальном условии (3.35) дает решение задачи линейной оптимальной фильтрации с одношаговым прогнозом (см. теорему 5.3). Соотношения (3.34) можно рассматривать как фильтр Калмана—Бьюси для оценивания состояний x_k объекта (3.33) по наблюдениям за его выходами в соответствии с "линейной схемой наблюдений" (3.5). Стандартные рассуждения (см., например, доказательство теоремы 5.1, бесконечная размерность составляющих временных рядов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и "дискретность времени" в этом доказательстве существенной роли не играют) позволяют получить для вычисления операторов $L_k: H''_k \rightarrow H'''$ следующие рекуррентные соотношения:

$$L_k = F_k^{-1} P_k C_k^* (Q''_k + C_k P_k C_k^*)^{-1} Q''_k, \quad (3.36)$$

$$P_{k+1} = F_{k+1} (F_k^{-1} - L_k C_k) P_k (F_k^{-1} - L_k C_k)^* F_{k+1}^* + (R_{\tilde{w}'})_{k+1} + F_{k+1} L_k L_k^* F_{k+1}^*, \quad (3.37)$$

$$P_1 = R_a = M(a - \bar{a})(a - \bar{a})^*. \quad (3.38)$$

В формуле (3.36) через $(Q_k'' + C_k P_k C_k^*)^{-1} Q_k''$ обозначен оператор, обратный в подпространстве $H_k'' = Q_k'' H''$ симметричному оператору $Q_k'' + C_k P_k C_k^*$. Пространство H_k'' инвариантно для последнего оператора, в нем он положительно определен и поэтому ограниченно обратим. Формула (3.36) определяет L_k как линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H'' (фактически из его подпространства H_k'' в гильбертово пространство H'''). Операторы P_k , определяемые рекуррентным соотношением (3.37) при начальном условии (3.38), действуют в инвариантных подпространствах $H_k' = Q_k' H'$ и являются ковариацией погрешности фильтрации

$$P_k = M(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^*, \quad (3.39)$$

наконец, операторы $(R_{\hat{w}}')_{k+1}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (R_{\hat{w}}')_{k+1} &= M w'_{k+1} (w'_{k+1})^* = \\ &= (R_{\hat{x}})_{k+1, k+1} - \bar{A}_k (R_{\hat{x}})_{k, k+1} - (R_{\hat{x}})_{k+1, k} \bar{A}_k^* + \bar{A}_k (R_{\hat{x}})_{k, k} \bar{A}_k^*. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Таким образом, операторные коэффициенты L_k в фильтре (3.21), (3.22) можно вычислять рекуррентно согласно соотношениям (3.26)–(3.28). Разумеется, фактическое использование рекуррентных соотношений возможно, видимо, лишь если подпространства $H_k'' = Q_k'' H''$ конечномерны, тогда обращение операторов в формулах (3.36), (3.37) сводится к обращению матриц соответствующих размеров.

Подчеркнем, что при выводе операторного аналога (3.37) уравнения Риккати не предполагалось, что все подпространства $H_k'' \in H'''$ имеют одинаковую размерность; более того, эти подпространства могут быть бесконечномерными.

Отметим, что при выводе соотношений (3.33), (3.34), (3.36), (3.37) существенно использовалось предположение об ограниченной обратимости операторов $F_k: H''' \rightarrow H_k'$, в этом случае построение формирующего фильтра для временного ряда $\hat{x}$ в форме разностного уравнения (3.33) осуществляется достаточно просто. Из уравнения (3.33), в частности, нетрудно получить уточнение представления (3.17):

$$G_k = F_k H_k, \quad k \in K, \quad (3.41)$$

где H_k — последовательность симметричных положительных операторов в пространстве H' , причем $H_k \geq H_{k'}$, $k \geq k'$ (ср. с (2.46)). С учетом (3.41) формулу (3.17) можно представить в виде

$$(R_{\hat{x}})_{k, k'} = F_k H [\min(k, k')] F_{k'}^*, \quad k, k' \in K. \quad (3.42)$$

Если операторы F_k не являются обратимыми, то установление формулы (3.41) усложняется, однако при некоторых дополнительных предположениях можно воспользоваться рассуждениями, связанными с "расширением" пространств H_k , при котором "расширенный" корреляционный оператор остается квазивырожденным, но его компоненты $\tilde{F}_k, \tilde{G}_k$ уже будут ограниченно обратимыми. В этом случае для коэффициентов L_k в фильтре (3.21), (3.22) можно получить рекуррентные соотношения вполне аналогично тому, как это было сделано в п. 5.2Г).

Д. Пример: рекуррентное оценивание значений временного ряда, порождаемого мультипликативным формирующим фильтром [91]. Вернемся к задаче, рассмотренной в п. 3В: пусть требуется оценить случайные n -векторы x_k , формируемые мультипликативным фильтром (3.23), по наблюдениям за l -векторами y_k , связанными с x_k соотношениями

$$y_k = C_k x_k + w_k'', \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.43)$$

где C_k — детерминированные матрицы размером $l \times n$, $\tilde{w}'' = \{w_k'', k \in K\}$ — стандартный винеровский процесс

$$w_1'' = 0, \quad M w_k'' = 0, \quad M w_k'' (w_{k'}'')^* = \min(k, k') I_l, \quad (3.44)$$

не коррелированный с начальным состоянием $x_1 = a$ фильтра (3.23) и случайными матрицами A_k этого фильтра

$$M w_k'' A_{k'}^* = 0, \quad M w_k'' a^* = 0, \quad k, k' \in K. \quad (3.45)$$

В предположении, что случайные $n \times n$ -матрицы удовлетворяют условиям (3.24), матрица корреляций $(R_{\tilde{x}})_{k,k'}$ временного ряда $\tilde{x}$ квазивырождена и имеет вид (3.28), (3.29). Так как матрица $\bar{A}$ по предположению невырождена, то $n \times n$ -матрицы F_k в данном случае невырождены и в соответствии с предыдущим пунктом для задачи оптимальной фильтрации с одношаговым прогнозом могут быть получены рекуррентные соотношения, которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} L_k &= \bar{A}^k P_k C_k^* (I_l + C_k P_k C_k^*)^{-1}, \\ P_{k+1} &= \bar{A} (I_n - \bar{A}^k L_k C_k) P_k (I_n - \bar{A}^k L_k C_k)^* \bar{A}^* + \\ &\quad + \bar{A}^{k+1} L_k L_k^* (\bar{A}^{k+1})^* + (R_{\tilde{w}'})_{k+1}, \\ P_1 &= R_a = M(a - \bar{a})(a - \bar{a})^*. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Матрицы $(R_{\tilde{w}'})_{k+1}$, $k \in K$, размером $n \times n$ выражаются через исходные данные задачи. Чтобы описать эту зависимость в

"явной форме", введем линейный оператор $\mathfrak{A}$, отображающий множество $\{R\}$ симметричных $n \times n$ -матриц R в себя по правилу

$$(\mathfrak{A}R)_{p,p'} = \sum_{q=1}^n \sum_{q'=1}^n R_{p,q,p',q'} R_{p',q'}, \quad (3.47)$$

где числа $R_{p,q,p',q'}$ находятся по формулам (3.24), $R_{p',q'}$ — элементы матрицы R . Простые вычисления позволяют получить следующую формулу:

$$(R_{\bar{w}'})_{k+1} = \mathfrak{A}^{k+1} R_a, \quad (3.48)$$

где $n \times n$ -матрица R_a находится по формуле (3.38).

Соотношения (3.46)–(3.48) задают рекуррентный алгоритм вычисления оптимальных оценок в задаче фильтрации с одношаговым прогнозом в предположении, что оцениваемые случайные векторы x_k определяются мультипликативным формирующим фильтром (3.23), а "наблюдаемые" величины y_k связаны с ними схемой наблюдения (3.43).

Приложение к главе 5

А. Доказательство теоремы 5.1. Воспользуемся известной интерпретацией оптимальных оценок $\hat{x}(t)$, согласно которой погрешности оценивания $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ "ортогональны" наблюдаемым случайным величинам $y(t')$, $t' \leq t - \tau$,

$$M[x(t) - \hat{x}(t)]y^*(t') = 0, \quad t' \leq t - \tau. \quad (\text{П.1})$$

Переписывая соотношение (П.1) в терминах соответствующих матриц корреляций, приходим к интегральному "нестационарному" уравнению Винера — Хопфа

$$R_{xDy}(t, t') = h(t, t') + \int_{t_0}^{t-\tau} h(t, t'') K(t'', t') dt'', \quad t' \leq t - \tau, \quad (\text{П.2})$$

или в операторных терминах

$$[R_x D y]_{[\tau]} = [h(I + K)]_{[\tau]}, \quad (\text{П.3})$$

где использована операция $[\tau]$ "усечения" интегрального оператора: если R — интегральный оператор с ядром $R(t, t')$, то $R_{[\tau]}$ — интегральный оператор с ядром $R_{[\tau]} = R(t, t') 1(t - t' - \tau)$, т.е. ядро $R(t, t')$ обнуляется при $t < t' + \tau$. Пусть Q — оператор

с ядром $Q(t, t')$, удовлетворяющим при $t \geq t'$ уравнению (1.4), $Q(t, t') = 0$ при $t < t'$. Оператор Q порождается задачей обратной факторизации (1.9). Уравнение Винера — Хопфа (П.3) можно переписать в виде

$$[R_{xDy}]_{[\tau]} = [h(I + B)(I + B^*)]_{[\tau]}, \quad (\text{П.4})$$

где $B = Q(I - Q)^{-1}$ — интегральный оператор с ядром $B(t, t')$, $B(t, t') = 0$ при $t' > t$. Введем оператор

$$P = h(I + B) + [R_{xDy}]_{[\tau]}(I + B^*)^{-1} - [h(I + B)B^*]_{[\tau]}(I + B^*)^{-1}, \quad (\text{П.5})$$

где использовано обозначение

$$R_{[\tau]} = R - R_{[\tau]}. \quad (\text{П.6})$$

Из (П.6) следует, что для произвольного интегрального оператора выполнены равенства

$$[R_{[\tau]}]_{[\tau]} = 0, \quad [R_{[\tau]}]_{[\tau]} = 0, \quad (\text{П.7})$$

а потому из (П.5) в силу (П.4) получаем

$$[P(I + B^*)]_{[\tau]} = [h(I + B)(I + B^*)]_{[\tau]} = [R_{xDy}]_{[\tau]},$$

а также

$$\begin{aligned} [P(I + B^*)]_{[\tau]} &= [h(I + B)(I + B^*)]_{[\tau]} + [R_{xDy}]_{[\tau]} - [h(I + B)B^*]_{[\tau]} = \\ &= [h(I + B)]_{[\tau]} + [R_{xDy}]_{[\tau]} = [R_{xDy}]_{[\tau]}, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

поскольку

$$[h(I + B)]_{[\tau]} = h(I + B).$$

Учитывая (П.6), из (П.7), (П.8) находим $P(I + B^*) = R_{xDy}$, откуда $P = R_{xDy}(I + B^*)^{-1}$. Следовательно,

$$P_{[\tau]} = [R_{xDy}(I + B^*)^{-1}]_{[\tau]}. \quad (\text{П.9})$$

С другой стороны, из (П.5) следует

$$P_{[\tau]} = [h(I + B)]_{[\tau]} = h(I + B),$$

а потому с учетом формулы (П.9) имеем

$$h = P_{[\tau]}(I + B)^{-1} = [R_{xDy}(I + B^*)^{-1}]_{[\tau]}(I + B)^{-1}. \quad (\text{П.10})$$

Формула (П.10) определяет весовой оператор оптимального фильтра. С учетом формулы $(I + B)^{-1} = (I - Q)$ ее можно переписать и так:

$$h = [R_{xDy}(I - Q^*)]_{[\tau]} (I - Q). \quad (\text{П.11})$$

Оператор

$$g = [R_{xDy}(I - Q^*)]_{[\tau]} \quad (\text{П.12})$$

в силу условия (3) теоремы является интегральным, и его ядро $g(t, t')$ определяется при $t \geq t' - \tau$ формулой (1.7). Обозначая $Dv = (I - Q)Dy$, что совпадает с (1.8), и учитывая формулы (1.2), (П.11), (П.12), приходим к фильтру (1.6). Теорема 5.1 доказана.

Б. Доказательство теоремы 5.2. Весовой оператор оптимального неупреждающего фильтра в соответствии с (П.12) определяется по формуле

$$h_{\text{opt}} = gW, \quad (\text{П.13})$$

где $g = R_{[\tau]}$ — τ -неупреждающая компонента интегрального оператора $R = R_{sDu}W^*$, $W = I - Q$ — результат решения задачи обратной факторизации (1.9). В силу соотношения (1.14) ("линейная схема наблюдения") обновляющий процесс WDu имеет вид

$$WDu = Du - C\hat{s}, \quad (\text{П.14})$$

где C — оператор умножения в $L_2(n, T)$ на матричную функцию $C(t)$, так что рекурсивная форма фильтра, устанавливаемая теоремой 5.1, принимает вид

$$\hat{s} = g(Du - C\hat{s}). \quad (\text{П.15})$$

Применяя оператор D обобщенного дифференцирования к обеим частям соотношения

$$(R_{[0]}\varphi)(t) = \int_{t-\tau}^t R(t, t')\varphi(t') dt',$$

где $R(t, t')$ — ядро интегрального оператора (П.14), получаем

$$DR_{[\tau]} = [DR]_{[\tau]} - K, \quad (\text{П.16})$$

где K — оператор умножения на матричную функцию $-R(t, t)$:

$$(K\varphi)(t) = -R(t, t)\varphi(t), \quad \varphi(t) \in L_2(m, T). \quad (\text{П.17})$$

Соотношение (1.11) в "операторной форме" можно переписать так:

$$Ds = As + Dw', \quad Du = Cs + Dw'', \quad (\text{П.18})$$

и сделанные предположения о белом шуме ОСП

$$Dw = \begin{bmatrix} Dw' \\ Dw'' \end{bmatrix}$$

и некоррелированности с ним начального вектора $x(t_s) = a$ приводят к соотношениям

$$MDw(Dw)^* = R_{Dw} = N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.19})$$

где N — оператор умножения в $L_2(n+l, T)$ на матричную функцию $N(t)$, при этом

$$MDw(Ds)^* = R_s C^*.$$

В силу (П.14), (П.18), (П.19) имеем

$$\begin{aligned} DR &= R_{DsDu} W^* = MDs (Du)^* W^* = M(As + Dw)(Du)^* W^* = \\ &= AR_{sDu} W^* + R_{Dw'Du} W^* = \\ &= AR + R_{Dw'} C^* W^* + R_{Dw'Dw''}. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Поскольку A, N_{12} — операторы умножения на матричные функции (нейтральные операторы) и W — каузальный оператор, то с учетом (П.19), (П.16), (П.14) имеем

$$\begin{aligned} [AR_{[0]}]_{[0]} &= AR_{[0]}, & DR_{[0]} &= AR_{[0]} - R, \\ [R_{Dw'} W C_s]_{[0]} &= 0, & [N_{12}]_{[0]} &= N_{12}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D\hat{s} &= DR_{[0]} W Du = AR_{[0]} W Du - K W Du = \\ &= A_g W Du - K(Du - Cs) = A\hat{s} - K(Du - C\hat{s}). \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Соотношение (П.21) означает, что СП $\hat{x}$ допускает обобщенное дифференцирование. Перепишем соотношение (П.21) в виде стохастического дифференциального уравнения и учитывая обозначения (1.17), (1.22), приходим к уравнению (1.23). Начальное условие $M\hat{s}(t_s) = 0$ приводит при этом к (1.24). Покажем, как вычислять матричный коэффициент $K(t) = -R(t, t)$, не прибегая к процедуре факторизации либо решению уравнения Гельфанда — Левитана. С этой целью рассмотрим линейный фильтр (1.23) с заданным (не обязательно оптимальным) матричным коэффициентом $\tilde{K}(t)$. Учитывая систему (1.11), для погрешности $\tilde{e}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ оценивания получим уравнение

$$\begin{aligned} d\tilde{e}(t) &= [A(t) + \tilde{K}(t)C(t)] \tilde{e}(t)dt + \|I_n, \tilde{K}(t)\| dw(t), \\ \tilde{e}(t_s) &= x(t_s) - \bar{a}, \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

где винеровский процесс w имеет структуру (1.13). Пусть $\Phi(t, t')$ — матричная функция, определяемая соотношениями

$$\frac{\partial \Phi(t, t')}{\partial t} = [A(t) + \tilde{K}(t)C(t)] \Phi(t, t'), \quad \Phi(t', t') = I_n. \quad (\text{П.23})$$

Тогда погрешность $\varepsilon(t)$ в силу уравнения (П.22) можно представить в виде

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \Phi(t, t_s) \tilde{\varepsilon}(t_s) + \int_{t_s}^{t-\tau} \Phi(t_s, t') \left\| I_n, \tilde{K}(t') \right\| dw(t'). \quad (\text{П.24})$$

Пусть

$$\tilde{P}(t) = M \tilde{\varepsilon}(t) [\tilde{\varepsilon}(t)]^* \quad (\text{П.25})$$

— матрица ковариаций погрешности оценивания. С учетом δ -коррелированности ОСП Dw из (П.24) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) = & \Phi(t, t_s) R_a \Phi^*(t, t_s) + \\ & + \int_{t_s}^{t-\tau} \Phi(t, t') \left\| I_n, \tilde{K}(t') \right\| N(t') \left\| I_n, \tilde{K}(t') \right\|^* \Phi^*(t', t) dt', \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

где $N(t)$ — матрица интенсивностей (1.13) винеровского процесса (1.12). С учетом соотношений (П.23) нетрудно убедиться, что определяемая формулой (П.26) симметричная матричная функция $\tilde{P}(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = & [A(t) + \tilde{K}(t)C(t)] \tilde{P}(t) + \\ & + \tilde{P}(t) [A(t) + \tilde{K}(t)C(t)]^* + \left\| I_n, \tilde{K}(t) \right\| N(t) \left\| I_n, \tilde{K}(t) \right\|^* \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

и начальному условию

$$\tilde{P}(t_s) = R_a. \quad (\text{П.28})$$

Правая часть в уравнении (П.27) непрерывно зависит от матрицы $\tilde{K}(t)$. При малом вещественном числе Δ поэтому справедливо соотношение

$$\tilde{P}(t + \Delta) - \tilde{P}(t) = \Delta \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} + o(\Delta),$$

которое показывает, что при оптимальном матричном коэффициенте $\tilde{K}(t) = K(t)$ правая часть в формуле (П.27) должна принимать наименьшее значение (в смысле квадратичной формы)

при фиксированном значении $\tilde{P}(t) = P(t)$. Так как правая часть в (П.27) квадратично зависит от $\tilde{K}(t)$, то минимизация ее по $\tilde{K}(t)$ осуществляется просто и приводит к соотношению (1.14), уравнение (П.27) при этом совпадает с (1.27). Теорема 5.2 доказана.

В. Доказательство теоремы 5.3. Утверждение теоремы почти очевидно. В силу (2.2), (2.4) при $t \geq t'$ имеем

$$R_{xDy}(t, t') = R_x(t, t')C^*(t') = F(t)G^*(t')C^*(t'),$$

а потому весовая функция $g(t, t')$ оптимального фильтра в теореме 5.1 также оказывается квазивыврожденной,

$$g(t, t') = F(t)L(t'), \quad t \geq t', \quad (\text{П.29})$$

где

$$L(t) = G^*(t)C^*(t) - \int_{t_*}^{t-\tau} G^*(t'')C^*(t'')Q(t'', t)dt'', \quad (\text{П.30})$$

$G(t)$ — матричная функция из формулы (2.2); $Q(t, t')$ — решение уравнения Гельфанда — Левитана (см. разд. 1). Оптимальный 0-неупреждающий фильтр (см. теорему 5.1) поэтому принимает вид

$$\hat{x}(t) = \int_{t_*}^{t-\tau} g(t, t')d\tilde{v}(t') + \hat{x}(t) = F(t) \int_{t_*}^{t-\tau} L(t')d\tilde{v}(t') + \bar{x}(t), \quad (\text{П.31})$$

т. е. приходим к (2.7) при

$$\eta(t) = \int_{t_*}^{t-\tau} L(t')d\tilde{v}(t'). \quad (\text{П.32})$$

Дифференцируя $\eta(t)$ по t и учитывая соотношение (2.4) (в силу которого $d\tilde{v}(t) = dy(t) - C(t)\hat{x}(t)dt$), получаем (2.8), начальное условие $\eta(t_*) = 0$ непосредственно следует из формулы (П.32). Теорема 5.3 доказана.

Г. Доказательство леммы 5.1. Из формулы (2.13) имеем

$$\begin{aligned} R_w(t, t') &= R_x(t, t') - \int_{t_*}^{t'} R_x(t, t'')A^*(t'')dt'' - \int_{t_*}^t A(t'')R_x(t'', t')dt'' + \\ &+ \int_{t_*}^t dt'' \int_{t_*}^{t'} dt''' A(t'')R_x(t'', t''')A^*(t'''). \quad (\text{П.33}) \end{aligned}$$

Используя формулы (2.11), (2.2), из (П.33) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_w(t, t')}{\partial t} &\equiv 0 \quad \text{при } t \geq t', \\ \frac{\partial R_w(t, t')}{\partial t} &= \frac{dG(t)}{dt} F^* - \int_{t_*}^{t'} \frac{\partial R_x(t, t'')}{\partial t} A^*(t'') dt'' - A(t)G(t)F^*(t') + \\ &+ A(t) \int_{t_*}^{t'} R_x(t, t'') A^*(t'') dt'' \quad \text{при } t < t'. \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

Формулы (П.33), (П.34) означают, что

$$\frac{\partial^2 R_w(t, t')}{\partial t \partial t'} = \delta(t - t') N_{11}(t), \quad (\text{П.35})$$

где матричная функция $N_{11}(t)$ определяется соотношением (2.13). Другими словами, ОСП Dw является процессом белого шума (δ -коррелированным процессом) с матрицей интенсивностей $N_{11}(t)$. Лемма 5.1 доказана.

Д. Доказательство леммы 5.2. Основным моментом доказательства леммы 5.2 является установление δ -коррелированности ОСП $\tilde{w}'$, определяемого равенством (2.36), где матричная функция $\tilde{A}(t)$ вычисляется по формулам (2.33), (2.18) и СП $\zeta(t)$ — по формуле (2.11). Свойство δ -коррелированности ОСП $\tilde{w}'$ следует из леммы 5.1, возможная бесконечномерность значений СП ζ роли не играет. Равенство (2.36) можно переписать в виде дифференциального стохастического уравнения (2.34). В свою очередь, оптимальные оценки $\hat{\zeta}(t)$ вычисляются по формуле

$$\hat{\zeta}(t) = \tilde{F}(t)\eta(t), \quad (\text{П.36})$$

где СП η определяется соотношением

$$d\eta(t) = \tilde{L}(t) \left[dy(t) - \tilde{C}(t) \left[\tilde{F}(t)\eta(t) + M\hat{\zeta}(t) \right] dt \right]. \quad (\text{П.37})$$

Это соотношение устанавливается точно так же, как и (2.8). Равенство (П.36) преобразуется к виду (см. переход от (2.8) к (2.10))

$$d\hat{\zeta}(t) = \tilde{A}(t)\hat{\zeta}(t)dt + \tilde{K}(t) \left[dy(t) - \tilde{C}(t)\hat{\zeta}(t)dt \right], \quad (\text{П.38})$$

где

$$\tilde{K}(t) = \tilde{F}(t)\tilde{L}(t), \quad \hat{\zeta}(t_*) = M\zeta(t_*).$$

Рассматривая (П.38) как первое уравнение фильтра Калмана — Бьюси по отношению к "объекту" (2.34) и учитывая формулу (2.25), для оптимального коэффициента $\tilde{K}(t)$ получаем в соответствии с теоремой 5.1 формулу (2.33), где операторная функция $\tilde{P}(t)$ определяется уравнением Риккати (2.31) при начальном условии (2.32). Лемма 5.2 доказана.

Е. Доказательство леммы 5.3. Из равенства (2.34) находим

$$\frac{\partial R_{\zeta}(t, t')}{\partial t} = \tilde{A}(t)R_{\zeta}(t, t').$$

Здесь учтено, что $M\zeta(t)[d\tilde{w}(t')]^* = 0$, $t, t' \in T$. Так как матричная функция $R_{\zeta}(t, t')$ квазивырождена (см. (2.22)), то при $t > t'$ получаем

$$\left[\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} - \tilde{A}(t)\tilde{F}(t) \right] \tilde{G}^*(t') = 0, \quad t > t'.$$

Из неравенства (2.19) и невырожденности матричной функции $R_{\zeta}(t, t')$ следует неравенство $\det \tilde{G}(t) \neq 0$, а потому

$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \tilde{A}(t)\tilde{F}(t). \quad (\text{П.39})$$

Первая "компонента" матричного уравнения (П.39) с учетом обозначений (2.43) приводит к (2.45). Лемма 5.3 доказана.

Ж. Доказательство леммы 5.4. Из уравнения (2.34) находим

$$\zeta(t) = \tilde{\Phi}(t, t_s)\zeta(t_s) + \int_{t_s}^t \tilde{\Phi}(t, t') d\tilde{w}(t'), \quad (\text{П.40})$$

где матричная функция $\tilde{\Phi}(t, t')$ определяется формулами (2.49). В силу δ -коррелированности ОСП $D\tilde{w}$ из (П.40) получаем

$$R_{\zeta}(t, t') = \tilde{\Phi}(t, t_s)R_{\zeta}(t_s, t_s)\tilde{\Phi}^*(t_s, t') + \\ + \int_{t_s}^{\min(t, t')} \tilde{\Phi}(t, t'')\tilde{N}(t'')\tilde{\Phi}^*(t'', t') dt'', \quad (\text{П.41})$$

где $N(t)$ — матрица интенсивностей ОСП $D\tilde{w}$:

$$M(D\tilde{w}')(t)(D\tilde{w}')^*(t') = N(t)\delta(t - t').$$

Полагая $t > t'$, из (П.41) находим

$$\begin{aligned}
 R_{\zeta}(t, t') &= \tilde{\Phi}(t, t_s) \left\{ R_{\zeta}(t_s, t_s) + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_s}^{t'} [\tilde{\Phi}(t'', t_s)]^{-1} \tilde{N}(t'') [\tilde{\Phi}^*(t_s, t'')]^{-1} dt'' \right\} [\tilde{\Phi}(t', t_s)]^* = \\
 &= \tilde{\Phi}(t, t_s) H(t') [\tilde{\Phi}(t', t_s)]^*, \quad (\text{П.42})
 \end{aligned}$$

но

$$R_x(t, t') = E R_{\zeta}(t, t') E^* \quad (\text{П.43})$$

(см. (2.21), (2.24)). Из (П.43), (П.42) следует формула (2.47) при

$$F(t) = E \tilde{\Phi}(t, t_s),$$

$$H(t) \cong \int_{t_s}^t [\tilde{\Phi}(t'', t_s)]^{-1} \tilde{N}(t'') [\tilde{\Phi}^*(t_s, t'')]^{-1} dt''.$$

Лемма 5.4 доказана.

ГЛАВА 6

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Выше при рассмотрении задачи оптимальной фильтрации предполагалось, что оценивание значений ненаблюдаемого процесса осуществляется с помощью линейного фильтра. Такое предположение во многих прикладных задачах представляется естественным и в то же время позволяет значительно продвинуться при изучении свойств оптимального фильтра. Отказ от предположения линейности оценок делает задачу фильтрации существенно более сложной в плане получения эффективных алгоритмов обработки наблюдаемого процесса, хотя качество фильтрации при этом может существенно улучшиться (уменьшится погрешность фильтрации) [60, 76, 95, 98, 99]. Содержательные результаты по нелинейной фильтрации получены при специальных предположениях о свойствах частично наблюдаемого процесса (конечномерность и марковость процесса, "линейность схемы наблюдения" и проч.). В некоторых случаях задачу нелинейной оптимальной фильтрации удается переформулировать как задачу линейной фильтрации, в которой в качестве "наблюдаемого" процесса выступает нелинейная функция исходного наблюдаемого процесса. Подобная идея разрабатывалась уже в работах Н. Винера — основоположника кибернетики как науки о системах "любой природы, способных воспринимать, хранить и перерабатывать информацию и использовать ее для управления и регулирования" (А. Н. Колмогоров, см. предисловие к [115]). Реализация этой идеи приводит к рассмотрению фильтра как линейной комбинации нелинейных неупреждающих функционалов от наблюдаемого процесса, заданного с точностью до коэффициентов этой линейной комбинации (см., например, [86]). При конкретном выборе таких функционалов приходим к представлению нелинейного фильтра в виде интеграла (либо ряда) Вольтерра [19]. Подобная идея сведения нелинейной задачи к линейной — достаточно распространенный прием (см., например, [41], где эта идея используется для синтеза нелинейного оптимального регулятора в задаче управления линейным объектом).

