

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

А. А. ВАВИЛОВ, Д. Х. ИМАЕВ

МАШИННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



Издательство Ленинградского университета
Ленинград 1981

*Представлено к изданию
Ленинградским электротехническим институтом
им. В. И. Ульянова (Ленина)*

УДК 681.5

Вавилов А. А., Имаев Д. Х. Машинные методы расчета систем управления: Учеб. пособие. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981, 232 с. Ил. — 63, табл. — 7, библиогр. — 99 назв.

В учебном пособии с позиций развития машинных методов расчета рассмотрены вопросы формализации описания и алгоритмизации процедур анализа топологически сложных линейных систем управления. С целью упрощения использования материала в расчетной практике большинство излагаемых методов сопровождается необходимыми алгоритмами.

Пособие предназначается для студентов, выполняющих курсовые расчеты и проекты по дисциплине «Теория управления», однако может оказаться полезным для инженеров, занимающихся проектированием систем управления с применением ЭВМ.

Рецензенты:

канд. техн. наук доц. *Г. А. Дидук* (СЭПИ);
канд. техн. наук доц. *Э. В. Сергеев* (ЛЭТИ)

В $\frac{30502-096}{076(02)-81}$ БЗ-94-73-81. 150200000

© Издательство
Ленинградского
университета, 1981 г.

Применение вычислительной техники в научных и инженерных расчетах, т. е. автоматизация расчетов, представляет собой составную часть и, как правило, начальный этап более общей процедуры — автоматизированного проектирования, выполняемого с помощью специальных комплексов технических и программных средств.

Сложность автоматизации расчетов динамических систем, в частности систем управления, обусловлена большим разнообразием классов моделей — линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных, стационарных и нестационарных, детерминированных и стохастических и т. д., а также задач — анализа, синтеза, построения моделей. В последние годы в теории управления и практике проектирования с учетом потенциальных возможностей вычислительной техники все чаще рассматриваются многоконтурные многосвязные системы различных классов, представляющие собой взаимосвязь и взаимодействие большого числа звеньев и переменных, или даже сложные системы в виде комплексов подсистем управления, выполняющих самостоятельные функции и имеющих собственные цели. Однако использование ЭВМ для расчета таких систем в большинстве случаев сводится лишь к получению их отдельных характеристик (например, временных), поскольку для этих классов моделей и новых постановок задач еще недостаточно разработаны адекватные и эффективные машинные методы расчета с соответствующим программным обеспечением.

Следует сказать, что широкая ориентация на применение вычислительной техники заставляет смотреть в новом свете на разработку теоретических методов анализа, синтеза и построения моделей систем управления. Важное значение приобретают вопросы формализации основных понятий теории управления, машинно-ориентированного описания моделей систем, алгоритмизации их исследования.

К настоящему времени имеется значительное число публикаций, в которых развиваются машинные методы расчета систем управления, основанные на цифровом моделировании (имитации), матрично-аналитическом аппарате, и некоторые другие. В то же время в литературе уделяется мало внимания разработке формализованных методов расчета, учитывающих топологические и структурные особенности организации сложных систем управления.

Исследования, связанные с учетом влияния на свойства систем и характер процессов управления внутренней организации систем, появились давно. Сюда можно отнести теорию многосвязного регулирования с проблемой автономности [23] и теорию инвариантности [49, 93] с проблемой физической реализуемости [61]. С проблемами инвариантности и двукратной инвариантности тесно связаны структурные подходы в теории чувствительности [13, 19, 39, 40, 41, 82] и вопросы управляемости и наблюдаемости [25, 37]. Структурные методы в теории управления развивались в [11, 15, 52, 91, 92] и других работах. В [60] рассмотрены способы формального построения и преобразования структурных и развернутых структурных схем — специальных графов, в вершинах и дугах которых особым образом указываются структуры диагональных и недиагональных элементов матриц. Особенно большое внимание топологическим методам расчета придается в теории сложных электронных схем [4, 73].

Интерес к топологическим и структурным особенностям систем управления объясняется тем, что они определяют многие фундаментальные свойства систем, и изучение их влияния на процессы управления позволяет на самых ранних этапах проектирования получить полезную и необходимую информацию, имеющую принципиальное значение для всех последующих этапов.

В учебном пособии [16] были рассмотрены отдельные проблемы применения ЭВМ для расчета временных и частотных характеристик, исследования устойчивости и вычисления показателей качества непрерывных и дискретных систем автоматического управления.

В настоящем учебном пособии с позиций развития машинных методов расчета рассмотрены вопросы формализованного описания топологически сложных линейных систем управления, алгоритмизации процедур анализа топологических, структурных и параметрических свойств систем и условий их взаимодействия с окружающей средой. При описании систем управления, выявлении основных свойств их системной организации, построении методов исследования и алгоритмического обеспечения принимаются и реализуются некоторые общие принципы системного подхода — последовательного раскрытия неопределенности, избыточности, однозначности. При изложении материала используются многие известные результаты теории чувствительности и инвариантности; вместе с тем методически целесообразно применение ряда относительно новых понятий, позволивших с единых позиций рассмотреть самые различные проблемы инвариантности и компенсации в системах управления. Достаточно большое место в пособии занимают частотные методы исследования систем, естественным образом сочетающиеся со структурно-топологическим подходом к рассмотрению сложных систем управления.

Для успешного усвоения изложенного в учебном пособии материала необходимо предварительное знакомство с основами линейной теории автоматических систем управления, элементарными понятиями теории множеств, теории графов и теории матриц.

Хотя учебное пособие в основном посвящено вопросам анализа систем, значительная часть материала подготавливает изложение методов и алгоритмов целенаправленного эволюционного синтеза топологически сложных систем управления [15], которые с учетом их важности и большого объема целесообразно вынести в отдельное пособие.

Для упрощения применения приведенных методов пособие снабжено необходимыми алгоритмами, для описания которых принят простой и весьма компактный язык АЛМНР (АНАЛИТИК).

В пособии нашли отражение исследования, выполненные и подготовленные к печати авторами совместно с Л. Б. Пошехоновым (гл. 4 и § 5.4, алгоритмы §7.5 и п. 2.2.13) и В. И. Андроновым (гл. 4, 5 и алгоритмы пп. 2.2.5—2.2.8). Авторы весьма признательны А. П. Веревкину за обсуждение ряда идей и результатов работы, ценные советы и замечания, а также всем товарищам, принявшим участие в обсуждении материалов данного учебного пособия.

Замечания и пожелания по книге просим направлять по адресу: Ленинград, 197022, ул. Проф. Попова, 5. Ленинградский электротехнический институт имени В. И. Ульянова (Ленина).

1.1. Основные свойства систем управления и некоторые принципы построения их моделей

Основные отличительные свойства систем управления. Рассмотрим ряд основных свойств систем управления, которые в дальнейшем будут широко использоваться при построении моделей, методов анализа и синтеза сложных систем управления.

Системы управления представляют собой особый класс динамических систем, отличающихся высоким уровнем специальной системной организации, наличием самостоятельных функций и целей управления. Они функционируют в живой и неживой природе, в самых различных областях науки, техники, экономики, биологии и т. д. Независимо от того, какие системы управления — технические, экономические, социальные, биологические и т. д. — будут рассматриваться, и независимо от того, какие это будут системы управления — автоматические или автоматизированные, — их всегда будет объединять в особый класс динамических систем целый ряд общих системных свойств и признаков, характерных для каждой из этих систем управления.

Выделение основных системных свойств и признаков не может быть всегда очевидным и однозначным, ибо в зависимости от точки зрения исследователя, задач и целей исследования тем или иным системным свойствам и признакам может придаваться большее или меньшее значение.

Ниже рассматривается ряд основных свойств и признаков систем управления, которые необходимо учитывать при анализе и синтезе топологии, структуры операторов передач и параметров систем управления и в первую очередь сложных систем управления [15].

Система управления S по своему функционально-целевому назначению является основным звеном в цепи причинно-следственных отношений: внешняя среда — система управления — внешняя среда.

Самостоятельные функции и заданные цели управления определяют причинно-следственные отношения на входе и выходе системы управления. Процессы на выходе системы управления определяются не только начальными условиями, помехами, изменением параметров самой системы, но и в первую очередь внешней средой в виде управляющих и возмущающих воздействий на систему.

Заданные цели управления достигаются в системе управления вследствие ее специальной организации, т. е. выбора соответствующей топологии, структуры операторов и параметров звеньев, удовлетворяющих заданным показателям и критериям качества. Специальная организация системы управления предусматривает широкое применение обратных связей и компенсирующих цепей с целью уменьшения чувствительности к возмущающим воздействиям, помехам и изменениям параметров.

Принципиальным свойством систем управления, которое позволяет выделить их в особый класс динамических систем, является использование текущей информации об управляющих воздействиях на входе и переменных на выходе системы управления для реализации обратных связей, обеспечивающих уменьшение чувствительности к возмущающим воздействиям и изменениям параметров.

Использование текущей информации об управляющих воздействиях и переменных на выходе системы управления позволяет создать основной класс систем управления, а именно класс замкнутых систем управления с отрицательной обратной связью. В таких системах можно обеспечить заданные цели управления при большой неопределенности возмущающих воздействий и изменений во времени параметров системы путем уменьшения чувствительности к этим возмущающим воздействиям и изменениям параметров.

При отсутствии отрицательной обратной связи между входом и выходом система управления теряет свои фундаментальные свойства, связанные с уменьшением чувствительности к полностью или частично неопределенным возмущающим воздействиям и изменениям параметров, и вырождается в обычную динамическую систему или в систему управления, работающую по разомкнутому принципу при использовании текущей информации о возмущающих воздействиях для компенсации их влияния.

Любая дополнительная текущая информация о воздействиях, переменных, топологии, структуре операторов передач и параметрах системы управления позволяет улучшить ее специальную системную организацию и, как следствие, повысить качество управления. Поэтому всякая дополнительная текущая информация должна быть использована для совершенствования ее специальной системной организации.

Так, например, наличие текущей информации об управляющих воздействиях и переменных на выходе системы позволяет создать систему управления с обратной связью, а наличие, кроме того, текущей информации о возмущающих воздействиях, полученной в результате их измерения, позволяет создать комбинированную систему управления, работающую одновременно по замкнутому и разомкнутому принципам. Если имеется текущая информация об изменениях одного или нескольких параметров системы управления, то может быть построена система компенсации изменений или стабилизации этих параметров и т. д.

Необходимыми условиями работоспособности системы управления являются устойчивость и грубость системы управления. При исследовании устойчивости системы управления приходится иметь дело с многоконтурными системами, в которых отдельные параметры могут изменяться в процессе настройки и изменения режимов работы, а также в процессе нормальной эксплуатации системы за счет дрейфа. Грубость системы управления является гарантией того, что малые изменения параметров не будут вызывать значительных отклонений процессов и показателей качества.

О некоторых общих принципах построения моделей систем управления. Методы построения систем управления и структуры их моделей (в том числе и целей управления, показателей качества, методов исследования, алгоритмического обеспечения и т. д.) должны удовлетворять ряду общих принципов системного подхода к исследованию сложных систем управления. В качестве таких основных общих принципов следует назвать принципы *однозначности, неизбыточности, последовательного раскрытия неопределенности и целенаправленного эволюционного развития* [15]. Следует заметить, что в общем случае они могут быть противоречивы, и поэтому необходимо на всем возможном множестве свойств и оценок систем управления выбирать при познании исследования и синтезе сложных систем непротиворечивые оценки и свойства, удовлетворяющие этим принципам.

Частные модели, характеризующие отдельные стороны систем, и модели всей системы управления должны обеспечивать однозначное представление некоторой совокупности основных свойств для всего множества моделей систем управления, обеспечивая тем самым возможность применения общего системного подхода при исследовании наиболее широкого класса систем управления. В качестве некоторой совокупности основных свойств, однозначно характеризующих все множество моделей систем управления, целесообразно, например, выбрать некоторую совокупность общих топологических свойств системы, таких, как связность и сильная связность сигнальных графов, некоторые множества и подмножества вершин, дуг, под-

графов, обладающих особыми свойствами, и т. д. В этом случае, несмотря на большое разнообразие конкретных систем управления, целый ряд их фундаментальных свойств будет однозначно определяться для самого широкого класса таких систем.

Необходимо подчеркнуть, что принцип однозначности должен последовательно соблюдаться на всех уровнях моделирования систем управления, а именно при моделировании внешней среды, системы управления, связи внешней среды с системой управления, объединения — интеграции отдельных подсистем в сложную систему управления и т. д., определения моделей целей управления, частных и векторных критериев качества и т. н.

Частные модели и модели всей системы управления в целом должны обеспечивать неизбыточное представление некоторой необходимой и достаточной совокупности их основных свойств для каждого этапа исследования и проектирования систем управления. Введение избыточности не только увеличивает размерность задачи, но и в большинстве случаев требует уже на первых этапах исследования системы иметь дело с нелинейными, нестационарными и вероятностными задачами, что не позволяет найти достаточно эффективных процедур синтеза топологии и структуры передач в сложных системах управления, однозначно классифицировать задачи их синтеза в зависимости от уровня неопределенности моделей.

Устранение избыточных моделей на соответствующих этапах исследования и проектирования систем управления целесообразно осуществлять путем декомпозиции общей задачи в самом широком смысле, т. е. устранение избыточности путем уменьшения размерности отдельных задач при последующей их композиции, поэтапного исследования отдельных свойств системы — свободного, вынужденного переходного и установившегося движения и т. д., а также путем преобразования некоторой частной информации об отдельных параметрах, передачах и топологии в более укрупненную информацию о передачах путей, свойствах определителей системы и т. д. Следовательно, устранение избыточности может быть связано с потерей некоторой информации о свойствах системы управления, о связи с внешней средой и другими подсистемами в сложной системе управления и т. д., а переход к неизбыточной для данной задачи модели будет, естественно, связан с введением некоторой неопределенности как для частных, так и более общих задач исследования.

Последовательное раскрытие неопределенности является одним из важнейших принципов, во многом определяющих возможность и формы реализации остальных принципов. В соответствии с этим принципом построение моделей, их ввод в ЭВМ, выявление и формирование свойств си-

систем управления должны осуществляться поэтапно таким образом, что на каждом этапе происходит очередное приращение информации, позволяющее решать дополнительные задачи по выявлению новых совокупностей свойств исследуемых систем. Применение принципов однозначности, неизбыточности и последовательного раскрытия неопределенности приводит к процедуре синтеза в виде целенаправленного эволюционного развития топологии систем, структур их операторов и конкретизации значенных параметров на основе поэтапного использования информации о функциях систем, целях управления и требованиях к качеству процессов. Для обеспечения такой организации процессов построения моделей, их анализа, а в последующем — и синтеза систем управления, ниже вводится ряд новых понятий, в частности понятие ранга неопределенности моделей систем, систем со связями с внешней средой, расширенных систем, частных моделей и др.

1.2. Причинно-следственные модели систем управления

Проблема выбора форм представления моделей систем управления (языка описания) имеет принципиальное значение, ибо принятая за основу для заданных целей исследования модель во многом, если не в основном, определяет пути и возможности топологического, структурного и параметрического синтеза сложной системы управления, применяемый математический аппарат и методы оптимизации, а в совокупности — также возможности развития машинных и машинно-ориентированных методов расчета, алгоритмического и программного обеспечения.

При построении моделей системы управления могут быть положены в основу различные формы ее описания. Для линейных стационарных систем управления объектами с сосредоточенными параметрами широко используются модели в виде дифференциальных, разностных или дифференциально-разностных уравнений, систем алгебраических уравнений относительно изображений переменных, модели в виде сигнальных графов с весами дуг в виде передаточных функций, структурные схемы, представляющие собой разновидности графов, и др.

При рассмотрении сложных систем управления большое внимание должно уделяться топологическим свойствам модели. Задание топологии позволяет получить дополнительную информацию и, следовательно, уменьшить неопределенность задачи синтеза. Поэтому рассмотрим в первую очередь топологические свойства моделей систем управления, описываемых линейными операторами.

В процессе построения причинно-следственных моделей целесообразно выделить модели M_s — самой системы управления

S , M_F — внешней среды на входе, $M_{\mathcal{F}}$ — на выходе, а также модели M_{SF} и $M_{\mathcal{F}S}$ — связей системы со средой на входе и выходе, как это показано на рис. 1. Кроме того, в различных задачах отдельно используются модели систем управления M_S , систем со связями с внешней средой $M_{\mathcal{F}SF} = \langle M_{\mathcal{F}S}, M_S, M_{SF} \rangle$ и расширенных систем $M_R = \langle M_{\mathcal{F}S}, M_{\mathcal{F}SF}, M_S, M_{SF}, M_F \rangle$ [15].