При нелинейной оптимальной фильтрации не удастся, как правило, ограничиться несколькими статистическими моментами случайного частично наблюдаемого процесса, а придется иметь дело с апостериорными распределениями (редкое исключение представляют задачи фильтрации с гауссовыми и условно-гауссовыми процессами, для которых при ряде дополнительных условий удастся получить рекуррентные схемы оптимальной фильтрации без явного использования распределений оцениваемого и наблюдаемого процессов (см., например, [70]).

В данной главе рассматриваются некоторые задачи нелинейной фильтрации для временных рядов. Хотя многие из приводимых ниже результатов могут быть перенесены и на процессы в непрерывном времени, строгое изложение соответствующей теории требует других, существенно более сложных математических средств, ее изложение выходит за рамки данной книги.

К нелинейной фильтрации ниже отнесены также некоторые задачи минимаксной фильтрации, в которых критерием оптимальности служит не среднеквадратичная погрешность оценивания, а наихудшая по множеству реализаций оцениваемого и наблюдаемого процессов либо модификация такой погрешности (гарантирующий подход). Этой проблематике посвящена обширная литература как в задачах собственно фильтрации [48, 49, 52, 58, 63, 104, 128, 153, 159], так и в задачах гарантирующего управления [2, 3, 11–13, 59, 62, 82, 135]. В случае минимаксной фильтрации не используются статистические свойства обрабатываемых сигналов и соответствующие результаты могут быть применены для оценивания временных рядов, не являющихся случайными процессами.

1. Постановка задачи нелинейной оптимальной фильтрации

Пусть T — конечное либо счетное числовое множество ("дискретное время"), ограниченное снизу. Без ограничения общности будем считать, что

$$T = \{1, 2, \dots, t_*\}, \quad t_* \leq \infty. \quad (1.1)$$

Пусть на множестве T определена последовательность (временной ряд) комплексных p -векторов z_t , $t \in T$. Временной ряд

$z = \{z_t, t \in T\}$ считается имеющим следующую структуру:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где последовательности $x = \{x_t, t \in T, x_t \in C^n\}$ и $y = \{y_t, t \in T, y_t \in C^m\}$, $p = n + m$, интерпретируются как ненаблюдаемая и наблюдаемая компоненты частично наблюдаемого временного ряда z . Задача фильтрации в наивной формулировке состоит в "оценивании" составляющих x_t ненаблюдаемого временного ряда x с помощью наблюдаемого временного ряда y . Точная постановка задачи фильтрации подразумевает пояснение того, что понимается под оценкой вектора x_t . Обычно требуется, чтобы оценка была наилучшей в том или ином смысле, тогда говорят об оптимальном оценивании. Оценивание величин x_t , рассматриваемое как процесс, развивающийся во времени, называется *фильтрацией*, под оптимальной фильтрацией понимается процесс получения последовательности оптимальных оценок.

Предположим, что для каждого фиксированного момента времени $t \in T$ выделено множество F^t борелевских отображений пространства C^t в пространство C^n , фиксирована последовательность $\{F_t, t \in T\}$ отображений $F_t \in F^t: C^t \rightarrow C^n$. Соотношение

$$\hat{x}_t = F_t(y), \quad t \in T, \quad (1.3)$$

порождает последовательность $\hat{x} = \{\hat{x}_t, t \in T\}$ n -векторов $\hat{x}_t$, которые будем интерпретировать как оценки соответствующих векторов x_t в соответствующие моменты времени, осуществляемые с помощью реализации наблюдаемого временного ряда $y = \{y_t, t \in T\}$ и набора $\{F_t, t \in T\}$ отображений $F_t \in F^t$. Соотношение (1.3) при фиксированном наборе функций $F_t \in F^t, t \in T$, определяет *фильтр*. Фильтр (1.3) называется *неупреждающим*, если для каждого $t \in T$ функция F_t не зависит от переменных $y_{t'}, t' > t$, т. е.

$$F_t(y) = F_t(y^t), \quad y^t = \{y_{t'}, 1 \leq t' \leq t\}.$$

В этом случае говорят также о неупреждающих оценках $\hat{x}$. Оценка $\hat{x}_t$ называется *линейной*, если функция $F_t(y)$ линейна по y ; линейность функций $F_t(\cdot)$ при всех $t \in T$ приводит к *линейному фильтру*.

Предположим, что в момент $t \in T$ на множестве оценок (1.3), $F_t \in F^t$, задан неотрицательный функционал $J_t = J_t(F_t)$, характеризующий по определению качество оценки $\hat{x}_t$. Тогда задача

оптимального оценивания может быть сформулирована следующим образом: требуется найти функцию $F_t \in F^t$, обеспечивающую наименьшее значение функционала J_t . Более точно задача оптимального оценивания может быть записана так:

$$J_t(F_t) \rightarrow \inf_{F_t \in F^t} \quad (1.4)$$

и состоит в вычислении нижней грани в правой части соотношения (1.4); установлении условий, при которых задача оптимального оценивания разрешима (т. е. нижняя грань в (1.4) достижима), нахождении оптимального решения или хотя бы построении последовательности функций $\{F_t^{(n)} \in F^t\}$, обладающих свойством

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_t(F_t^{(l)}) = \inf_{F_t \in F^t} J_t(F_t) \quad (1.5)$$

(соответствующая последовательность оценок называется *оптимизирующей*). Обычно множество F^t бесконечно, поэтому решение перечисленных задач может оказаться нетривиальной проблемой.

Задача оптимальной фильтрации трактуется как задача оптимального оценивания при каждом $t \in T$, в этом случае важное значение имеет форма представления оптимального фильтра, в частности, иногда оптимальные оценки $\hat{x}_t$ удается вычислять с помощью рекуррентных алгоритмов, что предопределяет преимущество таких фильтров при реализации их с помощью современных ЭВМ.

Успешность решения упомянутых задач оптимального оценивания и фильтрации существенно зависит как от вида функционалов качества (критериев оценивания) $J_t(\cdot)$, $t \in T$, так и от выбора множеств F^t , определяющих допустимые оценки. В частности, задача оптимальной фильтрации может значительно упроститься, если ограничиться *линейными оценками*.

Существует традиционный набор критериев оценивания, выбор того или иного критерия зависит от конкретной прикладной задачи и от доступных разработчику фильтров средств реализации оценок. Так, для случайных временных рядов в качестве критерия часто используется среднеквадратичная погрешность оценивания и различные модификации отношения сигнал/помеха. Для нестохастических временных рядов иногда используются минимаксные критерии. Остановимся на этом вопросе подробнее.

А. Фильтрация стохастических временных рядов. Предположим, что временной ряд (1.2) состоит из случайных p -векторов. Примем, что случайный временной ряд $y = \{y_t, t \in T\}$ и множество F^t отображений пространства C^{lt} в пространство C^n таковы, что при любых $t \in T$, $F_t \in F^t$ случайные n -векторы

$$\hat{x}_t(\omega) = F_t(y(\omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad (1.6)$$

имеют конечные средние $\bar{x}_t = Mx_t(\omega)$ и матрицы ковариаций $M(x_t(\omega) - \bar{x}_t)(x_t(\omega) - \bar{x}_t)^*$. Тем самым при каждом $t \in T$ определена величина

$$J_t(F_t) = M|x_t(\omega) - F_t(y(\omega))|^2, \quad (1.7)$$

называемая среднеквадратичной погрешностью оценивания в момент t .

Ограничимся рассмотрением временных рядов $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, распределения вероятностей которых имеют плотности. Поясним это понятие и введем соответствующие обозначения. "Отрезок" $z^t(\omega) = \{z_{t'}(\omega), 0 \leq t' \leq t\}$ случайного временного ряда z можно рассматривать как случайный вектор со значениями в пространстве C^{pt} . Обозначим через $D_\epsilon^{[pt]}(z^t)$ шар радиусом ϵ с центром в некоторой точке $z^t = \{z_{t'}, 0 \leq t' \leq t\} \in C^{pt}$,

$$D_\epsilon^{[pt]}(z^t) = \left\{ \tilde{z}^t : \sum_{t' \leq t} |\tilde{z}_{t'} - z_{t'}|^2 \leq \epsilon^2 \right\}, \quad (1.8)$$

через $V_\epsilon^{[pt]}$ обозначим (лебегов) объем этого шара. Предположим, что существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P\{z^t(\omega) \in D_\epsilon^{[pt]}(z^t)\}}{V_\epsilon^{[pt]}}, \quad (1.9)$$

где $P\{\cdot\}$ обозначает вероятность события $\{\cdot\}$. Величина (1.9) называется плотностью распределения вероятности случайного вектора $z^t = z^t(\cdot)$ в точке $z^t \in C^{pt}$. Обозначим эту плотность через $p_t(\cdot)$ и будем предполагать, что для временного ряда z плотности $p_t(\cdot)$ существуют при каждом $t \in T$ во всех точках $z^t \in C^{pt}$. Определяемая формулой (1.9) плотность $p_t(\cdot)$ является измеримой неотрицательной функцией векторных величин $z^t = (z_1, \dots, z_t)$, причем она интегрируема на множестве C^{pt} и

$$\int_{C^{pt}} p_t(z^t) dz_1 \dots dz_t = 1. \quad (1.10)$$

Обратим еще раз внимание на то, что символ z^t обозначает то точку евклидова пространства $\mathbb{C}^{p^t}$, то случайную величину $z^t = z^t(\cdot)$. Такое двухзначное использование символа z^t не приводит к недоразумениям, поскольку из контекста каждый раз ясно, о чем идет речь. Так, плотность $p_t = p_t(\cdot)$ определена на множестве $\mathbb{C}^{p^t}$ и потому величина $p_t(z^t)$ определяет ее значение в точке z^t унитарного пространства $\mathbb{C}^{p^t}$, если же речь идет о случайной величине z^t , то подразумевается $z^t = z(\cdot) = \{z^t(\omega), \omega \in \Omega\}$.

Будем предполагать, что при каждом $t \in T$ условная плотность

$$p_t(x_t | y^t) = \frac{\int_{\mathbb{C}^{p(t-1)}} p_t(z^t) dx_1 \dots dx_{t-1}}{\int_{\mathbb{C}^{p(t)}} p_t(z^t) dx_1 \dots dx_t} \quad (1.11)$$

имеет конечное среднее значение

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t(y^t) = \int_{\mathbb{C}^n} x p_t(x | y^t) dx. \quad (1.12)$$

Здесь $z = \text{col}(x, y)$, $y^t = (y_1, \dots, y_t) \in \mathbb{C}^{lt}$. Неотрицательная функция $p_t(\cdot | y^t) = \{p_t(x | y^t), x \in \mathbb{C}^n\}$, определяемая формулой (1.11), называется *апостериорной плотностью* распределения вероятностей случайной величины $x_t = x_t(\cdot)$ при фиксированной реализации $y^t(\omega) = y^t$ предыстории наблюдаемого временного ряда $y(\cdot)$.

Лемма 6.1. *Предположим, что случайный частично наблюдаемый временной ряд (1.2) таков, что в каждый момент t распределение случайных величин z^t имеет плотность p_t , для которой величина (1.12) конечна при всех $y^t \in \mathbb{C}^{lt}$. Предположим также, что F^t — множество всех борелевских отображений пространства $\mathbb{C}^{lt}$ в пространство $\mathbb{C}^n$. Тогда задача (1.4), (1.7) разрешима и оптимальное отображение $F_t^{\text{opt}}(\cdot)$ определяется формулой*

$$F_t^{\text{opt}}(y^t) = M(x_t | y^t) = \hat{x}_t. \quad (1.13)$$

Утверждение леммы 6.1 хорошо известно, ее доказательство почти очевидно, для полноты изложения оно приведено в Приложении.

Определяемое формулой (1.12) среднее значение $\hat{x}_t$ случайной величины x_t является борелевской функцией векторного аргумента $y^t \in C^t$. Если в формуле (1.12) вместо y^t использовать реализацию $y^t(\omega)$ случайной величины $y^t(\cdot)$, то она определит реализацию случайной величины $\hat{x}_t(\cdot)$:

$$\hat{x}_t(y^t(\omega)) = [M(x_t | y^t)](\omega) = M(x_t | y^t(\omega) = y^t). \quad (1.14)$$

Случайная величина $\hat{x}_t(y^t(\cdot)): \Omega \rightarrow C^n$ называется условным математическим ожиданием случайного вектора $x_t = x_t(\cdot)$ при условии σ -алгебры, порождаемой случайными величинами $y_{t'}(\cdot); t' \leq t$. Таким образом, оптимальная оценка $\hat{x}_t$ является детерминированной функцией наблюдаемой реализации случайной величины $y^t(\omega)$, и это свойство "заложено" в формулу (1.13), где упомянутая детерминированная функция величин $y^t = \{y_{t'}, t' \leq t\}$ обозначена через $F_t^{\text{opt}}(\cdot)$. "Явное" выражение функции $F_t^{\text{opt}}(\cdot)$ определяется выражением

$$F_t^{\text{opt}}(y^t) = \int_{C^n} x p_t(x | y^t) dx. \quad (1.15)$$

Итак, решение поставленной задачи оптимальной неупреждающей фильтрации свелось к вычислению условных математических ожиданий оцениваемых случайных величин по данным задачи, или, с точностью до вычисления многомерных интегралов (1.12), (1.11) — к вычислению совокупной плотности распределения $p_t(z^t)$ отрезков z^t частично наблюдаемого временного ряда. К сожалению, задача "вычисления" многомерных плотностей распределения в общем случае представляет собой едва ли преодолимую вычислительную проблему. Дальнейшее продвижение по пути алгоритмизации процесса оптимальной фильтрации удастся осуществить при весьма специальных предположениях о свойствах частично наблюдаемого временного ряда. Более подробно эта задача обсуждается в разд. 2.

Б. "Геометрическая" интерпретация задачи оптимальной фильтрации. Обозначим через $H_2(n)$ множество всех случайных величин со значениями в C^n , имеющих конечные моменты до второго порядка. Множество $H_2(n)$ можно рассматривать как комплексное гильбертово пространство по отношению к скалярному произведению

$$\langle x', x'' \rangle_{H_2} = M(x')^* x''. \quad (1.16)$$

Задачу оптимального оценивания часто можно интерпретировать как задачу нахождения расстояния от заданной точки $x \in H_2(n)$ до заданного подпространства в $H_2(n)$. Последняя задача имеет смысл, если принять, что множество F^t отображений $F_t: C^{lt} \rightarrow C^n$, фигурирующее в (1.4), замкнуто относительно операций сложения его элементов и умножения их на комплексные числа, т. е. является линейным множеством отображений пространства C^{lt} в пространство C^n . (Сами отображения $F_t(\cdot)$ не обязаны быть линейными!) Простоты ради будем предполагать, что случайные величины вида $F_t(y^t(\cdot))$, $F_t \in F^t$, имеют конечные статистические моменты до второго порядка. Линейную оболочку таких случайных элементов обозначим $\tilde{H}_2(F^t)$, $\tilde{H}_2(F^t) \subseteq H_2(n)$.

Для произвольной точки $x_t(\cdot) \in H_2(n)$ имеет смысл неотрицательная величина (1.7), которая может рассматриваться как квадрат расстояния от этой точки до точки $F_t(y^t(\cdot)) \in \tilde{H}_2(F^t)$. Тем самым задачу (1.4) можно интерпретировать как задачу нахождения элемента из множества $\tilde{H}_2(F^t)$, на котором реализуется расстояние от элемента $x_t(\cdot)$ до этого множества. Нижняя грань в (1.4) всегда достигается на некоторой случайной величине $\hat{x}$, принадлежащей замкнутой линейной оболочке множества $\tilde{H}_2(F^t)$, — хорошо известный факт геометрии гильбертовых пространств, так что если множество $\tilde{H}_2(F^t)$ замкнуто в $H_2(n)$, то задача (1.4) разрешима.

Примем, что множество F^t имеет следующую структуру. Пусть Q^t — некоторое множество борелевских отображений пространства C^{lt} в пространство C^l . Тогда включение $F_t \in F^t$ означает, что функция $F_t(y^t)$ имеет вид

$$F_t(y^t) = \sum_{i'} h_{t,i'} Q_{i'}(y^t), \quad (1.17)$$

где суммирование ведется по некоторому конечному множеству индексов, $Q_{i'}(\cdot)$ — некоторые функции из множества Q^t и $h_{t,i'}$ — некоторые линейные отображения пространства C^l в пространство C^n . Таким образом, множество F^t состоит из линейных комбинаций (с матричными коэффициентами размером $l \times n$) функций из множества Q^t . Это свойство будем записывать так: $F^t = \text{Lin } Q^t$. Теперь задача ((1.4) может быть сформулирована следующим образом: может ли случайная величина $\hat{x}_t$, на которой достигается расстояние от случайной величины

$x_t \in H_2(n)$ до замкнутой оболочки множества $\tilde{H}_2(F^t)$, быть представлена как линейная комбинация элементов $Q(y^t)$, $Q \in Q^t$? Лемма 6.1 утверждает, что это возможно, если множество Q^t состоит из всевозможных борелевских отображений пространства C^l в пространство C^l (расстояние до множества $\tilde{H}_2(F^t)$ в этом случае достигается при $l \geq n$ на случайной величине вида $F_t(y^t) \in Q^t$). Однако для более бедных множеств Q^t линейная оболочка случайных величин вида $Q(y^t)$, $Q \in Q^t$, может оказаться незамкнутой в пространстве $H_2(n)$, тогда расстояние от случайной величины $x_t \in H_2(n)$ до замкнутой оболочки множества $\tilde{H}_2(F^t)$ может не достигаться на элементе из множества $\text{Lin } Q^t$ (в этом смысле задача (1.4) может оказаться неразрешимой). Разумеется, всегда существует *оптимизирующая последовательность* $Q_t^{(l)} \in \text{Lin } Q^t$, для которой

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_t(F_t^{(l)}) = \inf_{\hat{x}(\cdot) \in \tilde{H}_2(F^t)} M((x_t - \hat{x}_t), (x_t - \hat{x}_t)). \quad (1.18)$$

Если задача (1.4) разрешима, то для приложений первостепенный интерес представляет проблема эффективного вычисления оптимальной функции $Q_t \in \text{Lin } Q^t$. (Эта задача может оказаться сложной, если множество "данных наблюдения" и (или) множество Q^t бесконечны.) Последовательность $\{Q_t, t \in T\}$ таких отображений определяет оптимальный фильтр, при этом иногда дополнительно требуется, чтобы последовательность оптимальных оценок (временной ряд на выходе фильтра) принадлежала некоторому заданному гильбертову пространству. Это дополнительное требование, связанное с *устойчивостью фильтра* (ограниченным входам должны отвечать ограниченные выходы), может усложнить проблему синтеза оптимального фильтра, хотя при каждом $t \in T$ оптимальные оценки могут существовать (см. разд. 4, где подобный вопрос также обсуждается). С другой стороны, такое дополнительное требование может упростить задачу фильтрации, поскольку в процедуре "опускания перпендикуляра" при разных t имеются общие элементы, которые можно учесть, если оценивание рассматривать как развивающийся во времени процесс последовательного получения оптимальных оценок. Последнее обстоятельство делает проблему оптимальной фильтрации более содержательной с математической точки зрения по сравнению с задачей оптимального оценивания.

В. Фильтрация неслучайных временных рядов. Приведенная в п. 1А постановка задачи оптимального оценивания была связана с критерием (1.7), в котором используется ансамблевая операция M усреднения по множеству реализаций погрешностей оценивания $x_t(\omega) - F_t(y^t(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Постановку задачи оценивания можно обобщить, если принять, что временной ряд z зависит от абстрактного параметра ξ , принимающего значения в некотором множестве Ξ . (Если $z_t(\xi)$ — измеримые функции ξ со значениями в конечномерном пространстве C^p , $\Xi = \Omega$ и $\xi = \omega$, то приходим к случайному временному ряду.)

Пусть заданы множества $\Xi_t \subseteq \Xi$ при каждом $t \in T$. Тогда можно в качестве критерия при построении оптимальных оценок принять функционал

$$J_t(F_t) = \sup_{\xi \in \Xi_t} |x_t(\xi) - F_t(y^t(\xi))|^2, \quad (1.19)$$

использующий ансамблевую операцию максимизации по множеству Ξ_t .

Критерий (1.19) приводит к задаче минимаксного оценивания. Существенной особенностью минимаксной задачи оценивания является нелинейность ансамблевой операции $\sup_{\xi \in \Xi_t}$.

Это обстоятельство усложняет исследование задачи оценивания. При специальной зависимости временного ряда z от параметра ξ , при специальном выборе множеств Ξ_t и в предположении линейности функций $F_t(\cdot)$ в функционале (1.19) удастся получить относительно полное решение задачи минимаксной фильтрации. Более подробно этот вопрос обсуждается в разд. 4.

2. Оптимальная фильтрация условно-гауссовых временных рядов

Ниже задача оптимальной фильтрации рассматривается в предположении, что случайный частично наблюдаемый временной ряд z имеет условную плотность $p_t(z_t \mid z^{t-1})$ при всех $t \in T$ и эта плотность обладает специальными свойствами, позволяющими получить рекуррентные алгоритмы вычисления оптимальных (в смысле минимума среднеквадратичной погрешности) оценок.

А. Временные ряды, обладающие условным марковским свойством. Будем говорить, что случайный временной ряд z обладает свойством условной марковости, если при каждом $t \in$

Т условная плотность $p_t(z_t | z^{t-1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_t(z_t | z^{t-1}) &= p_t(z_t | x_{t-1}, y^{t-1}), \quad z_t = \text{col}(x_t, y_t), \\ p_1(z_1 | z^0) &= p_1(z_1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

т. е. условная плотность $p_t(z_t | z^{t-1})$ не зависит от переменных $x_{t-2}, x_{t-3}, \dots$. Функция $p_t(z_t | x_{t-1}, y^{t-1})$ называется условной переходной плотностью временного ряда z (она определяет вероятность "перехода" случайной величины $x_t(\cdot)$ из "состояния" x_{t-1} в момент времени $t-1$ в "состояние" x_t и "наблюдение" y_t в момент t при условии, что наблюденная к моменту $t-1$ реализация случайной величины $y^{t-1}(\omega)$ приняла значение y^{t-1}). Интегрируя обе части уравнения (2.1) по $y_t \in C^t$, находим функцию

$$p_t(x_t | x_{t-1}, y^{t-1}) = \int_{C^t} p_t(z_t | x_{t-1}, y^{t-1}) dy_t, \quad (2.2)$$

которая является условной переходной плотностью вероятности временного ряда $x = \{x_t, t \in T\}$. Аналогично, интегрирование обеих частей равенства (2.1) по x_t определяет функцию

$$p_t(y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) = \int_{C^x} p_t(z_t | x_{t-1}, y^{t-1}) dx_t, \quad (2.3)$$

которая является плотностью вероятности появления значения y_t случайного вектора $y_t(\cdot)$ при условии, что $x_{t-1}(\omega) = x_{t-1}$, $y^{t-1}(\omega) = y^{t-1}$. Задание функций (2.2), (2.3) при всех $t \in T$ или, что то же самое, условных переходных плотностей (2.1), позволяет найти совокупную безусловную плотность $p_t(z^t) = p_t(x_t, y_t)$ распределения вероятности случайных величин $x_t(\cdot), y_t(\cdot)$:

$$\begin{aligned} p_t(z^t) &= \prod_{t'=2}^t \frac{p_{t'}(z^{t'})}{p_{t'-1}(z^{t'-1})} p_1(z_1) = \prod_{t'=2}^t p_{t'}(z_{t'} | z^{t'-1}) p_1(z_1) = \\ &= \prod_{t'=2}^t p_{t'}(z_{t'} | x_{t'-1}, y^{t'-1}) p_1(z_1), \quad z^1 = z_1 = \text{col}(x_1, y_1). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Знание совокупных плотностей распределения $p_t(z^t)$ при всех $t \in T$ и $z^t \in C^{pt}$ дает исчерпывающую характеристику статистических свойств временного ряда z .

Условное марковское свойство временного ряда z позволяет получить рекуррентное соотношение для апостериорных плотностей.

Теорема 6.1. *Предположим, что частично наблюдаемый временной ряд z обладает свойством (2.1) условной марковости. Тогда апостериорные плотности (1.11) удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$p_t(x_t | y^t) = \frac{\int_{C^n} p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}}{\int_{C^n} p_t(y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}},$$

$$t = 2, 3, \dots, \quad (2.5)$$

и начальному условию

$$p_1(x_1 | y_1) = \frac{p_1(x_1, y^1)}{\int_{C^n} p_1(x_1, y^1) dx^1}. \quad (2.6)$$

Здесь $p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1})$ — условная переходная плотность временного ряда z , отвечающая моменту t ; $p_t(y_t | x_{t-1}, y^{t-1})$ — условная плотность распределения случайной величины $y_t(\cdot)$, определяемая формулой (2.3).

Доказательство теоремы 6.1 приведено в Приложении.

Рекуррентное соотношение типа (2.5) изучалось Р. Л. Стратоновичем при исследовании марковских процессов [95] и часто называется формулой Стратоновича.

Б. Условно-гауссовы временные ряды. Рекуррентные соотношения (2.5), (2.6) позволяют в принципе вычислить условную плотность $p_t(y_t | x_{t-1}, y^{t-1})$, формула (1.12) при этом определяет оценку $\hat{x}_t$, оптимальную в классе произвольных оценок $F_t(y^t)$. Однако использование соотношений (2.5), (2.6) требует "хранения" значений многомерных функций $p_{t'}(x_{t'} | y^{t'})$, $t' < t$, что традиционно и заслуженно считается сложной проблемой. В некоторых специальных случаях эти условные плотности однозначно определяются конечным набором параметров (достаточных статистик), и проблема "хранения" условных плотностей может быть заменена более простой проблемой "хранения" значений достаточных статистик. Более того, одной из компонент достаточных статистик часто является интересующая нас величина $M(x_t | y^t)$, в этом случае формулы (2.5), (2.6) позволяют получить рекуррентные соотношения для оптимальных оценок $\hat{x}_t = M(x_t | y^t)$ без восстановления каких-либо распределений и без вычисления связанных с ними функционалов.

Такая возможность реализуется для важного класса условно-гауссовых временных рядов [70]. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $z = \text{col}(x, y)$ — случайный временной ряд, определенный на ограниченном снизу "дискретном" множестве T (см. (1.1)). Предполагается, что при каждом $t \in T$ распределение вероятностей случайной величины $z^t(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots, z_t(\cdot))$ имеет плотность $p_t(z^t)$ (см. (1.9)). Компонента x частично наблюдаемого временного ряда z называется условно-гауссовым временным рядом, если при каждом $t \in T$ условная плотность

$$p_t(x^t | y^t) = \frac{p_t(z^t)}{\int_{C^{n_t}} p_t(z^t) dx_1 \dots dx_t}$$

является нормальной по x^t , т. е.

$$p_t(x^t | y^t) = (2\pi \det R_t)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^t - \bar{x}^t)^* R_t^{-1} (x^t - \bar{x}^t) \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$\bar{x}^t = \bar{x}^t(y^t) = M(x^t | y^t) = \int_{C^{n_t}} x^t p_t(x^t | y^t) dx_1 \dots dx_t \quad (2.9)$$

— условное среднее случайной величины x^t и

$$\begin{aligned} R_t = R_t(y^t) &= M[(x^t - \bar{x}^t)(x^t - \bar{x}^t)^* | y^t] = \\ &= \int_{C^{n_t}} (x^t - \bar{x}^t)(x^t - \bar{x}^t)^* p_t(x^t | y^t) dx_1 \dots dx_t \end{aligned} \quad (2.10)$$

— ее условная матрица ковариаций, причем предполагается, что

$$\det R_t(y^t) > 0, \quad t \in T, \quad y^t \in C^{l_t}. \quad (2.11)$$

Теорема 6.2. *Предположим, что при каждом $t = 1, 2, \dots$ условная плотность*

$$p_t(z^t | z^{t-1}) = \frac{p_t(z_t)}{p_{t-1}(z^{t-1})} \quad (2.12)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} p_t(z_t | z^{t-1}) &= C'_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} (G_t x^t - e_t)^* r_t^{-1} (G_t x^t - e_t) \right\} = \\ &= C'_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} (G_{t,0} x_t + G_{t,1} x_{t-1} - e_t)^* \times \right. \\ &\quad \left. \times r_t^{-1} (G_{t,0} x_t + G_{t,1} x_{t-1} - e_t) \right\}, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где

$$x^t = \text{col}(x^{t-1}, x_t), \quad C'_t = \frac{\det(G_t^* r_t^{-1} G_t)^{1/2}}{2\pi},$$

$G_t = G_t(y^t) = \|G^{t-1}, G_{t,0}\|$, $r_t = r_t(y^t)$ — матричные функции размером $(n+l) \times n(t+1)$ и $(n+l) \times (n+l)$, определенные при всех значениях переменной $y^t \in C^{lt}$; $e_t = e_t(y^t)$ — векторная функция со значениями в пространстве C^{n+l} , определенная при всех y^t , $x^t = \text{col}(x^{t-1}, x_t)$, причем

$$\det r_t > 0, \quad \det (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0}) > 0. \quad (2.14)$$

Тогда компонента x частично наблюдаемого ряда z является условно-гауссовой. При этом справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} R_t^{-1} &= G_t^* r_t^{-1} G_t + \left\| \begin{array}{cc} R_{t-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0_n \end{array} \right\|, \quad t = 2, 3, \dots, \\ \bar{x}^t &= R_t \left\| G_t^* r_t^{-1} e_t + \left[\begin{array}{c} R_{t-1}^{-1} \bar{x}^{t-1} \\ 0 \end{array} \right] \right\|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где 0 — нуль-матрица соответствующего размера,

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \bar{x}_1 = (G_1^* r_1^{-1} G_1)^{-1} G_1^* r_1^{-1} e_1, \\ R_1 &= (G_1^* r_1^{-1} G_1)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

причем при всех t выполнены неравенства

$$\det R_t > 0. \quad (2.17)$$

Доказательство теоремы 6.2 приведено в Приложении.