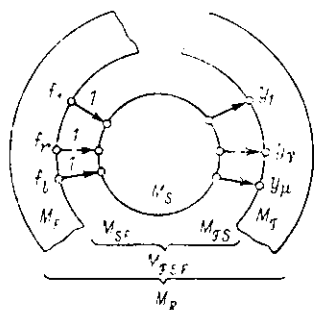


Рис. 1.

Модель системы M_S представляет собой множество переменных $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ и раскрытые в различной степени взаимосвязи и взаимодействия этих переменных. Под взаимосвязью понимаются причинно-следственные отношения между упорядоченными парами (x_i, x_j) переменных или бинарное отношение на множестве X . Отметим, что отношение — математическая категория, лежащая в основе наиболее общих и строгих определений понятия системы [35].

В зависимости от класса моделей элементами множества X могут быть функции непрерывного времени t , т. е. процессы $x_i(t)$ или последовательности $x_i(k)$, а также их изображения по Лапласу $x_i(s)$, Фурье $x_i(j\omega)$ или z -преобразования $x_i(z)$, $i = 1, \dots, N$.

При таком подходе к формализации описания систем управления начальным и определяющим этапом является выделение множества переменных X , существенных с точки зрения исследователя или проектировщика. При этом, если даже нет информации о причинно-следственных связях между переменными, множество X само по себе уже несет некоторую определенность, поэтому, по соображениям удобства, множество X будем называть *моделью системы нулевого ранга неопределенности* и введем обозначение $M_S(0)$. Геометрически модель $M_S(0)$ можно изображать совокупностью точек (вершин) на плоскости, иначе нуль-графом. Отсутствие информации о взаимосвязи переменных в то же время позволяет допустить, что каждая переменная x_i является как причиной, так и следствием любой другой, поэтому модель системы нулевого ранга неопределенности $M_S(0)$ может быть представлена полным неориентированным графом.

Количественно информация, содержащаяся в $M_S(0)$, задается целым числом $N = |X|$, и ввод исходных данных о системе (описание системы) в ЭВМ, как правило, начинается с этого числа.

1.2.1. Моделью системы первого ранга неопределенности $M_S(1)$ будем называть множество переменных X и заданное

на этом множестве бинарное отношение G . Отношение G представляет собой множество упорядоченных пар (i, j) номеров (индексов) переменных, причем первый номер соответствует следствию, а второй — причине. Модель $M_S(1) = \langle X, G \rangle$ задает топологичную систему.

Множество G задается перечислением пар, при этом одновременно упорядочиваются (нумеруются) связи между переменными. Число связей, т. е. мощность множества G , обозначим через Q . Для введения в ЭВМ модели $M_S(1)$ к ранее введенному числу N добавляются целое Q и целочисленный одномерный массив индексов переменных.

Определенная таким образом модель M_S является ориентированным графом с N вершинами и Q дугами [31, 84]. В дальнейшем будем полагать, что этот граф связный, в противном случае следует рассматривать несколько систем.

Целесообразно различать простейшую в топологическом смысле элементарную систему ($N=2, Q=1$) и топологически сложную систему ($N>2, Q>1$). На рис. 2 изображены при-



Рис. 2.

меры диаграмм графов для двух систем: а) с простейшей (элементарной) топологией: $N=2, Q=1, G=\{(2, 1)\}$ и б) со сложной топологией: $N=6, Q=7, G=\{(2, 1), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (1, 6)\}$. При введении информации в ЭВМ перечислением элементов G , очевидно, скобки можно опустить, в результате чего получается массив индексов с числом элементов, равным $2Q$.

Другим способом теоретико-множественного описания ориентированного графа $G = \langle X, \Gamma \rangle$ является задание множества вершин X и отображения Γ , показывающего, как между собой связаны вершины [43, 44]. Для графа, изображенного на рис. 2 б, имеем: $\Gamma(x_1) = \{x_2\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_3\}$, $\Gamma(x_3) = \{x_2, x_4\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_5\}$, $\Gamma(x_5) = \{x_6\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_1\}$.

Отображение $\Gamma(x_i)$ показывает, причиной изменения каких переменных является переменная x_i . Можно также рассматривать обратное отражение $\Gamma^{-1}(x_i)$, которое показывает, следствием каких переменных является x_i .

Модель системы первого ранга неопределенности $M_S(1)$ может быть задана в алгебраической форме матрицами смежности и инциденций [84].

Матрица смежности графа $R = \{r_{ij}\}$ определяется следующим образом:

$r_{ij} = 1$, если в G существует дуга (i, j) ,

$r_{ij} = 0$, если в G нет дуги (i, j) .

Например, матрица смежности графа, изображенного на рис. 2б, имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что поскольку элементы матрицы R равны 0 или 1, то каждую строку (столбец) можно хранить в двичной форме, используя одно (или больше) машинное слово.

Легко видеть, что множество G есть перечисление координат ненулевых клеток матрицы R , отображение $\Gamma(x_i)$ — множество номеров ненулевых клеток в i -м столбце, $\Gamma^{-1}(x_i)$ — в i -й строке R .

Если исходить из задания графа перечислением элементов G , то нумерация дуг возможна $Q!$ способами. Можно также принять порядок нумерации на основе матрицы смежности графа R , присваивая элементам номера по порядку их размещения по строкам или столбцам. В этом случае порядок перечисления дуг зависит только от порядка нумерации переменных, число которых равно $N!$.

Нумерация отношений, т. е. связей между переменными, требуется из-за необходимости их индивидуализации, когда на каждое отношение впоследствии накладывается свое дополнительное ограничение. Эти ограничения, как правило, отражают свойства взаимодействий переменных или преобразований, согласно которым переменные-причины превращаются в составляющие переменных-следствий.

Каждому элементу G , т. е. каждой связи (i, j) между переменными x_i и x_j , присписывается оператор w_{ij} преобразования переменной x_i в $x_j = w\{x_i\}$ — составляющую переменной x_j . Граф, вершинам которого соответствуют переменные (сигналы), а дуги имеют смысл преобразования сигналов, называется сигнальным [53]. При этом иногда используется другая терминология — вместо вершин и дуг говорят об узлах и ветвях.

Обычно задание модели $M_K(1)$ включает в себя также сведения о характере операторов (линейные или нелинейные, непрерывные или дискретные, стационарные или нестационарные, детерминированные или стохастические).

Очевидно, в графах каждой вершине i с полустепенью захода больше единицы следует дополнительно приписать правило, по которому из составляющих x_{ij} образуется i -я переменная $x_i = x_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots)$, $i = 1, \dots, N$.

Если все операторы связей ω_{ij} линейны, а переменные вершин образуются как суммы их составляющих, т. е. в вершинах графа происходит суммирование сигналов $x_i = \sum_j x_{ij}$, то сигнальный граф и модель $M_S(1)$ линейны. Эта информация о линейности, а также другие сведения о характере операторов вводятся в ЭВМ путем выбора соответствующих программ расчета и при дальнейшем снятии неопределенности.

В линейных графах в вершине i по определению суммируются все составляющие x_{ij} переменной x_i , но при необходимости в граф можно ввести добавочные вершины, соответствующие составляющим x_{ij} (рис. 3), и дуги с тождественными операторами 1 (единичными передачами). Тем же приемом, очевидно, можно избежать рассмотрения кратных дуг (рис. 4). Указанные преобразования графов не требуют привлечения дополнительной информации.

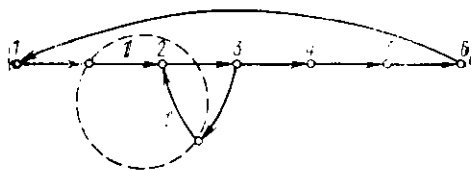


Рис. 3.

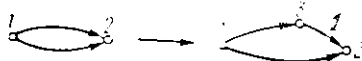


Рис. 4.

1.2.2. Дальнейшее раскрытие неопределенности модели системы возможно при установлении структуры операторов связей между переменными. Под структурой оператора будем понимать такой уровень определенности, когда оператор представлен в параметризованной форме и для полной конкретизации его достаточно задать значения ряда параметров.

Понятие структуры поясним на примере простейшей в смысле топологии системы (рис. 2а) и линейного непрерывного стационарного оператора, связывающего переменную f (причина) с переменной y (следствие). Такой оператор может быть представлен в различной форме, от которой зависит способ задания его структуры.

Если за форму представления оператора принято дифференциальное уравнение n -го порядка

$$D(p)y(t) = G(p)f(t), \quad (1.1)$$

где $D(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$, $G(p) = g_0 + g_1p + \dots + g_mp^m$ — операторные полиномы, $p = d/dt$ — оператор диф-

ференцирования по времени, то структура задается двумя целыми числами m и n — порядками полиномов. Так же кодируется структура и в случае задания оператора связи между изображениями переменных по Лапласу передаточной функции:

$$W(s) = G(s)D(s). \quad (1.2)$$

В этом случае m — порядок полинома числителя, а n — порядок полинома знаменателя дробно-рациональной функции $W(s)$.

Оператор связи может быть представлен в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка или в так называемой нормальной форме (в терминах пространства состояний) [27, 37]:

$$\begin{aligned} dv/dt &= Av + Bf, \\ y &= Cv + df, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $v(t)$ — n -мерный вектор переменных состояния, A — матрица коэффициентов ($n \times n$), B — матрица входа ($n \times 1$), C — матрица выхода ($1 \times n$) и d — скаляр обхода. При этой форме задания структура оператора представляется числом n дифференциальных уравнений, но добавочной информацией о структуре является сведение о том, равняется ли скаляр обхода нулю или нет.

Оператор преобразования переменной i в переменную y может быть задан в форме временных характеристик, например импульсной переходной функцией $w(t)$:

$$y(t) = \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Наконец, связь между изображениями переменных по Фурье представляется в форме частотных характеристик:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) \exp \{j\varphi(\omega)\}. \quad (1.5)$$

Частотные характеристики в общем случае представляются комплексом: вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ или амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$, но в частном случае минимально-фазовых операторов одна из характеристик комплекса полностью определяется через другую.

Задание структуры операторов, представленных в форме временных или частотных характеристик, требует дополнительного уточнения, каким именно образом будут представлены в ЭВМ эти характеристики. Характеристики можно задать приближенно: 1) таблично на конечном интервале с указанием вида интерполяции; 2) коэффициентами разложения в отрезок ряда по какой-либо системе $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ базисных функций;

3) точными аналитическими выражениями. В первом случае структура задается числом точек (строк таблицы), во втором — числом членов разложения. Способ задания структуры, вид интерполяции, базисная система вводятся в ЭВМ выбором соответствующей обрабатывающей программы.

Для задания структуры операторов передач можно также закодировать числами или символами некоторое множество типовых операторов, так называемых типовых динамических звеньев, например безынерционное звено 1-й тип (тип К), интегратор 2-й тип (тип И), апериодическое звено 3-й тип (тип А) и т. д. Тогда структура оператора задается указанием числового или символьного кода динамического звена. Общее число звеньев и их разновидности определяют удобство кодирования, а в случае нелинейных операторов — широту класса.

К операторам также применимо понятие рангов неопределенности. При указании класса имеет место первый ранг неопределенности оператора $\omega(1)$; если, кроме того, указана структура (тип), то оператор имеет второй ранг $\omega(2)$; наконец, при всех известных значениях параметров ранг неопределенности оператора равен трем $\omega(3)$.

Если для всех операторов указаны формы их представления и заданы их структуры, то такую модель назовем *моделью системы второго ранга неопределенности* $M_S(2)$, или *структурной модели*. При задании $M_S(1)$ все операторы связей упорядочены, поэтому задание $M_S(2)$ дополнительно к $M_S(1)$ содержит целочисленный или символьный массив данных, задающих в принятом порядке структуры операторов.

1.2.3. Третий ранг модели системы $M_S(3)$ — полностью определенная система — конкретизирует параметры всех без исключения операторов. Параметрический ранг $M_S(3)$ получается в результате добавления к $M_S(2)$ массивов действительных значений параметров всех операторов: коэффициентов полиномов, элементов матриц, параметров типовых звеньев, значений ординат характеристик и др.

Таким образом, полностью определенная модель системы вводится в ЭВМ числами N переменных, Q связей и тремя типами массивов: 1) целочисленный (индексный) массив G , задающий топологию; 2) целочисленные массивы, задающие структуру; и 3) массивы действительных чисел, задающие параметры.

Пусть для примера рассматривается линейная система, заданная числом переменных $N=6$, числом связей $Q=7$, массивом отношения $G=\{2, 1, 3, 2, 2, 3, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 1, 6\}$, массивами порядков полиномов числителей $GG=\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ и знаменателей $DG=\{0, 1, 0, 1, 1, 1, 0\}$ передаточных функций связей, а также соответствующими массивами коэффициентов полиномов числителей $KGG=\{1, 100, 0.05, 1, 1, 1, -1\}$ и знаменателей $KDG=\{1, 1, 0.2, 1, 1, 0.1, 1, 0.1, 1, 3.5, 1\}$.

Граф этой системы изображен на рис. 2. Очевидно, можно так упорядочить и объединить данные, что модель системы будет полностью определяться числами N , Q и только тремя различными по типу элементов массивами: топологии, структуры и параметров.

1.2.4. Смешанные ранги неопределенности в отличие от «чистых» рангов $M_S(0)$, $M_S(1)$, $M_S(2)$ и $M_S(3)$ или $\omega(1)$, $\omega(2)$ и $\omega(3)$ характеризуют промежуточные по информативности случаи задания моделей систем или операторов. Если, например, известно, что на множестве переменных X определена только часть связей, то такая модель, несущая большую, чем $M_S(0)$, но меньшую, чем $M_S(1)$, информацию о системе, имеет смешанный ранг неопределенности и обозначается $M_S(0, 1)$. Если же для смешанного ранга неопределенности системы $M_S(0, 1)$ дополнительно задать информацию о структурах всех операторов известных дуг, получается модель $M_S(0, 2)$, а если, кроме того, все эти операторы имеют третий ранг, получится модель системы $M_S(0, 3)$. В том случае, когда в модели $M_S(0, 1)$ заданы структуры только части операторов известных дуг, то имеет место модель $M_S(0, 1, 2)$; если же заданы некоторые или все параметры части из этих операторов, получится модель смешанного ранга неопределенности $M_S(0, 1, 2, 3)$ и т. д. В табл. 1.1 сведены все возможные варианты смешан-

Таблица 1.1

	M_S							
$M_S(r)$	(0)				(1)		(2)	(3)
$M_S(r, p)$	(0, 1)		(0, 2)	(0, 3)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	—
$M_S(r, p, q)$	(0, 1, 2)	(0, 1, 3)	(0, 2, 3)	—	(1, 2, 3)	—	—	—
	(0, 1, 2, 3)	—	—	—	—	—	—	—

ных рангов неопределенности: $M_S(r)$, $r=0, 1, 2, 3$; $M_S(r, p)$, $p=1, 2, 3$; $M_S(r, p, q)$, $q=2, 3$ и $M_S(0, 1, 2, 3)$, причем $q > p > r$.

По моделям смешанного ранга, отбросив часть информации, всегда можно получить модель «чистого» ранга $M_S(r)$ на всем множестве переменных X . При этом, очевидно, ранг r модели «чистого» ранга $M_S(r)$ определяется по наименее определенной части модели и равен первой цифре в круглых скобках в обозначениях смешанных рангов: $M_S(r, p)$, $M_S(r, p, q)$, $r=0, 1, 2$;

$p=1, 2, 3$; $q=2, 3$; $q>p>r$. С другой стороны, на основе модели смешанного ранга можно выделить модели частей системы, содержащие лишь некоторые подмножества переменных или дуг, так, что эти части будут иметь «чистый» ранг более высокий, чем вся модель системы. Например, если задана модель $M_S(1, 3)$, то, удалив дуги с неизвестными операторами, выделяем часть системы, являющуюся полностью определенной.

Не полностью определенные модели систем, по существу, представляют собой множества более определенных моделей. Действительно, например, модели систем нулевого ранга $M_S(0)$ и модели смешанных рангов $M_S(0, p)$, $p=1, 2, 3$, $M_S(0, p, q)$, $q=2, 3$, $q>p$ или $M_S(0, 1, 2, 3)$ характеризуются неопределенностью топологии, т. е. в этом случае на множестве переменных X задано множество графов $\{G_i\}$. Модели систем первого ранга $M_S(1)$ и модели смешанного ранга $M_S(1, p)$, $p=2, 3$ и $M_S(1, 2, 3)$, могут рассматриваться как множества моделей с одинаковой топологией, различающихся структурами операторов передач дуг, причем всем дугам $\{w_m\}$ или их части поставлены в соответствие множества $\{W'_m\}$ структур операторов. Соответственно модели систем второго ранга $M_S(2)$ или модели смешанного ранга $M_S(2, 3)$ имеют одну и ту же структуру операторов всех дуг w_m , но различаются значениями параметров $\{q'_{m,k}\}$.