Рекуррентные соотношения (2.15), (2.16) при заданной реализации $y^t(\omega) = y^t$ позволяют найти матрицу R_t и вектор $\bar{x}^t$ (матричные функции $G_t = G_t(y^t)$, $r_t = r_t(y^t)$ предполагаются известными) и тем самым по формуле (2.8) вычислить условную

плотность $p_t(x^t | y^t)$. Тогда из формулы

$$p_t(x_t | y^t) = \int_{C^{n(t-1)}} p_t(x^t | y^t) dx_1 \dots dx_{t-1} \quad (2.18)$$

следует, что условная плотность $p_t(x_t | y^t)$ также является нормальной по x_t и ее среднее значение $\hat{x}_t = \hat{x}_t(y^t)$ является иско- мой оптимальной оценкой случайной величины x_t , отвечающей "наблюдаемой" реализации $y^t(\omega) = y^t$.

Интегрирование в правой части формулы (2.18) можно прове- сти аналитически, используя нормальность по x^t условной плот- ности $p_t(x^t | y^t)$. Действительно, пусть

$$x^t = \begin{bmatrix} x^{t-1} \\ x_t \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^t = \begin{bmatrix} q^{t-1} \\ q_t \end{bmatrix}, \quad R_t^{-1} = \begin{bmatrix} R_t^{(1,1)} & R_t^{(1,2)} \\ (R_t^{(1,2)})^* & R_t^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$t = 2, 3, \dots$, где $q^{t-1} \in C^{n(t-1)}$, $q_t \in C^n$, $R_t^{(1,1)}: C^{nt} \rightarrow C^{nt}$, $R_t^{(1,2)}: C^n \rightarrow C^{nt}$, $R_t^{(2,2)}: C^n \rightarrow C^n$. Тогда

$$\begin{aligned} (x^t - \bar{x}^t)^* R_t^{-1} (x^t - \bar{x}^t) &= (x_t - q_t)^* R_t^{(2,2)} (x_t - q_t) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ (x_t - q_t)^* \left[R_t^{(1,2)} \right]^* (x^{t-1} - q^{t-1}) \right\} + \\ &+ (x^{t-1} - q^{t-1})^* R_t^{(1,1)} (x^{t-1} - q^{t-1}) = \\ &= (x_t - \hat{x}_t)^* R_t^{(2,2)} (x_t - \hat{x}_t) + \tilde{C}_t(x^{t-1}) \end{aligned}$$

и

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t(y^t) = q_t - \left[R_t^{(2,2)} \right]^{-1} \left[R_t^{(1,2)} \right]^* (x^{t-1} - q^{t-1}), \quad (2.20)$$

причем величина $\tilde{C}_t(x^{t-1})$ не зависит от x_t . Таким образом, в соответствии с (1.8), (1.18) справедлива формула

$$p_t(x_t | y^t) = C_t(y^{t-1}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^t - \hat{x}^t)^* \left[R_t^{(2,2)} \right]^{-1} (x^t - \hat{x}^t) \right\}.$$

Величина $C_t(y^{t-1})$ в ней определяется условием нормировки

$$\int_{C^n} p_t(x_t | y^{t-1}) dx_t = 1.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} p_t(x_t | y^t) &= C_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^t - \hat{x}^t)^* \left[R_t^{(2,2)} \right]^{-1} (x^t - \hat{x}^t) \right\}, \\ C_t &= \left(2\pi \det \left[R_t^{(2,2)} \right] \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

($\det R_t^{(2,2)} \neq 0$ в силу $\det R_t \neq 0$). Итак, искомая оптимальная оценка $\hat{x}_t = \hat{x}_t(y^t)$ случайной величины $x_t(\cdot)$ полностью определяется формулами (2.20), (2.15), (2.16) при заданной реализации $y^t(\omega) = y^t$ наблюдаемого временного ряда y , при этом

$$M|x_t - \hat{x}_t|^2 = \text{sp} \left\{ \left[R_t^{(2,2)} \right]^{-1} \right\}.$$

В. Рекуррентные соотношения для оптимальных оценок, основанные на формуле Стратоновича. Описанная процедура, хотя и не связана с вычислением и "запоминанием" каких-либо условных плотностей (см. формулы (2.20), (2.15), (2.16)), тем не менее неудобна при больших t , поскольку размеры матрицы R_t неограниченно возрастают с ростом t , что накладывает ограничения на моменты времени, при которых описанный метод позволяет практически получать оптимальные оценки. Ситуация существенно упрощается, если при условно-гауссовой компоненте x частично наблюдаемый временной ряд z обладает условно-марковским свойством (см. п. 2Б). В этом случае переходная плотность имеет вид (см. (2.13))

$$\begin{aligned} p_t(x_t, y_t \mid x^{t-1}, y^{t-1}) = \\ = (2\pi \det r)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (G_{t,0}x_t + G_{t,1}x_{t-1} - \right. \\ \left. - e_t)^* r_t^{-1} (G_{t,0}x_t + G_{t,1}x_{t-1} - e_t) \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$p_0(x_0, y_0 \mid x^{-1}, y^{-1}) = p_0(x_0, y_0) N(G_{0,0}x_0 - e_0, r_0),$$

где $G_{i0} = G_{i0}(y^i)$, $G_{i1} = G_{i1}(y^i)$ — прямоугольные матричные функции размером $(n+1) \times n$ и символ $N(a, R)$ означает, что соответствующая плотность имеет нормальное (гауссово) распределение со средним a и матрицей ковариаций R . Соотношения (2.5), (2.6) позволяют теперь получить рекуррентные соотношения для оптимальных оценок $\hat{x}_t = \hat{x}_t(y^t)$ без вычисления матриц R_t и векторов $\bar{x}^t$ (см. (2.15)).

Теорема 6.3. Пусть переходная плотность временного ряда z имеет вид (2.22), причем при всех $t \in T$ и y^t матрицы r_t , $G_{i0}^* G_{i0}$ неособые,

$$\det \{ G_{i0}^*(y^i) G_{i0}(y^i) \} \neq 0, \quad \det \{ r_t(y^t) \} \neq 0, \quad (2.23)$$

условная плотность $p_0(x_0 | y_0)$ нормальная по x_0 и

$$\begin{aligned} M[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^* | y_0] &= G_{t,0}^* r_0^{-1} G_{0,0} > 0, \\ \hat{x}_0 &= M(x_0 | y_0) = (G_{t,0}^* r_0^{-1} G_{0,0})^{-1} G_{t,0}^* r_0^{-1} e_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тогда оптимальные оценки $\hat{x}_t = M(x_t | y^t)$ и их матрицы ковариаций

$$P_t = M[(x_t - \bar{x}_t)(x_t - \bar{x}_t)^* | y^t] \quad (2.25)$$

однозначно определяются рекуррентными соотношениями

$$\hat{x}_t = -P_t G_{t,0} (r_t + G_{t,1} P_{t-1}^{-1} G_{t,1}^*)^{-1} (G_{t,1} \hat{x}_{t-1} - e_t), \quad (2.26)$$

$$P_t = (\tilde{r}_t^* r_t \tilde{r}_t)^{-1} \tilde{r}_t^* G_{t,1} E_{t-1} G_{t,1}^* \tilde{r}_t (\tilde{r}_t^* r_t \tilde{r}_t)^{-1} + (\tilde{r}_t^* r_t \tilde{r}_t)^{-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Начальные условия $\hat{x}_0$, P_0 получаются из (2.26), (2.28), если положить $t = 0$ и принять $\hat{x}_{-1} = 0$, $P_{-1} = 0$. Здесь использованы обозначения

$$D_{t-1} = P_{t-1}^{-1} + G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,1}, \quad \tilde{r}_t = r_t^{-1} G_{t,0}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} E_{t-1} &= D_{t-1}^{-1} - D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* \tilde{r}_t [\tilde{r}_t^* (r_t - \\ &\quad - G_{t,1} D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^*) \tilde{r}_t]^{-1} \tilde{r}_t^* G_{t,1} D_{t-1}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$D_{t-1}^{-1} = P_{t-1} - P_{t-1} G_{t,1}^* (r_t + G_{t,1} P_{t-1}^{-1} G_{t,1}^*)^{-1} G_{t,1} P_{t-1}.$$

Доказательство теоремы 6.3 приведено в Приложении.

Эквивалентными преобразованиями рекуррентные соотношения (2.26)–(2.29) могут приводиться к другому виду, некоторые из так полученных представлений фильтра могут оказаться более удобными при практических реализациях алгоритмов вычисления оптимальных оценок $\hat{x}_t = M(x_t | y^t)$. Такая возможность демонстрируется в следующем пункте.

Г. Пример: рекуррентные уравнения фильтрации для условно-гауссовых последовательностей. Предположим, что частично наблюдаемый временной ряд $z = \text{col}(x, y)$ определен на множестве (1.1) рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} x_t &= A_{t-1} x_{t-1} + a_{t-1} + v_t', \quad t = 1, 2, \dots, t_*, \\ y_t &= C_t x_t + c_t + v_t'', \quad t = 0, 1, \dots, t_*. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь x_t, y_t — ненаблюдаемая и наблюдаемая компоненты временного ряда z — суть векторы соответственно размерностей n и l ; $A_t = A_t(y^t)$ — квадратная и $C_t = C_t(y^t)$ — прямоугольная

матричные функции размером $n \times n$ и $l \times n$, определенные и измеримые при всех значениях своих аргументов; $a_t = a_t(y^t)$ — n -вектор-функция, $c_t = c_t(y^t)$ — l -вектор-функция, также предполагаются определенными и измеримыми при всех значениях своих аргументов, $\alpha_0(y^0) = \text{const}$;

$$v' = \{v'_{t+1}, t \in T\}, \quad v'' = \{v''_{t+1}, t \in T\} \quad (2.31)$$

— последовательности центрированных некоррелированных условно-гауссовых случайных векторов:

$$\begin{aligned} Mv'_t &= 0, & Mv''_t &= 0, & Mv'_t(v''_{t'}) &= 0, & t, t' \in T, \\ M[v'_t(v'_{t'})^* | y^{\min(t, t')}] &= R_{v'}(t)\delta_{tt'}, & (2.32) \\ M[v''_t(v''_{t'})^* | y^{\min(t, t')}] &= R_{v''}(t)\delta_{tt'}. \end{aligned}$$

Матрицы $R_{v'}(t) = R_{v'}(t, y^{t-1})$, $R_{v''}(t) = R_{v''}(t, y^{t-1})$ корреляций помех могут зависеть от предыстории наблюдаемого процесса, но предполагаются определенными и измеримыми функциями своих аргументов $y^{t-1} \in C^{lt}$, причем

$$\det\{R_{v'}(t, y^{t-1})\} \det\{R_{v''}(t, y^{t-1})\} > 0. \quad (2.33)$$

Рекуррентные соотношения (2.30) следует дополнить начальным условием x_0 , которое будем считать условно-гауссовым случайным n -вектором, независимым с помехами v' , v'' и имеющим известные статистики

$$M(x_0 | y_0) = \hat{x}_0, \quad M[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^* | y_0] = R_{x_0} > 0. \quad (2.34)$$

В этих предположениях нетрудно убедиться, что временной ряд z обладает условно-марковским свойством (см. п. 2А), а его компонента x является гауссовой (см. п. 2Б). Переходная плотность в данном случае имеет вид (2.22) при

$$\begin{aligned} G_{t0} &= \begin{vmatrix} I_n \\ 0_l \end{vmatrix}, & G_{t1} &= \begin{vmatrix} -A_{t-1} \\ C_t A_{t-1} \end{vmatrix}, & e_t &= \begin{vmatrix} a^{t-1} \\ c_t + a_{t-1} - y_t \end{vmatrix}, \\ r_t^{-1} &= \begin{vmatrix} I_n & 0_{n \times l} \\ C_t & I_l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{v'}(t) & 0_{n \times l} \\ 0_{l \times n} & R_{v''}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & 0_{n \times l} \\ C_t & I_l \end{vmatrix}^*, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $R_{v'}(t)$, $R_{v''}(t)$ — матрицы интенсивностей помех v' , v'' (см. (2.32)). В данном случае матрица G_{t0} не зависит от t и y^t , вектор e_t линейно зависит от y_t .

Теперь для вычисления оптимальных оценок $\hat{x}_t = M(x_t | y^t)$ можно воспользоваться соотношениями (2.26)–(2.29), однако в данном случае рекуррентные соотношения для оптимальных оценок $\hat{x}_t$ можно преобразовать к более простой и удобной форме, выразив их непосредственно в терминах коэффициентов уравнения (2.30). Это обусловлено возможностью уточнить вид переходной плотности. Действительно, в силу формулы Байеса имеем

$$p_t(x^t, y^t) = p_t(y_t | x^t, y^{t-1})p_t(x_t | x^{t-1}, y^{t-1})p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}), \quad (2.36)$$

где в силу (2.30)

$$p_t(y_t | x^t, y^{t-1}) = p_t(y_t | x_t, y^{t-1}) = (2\pi \det R_{v'}(t))^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y_t - C_t x_t - c_t)^* [R_{v'}(t)]^{-1} (y_t - C_t x_t - c_t) \right\}, \quad (2.37)$$

$$p_t(x_t | x^{t-1}, y^{t-1}) = p_t(x_t | x_{t-1}, y^{t-1}) = \\ = C'_t \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_t - A_{t-1} x_{t-1} - a_{t-1})^* [R_{v''}(t)]^{-1} (x_t - \right. \\ \left. - A_{t-1} x_{t-1} - a_{t-1}) \right\}, \quad C'_t = (2\pi \det R_{v''}(t))^{-1/2}, \\ R_{v'}(t) = M[v'(v')^* | y^t], \quad R_{v''}(t) = M[v''(v'')^* | y^t]. \quad (2.38)$$

Из (2.36) следует, что функция $p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1})$ может быть представлена в виде

$$p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) = p_t(y_t | x_t, y^{t-1})p_t(x_t | x_{t-1}, y^{t-1}).$$

Использование обозначений (2.37), (2.38) в формуле Стратоновича (2.5) позволяет получить удобные рекуррентные соотношения для оптимальных оценок $\hat{x}_t = M(x_t | y^t)$, отличные от (2.26)–(2.29).

Теорема 6.4. *Предположим, что в уравнениях (2.30) помехи v' , v'' являются условно-гауссовыми и удовлетворяют условиям (2.32), (2.33). Матричные A_t , C_t и векторные a_t , c_t функции в системе (2.30) могут зависеть от переменных y^{t-1} , но предполагаются определенными и измеримыми при всех значениях своих аргументов. Начальное условие — случайный вектор x_1 принимается условно-гауссовым, независимым с помехами v' , v'' , его*

характеристики $\hat{x}_1 = \bar{x}_1$, R_x (см. (2.34)) считаются известными функциями переменной $y_1 \in C^1$. Тогда для оптимальных оценок

$$\hat{x}_t = M(x_t | y^t) \quad (2.39)$$

и их условных матриц ковариаций

$$P_t = M \{ (x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^* | y^t \} \quad (2.40)$$

справедливы рекуррентные соотношения

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + a_t - K_t [y_{t+1} - C_{t+1}(A_t \hat{x}_t + a_t) - c_{t+1}], \quad (2.41)$$

$$P_t = Q_t + K_{t-1} C_t Q_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.42)$$

где для краткости использованы обозначения

$$\begin{aligned} Q_t &= A_{t-1} P_{t-1} A_{t-1}^* + R_v'(t), \\ K_{t-1} &= -Q_t C_t^* [R_v''(t) + C_t Q_t C_t^*]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Рекуррентные соотношения (2.41)–(2.43) однозначно определяют векторные $\hat{x}_t$ и матричные P_t функции (2.39), (2.40) при задании начальных условий (см. (2.34))

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= -K_{-1}(y_0 - c_0), \quad P_0 = R_v'(0) + K_{-1} C_0 R_v'(0), \\ K_{-1} &= R_v'(0) C_0^* [R_v''(0) + C_0 R_v'(0) C_0^*]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Доказательство теоремы 6.4 приведено в Приложении.

Из доказательства теоремы следует, что можно отказаться от условий (2.33), но тогда в формулах (2.43) вместо операции обращения соответствующих матриц следует использовать операцию псевдообращения.

В случае, если в системе уравнений (2.30) матрицы A_t , C_t и векторы a_t , c_t детерминированные, а помехи v' , v'' — некоррелированные последовательности случайных гауссовых векторов, рекуррентные соотношения (2.42), (2.43) описывают фильтр Калмана — Бьюси оптимальной неупреждающей фильтрации. Фильтр Калмана — Бьюси остается оптимальным и при негауссовых помехах, если под оптимальными оценками $\hat{x}_t$ понимать линейные оптимальные оценки.

Следует отметить, что существуют различные модификации фильтра Калмана — Бьюси, отличающиеся не только формой представления фильтра, но и рассматриваемой задачей фильтрации. Так, например, если в момент времени t "наблюдение" величины y_t недоступно, то возникает задача оптимальной фильтрации с одношаговым прогнозом, когда оптимальная

оценка $\hat{x}_t$ имеет вид

$$\hat{x}_t = M(x_t | y^{t-1}). \quad (2.45)$$

В условиях теоремы 6.4 для оптимальных оценок (2.45) также могут быть получены рекуррентные соотношения фильтра Калмана — Бьюси, которые теперь имеют вид

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + a_t + K_t (y_t - C_t \hat{x}_t - c_t), \quad (2.46)$$

$$K_t = A_t P_t C_t^* [R_v''(t) + C_t Q_t C_t^*]^{-1}, \quad (2.47)$$

$$P_{t+1} = (A_t - K_t C_t) P_t (A_t - K_t C_t)^* + K_t R_v''(t) K_t^* + R_v'(t+1), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

$$\hat{x}_0 = Mx_0 = \bar{x}, \quad P_0 = M(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^* = R_{\bar{x}}.$$

Уравнения (2.46)–(2.48) для оценок (2.45) устанавливаются тем же способом, что и уравнения (2.41)–(2.43) для оценок (2.45). Уравнение для матриц P_t условной ковариации погрешности оценивания

$$P_t = M[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^* | y^{t-1}], \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.49)$$

описывается, как и в теореме 6.4, нелинейным уравнением, но в данном случае это уравнение несколько проще. Если в системе (2.30) матрицы A_t , C_t и векторы a_t , c_t , а также матрицы ковариаций $R_v'(t)$, $R_v''(t)$ не зависят от переменных y^{t-1} , то уравнения (2.43) и (2.48) детерминированные. Если в этих уравнениях исключить матрицу K_t в силу соответствующей формулы ((2.43) или (2.47)), то приходим к матричным уравнениям Риккати (в дискретном времени), имеющим различный вид в задаче собственно фильтрации (оценка $\hat{x}_t$ имеет вид (2.39)) и задаче фильтрации с одношаговым прогнозом (оценка $\hat{x}_t$ имеет вид (2.45)).

3. Оптимальное оценивание полезного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи

Эффективные алгоритмы построения оптимальных оценок возможны, видимо, лишь при дополнительных априорных предположениях о классах рассматриваемых случайных сигналов. В данном разделе, следуя работе [47], обсуждается возможность получения рекуррентных алгоритмов вычисления оптимальных оценок в условиях, когда рассматриваемые случайные процессы существенно отличаются от гауссовых (их распределения являются экспоненциально полиномиальными). Для таких процессов может быть получен аналог фильтра Калмана в задаче оценивания зашумленного полезного сигнала.

А. Постановка задачи. Пусть $T = \{t_s, t_s + 1, \dots, t_f\}$ — набор вещественных чисел, интерпретируемый как дискретное время, τ_t — n -вектор-функция целочисленного аргумента t , определенная на множестве T . Набор $\tau = \{\tau_t, t \in T\}$ значений этой функции интерпретируется как полезный сигнал. Предположим, что наблюдаются (регистрируются) n -векторы

$$y_t = \tau_t + v_t, \quad t \in T, \quad (3.1)$$

где $v = \{v_t, t \in T\}$ — последовательность центрированных стохастически независимых случайных величин, интерпретируемая как помеха наблюдения. Далее будет предполагаться, что полезный сигнал τ определяется линейной системой

$$\tau_{t+1} = A_t \tau_t, \quad (3.2)$$

где A_t — заданная последовательность детерминированных $n \times n$ -матриц, $\det A_t \neq 0$. Полезный сигнал τ соотношением (3.2) определяется однозначно после задания начального условия $\tau_{t_s} \in \mathbb{R}^n$. Вектор τ_t может быть случайным, тогда предполагается его стохастическая независимость от помехи v , это предположение позволяет говорить о независимости полезного сигнала τ и помехи v . В дальнейшем предполагается, что случайные векторы $\tau_{t_s}, v_{t_s+1}, \dots, v_{t_f}$ имеют плотности распределения и эти плотности известны. Знание этих плотностей в силу стохастической независимости величин $\tau_{t_s}, v_{t_s+1}, \dots, v_{t_f}$ позволяет вычислять совместные плотности распределения произвольных наборов случайных величин τ_t, v_t . Обозначим через

$$y^t = \{y_{t_s}, y_{t_s+1}, \dots, y_t\} \quad (3.3)$$

реализацию до момента t временного ряда y . Этот набор интерпретируется как "данные наблюдения", доступные в момент $t \in T$. Пусть фиксировано некоторое множество F^t измеримых функций $F = F_t(y^t)$, определенных на реализациях (3.3) временного ряда y . Всякая такая функция определяет n -вектор

$$\hat{\tau}_t = F_t(y^t), \quad (3.4)$$

который будем интерпретировать как оценку значения полезного сигнала τ в момент t .

Соотношением (3.4) оценки $\hat{\tau}_t$ заданы как случайные n -векторы, распределение которых определяется видом выбранной функции $F \in F^t$ и распределением случайных величин y^t . В

дальнейшем будет предполагаться, что множество F^t и распределения случайных величин τ_t и v таковы, что случайные величины $\hat{\tau}_t$ имеют плотности распределения с конечными статистическими моментами до второго порядка. Это, в частности, означает, что погрешность оценивания $\tau_t - \hat{\tau}_t$ имеет конечную дисперсию при любом выборе "оценителя" $F_t \in F^t$.

Примем, что качество оценки $\hat{\tau}_t$ характеризуется величиной

$$J_t(F) = M |\tau_t - \hat{\tau}_t|, \quad (3.5)$$

где M — символ математического ожидания, $|\cdot|$ — евклидова норма соответствующего n -вектора. В силу сделанного выше предположения о множестве F^t и распределениях случайных величин τ_t и v величина (3.5) конечна для любой оценки (3.4) при $F \in F^t$. Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{\tau}_t$ из условия

$$J_t(F) \rightarrow \inf_{F \in F^t}. \quad (3.6)$$

Б. Достаточные статистики апостериорных распределений. Сложность поставленной задачи существенно зависит от выбора множества F^t , определяющего множество "допустимых" (возможных) оценок. Наиболее полно изучен случай, когда F^t — множество линейных функций, что приводит к хорошо развитой теории линейного оценивания [80]. Если F^t — множество всех измеримых отображений евклидова пространства $R^{n(t-t_*)}$ в R^n , то, как хорошо известно (см., например, [104]), оптимальная в смысле задачи (3.6) оценка $\hat{\tau}_t$ определяется выражением

$$\hat{\tau}_t = M(\tau_t | y^t) = \int_{R^n} \tau p_t(\tau | y^t) d\tau, \quad (3.7)$$

где $p_t(\cdot) = p_t(\cdot | y^t)$ — условная плотность распределения случайного n -вектора τ_t при условии σ -алгебры, порождаемой случайными n -векторами $y_{t_*}, y_{t_*+1}, \dots, y_t$; $p_t(\cdot)$ называется также апостериорной плотностью распределения случайного n -вектора τ_t .

Таким образом, нахождение оптимальной нелинейной оценки $\hat{\tau}_t$ значения полезного сигнала в соответствующий момент времени свелось к задаче определения апостериорного распределения случайной величины τ_t с последующим вычислением ее среднего значения (3.7) по этому распределению.

В общем случае вычисление апостериорной плотности распределения связано с серьезными вычислительными трудностями, хотя в принципиальном плане эту плотность можно вычислять рекуррентно из соотношения Стратоновича (см. п. 2А)

$$p_t(\tau) = C_t p_{v_t}(y_t - \tau_t) p_{t-1}(A_{t-1}^{-1} \tau), \quad (3.8)$$

$$p_{t,t+1}(\tau) = p_{v_{t,t+1}}(y_{t,t+1} - \tau) p_{t,t}(A_{t,t} \tau), \quad (3.9)$$

где $p_{v_t}(\cdot)$ — плотность распределения случайного вектора v_t (эта плотность может зависеть от времени t); $p_t(\cdot)$ — апостериорная плотность распределения случайного вектора τ_t , $p_t(\tau) = p(\tau_t | y^t)$, $p_{t-1}(A_{t-1}^{-1} \tau) = p(A_{t-1}^{-1} \tau_{t-1} | y^{t-1})$. Последовательно вычисляя плотности $p_t(\tau)$, с помощью формул (3.7) можем найти оптимальную оценку $\hat{\tau}_t$.

Вычисление апостериорных плотностей $p_t(\tau)$ в соответствии с рекуррентной процедурой Стратоновича (3.8), (3.9) в общем случае приводит к сложной проблеме, связанной с необходимостью запоминания и переработки больших цифровых массивов. Поэтому в прикладных задачах о свойствах полезного сигнала и помехи делают дополнительные предположения, которые обеспечивают существование у апостериорных плотностей $p_t(\tau)$ сравнительно простых достаточных статистик. В этом случае вместо рекуррентного пересчета апостериорных плотностей распределения удастся осуществить пересчет их статистик, что значительно снижает объем необходимых вычислений. Знание достаточных статистик позволяет в соответствии с формулой (3.7) вычислять оптимальную оценку $\hat{\tau}_t$.

Поясним сказанное на изученном в разд. 2 частном варианте задачи оценивания, когда векторы τ_t , $v_{t,t+1}$, ..., $v_{t,t}$ — гауссовы с невырожденными матрицами ковариаций и помеха v центрированная. В этом случае из соотношений Стратоновича (3.8), (3.9) нетрудно заключить, что апостериорные плотности $p_t(\tau)$ также будут гауссовыми, в соответствии с теоремой 6.4 их достаточными статистиками будут средние значения $\hat{\tau}_t$ и матрицы ковариаций P_t ,

$$\hat{\tau}_t = M\{(\tau_t | y^t)\}, \quad P_t = M\{(\tau_t - \hat{\tau}_t)(\tau_t - \hat{\tau}_t)^* | y^t\}. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.8), (3.9) приводят к рекуррентной процедуре пересчета достаточных статистик $(\hat{\tau}_t, P_t)$ (см. теорему 6.4):

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{t+1} &= A_t \hat{\tau}_t + K_t (y_t - \hat{\tau}_t), \quad t = t_s, \dots, t_f - 1, \\ \hat{\tau}_{t_s} &= M \tau_{t_s}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$K_t = K_t(P_t) = A_t P_t (P_t + R_v(t))^{-1}, \quad (3.12)$$

где $R_v(t) = M v_t v_t^*$. Матрица ковариаций (3.10) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$P_{t+1} = (A_t - K_t) P_t (A_t - K_t)^* + K_t R_v(t) K_t^*, \quad (3.13)$$

$$t = t_s, \dots, t_f - 1,$$

при начальном условии

$$P_{t_s} = M(\tau_{t_s} - \hat{\tau}_{t_s})(\tau_{t_s} - \hat{\tau}_{t_s})^*. \quad (3.14)$$

Соотношения (3.11), (3.12) определяют известный фильтр Калмана — Бьюси, сводящий проблему вычисления апостериорных плотностей $p_t(\tau)$ к проблеме нахождения их достаточных статистик $(\hat{\tau}_t, P_t)$. В данном случае нет необходимости в использовании формулы (3.7) для нахождения оптимальной оценки: вектор $\hat{\tau}_t$ является составляющей набора достаточных статистик и вычисляется в силу соотношений (3.11)–(3.14) фильтра Калмана — Бьюси.

При негауссовых векторах τ_{t_s} , v величины $\hat{\tau}_t$, P_t , определяемые фильтром Калмана — Бьюси (3.11)–(3.14), уже не являются, вообще говоря, достаточными статистиками, и решение проблемы вычисления апостериорных плотностей $p_t(\tau)$ требует других подходов.

Ниже рассматривается класс случайных векторов τ_{t_s} , v с так называемым экспоненциально-полиномиальным распределением — естественным обобщением гауссова (нормального) распределения. Для гауссовой случайной величины плотность распределения имеет (с точностью до нормирующего множителя) вид экспоненты, в показателе которой стоит квадратичная форма соответствующей переменной. Рассмотрение вместо квадратичной полиномиальной функции приводит к экспоненциально-полиномиальной плотности распределения. Для таких плотностей принципиальными для последующего исследования являются следующие свойства:

1) Коэффициенты полиномиальной функции являются достаточными статистиками для экспоненциально-полиномиальной плотности распределения;

2) Рекуррентные соотношения Стратоновича (3.8), (3.9) сохраняют экспоненциально-полиномиальный характер апостериорных плотностей.

Эти два обстоятельства позволяют выписать рекуррентные соотношения для достаточных статистик апостериорных распределений — естественный аналог рекуррентных соотношений

фильтра Калмана — Бьюси. Располагая такими статистиками, с помощью формулы (3.7) можно вычислить оптимальную (в классе произвольных нелинейных оценок по отношению к среднеквадратичному критерию (3.5)) оценку $\hat{\tau}_t$. К сожалению, оценка $\hat{\tau}_t$, вообще говоря, не входит в число достаточных статистик (как в гауссовом случае) и интеграл в (3.16) приходится "вычислять", что при наличии современных ЭВМ является достаточно рутинной задачей. В случае полиномов второго порядка получается гауссово распределение и рекуррентное соотношение для достаточных статистик совпадают с фильтром Калмана — Бьюси.

В. Полиномиальные функции и экспоненциально-полиномиальные распределения. Пусть $Z_+^n = Z_+ \times Z_+ \times \dots \times Z_+$ — дискретная n -решетка и $R^n = R \times R \times \dots \times R$. При $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ и $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in Z_+^n$ под x условимся понимать величину

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}. \quad (3.15)$$

Пусть $\tilde{K} \subseteq Z_+^n$ — конечное подмножество дискретной решетки. Полиномиальной функцией $f(x): R^n \rightarrow R$ назовем всякую функцию

$$f(x) = \sum_{k \in \tilde{K}} f_k x^k, \quad (3.16)$$

где f_k — вещественная функция, определенная на множестве $\tilde{K}$, ее значения называются коэффициентами полиномиальной функции. Нетрудно убедиться, что моном (3.15) является однородной формой порядка $|k| = \sum k_i$, поэтому полиномиальная функция (3.16) представляет собой линейную комбинацию конечного числа однородных форм.

Обозначим через $\bar{K}$ следующее множество:

$$\bar{K} = \{k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in Z_+^n : 0 \leq k_i \leq m\}. \quad (3.17)$$

Здесь $m = \max_{k \in \tilde{K}} \sum k_i$ называется степенью полинома $f(x)$. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x)$ определена на $\bar{K}$. Для этого достаточно положить $f_k = 0$ при $k \in \bar{K} \setminus \tilde{K}$. Экспоненциально-полиномиальной назовем всякую функцию $g(x)$ вида

$$g(x) = \exp\{-f(x)\}, \quad (3.18)$$

где $f(x)$ — некоторая полиномиальная функция.

Обозначим через $\mathbf{F}_{\tilde{K}}$ множество растущих при $|x| \rightarrow \infty$ полиномиальных функций:

$$\mathbf{F}_{\tilde{K}} = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \tilde{K}} f_k x^k : f(x) \rightarrow \infty \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \right\}. \quad (3.19)$$

Для таких функций конечен интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp\{-f(x)\} dx < \infty, \quad (3.20)$$

и неотрицательная нормированная функция

$$p(x) = \frac{\exp\{-f(x)\}}{\int_{\mathbf{R}^n} \exp\{-f(x)\} dx} \quad (3.21)$$

может рассматриваться как плотность некоторой нормированной меры в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{P}_{\tilde{K}}$ множество всех таких плотностей, в которых полиномиальные функции пробегают множество $\mathbf{F}_{\tilde{K}}$.

Лемма 6.2. *Множество $\mathbf{P}_{\tilde{K}}$ замкнуто относительно произведения его элементов и линейного невырожденного преобразования аргумента. Это значит, что если $p_1(x), p_2(x) \in \mathbf{P}_{\tilde{K}}$, то $p_1(x)p_2(x) \in \mathbf{P}_{\tilde{K}}$ и при любых векторе $a \in \mathbf{R}^n$ и матрице $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\det A \neq 0$, справедливо включение $p_1(a + Ax) \in \mathbf{P}_{\tilde{K}}$.*

Утверждение леммы очевидно; отметим, что невырожденность матрицы A при преобразовании аргументов плотности $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{\tilde{K}}$ существенна: при $A = 0$ для функции $p_1(a + Ax)$ неравенство (3.20) нарушается.

Г. Рекуррентные соотношения для достаточных статистик экспоненциально-полиномиальных апостериорных плотностей. Из соотношения Стратоновича (3.8), (3.9) непосредственно следует, что если плотности распределения случайных векторов v_t и τ_t , при всех $t \in T$ экспоненциальны по отношению к одному и тому же произвольному конечному множеству $\tilde{K} \subseteq Z_+^n$, то апостериорные плотности $p_t(x)$, $t \in T$, будут экспоненциально-полиномиальными функциями на $\tilde{K}$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.5. Пусть плотности распределения случайных векторов v_t и τ_t , при всех $t \in T$ экспоненциальны по отношению к одному и тому же произвольному множеству $\tilde{K} \subset Z_+^n$, т.е.

$$p_{v_t}(x) = \exp\{-\phi^{(t)}(x)\}, \quad \phi^{(t)}(x) = \sum_{k \in \tilde{K}} F_k^{(t)} x^k, \quad (3.22)$$

$$p_{\tau_t}(x) = \exp\{-f^{(t)}(x)\}, \quad f^{(t)}(x) = \sum_{k \in \tilde{K}} f_k^{(t)} x^k. \quad (3.23)$$

Предполагается, что плотности нормированы:

$$\int_{R^n} p_{v_t}(x) dx = 1, \quad \int_{R^n} p_{\tau_t}(x) dx = 1.$$

Тогда апостериорные плотности $\tilde{p}_t(x) = \tilde{p}_t(\tau_t \mid y^t) \Big|_{\tau_t=x}$, $t \in T$, будут экспоненциально-полиномиальными:

$$\tilde{p}_t(x) = C_t \exp\{-f^{(t)}(x)\}, \quad f^{(t)}(x) = \sum_{k \in \tilde{K}} f_k^{(t)} x^k, \quad (3.24)$$

где полиномы $f^{(t)}(x)$ определяются рекуррентным соотношением

$$f^{(t)}(\tau_t) = \phi_{v_t}(y_t - \tau_t) + f^{(t-1)}(A_{t-1}^{-1} \tau_t), \quad t \in T, \quad (3.25)$$

при начальном условии (3.23) и C_t — нормировочная постоянная,

$$C_t = \left[\int \exp\{-f^{(t)}(x)\} dx \right]^{-1}. \quad (3.26)$$

Доказательство теоремы 6.5 приводится в Приложении.

Д. Гауссов случай. Предположим, что для априорных плотностей (3.22), (3.23) входящие в них полиномы не содержат однородных форм выше второго порядка. В этом случае априорные плотности $p_{v_t}(x)$ гауссовы, $p_{v_t}(x) = \exp\{-\varphi^{(t)}(x)\}$,

$$\varphi^{(t)}(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^{(t)} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \beta_i^{(t)} x_i + \beta_0^{(t)}, \quad t \in T, \quad (3.27)$$

и в соответствии с теоремой 6.5 апостериорные плотности $\tilde{p}_t(x)$ распределения случайных величин π_t , $t = t_{s+1}, t_{s+2}, \dots$ также будут гауссовыми: $\tilde{p}_t(x) = \exp\{-f^{(t)}(x)\}$,

$$f^{(t)}(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(t)} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i^{(t)} x_i + b_0^{(t)}, \quad t \in T. \quad (3.28)$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}^{(t)}, \beta_i^{(t)}, \beta_0^{(t)}, a_{ij}^{(t)}, b_i^{(t)}, b_0^{(t)}$ в формулах (3.27), (3.28) не произвольны — они должны удовлетворять стандартному представлению гауссова распределения:

$$\begin{aligned} \varphi^{(t)}(x) &= (x - \bar{v}_t)^* R_{v_t}^{-1}(t)(x - \bar{v}_t), \\ f^{(t)}(x) &= (x - \bar{\tau}_t)^* P_t^{-1}(x - \bar{\tau}_t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $R_{v_t} = \|\alpha_{ij}^{(t)}\|^{-1}$, $P_{\tau_t} = \|a_{ij}^{(t)}\|^{-1}$, $\bar{v}_t, \bar{\tau}_t$ — матрицы корреляций и средние значения процессов v_t, τ_t (эти величины предполагаются известными, для центрированной помехи $v_t \equiv 0$). Далее, используя (3.8), приходим к (3.11)–(3.13). Вывод может быть найден в [80].

Е. Экспоненциально-полиномиальное распределение 4-го порядка. Предположим, что плотность распределения $p_{v_t}(x)$ помехи и начальная плотность $p_s(x)$ сигнала экспоненциально-полиномиальные с полиномами $f^{(t_s)}(x), \varphi^{(t)}(x), t \in T$, 4-го порядка. По теореме 6.5 полином $f^{(t)}(x), t \in T$, также 4-го порядка:

$$\begin{aligned} \varphi^{(t)}(x) &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \alpha_{ijkl}^{(t)} x_i x_j x_k x_l + \sum_{i,j,k=1}^n \beta_{ijk}^{(t)} x_i x_j x_k + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}^{(t)} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \delta_i x_i + \delta_0^{(t)}, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} f^{(t)}(x) &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ijkl}^{(t)} x_i x_j x_k x_l + \sum_{i,j,k=1}^n b_{ijk}^{(t)} x_i x_j x_k + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^{(t)} x_i x_j + \sum_{i=1}^n d_i^{(t)} x_i + d_0^{(t)}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тогда коэффициенты полиномов $f^{(t)}(x), t \in T$, могут быть вычи-

слены с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 a_{ijk}^{(t)} &= a_{ijk}^{(t-1)} + \alpha_{ijk}^{(t)}, \\
 b_{ijk}^{(t)} &= b_{ijk}^{(t-1)} - \left[4 \sum_{i=1}^n \alpha_{ijk}^{(t)} y_i^{(t)} + \beta_{ijk}^{(t)} \right], \\
 c_{ij}^{(t)} &= c_{ij}^{(t-1)} + \left[6 \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ijk}^{(t)} y_l^{(t)} y_k^{(t)} + 3 \sum_{k=1}^n \beta_{ijk}^{(t)} y_k^{(t)} + \gamma_{ij}^{(t)} \right], \\
 d_i^{(t)} &= d_i^{(t-1)} - \left[4 \sum_{j,k,l=1}^n \alpha_{ijk}^{(t)} y_j^{(t)} y_k^{(t)} y_l^{(t)} + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sum_{k,l=1}^n \beta_{ijk}^{(t)} y_j^{(t)} y_k^{(t)} + 2 \sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^{(t)} y_j^{(t)} + \delta_i^{(t)} \right].
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Начальными условиями являются коэффициенты функции $f^{(t)}(x)$. Соотношения (3.32) являются аналогом рекуррентных соотношений (3.11)–(3.13) фильтра Калмана — Бьюси.

Ж. Приближенно-гауссово распределение. Вычисление многомерного интеграла в формуле (3.7) для современных ЭВМ достаточно стандартная задача, но иногда желательно иметь "явные выражения" для его значений. В некоторых специальных случаях могут быть получены более простые формулы для вычисления $\hat{\tau}_t$ и P_t . Рассмотрим для простоты скалярный случай и предположим, что плотность помехи и начальная плотность сигнала приближенно-гауссовы, т.е.

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(t)}(x) &= \alpha^{(t)} x^4 + \beta^{(t)} x^3 + \gamma^{(t)} x^2 + \delta^{(t)} x + \delta_0^{(t)}, \\
 f^{(t)}(x) &= a^{(t)} x^4 + b^{(t)} x^3 + c^{(t)} x^2 + d^{(t)} x + d_0^{(t)},
 \end{aligned}$$

причем $a^{(t)}/c^{(t)}$, $b^{(t)}/c^{(t)}$, $\theta_t = \alpha^{(t)}/\gamma^{(t)}$, $\eta_t = \beta^{(t)}/\gamma^{(t)}$ и $|\eta_t| \ll 1$. Тогда плотности $p_t(\tau_t)$ также будут приближенно-гауссовы и справедливы приближения:

$$R_v(t) \cong 1/\gamma^{(t)}, \quad \bar{v}_t \cong -\delta^{(t)}/\gamma^{(t)}, \quad P_t \cong 1/c^{(t)}, \quad \hat{\tau}_t \cong -d^{(t)}/c^{(t)}. \quad (3.33)$$

Учитывая (3.32), можно получить рекуррентные соотношения для статистик (3.33):

$$P_t^{-1} = P_{t-1}^{-1} + R_v(t)(1 + 3y_t\theta_t + 6y_t^2\eta_t) + o(\max(|\theta_t|, |\eta_t|)),$$

$$\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_{t-1} + \frac{P_{t-1}(1 + 3y_t\theta_t + 6y_t^2\eta_t)}{R_v(t) + P_{t-1}} \times \\ \times \left(\frac{\bar{v}_t + y_t + 3y_t^2\theta_t + 4y_t^3\eta_t}{1 + 3y_t\theta + 6y_t^2\eta} - \hat{\tau}_{t-1} \right) + o(\max_i(|\alpha_i|, |\eta_i|)).$$

При $\theta_t = \eta_t = \bar{v}_t \equiv 0$ приходим к соотношениям фильтра Калмана — Бьюси.

4. Связь задач линейной и нелинейной фильтрации

Вернемся к "геометрической" интерпретации задачи оптимального оценивания, данной в п. 1Б, предполагая, что множества Q^t отображений пространства C^{lt} в пространство C^l в каждый момент $t \in T$ состоит из конечного числа $L = L_t$ элементов. Пронумеруем эти элементы каким-либо образом, тогда

$$Q^t = \{Q_1(\cdot), Q_2(\cdot), \dots, Q_{L_t}(\cdot)\}. \quad (4.1)$$

Введем обозначение

$$Y_{t'} = Q_{t'}(y^t), \quad t' = 1, 2, \dots, L_t. \quad (4.2)$$

Тогда соотношение (1.3) с учетом формул (1.17), (4.1), (4.2) может быть переписано в виде

$$\hat{x}_t = Mx_t - \sum_{t'=1}^{L_t} h_{tt'}(Y_{t'} - MY_{t'}), \quad t \in T, \quad (4.3)$$

т. е. искомая оценка $\hat{x}_t$ является линейной функцией переменных

$$Y^{L_t} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{L_t}\}.$$

Здесь учтена возможная нецентрированность случайных величин x_t, Y_t . Если последние интерпретировать как набор "данных наблюдения", доступных к моменту t , то приходим к задаче линейного оценивания составляющей x_t ненаблюдаемого ряда x по "наблюдениям" за реализацией временного ряда Y^L . Если качество оценки $\hat{x}_t$ характеризовать величиной

$$J_t(h) = M \left| x_t - Mx_t - \sum_{t'=1}^{L_t} h_{tt'}(Y_{t'} - MY_{t'}) \right|^2, \quad (4.4)$$

то оптимальная оценка $\hat{x}_t$ определяется из решения линейной системы уравнений

$$\sum_{t'=1}^{L_t} h_{tt'} R_Y[t', t''] = R_{xY}[t, t''], \quad t'' = 1, \dots, L_t, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} R_Y[t', t''] &= M(Y_{t'} - MY_{t'})(Y_{t''} - MY_{t''})^*, \\ R_{xY}[t, t''] &= M(x_t - Mx_t)(Y_{t''} - MY_{t''})^*, \end{aligned} \quad (4.6)$$

При неособой матрице ковариаций

$$R_{Y^{L_t}} = M[(Y^{L_t} - MY^{L_t})(Y^{L_t} - MY^{L_t})^*] \quad (4.7)$$

линейная система (4.5) однозначно определяет матричные коэффициенты $h_{tt'}: C^l \rightarrow C^n$ оптимальной оценки (4.3), т.е. полученная схема вполне аналогична схеме линейного оценивания. Разумеется, для вычисления элементов матрицы (4.7) может оказаться недостаточным знание матрицы корреляций случайной величины y^t , поскольку в силу (4.2)

$$\begin{aligned} M(Y_{t'} - MY_{t'})(Y_{t''} - MY_{t''})^* &= \\ &= M(Q_{t'}(y^t) - MQ_{t'}(y^t))(Q_{t''}(y^t) - MQ_{t''}(y^t))^* \end{aligned} \quad (4.8)$$

и при нелинейных функциях $Q_t(\cdot)$ правая часть формулы (4.8) может вычисляться через статистические моменты случайной величины y^t порядка большего двух.

А. Полные последовательности оптимальных оценок.

Пусть в фиксированный момент $t \in T$ задана последовательность $\{Q_{t'}^t, t' = 1, 2, \dots\}$ конечных наборов отображений пространства $C^{l''}$ в пространство C^l ,

$$Q_{t'}^t = \{Q_{t''}^{t'}: C^{l''} \rightarrow C^l, \quad t'' = 1, 2, \dots, L_t^{(t')}\}, \quad t' = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

($L_t^{(t')}$ — число элементов t' -го набора). Предположим, что

$$Q_{t'}^t \subseteq Q_{t''}^t \quad \text{при } t' \leq t''. \quad (4.10)$$

С каждым набором $Q_{t'}^t$ свяжем оптимальную оценку $\hat{x}_t^{(t')} \in H_2(\text{Lin } Q_{t'}^t)$ случайной величины x_t , определяемую формулой

$$\hat{x}_t^{(t')} = \hat{x}_t^{(t')}(y^t) = - \sum_{t''=1}^{L_t} h_{tt''} [Q_{t''}^{t'}(y^t) - MQ_{t''}^{t'}(y^t)], \quad (4.11)$$

матричные коэффициенты $h_{tt'':} C^l \rightarrow C^n$ которой определяются из условия минимума среднеквадратичной погрешности оценивания

$$J_t^{(t')}(h) = M \left| (x_t - Mx_t) - (\hat{x}_t^{(t')} - M\hat{x}_t^{(t')}) \right|^2 \rightarrow \min_h. \quad (4.12)$$

Монотонность последовательности $\{Q_{t'}^t, t' = 1, 2, \dots\}$ означает, что

$$\min_h J_t^{(t')}(h) \geq \min_h J_t^{(t'')}(h) \quad \text{при } t'' > t', \quad (4.13)$$

а потому существует предел

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} \min_h J_t^{(t')}(h) = J_*. \quad (4.14)$$

Последовательность $\{\hat{x}_t^{(t')}, t' = 1, 2, \dots\}$ оптимальных оценок (4.11), (4.12) назовем полной, если

$$\begin{aligned} J_* &= M |x_t - M(x_t | y^t)|^2 = \\ &= \int_{C^n} |x_t - M(x_t | y^t)|^2 p_t(y^t) dy_1 \dots dy_t, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где величина J_* определяется формулой (4.14); $p_t(\cdot)$ — плотность распределения случайной величины y^t . Из формул (4.11)–(4.15) нетрудно установить, что

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} M |\hat{x}_t^{(t')} - M(x_t | y^t)|^2 = 0. \quad (4.16)$$

Таким образом, полная последовательность оптимальных оценок $\{\hat{x}_t^{(t')}, t' = 1, 2, \dots\}$, каждая из которых является решением "конечномерной" оптимизационной задачи (множества $Q_{t'}^t$, конечные), является оптимизирующей для задачи оптимального оценивания в классе произвольных борелевских оценок (см. лемму 6.1).

Можно в других терминах сформулировать свойство полноты последовательности $\{\hat{x}_t^{(t')}, t' = 1, 2, \dots\}$ оптимальных оценок. С этой целью введем линейные множества

$$F^t = \text{Lin} \bigcup_{t'=1}^{\infty} Q_{t'}^t = \text{Lin} \{ \lim_{t' \rightarrow \infty} Q_{t'}^t \}, \quad (4.17)$$

состоящие из всевозможных линейных комбинаций (с матричными коэффициентами размером $l \times n$) элементов множества

$$Q^t = \bigcup_{t'=1}^{\infty} Q_{t'}^t. \quad (4.18)$$

Линейное множество F^t отображений пространства C^{lt} в пространство C^n можно рассматривать как предгильбертово пространство (т.е. линейное множество с определенным на нем ска-

лярным произведением его элементов) по отношению к скалярному произведению

$$\langle F_t', F_t'' \rangle = \int_{C^t} [F_t'(y^t)]^* F_t''(y^t) p_t(y^t) dy_1 \dots dy_t. \quad (4.19)$$

Здесь $p_t(y^t)$ — плотность распределения случайной величины $y^t(\cdot)$, интеграл в правой части формулы (4.19) имеет смысл, поскольку ранее предполагалось, что для любой функции $Q \in Q_t^t$, случайная величина $Q(y^t)$ имеет конечные моменты до второго порядка. Пополнение множества F^t в метрике, порождаемой скалярным произведением (4.19), приводит к гильбертову пространству, которое обозначим

$$L_2(p_t, Q^t) = \overline{\text{Lin } Q^t} = \bar{F}^t. \quad (4.20)$$

Лемма 6.3. *Последовательность оценок $\{\hat{x}_t^{(t')}, t' = 1, 2, \dots\}$ полна в том и только том случае, если функция $F_t^{\text{opt}}(y^t)$ (см. (4.17)) принадлежит пространству $L_2(p_t, Q^t)$.*

Доказательство леммы 6.3 приведено в Приложении.

Включение

$$F_t^{\text{opt}}(y^t) \in L_2(p_t, Q^t) \quad (4.21)$$

означает возможность сколь угодно точной аппроксимации функции $F_t^{\text{opt}}(y^t)$ элементами множества F^t , и любая последовательность $\{F_t^{(l)}, l = 1, 2, \dots\}$ элементов множества F^t , обеспечивающая такую аппроксимацию, является *оптимизирующей последовательностью* в смысле соотношения (4.16).

Б. Условия существования полных последовательностей оптимальных оценок. Для прикладных задач важны конкретные системы множеств (4.9), обеспечивающие полноту оценок (4.11), (4.12). Естественно, желательны такие множества (4.9), по отношению к которым свойство полноты соответствующих оптимальных оценок сохранялось бы для широкого класса случайных временных рядов z (точнее, включение (4.21) обеспечивалось бы для широкого класса плотностей p_t). Имеются общие схемы построения подобных систем функций Q_t^t . Изложим одну из возможных схем построения конечных множеств (4.9), определяющих полную последовательность оптимальных оценок. Для формулировки соответствующего утверждения введем необходимые обозначения. Пусть $C_{[0,1]}$ — банахово пространство скалярных непрерывных функций, определенных на

промежутке $[0, 1]$. Пусть $\{\chi_p, p \in \mathbb{Z}\}$ — произвольный базис в $C_{[0,1]}$. Через $e_{t'}$, $t' = 1, 2, \dots, l$, обозначим произвольный базис в C^l . Через $\mathbb{Z}^l$ обозначим множество мультииндексов размером l с целочисленными компонентами. Пусть, наконец, $\{L_r, r \in \mathbb{Z}_+, L_r \in \mathbb{R}_+\}$ — произвольная последовательность, $L_r \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$.

Теорема 6.6. Семейство отображений

$$Q^t = \{Q_t^{(t', p, r, k)}(y^t), t' = 1, \dots, l, p, r \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}^l\}, \quad (4.22)$$

где

$$Q_t^{(t', p, r, k)}(y^t) = \begin{cases} e_{t'} \chi_p\left(\frac{k \cdot y^t}{L_r}\right), & |y^t| \leq L_r, \\ 0, & |y^t| \geq L_r. \end{cases} \quad (4.23)$$

обладает свойством

$$L_2(p_t, Q^t) = L_2(p_t), \quad (4.24)$$

где

$$L_2(p_t) = \left\{ F_t : \int_{C^l} [F_t(y^t)]^* F_t(y^t) p_t(y^t) dy_1 \dots dy_l < \infty \right\}. \quad (4.25)$$

Доказательство теоремы 6.6 приведено в Приложении.

Таким образом, замыкание линейной оболочки множества функций Q^t (см. (4.20)), определяемых формулами (4.22), (4.23), совпадает с множеством всех функций, квадратично-интегрируемых с весом $p_t(\cdot)$ (см. (4.25)).

Выбирая в качестве множеств $Q_{t'}^t$, конечные множества функций из Q^t так, чтобы

$$\bigcup_{t'=1}^{\infty} Q_{t'}^t = Q^t,$$

придем в соответствии с п. 3А к полной последовательности оптимальных оценок.

Выбирая разные базисы $\{\chi_p\}$ в пространстве $C_{[0,1]}$, получим различные представления для оптимальных оценок (4.3).

Описанные выше классы функций являются обобщением так называемых "пороговых функций", используемых при математическом описании нейронных сетей (см., например, [22, 103, 115]). Доказательство полноты пороговых функций в пространстве непрерывных функций, заданных на компактном множестве, установлено В. А. Якубовичем при рассмотрении персептронов

как моделей обучающихся систем (см. например, [103]). Приводимое в п. 6.3 обоснование состоятельности оценок использует идеи доказательства полноты пороговых функций, изложенные в цитированных выше работах.

В. Полиномиальные оценки. Выбирая в качестве базисных функций χ_p полиномиальные функции, приходим к важному классу полиномиальных оптимальных оценок. Чтобы избежать громоздких обозначений, ограничимся рассмотрением случая центрированных скалярных оцениваемых и наблюдаемых величин ($n = 1, l = 1, x_t \in \mathbb{C}, y_t \in \mathbb{C}$).

Пусть

$$\chi_p(\sigma) = \sigma^p, \quad (4.26)$$

тогда функции $Q_i^{(p,r,k)} = Q_i^{(1,p,r,k)}$ (см. (4.23)) принимают вид

$$\begin{aligned} Q_i^{(p,r,k)}(y^t) &= \left[\frac{k^* y^t}{L_r} \right]^p = \frac{1}{(L_r)^p} \left[\sum_{t'=1}^t k_{t'} y_{t'} \right]^p = \\ &= \frac{1}{(L_r)^p} \sum_{t_1=1}^t \cdots \sum_{t_p=1}^t k_{t_1} \dots k_{t_p} y_{t_1} \dots y_{t_p}. \end{aligned}$$

Введем множество

$$Q_{\kappa}^t = \left\{ Q_i^{(p,r,k)}(y^t), p \leq \kappa, r \leq \kappa, |k| \leq \kappa \right\} \quad (4.27)$$

полиномиальных по y функций степени не выше κ . Использование таких функций в (4.2) позволяет представить оценку (4.3) следующим образом:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^{(\kappa)} = \mu_t^{(\kappa)} + \sum_{i=1}^{\kappa} \left[\sum_{t_1=1}^t \cdots \sum_{t_i=1}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) y_{t_1} \dots y_{t_i} \right], \quad (4.28)$$

$$\mu_t^{(\kappa)} = - \sum_{i=1}^{\kappa} \left[\sum_{t_1=1}^t \cdots \sum_{t_i=1}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) M y_{t_1} \dots y_{t_i} \right], \quad (4.29)$$

где $h_i(t, t_1, t_2, \dots, t_i)$ — некоторые скалярные величины, совокупность которых является весовой функцией нелинейного фильтра (4.28). Выражение в квадратных скобках в формуле (4.28) определяет однородные формы порядка i от процесса y , называемые (дискретным) однородным (однородности i) *оператором Вольterra*. Детерминированная величина (4.29) определяет "однородную" форму нулевой степени процесса y . В целом формула

(4.28) определяет полиномиальную по y (порядка κ) оценку случайной величины x_t . Полагая $\kappa = \infty$, запишем оценку $\hat{x}_t$ в форме ряда Вольтерра

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^{(\infty)} = \mu_t^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{t_1=1}^t \cdots \sum_{t_i=1}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) y_{t_1} \dots y_{t_i} \right], \quad (4.30)$$

$$\mu_t^{(\infty)} = - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{t_1=1}^t \cdots \sum_{t_i=1}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) M y_{t_1} \dots y_{t_i} \right]. \quad (4.31)$$

Задача оптимальной фильтрации состоит в определении ядер $h_i(\cdot)$ (весовой функции фильтра) из условия минимизации заданного показателя качества фильтрации.