1.3. Модели среды и связей системы со средой

Модель внешней среды на входе системы управления $M_F=\{f_r\}$, $r=1, \dots, l$, образуется на множестве моделей независимых переменных (воздействий) внешней среды и представляет собой нуль-граф, т. е. множество вершин, на которых определены воздействия.

Таким образом, топология модели среды $M_F(1)$ всегда задана (нуль-граф).

Для конкретизации структуры модели среды, т. е. задания $M_F(2)$, следует уточнить множество типов воздействий и закодировать его элементы, например: δ -функция — 1-й тип; $1(t)$ — 2-й тип; $t \cdot 1(t)$ — 3-й тип; гармонический сигнал — 4-й тип и т. д. Тогда указание типов всех воздействий будет означать задание $M_F(2)$. После введения в ЭВМ параметров воздействий конкретных типов получается полностью определенная модель среды $M_F(3)$.

Задание модели среды возможно также системой, преобразующей некоторую «переменную-первопричину» f_0 множеством операторов F_r : $f_r = F_r\{f_0\}$, $r=1, \dots, l$.

Тогда структура модели среды задается структурой операторов F_r (рис. 5). При этом задание модели среды принципиально не отличается от задания системы; среда, как прави-

ло, моделируется тем же, что и система, классом операторов. В качестве f_0 удобно выбрать δ -функцию (в случае стохастической модели среды — белый шум единичной интенсивности), так как при этом структура операторов F_r получается простейшей. Действие «первопричин» f_0 в детерминированном случае легко учитывается в виде эквивалентных ненулевых начальных условий, поэтому переменные f_r могут также рассматриваться как свободные движения автономных систем-генераторов F_r , моделирующих среду на входе системы M_F .

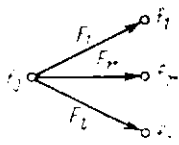


Рис. 5.

Модели воздействий f_r внешней среды на входе системы управления могут быть полностью определены при наличии априорной информации, полученной в результате исследования внешней среды, а также частично или полностью не определены. В последнем случае модель внешней среды на входе системы управления должна быть частично или полностью доопределена путем выбора типовых моделей воздействий M_F , наиболее полно отвечающих условиям работы и целям исследования системы управления.

Модель связей системы со средой M_{SF} определяется как множество связей между переменными X (следствия) и F (причины). Модель M_{SF} — отображение $F \rightarrow X$ геометрически изображается как двудольный граф. Структура связей, т. е. структура операторов, соответствующих элементам (x_i, f_r) бинарного отношения $M_{SF} \subseteq X \times F$, принимается простейшей — это масштабирующие операторы с численно равными единице параметрами связей системы со средой β_{ir} [20]. В общем случае связи системы со средой M_{SF} могут содержать дуги с операторами общего вида.

Для примера на рис. 6 представлен граф связей $M_{SF}(1)$ системы M_S (рис. 2 б) со средой: $M_{SF} = \{(1, 1), (2, 1), (5, 2)\}$.

Модель M_{SF} может задаваться и матрицей; для того же примера (рис. 6) матрица M_{SF} имеет вид

$$M_{SF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модели M_F среды и M_{SF} — связей системы со средой — включают в себя и перечисленные подмножества $G_r \subseteq G$ тех дуг графа, операторы которых изменяются под воздействием среды. Эти изменения могут иметь параметрический, структурный или даже топологический характер.

В ряде случаев из X выделяется подмножество выходных переменных $Y = \{y_1, \dots, y_p\} \subseteq X$, представляющих особый интерес. В более общем случае модель $M_{\mathcal{T}}$ внешней среды на выходе системы управления образуется на множестве $\mathcal{F}$ зависимых переменных и представляет собой нуль-граф, т. е. множе-

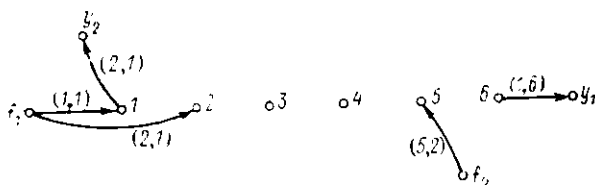


Рис. 6.

ство вершин, на которых определены выходы системы y_u , $u=1, \dots, p$. При этом модель $M_{\mathcal{T}_S}$ связей системы со средой на выходе устанавливает связи между множеством переменных внешней среды и переменными системы X и представляет собой простой двудольный граф, дугам которого могут соответствовать операторы общего вида. На рис. 6 представлен граф связей $M_{\mathcal{T}_S} = \{(2, 1), (1, 6)\}$ среды на выходе с системой M_S (рис. 2, б).

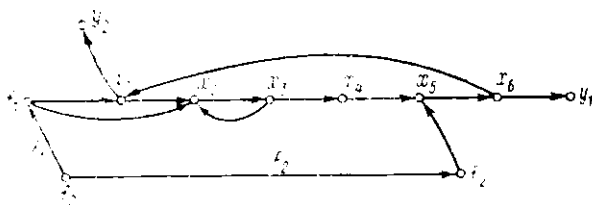


Рис. 7.

В результате объединения моделей системы, среды и связей между ними получается модель расширенной системы M_R . Граф модели $M_R(1)$ для рассмотренного выше примера (см. рис. 2, б) приведен на рис. 7.

1.4. Формы представления моделей систем управления

Выше модели систем управления определялись на множестве существенных для выявления особенностей организации систем переменных. При таком подходе причинно-следственные модели систем представляются в виде сигнальных графов, дугам которых присваиваются операторы преобразования. Одновременно с этим возможны и широко используются иные экви-

валентные в смысле определенности формы представления моделей сложных систем управления: структурные схемы, системы дифференциальных или разностных уравнений различных (в том числе нулевых) порядков и системы уравнений, приведенных к обобщенной нормальной форме.

Структурная схема системы управления определяется как бинарное отношение S на множестве звеньев W : $M_S = \langle W, C \rangle$.

Под динамическим звеном ω_i понимается элементарная часть системы (на данном уровне детализации исследуемого явления), характеризующая единственной переменной выхода x_i и входами $x_1, x_2, \dots$, число которых не ограничивается. Звено отражает динамический характер преобразования входов, которое формализуется в виде некоторого оператора $x_i = \omega_i \{x_1, x_2, \dots\}$, в общем случае нелинейного (рис. 8а).

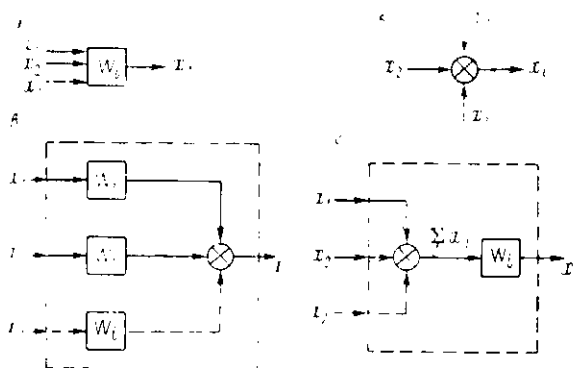


Рис. 8.

В частном случае тождественного оператора $\omega_i \{x\} = x$ ω_i выступает как простое суммирующее звено (сумматор):

$x_i = \sum_j x_j$ и, как правило, на схемах изображается иначе, чем звенья общего вида (рис. 8б).

Если сумма входов $x_1, x_2, \dots$ преобразуется в выход линейным оператором $x_i = \omega_i \{ \sum_j x_j \} = \sum_j \omega_i \{ x_j \}$, такое звено называется линейным и всегда может быть представлено так, как показано на рис. 8в или 8г.

Пусть выделено конечное множество W звеньев, задано их число $Q = |W|$ и, кроме того, известен тип переменных на выходах звеньев (функции непрерывного времени $x_i(t)$ или последовательности $x_i(k)$). По аналогии с вышеизложенным эту минимальную информацию о системе можно назвать *моделью нулевого ринга неопределенности* $M_S(0)$.

Модель системы первого ранга неопределенности $M_S(1)$, или топологию системы, определим как множество звеньев W и заданное на нем бинарное отношение $C = \{(i, j)\} \subseteq W \times W$. Пусть на этом ранге, кроме того, известен класс оператора каждого звена ω_i (линейность, непрерывность, стационарность, детерминированность).

Отношение C задает попарные причинно-следственные связи между звеньями, а его элементами являются не обязательно различные переменные системы. Элементы отношения C — это упорядоченные пары чисел (i, j) : первое из них есть индекс или номер звена, выходная переменная которого является следствием, а второе — индекс или номер звена, выход которого подается на вход первого. Если выход звена i связан со входами нескольких звеньев $j=1, 2, \dots$, то различным элементам отношения $(1, i), (2, i), \dots$ соответствует одна и та же переменная x_i .

Модель $M_S(1) = \langle W, C \rangle$ является ориентированным графом и может иллюстрироваться диаграммой — геометрическим изображением. Вершинам графа приписываются операторы звеньев, а дуги соответствуют не обязательно различным переменным или причинно-следственным связям между звеньями. В отличие от сигнального графа (G -графа) вершины-звенья будем изображать прямоугольниками. На рис. 9 изображена

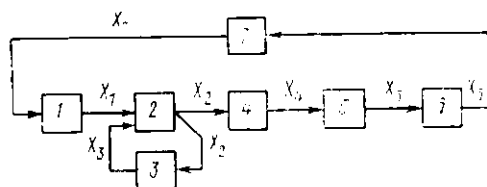


Рис. 9.

структурная схема или C -граф, содержащий ту же информацию о топологии системы, что и сигнальный граф из примера на рис. 2б. Множество W звеньев содержит 7 элементов, а множество $C = \{(2, 1) (2, 3) (3, 2) (4, 2) (5, 4) (6, 5) (7, 6) (1, 7)\}$ содержит 8 элементов — связей между звеньями. Двум элементам $(3, 2)$ и $(4, 2)$ с одинаковыми вторыми индексами причинно соответствует одна и та же переменная — выход второго звена.

В C -графе переменные, соответствующие суммам, не присутствуют явно. При необходимости их «раскрытия» в C -граф можно ввести суммирующие звенья, которые, как говорилось выше, принято обозначать иначе, чем звенья с произвольными операторами. Если в прямоугольниках записывать не только номер звена, а обозначение оператора ω_i , то в результате получается «классическая» структурная схема (рис. 10).

Отношение C на множестве W можно задавать не только перечислением пар (i, j) номеров (индексов) звеньев, но также отображениями Γ, Γ^{-1} , матрицами смежности или инцидентий. Для примера системы, изображенной на рис. 9, матрица смежности имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Структуры операторов звеньев (а следовательно, модели системы $M_S(2)$), а также параметры, т. е. полностью определенная модель системы $M_S(3)$, задаются таким же, как в сигнальных графах, образом.

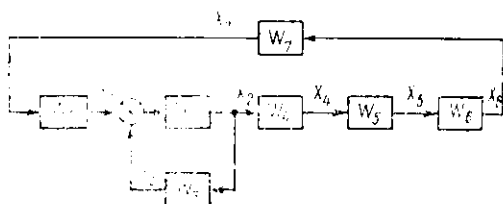


Рис. 10.

Модель среды может представляться как множество F звеньев-генераторов с выходами, соответствующими воздействиям и являющимися свободными движениями генераторов при ненулевых начальных условиях. В структурных схемах генераторы воздействий не указываются; оставляют лишь их выходы — линии со стрелками, на которых подписывают тип воздействия.

Модели связей системы со средой M_{SF} и M_{TS} вводятся аналогично случаю сигнальных графов.

Структурная схема (C -граф) может быть получена из сигнального графа (G -графа), если каждой дуге графа поставить в соответствие звено в качестве вершины и далее соединить эти звенья таким образом, что два звена i и j смежны тогда и только тогда, когда дуги i и j порождают маршрут в G -графе. Ясно, что C -граф или структурная схема при этом представляет собой так называемый реберный орграф данного орграфа G [84].

Заметим, что для многих практически важных случаев задание топологии системы сигнальным графом более экономично, чем структурной схемой.

Поскольку динамические модели строятся для исследования поведения системы, т. е. для исследования процессов, то первичными понятиями являются переменные. Понятие звена — вторичное, хотя определение системы как взаимосвязи звеньев иногда удобнее при моделировании, когда каждое звено соответствует модели конкретного функционального элемента.

Задание топологически сложной модели системами уравнений. Топологически простейшая система задается единственным дифференциальным (или разностным) уравнением (1.1) или двумя операторными полиномами, связывающими две переменные. В топологически сложных системах таких уравнений несколько:

$$\sum_{j=1}^N D_{ij}(p) x_j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.7)$$

Операторные полиномы $D_{ij}(p)$, $p \equiv d/dt$ могут быть любых, в том числе нулевых порядков. Система уравнений (1.7) может быть написана в матричной форме, если ввести вектор $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ переменных системы

$$\mathbf{D}(p) x(t) = 0, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{D}(p)$ — квадратная полиномиальная матрица ($N \times N$).

Уравнения (1.7) и (1.8) не имеют причинно-следственной формы [4]. Это, вообще говоря, свидетельствует о том, что они представляют меньшую определенность о топологии системы, чем граф или структурная схема. Действительно, уравнения (1.7), (1.8) указывают лишь на то, какие подмножества переменных непосредственно связаны между собой, но не уточняют, какая из них в каждом из уравнений является следствием остальных. Можно сказать, что задание системы в форме (1.7) или (1.8) соответствует неориентированному графу или даже гиперграфу.

Если модель системы представлена в форме (1.7) или (1.8), в общем случае несколькими способами можно перейти к причинно-следственной форме записи. Именно в этом разнообразии и заключается дополнительная неопределенность топологии системы, заданной уравнениями (1.7) или (1.8).

Если перенумеровать переменные и уравнения таким образом, что элементы $D_{ii}(p)$ главной диагонали матрицы $\mathbf{D}(p)$ все отличны от нуля, то уравнение (1.7) можно записать в причинно-следственной форме [4]:

$$D_{ii}(p) x_i(t) = - \sum_{j=1}^N D_{ij}(p) x_j(t), \quad (1.9)$$

$$x_i(t) = -D_{ii}^{-1}(p) \sum_{j=1}^N D_{ij}(p) x_j(t), \quad (1.10)$$

по которой можно построить сигнальный граф Мэзона. Элементы главной диагонали $D_{ii}(p)$ называются собственными операторами переменных $x_i(t)$, которые согласно i -му уравнению или i -й строке матрицы $D(p)$ выступают следствием остальных переменных, входящих в уравнение.

Следует отметить, что переупорядочение уравнений (переменных) таким образом, чтобы все $D_{ii}(p) \neq 0$, в случае больших N может оказаться сложной задачей [4]. Ясно также, что если порядок переменных выбран из формальных соображений $D_{ii}(p) \neq 0$, $i=1, \dots, N$, то построенный по (1.10) граф Мэзона не отражает реальную топологию системы управления. Поэтому в случае задания динамических систем уравнениями (1.7), не отражающими полностью взаимосвязи переменных, можно перейти к графу Кутса [95] или к наиболее удобной для анализа и в вычислительном отношении форме топологического представления — обобщенному сигнальному графу [4].

Таким образом, задание модели системы уравнениями различных порядков эквивалентно графу или структурной схеме только в случае причинно-следственной формы записи (1.10), отражающей реальные связи переменных или звеньев системы.

Для примера по структурной схеме, изображенной на рис. 9, запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} D_{11}(p) x_1(t) &= G_{17}(p) x_7(t), \\ D_{22}(p) x_2(t) &= G_{21}(p) x_1(t) + G_{23}(p) x_3(t), \\ D_{33}(p) x_3(t) &= G_{32}(p) x_2(t), \\ D_{44}(p) x_4(t) &= G_{42}(p) x_2(t), \\ D_{55}(p) x_5(t) &= G_{54}(p) x_4(t), \\ D_{66}(p) x_6(t) &= G_{65}(p) x_5(t), \\ D_{77}(p) x_7(t) &= G_{76}(p) x_6(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Очевидно, при записи уравнений по графу или структурной схеме не возникает проблем с переупорядочиванием — уравнения имеют причинно-следственную форму. Матрица системы уравнений (1.11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{17} \\ -G_{21} & D_{22} & -G_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{42} & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{54} & D_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{65} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{76} & D_{77} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

В том случае, когда нет информации о порядках полиномов, система уравнений (1.10) и матрица $\mathbf{D}(p)$ задают только топологию системы, т. е. модель первого ранга неопределенности $M_S(1)$, причем весьма избыточным образом. Действительно, топология системы или информации о причинно-следственных связях задается только указанием номеров строк и столбцов матрицы $\mathbf{D}(p)$, где размещаются диагональные ненулевые элементы G_{ij} , причем нет необходимости многократно писать символы D , G , p и скобки. Легко видеть, что матрица смежностей (1.6) структурной схемы (см. рис. 9) и матрица (1.12), указывающая координаты ненулевых диагональных элементов, представляют одну и ту же информацию о топологии.

В случае задания системы уравнениями в причинно-следственной (1.9) или в матричной форме (1.8) с порядком переменных, соответствующим реальным связям переменных или звеньев, структура системы, т. е. модель второго ранга неопределенности $M_S(2)$, задается порядками диагональных D_{ii} (собственные операторы) и диагональных (операторы связей) полиномов.

Конкретизация коэффициентов полиномов означает полную определенность модели, заданной системой уравнений, т. е. модель третьего ранга $M_S(3)$.

Введение в ЭВМ информации о моделях систем, заданных в виде (1.9), (1.10), начинается с числа N уравнений и местоположений (номер строки, номер столбца) отличных от нуля диагональных элементов (топологии) матрицы $\mathbf{D}(p)$, что совпадает с топологией соответствующего C -графа.

Для неавтономной системы или системы, включающей и модели связей системы со средой, система уравнений в векторно-матричной форме принимает вид

$$\mathbf{D}(p) \mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(p) \mathbf{f}(t). \quad (1.13)$$

В уравнении (1.13) полиномиальная матрица $\mathbf{G}(p)$ имеет N строк (по числу переменных системы) и l столбцов (по числу воздействий). Здесь не раскрыты воздействия $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_l)^T$.

Модель расширенной системы M_R , получаемой в результате раскрытия $\mathbf{f}$, может быть представлена как некоторая автономная система

$$\mathbf{D}_R(p) \mathbf{x}_R(t) = 0, \quad \mathbf{x}_R(0), \quad (1.14)$$

с соответствующим образом сформированными операторными полиномами и ненулевыми начальными условиями.

Задание топологически сложных систем уравнениями в обобщенной нормальной форме. Если каждое из уравнений (1.9), имеющих ненулевой порядок n_i полинома $D_{ii}(p)$ и порядки m_{ij} полиномов D_{ij} , удовлетворяющих условию $m_{ij} \leq n_{ii}$, представить в нормальной форме (1.3), то модель сложной системы

может быть задана в обобщенной нормальной форме двумя типами уравнений: системой из n дифференциальных уравнений

$$dv/dt = Av + Hx + Bf \quad (1.15)$$

и системой из N алгебраических уравнений

$$0 = Rv + Gx + Lf. \quad (1.16)$$

В этих уравнениях через v обозначен вектор переменных состояния размерности n , x — вектор «физических» переменных размерности N , f — вектор внешних воздействий размерности l ; A и G — матрицы коэффициентов размерностей $(n \times n)$ и $(N \times N)$, H и R — матрицы $(n \times N)$ и $(N \times n)$, B и L — матрицы $(n \times l)$ и $(N \times l)$.

В уравнениях (1.15) и (1.16) матрицы A , H , R и G относятся к модели системы, а B и L — модели связей системы со средой на входе M_{SF} .

Некоторые из переменных x могут быть приняты в качестве выходов системы y_γ , $\gamma = 1, \dots, m$, что является частным случаем модели связей системы со средой на выходе $M_{\mathcal{E}S}$.

В общем случае вектор $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$ выхода системы может формироваться как комбинация нескольких или всех переменных x , переменных состояния v , а также входов f (см., например, [73]):

$$dv/dt = Av + Hx + Bf, \quad (1.15a)$$

$$0 = Rv + Gx + Lf, \quad (1.16a)$$

$$y = C_y v + C_x x + Df. \quad (1.16b)$$

В уравнениях (1.15)–(1.16b) матрицы A , H , R и G относятся к модели системы M_S , B и L — модели связей системы со средой на входе M_{SF} , а C_y и C_x — модели $M_{\mathcal{E}S}$.

Если имеется определенность относительно воздействий f на систему, то их можно представить в виде систем-генераторов с ненулевыми начальными условиями. Преобразовав далее уравнения генераторов воздействий к нормальной форме, записав, с учетом (1.15) и (1.16) можно записать уравнения автономной расширенной системы M_R с ненулевыми начальными условиями в обобщенной нормальной форме. Модель M_R в обобщенной нормальной форме можно получить также из (1.14).

1.5. Частные модели и характеристики систем управления

Исследование систем управления на основе их моделей M_Φ , $\Phi = S, \mathcal{F}SF, R$, т. е. выявление свойств U_φ^u , $u=1, 2, \dots$, самой системы $\Phi=S$, системы со связями со средой $\Phi=\mathcal{F}SF$ и расширенной системы $\Phi=R$ осуществляется с помощью множества частных моделей $\{M_{\varphi U}^u\}$ или характеристик систем управления. Частные модели $M_{\varphi U}^u$, $u=1, 2, \dots$; $\varphi=S, \mathcal{F}SF, R$, характеризуют системы только с выбранной исследователем стороны, но наиболее ярко и вычлочно. Многие характеристики (временные, частотные) допускают графические представления, которые являются геометрическими образами соответствующих свойств систем управления. Конкретность и выразительность частных моделей или характеристик приобретаются за счет меньшей по сравнению с исходными моделями информативности — в общем случае отдельная характеристика $M_{\varphi U}^u$ не позволяет восстановить структуру и топологию моделей M_Φ , $\Phi=S, \mathcal{F}SF, R$.

На характеристики $M_{\varphi U}^u$, получаемые по моделям $M_q(r)$ различных рангов неопределенности $r=1, 2, 3$, переносятся понятия рангов, которые в этом случае могут обуславливать относительную важность свойств $U_\varphi^u(r)$, определяемых на основе этих характеристик [15].

При выявлении общесистемных свойств U_s^u систем управления, заключающихся в выделении сильно связанных компонент графа, роль характеристики M_{sU}^u (1) выполняют множество контуров и отношения их соприкосновения; эти свойства являются важнейшими, определяя наличие контурной части и реализацию принципа регулирования по отклонению, придающего системе универсальность в смысле уменьшения чувствительности как к сигнальным, так и к операторным воздействиям среды. По частным моделям M_{sU}^u (2) в виде символьных выражений для характеристических полиномов можно установить свойство структурной неустойчивости системы, когда ни при каких значениях параметров нельзя добиться устойчивости. Характеристики системы третьего ранга M_{sU}^u (3) — характеристический полином $D(s)$, матрица коэффициентов нормальной формы уравнений A , определитель $\det D(p)$ матрицы системы уравнений (1.8) позволяют выявить фундаментальное свойство устойчивости. Как будет показано ниже, удобными частными моделями, однозначно характеризующими топологически сложные системы управления, представленные графами, являются определители Λ или передаточные функции эквивалентных разомкнутых систем $W_0=\Lambda-1$, получаемые по множеству контуров графа. Определитель графа Λ особенно эффективен в виде

частотных характеристик, однако на его основе могут быть получены и временные характеристики. Функции чувствительности определителя Δ различных порядков также являются характеристиками системы, позволяющими выявить влияние вариаций операторов дуг на свойства системы.

Характеристики $\{M_{\gamma, r}^(r)\}$ систем со связями со средой $M_{\gamma, rSF}(r)$* — операторы передач $\Phi_{\gamma, r}$, упорядочиваемые в матрицы передач

$$\Phi = \{\Phi_{\gamma, r}\}, \quad \gamma = 1, \dots, p; \quad r = 1, \dots, l, \quad (1.17)$$

являются основой для получения необходимых выводов о свойствах $U_{\gamma, rSF}^u$ системы по преобразованию входных воздействий f_r , $r = 1, \dots, l$, в выходы y_γ , $\gamma = 1, \dots, p$.

В случае линейных систем операторы (1.17) имеют вид передаточных функций $\Phi_{\gamma, r}(s)$ для непрерывных и $\Phi_{\gamma, r}(z)$ для дискретных систем. Эти частные модели, не содержащие информацию о топологии модели $M_{\gamma, rSF}$, могут быть представлены в виде частотных ($s = j\omega$, $0 \leq \omega < \infty$; $z = \exp\{j\omega T_s\}$, $0 \leq \omega T_s \leq \pi$) или временных ($\varphi_{\gamma, r}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi_{\gamma, r}(s)\}$, $\varphi_{\gamma, r}^*(i) = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi_{\gamma, r}(z)\}$) характеристик.

Операторы передач $\Phi_{\gamma, r}$, $r = 1, \dots, l$, для линейных систем также могут задаваться совокупностью дифференциальных

$$D_\gamma(p) y_\gamma(t) = \sum_{r=1}^l G_{\gamma, r}(p) \mathfrak{F}_r f_r(t) \quad (1.18)$$

или разностных

$$D_\gamma^*(z) y_\gamma(i) = \sum_{r=1}^l G_{\gamma, r}^*(z) \mathfrak{F}_r f_r(i), \quad \gamma = 1, \dots, p, \quad (1.19)$$

уравнений, которые здесь записаны в сокращенной форме с использованием операторов дифференцирования $p = d/dt$ или сдвига на такт $\mathfrak{F}\{f(i)\} = f(i+1)$. В уравнениях (1.18) и (1.19) внешнее воздействие на систему $f^* = \beta_r f_r$ представлено в виде нераскрытого нормированного воздействия f_r , приложенного к r -му каналу воздействия с коэффициентом передачи β_r . Специальные параметры каналов передачи воздействий β_r , $r = 1, \dots, l$, вводятся в модели связей систем со средой на входе M_{SF} для единообразного, на основе параметрических функций чувствительности, исследования влияния на процессы управления сигнального и параметрического воздействия среды [20].

Заметим, что совокупности (1.18) и (1.19) не являются системами уравнений, так как каждое из уравнений полностью характеризует исследуемую непрерывную или дискретную систему со стороны выбранного выхода y_r .

В качестве характеристик систем $M_{\mathcal{F}_{SF}}$ часто привлекаются неизбыточные формы записи в терминах пространства состояний

$$\begin{aligned} dv/dt &= Av(t) + Bf(t), \\ y(t) &= Cv(t) + Df(t), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где v — вектор переменных состояния, A, B, C, D — матрицы коэффициентов, входа, выхода и обхода соответствующих размерностей. Переменные состояния $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ могут быть выбраны произвольно, с точностью до невырожденного преобразования, поэтому они в общем случае не имеют физического смысла. Аналогично записывается нормальная форма уравнений для дискретных систем:

$$\begin{aligned} v(i+1) &= A^*v(i) + B^*f(i), \\ y &= C^*v + D^*f. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При матричной форме записи моделей систем со связями с окружающей средой (1.20) и (1.21) за характеристики могут быть приняты четверки матриц $\langle A, B, C, D \rangle$ или $\langle A^*, B^*, C^*, D^* \rangle$.

Получение частных моделей систем $M_{\mathcal{F}_{SF}}$ связано с исключением внутренних переменных, т. е. с переходом к графам с меньшим числом вершин, структурным схемам с меньшим числом звеньев, к меньшему числу уравнений, описывающих систему. Преобразования по исключению переменных часто называют эквивалентными, имея в виду сохранение передачи Φ_{yr} , хотя в смысле топологии эквивалентности нет: чем больше переменных (дуг, звеньев, уравнений) исключено, тем меньше определенность модели.

Когда исключаются все внутренние переменные, получаются частные модели системы — модели в терминах «вход—выход» с полностью свернутой топологией, представляющие собой двудольный граф, отображающий множество входных воздействий F на множество выходных переменных Y или в общем случае $\mathcal{F}$ (рис. 11). Этот граф для систем управления получается полным двудольным, так как модели систем управления представляют собой сильно связанные графы, а следовательно, имеют полную достижимость всех вершин (см. главу 3).

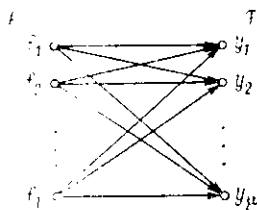


Рис. 11.

Модель в терминах «вход—выход», по существу, представляет собой множество не связанных друг с другом систем. Каждая из них с определенной стороны характеризует свойства всей системы, поэтому эта форма удобна для анализа. Однако для систем, содержащих контуры или общие части для ряда передач $\{\Phi_{yr}\}$, такое задание оказывается избыточным, так как свойства общей части задаются многократно. Кроме того, задание системы ее матрицей передач (1.17) малoinформативно в том смысле, что неизвестен механизм преобразования входов в выходы. Это сказывается при синтезе — если какая-то передача не устраняет проектировщика, то неизвестно, какое звено наиболее сильно влияет на эту передачу, как целенаправленно изменить передачу и т. д. Имея модель системы с раскрытой топологией, т. е. более информативную модель, всегда можно получить любую передачу Φ_{yr} или передаточную матрицу (1.17), но обратный переход требует привлечения дополнительной информации.

Характеристики $M_{Rl}^u(r)$ расширенной системы управления $M_R(r)$ должны составить основу для изучения свойств U_R^u основных процессов управления, вызванных воздействиями среды f_r , $r=1, \dots, l$, и дополнительных процессов, обусловленных вариациями параметров, структур операторов или топологии системы.

В качестве характеристик основных процессов в линейных системах могут быть приняты произведения передаточных функций на изображения воздействий $Y_{yr}(s) = \Phi_{yr}(s) F_r(s)$ — для непрерывных или $Y_{yr}(z) = \Phi_{yr}^*(z) F_r(z)$ — для дискретных систем. Как будет показано ниже, эти характеристики модели расширенной системы совпадают с функциями чувствительности выходов y_i к параметрам каналов воздействий β_r (к параметрам связей системы со средой): $T_{yr}^{yi} = dy_i/d\beta_r$. Функции комплексного аргумента $Y_{yr}(s)$ или $Y_{yr}(z)$ являются изображениями составляющих основных процессов $y_{yr}(t)$ или последовательностей $y_{yr}(i)$ на выходе непрерывных или дискретных систем, вызванных сигнальными воздействиями среды f_r .

Полный анализ неавтономной системы возможен только с учетом конкретной среды, которая моделируется путем описаний как сигнальных f , так и операторных воздействий. Для систем, допускающих квазистационарное исследование, во многих случаях операторные возмущения среды могут учитываться в виде переменных параметров q , значения которых зависят от интервалов времени. При этом коэффициенты операторных полиномов в уравнениях (1.18) и (1.19), коэффициенты полиномов передаточных функций, а также элементы матриц в уравнениях (1.20) и (1.21) зависят от параметров q .

Функции чувствительности выходов расширенной системы M_R к параметрам q также являются характеристиками расши-

решных систем, позволяя приближенно исследовать дополнительные движения. В более общем случае для этих же целей могут быть использованы и функции чувствительности к операторам передач отдельных дуг системы.

Для получения всех типов характеристик или частных моделей $M_{\pm U}^u(r)$, $\varphi = S, \mathcal{F} SF, R$; $r = 1, 2, 3$; $u = 1, 2, \dots$ требуется развитое алгоритмическое и программное обеспечение. Некоторые из этих алгоритмов приведены в главах 2, 4, 5, 7.

Ряд характеристик, получаемых на основе не полностью определенных моделей, имеет вид выражений, содержащих символы параметров или индексы (номера) операторов (дуг). Важным свойством этих характеристик является то, что повышение уровня определенности исходных моделей за счет конкретизации значений параметров или структур операторов может быть непосредственно учтено путем введения информации в ранее подготовленные выражения характеристик, повышая их определенность. Следовательно, получение определенных характеристик (частных моделей) может быть осуществлено в несколько этапов, используя на каждом этапе только часть информации о моделях систем, что представляет один из примеров следования принципу последовательного раскрытия неопределенности при исследовании систем. Например, некоторые характеристики (определятель графа, передача по выбранному каналу и т. п.), получаемые по моделям $M_{\pm}(1)$, имеют вид индексных выражений (массивов), содержащих номера дуг, звеньев, контуров и т. д. Если определенность модели повышена до $M_{\pm}(2)$, т. е. становятся известными структуры операторов всех дуг, то в соответствующие индексные выражения $M_{\pm U}^u(1)$ подставляются выражения операторов и получаются характеристики $M_{\pm U}^u(2)$ без нового обращения к информации о топологии системы.