Если процесс фильтрации начинается из бесконечного прошлого, то оценка принимает вид

$$\hat{x}_t = \bar{\mu}_t^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{t_1=-\infty}^t \cdots \sum_{t_i=-\infty}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) y_{t_1} \dots y_{t_i} \right], \quad (4.32)$$

$$\bar{\mu}_t^{(\infty)} = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{t_1=-\infty}^t \cdots \sum_{t_i=-\infty}^t h_i(t, t_1, \dots, t_i) \bar{M} y_{t_1} \dots y_{t_i} \right]. \quad (4.33)$$

Стационарный фильтр (4.32), (4.33) соответствует случаю, когда

$$h_i(t, t_1, \dots, t_i) = h_i(t - t_1, \dots, t - t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Оценка (4.32), (4.33) в этом случае может быть записана в виде

$$\hat{x}_t = \bar{\mu}_t^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{t_1=-\infty}^t \cdots \sum_{t_i=-\infty}^t h_i(t_1, \dots, t_i) y_{t_1} \dots y_{t_i} \right],$$

$$\bar{\mu}_t^{(\infty)} = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{t_1=-\infty}^t \cdots \sum_{t_i=-\infty}^t h_i(t_1, \dots, t_i) M y_{t_1} \dots y_{t_i} \right].$$

Условие $h_i(t, t_1, \dots, t_i) = 0$ при $i \geq 1$ в (4.32) приводит к линейному неупреждающему фильтру

$$\hat{x}_t = \mu_t^{(1)} + \sum_{t_1=1}^t h_1(t, t_1) y_{t_1}.$$

5. Минимаксная фильтрация

Следуя намеченной в п. 1В постановке задачи оценивания, примем, что частично наблюдаемый временной ряд

$$z = \{z_t, t \in T\} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad T = \{1, 2, \dots, t_*\}, \quad (5.1)$$

со значениями в C^p зависит от параметра ξ , принимающего значения в некотором абстрактном множестве Ξ , $z = z(\xi)$. Предполагается, что при каждом фиксированном значении параметра ξ p -вектор $z(\xi)$ определен полностью, так что частично наблюдаемый временной ряд (5.1) задан с точностью до "множества неопределенности" Ξ . При этом параметр ξ может не иметь никакого статистического истолкования, т. е. временной ряд (5.1) не обязан быть случайным процессом.

Поставим задачу получения линейных оценок $\hat{x}_t$ компонент временного ряда $x = \{x_t, t \in T, x_t \in C^n\}$ по реализации временного ряда $y = \{y_t, t \in T, y_t \in C^l\}$, $l + n = p$, в виде

$$\hat{x}_t = \sum_{t'=1}^t h_{tt'} y_{t'}, \quad t \in T, \quad (5.2)$$

где

$$h = \{h_{tt'}, t, t' \in T, h_{tt'} = 0 \text{ при } t' > t\} \quad (5.3)$$

— линейный ограниченный оператор (весовая функция фильтра), $h_{tt'}: C^l \rightarrow C^n$. Пусть на множестве неопределенности Ξ задана некоторая ансамблевая операция $\tilde{M}_\xi$, обладающая свойством монотонности: для произвольных неотрицательных функций $\psi(\xi)$, $\varphi(\xi)$, ($\psi(\xi) \geq \varphi(\xi)$) и неотрицательной величины α , для которых имеют смысл величины $\tilde{M}_\xi \psi(\xi)$, $\tilde{M}_\xi \varphi(\xi)$, $\tilde{M}_\xi \alpha \psi(\xi)$, выполняются условия

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\xi \psi(\xi) &\geq \tilde{M}_\xi \varphi(\xi), & \tilde{M}_\xi \alpha \psi(\xi) &= \alpha \tilde{M}_\xi \psi(\xi), \\ \tilde{M}_\xi [\psi(\xi) + \alpha] &= \tilde{M}_\xi \psi(\xi) + \alpha. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Качество линейной оценки условимся характеризовать величиной

$$J_t(h) = \tilde{M}_\xi \left| x_t(\xi) - \sum_{t'=1}^t h_{tt'} y_{t'}(\xi) \right|^2 \quad (5.5)$$

(считаем, что она имеет смысл). Набором величин (5.5) при $t \in T$ будем характеризовать качество фильтра (5.2). Обозначим через h_0 выделенное множество весовых функций h . Тогда

задача оптимальной фильтрации может быть сформулирована так: найти весовую функцию $h \in h_0$, удовлетворяющую условию

$$J_t(h) \rightarrow \min_{h \in h_0}, \quad t = 1, 2, \dots, t_*. \quad (5.6)$$

В случае разрешимости задачи соответствующая весовая функция (5.3) и линейный фильтр (5.2) называются оптимальными.

Сложность решения поставленной задачи оптимальной фильтрации в значительной степени зависит как от выбора множества неопределенности Ξ , так и от вида ансамблевой операции M_ξ . Перейдем к уточнению этих объектов.

А. Уточнение задачи оптимальной фильтрации. Удобно принять, что частично наблюдаемый временной ряд z зависит от параметра ξ специальным образом, а именно

$$z(\xi) = z[v(\xi)], \quad (5.7)$$

где $v(\xi) = \{v_t(\xi), t = 1, 2, \dots, t_*\}$ — временной ряд со значениями в пространстве C^m . Последовательность v интерпретируется как помеха, и эта помеха известна с точностью до параметра ξ . Множество Ξ определяет множество "реализаций" помехи. Таким образом, временной ряд z предполагается известной функцией помехи, его реализация однозначно определяется реализацией помехи. Примем, что зависимость z от v линейная и неупреждающая:

$$z_t(\xi) = K_t v^t(\xi), \quad v^t(\xi) = \{v_1(\xi), \dots, v_t(\xi)\}, \quad (5.8)$$

где K_t , $t = 1, 2, \dots, t_*$, — линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из пространств C^{mt} в пространство C^p . Если учесть структуру временного ряда (5.1), то соотношение (5.8) можно записать так:

$$x_t(\xi) = K'_t v^t(\xi), \quad y_t(\xi) = K''_t v^t(\xi), \quad t = 1, 2, \dots, t_*, \quad (5.9)$$

K'_t, K''_t — составляющие оператора K_t ,

$$K_t = \begin{Bmatrix} K'_t \\ K''_t \end{Bmatrix}, \quad K'_t: C^{mt} \rightarrow C^n, \quad K''_t: C^{mt} \rightarrow C^l.$$

Погрешность фильтрации определяется величинами $x_t - \hat{x}_t$, $t = 1, 2, \dots, t_*$; в силу (5.2), (5.9) эта погрешность зависит как от выбора весовой функции фильтра, так и от реализации помехи

$$x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi) = L_t(h) v^t(\xi), \quad (5.10)$$

где

$$L_t(h) = K'_t - \sum_{t'=1}^t h_{tt'} K''_{t'} \quad (5.11)$$

(функция $L_t(h)$ в действительности зависит лишь от "строки" с номером t весовой функции h).

Таким образом, задача оптимальной фильтрации (5.6) преобразуется к виду

$$J_t(h) = \tilde{M}_t |L_t(h)v^t(\xi)|^2 \rightarrow \min_{h \in h_0}, \quad t = 1, 2, \dots, t_*. \quad (5.12)$$

Введем в рассмотрение операторные функции

$$G_t(h) = L_t(h)L_t^*(h), \quad t = 1, 2, \dots, t_*, \quad (5.13)$$

квадратично зависящие от весовой функции фильтра и при каждом значении весовой функции являющиеся неотрицательными операторами в пространстве C^n . Пусть

$$G_t = \{G_t(h), h \in h_0\}, \quad t = 1, 2, \dots, t_*, \quad (5.14)$$

— множества неотрицательных операторов в пространстве C^n , порождаемых операторными функциями (5.13).

Сделаем теперь основное предположение о свойствах множества Ξ и определенной на нем ансамблевой операции $\tilde{M}_t$, при которых в дальнейшем будет обсуждаться задача оптимальной фильтрации. Именно, предположим, что для каждого $t \in T$ величина $J_t(h)$ (см. (5.12)) является функцией оператора (5.13):

$$J_t(h) = f_t[G_t(h)], \quad (5.15)$$

и эта функция монотонно неубывающая,

$$G_t^{(1)}(h) \geq G_t^{(2)}(h) \rightarrow f_t[G_t^{(1)}(h)] \geq f_t[G_t^{(2)}(h)], \quad t \in T \quad (5.16)$$

(неравенство между симметричными операторами понимается в смысле неравенства их квадратичных форм).

Это предположение сводит задачу оптимизации (5.6) к линейно-квадратичной задаче операторной оптимизации

$$G_t(h) \rightarrow \min_{h \in h_0}, \quad t = 1, 2, \dots, t_*, \quad (5.17)$$

другими словами, оптимальный весовой оператор h_{opt} определяется из условий

$$G_t(h_{\text{opt}}) \leq G_t(h), \quad h \in h_0, \quad t \in T, \quad (5.18)$$

т.е. операторы $G_t(h_{\text{opt}})$ являются минимальными элементами полуупорядоченных множеств (5.14).

Нахождение оптимальной весовой функции (5.2) при сделанных предположениях (5.15), (5.16) позволяет довести до конца решение задачи оптимальной фильтрации, а при дополнительных предположениях о свойствах частично наблюдаемого ряда z позволяет представить оптимальный фильтр (5.2) в рекуррентной форме (в виде фильтра Калмана—Бьюси).

Разумеется, в конкретной задаче оптимизации подлежит проверке выполнение основного предположения о монотонности функционалов качества как функций оператора (5.13).

Рассмотрим два важных примера выбора множества неопределенности Ξ и ансамблевой операции $\tilde{M}_\xi$, для которых это предположение выполнено.

Б. Пример: бел шумная помеха. Пусть $\Xi = \Omega$ — пространство элементарных событий с выделенной в нем σ -алгеброй подмножеств $\mathcal{A}$, на которых определена вероятностная мера P , так что $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство с элементарными событиями ω и v — центрированный случайный временной ряд с единичной матрицей корреляций

$$Mvv^* = I_{mt}. \quad (5.19)$$

Выбирая в качестве ансамблевой операции $\tilde{M}_\xi$ операцию M математического ожидания (усреднение по вероятностной мере P) и используя очевидную формулу

$$|L_t(h)v^t|^2 = \text{sp} \{L_t(h)v^t(v^t)^*L_t^*(h)\}, \quad (5.20)$$

с учетом (5.19), (5.12) будем иметь

$$J_t(h) = \text{sp} \{L_t(h)L_t^*(h)\} = \text{sp} \{G_t(h)\}, \quad t \in T. \quad (5.21)$$

Функции

$$f_t[G] = \text{sp}\{G\} \quad (5.22)$$

— линейные по G , а потому монотонно неубывающие. Таким образом, в случае, когда v — случайный временной ряд стандартного белого шума, для функционалов $J_t(h)$, $t = 1, 2, \dots, t_*$, выполнены условия (5.15), (5.16) с монотонными функциями (5.22), если в качестве ансамблевой операции $\tilde{M}_\xi$ выбрать операцию M усреднения по множеству элементарных событий.

В. Пример: ограниченная помеха. В предыдущем примере ансамблевая операция $\tilde{M}_\xi$ была выбрана линейной ($\tilde{M}_\xi = M$), что упростило проверку нужной монотонности функционалов качества фильтрации. Примем теперь, что параметр ξ совпадает с реализацией временного ряда v , $\xi = (v_1, \dots, v_t)$, а множество Ξ определено условиями

$$[v^t]^* v^t = \sum_{t'=1}^t v_{t'}^*(\xi) v_{t'}(\xi) \leq r_t, \quad t \in T, \quad (5.23)$$

где $r_1, r_2, \dots, r_t$ — заданная монотонно неубывающая последовательность положительных чисел, $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_t$. Таким образом, множество Ξ состоит из всех реализаций последовательности v , для которых выполнено (5.23).

Используя неравенство Шварца и учитывая (5.23), имеем

$$[x_t - \hat{x}_t][x_t - \hat{x}_t]^* \leq \sum_{t'=1}^t v_{t'}^*(\xi) v_{t'}(\xi) G_t(h) \leq r_t \Lambda_{G_t(h)} I_n, \quad (5.24)$$

где оператор $G_t(h)$ определяется формулами (5.13), (5.11) и Λ_G — наибольшее собственное значение неотрицательного оператора G , совпадающее с нормой этого оператора,

$$\Lambda_{G_t(h)} = |G_t(h)|. \quad (5.25)$$

Из (5.24) следует неравенство

$$\sup_{\xi \in \Xi} |x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi)|^2 \leq r_t \Lambda_{G_t(h)}, \quad (5.26)$$

которое может служить оценкой качества фильтрации для ансамблевой операции

$$\tilde{M}_\xi = \sup_{\xi \in \Xi}. \quad (5.27)$$

В этом случае неравенство (5.26) с учетом формулы (5.5) принимает вид

$$J_t(h) \leq r_t \Lambda_{G_t(h)}. \quad (5.28)$$

Лемма 6.4. При выполнении условий (5.23) справедливо равенство

$$\sup_{\xi \in \Xi} \left| x_t(\xi) - \sum_{t'=1}^t h_{tt'} y_{t'}(\xi) \right|^2 = r_t \Lambda_{G_t(h)}. \quad (5.29)$$

Доказательство леммы 6.4 приведено в Приложении, оно следует идеям работы [52] (см. также [105]).

Поскольку норма $|G_t(h)|$ неотрицательного оператора $G_t(h)$ является монотонной его функцией, то при выполнении условий (5.23) (при заданной монотонно неубывающей последовательности положительных чисел $(r_1, r_2, \dots, r_{t_*})$) для нелинейной ансамблевой операции (5.27) также имеют место представления (5.15) функционалов качества фильтрации с монотонными функциями

$$f_t[G_t] = r_t \Lambda_{G_t}. \quad (5.30)$$

Г. Решение операторной линейно-квадратичной задачи.

Перейдем к обсуждению операторной задачи оптимизации (5.17). Из формул (5.13), (5.14) следует, что оператор $G_t(h)$ зависит лишь от "строки" с номером t весовой функции h , так что решение задачи оптимизации (5.17) при каждом $t \in T$ решается достаточно просто ввиду квадратичной зависимости оператора $G_t(h)$ от оператора h .

Лемма 6.5. *Предположим, что при каждом $t \in T$ блочные $tn \times tn$ -матрицы*

$$E_t = \begin{bmatrix} K_1''(K_1'')^* & K_1''(K_t'')^* \\ K_t''(K_1'')^* & K_t''(K_t'')^* \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

невыврождены,

$$\det E_t \neq 0, \quad t \in T. \quad (5.32)$$

Тогда задача оптимизации (5.17) однозначно разрешима и ее решение имеет вид

$$h_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{t_*1} & h_{t_*2} & h_{t_*3} & \dots & h_{t_*t_*} \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

где

$$h_t = \|h_{t1}, h_{t2}, \dots, h_{tt}\| = K_t' \|(K_1'')^*, \dots, (K_t'')^*\| E_t^{-1}, \quad t \in T. \quad (5.34)$$

При этом

$$\min_{h \in H_0} J_t(h) = J_t(h_{\text{opt}}) = \text{sp} \left\{ K_t'(K_t')^* \left[I_n - \sum_{t'=1}^t (K_{t'}'')^* E_{t'} K_{t'}'' \right] \right\}. \quad (5.35)$$

Доказательство леммы 6.5 приведено в Приложении.

Формула (5.34) определяет "строку" h_t с номером t оптимальной весовой функции (5.33) фильтра (5.2).

Д. Рекуррентная форма представления решения линейно-квадратичной задачи. Предположим, что зависимости (5.9) определяются рекуррентными уравнениями

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v_{t+1}, & t = 0, 1, \dots, t_* - 1, \\y_t &= C_t x_t + D_t v_t, & t = 0, 1, \dots, t_*.\end{aligned}\quad (5.36)$$

Здесь $A_t, B_t, C_t, D_t, t = 1, 2, \dots, t_*$ — операторы, действующие в унитарных пространствах соответствующих размерностей: $A_t: C^n \rightarrow C^n, B_t: C^m \rightarrow C^n, C_t: C^n \rightarrow C^l, D_t: C^m \rightarrow C^l$. При фиксации некоторых базисов в этих пространствах можно говорить о порождаемых этими операторами матрицах. В дальнейшем операторы A_t, B_t, C_t, D_t предполагаются известными, начальное значение $x_0 \in C^n$ и помеха $v = (v_1, \dots, v_{t_*}), v_t \in C^m$, — неизвестными.

Первое уравнение системы (5.36) описывает линейный объект с состояниями $x_t \in C^n, t = 0, 1, \dots, t_*$, изменяющимися во времени под действием возмущающих воздействий $v_t \in C^m, t = 1, 2, \dots, t_*$. Задача фильтрации в рассматриваемом случае интерпретируется как задача получения оценок $\hat{x}_t$ неизвестных состояний x_t объекта по предыстории наблюдений за его выходами. Если оценки $\hat{x}_t$ ищутся как линейные неупреждающие функции выходных переменных, то приходим к линейному фильтру (5.2). Рекуррентность уравнений (5.36), задающих зависимости (5.9), приводит к специальным операторам K_t , что позволяет получить удобное представление для операторных функций (5.13), (5.12). Остановимся на этом вопросе подробнее.

Начальное условие x_0 удобно рассматривать как начальное значение "расширенной" помехи, полагая

$$x_0 = B_{-1} v_0 \quad (5.37)$$

с некоторым оператором $B_{-1}: C^m \rightarrow C^n$. "Расширенная" помеха v тогда имеет вид

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_{t_*}) \quad (5.38)$$

и принимает значения из множества $C^{m(t_*+1)}$.

Пусть t — фиксированный момент времени из множества T и $Z_{t,0}, \dots, Z_{t,t} = I_n$ — некоторая последовательность операторов в пространстве C^n ($n \times n$ -матриц, если в C^n фиксирован какой-

либо базис). Тогда в силу (5.36) имеем

$$\begin{aligned} x_t &= (Z_{t,t})^* x_t = (Z_{t,0})^* x_0 + \sum_{t'=1}^t [(Z_{t,t'})^* x_{t'} - (Z_{t,t'-1})^* x_{t'-1}] = \\ &= \sum_{t'=0}^t (Z_{t,t'})^* B_{t-1} v_{t'} + \sum_{t'=1}^t [(Z_{t,t'})^* A_{t-1} - (Z_{t,t'-1})^*] x_{t'-1} \end{aligned}$$

и (см. (5.2))

$$\hat{x}_t = \sum_{t'=0}^t h_{tt'} y_{t'} = \sum_{t'=0}^t h_{tt'} [C_{t'}(A_{t'-1} x_{t'-1} + B_{t'-1} v_{t'}) + D_{t'} v_{t'}],$$

($A_{-1} = 0$), а потому

$$\begin{aligned} x_t - \hat{x}_t &= \sum_{t'=0}^t [(Z_{t,t'})^* B_{t'-1} - h_{tt'}(C_{t'} B_{t'-1} + D_{t'})] v_{t'} + \\ &+ \sum_{t'=1}^t [(Z_{t,t'})^* A_{t'-1} - (Z_{t,t'-1})^* - h_{tt'} C_{t'} A_{t'-1}] x_{t'-1}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Если операторы $Z_{t,t'}$, $t' = 1, \dots, t_*$, выбраны удовлетворяющими условиям

$$Z_{t,t'-1} = A_{t'-1}^* [Z_{t,t'} - C_t^* (h_{tt'})^*], \quad t' = t, t-1, \dots, \quad (5.40)$$

$$Z_{t,t} = I_n, \quad (5.41)$$

то формула (5.39) упростится и примет вид

$$x_t - \hat{x}_t = L_t(h_t, Z^t) v^t, \quad (5.42)$$

где

$$v^t = (v_0, v_1, \dots, v_t),$$

$$\begin{aligned} L_t(h_t, Z^t) &= \|(Z_{t,0})^* B_{-1} - h_{t0}(C_0 B_{-1} + \\ &+ D_0), \dots, (Z_{t,t})^* B_{t-1} - h_{tt}(C_t B_{t-1} + D_t)\|, \end{aligned} \quad (5.43)$$

а $h_{tt'}$, $t' = 1, \dots, t_*$, — составляющие блочного оператора h_t (см. (5.34)). Из сравнения формул (5.42), (5.10) следует, что операторная функция

$$\begin{aligned} G_t(h_t, Z^t) &= L_t(h_t, Z^t) L_t^*(h_t, Z^t) = \\ &= \sum_{t'=0}^t [(Z_{t,t'})^* B_{t'-1} - h_{tt'}(C_{t'} B_{t'-1} + D_{t'})] \times \\ &\times [(Z_{t,t'})^* B_{t'-1} - h_{tt'}(C_{t'} B_{t'-1} + D_{t'})]^* \end{aligned} \quad (5.44)$$

совпадает с операторной функцией (5.13), если операторы

$$Z^t = \|Z_{t,0}, \dots, Z_{t,t}\|, \quad h_t = \|h_{t0}, \dots, h_{tt}\| \quad (5.45)$$

связаны линейными соотношениями (5.40) (после исключения матриц $Z_{t,t'}$ в силу соотношений (5.40) функция (5.44) принимает вид (5.13)). Поэтому задача безусловной оптимизации (5.17) эквивалентна задаче условной оптимизации

$$G_t(h_t, Z^t) \rightarrow \min_{\{h_t, Z^t: (5.40)\}}, \quad (5.46)$$

где минимум берется по всем операторам h_t, Z^t (см. (5.45)), связанным линейными соотношениями (5.40), (5.41).

Задача (5.46) условной оптимизации квадратичной по h_t, Z^t операторной функции (5.44) при линейных ограничениях (5.41) напоминает известную задачу оптимального управления и легко к ней сводится. Действительно, для произвольного вектора $a \in C^n$ и фиксированного $t \in T$ введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t-t'} &= Z_{t,t'} a, & u_{t-t'} &= -(h_{t,t'})^* a, \\ \tilde{A}_{t-t'} &= A_{t'-1}^*, & \tilde{B}_{t-t'} &= A_{t'-1}^* C_{t'}^*. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Тогда, применяя каждую из частей операторного равенства (5.40) к вектору a , получаем векторное уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{s+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_s + \tilde{B}_s u_s, & s &= t-t' = 0, 1, \dots, t-1, \\ \tilde{x}^0 &= a, \end{aligned} \quad (5.48)$$

рассматриваемое как уравнение линейного объекта управления с l -векторами $u_0, u_1, \dots, u_{t-1}$ управляющих воздействий. Действуя подобным образом, убеждаемся, что величина $W_t = a^* G_t(h_t, Z_0^t) a$ является квадратичной формой переменных $\tilde{x}_1^t, u_0^{t-1}$:

$$\begin{aligned} W_t &= W_t(u_0^{t-1}, \tilde{x}_1^{t-1}) = a^* G_t(h_t, Z^t) a = \\ &= \sum_{s=0}^{t-1} |\alpha_s u_s + \beta_s \tilde{x}_s|^2 + |\beta_{t0} \tilde{x}_t|^2, \end{aligned} \quad (5.49)$$

где обозначено

$$\alpha_s = B_{t'-1}^* C_{t'}^* + D_{t'}^*, \quad \beta_s = B_{t'-1}^*, \quad s = t-t', t' = 0, 1, \dots, t. \quad (5.50)$$

Таким образом, при фиксированном векторе $a \in C^n$ задача (5.46) сводится к линейно-квадратичной задаче оптимизации

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^t |\alpha_s u_s + \beta_s \tilde{x}_s|^2 = \\ & = \sum_{s=0}^t \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ u_s \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \beta_s^* \beta_s & \beta_s^* \alpha_s \\ \alpha_s^* \beta_s & \alpha_s^* \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_s \\ u_s \end{bmatrix} \rightarrow \min_{\{\tilde{x}_s, u_s: (4.48)\}} \\ & \alpha_t = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Это и есть линейно-квадратичная задача оптимального управления. Метод ее решения хорошо разработан (см., например, [14]), известно, что оптимальное управление определяется линейной обратной связью

$$u_s = \tilde{K}_s \tilde{x}_s, \quad s = 0, \dots, t, \quad (5.52)$$

причем для коэффициентов $\tilde{K}_t$ этой оптимальной обратной связи получено удобное рекуррентное соотношение, определяемое матричным уравнением Риккати (в дискретном времени). Операторы $\tilde{K}_t$, $t = 0, 1, \dots, t$, действующие из пространства C^n в пространство C^m , однозначно определяются коэффициентами системы (5.36).

Разрешимость линейно-квадратичной задачи управления (5.48)–(5.51) при каждом $t \in T$ означает, что задача (5.46) операторной оптимизации разрешима, соотношения (5.52) в силу произвольности вектора $a \in C^n$ и (5.47) означают, что соответствующие компоненты $h_{t,t'}$, $t' = 1, 2, \dots, t$, оптимального оператора h_t (см. (5.45)) являются линейными функциями операторов $Z_{t,t'}: C^n \rightarrow C^n$, определяемых соотношениями (5.40). Это важное свойство оптимальных операторов $h_{t,t'}: C^l \rightarrow C^n$ сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 6.7. *Предположим, что для системы (5.36) выполнено условие: операторы $\pi_t: C^l \rightarrow C^l$, $t = 0, \dots, t_*$, положительны:*

$$\pi_t = \alpha_t^* \alpha_t = (C_t B_t + D_t)(C_t B_t + D_t)^* > 0. \quad (5.53)$$

Тогда операторная линейно-квадратичная задача (5.36) разрешима и линейные операторы $h_{t,t'}: C^l \rightarrow C^n$, $t' \leq t$, $t \in T$, являющиеся решением этой задачи, определяются рекуррентными со-

отношениями

$$h_{tt'} = -(Z_{t,t'})^* K_{t'-1}, \quad t' \leq t, \quad (5.54)$$

$$h_{tt'} = 0, \quad t' > t, \quad (5.55)$$

где операторы

$$\begin{aligned} K_t &= -[A_t P_t A_t^* C_{t+1}^* + B_t(C_{t+1} B_t + D_{t+1})^*] E_t^{-1}, \\ E_t &= C_{t+1} A_t P_t A_t^* C_{t+1}^* + \\ &+ (C_{t+1} B_t + D_{t+1})(C_{t+1} B_t + D_{t+1})^* \end{aligned} \quad (5.56)$$

вычисляются через неотрицательные операторы $P_t: C^n \rightarrow C^n$, $t \in T$, определяемые рекуррентными уравнениями

$$P_{t+1} = A_t P_t A_t^* + B_t B_t^* - K_t E_t K_t^*, \quad t = -1, 0, \dots, t_* - 1, \quad (5.57)$$

при начальном условии

$$P_0 = B_{-1} B_{-1}^* - K_{-1} E_0 K_{-1}^* \quad (5.58)$$

(B_{-1} — оператор из соотношения (5.37)), и операторы $Z_{t,t'}: C^n \rightarrow C^n$ определяются рекуррентными соотношениями

$$Z_{t,t'-1} = A_{t'-1}^* [I_n + C_{t'}^* K_{t'-1}^*] Z_{t,t'}, \quad t' = t, t-1, \dots, 1 \quad (5.59)$$

$$Z_{t,t} = I_n. \quad (5.60)$$

При этом

$$\min_{\{h_t, Z^t: (5.40)\}} G_t(h_t, Z^t) = P_t. \quad (5.61)$$

Доказательство теоремы 6.7 приведено в Приложении. Рассмотрим линейный фильтр (5.2), весовой оператор

$$h = \|h_{tt'}\|, \quad t, t' = 0, 1, \dots, t_*, \quad (5.62)$$

которого является решением операторной линейно-квадратичной задачи оптимизации (5.46). Рекуррентный характер формул (5.55)–(5.60) позволяет установить, что линейный неупреждающий фильтр (5.2) в этом случае допускает представление в рекуррентной форме.