Характеристики моделей $M_{\pm}(2)$ имеют вид символьных выражений, а все характеристики $M_{\pm}(3)$ — вполне определенные числа, числовые массивы, кривые.

Для смешанных рангов моделей выражения для характеристик содержат различные типы данных, например $M_{\pm U}(1, 2)$ — индексно-символьные, $M_{\pm U}(2, 3)$ — символьно-численные, $M_{\pm U}(1, 2, 3)$ — индексно-символьно-численные, $M_{\pm U}(1, 3)$ — индексно-численные выражения.

Вообще говоря, алгоритмы получения частных моделей, оперирующие информацией, закодированной в формах представления моделей смешанных рангов, получают сложное численное алгоритмов.

1.6. Основные задачи теории управления

Принято различать три основные группы задач теории управления и регулирования: анализ, синтез и построение моделей систем управления.

Анализ систем управления состоит в детализированном изучении их общесистемных свойств, а также условий выполнения ими своих функций, достижения заданных целей управления и удовлетворения требований, предъявленных к качеству основных и дополнительных процессов.

Как сказано в предыдущих параграфах, свойства систем $\{U_\varphi^u\}$ выявляются на основе множества разнообразных характеристик $\{M_{\varphi U}^u\}$, выбираемых исследователем в соответствии с частными задачами: анализа и конкретными методиками их решения.

Всесторонний и полный анализ осуществляется как последовательное раскрытие свойств системы путем поэтапного решения подзадач анализа с соблюдением принципа неизбыточности. При этом каждый последующий этап анализа оперирует моделью более высокого уровня определенности, а его результат представляет собой очередное приращение информации о свойствах системы. Важной особенностью последовательного анализа является привлечение только необходимой информации на каждом из этапов анализа. Решение конкретной задачи на моделях, содержащих большую, чем это необходимо, определенность, усложняет методику, а в ряде случаев может привести к некорректным результатам.

Декомпозиция анализа прежде всего выражается в последовательном изучении свойств U_φ^u самой системы ($\varphi = S^1$, системы со связями с внешней средой ($\varphi = \mathcal{F}SF$) и расширенной системы ($\varphi = R$) по частным моделям M_{SU}^u , $M_{\mathcal{F}SFU}^u$ и M_{RU}^u . Кроме того, различные ранги неопределенности моделей систем управления дают возможность выделить три этапа анализа: 1 — топологический анализ по частным моделям $M_{\varphi U}^u(1)$, 2 — структурный анализ по $M_{\varphi U}^u(2)$ и 3 — численный анализ по полностью определенным моделям на основе характеристик $M_{\varphi U}^u(3)$.

В том случае, когда анализ достаточно простых систем ведется проектировщиком, имеющим значительный опыт аналогичных разработок, можно обойтись без строгой формализации процедуры анализа. Если же разрабатываются методики анализа с широким привлечением ЭВМ, обеспечивающим решение части задач без непосредственного участия человека, необходимы строгая алгоритмизация и упорядочение совокупности действий по выявлению свойств систем управления.

Каждый этап анализа моделей $M_p(r)$, $r = S, \mathcal{F}SF, R$; $r = 1, 2, 3$, в общем случае складывается из следующих действий (рис. 12): получение характеристик (частных моделей)

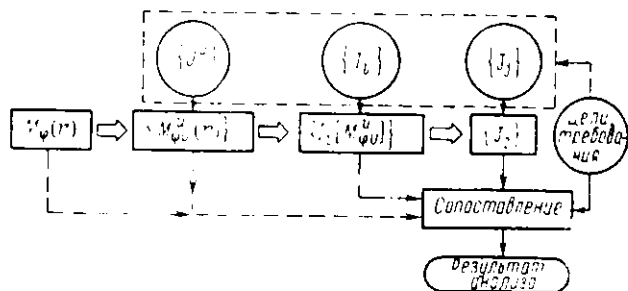


Рис. 12.

$M_{\varphi U}^u(r)$, $u = 1, 2, \dots$, исходя из тех свойств $U^u(r)$, которые следует изучить в результате анализа; вычисление различных оценок (показателей, частных критериев) $I_i | M_{\varphi U}^u |$, $i = 1, 2, \dots$, позволяющих формализованно сопоставлять однотипные характеристики $M_{\varphi U}^u$; формирование на основе подмножеств $\{I_i\}$ или векторов I частных критериев обобщенных критериев J_j , $j = 1, 2, \dots$, параметры (весовые коэффициенты) которых отражают относительную важность для исследователя и проектировщика отдельных частных критериев I_i , входящих в состав обобщенного критерия; наконец, заключительный элемент анализа представляет собой сопоставление полученных характеристик $M_{\varphi U}^u$, вычисленных значений частных критериев I_i , сформированных обобщенных критериев J_j с целями системы и требованиями к качеству процессов.

Анализ модели самой системы управления M_q , $q = S$, позволяет выявить принципиальные стороны ее организации, а также исследовать такие фундаментальные и общие свойства динамических систем, как устойчивость и грубость. На основе моделей $M_{\mathcal{F}SF}$ определяются свойства по преобразованию сигналов произвольного типа, исследуется качество процессов преобразования (полоса частот пропускания, колебательность и т. д.). По моделям расширенных систем M_q , $q = R$, изучаются основные и дополнительные процессы управления.

Анализу могут подвергаться ситуации с неполностью определенными моделями связей или среды. В этих случаях необходимо доопределить модель расширенной системы: $\hat{M}_R$, выбирая типовые связи $\hat{M}_{SF}$, $\hat{M}_{\mathcal{F}S}$ и типовые воздействия $\hat{M}_F$. Можно анализировать ситуацию с наибольшей неопределенностью — только контурную часть, переходя к эквивалентным однокон-

турным системам подавления или воспроизведения типовых воздействий [18].

Топологический анализ на основе моделей $M_\varphi(1)$ и характеристик $M_{\varphi U}''(1)$ лежит в основе раскрытия особенностей взаимосвязей переменных или звеньев, т. е. внутренней организации систем, и их влияния на свойства систем. В зависимости от наборов свойств $U_\varphi''(1)$, наличие которых у анализируемых систем следует выявить в результате топологического анализа, формируются различные постановки задач. Для примера укажем следующие группы задач:

- выявление общесистемных свойств, сводящиеся к анализу графов на связность;
- проверка соответствия топологии системы функциям управления, т. е. наличия обратных связей; выделение сильно связанных компонент графа;
- проверка достижимости целей управления - например, наличия путей передачи управляющих воздействий;
- выявление физической реализуемости условий абсолютной инвариантности, т. е. наличия нескольких путей передачи воздействий, и т. д.

На этапе топологического анализа систем $M_S(1)$ или систем со связями с внешней средой $M_{\varphi_{SF}}''(1)$ могут быть подготовлены индексные выражения для определителей или передач систем, которые конкретизируются при дальнейшем снятии неопределенности.

Выводы, полученные по рангу неопределенности $M(1)$, изменяются при увеличении определенности моделей путем конкретизации структур операторов дуг или их параметров, т. е. при переходе к моделям $M(2)$ или $M(3)$, кроме тех, как правило, негрубых, вырождающихся или неустойчивых предельных систем, когда сочетание типов структур операторов и значений параметров приводит к изменению структуры выражений для определителей или передач систем. Если исследователя не устраивает какой-либо результат анализа модели $M(1)$, то требуемое изменение свойств обычно может быть получено только соответствующим изменением топологии системы.

Вопросам исследования топологических особенностей и их влияния на свойства систем посвящена гл. 3 пособия, а в гл. 4 приводятся некоторые важнейшие алгоритмы топологического анализа сложных систем управления. В гл. 5 приводятся алгоритмы получения индексных массивов, кодирующих определитель системы или ее передачу.

Структурный анализ, т. е. анализ моделей $M_\varphi(2)$ с известными структурами операторов дуг или звеньев, в дополнение к топологическому позволяет выявить условия физической осуществимости различных форм инвариантности, выявить условия структурной устойчивости, исследовать асимпто-

тические свойства характеристик системы, а также получить символичные выражения для передач и функций чувствительности, которые в последующем позволяют повысить эффективность численного анализа и синтеза систем.

Окончательное суждение о качестве систем и процессах управления выносится в результате численного анализа систем по моделям третьего ранга $M_{\Phi}(3)$. Именно на этих этапах анализа выявляются соответствие свойств системы требованиям, которые к ней предъявляются.

При не полностью формализованном анализе систем с не очень сложной топологией свойства систем выявляются на основе обзора проектировщиком различных геометрических образов — моделей в виде графов, структурных схем или кривых — графических изображений различных характеристик (штриховые линии на рис. 12). В этом случае можно обойтись без строгой формализации понятия требования к качеству систем и процессов, хотя и здесь следует придерживаться основных принципов исследования: однозначности представления свойств систем, последовательного раскрытия неопределенности исследуемых моделей и свойств, избыточности моделей.

При необходимости анализа большого числа систем, например с целью исследования дополнительных движений или определения удовлетворительных или наилучших в принятом смысле систем (что является предметом синтеза), а также при анализе сложных систем требуется автоматизация всех элементов анализа, включая и заключительный (рис. 12). В этом случае выявление свойств систем, сопоставление систем между собой, проверка удовлетворения системами управления предъявляемых к ним требований должны проводиться в строгом соответствии с указанными выше основными принципами, а заключительные этапы анализа должны представлять собой некоторые формальные логические действия, включающие численные оценки систем — частные критерии I_i и обобщенные критерии J_j .

Требования к качеству установившихся и переходных, основных и дополнительных движений, как правило, формулируются в виде ограничений на критерии I_i и J_j . Поскольку эти ограничения в общем случае не позволяют однозначно перейти к характеристикам, а тем более конкретизировать топологию, структуры операторов или значения параметров систем, то требования к динамическим свойствам системы, сформулированные на языке оценок процессов и характеристик, косвенно описывают не одну, а множество систем M_T . Это множество M_T может быть названо моделью требований.

Формализация целей управления и требований к качеству процессов проводится в главе 7; там же обсуждаются процедуры формирования из частных моделей критериев качества I_i , $i=1, 2, \dots$, и приводятся некоторые алгоритмы их вычисления.

В случае полностью определенной модели $M_\varphi(3)$ анализ заключается в проверке ее принадлежности множеству удовлетворительных систем M_T :

$$M_\varphi(3) \in M_T, \quad \varphi = S, \mathcal{F}SF, R. \quad (1.22)$$

Если исследуются дополнительные движения систем, то анализ усложняется, превращаясь в многократное построение характеристик и вычисление критериев для множества моделей. Анализ множества моделей становится необходимостью в тех случаях, когда из-за погрешностей идентификации объектов неточной реализации управляющих устройств, «замораживания» параметров при изучении нестационарных систем реальным системам ставится в соответствие модели $M(r)$, $r=0, 1, 2$, или модели смешанного ранга $M(r, p)$, $M(r, p, q)$, $r=0, 1, 2$; $p=1, 2, 3$; $q=2, 3$, $q > p > r$, $M(0, 1, 2, 3)$, содержащие параметрическую, структурную или топологическую неопределенности. При этом анализ как проверка условий удовлетворения системами предъявленных к ним требований заключается в проверке условий включения множеств:

$$M(r) \subseteq M_T,$$

$$M(r, p) \subseteq M_T,$$

$$M(r, p, q) \subseteq M_T; \quad r=0, 1, 2; \quad p=1, 2, 3; \quad q=2, 3, \quad q > p > r,$$

$$M(0, 1, 2, 3) \subseteq M_T. \quad (1.23)$$

Множественный характер анализа имеет место во всех случаях, когда исследуется зависимость свойств систем от вариаций параметров, структур операторов и топологий. Нужно отметить при этом, что полный анализ даже относительно несложных систем, проводимый механически, потребует перебора огромного количества вариантов топологий, структур операторов и значений параметров, поэтому анализ систем при общей постановке задачи должен быть не только автоматизирован, но и специальным образом организован в соответствии с принципами последовательного раскрытия неопределенности и неизбыточности.

Основными алгоритмами анализа, как это следует из рис. 12, являются алгоритмы получения соответствующих выявляемым свойствам U_φ'' характеристик $M_{\varphi U}''$, вычисления различных оценок $I_i[M_{\varphi U}'']$ и формирования обобщенных критериев J_j . Многие из этих алгоритмов обсуждаются ниже; некоторые из них даны на алгоритмическом языке АЛМИР (АНАЛИТИК).

Если результат анализа отрицателен, т. е. система не удовлетворяет требованиям, то необходимо принять определенные меры, обеспечивающие выполнение (1.22) — (1.23), т. е. необходимо решать задачу синтеза.

Синтез систем управления представляет собой выбор или выделение из заданного множества систем некоторого подмножества, которое наилучшим образом соответствует функциям и целям управления и удовлетворяет заданным требованиям к качеству процессов. Таким образом, под синтезом в широком смысле слова понимается уменьшение неопределенности или разнообразия систем за счет соответствующей переработки информации о функциях, целях, оценках, требованиях и моделях систем.

Синтез как задача повышения определенности моделей систем за счет информации об их свойствах является обратным по отношению к анализу, при котором по моделям систем различных рангов неопределенности выявляются их свойства. Принципиальной особенностью обратной задачи — задачи синтеза является то, что нет универсальных методов формульного перехода от заданных свойств к модели систем. Это отчасти объясняется неоднозначностью перехода, так как одному и тому же набору свойств может соответствовать множество систем, причем в общем случае заранее нельзя сказать, пустое ли это множество, содержит единственный элемент или обладает конечной или бесконечной мощностью. Поэтому задача синтеза, как правило, решается как многократный анализ систем, выбираемых по определенному правилу из множества вариантов. Синтез имеет смысл только в том случае, если исходное множество систем содержит более одного элемента, т. е. у проектировщика имеется выбор.

Элементы исходного множества, среди которых выбираются наилучшие или требуемые системы, могут отличаться параметрами, структурами операторов или топологией. Если варианты систем отличаются параметрами, то исходное множество, как правило, имеющее мощность континуума, представляет собой модель второго $M(2)$ или смешанного $M(2, 3)$ ранга неопределенности; при этом синтез называется параметрическим и в общем случае сводится к уменьшению исходной области в пространстве параметров, а в частном случае — к выбору единственного варианта полностью определенной системы $M(3)$. Если исходное множество характеризуется большей неопределенностью и включает в себя системы, отличающиеся структурой операторов некоторых дуг или звеньев, то оно представляет собой модель первого ранга $M(1)$ или модели смешанных рангов $M(1, 2)$, $M(1, 3)$, $M(1, 2, 3)$, а целью структурного синтеза является уменьшение вариантов структур, в частности — выбор единственной структуры, т. е. уменьшение неопределенности модели до второго или смешанного $M(2, 3)$ ранга. В наиболее общем случае топологического синтеза проектировщик должен выбрать единственную топологию из множества, представляющего модель нулевого ранга неопределенности $M(0)$ или модели $M(0, 1)$, $M(0, 2)$, $M(0, 3)$, $M(0, 1, 2)$,

$M(0, 1, 3)$, $M(0, 2, 3)$, $M(0, 1, 2, 3)$, и тем самым уменьшить неопределенность до рангов $M(1)$ или $M(1, 2)$, $M(1, 3)$, $M(1, 2, 3)$.

Можно видеть, что результат топологического синтеза — модели $M(1)$, $M(1, 2)$, $M(1, 3)$, $M(1, 2, 3)$ — является исходным материалом для структурного, а результат структурного синтеза — модели $M(2)$, $M(2, 3)$ — исходным материалом для параметрического синтеза. Следовательно, эти задачи могут составить этапы более общей процедуры синтеза, представляющего собой последовательное раскрытие неопределенностей моделей от $M(0)$ до $M(3)$ (см. рис. 13).

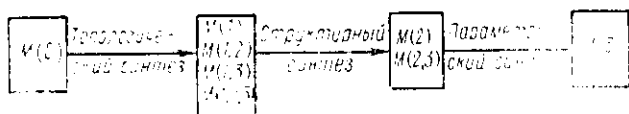


Рис. 13.

Вопросы синтеза систем управления, рассматриваемого как последовательное раскрытие неопределенности или как последовательное развитие, усложнение, иначе эволюция систем, будут рассмотрены в следующей части пособия.

Построение моделей реально существующих объектов связано, во-первых, с активным экспериментальным исследованием объектов, устройств или пассивным наблюдением за их поведением и воздействиями в режиме нормальной эксплуатации, как правило, с применением специальной аппаратуры и, во-вторых, с обработкой наблюдений (таблиц, кривых) для преобразования их в модели стандартной формы представления, обеспеченной алгоритмами анализа и синтеза. Совокупность этих операций объединяется термином идентификация объектов или сигналов, а алгоритмы обработки результатов с учетом специфики натурных экспериментов можно назвать алгоритмами идентификации. К ним, например, относятся алгоритмы получения дифференциальных (разностных) уравнений или передаточных функций по ординатам временных или значениям частотных характеристик, полученных с некоторой ошибкой.