Теорема 6.8. Пусть выполнены условия теоремы 6.7. Тогда оценки $\hat{x}_t$, доставляемые линейным фильтром (5.2) с весовым оператором (5.62), определяемым соотношениями (5.55)–(5.60), удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= A_t \hat{x}_t - K_t(y_t - C_{t+1} A_t \hat{x}_t), \quad t = 0, 1, \dots, t_*, \\ \hat{x}_0 &= -K_0 y_0 (x_{-1} = 0), \end{aligned} \quad (5.63)$$

где операторы $K_t: C^1 \rightarrow C^n$ находятся по формулам (5.56), в которых неотрицательные операторы $P_t: C^n \rightarrow C^n$ определяются дискретным уравнением Риккати (5.57) при начальном условии (5.58). При этом для погрешности $x_t - \hat{x}_t$ оценивания справедливо неравенство

$$|x_t - \hat{x}_t|^2 \leq |v_0^t|^2 \Lambda_{P_t}, \quad (5.64)$$

где Λ_P — наибольшее собственное значение (норма) неотрицательного оператора P ,

$$\Lambda_{P_t} = |P_t|. \quad (5.65)$$

Доказательство теоремы 6.8 приведено в Приложении.

Соотношения (5.63), (5.56), (5.57) определяют хорошо известный фильтр Калмана — Бьюси, появляющийся в задаче оптимальной фильтрации случайных временных рядов (5.36) при белом шумной помехе v (см. гл. 5).

Отметим, что из формул (5.56), (5.58) можно получить следующее выражение для коэффициента K_{-1} :

$$K_{-1} = -B_{-1}(C_0 B_{-1} + D_0)^* [(C_0 B_{-1} + D_0)(C_0 B_{-1} + D_0)^*]^{-1}.$$

Е. Оптимальность фильтра Калмана — Бьюси. Замечательным свойством фильтра Калмана — Бьюси является его оптимальность для широкого класса помех: если ансамблевая операция $\tilde{M}_\xi$ и класс помех таковы, что для функционалов качества $J_t(h)$ выполнены условия (5.15), (5.16), то фильтр (5.55)–(5.60) является решением оптимизационной задачи (5.6); другими словами, фильтр Калмана — Бьюси в этих условиях является оптимальным. В п. 4Б, 4В было показано, что выбор операции $\tilde{M}_\xi = M$ усреднения случайной помехи v , являющейся стандартным белым шумом, и операции $\tilde{M}_\xi = \sup_{\xi \in \Xi}$ максимизации в случае

равномерной по реализациям ограниченности помехи v^{t*} (см. (5.23)) обеспечивает оптимальность фильтра Калмана — Бьюси (5.63), (5.56)–(5.58). Первый из отмеченных случаев хорошо известен, именно при исследовании этой задачи возник фильтр Калмана — Бьюси. Случай ограниченных помех менее тривиален. Приведем еще один вариант помехи, при которой фильтр Калмана — Бьюси является оптимальным.

Предположим, что возмущающие воздействия v_t в объекте (5.36) имеют следующую структуру:

$$v_t = v_t' + v_t'', \quad (5.66)$$

где $v' = v'(\xi) = \{v'_i(\xi), t \in T\}$ — детерминированный временной ряд, удовлетворяющий условию

$$\sup_{\xi \in \Xi} \{[v'_i(\xi)]^* v'_i(\xi)\} = C_v^2, \quad (5.67)$$

с заданной положительной постоянной $C_v > 0$, и $v'' = \{v''_i(\xi), t \in T\}$ — случайный временной ряд, являющийся стандартным дискретным белым шумом

$$M v''_i = 0, \quad M v''_i (v''_i)^* = I_m \delta_{it}, \quad (5.68)$$

Таким образом, помеха v' , действующая на объект и в канале наблюдения, не является центрированной (и вообще может не обладать какими-либо полезными статистическими свойствами), величины v'_i определяют "дрейф" возмущающих воздействий во времени,

$$v'_i = M v_i, \quad (5.69)$$

и модель этого дрейфа не предполагается известной. Принимая, для простоты, что $x_0 = 0$, и учитывая, что оценки $\hat{x}_t$ формируются с помощью фильтра (5.2), запишем соотношение (5.10) в виде

$$x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi) = L_t(h_t, Z^t) [[v'(\xi)]^t + [v'']^t]. \quad (5.70)$$

Поэтому в силу (5.69) имеем

$$M |x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi)|^2 = \text{sp}\{G_t(h)\} + [[v'(\xi)]^t]^* L_t^*(h) L_t(h) [v'(\xi)]^t.$$

Отсюда, как и в п. 4В, находим

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \Xi} M |x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi)|^2 &= \text{sp}\{G_t(h)\} = \\ &= \sup_{\xi \in \Xi} \{[v'_i(\xi)]^* v'_i(\xi) \Lambda_{G_t(h)}\} = \text{sp}\{G_t(h)\} + t C_v \Lambda_{G_t(h)}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Функция

$$f_t(G_t) = \text{sp}\{G_t(h)\} + t C_v \Lambda_{G_t(h)} \quad (5.72)$$

является монотонной функцией операторного аргумента G , поэтому в соответствии с п. 4А фильтр Калмана — Бьюси (5.63), (5.56)–(5.58) доставляет оптимальные оценки по отношению к функционалу качества

$$J_t(h) = \sup_{\xi \in \Xi} M |x_t(\xi) - \hat{x}_t(\xi)|^2. \quad (5.73)$$

При этом в силу (5.72)

$$J_t(h_{\text{opt}}) = \min_{h \in h_0} J_t(h) = \text{sp}\{P_t\} + t |P_t|, \quad (5.74)$$

где неотрицательные операторы ($n \times n$ -матрицы) формируются уравнением Риккати (5.57) при начальном условии (5.58). Формула (5.72) показывает, что если величина C_v' мала, то по крайней мере при не слишком больших t воздействие дрейфа возмущающих воздействий мало сказывается на качестве фильтрации. При больших t воздействие дрейфа на качество фильтрации может оказаться существенным, это зависит от поведения величин $|P_t|$ при больших t . При отсутствии помех в канале наблюдения величина $t|P_t|$ может оставаться ограниченной равномерно по t , в этом случае малый дрейф несущественно влияет на качество оценок, формируемых фильтром Калмана — Бьюси.

Можно рассмотреть более экзотическую ситуацию, когда в некоторые моменты времени возмущающие воздействия являются компонентами дискретного белого шума, тогда как в остальные моменты они являются ограниченными и удовлетворяют соотношениям типа (5.68). И в этом случае фильтр Калмана — Бьюси будет доставлять оптимальные по отношению к функционалам (5.73) оценки.

Приведенный в теореме 6.8 вывод фильтра Калмана — Бьюси не основывался на каких-либо свойствах помехи $v = (v_1, \dots, v_t)$. Предположим теперь, что эта помеха является гауссовым белым шумом,

$$Mv_t = 0, \quad Mv_tv_t^* = R_v, \quad (5.75)$$

и примем, что $x_0 \sim N(0, R_x)$. Для получения оптимальных в среднеквадратичном смысле оценок $\hat{x}_t$ случайных величин x_t по неупреждающим наблюдениям за временным рядом $y = \{y_t, t \in T\}$ можно воспользоваться теоремой 6.4, в которой описывается рекуррентная модификация оптимального фильтра. Для получения процедуры оптимального оценивания следует систему (5.36) переписать в виде системы (2.30):

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v'_{t+1}, & t &= 0, \dots, t_* - 1, \\ y_t &= C_t x_t + v''_t, & t &= 0, \dots, t_*. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v'_t &= \left\| [R_{v'}(t)]^{1/2}, 0_{n \times l} \right\| v_t = B_{t-1} v_t, \\ v''_t &= \left\| 0_{l \times n} [R_{v''}(t)]^{1/2} \right\| v_t = D_t v_t, \\ v_t &= \left\| \begin{array}{c} [R_{v'}(t)]^{-1/2} v'_t \\ [R_{v''}(t)]^{-1/2} v''_t \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (5.77)$$

(в данном случае $v'_t \in \mathbb{C}^n$, $v''_t \in \mathbb{C}^l$, т.е. $v_t \in \mathbb{C}^m$, $m = l + n$, $v'_0 = x_0$). Рекуррентные соотношения (2.41)–(2.43) принимают тогда вид

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= A_t \hat{x}_t - K_t (y_{t+1} - C_{t+1} A_t \hat{x}_t), \\ K_{t-1} &= -Q_t C_t^* [C_t Q_t C_t^* + D_t D_t^*]^{-1}, \\ Q_{t+1} &= A_t P_t A_t^* + B_t B_t^*,\end{aligned}\tag{5.78}$$

$$P_t = Q_t - Q_t C_t^* [C_t Q_t C_t^* + D_t D_t^*]^{-1} C_t Q_t = Q_t K_{t-1} C_t Q_t,$$

что полностью совпадает с соотношениями (5.63), (5.56), (5.57), если учесть, что в данном случае $B_t D_t^* = 0_{n \times l}$ (см. (5.77)). Некоторая тонкость связана с выбором начальных условий, которые согласно (2.44) должны (в принятых обозначениях) иметь вид

$$\hat{x}_0 = -K_{-1} y_0, \quad P_0 = R_{v'}(0) - K_{-1} C_0 R_{v'}(0),\tag{5.79}$$

тогда как в соответствии с (5.68), (5.58) они имеют вид

$$\hat{x}_0 = -K_{-1} y_0, \quad P_0 = B_{-1} B_{-1}^* + K_{-1} E_0 K_{-1}^*.\tag{5.80}$$

Противоречия между заданием операторных начальных данных нет, поскольку в силу (5.78) выполнено

$$\begin{aligned}K_{-1} &= -B_{-1} B_{-1}^* C_0^* [C_0 B_{-1} B_{-1}^* C_0^* + D_0 D_0^*]^{-1}, \\ B_{-1} B_{-1}^* &= R_{v'}^{-1}(0), \quad D_0 D_0^* = R_{v''}^{-1}(0), \\ E_0 &= C_0 B_{-1} B_{-1}^* C_0^* + D_0 D_0^*.\end{aligned}$$

Таким образом, фильтр (5.63), (5.56), (5.57) полностью совпадает с фильтром Калмана—Бьюси, полученным в теореме 6.7. Однако начальные условия (5.58) позволяют "отвлечься" от статистической природы фильтра (5.63), (5.56), и в силу результатов п. 4А этот фильтр может быть оптимальным и для помех, не имеющих статистического истолкования. Вместе с тем только что приведенные рассуждения дают другой способ получения рекуррентной формы оптимального фильтра: достаточно установить рекуррентную модификацию фильтра, оптимального в случае белозумных помех (что обычно проще сделать), а затем, модифицировав начальные данные для уравнения Риккати (выбирая их нулевыми в "предшествующий" момент времени), получим оптимальный фильтр и для функционалов качества (5.5) (разумеется, в предположении, что ансамблевая операция M_ξ и множество неопределенности Ξ помех таковы, что выполнены условия (5.15), (5.16)).

Ж. Свойства оптимального фильтра Калмана — Бьюси.

В п. 5Д рекуррентные соотношения (5.63), (5.56), (5.57) получены без каких-либо специальных предположений о свойствах помехи $v = (v_1, \dots, v_{t_*})$ в системе (5.36), эти соотношения явились результатом решения линейно-квадратичной задачи (5.46), вообще не зависящей от помехи. Поэтому для произвольных классов помех и ансамблевых операций в функционалах качества фильтр Калмана — Бьюси не обязан быть оптимальным. Тем не менее теорема 6.8 гарантирует при каждом t выполнение неравенства (5.64). Если $\tilde{M}_\xi$ — произвольная ансамблевая операция, удовлетворяющая общим условиям (5.4), то из (5.64) следует неравенство

$$J_t(h) = \tilde{M}_\xi |x_t - \hat{x}_t|^2 \leq \tilde{M}_\xi |v^t(\xi)|^2 \Lambda_{P_t}, \quad (5.81)$$

позволяющее оценить качество фильтрации с помощью линейного неупреждающего фильтра (5.2), (5.55)–(5.60), или, что то же самое, с помощью рекуррентного фильтра Калмана — Бьюси (5.63), (5.56)–(5.58). Правая часть неравенства (5.81) может быть иногда уменьшена за счет "центровки" помехи. Поясним эту ситуацию подробнее.

Предположим, что начальное данное x_0 и возмущающие воздействия v_t в системе (5.36) имеют вид

$$x_0 = x'_0 + x''_0, \quad v_t = v'_t + v''_t, \quad (5.82)$$

где векторы $x'_0 \in \mathbb{C}^n$, $v'_t \in \mathbb{C}^m$, $t = 1, 2, \dots, t_*$, известны, а векторы x''_0 , v''_t , $t = 1, 2, \dots, t_*$, неизвестны и их реализация $(x''_0, v''_1, \dots, v''_{t_*})$ является "параметром неопределенности" ξ . Введем векторы x'_t , y'_t :

$$x'_{t+1} = A_t x'_t + B_t v'_{t+1}, \quad y'_t = C_t x'_t + D_t v'_t, \quad (5.83)$$

которые в силу сделанного предположения известны при всех $t \in T$. Векторы

$$x''_t = x_t - x'_t, \quad y''_t = y_t - y'_t \quad (5.84)$$

удовлетворяют, очевидно, системе

$$x''_{t+1} = A_t x''_t + B_t v''_{t+1}, \quad y''_t = C_t x''_t + D_t v''_t, \quad t \in T, \quad (5.85)$$

начальное данное в которой является известным вектором x''_0 . Обозначая через $[v'']^t = (x''_0, v''_1, \dots, v''_t)$ "расширенную" помеху, можем написать

$$x''_t - \hat{x}''_t = L_t(h_t, Z^t)[v'']_t, \quad (5.86)$$

где $L_t(h_t, Z^t)$ определяется по формуле (5.43) и

$$\hat{x}_t'' = \sum_{t'=1}^t h_{tt'} y_{t'}'' . \quad (5.87)$$

Вместо неравенства (5.81) теперь будем иметь неравенство

$$J_t(h) = \tilde{M}_\zeta |x_t - \hat{x}_t|^2 \leq \tilde{M}_\zeta \left[|x_0 - x'_0|^2 + \sum_{t'=1}^t |v_{t'} - v'_{t'}|^2 \Lambda_{P_t} \right] . \quad (5.88)$$

При "специальном" выборе вектора $v' = \text{col}(x'_0, v'_1, \dots, v'_t)$ величина $\tilde{M}_\zeta |v - v'|^2$ может оказаться существенно меньше $\tilde{M}_\zeta |v|^2$, что означает повышение качества фильтрации. Оценки $\hat{x}_t$ составляющих x_t временного ряда x в соответствии с (5.84) будут иметь вид

$$\hat{x}_t = x'_t + \hat{x}_t'', \quad t \in T. \quad (5.89)$$

В частности, если величины v' и ансамблевая операция $\tilde{M}_\zeta$ выбраны так, что для функционала качества $J_t(h)$ выполнены соотношения

$$J_t(h) = \tilde{M}_\zeta |x_t - \hat{x}_t|^2 = \tilde{M} \sum_{t'=1}^t |v_{t'} - v'_{t'}|^2 \Lambda_{P_{t+1}}, \quad (5.90)$$

то оценки (5.89), формируемые с помощью фильтра (5.87), (5.55)–(5.58), будут оптимальными.

Приложение к главе 6

А. Доказательство леммы 6.1. Пусть $\hat{x}_t$ — произвольная неупреждающая оценка случайной величины x_t , $\hat{x}_t = F_t(y^t)$. Тогда

$$\begin{aligned} M|x_t - \hat{x}_t|^2 &= M|x_t - M(x_t|y^t)|^2 + M|\hat{x}_t - M(x_t|y^t)|^2 - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} M[x_t - M(x_t|y^t)]^* [\hat{x}_t - M(x_t|y^t)]. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Используя свойства условных математических ожиданий, имеем

$$\begin{aligned} M[(x_t - M(x_t|y^t))^* [\hat{x}_t - M(x_t|y^t)] | y^t] &= \\ = M[(x_t - M(x_t|y^t)) | y^t]^* [\hat{x}_t - M(x_t|y^t)] &= 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$M[(x_t - M(x_t|y^t)) | y^t] = M(x_t|y^t) - M(x_t|y^t) = 0. \quad (\text{П.2})$$

В силу равенства (П.2) последнее слагаемое в правой части формулы (П.1) обращается в ноль, первое слагаемое не зависит от оценки $\hat{x}_t$. Поэтому минимум величины $M|x_t - \hat{x}_t|^2$ достигается при $x_t = M(x_t | y^t)$, что и утверждалось. Лемма 6.1 доказана.

Приведенное доказательство не требует существования плотности распределения случайных величин z^t , а основывается лишь на свойствах условных математических ожиданий, которые легко проверяются при наличии упомянутых плотностей распределения.

Б. Доказательство теоремы 6.1. По формуле Байеса имеем

$$\begin{aligned} p_t(x^t, y^t) &= p_t(x_t, y_t | x^{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}) = \\ &= p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Интегрируя по переменным $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1$ обе части соотношения (П.3), получаем

$$\begin{aligned} p_t(x_t, y^t) &= \int_{C^n(t-t_s)} p_t(x^t, y^t) dx_t, \dots, dx_{t-1} = \\ &= \int_{C^n(t-t_s)} p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}) dx_t, \dots, dx_{t-1} = \\ &= \int_{C^n(t-t_s)} p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1}, y^{t-1}) dx_t, \dots, dx_{t-1}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p_t(x_t | y^t) &= \frac{p_t(x_t, y^t)}{p_t(y^t)} = \\ &= \frac{p_t(y^{t-1})}{p_t(y^t)} \int_{C^n} p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}. \end{aligned}$$

Нормировочная постоянная $p_{t-1}(y^{t-1})/p_t(y^t)$ может быть найдена из условия

$$\int_{C^n} p_t(x_t, y^t) dx_t = 1,$$

что приводит к соотношению

$$p_t(x_t, y^t) = \frac{\int p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}}{\iint p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1} dx_t} = \\ = \frac{\int p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}}{\int p_t(y_t | x_{t-1}, y^{t-1}) p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) dx_{t-1}},$$

которое совпадает с (2.5). Начальные условия (2.6) устанавливаются из очевидных соображений. Теорема 6.1 доказана.

В. Доказательство теоремы 6.2. Используя формулу Байеса, получаем

$$p_t(x^t | y^t) = \frac{p_t(z^t)}{p_t(y^t)} = \frac{p_t(x^t, y^t)}{\int_{\mathbb{C}^n} p_t(x^t, y^t) dx_1 \dots dx_t} = \\ = \frac{p_t(z_t | z_{t-1})}{p_t(y_t | y^{t-1})} p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}), \quad (\text{П.4})$$

$$p_t(y_t | y^{t-1}) = \frac{p_t(y^t)}{p_t(y^{t-1})}.$$

Предположим, что

$$p_t(x^t | y^t) = (2\pi \det R_{t-1})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^{t-1} - \bar{x}^{t-1})^* \times \right. \\ \left. \times R_{t-1}^{-1} (x^{t-1} - \bar{x}^{t-1}) \right\}.$$

Покажем, что при условии (2.13) справедливы формулы (2.8), (2.15). С этой целью с помощью формул (2.13) и (2.8) преобразуем правую часть соотношений (П.4) к виду

$$p_t(x_t | y^t) = C_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(Q_t x^t - e_t)^* r_t^{-1} (Q_t x^t - e_t) + \right. \\ \left. + (x^{t-1} - \bar{x}^{t-1})^* R_{t-1}^{-1} (x^{t-1} - \bar{x}^{t-1})] \right\} = \\ = C'_t \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(x^t)^* \left[Q_t^* r_t^{-1} Q_t + \left\| \begin{matrix} R_{t-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \right] x^t - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \operatorname{Re}(x^t)^* \left[Q_t^* r_t^{-1} e_t + \left[\begin{matrix} R_{t-1}^{-1} \bar{x}^{t-1} \\ 0 \end{matrix} \right] \right] \right] \right\}, \quad (\text{П.5})$$

где $C_t = C_t(y^t)$, $C'_t = C'_t(y^t)$ — нормировочные величины, определяемые из условия

$$\int p_t(x^t | y^t) dx_1 \dots dx_t = 1 \quad (\text{П.6})$$

и не зависящие от x^t . При написании формул (П.5) величина x^t трактуется как вектор-столбец размером $n(t - t_* + 1)$ и используется представление этого вектора в виде

$$x^t = \begin{bmatrix} x^{t-1} \\ x_t \end{bmatrix}. \quad (\text{П.7})$$

Сравнение формул (П.5) и (2.8) приводит к (2.15).

Пусть матрица R_{t-1} невырождена. Покажем, что тогда невырождена матрица R_t . Предположим, что неотрицательная матрица

$$D_t = G_t^* r_t^{-1} G_t + \begin{bmatrix} R_{t-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П.8})$$

вырождается. Пусть $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ — ненулевой вектор, отвечающий ее нулевому собственному значению. Тогда равенство

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^* D_t \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0$$

влечет равенства

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^* G_t^* r_t^{-1} G_t \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} R_{t-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{П.9})$$

Из последнего равенства в силу невырожденности матрицы R_{t-1} следует $d_1 = 0$, а тогда первое из равенств (П.9) принимает вид

$$d_2^* \|0, I_n\|^* G_t^* r_t^{-1} G_t \|0, I_n\| d_2 = 0.$$

В силу (2.14) отсюда следует $d_2 = 0$, и потому неотрицательная матрица (П.8) невырождена. Итак, из $R_{t-1} > 0$ в силу условий теоремы 6.2 следует $R_t > 0$. Неравенство $R_1 > 0$ выполнено по предположению, поэтому условие (2.17) выполнено при всех t . Теорема 6.2 доказана.

Г. Доказательство теоремы 6.3. Схема доказательства та же, что и в теореме 6.2. Исходным пунктом является вычисление интеграла по x_{t-1} в формуле Стратоновича (2.5). С этой

целью выделим "полный квадрат" по x_{t-1} в показателе экспоненты функции $p_t(x_t, y_t | x_{t-1}, y^{t-1})p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1})$, предполагая, что

$$p_{t-1}(x_{t-1} | y^{t-1}) = C_{t-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})^* P_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) \right\}, \quad (\text{П.10})$$

где для краткости обозначено

$$C_{t-1} = (2\pi \det P_{t-1})^{-1/2}.$$

После интегрирования в правой части (2.5) по x_{t-1} получим, что условная плотность $p_t(x_t | y^t)$ — нормальная по x_t :

$$p_t(x_t | y^t) = C_t \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_t - \hat{x}_t)^* P_t^{-1}(x_t - \hat{x}_t) \right\}, \quad (\text{П.11})$$

$$C_t = (2\pi \det P_t)^{-1/2},$$

заодно убедимся, что величины $\hat{x}_t, P_t$ связаны с $\hat{x}_{t-1}, P_{t-1}$ соотношениями (2.26)–(2.28). В силу нормальности по x_1 условной плотности $p_1(x_1 | y_1)$ после установления перехода от (П.10) к (П.11) с использованием метода математической индукции убеждаемся, что условные плотности $p_t(x_t | y^t)$ являются нормальными по x_t при всех $t \in T$ и система (2.26)–(2.28) при начальных условиях (2.29) определяет оптимальные оценки $\hat{x}_t$ и их условные ковариации P_t (см. (2.25)). Итак, убедимся в справедливости рекуррентных соотношений (2.26)–(2.28). В силу (2.22), (П.10) имеем

$$\begin{aligned} p_t(x_t, y_t | x^{t-1}, y^{t-1})p_{t-1}(x^{t-1}, y^{t-1}) &= \\ &= C_t(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_{t-1}^* D_{t-1} x_{t-1} + \right. \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} x_{t-1}^* [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}] + \\ &\quad \left. + (G_{t,0} x_t - e_t)^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t)] \right\} = \\ &= C_t(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |x_{t-1} + D_{t-1}^{-1} [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - \right. \\ &\quad \left. - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}] |_{D_{t-1}}^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (G_{t,0} x_t - e_t)^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{2} [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}]^* D_{t-1}^{-1} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}]. \quad (\text{П.12})$$

Здесь $n \times n$ -матрица D_{t-1} определяется первой из формул (2.29), $C_t = C_t(y^t)$ — величина, не зависящая от x_{t-1} и определяемая из условия нормировки

$$\int p_t(x_t | y^t) dx_t = 1. \quad (\text{П.13})$$

Интегрирование по x_{t-1} в правой части формулы (П.12) сводится к интегрированию по x_{t-1} ее второго сомножителя. Результат интегрирования этого сомножителя не зависит от x_t и определяет некоторую функцию переменных y^t , т.е. изменяет лишь нормировочную величину. В результате формула Стратоновича (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} p_t(x_t | y^t) &= C'_t(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(G_{t,0} x_t - e_t)^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - \right. \right. \\ &\quad - [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}]^* D_{t-1}^{-1} \times \\ &\quad \times [G_{t,1}^* r_t^{-1} (G_{t,0} x_t - e_t) - P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1}] \left. \right] \Big\} = \\ &= C''_t(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[x_t^* [G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0} - \right. \right. \\ &\quad - G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0}] x_t - \operatorname{Re} x_t^* [G_{t,0}^* r_t^{-1} e_t - \\ &\quad - G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} (G_{t,1}^* r_t^{-1} e_t + P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1})] \left. \right] \Big\}, \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

где, напомним,

$$D_{t-1} = G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,1} + P_{t-1}^{-1} \quad (\text{П.15})$$

и $C'(y^t)$, $C''(y^t)$ — некоторые величины, не зависящие от x_t и определяемые условием нормировки (П.13). Сравнение формул (П.14) и (П.15) показывает, что

$$\begin{aligned} P_t^{-1} &= G_{t,0}^* [r_t^{-1} - r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* r_t^{-1}] G_{t,0}, \\ \hat{x}_t &= P_t [G_{t,0}^* r_t^{-1} e_t - G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} (G_{t,1}^* r_t^{-1} e_t + P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1})]. \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

Используя легко проверяемое и хорошо известное матричное тождество

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}, \quad (\text{П.17})$$

преобразуем первую из формул (П.16) к виду

$$P_t = (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0})^{-1} + (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0})^{-1} G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} [D_{t-1} - G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0} (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0})^{-1} G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1}]^{-1} \times \\ \times G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0} (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0})^{-1}, \quad (\text{П.18})$$

где матрица D_{t-1} определена формулой (П.15). Используя вновь матричное тождество (П.17), имеем

$$[D_{t-1} - G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0} (G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0})^{-1} G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1}]^{-1} = \\ = D_{t-1}^{-1} - D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0} [-G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0} + \\ + G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* r_t^{-1} G_{t,0}]^{-1} G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1}.$$

Учитывая, что в обозначениях (2.29) выполнено равенство $G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,0} = \tilde{r}_t^* r_t \tilde{r}_t$, убеждаемся в совпадении правой части предыдущей формулы с матрицей E_{t-1} (см. (2.29)), а тогда формула (П.18) совпадает с формулой (2.26).

Преобразуем второе уравнение (П.16):

$$\hat{x}_t = -P_t G_{t,0}^* r_t^{-1} G_{t,1} D_{t-1}^{-1} P_{t-1}^{-1} \hat{x}_{t-1} + \\ + P_t G_{t,0}^* r_t^{-1} [I_{n+l} - G_{t,1} D_{t-1}^{-1} G_{t,1}^* r_t^{-1}] e_t. \quad (\text{П.19})$$

Но в силу соотношений (2.29) имеем

$$G_{t,1} D_{t-1}^{-1} = \\ = G_{t,1} [P_{t-1} - P_{t-1} G_{t,1}^* [r_t + G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^*]^{-1} G_{t,1} P_{t-1}] = G_{t,1} P_{t-1} - \\ - G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^* [r_t + G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^*]^{-1} G_{t,1} P_{t-1} = \\ = r_t [r_t + G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^*]^{-1} G_{t,1},$$

а потому

$$\hat{x}_t = -P_{t-1} G_{t,0}^* [r_t + G_{t,1} P_{t-1} - G_{t,1}^*]^{-1} G_{t,1} \hat{x}_{t-1} + \\ + P_t \tilde{r}_t^* G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^* [r_t + G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^*]^{-1} e_t = \\ = -P_{t-1} G_{t,0}^* [r_t + G_{t,1} P_{t-1} G_{t,1}^*]^{-1} (G_{t,1} \hat{x}_{t-1} - e_t),$$

что совпадает с уравнением (2.27). Рекуррентные соотношения (2.26)–(2.29) установлены. Начальные условия следуют непосредственно из формулы (2.6). Теорема 6.3 доказана.