Модели динамических систем хорошо изученной природы могут быть представлены в виде принципиальных схем (полюсных графов [71]): электрических, механических, гидравлических и т. д. В этом случае под получением моделей понимают их преобразование к стандартному виду: к системам дифференциальных и алгебраических уравнений, сигнальным графам, структурным схемам, временным или частотным характеристикам. При необходимости расчета проектируемых систем управ-

ления и регулирования, не существующих в природе, такой путь получения моделей является единственно возможным. Соответствующие алгоритмы преобразования форм представления моделей образуют особую группу и сильно развиты в теории электрических и электронных цепей [73].

К проблеме получения моделей тесно примыкают задачи их упрощения: понижение порядка моделей, для чего имеются многочисленные алгоритмы [97]; линеаризация нелинейных моделей для малых вариаций переменных относительно установившегося режима (линеаризация касательной); линеаризация нелинейных моделей для множества значений переменных (статистическая линеаризация, линеаризация секущей) и для периодических сигналов.

Хотя в данном пособии вопросы получения моделей непосредственно не ставятся, многие алгоритмы анализа, рассматриваемые ниже, могут входить как составные элементы методик получения и упрощения моделей.

2. АЛГОРИТМЫ СВЯЗИ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

2.1. Систематизация алгоритмов связи линейных операторов

Операторы ω_{ij} , представляющие собой веса дуг (i, j) сигнальных графов, связывающих переменные x_i и x_j , или операторы звеньев структурных схем могут быть представлены в различной форме (1.1) — (1.5). Хотя любая из них может быть принята за основу задания динамических свойств системы, для конкретных исследований та или иная форма оказывается более рациональной и возникает необходимость перехода от одной формы к другой. Многие задачи анализа связаны с изменением формы представления оператора, причем в ряде случаев эта процедура составляет наиболее трудоемкий этап анализа — приведение к форме, облегчающей вычисление критериев качества (например, получение временных характеристик по дифференциальным уравнениям или частотным характеристикам).

Алгоритмы перехода от одной формы представления линейного оператора к другой вместе с их различными вариантами образуют обширный класс, являющийся одним из основных в составе алгоритмического обеспечения задач теории регулирования и управления.

Из-за аналогичности форм представления линейных непрерывных и дискретных операторов (см. табл. 2.1), обуславливающей схожесть соответствующих алгоритмов перехода, последние удобно рассматривать параллельно для обоих случаев.

Алгоритмы связи между различными формами представления непрерывных и дискретных линейных операторов удобно рассматривать как дуги некоторого ориентированного графа взаимосвязи форм представления операторов, вершинам которого поставлены в соответствие формы представления операторов (рис. 14).

Наиболее прост формальный переход путем замены оператора дифференцирования $p \equiv d/dt$ на комплексный аргумент s от дифференциального уравнения (1.1) к передаточной функции

(1.2), и наоборот. Рассматривая переход к передаточным функциям, будем избегать сокращения общих делителей полиномов G и D , что приведет к потере собственных составляющих движения и ненаблюдаемых или неуправляемых частей. И вообще, говоря об эквивалентности форм представления операторов, будем иметь в виду эквивалентность их полностью наблюдаемых и управляемых частей.

Таблица 2.1

Операторы	
непрерывные	дискретные
1. Дифференциальное уравнение n -го порядка $D(p)y(t) = G(p)f(t), p = d/dt$ оператор дифференцирования	1*. Разностное уравнение n -го порядка $D^*(z)y(k) = G^*(z)f(k),$ z — оператор сдвига на такт
2. Передаточная функция $W(s) = \frac{G(s)}{D(s)} = \frac{y(s)}{f(s)}$	2*. Дискретная передаточная функция $W^*(z) = \frac{G^*(z)}{D^*(z)} = \frac{y(z)}{f(z)}$
3. Нормальная форма $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}f, y = \mathbf{C}\mathbf{v} + df$	3*. Нормальная форма $\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}^*\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}^*f(k),$ $y(k) = \mathbf{C}^*\mathbf{v}(k) + d^*f(k)$
4. Временные характеристики $w(t), h(t)$	4*. Последовательности $w^*(k), h^*(k)$
5. Частотные характеристики $W(j\omega) = A(\omega) \exp\{j\varphi(\omega)\} =$ $= P(\omega) + jQ(\omega), 0 \leq \omega < \infty$	5*. Дискретные частотные характеристики $W^*(e^{j\omega T}) = A^*(\omega) \exp\{j\varphi^*(\omega)\} =$ $= P^*(\omega) + jQ^*(\omega), 0 \leq \omega < \pi/T$

При разработке языка описания систем или способов их машинного кодирования формы представления 1 и 2, а также 1* и 2* (см. табл. 2.1) эквивалентны, так как в обоих случаях

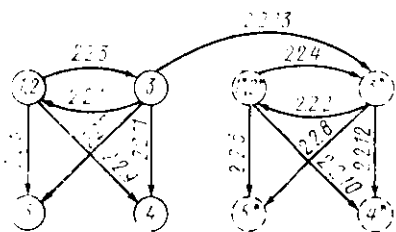


Рис. 14.

должны быть конкретизированы и введены в ЭВМ массивы коэффициентов полиномов G, D или G^*, D^* . Поэтому граф, изображенный на рис. 14, содержит только по четыре вершины для непрерывного и дискретного случаев.

Число алгоритмов взаимосвязи операторов значительно. Рассмотрим лишь некоторые из них, обращая особое внимание на формы представления операторов, удобные для введения информации в ЭВМ.

2.2. Алгоритмы и программы связи форм представления операторов

2.2.1. Переход от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме (1.3) к одному дифференциальному уравнению n -го порядка или к передаточной функции (переход $3 \rightarrow 1, 2$).

Переход от нормальной формы записи дифференциальных уравнений (1.3) к передаточной функции (1.2) осуществляется однозначно с применением преобразования Лапласа к уравнению (1.3) при нулевых предначальных условиях $v(0) = 0$.

$$\begin{aligned} s\mathbf{v}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(s) + \mathbf{B}f(s), \\ y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{v}(s) + d f(s). \end{aligned}$$

Из этой системы алгебраических уравнений можно получить связь между изображениями переменных

$$y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d] f(s), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^* |s\mathbf{E} - \mathbf{A}|^{-1}$ — матрица, обратная характеристической, $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^*$ — матрица, присоединенная к характеристической. Из выражения (2.1) можно получить

$$\frac{y(s)}{f(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{D(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^*\mathbf{B} + d |s\mathbf{E} - \mathbf{A}|^{-1} |s\mathbf{E} - \mathbf{A}|],$$

откуда следует

$$\begin{aligned} D(s) &= |s\mathbf{E} - \mathbf{A}|, \\ G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^*\mathbf{B} + d |s\mathbf{E} - \mathbf{A}|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку порядок полинома $\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^*\mathbf{B}$ на единицу меньше порядка n характеристического полинома $D(s)$, из системы (2.2) следует, что при $m < n$ имеет место $d = 0$, и наоборот.

Дальнейший переход от передаточной функции, полученной из нормальной формы (1.3) к дифференциальному уравнению n -го порядка, как уже говорилось, осуществляется формальной заменой s на $p \equiv d/dt$ в том случае, когда не интересуются связью векторов начальных условий. Так как вектор начальных условий дифференциального уравнения (1.1)

$$\mathbf{y}(0^-) = (y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-))^T \quad (2.3)$$

есть начальное состояние в естественном базисе, то связи между начальными условиями $\mathbf{v}(0^-)$ и $\mathbf{y}(0^-)$ определяются из равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0^-) &= \mathbf{Q}\mathbf{v}(0^-), \\ \text{где } \mathbf{Q} &= (\mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{A}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T \end{aligned} \quad (2.4)$$

есть матрица связи векторов начальных условий в естественном и произвольном базисе [33].

Алгоритм ФБПФ перехода $3 \rightarrow 1, 2$ основан на приведении системы уравнений (1.3) в произвольном базисе к естественному (2.3) и на раздельном вычислении коэффициентов полиномов D и G .

Коэффициенты полинома $D(s)$ вычисляются с помощью алгоритма А. М. Данилевского, основанного на приведении матрицы A к фробениусовой форме (см. (2.10)).

Коэффициенты полинома $G(s)$ могут быть вычислены по матричному соотношению

$$\widetilde{LB} = G, \quad (2.5)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \\ a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\widetilde{B} = QB. \quad (2.7)$$

Программа, реализующая алгоритм ФБПФ на языке АЛМИР-65, приведена ниже.

```

"РАЗР" 30.M1. "ДЛ"J=1"П"1"ДО"N"ВЫП"Q [1, J] -
C [J]; "ДЛ"J=2"П"1"ДО"N"ВЫП"Q [1, J] - 1"П"1"
ДО"N"ВЫП"Q [1, J] = Σ (K=1, N, Q [1 - 1, K] * AФ [K, J]);
M2. "ДЛ"J=1"П"1"ДО"N"ВЫП"BE [J] = Σ (K=1, N, Q
[J, K] * ВФ [K]); M3. U=1; M. "ДЛ"K=U"П"1"ДО"N"ВЫП"E"
1"ВЫП" (L=0; "ДЛ"J=K+1"П"1"ДО"N"ВЫП"E"
ABS (L) - ABS (AФ [J, K])) * O"TO" (L=AФ [J, K]; W
J); "E" L=0"TO" ("ДЛ"J=U"П"1"ДО"K"ВЫП"А [J]
AФ [J, K]; U=K+1; "ВЫВ"K; "НА"М); "E" K+1
W"TO" ("НА" L1; "ДЛ"J=K"П"1"ДО"N"ВЫП" (R=
AФ [K+1, J]; AФ [K-1, J] * AФ [W, J]; AФ [W, J]=R);
"ДЛ"J=U"П"1"ДО"N"ВЫП" (R=AФ [J, K+1]; AФ [J,
K+1]=AФ [J, W]; AФ [J, W]=R); L1. "ДЛ"J=U"П"1
"ДО"N"ВЫП"А [J] = AФ [J, K]; V=AФ [K+1, K]; "ДЛ"J=K
"П"1"ДО"N"ВЫП" (AФ [K+1, J]=AФ [K+1, J]
V; "ДЛ"J=U"П"1"ДО"N"ВЫП" ("E" J=K+1"TO"
("НА" L2); AФ [J, J]=AФ [J, J] - A [J] * AФ [K+1, J];
L2)); "ДЛ"J=U"П"1"ДО"N"ВЫП" (S=0; "ДЛ"J=K
"П"1"ДО"N"ВЫП" S=S+AФ [J, J] * A [J]; "E" J=1 <
K"TO" ("E" J=U"TO" (D=0) "ИНА" (D=A [J-1]))
"ИНА" (D=0); AФ [J, K+1]=S+D); "ДЛ"J=U"П"1
"ДО"N"ВЫП"А [J] = AФ [J, N]; M4.A [N+1]=1; "ДЛ"
J=1"П"1"ДО"N"ВЫП"А [J] = A [J]; M5. "ДЛ"J=1

```

"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"(Z = N - I + 1; P[I] = $\sum_{K=1}^Z (K=1, Z, A[I+K] \times BE[K])$); "РАЗР"6; "ВЫВ""МАСС"А; "ВЫВ""МАСС"Р

Описательная часть алгоритма ФБПФ имеет вид: "ГДЕ" N=n; AФ[n, n] = ..., ..., ВФ[n] = ..., ..., Q[n, n]; C[n] = ..., ..., BE[n]; A[n+1]; P[n] "КОН".

Можно показать, что вектор послепачальных условий при подаче на систему единичной δ -функции равен $y(0^+) = \tilde{B} = QB$; алгоритм вычисления $y^{(p)}(0^+)$ для любого p в случае типовых воздействий приведен в работе [34].

Переход 3 $\rightarrow$ 1,2 также может быть основан на методе Леверрье — Фаддеева [12, 26, 83, 98], позволяющем одновременно вычислить коэффициенты характеристического полинома $D(s)$ и присоединенную матрицу $(sE - A)^*$.

В реализованном на основе этого метода алгоритме ФБПФЛФ приняты следующие обозначения: A — матрица коэффициентов исходной системы в физическом базисе, B и C — векторы управления и выхода в физическом базисе (соответствуют (1.3)), P и D — массивы коэффициентов полиномов соответственно числителя и знаменателя передаточной функции.

Основная особенность метода заключается в том, что за каждый шаг в результате определенных операций над матрицами A , B и C вычисляется по одному коэффициенту полиномов P и D передаточной функции. Кроме того, метод позволяет контролировать точность вычислений.

По методу Леверрье — Фаддеева вспомогательная матрица $A1$ на последнем шаге должна быть нулевой. В предлагаемой реализации алгоритма производится контроль условия $|a_{1ij}| < \epsilon$, где ϵ — наперед задаваемое малое число. Если для всех элементов матрицы $A1$ выполняется $|a_{1ij}| < \epsilon$, то дается команда на вывод результатов вычислений; если же это условие не выполняется, то необходимо повторить вычисления с большей разрядностью.

Программа, реализующая данный алгоритм, приведена ниже:

"РАЗР"6.M1. "ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП""ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"А1[I, J] = 0; "ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"А1[I, J] = 1; M2.IN = 1; M3."ВЫВ"IN; "ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"Р1[I] = $\sum_{K=1}^N (K=1, N, C[K] \times A1[K, I])$; P[N - IN + 1] = $\sum_{K=1}^N (K=1, N, P1[K] \times B[K])$; M4."ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП""ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"А2[I, J] = $\sum_{K=1}^N (K=1, N, A[I, K] \times A1[K, J])$; M5.X = $\sum_{K=1}^N (K=1, N, A2[K, K])$; IN; M6.D[N - IN + 1] = X; M7. (2.9) IN = IN + 1; M8. "ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"А2[I, J] = A2[I, J] - X; "ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП""ДЛГ" = 1;"ПРГ"ДО"Н"ВЫП"А1[I, J] = A2[I, J]; "ВЫВ"IN"ТО"

("НА"МВ); "НА"МЗ; МВ. D[N+1]=1; "ДЛ"Т=1"П"1"
 "ДО"Н"ВЫП"; ДЛ.Т=1"П"1"ДО"Н"ВЫП"; ЕТАBS(A[I,
 J]) > EPS"ТО" ("ВЫВ", УВЕЛИЧИТЬ РАЗРЯДНОСТЬ;
 "СТОП"); "ВЫВ""МАСС"Д; "ВЫВ""МАСС"Р

Описательная часть программы (2.9) имеет вид:
 "ГДЕ" N=n; A[n, n]=...; B[n]...; C[n]=...; EPS=...;
 A1[n, n]; A2[n, n]; P[n]; D[n+1] "КОН".

Еще один алгоритм вычисления передаточной матрицы в символично-численной форме приведен в работе [16].

2.2.2. Переход от системы разностных уравнений в нормальной форме к одному разностному уравнению n -го порядка или к дискретной передаточной функции (переход $3^* \rightarrow 1^*, 2^*$) осуществляется в точности по алгоритмам ФБПФ или ФБПФЛФ с соответствующей интерпретацией исходных данных и результатов.

2.2.3. Переход от одного дифференциального уравнения n -го порядка (1.1) или передаточной функции (1.2) к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме (переход $1, 2 \rightarrow 3$) неоднозначен в силу произвола в выборе n переменных состояния $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ и требует привлечения дополнительной информации об их физической природе и реальных взаимосвязях или доопределения из каких-либо иных соображений. Представление взаимосвязи двух переменных y и $\dot{y}$ в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в случае $n > 1$ равносильно раскрытию топологии, т. е. представлению исходной взаимосвязи с простейшей топологией и сложным оператором в виде топологически сложной системы, но с простейшими операторами связей (интегрирование, масштабирование) между вводимыми при таком переходе переменными состояния v . Если при выборе переменных состояния не привлекается информация о реальной взаимосвязи физических переменных в моделируемом звене системы, то переменные состояния являются математической абстракцией и вводятся произвольным доопределением.

Неоднозначность перехода $1, 2 \rightarrow 3$ выражается также в том, что исходные данные представляют собой $n+m+1$ значений коэффициентов, а требуется найти $(n+1)^2$ значений элементов матриц.

В качестве матрицы коэффициентов A наиболее часто выбирается сопровождающая матрица полинома $D(p)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

что соответствует доопределению переменных состояния следующим образом:

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_1, \quad v_2 = \dot{v}_2, \quad \dots, \quad v_n = \dot{v}_{n-1}. \quad (2.11)$$

В частном случае $v_1 = y$ говорят о естественном базисе в пространстве состояний (2.3). При этом сразу определяется и матрица выхода $C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Можно показать, что в естественном базисе элементы матрицы управления $B = \bar{B}$ определяются из системы линейных уравнений (2.5). Легко видеть, что при $m = n - 2$ первый элемент $b_1 = 0$, а при $m = n - i$ имеет место $b_1 = b_2 = \dots = b_{i-1} = 0$.

Программа вычисления B на языке АЛМИР-65 имеет вид: "РАЗР"6. $R = A [N + 1]; B [1] = G [N] R; "ДЛЯ" I = 2 "ПО" I "ДО" N "ВЫИГ" B [I] = (G [N - I + 1] - \sum_{K=1, I-1, A [N-K+1]} \times B [I-K]) R; "ВЫВ" "МАСС" B$. Описательная часть программы имеет вид: "ГДЕ" $N = n; A [n + 1] = \dots, \dots; G [n] = \dots, \dots; B [n] "КОН"$.

Скаляр обхода определяется просто:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{при } m = n, \\ g_m a_n & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Предлагаемый способ перехода к нормальной форме с естественным базисом удобен тем, что нет необходимости пересчитывать начальные условия: $v(0^-) = y(0^-)$.

Не всегда требуется естественный базис, но интересен переход от передаточной функции к нормальной форме с помощью минимальных вычислений. Очевидно, при этом матрица коэффициентов A должна иметь фробениусову форму (2.10), т. е. переменные состояния должны удовлетворять условию (2.11).

Скаляр обхода при любом базисе вычисляется по (2.12). Для определения матриц B и C рассмотрим выражение (2.2) для числителя передаточной функции при $m < n$. Поскольку присоединенная матрица $(sE - A)^*$ имеет последний столбец вида $(1, s, s^2, \dots, s^{n-1})^T$, то при выборе матрицы входа вида $B = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$ имеем произведение

$$(sE - A)^* B = (1, s, s^2, \dots, s^{n-1})^T. \quad (2.13)$$

Из выражений (2.2) и (2.13) следует, что матрица C определяется также без всяких вычислений: $C = (g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$.

При этом способе перехода от дифференциального уравнения n -го порядка к нормальной форме требуется пересчет начальных условий с помощью матрицы Q связи базисов (2.4), и оба подхода оказываются эквивалентными в вычислительном отношении.

Завершая изложение перехода от одного дифференциального уравнения n -го порядка или передаточной функции к нормаль-

ной форме записи дифференциальных уравнений, заметим, что нормальная форма есть готовая программа для реализации оператора преобразования переменных на аналоговой вычислительной машине (АВМ). С другой стороны, имея схему моделирования на АВМ, легко записать нормальную форму дифференциальных уравнений, и этот метод реализаций часто используется для перехода от дифференциальных уравнений n -го порядка или передаточных функций к нормальной форме [27].

2.2.4. Переход от одного разностного уравнения n -го порядка или дискретной передаточной функции (табл. 2.1) к системе разностных уравнений в нормальной форме (переход 1*, 2*→3*) аналогичен рассмотренному случаю непрерывных систем (см. п. 2.2.3).

2.2.5. Переход от передаточной функции или дифференциального уравнения n -го порядка к частотным характеристикам (ЧХ) (переход 1, 2→5).

Если задано дифференциальное уравнение n -го порядка (1.1), то переход к ЧХ (1.5) осуществляется формальной заменой $p \rightarrow j\omega$, а в случае передаточной функции (1.2) — вычислением значений $W(s)$ при $s = j\omega$, $0 \leq \omega < \infty$, причем результат относится к комплексному типу данных.

Говоря о расчете ЧХ на ЭВМ, будем иметь в виду вычисление их значений при фиксированной частоте или для указанного конечного множества частот (массива).

Можно идти по пути разработки частных алгоритмов вычисления значения ЧХ конкретных структур операторов (1.1) и (1.2), т. е. предназначенных для конкретных m и n (например, для типовых динамических звеньев). Но поскольку одним из требований к алгоритмам является их массовость, более интересной представляется задача разработки универсального алгоритма расчета ЧХ любых структур, когда порядки полиномов m и n наряду с массивами коэффициентов a_i , $i=0, \dots, n$; g_j , $j=0, \dots, m$ вводятся в ЭВМ как исходные данные.

Хотя значения ЧХ относятся к комплексному типу данных, нетрудно написать алгоритм раздельного вычисления действительных RD , RG и мнимых ID , IG частей полиномов $D(s)$, $G(s)$ при подстановке $s = j\omega$:

$$D(j\omega) = RD + jID, \quad G(j\omega) = RG + jIG$$

и на этой основе — вычисления действительной RW и мнимой IW частей передаточной функции $W(s)$, т. е. значения ЧХ: $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = RW + jIW$, где RD , ID , RG , IG , RW , IW — действительные числа.

Ясно, что основой алгоритма должно быть вычисление значений полиномов, для чего лучше всего приспособлена схема последовательного умножения (Горнера). Поясним вначале эту схему для частного случая вещественного аргумента $s = z$ или

Описательная часть программы содержит информацию о порядке полинома $N=n$, значении частоты $W=\omega$ и коэффициентах полинома, представленных в виде массива A , заполненного начиная со свободного члена: "ГДЕ" $N=\dots$; $W=\dots$; $A[n+1]=\dots, \dots$ "КОН"

Программа (2.17) имеет самостоятельное значение: она может быть использована для построения годографа Михайлова.

Конечная цель заключается в составлении программы вычисления значений ЧХ по дробно-рациональным передаточным функциям: вещественной

$$P(\omega) = RW = \frac{\operatorname{Re} G(j\omega) \operatorname{Re} D(j\omega) + \operatorname{Im} G(j\omega) \operatorname{Im} D(j\omega)}{[\operatorname{Re} D(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} D(j\omega)]^2}$$

и мнимой

$$Q(\omega) = IW = \frac{\operatorname{Im} G(j\omega) \operatorname{Re} D(j\omega) - \operatorname{Re} G(j\omega) \operatorname{Im} D(j\omega)}{[\operatorname{Re} D(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} D(j\omega)]^2}.$$

Операторная часть программы на языке АЛМНР-65 имеет вид:

```
"РАЗ"6.RD=A[N+1]; ID=0; "ДЛТ"=1"ННТ"ДО"N"
"ВЫП" (Ж=RD; RD=-ID W+A[N+1-1]; ID=
Ж×W); RG=G[M+1]; IG=0; "ДЛТ"=1"ННТ"
ДО"М"ВЫП" (Ж=RG; RG=-IG W+G[M+1-1];
IG=Ж×W); C=RD RD+ID×ID; RW=(RG×RD+
ID×IG)/C; IW=(IG×RD-RG×ID)/C; 3.L=10×LG
(RW×RW+IW×IW); 4.Ф=ARCTG(IW/RW); "Е"RW=
"О"ТО" ("Е"IW=0"ТО" (Ф=3.14159+Φ) "ИПА" (Φ=
3.14159+Φ); Φ=Φ-57.29578; "РАЗ"3; "ВЫВ""ТАБ"
I, W, RW, IW, L, Φ; "РАЗ"6.
```

Описательная часть программы (2.18): "ГДЕ" $N=\dots$; $M=\dots$; $W=\dots$; $A[n+1]=\dots$; $G[m+1]=\dots$ "КОН". Программа (2.18) вычисляет не только RW , IW , но также значения логарифмической амплитудной характеристики $L(\omega)$ и фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ в пределах $(-180^\circ, +180^\circ)$. Ясно, что для изолированной частоты ω значение фазового сдвига звена принципиально нельзя указать с большей определенностью.

Программа (2.18) позволяет вычислять значения ЧХ по передаточной функции на фиксированной частоте, а для более полного представления о динамических свойствах требуется построить график на основе массива значений (таблицы) ЧХ. Расчет ЧХ легко организовать с помощью цикла, параметром которого может быть номер точки оси частот, где вычисляются эти значения. Очевидно, строить ЧХ гораздо удобнее, если значения частот выбираются с логарифмическим шагом. При этом могут быть заданы интервал частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ и число точек на интервале K . Операторная часть программы на языке

АЛМИР-65 для получения массива точек ЧХ при логарифмическом шаге будет иметь вид:

```
"РАЗ"6,"ДЛ"1 1"Ш"1"ДО"К"ВЫП" (W = WMIN
× (WMAX - WMIN) / ((J - 1) × (K - 1)); RD = A [N + 1]; ID = 0;
"ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП" (Ж = RD; RD = - ID
× W + A [N + 1 - I]; ID = Ж × W); RG = G [M + 1]; IG = 0;
"ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"М"ВЫП" (Ж = RG; RG = - IG
× W + G [M + 1 - I]; IG = Ж × W); C = RD × RD + ID × ID;
RW = (RG × RD - ID × IG) / C; IW = (IG × RD - RG × ID) / C;
3.L = 10 × LG (RW × RW + IW × IW); 4.Ф = ARCTG (IW
× RW); "Е"RW = 0"ТО" ("Е"IW = 0"ТО" (Ф = 3.14 159
+ Ф) ИНА" (Ф = -3.14159 + Ф)); Ф = Ф × 57.29578; "РАЗ"
3; "ВЫВ" "ТАБ"1, W, RW, IW, L, Ф; "РАЗ"6)
```

Описательная часть программы (2.19) расчета ЧХ системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{10s + 200}{0,035s^5 + 1,242s^4 + 14,527s^3 + 57,95s^2 + 118,9s + 21}$$

в пяти точках диапазона $[0,1; 10]$ записывается следующим образом: "ГДЕ" N = 5; M = 1; K = 5; WMIN = .1; WMAX = 10; A [6] = 21, 118.9, 57.95, 14.527, 1.242, .035; G [2] = 200, 10 "КОН"
Результат расчета на ЭВМ «Мир-2» имеет вид:

"ТАБЛИЦА" 1

W	RW	IW	L	Ф
.1000 ₁₀ 0	.7340 ₁₀ 1	-.4219 ₁₀ 1	.1855 ₁₀ 2	-.2989 ₁₀ 2
.3162 ₁₀ 0	.1962 ₁₀ 1	-.4581 ₁₀ 1	.1395 ₁₀ 2	-.6681 ₁₀ 2
.1000 ₁₀ 1	-.5007 ₁₀ 0	-.1744 ₁₀ 1	.5176 ₁₀ 1	-.1060 ₁₀ 3
.3162 ₁₀ 1	.4598 ₁₀ 0	.3765 ₁₀ -2	-.6746 ₁₀ 1	.1795 ₁₀ 3
.1000 ₁₀ 2	.2450 ₁₀ -2	.1867 ₁₀ -1	-.3450 ₁₀ 2	.8252 ₁₀ 2

Использование языка АНАЛИТИК позволяет предварительно получить аналитические выражения для ЧХ, после чего их значения быстро вычисляются для ряда указанных частот. Пример такой программы приведен ниже:

```
"РАЗ"6,RD=A [N + 1]; ID=0; "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП" (Ж
= RD; RD = - ID × W + A [N + 1 - I]; ID = Ж × W); RG =
= G [M + 1]; IG = 0; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"М"ВЫП" (Ж = RG;
RG = - IG × W + G [M + 1 - I]; IG = Ж × W); "ВЗЯ" (RD ×
× RD + ID × ID); "ИЗВ" C; "ВЗЯ" (RG × RD + ID × IG); "ИЗВ"
RW; "ВЗЯ" (IG × RD - RG × ID); "ИЗВ" IW; SW = (WMAX /
(WMIN) ↑ (1 - (K - 1))); W = WMIN; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"К"
"ВЫП" ("ВЫЧ" C, RW, IW; "Е" C = 0"ТО" (L = HEO; "ИА"1)
"ИНА" (RW = RW / C; IW = IW / C); R = √ (RW ↑ 2 + IW ↑ 2);
"Е" R = 0"ТО" (L = HEO; "ИА"1) "ИНА" L = 20 × LG (R); "Е"
```

$RW = 0^{\circ}TO^{\circ}\Phi = \text{SIGN}(IW) \times 90^{\circ}ИИА^{\circ} (\Phi = IW, RW; ^{\circ}E^{\circ}ABS$
 $(\Phi) - 1_{10}3^{\circ}TO^{\circ}\Phi = \text{SIGN}(\Phi) \times 90^{\circ}ИИА^{\circ} (\Phi = \text{ARCTG}(\Phi) \times$
 $\times 57.29578; ^{\circ}E^{\circ}RW = 0^{\circ}TO^{\circ}(\Phi = ^{\circ}E^{\circ}IW - 0^{\circ}TO^{\circ}180 + \Phi^{\circ}ИИА^{\circ}$
 $(-180 + \Phi)))$; 1."PA3"3; "ВЫВ" "ТАБ"1, W, RW, IW, L, Φ ;
 "PA3"6; $W = W \times SW$) "ГДЕ" $N = 5$; $M = 1$; $K = 5$; $W_{MIN} = .1$;
 $W_{MAX} = 10$; $A[6] = 21, 118.9, 57.95, 14.527, 1.242, .035$; $G[2] =$
 $200, 10^{\circ}КОИ^{\circ}$

Описательная часть при этом та же, что и для предыдущей программы.

В заключение заметим, что значения фазовой характеристики получаются на интервале $(-180, +180^{\circ})$, поэтому в случае систем высокого порядка для определения истинных значений фазовых сдвигов принимается предположение об относительной гладкости характеристик. Допускают, что в пределах выбранного шага частот фазовая характеристика не может измениться на $\pm 180^{\circ}$, т. е. корни полиномов $D(s)$ и $G(s)$ располагаются достаточно далеко от мнимой оси.

Эти программы можно применять для систем, имеющих заранее известные корни на мнимой оси. В массив значений частот при этом не включают некоторую окрестность корней, например при построении ЧХ систем с полюсом в начале координат (интегратор) в массив частот нельзя включать частоты, близкие к нулю.

2.2.6. Переход от разностного уравнения n -го порядка или дискретной передаточной функции к частотным характеристикам (переход 1^* , $2^* \rightarrow 5^*$).

Будем предполагать, что все корни полинома $D^*(z)$ принадлежат кругу единичного радиуса с центром в начале координат (единичному кругу).

Формально ЧХ дискретной системы получается подстановкой $z = \exp\{j\omega\}$, $0 \leq \omega < \pi$ в выражение дискретной передаточной функции. Для рассматриваемого линейного класса моделей передаточная функция $W^*(z)$ представляется отношением полиномов, поэтому основой алгоритма вычисления значений ЧХ является процедура вычисления значений полиномов при комплексном аргументе: $z = c + js = \cos \omega T + j \sin \omega T$. За основу алгоритма вычисления $D^*(z)$ и $G^*(z)$ естественно положить рекуррентные соотношения (2.16) при $\text{Re } s = c$, $\text{Im } s = s$.

Программа вычисления $RD = \text{Re } D^*(z)$ и $ID = \text{Im } D^*(z)$ для $z = \exp\{j\omega T\}$, $0 \leq \omega T < \pi$ может быть записана следующим образом:

"PA3"7.2.WT = W $\times$ T; C = COS(WT); S = SIN(WT); 3.RD =
 $A[N+1]$; ID = 0; "ДЛ"1 = 1 "ИИ"1 "ДО" N "ВЫИ" ($\mathcal{K} = RD$; $RD =$
 $\mathcal{K} \times C - ID \times S + A[N+1-1]$; $ID = \mathcal{K} \times S + ID \times C$)

Описательная часть программы содержит информацию о порядке полинома n , значении частоты ω , шаге квантования времени

T и коэффициентах полинома в виде массива A , заполняемого, начиная со свободного члена: "ГДЕ" $N = \dots$; $W = \dots$; $T = \dots$; $A[n+1] = \dots, \dots$ "КОН".

Программа имеет самостоятельное значение, например для построения годографа Михайлова дискретной системы.