Д. Доказательство теоремы 6.4. С учетом формул (2.36), (П.10) имеем

$$\begin{aligned}
 p_i(x_i, y_i \mid x_{i-1}, y_{i-1}^{t-1}) p_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}^{t-1}) = \\
 = C'_i(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(y_i - C_i x_i - c_i)^* R_{v''}^{-1}(t)(y_i - \right. \\
 - C_i x_i - c_i) + (x_i - A_{i-1} x_{i-1} - a_{i-1})^* R_{v'}^{-1}(x_i - \\
 - A_{i-1} x_{i-1} - a_{i-1}) + (x_{i-1} - \hat{x}_{i-1})^* P_{i-1}^{-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1})] \Big\} = \\
 = C''_i(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_{i-1}^* (P_{i-1}^{-1} + \right. \\
 + A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t) A_{i-1}) x_{i-1} - 2 \operatorname{Re} x_{i-1}^* [P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + \\
 + A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t)(x_i - a_{i-1})] + (x_i - a_{i-1})^* R_{v'}^{-1}(x_i - a_{i-1}) + \\
 \left. + (y_i - C_i x_i - c_i)^* R_{v''}^{-1}(t)(y_i - C_i x_i - c_i)] \right\}, \quad (\text{П.20})
 \end{aligned}$$

где $C'(y^t)$, $C''(y^t)$ — величины, не зависящие от x_i , x_{i-1} . Введем обозначение

$$D_{i-1} = P_{i-1}^{-1} A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t) A_{i-1}, \quad (\text{П.21})$$

тогда соотношение (П.20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 p_i(x_i, y_i \mid x_{i-1}, y_{i-1}^{t-1}) p_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}^{t-1}) = \\
 = C''_i(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_{i-1} - D_{i-1}^{-1} [P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + \right. \\
 + A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t)(x_i - a_{i-1})]]_{D_{i-1}}^2 + \\
 + (y_i - C_i x_i - c_i)^* R_{v''}^{-1}(t)(y_i - C_i x_i - c_i) + \\
 + (x_i - a_{i-1})^* R_{v'}^{-1}(t)(x_i - a_{i-1}) - \\
 - [P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t)(x_i - a_{i-1})]^* \\
 \left. D_{i-1}^{-1} [P_{i-1}^{-1}(t) \hat{x}_{i-1} + A_{i-1}^* R_{v'}^{-1}(t)(x_i - a_{i-1})] \right\}. \quad (\text{П.22})
 \end{aligned}$$

Величина $C''(y^t)$ не зависит от x_i , x_{i-1} . Подставляя (П.22) в

формулу Стратоновича (2.5), найдем

$$p_i(x_i | y^t) = C_i'''(y^t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[x_i^* [C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) C_i + \right. \right. \\ \left. \left. + R_{v,i}^{-1}(t) - R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t) \right] x_i - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} x_i^* [C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) (y_i - c_i) + R_{v,i}^{-1}(t) a_{i-1} + \right. \\ \left. + R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} [P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} - A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t) a_{i-1}] \right] \right\}. \quad (\text{П.23})$$

Нормировочная величина $C_i'''(y^t)$ не зависит от x_i . Сравнивая формулы (П.23), (П.11), убеждаемся, что

$$P_i^{-1} = C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) C_i + R_{v,i}^{-1}(t) - R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t), \\ \hat{x}_i = P_i [C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) (y_i - c_i) + R_{v,i}^{-1}(t) a_{i-1} + \\ + R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} [P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} - A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t) a_{i-1}]]. \quad (\text{П.24})$$

Соотношения (П.24) с точностью до элементарных преобразований совпадают с соотношениями (2.41)–(2.48). Покажем это.

В силу матричного тождества (П.17) с учетом формулы (П.21) имеем

$$[R_{v,i}^{-1}(t) - R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t)]^{-1} = Q_i,$$

где матрица Q_i определяется первой из формул (2.43). Поэтому из второго уравнения системы (2.42) находим

$$P_i^{-1} = C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) C_i + Q_i^{-1}.$$

Опять воспользовавшись матричным тождеством (П.17), получим уравнение (2.42). Преобразуем первое уравнение системы (П.24). Имеем

$$\hat{x}_i = P_i R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + \\ + P_i [C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) (y_i - c_i) + [R_{v,i}^{-1}(t) - R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} A_{i-1}^* R_{v,i}^{-1}(t)] a_{i-1}] = \\ = P_i R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + P_i [C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) (y_i - c_i) + Q_i^{-1} a_{i-1}] = \\ = P_i R_{v,i}^{-1}(t) A_{i-1} D_{i-1}^{-1} P_{i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1} + \\ + P_i C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) (y_i - c_i) + P_i Q_i^{-1} a_{i-1}. \quad (\text{П.25})$$

Но в силу (2.42), (2.43) имеем

$$P_i C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) = Q_i C_i^* R_{v,i}^{-1}(t) - Q_i C_i^* [R_{v,i}(t) + \\ + C_i Q_i C_i^*]^{-1} [C_i Q_i C_i^* + R_{v,i}(t) - R_{v,i}(t)] R_{v,i}^{-1}(t) = \\ = Q_i C_i^* [C_i Q_i C_i^* + R_{v,i}(t)]^{-1} = -K_{i-1},$$

$$P_t Q_t^{-1} = I_n - Q_t C^* [C_t Q_t C_t^* + R_{v''}(t)]^{-1} C_t = I_n + K_{t-1} C_t.$$

Подставляя найденные выражения в (П.25) и используя формулы (2.43), (2.42), находим

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= (I_n + K_{t-1} C_t) A_{t-1} \hat{x}_{t-1} - K_t (y_t - c_t) + \\ &+ (I_n + K_{t-1} C_t) a_{t-1} = A_{t-1} \hat{x}_{t-1} + a_{t-1} - \\ &- K_{t-1} [y_t - C_t (A_{t-1} \hat{x}_{t-1} + a_{t-1}) - c_t], \end{aligned}$$

что совпадает с уравнением (2.41). Начальные условия (2.43) получаются из очевидных соображений, если учесть, что

$$\begin{aligned} p_t(x_t, | y_t) &= p_t(x_t, y_t) / p_t(y_t) = \\ &= p_t(y_t, | x_t) p_t(x_t) / p_t(y_t), \end{aligned}$$

$$p_t(y_t, | x_t) \sim N[y_t - C_t x_t - c_t, R_{v''}(0)],$$

$$p_t(x_t) \sim N(\bar{x}, R_x).$$

Теорема 6.4 доказана.

Е. Доказательство теоремы 6.5. Перепишем (3.8) с учетом формул (3.22)–(3.25):

$$C_t \exp\{-f^{(t)}(\tau_t)\} = C_t \exp\{-\varphi_{v_t}(y_t - \tau_t) - f^{(t-1)}(A_{t-1}^{-1} \tau_t)\},$$

$t \in T$, C_t — нормировочная постоянная. Приравняв показатели при e , получим (3.26), начальное условие определяется соотношением (3.9).

Наборы $f_k^{(t)}$, $k \in \bar{K}$, можно рассматривать как столбцы $f^{(t)} = \text{col}(f_k^{(t)}, k \in \bar{K})$. Тогда последнее соотношение можно переписать в виде $F^{(t)} = Q^{(t)} F^{(t-1)} + q^{(t-1)}$. Матрицы $Q^{(t)} = Q^{(t)}(y_t)$ и векторы $q^{(t)} = q^{(t)}(y_t)$ полученной линейной системы определяются приравнованием коэффициентов при соответствующих степенях τ_t в соотношении (3.27). Теорема 6.5 доказана.

Ж. Доказательство леммы 6.3. Утверждение леммы очевидно. Действительно, если последовательность оценок $\{\hat{x}^{(q)}\}$ полна, то с необходимостью функция $F_t^{\text{opt}}(y^t)$ принадлежит замыканию множества F^t , т.е. пространству $L_2(p_t, Q^t)$. Обратно, если $F_t^{\text{opt}}(y^t) \in L_2(p_t, Q^t)$, то существует последовательность функций $F_t^{(q)}(y^t) \in L_2(p_t, Q^t)$, сходящаяся в $L_2(p_t, Q^t)$ к $F_t^{\text{opt}}(y^t)$. Поскольку $F^t = \bigcup_{q=0}^{\infty} F_q^t$, то каждая из функций $F_t^{(q)}(y^t)$ принадлежит некоторому множеству F_q^t . Прореживая, если необходимо,

последовательность $\{F_t^{(q)}(y^t)\}$, можно считать, что $F_t^{(q)} \in \mathbf{F}_q^t$, $q = 1, 2, \dots$, и

$$\left| F_t^{(q)}(y^t) - \hat{x}_t \right|_{\mathbf{H}_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty. \quad (\text{П.26})$$

Пусть $\hat{x}_t^{(q)}$ — элемент, на котором реализуется расстояние от элемента $x_t \in \mathbf{H}_2(q)$ до подпространства $\mathbf{F}^t \subseteq \mathbf{H}_2(q)$. По теореме Пифагора выполняется равенство

$$\left| F_t^{(q)} - \hat{x}_t \right|_{\mathbf{H}_2}^2 = \left| \hat{x}_t - \hat{x}_t^{(q)} \right|_{\mathbf{H}_2}^2 + \left| F_t^{(q)} - \hat{x}_t^{(q)} \right|_{\mathbf{H}_2}^2,$$

и предельное соотношение (П.26) означает, что $\hat{x}_t^{(q)} \rightarrow \hat{x}_t$ при $q \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $\{\hat{x}_t^{(q)}\}$ полная. Лемма 6.3 доказана.

3. Доказательство теоремы 6.6. Достаточно так выбрать множества $\mathbf{Q}_t^{(q)}$, чтобы пространство $\mathbf{L}_2(p_t, \mathbf{Q}^t)$ (см. (3.17)) совпало с пространством $\mathbf{L}_2(p_t)$ (см. (3.22)). Действительно, в силу предположения $x_t \in \mathbf{H}_2(l)$ (см. п. 6.1Б) функция (3.3) принадлежит пространству $\mathbf{L}_2(p_t)$ и потому равенство (3.21) влечет включение $F_t^{\text{opt}}(y^t) \in \mathbf{L}_2(p_t, \mathbf{Q}^t)$, что в силу леммы 6.2 означает полноту соответствующей последовательности оптимальных оценок.

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(p_t)$ при $lt > q$ всюду плотным является множество финитных непрерывных функций $F_t(\cdot): \mathbf{C}^{lt} \rightarrow \mathbf{C}^q$. Поэтому достаточно так выбрать конечные множества $\mathbf{Q}_{t'}^t$, $t' = 1, 2, \dots$, чтобы с помощью элементов множества $\mathbf{F}^t$ (см. (3.14)) можно было сколь угодно точно (в равномерной метрике) аппроксимировать произвольную непрерывную функцию $F_t(\cdot): \mathbf{C}^{lt} \rightarrow \mathbf{C}^q$. Пусть $F_t(\cdot)$ — произвольная непрерывная функция, обращающаяся (с сохранением непрерывности) в нулевую вне множества

$$\mathbf{Y}_t = \{y^t: |y^t| \leq L\}, \quad (\text{П.27})$$

где L — произвольное фиксированное число. Как хорошо известно, такую функцию $F_t(\cdot)$ на множестве $\mathbf{Y}_t$ можно аппроксимировать с помощью отрезка многомерного ряда Фурье, т.е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $k(\varepsilon)$ и конечное число n -векторов a_{k_i} , таких, что

$$\sup_{y^t \in \mathbf{Y}_t} \left| F_t(y^t) - \sum_{|k_i| \leq k(\varepsilon)} a_{k_i} \exp\{2\pi i k_i^* y^t\} \right| \leq \varepsilon. \quad (\text{П.28})$$

Здесь $\mathbf{k}_t$ — мультииндекс, $\mathbf{k}_t = (k_1^{(1)}, \dots, k_t^{(t)})$, $k_1^{(p)}$ — целые числа,

$$|\mathbf{k}_t| = \sum_{p=1}^t |k_1^{(p)}|$$

и суммирование ведется по всем мультииндексам $\mathbf{k}_t$, норма $|\mathbf{k}_t|$ которых не превосходит $k(\varepsilon)$, число L — из соотношения (П.27).

Обозначим через $C[0, 1]$ пространство непрерывных скалярных функций на интервале $[0, 1]$, норма функции определяется как максимальное значение ее модуля. Пусть $\{\chi_q(\cdot), q = 1, 2, \dots\}$ — произвольный базис в $C[0, 1]$. Функция $f(\sigma) = \exp\{2\pi i \sigma\}$ принадлежит пространству $C[0, 1]$, а потому может быть сколь угодно точно аппроксимирована конечной комбинацией функций $\chi_q(\cdot)$, т. е. по любому $\tau > 0$ найдутся такие числа $r = r(\varepsilon)$, $c_q = c_q(\varepsilon)$, $q = 1, \dots, r(\varepsilon)$, что

$$\max_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left| \exp\{2\pi i \sigma\} - \sum_{q=1}^{r(\varepsilon)} c_q \chi_q(\sigma) \right| \leq \varepsilon. \quad (\text{П.29})$$

Принимая $\sigma = (\mathbf{k}_t^* y^t)/L$ и учитывая (П.28), убеждаемся, что линейная оболочка (с $n \times n$ -матричными коэффициентами) множества (3.19) всюду плотна в пространстве $L_2(p_t)$. Поэтому ее замыкание совпадает с $L_2(p_t)$. Теорема 6.6 доказана.

И. Доказательство леммы 6.4. Пусть $a_t \in C^n$ — нормированный собственный вектор оператора $G_t(h)$, отвечающий наименьшему собственному значению

$$G_t(h)a = \Lambda_{G_t(h)} a, \quad a^* a = 1. \quad (\text{П.30})$$

Рассмотрим временной ряд $v^t = (v_0, v_1, \dots, v_t)$, определяемый соотношением

$$v^t = \left[r_t \Lambda_{G_t(h)}^{-1} \right]^{1/2} L_t^*(h) a. \quad (\text{П.31})$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} (v^t)^* v^t &= r_t \Lambda_{G_t(h)}^{-1} a^* L_t(h) L_t^*(h) a = \\ &= r_t \Lambda_{G_t(h)}^{-1} a^* G_t(h) a = r_t a^* a = r_t, \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

т. е. для вектора v^t выполнены условия (4.22). С другой стороны, для этого временного ряда формула (4.42) принимает вид

$$\begin{aligned} x_t - \hat{x}_t &= L_t(h) \left[r_t \Lambda_{G_t(h)}^{-1} \right]^{1/2} L_t^*(h) a = \\ &= \left[r_t \Lambda_{G_t(h)}^{-1} \right]^{1/2} G_t(h) a = \left[r_t \Lambda_{G_t(h)} \right]^{1/2} a, \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

а потому

$$|x_t - \hat{x}_t|^2 = r_t \Lambda_{G_t(h)} a^* a = r_t \Lambda_{G_t(h)}, \quad (\text{П.34})$$

т.е. при допустимой "реализации помехи" (П.31) неравенство (4.25) превращается в равенство. Это и доказывает соотношение (4.28).

К. Доказательство леммы 6.5. В силу (4.13), (4.11) можем написать

$$G_t(h) = G_t(h_t) = h_t \tilde{K}_t'' (\tilde{K}_t'')^* h_t^* - h_t \tilde{K}_t'' (K_t')^* - \\ - K_t' (\tilde{K}_t'')^* h_t^* + K_t' (\tilde{K}_t')^*, \quad (\text{П.35})$$

где блочный оператор h_t определен формулой (4.34),

$$\tilde{K}_t'' = \begin{Bmatrix} \tilde{K}_{t1}'' \\ \tilde{K}_{t2}'' \end{Bmatrix}. \quad (\text{П.36})$$

Оператор $\tilde{K}_t'' (\tilde{K}_t'')^* = E_t$ по условию леммы невырожден. Элементарные выкладки позволяют тогда преобразовать формулу (П.35) к виду

$$G_t(h_t) = [h_t E_t^{-1/2} - K_t' (\tilde{K}_t'')^* E_t^{1/2}] [h_t E_t^{-1/2} - \\ - K_t' (\tilde{K}_t'')^* E_t^{1/2}]^* + K_t' (K_t')^* - K_t' (\tilde{K}_t'')^* E_t^{-1} \tilde{K}_t'' (K_t')^*, \quad (\text{П.37})$$

откуда следует, что наименьшее собственное значение оператора $G_t(h_t)$ будет минимально при $h_t = \tilde{K}_t' (\tilde{K}_t'')^* E_t^{-1}$, что с учетом обозначений (П.36) совпадает с (4.34). Формула (П.36) приводит при этом к соотношению (4.35). Лемма 6.5 доказана.

Л. Доказательство теоремы 6.7. Докажем предварительно утверждение о разрешимости линейно-квадратичной задачи оптимального управления в удобной для нас форме.

Лемма 6.6. В условиях теоремы 6.6 задача (4.51) однозначно разрешима и оптимальное управление $u_0^{t-1} = (u_0, \dots, u_{t-1})$ может быть представлено в виде линейной обратной связи (4.52), где операторы K_t находятся по формулам

$$\tilde{K}_s = -(\tilde{B}_s^* P_{t-s}, \tilde{A}_s + \alpha_s^* \beta_s)^* \tilde{E}_s^{-1}, \quad (\text{П.38})$$

$$\tilde{E}_s = \tilde{B}_s^* P_{t-s-1} \tilde{B}_s + \alpha_s^* \alpha_s, \quad s = t - t', \quad (\text{П.39})$$

$$t' = 0, 1, \dots, t.$$

Операторы $P_t: C^n \rightarrow C^n$ определяются разностным уравнением

$$P_{t-s} = A_s^* P_{t-s-1} \tilde{A}_s + \beta_s^* \beta_s - \tilde{K}_s^* \tilde{E}_s \tilde{K}_s, \quad s = t-1, t-2, \dots, \quad (\text{П.40})$$

при начальном условии

$$P_{-1} = 0. \quad (\text{П.41})$$

При этом

$$\min_{u_0^{t-1}} W_t(u_0^{t-1}, \tilde{x}_1^t) = \tilde{x}_0^* P_t \tilde{x}_0 = a^* P_t a. \quad (\text{П.42})$$

Доказательство леммы 6.6. Рассмотрим квадратичную форму

$$V_s(\tilde{x}_s) = \tilde{x}_s^* P_{t-s} \tilde{x}_s, \quad (\text{П.43})$$

где операторы $P_t: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ определяются формулами (П.39)–(П.41). Отметим, что этими формулами операторы P_t определены при всех $t \in T$ и являются неотрицательными операторами — следствие условий (4.53) и неотрицательности квадратичной формы (4.49). Покажем, что квадратичная форма (П.43) в условиях леммы 6.6 является функцией Ляпунова на траекториях системы (4.48). Действительно, элементарные выкладки с учетом формул (П.38), (П.39) и обозначений (П.40) позволяют убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} V_{s+1}(\tilde{x}_{s+1}) - V_s(\tilde{x}_s) + |\alpha_s u_s + \beta_s \tilde{x}_s|^2 = \\ = (u_s - \tilde{K}_s \tilde{x}_s)^* \tilde{E}_s (u_s - \tilde{K}_s \tilde{x}_s), \quad s = 0, 1, \dots, t-1. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

Суммируя равенства (П.44) по $t' = 0, 1, \dots, t-1$ и учитывая соотношения $\alpha_t = 0$, $V_{t+1}(\tilde{x}_{t+1}) = \tilde{x}_{t+1}^* P_{-1} \tilde{x}_{t+1} = 0$ (поскольку $P_{-1} = 0$), получаем

$$\begin{aligned} W_t(u_0^{t-1}, \tilde{x}_1^t) = \sum_{s=0}^t |\alpha_s u_s + \beta_s \tilde{x}_s|^2 = V_0(\tilde{x}_0) + \\ + \sum_{s=0}^t (u_s - \tilde{K}_s \tilde{x}_s)^* \tilde{E}_s (u_s - \tilde{K}_s \tilde{x}_s). \end{aligned} \quad (\text{П.45})$$

Так как второе слагаемое в правой части формулы (П.45) неотрицательно и в силу (4.52) обращается в ноль, то соотношение (4.52) определяет оптимальную обратную связь, при этом формула (П.45) в силу (П.43) и $\tilde{x}_0 = a$ (см. (4.48)) переходит в соотношение (П.42). Лемма 6.6 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 6.7. Прежде всего отметим, что формулы (П.38) и соотношения (П.39), (П.40) совпадают соответственно с формулами (4.56) и уравнением (4.57), если ввести обозначения

$$K_{t-1} = \tilde{K}_{t-t'}, \quad E_{t-1} = \tilde{E}_{t-t'} \quad (\text{П.46})$$

и учесть уже введенные обозначения (4.47), (4.50). Соотношение (4.52) с учетом этих же обозначений в силу произвольности вектора $a \in C^n$ принимает вид

$$(h_{tt'})^* = -K_{t'-1}Z_{t,t'}, \quad t' = t, t-1, \dots, 0. \quad (\text{П.47})$$

Подставляя (П.46) в (4.40), приходим к уравнениям (4.59), (4.60). Начальное условие (4.58) следует из (П.41) в силу формул (4.50), поскольку равенство $P_{-1} = 0$ влечет равенство $P_0 = B_1 B_1^*$. Формула (П.42) с учетом (4.49) в силу произвольности n -вектора a приводит к формуле (4.61). Теорема 6.7 доказана.

М. Доказательство теоремы 6.8. Из формулы (5.2) имеем

$$\hat{x}_t = \sum_{t'=0}^t h_{tt'} y_{t'} = \sum_{t'=0}^{t-1} h_{tt'} y_{t'} + h_{tt} y_t. \quad (\text{П.48})$$

Из (5.59), (5.60), (П.48) следует, что

$$(Z_{t,t'})^* = (I_n + K_{t-1}C_t)A_{t-1}(Z_{t,t'-1})^*,$$

а потому

$$h_{tt'} = (I_n + K_{t-1}C_t)A_{t-1}h_{t-1,t'}. \quad (\text{П.49})$$

Используя соотношение (П.48) в формуле (П.47) и учитывая, что $h_{tt} = -(Z_{t,t})^* K_{t-1} = -K_{t-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= (I_n + K_{t-1}C_t)A_{t-1} \sum_{t'=1}^{t-1} h_{tt'} y_{t'} - K_{t-1} y_t = \\ &= (I_n + K_{t-1}C_t)A_{t-1} \hat{x}_{t-1} - K_{t-1} y_t = \\ &= A_{t-1} \hat{x}_{t-1} - K_{t-1} (y_t - C_t A_{t-1} \hat{x}_{t-1}), \end{aligned}$$

что и утверждалось. Начальная оценка $\hat{x}_0 = K_{-1}y_0$ следует из соотношения (5.63) при $t = -1$, если учесть, что $A_{-1} = 0$ (либо принять $\hat{x}_{-1} = 0$). Остальные утверждения очевидным образом следуют из соотношений теоремы 6.8. Неравенство (5.64) почти непосредственно следует из соотношений (5.42), (5.48), (5.61). Теорема 6.8 доказана.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев Ф. А. Соотношение Басса для решения дискретного алгебраического уравнения Риккати // Докл. АН АзССР. 1980. №9. С. 3-7.
2. Алиев Ф. А., Бордюг Б. А., Ларин В. Б. Спектральный метод решения матричных алгебраических уравнений Риккати // Докл. АН СССР. 1987. Т. 209. №4. С. 783-787.
3. Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Р. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. Киев, 1978. 327 с.
4. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М., 1977. 544 с.
5. Андреев В. А., Шепелявый А. И. Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратичного функционала // Elektronische Informationverarbeitung und Kybernetik. 1972. Bd 8/9. N 8. P. 549-568.
6. Антоневич А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск, 1988. 232 с.
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. 544 с.
8. Балакришнан А. В. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., 1974. 260 с.
9. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М., 1980. 384 с.
10. Барабанов А. Е. Оптимальная фильтрация стационарных процессов, использующая измеряемые невязки // Теория вероятностей и ее применения. 1990. №5. С. 337-340.
11. Барабанов А. Е., Граничин О. Н. Оптимальное управление линейным объектом при ограниченной помехе // Автоматика и телемеханика. 1984. Т. 45. №5. С. 578-584.

12. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация равномерно-частотной стоимостной функциями (H^∞ -теория) — обзор // Автоматика и телемеханика. 1992. №9. С. 3–33.
13. Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. Определение и коррекция движения (гарантирующий подход). М., 1980. 360 с.
14. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., 1982. 200 с.
15. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана — Бьюси. М., 1982. 200 с.
16. Бураго В. А. Введение в цифровую обработку сигналов. Владивосток, 1992. 168 с.
17. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М., 1972. Т 1. 744 с.; 1975. Т 2. 344 с.; 1977. Т 3. 662 с.
18. Вехуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1976. 379 с.
19. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения, методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. Киев, 1986. 543 с.
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966. 560 с.
21. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнение типа свертки. М., 1978. 296 с.
22. Гелиг А. Х. Динамика импульсных систем и нейронных сетей. Л., 1982. 292 с.
23. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М., 1978. 400 с.
24. Гельфанд И. Г., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Математика. 1951. Т. 15. С. 39–48.
25. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959. 448 с.
26. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. 654 с.
27. Голубев Г. А., Муравьев В. Ф., Писарев О. В. Линейная фильтрация стационарных случайных процессов с непрерывным временем // Техн. кибернетика. 1992. №1. С. 141–147.
28. Горшков О. Г., Фомин В. Н. Операторный подход к задаче фильтрации временных рядов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 1993. Сер. 1. Вып. 4 (№22). С. 16–21.

29. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О проблеме факторизации операторов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. №2. С. 279–282.
30. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., 1967. 508 с.
31. *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. №1. Сер. 1. Вып. 1. С. 19–21.
32. *Докучаев Н. Г.* Краевые задачи для функционалов от процессов Ито // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. Вып. 3. С. 464–481.
33. *Дубровин Н. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Усп. мат. наук. 1976. Т. 31. №1. С. 55–137.
34. *Енгибарян Н. Б.* О факторизации симметрических интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. №1. С. 19–21.
35. *Енгибарян Н. Б.* Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. №5. С. 1021–1024.
36. *Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.* О факторизации интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, №4. С. 792–795.
37. *Казаринов Ю. Ф., Леонтьева М. К., Семенов С. Г., Фомин В. Н.* Общая линейно-квадратичная задача стохастической оптимизации. Деп. в ВИНТИ, №4928-В-89 от 24.07.89. Л., 1989. 33 с.
38. *Казаринов Ю. Ф., Леонтьева М. К., Фомин В. Н.* Синтез оптимальных регуляторов в линейно-квадратичной задаче стохастического управления. Деп. в ВИНТИ, №5844-В-89 от 13.09.89. Л., 1989. 43 с.
39. *Казаринов Ю. Ф., Петров О. А., Фомин В. Н.* Оптимальная фильтрация нестационарных процессов с квазивыврожденными корреляционными функциями // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования. Минск, 1991. С. 61–67.
40. *Казаринов Ю. Ф., Фомин В. Н.* Линейно-квадратичная задача стохастической оптимизации. I. Синтез оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1990. №8. С. 99–105.
41. *Казаринов Ю. Ф., Фомин В. Н.* Линейно-квадратичная зада-

- ча стохастической оптимизации. II. Проблема разделения // Автоматика и телемеханика. 1992. №5. С. 74–81.
42. Казаринов Ю. Ф., Фомин В. Н. Линейно-квадратичная задача стохастической оптимизации. III. Нелинейные оптимальные регуляторы // Автоматика и телемеханика. 1993. №5. С. 94–99.
43. Кайлатц Т. Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки // Тр. ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1970. №5. С. 82–99.
44. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М., 1987. 320 с.
45. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Тр. Амер. общ-ва инженеров-механиков. 1961. Сер. Д. №1. С. 123–141.
46. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 1971. 400 с.
47. Караулов Д. С., Фомин В. Н. Оптимальное оценивание сигнала, наблюдаемого на фоне помехи. Деп. в ВИНТИ, №20-В-93 от 6.01.93. СПб., 1993. 14 с.
48. Кассам С. А., Пур Г. В. Робастные методы обработки сигналов (обзор) // Тр. ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1985. Т. 73. №3. С. 54–110.
49. Кац И. Я., Куржанский А. Б. Минимаксное оценивание в многошаговых системах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 535–538.
50. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М., 1977. 650 с.
51. Кендал М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., 1976. 715 с.
52. Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояния линейных динамических систем // Кибернетика. 1977. №4. С. 52–55.
53. Кнекис Э. А. Оптимальная фильтрация в системах со случайной структурой и дискретным временем // Автоматика и телемеханика. 1987. №11. С. 61–69.
54. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Математика. 1941. №5. С. 3–14.
55. Конев В. В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. Томск, 1985. 267 с.

56. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. Киев, 1989. 208 с.
57. *Коростылев Л. П.* Стохастические рекуррентные процедуры (локальные свойства). М., 1984. 208 с.
58. *Коростылев Л. П.* Асимптотическая минимаксная фильтрация непараметрического сигнала. М., 1987. Всесоюзный ин-т системных исследований. Препринт. 56 с.
59. *Красовский Н. Н.* Управление динамическими системами. М., 1985. 520 с.
60. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помехи. М., 1978. 296 с.
61. *Курбатов В. Г.* Об обратимости запаздывающих операторов // Теория операторных уравнений. Воронеж, 1979. С. 43-52.
62. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977. 392 с.
63. *Куркин О. М., Коробочкин Ю. Б., Шаталов С. А.* Минимаксная обработка информации. М., 1990. 216 с.
64. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1963. 715 с.
65. *Ларин В. Б.* Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 186-199.
66. *Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н.* Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. Киев, 1971. 137 с.
67. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1974. 328 с.
68. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. №6. С. 5-14.
69. *Лившиц Н. А., Виноградов В. Н., Голубев Г. А.* Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. М., 1974. 328 с.
70. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., 1976. 696 с.
71. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М., 1951. 216 с.
72. *Макклеллан Дж. Х.* Многомерный спектральный анализ / Заказная статья // Тр. ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1982. Т. 70. №9. С. 139-152.

73. *Марпл С. Л.-мл.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., 1990. 584 с.
74. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. 448 с.
75. *Науменко К. И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. Киев, 1984. 208 с.
76. *Новоселов О. Н., Фомин А. Ф.* Основы теории и расчета информационно-измерительных систем. М., 1991. 336 с.
77. *Параев Ю. И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М., 1976. 184 с.
78. *Петров О. А., Фомин В. Н.* Линейная оптимальная фильтрация случайных процессов // Кибернетика и вычислительная техника. 1988. Вып. 79. С. 33-40.
79. *Петров О. А., Фомин В. Н.* Линейное оптимальное оценивание нестационарных случайных процессов и факторизация корреляционных операторов // Автоматика и телемеханика. 1988. №7. С. 88-98.
80. *Петров О. А., Фомин В. Н.* Линейная фильтрация случайных процессов. Л., 1991. 147 с.
81. *Петров О. А., Фомин В. Н.* Факторизация спектральных матричных функций. Деп. в ВИНТИ, №91-В-94 от 12.01.94. СПб, 1994. 49 с.
82. *Петров Ю. П.* Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. Л., 1987. 292 с.
83. *Петров Ю. П.* Соответствует ли направленность курса теории автоматического управления современным требованиям? // Изв. вузов. Электромеханика. 1991. №3. С. 111-116.
84. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970. 456 с.
85. *Пугачев В. С., Сеницын И. Н.* Статистические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.
86. *Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М., 1976. 448 с.
87. *Робинсон Э. А.* История развития теории спектрального оценивания // Тр. ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1982. Т. 70. №9. С. 6-33.
88. *Розулина Ю. В., Фомин В. Н.* Обзор методов решения задачи линейно-квадратичной оптимизации. Деп. в ВИНТИ, №859-В-91 от 21.02.91. Л., 1991. 36 с.
89. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., 1990. 272 с.

90. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М., 1978. 552 с.
91. *Самохин Ю. А., Фомин В. Н.* Рекуррентное представление оптимального фильтра Винера — Колмогорова в задаче одношагового прогноза // Изв. Российской АН. Техническая кибернетика. 1992. №6. С. 172–178.
92. *Санкина Н. А., Фомин В. Н.* Линейная оптимальная фильтрация дискретных однородных полей. Деп. в ВИНТИ, №2501-В-92 от 3.08.92. СПб., 1992. 34 с.
93. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М., 1969. 656 с.
94. *Сосулин Ю. Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М., 1978. 320 с.
95. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., 1966. 319 с.
96. *Сумин В. И.* Функциональные гильбертовы пространства в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы операторы и управляемые начальные краевые условия. Нижний Новгород, 1993. 168 с.
97. *Тавгер Э. Е., Фомин В. Н.* Спектральная факторизация матричных функций, положительных на единичной окружности. Деп. в ВИНТИ, №2594-В-93 от 15.10.93. СПб., 1993. 44 с.
98. *Титонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. М., 1983. 320 с.
99. *Титонов В. И., Кульман Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975. 704 с.
100. *Тьеззен С. У.* О связи между разложением на треугольные матрицы и линейным предсказанием // Тр. ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1983. Т. 71. №12. С. 158–159.
101. *Уилкинсон Дж. Х., Райнш С.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., 1976. 390 с.
102. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л., 1972. 240 с.
103. *Фомин В. Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л., 1976. 235 с.
104. *Фомин В. Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М., 1984. 288 с.
105. *Фомин В. Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л., 1985. 336 с.
106. *Фомин В. Н.* Операторный подход к линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Технология и средства моделирования сложных систем. Владивосток, 1992. С. 65–77.

107. *Фомин В. Н.* Задача линейной оптимальной фильтрации. Операторный подход. Деп. в ВИНТИ, № 2442-В-93 от 20.09.93. СПб., 1993. 48 с.
108. *Фомин В. Н.* Абстрактная теория линейной оптимальной фильтрации (вариант теории Винера — Колмогорова). Деп. в ВИНТИ, № 2643-В-93 от 21.10.93. СПб., 1993. 39 с.
109. *Фомин В. Н.* Спектральная факторизация положительных операторов. Деп. в ВИНТИ, № 2967-В-93 от 30.11.93. СПб., 1993. 27 с.
110. *Фомин В. Н.* Минимизация квадратичного функционала на множестве каузальных операторов причинного гильбертова пространства // Проблемы математического анализа / Под ред. Н. Н. Уралцевой. СПб., 1995. С. 157–203.
111. *Хэррис Л., Валенка Ж.* Устойчивость динамических систем с обратной связью. М., 1987. 360 с.
112. *Череменский А. Г.* Линейная задача квадратичной стабилизации в пространстве конфигураций // Докл. Болг. АН. 1984. Т. 37. №2. С. 149–152.
113. *Шильман С. В.* Адаптивно-оптимальная фильтрация случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1986. №2. С. 113–126.
114. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М., 1989. 640 с.
115. *Эшби У. Р.* Введение в кибернетику. М., 1959. 432 с.
116. *Яглом А. М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью // Тр. Моск. мат. общ-ва. 1955. Т. 4. С. 333–374.
117. *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. №3. С. 532–535.
118. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. №2. С. 384–420.
119. *Якубович В. А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. №8. С. 5–45.
120. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972. 720 с.
121. *Anderson B. D. O.* An algebraic solution to the spectral factorization problem // IEEE Trans. Autom. Contr. 1967. Vol. AC-12. P. 410–414.

122. *Anderson B. D. O.* A system theory criteria for positive real matrices // SIAM J. Control. 1967. N 5. P. 171-182.
123. *Anderson B. D. O., Hitz K. L., Diem N. D.* Recursive algorithm for spectral factorization // IEEE, Trans. Circuits Syst. 1974. Vol. CS-6. P. 742-750.
124. *Anderson B. D. O., Moylan P. J.* Spectral factorization of a finite-dimensional nonstationary matrix covariance // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1974. Vol. AC-19. N 6. P. 680-692.
125. *Bode H. W., Shannon C. E.* A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory // Proc. IRE. 1950. Vol. 38. P. 417-425.
126. *Busy R. S.* Global theory of the Riccati equation // J. Comp. Syst. Sci. 1967. Vol. 1. P. 349-361.
127. *Busy R. S., Joseph P. D.* Filtering for the stochastic processes with application to guidance. New York; London, 1968. 195 p.
128. *Chen C. T., Kassam S. A.* Robust Wiener filtering for multiple inputs with channel distortion // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1984. Vol. IT-30. P. 674-677.
129. *Childres D. G.* Modern Spectral Analysis. IEEE Press Selected Reprint Series. New York, 1978. 333 p.
130. *Davis M. S.* Factoring the spectral matrix // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1971. Vol. AC-16. P. 382-384.
131. *Extrom M. P., Woods J. W.* Two dimensional spectral factorization with application in recursive digital filtering // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. 1976. Vol. ASSP-24. P. 115-128.
132. *Feintuch A., Sacks R.* System theory. A hilbert space approach. New York; London, 1982. 311 p.
133. *Fomin V. N.* Discrete linear control systems. Dordrecht; Boston; London, 1991. 302 p.
134. *Fomin V. N.* The extrapolation problem of stationary time-series correlation // Model Oriented Data Analysis. Heidenberg, 1993. P. 159-156.
135. *Fransis B. A.* A course in H_∞ control theory // Lect. Notes in Control and Information Sciences. Vol. 88. Berlin, 1987. 155 p.
136. *Freestad W. C., Webber R. F., Dass R. W.* The "GASP" computer program—an iterated tool for optimal control and filter design // Preprint. Joint Autom. Contr. Conference. 1968. P. 198-202.
137. *Jazwinski A. H.* Stochastic processes and filtering theory. New York, 1970. 376 p.

138. *Halvo N., McAlpine G. A.* On the spectral factorization of nonstationary vector random processes // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1974. Vol. AC-19. P. 674-679.
139. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction theory // J. Basic. Eng. ASME. 1960. Vol. 1. P. 35-45.
140. *Kalman R. E.* Liapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control // Proc. Nat. Sci. USA. 1963. Vol. 49. P. 201-205.
141. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Eng. ASME. Ser. D. 1961. Vol. 83. N 1. P. 95-108.
142. *Kay S. M.* Modern spectral estimation. New York, 1987. 248 p.
143. *Kučera V.* The discrete Riccati equation of optimal control // Kybernetika. 1979. Vol. 8. N 5. P. 430-447.
144. *Laub A. J.* Shur method for solving algebraic Riccati equations // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1979. Vol. AC-24. P. 913-920.
145. *Levinson N.* The Wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. 1974. Vol. 25. P. 261-278.
146. *Levy B., Kailath Th., Ljung L., Morf V.* Fast time-invariant implementation for linear least-squares smoothing filters // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. AC-20. N 5. P. 770-774.
147. *Kailath T. (ed).* Linear least-squares estimation (A Benchmark Book Series. Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Sciences. Vol. 17.) Stroudsburg; Pennsylvania, 1977. 319 p.
148. *Lindquist A., Picci G.* A geometric approach to modelling and estimation of linear stochastic systems // J. of Mathematical Systems, Estimation, and Control. 1991. Vol. 1. N 3. P. 241-333.
149. *Ljung L.* Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1979. N 1. Vol. AC-24. P. 36-50.
150. *Masani P.* The laurent factorization of operator-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6. N 21. P. 59-69.
151. *Michelsen M.* On the eigenvalue-eigenvector method for solution of the stationary discrete matrix Riccati equation // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1979. Vol. AC-24. N 3. P. 481-488.
152. *Milman M.* An extension of the special factorization with applications to Wiener — Hopf equations // J. Math. Anal. Appl. 1985. Vol. 110. N 2. P. 303-322.
153. *Moustarides G., Kassam S. A.* Robust Wiener filters for random signals in correlated noise // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1983. Vol. IT-29. P. 624-619.

154. *Nehorai A., Morf M.* A mapping result between Wiener theory and Kalman filtering for nonstationary processes // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. Vol. AC-30, N 2. P. 175-177.
155. *Panuska V.* A new form of the extended Kalman filter for parameter estimation in linear systems with correlated noise // IEEE Trans. Automat. Contr. 1980. Vol. AC-25. N 2. P. 229-235.
156. *Sacks R.* Resolution space. Operators and systems // Lect. Notes Economics Math. Systems. 1973. Vol. 82. P. 1-267.
157. *Santis R. M. De.* Causality, strict causality and invertibility for systems in Hilbert resolution space // SIAM L. Control. 1974. Vol. 12. N 3. P. 536-553.
158. *Shubert H. A.* An analytic solution for an algebraic matrix Riccati equation // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1974. Vol. AC-19, N 6. P. 255.
159. *Vastola K. S., Poor H. V.* Robust Wiener — Kolmogorov theory // IEEE Trans. Inf. Theory. 1984. Vol. IT-30. P. 316-327.
160. *Vidyasagar V.* Control system synthesis, a factorization approach. Cambridge; Massachusetts; London, 1985. 436 p.
161. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series. Cambridge, 1949. 243 p.
162. *Wiener N., Masani P.* The prediction theory of multivariable stochastic processes. II // Acta Math. 1958. Vol. 99. P. 93-137.
163. *Youla D. C.* On the factorization of rational matrices // IRE Trans. on Inform. Theory. 1961. N 3. P. 172-189.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аппроксимация 35

Белый шум стандартный 25, 186

Выбеливание 71, 95

Дискретизация 36, 78

Задача линейно-квадратичная (ЛКЗ) 65, 125, 126, 143, 144, 155,
264
— "расширенная" 155

Интеграл контурный 38, 164
— Коши 175
— стохастический 25, 32, 107

Квазиполином 115, 132, 150, 161, 162, 169
Кепстр 171

Матрица конечнодиагональная 20, 115, 119
— нижнетреугольная 70, 71, 92
Метод Басса 152
— Юла 138

Оператор антикаузальный 46
— Гильберта — Шмидта 38, 114
— интегральный 47, 55, 106
— каузально обратимый 91, 92, 104, 116
— каузальный 45, 81, 107, 110, 111
— конечнодиагональный 112, 199
— корреляционный (ковариационный) 21, 26, 27, 69, 106
— линейный 17, 20, 21, 83
— нейтральный 46, 81, 112, 206
— неупреждающий 53, 81
— ограниченный 19, 20, 22, 112, 116, 206

- положительно-определенный 18
- положительный 18, 90, 93
- проекционный (проектирования) 43
- псевдообратный 30
- сопряженный 18, 19, 27, 53
- стационарный 114, 121, 132
- устойчивый 44, 50, 52, 143
- фильтра весовой 28, 38, 56, 85, 94, 98, 110, 189, 190, 211
- финитный 42
- — сверху 20, 44
- — снизу 45
- ядерный 24, 120
- Ортопроектор 39, 44
- Оценка линейная 28, 35, 68, 220
 - неупреждающая 42, 220
 - оптимальная 68, 87, 220
- Плотность спектральная 104, 116, 130, 159
- Подпространство инвариантное 17, 51, 52, 73
- Пополнение гильбертова пространства 17,
 - пространства слабое 14, 15
- Последовательность оптимизирующая 221, 226, 251
 - слабо сходящаяся 18
 - сходящаяся в себе 18
- Представление оптимального фильтра рекуррентное 190
- Преобразование Гильберта 172
 - линейное 17
 - неупреждающее 115
 - Фурье 115, 156, 173
- Пространство причинное 43, 79, 111
 - расширенное 49
- Процесс белозумный 24, 57, 258
 - винеровский 23, 185, 188
 - стандартный 25, 71
 - дискретный 77, 93, 117
 - обновляющий 57, 131, 194
 - порождающий 57, 131
 - случайный 10, 23, 185
 - — обобщенный 23
 - — частично наблюдаемый 105
- Псевдообращение 30, 69

- Разложение единицы 43
 - — дискретное 78
 - — ортогональное 79, 112
- Реализация дробно-рациональной функции 142
- Сепарация 111, 113, 117
- Символ стационарного оператора 55, 115, 134
- Структура временная 43
 - — дискретная 66, 78, 79, 111
 - — непрерывная 43, 66
 - оптимального фильтра 74, 86, 93, 109
- Сходимость слабая 13, 15, 61
- Теорема Винера — Леви 170
 - частотная 146, 149
- Уравнение авторегрессионное 159
 - Винера — Хопфа 40, 100, 108, 185, 209
 - Лурье 143, 148, 158
 - разностное 126, 159
 - Риккати 124, 144, 188, 196, 238, 266
 - устойчивое 159
- Условие частотное 144
- Фактор спектральный 142, 143
- Факторизация спектральная 89, 103, 104, 117, 122
 - — усиленная 91
 - Холецкого 66, 104, 139
- Фильтр Винера — Колмогорова 65, 182, 200
 - Калмана — Бьюси 183, 188, 189, 206, 237, 242, 247, 266
 - линейный 28, 105, 106, 187, 205, 220, 255
 - неупреждающий 57, 65, 84, 105, 187, 220, 237, 255
 - рекуррентный 98, 190, 191
 - устойчивый 26, 28, 29, 226
 - физически реализуемый 66, 70, 72, 85, 93
 - формирующий 91, 182, 197, 205, 207
- Формула Боде — Шеннона 57, 93, 94, 98, 131
- Функционал квадратичный 65, 100, 106, 124, 126, 147
- Функция 68, 138, 144, 147
 - дробно-рациональная 138, 140, 170
 - единичного скачка 110, 174, 198

- корреляционная 107
- матричная 129, 130, 133
- операторная 41, 134
- положительная 107, 132
- полиномиальная 243
- положительно-вещественная 141
- спектральная 133, 152, 157, 171
- фильтра весовая 27, 56, 107, 184, 187, 208, 214
- — передаточная 116
- Хевисайда 110

Характеристики финитного оператора 44, 45, 46

Элемент обобщенный 13

- случайный 13, 21, 22
- — финитный 49
- — частично наблюдаемый 28, 67

Ядро оператора 48

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные обозначения и сокращения	6
ГЛАВА 1. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ. ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД	10
1. Случайные элементы в гильбертовом пространстве	13
А. Основные и обобщенные элементы гильбертова пространства	—
Б. Линейные операторы в гильбертовом пространстве и его пополнениях	17
В. Пример: линейные операторы в пространстве последовательностей	19
Г. Случайные элементы со значениями в расширенном гильбертовом пространстве	21
Д. Случайные процессы как обобщенные элементы гильбертова пространства	23
Е. Возможные обобщения понятия случайного элемента	26
2. Линейное оценивание случайных элементов в классе устойчивых фильтров	—
А. Постановка задачи оценивания в классе линейных оценок	—
Б. Связь задачи оптимальной фильтрации с общей многокритериальной задачей оптимизации	29
В. Решение задачи оптимальной фильтрации в классе устойчивых фильтров	—
Г. Пример: задача линейного оценивания	31
Д. Замечания по поводу однокритериальной задачи оптимальной фильтрации	37
3. Причинное пространство и финитные в нем преобразования	42
А. Гильбертово пространство, наделенное временной структурой	43
Б. Финитные операторы в причинном пространстве	44
В. Пример: интегральные операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R})$	47
4. Расширенное причинное пространство и линейные в нем преобразования	49
А. Расширение причинного пространства, согласованное с временной структурой	—
Б. Линейные преобразования в t -расширении гильбертова пространства	50
В. Пример: операторы, порождаемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами	53

Приложение к главе 1	60
А. Доказательство теоремы 1.1	—
Б. Доказательство леммы 1.3	—
В. Доказательство леммы 1.4	61
Г. Доказательство леммы 1.5	—
Д. Доказательство леммы 1.6	62
Е. Доказательство леммы 1.7	—
Ж. Доказательство леммы 1.8	—
З. Доказательство теоремы 1.2	63
 ГЛАВА 2. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ВАРИАНТ ТЕОРИИ ВИНЕРА — КОЛМОГОРОВА)	65
1. Абстрактный вариант теории Винера — Колмогорова оптимального оценивания случайных элементов	67
А. Элементарная ("конечномерная") задача оптимальной фильтрации	68
Б. Постановка задачи оптимального неупреждающего оценивания случайных элементов	72
В. Обобщение задачи оптимального оценивания	73
Г. Разрешимость задачи оптимального оценивания и структура оптимального фильтра	74
Д. Локальное оценивание	76
2. Оптимальное оценивание случайных элементов в пространстве с дискретной временной структурой	77
А. Дискретизация временной структуры причинного пространства	78
Б. Финитные операторы в дискретном причинном пространстве	79
В. Задача неупреждающей фильтрации	84
Г. Обобщение задачи оптимальной фильтрации	85
Д. Существование оптимального фильтра и его структура ..	86
Е. Аппроксимация оптимального фильтра	88
3. Спектральная факторизация положительных операторов	89
А. Факторизация положительных операторов	90
Б. Усиленная спектральная факторизация	91
4. Структура оптимального фильтра в дискретном случае	93
А. Представление Боде — Шеннона для оптимального весового оператора	94
Б. Интерпретация Боде — Шеннона действия оптимального фильтра	95
В. Построение оптимизирующей последовательности весовых операторов	—
Г. Рекуррентное представление оптимального фильтра	98
Приложение к главе 2	99
А. Доказательство теоремы 2.5	—
Б. Доказательство теоремы 2.6	101
В. Доказательство теоремы 2.7	—

ГЛАВА 3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ДИСКРЕТНОМ ПРИЧИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ	103
1. Пример: спектральная факторизация в задаче линейной неупреждающей фильтрации	105
А. Линейная оптимальная фильтрация	—
Б. Связь задачи оптимальной фильтрации с проблемой спектральной факторизации	108
2. Каузальные операторы в причинном пространстве	110
А. Каузальные операторы и некоторые их свойства	—
Б. Дискретное причинное пространство	111
В. Сепарация линейных операторов в дискретном причинном пространстве	112
Г. Стационарные операторы и их символы	114
3. Факторизация операторов в дискретном причинном пространстве	117
А. Спектральная факторизация в дискретном причинном пространстве	—
Б. Левосторонняя факторизация обратимых операторов в причинном пространстве	118
В. Метод последовательных приближений в задаче спектральной факторизации	119
Г. Спектральная факторизация положительно-определенных операторов, каузальная и антикаузальная компоненты которых имеют конечные абсолютные нормы	120
Д. Спектральная факторизация стационарных операторов ..	121
Е. Спектральная факторизация квазивыврожденных операторов	122
4. Связь задачи спектральной факторизации с задачей минимизации квадратичных функционалов	124
А. "Абстрактная" линейно-квадратичная задача оптимального управления	125
Б. Линейно-квадратичная задача управления и проблема спектральной факторизации	126
ГЛАВА 4. ФАКТОРИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ	129
1. Факторизация положительных на единичной окружности операторных функций	132
А. Итерационный метод факторизации	134
Б. Сведение задачи факторизации дробно-рациональных матричных функций к последовательности задач скалярной факторизации	136
В. Основное утверждение о факторизации дробно-рациональной спектральной функции	138
Г. Спектральная факторизация дробно-рациональной матричной функции, основанная на факторизации Холецкого	—
2. Факторизация дробно-рациональных операторных спектральных функций	140

А. Положительно-вещественные функции и их спектральные факторы	141
Б. Связь задачи спектральной факторизации с линейно-квадратичной задачей	143
В. Итерационный метод решения уравнения Лурье	144
Г. Спектральная факторизация операторного квазиполинома, положительного на единичной окружности	—
3. Спектральная факторизация и частотная теорема	145
А. Частотная теорема	146
Б. Дискретное уравнение Лурье	148
В. Частотная теорема и спектральная факторизация	—
Г. Метод построения матриц, определяющих частотное соотношение	150
Д. Метод Басса	152
4. "Расширенная" линейно-квадратичная задача	154
А. Исходная и "расширенная" линейно-квадратичные задачи	—
Б. Решение "расширенной" ЛКЗ	156
В. Нахождение максимального решения уравнения Лурье при известном калмановском коэффициенте	157
5. Сведение задачи факторизации положительного квазиполинома к решению линейной системы	158
А. Временной ряд, описываемый авторегрессионным уравнением, и его спектральная плотность	—
Б. "Алгебраический" метод факторизации положительного квазиполинома	161
В. Определение коэффициентов "обращенного" квазиполинома	162
6. Иллюстрация методов спектральной факторизации	164
А. Факторизация с помощью метода, основанного на частотной теореме	—
Б. Факторизация, основанная на решении "расширенной" ЛКЗ	166
В. Алгоритм факторизации матричного квазиполинома	168
7. Факторизация скалярных функций, положительных на единичной окружности	169
А. Факторизация спектральной плотности, имеющей кепстр	170
Б. Использование преобразования Гильберта для факторизации спектральной плотности	171
В. Непосредственное вычисление сепарирующего оператора	173
Г. "Скалярная" Факторизация, основанная на использовании формулы Коши	174
Приложение к главе 4	175
А. Доказательство теоремы 4.2	—
Б. Доказательство леммы 4.1	179

ГЛАВА 5. РЕКУРРЕНТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ.....	181
1. Фильтр Калмана — Бьюси	183
2. Рекуррентные формы представления оптимального фильтра	190
А. Рекуррентное представление оптимального фильтра в предположении конечномерности случайных процессов..	192
Б. Упрощение рекуррентной формы оптимального фильтра.	193
В. Рекуррентные соотношения в общем случае процесса с квазивыврожденной матрицей корреляций	195
Г. Формирующие фильтры конечномерных случайных процессов	197
3. Рекуррентное представление фильтра Винера — Колмогорова в случае временных рядов	200
А. Оптимальный фильтр в задаче Винера — Колмогорова в случае временных рядов	—
Б. Рекуррентная форма представления оптимального фильтра в квазивыврожденном случае	203
В. Пример: мультипликативный формирующий фильтр	204
Г. Связь рекуррентной формы оптимального фильтра с фильтром Калмана — Бьюси	205
Д. Пример: рекуррентное оценивание значений временного ряда, порождаемого мультипликативным формирующим фильтром	208
Приложение к главе 5	209
А. Доказательство теоремы 5.1	—
Б. Доказательство теоремы 5.2	211
В. Доказательство теоремы 5.3	214
Г. Доказательство леммы 5.1	—
Д. Доказательство леммы 5.2	215
Е. Доказательство леммы 5.3	216
Ж. Доказательство леммы 5.4	—
ГЛАВА 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	218
1. Постановка задачи нелинейной оптимальной фильтрации	219
А. Фильтрация стохастических временных рядов	222
Б. "Геометрическая" интерпретация задачи оптимальной фильтрации	224
В. Фильтрация неслучайных временных рядов	227
2. Оптимальная фильтрация условно-гауссовых временных рядов ..	—
А. Временные ряды, обладающие условным марковским свойством	—
Б. Условно-гауссовы временные ряды	229
В. Рекуррентные соотношения для оптимальных оценок, основанные на формуле Стратоновича	233
Г. Пример: рекуррентные уравнения фильтрации для условно-гауссовых последовательностей	234

3. Оптимальное оценивание полезного сигнала, излучаемого на фоне помехи	238
А. Постановка задачи	239
Б. Достаточные статистики апостериорных распределений	240
В. Полиномиальные функции и экспоненциально-полиномиальные распределения	243
Г. Рекуррентные соотношения для достаточных статистик экспоненциально-полиномиальных апостериорных плотностей	244
Д. Гауссов случай	245
Е. Экспоненциально-полиномиальное распределение 4-го порядка	246
Ж. Приближенно-гауссово распределение	247
4. Связь задач линейной и нелинейной фильтрации	248
А. Полные последовательности оптимальных оценок	249
Б. Условия существования полных последовательностей оптимальных оценок	251
В. Полиномиальные оценки	253
5. Минимаксная фильтрация	255
А. Уточнение задачи оптимальной фильтрации	256
Б. Пример: бел шумная помеха	258
В. Пример: ограниченная помеха	259
Г. Решение операторной линейно-квадратичной задачи	260
Д. Рекуррентная форма представления решения линейно-квадратичной задачи	261
Е. Оптимальность фильтра Калмана — Бьюси	
Ж. Свойства оптимального фильтра Калмана — Бьюси	
Приложение к главе 6	2
А. Доказательство леммы 6.1	—
Б. Доказательство теоремы 6.1	272
В. Доказательство теоремы 6.2	273
Г. Доказательство теоремы 6.3	274
Д. Доказательство теоремы 6.4	278
Е. Доказательство теоремы 6.5	280
Ж. Доказательство леммы 6.3	—
З. Доказательство теоремы 6.6	281
И. Доказательство леммы 6.4	282
К. Доказательство леммы 6.5	283
Л. Доказательство теоремы 6.7	—
М. Доказательство теоремы 6.8	285
Указатель литературы	286
Предметный указатель	297

Учебное издание

Фомин Владимир Николаевич

**ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Редактор *И. Н. Рязанова*
Художественный редактор *Е. И. Егорова*
Технический редактор *А. В. Борщева*

ИБ № 3573

Лицензия ЛР №040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 05.01.95. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,90. Усл. кр.-отт. 18,02. Уч.-изд. л. 15,4.
Тираж 700 экз. Заказ 186.
Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства СПбГУ.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.