Программа вычисления значений $W^*(z)$ может быть организована аналогично (2.18); операторная часть имеет вид:

```
"РАЗ" 7.2.WT=W×T; C=cos(WT); S=sin(WT); 3.RD=
A[N+1]; ID=0; "ДЛ" I=1"Ш" I"ДО" N"ВЫП" (Ж=RD;
RD=Ж×C-ID×S+A[N+1-I]; ID=Ж×S+ID×C);
4.RG=G[M+1]; IG=0; "ДЛ" I=1"Ш" I"ДО" M"ВЫП"
(Ж=RG; RG=Ж×C-IG×S+G[M+1-I]; IG=Ж×S+
IG×C); DW=RD×RD+ID×ID; RW=(RG×RD+ID×(2.20)
×IG)/DW; IW=(IG×RD--RG×ID)/DW; 5.L=10×
×LG(RW×RW+IW×IW); Ф=arctg(IW/RW); "Е" RW<
<0"ТО" ("Е" IW>0"ТО" (Ф=3.14159+Ф)"ИНА" (Ф=
-3.14159+Ф)); Ф=Ф×57.29578; "ВЫВ""СТР", W,
"ПРОБ", WT, "СТР", RW, "ПРОБ", IW, "СТР", L,
"ПРОБ", Ф
```

Описательная часть программы (2.20) содержит информацию о значении частоты ω (идентификатор W), шаге квантования времени T , порядках полиномов n и m , а также массивы коэффициентов знаменателя D^* и числителя G^* .

Например, для случая передаточной функции

$$W^*(z) = \frac{0,0798z + 0,0629}{z^2 - 1,4252z + 0,4965}, \quad T = 0,1 \text{ с},$$

при необходимости вычислить значение ЧХ при $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ записывается следующая описательная часть:

```
"ГДЕ" W=1; T=.1; N=2; M=1; A[3]=.4965, --1.4252, 1;
G[2]=.0629, .0798 "КОН".
```

Данный пример получен в результате дискретизации времени ($T = 0,1 \text{ с}$) из непрерывной передаточной функции

$$W(s) = \frac{2}{(0,5s + 1)(0,2s + 1)}.$$

Результаты расчетов по программе для двух значений частоты приведены ниже:

$W=1.0$	$WT=.1$	$W=10$	$WT=1.0$
$RW=1.329$	$IW=-1.145$	$RW=-.165$	$IW=-.0278$
$L=4.882$	$\Phi=-40.748$	$L=-15.508$	$\Phi=-170.45$

Можно убедиться, что для этих частот значения соответствующих ЧХ непрерывных и дискретных звеньев различаются мало.

2.2.7. Переход от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме к частотным характеристикам (переход

3→5) для общности рассмотрим в случае системы с векторным входом $\mathbf{f}$ и выходом $\mathbf{y}$.

Очевидно, возможен опосредованный переход (3→1, 2→5), т. е. с предварительным определением передаточных функций, однако представляет интерес способ построения ЧХ непосредственно по матрицам $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ при указании номеров r и γ входа f_r и выхода y_γ , выделяющих строку $\mathbf{C}_\gamma$, столбец $\mathbf{B}_r$ и скаляр $d_{\gamma r}$.

Как известно, ЧХ линейной системы — это амплитуда и фаза частного решения неоднородного дифференциального уравнения (установившегося движения системы), если в правой части имеет место гармоническое воздействие единичной амплитуды.

Гармоническое входное воздействие и частное решение удобно представить в комплексной форме:

$$\begin{aligned} f_r &= \exp \{j\omega t\}, \\ \mathbf{v}_r(t) &= \mathbf{V}_r(j\omega) \exp \{j\omega t\} = (\mathbf{R}\mathbf{V}_r - j\mathbf{I}\mathbf{V}_r) \exp \{j\omega t\}, \\ d\mathbf{v}_r/dt &= j\omega (\mathbf{R}\mathbf{V}_r + j\mathbf{I}\mathbf{V}_r) \exp \{j\omega t\}. \end{aligned}$$

Искомые векторы: $\mathbf{R}\mathbf{V}_r$ — вектор вещественных и $\mathbf{I}\mathbf{V}_r$ — вектор мнимых ЧХ — определяются из условия тождества относительно t после их подстановки в исходное уравнение:

$$j\omega (\mathbf{R}\mathbf{V}_r + j\mathbf{I}\mathbf{V}_r) \exp \{j\omega t\} = \mathbf{A} (\mathbf{R}\mathbf{V}_r + j\mathbf{I}\mathbf{V}_r) \exp \{j\omega t\} + \mathbf{B}_r \exp \{j\omega t\}.$$

Из последнего соотношения получаем систему уравнений, матрица коэффициентов которой имеет комплексные элементы на главной диагонали:

$$(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{V}_r = \mathbf{B}_r. \quad (2.21)$$

Решение этой системы $\mathbf{V}_r = \mathbf{R}\mathbf{V}_r + j\mathbf{I}\mathbf{V}_r$ после подстановки во вторую строку исходного уравнения дает искомые ЧХ:

$$Y_{\gamma r} = \mathbf{R}\mathbf{Y}_{\gamma r} + j\mathbf{I}\mathbf{Y}_{\gamma r} = \mathbf{C}_\gamma (\mathbf{R}\mathbf{V}_r + j\mathbf{I}\mathbf{V}_r) + d_{\gamma r}$$

или

$$P_{\gamma r}(\omega) = \mathbf{R}\mathbf{Y}_{\gamma r} = \mathbf{C}_\gamma \mathbf{R}\mathbf{V}_r + d_{\gamma r},$$

$$Q_{\gamma r}(\omega) = \mathbf{I}\mathbf{Y}_{\gamma r} = \mathbf{C}_\gamma \mathbf{I}\mathbf{V}_r.$$

Основная вычислительная трудность связана с решением комплексной системы уравнений (2.21), например с помощью алгоритма Гаусса для комплексных данных. После этого легко вычисляются ЧХ по каналу $f_r \rightarrow y_\gamma$.

Если в используемом алгоритмическом языке нет комплексных чисел и нежелательно или невозможно введение соответствующих процедур, предлагаемая схема может быть несколько видоизменена. Из выражения (2.21) имеем $j\omega \mathbf{R}\mathbf{V}_r - \omega \mathbf{I}\mathbf{V}_r =$

--- $ARV_r - jAIV_r = B_r$, что, в свою очередь, можно представить в виде двух систем

$$\begin{aligned} ARV_r - AIV_r &= 0, \\ ARV_r + \omega IV_r &= -B_r. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из первой системы при $\omega \neq 0$ следует матричное соотношение между векторными вещественными и мнимыми ЧХ:

$$RV_r = AIV_r / \omega. \quad (2.23)$$

Подставляя (2.23) во вторую из систем (2.22), получим систему уравнений с действительными коэффициентами:

$$(A^2 + \omega^2 E)IV_r = -\omega B_r, \quad (2.24)$$

решение которой можно осуществить, используя вариант алгоритма Гаусса для действительных данных.

Программа для вычисления таблицы значений ЧХ по матрицам нормальной формы записан в NW точках интервала $\{WH, WK\}$ может иметь следующий вид:

```

"РАЗР"ОБ.LW = (WK/WH) * (1/(NW-1)); NT=1; W =
= WH; "ДЛ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"J=1;"Ш"1"ДО"
Н"ВЫП"ВВ[I, J]=Σ(K=1, N, AI[I, K]×AI[K, J]);
LW2=W×W; "ДЛ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"J=1
"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"А[I, J]=ВВ[I, J]; "ДЛ"1=1;"Ш"1"
ДО"Н"ВЫП"(А[I, I]=A[I, I]+W2; А[I, N+1]=
=BR[I]×W); "ДЛ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"Р[I]=1;
"ДЛЯ"K=1;"Ш"1"ДО"Н-1"ВЫП"(E=O; "ДЛЯ"1=K;"Ш"
1"ДО"Н"ВЫП""ДЛЯ"J=K;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""E"ABS
(E)-ABS(A[I, J])<O"ТО"(E=A[I, J]; B=I; C=J);
"E"K=B"ТО"(НА"Л); "ДЛЯ"J=K;"Ш"1"ДО"Н+1
"ВЫП"(S=A[K, J]; A[K, J]=A[B, J]; A[B, J]=S);
J"E"K=C"ТО"(НА"Л); "ДЛЯ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"
(S=A[I, K]; A[I, K]=A[I, C]; A[I, C]=S); D=P[K];(2.25)
P[K]=P[C]; P[C]=D; L="ДЛЯ"1=K+1;"Ш"1"ДО"Н"
ВЫП"(M=A[I, K]/A[K, K]; "ДЛЯ"J=K;"Ш"1"ДО"Н+1
"ВЫП"А[I, J]=A[I, J]-M×A[K, J]); A[N, N+1]=
A[N, N+1]/A[N, N]; A[N, N]=1; "ДЛЯ"1=N;"Ш"-
-1"ДО"1"ВЫП"(S=O; "ДЛЯ"K=O;"Ш"1"ДО"Н-1-1
"ВЫП"S=S+A[N-K, N+1]×A[I, N-K]; A[I, N+1]=
=(S+A[I, N+1])/A[I, I]; "ДЛЯ"1=1;"Ш"1"ДО"Н-1
"ВЫП"("ДЛЯ"K=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""E"Р[K]=1"ТО"
("E"K=1"ТО"(НА"G)"ИИА"(S=A[I, N+1]; A[I, N+
+1]=A[K, N+1]; A[K, N+1]=S; D=P[I]; P[I]=P[K];
P[K]=D; "ИА"G)); G.); "ДЛ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"
P[I]=A[I, N+1]; "ДЛ"1=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"RX[I]=
=Σ(K=1, N, AI[I, K]×P[K])/W; IY=O; RY=DGR;
"ДЛ"K=1;"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(RY=RY+CG[K]×RX[K];
IY=IY+CG[K]×P[K]);

```


При необходимости получения амплитудных и фазовых ЧХ программу (2.25) следует продолжить: $R = \sqrt{R_V \times R_V + I_V \times I_V}$; $\Phi = \text{ARCTG}(I_V/R_V)$; "E" $R_V < 0$ "TO" ("E" $I_V > 0$ "TO" ($\Phi = 3.14159265 + \Phi$) "ИЛИ" ($\Phi = -3.14159265 + \Phi$)); $LGR = 20 \times \times LG(R)$; $\Phi = \Phi \times 57.29578$;

Операторная часть программы (2.25) завершается следующим образом: "ВЫВ" "ТАБЛ" 1, NT, W, LGR, Φ ; NT=NT+1; W=W $\times$ LW; "E" NT $\leq$ NW "TO" ("ИЛИ" 1) ;

Приведем пример описательной части. Система с одним входом и выходом описывается матрицами:

$$A = \begin{Bmatrix} -2 & 0 \\ 10 & -5 \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad C = (0, 1); \quad d = 0.$$

Требуется вычислить логарифмические ЧХ в пяти точках ($NW=5$) в диапазоне $WH=1$, $WK=10$.

Описательная часть запишется так:

"ГДЕ" $WH=1$; $WK=10$; $NW=5$; $N=2$; $DGR=0$; $AI[2, 2] = -2, 0, 10, -5$; $BR[2] = 2, 0$; $CG[2] = 0, 1$; $P[2]$; $RX[2]$; $A[2, 3]$; $BB[2, 2]$ "КОН" ;

В описательной части указаны рабочие массивы $P[n]$, что соответствует вектору I_V , $A[n, n+1]$ — расширенная матрица и $BB[n, n]$ — массив, где записаны элементы A^2 ; матрица коэффициентов A заполняет построчно массив AI .

Результат для приведенного примера имеет вид:

"ТАБЛИЦА" 1

NT	W	LGR	Φ
1	1	.488122 ₁₀ 1	.578748 ₁₀ 2
2	.177827 ₁₀ 1	.297352 ₁₀ 1	.612194 ₁₀ 2
3	.316224 ₁₀ 1	.881200 ₁₀ 0	.899997 ₁₀ 2
4	.562331 ₁₀ 1	.702640 ₁₀ 1	.118780 ₁₀ 3
5	.999976 ₁₀ 1	.151186 ₁₀ 2	.142125 ₁₀ 3

2.2.8. Переход от системы разностных уравнений в нормальной форме к частотным характеристикам (переход $3^* \rightarrow 5^*$). Для общности предположим, что вход $f(k)$ и выход $y(k)$ векторные. Пусть все собственные значения матрицы коэффициентов A принадлежат единичному кругу, т. е. система устойчива.

Аналогично случаю непрерывных операторов можно получить выражение для дискретной передаточной функции по выбранному каналу $f_r - y_r$:

$$\Phi_{r^*}^*(z) = C_r^*(zE - A^*)^{-1} B_r^* + d_r^* = G_{r^*}^*(z) D^*(z)$$

и, зная коэффициенты полиномов $G_{r^*}^*$ и D^* , вычислять значения ЧХ по программе (2.20). Однако получение коэффициентов дробно-рациональной передаточной функции $\Phi_{r^*}^*(z)$ в общем

случае, как было показано в п.п. 2.2.1, 2.2.2, представляет собой самостоятельную вычислительную проблему.

Значения ЧХ могут быть вычислены непосредственно по матрицам A^* , B^* , C^* и D^* при фиксированных номерах входа $j_r(k)$ и выхода $y_r(k)$.

Обозначим через RV_r и IV_r векторы вещественных и мнимых ЧХ при фиксированном номере входа r :

$$V_r(j\omega) = RV_r + jIV_r.$$

Система уравнений относительно искомого комплексного вектора $V_r(j\omega)$ имеет вид

$$(\exp[j\omega T] E - A^*) V_r = B_r^*.$$

Из этой системы n -го порядка с комплексными элементами можно получить систему порядка $2n$ с действительными элементами

$$\begin{aligned} (cE - A^*) RV_r - sIV_r &= B_r^*, \\ sRV_r + (cE - A^*) IV_r &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $c = \cos \omega T$, $s = \sin \omega T$.

Увеличение порядка системы нежелательно, поэтому, воспользовавшись особенностью структуры матрицы коэффициентов (2.26), запишем связь между векторами вещественных и мнимых ЧХ:

$$RV_r = (cE - A^*) IV_r s. \quad (2.27)$$

Подставив выражение (2.27) в первое уравнение (2.26), получим систему

$$[(cE - A^*)^2 + s^2 E] IV_r = -sB_r^*.$$

Для заданных номеров входа r и выхода y по векторам RV_r и IV_r значения вещественной и мнимой ЧХ дискретной системы вычисляются просто:

$$\begin{aligned} RY_{yr} &= C_y^* RV_r + d_{yr}^*, \\ IY_{yr} &= C_y^* IV_r. \end{aligned}$$

Программа для вычисления значений ЧХ по матрицам нормальной формы записи приведена ниже:

```
"РАЗ"7.1.WT=W*T; C=COS(WT); S=SIN(WT); "ДЛ"
I=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"J=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"AC
[I, J]="E"1=J"ТО"(C--AI[I, J])"ИНА"(-AI[I, J]);
"ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"J=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"
BV[I, J]=Σ(K=1, N, AC[I, K]×AC[K, J]); "ДЛ"1=1"Ш"
1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"J=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"A[I, J]=
"E"1=J"ТО"(BV[I, J]+S↑2)"ИНА"BV[I, J]; "ДЛ"1=
```

$I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''(A[I, N+1] = -S \times BR[I]);$ $''ДЛ''$
 $I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''P[I] = I;$ $''ДЛЯ''K = I''Ш''I''ДО''$
 $N''I''ВЫП''(E=O; ''ДЛЯ''I = K''Ш''I''ДО''N''ВЫП''''ДЛЯ''$
 $J = K''Ш''I''ДО''N''ВЫП''''E''ABS(E) -- ABS(A[I, J]) < O$
 $''ТО''(E = A[I, J]; B = I; C = J); ''E''K = B''ТО''(''НА''Л);$
 $''ДЛЯ''J = K''Ш''I''ДО''N+1''ВЫП''(S = A[K, J]; A[K, J] =$
 $= A[B, J]; A[B, J] = S); Л.''E''K = C''ТО''(''НА''L); ''ДЛЯ''$
 $I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''(S = A[I, K]; A[I, K] = A[I, C];$
 $A[I, C] = S); D = P[K]; P[K] = P[C]; P[C] = D; Л.''ДЛЯ''I =$
 $K + I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''(M = A[I, K]/A[K, K]; ''ДЛЯ''J =$
 $K''Ш''I''ДО''N+1''ВЫП''A[I, J] = A[I, J] - M \times A[K, J]);$
 $A[N, N+1] = A[N, N+1]/A[N, N]; A[N, N] = 1;$
 $''ДЛЯ''I = N''Ш''I''ДО''N''ВЫП''(S = O; ''ДЛЯ''K = O''Ш''$
 $I''ДО''N - 1''ВЫП''S = S + A[N - K, N+1] \times A[I, N - K];$
 $A[I, N+1] = (-S + A[I, N+1])/A[I, I]; ''ДЛЯ''I = I''Ш''(2.28)$
 $I''ДО''N - 1''ВЫП''(''ДЛЯ''K = I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''''E''$
 $P[K] = I''ТО''(''E''K = I''ТО''(''НА''G))''ИНА''(S = A[I, N+1];$
 $A[I, N+1] = A[K, N+1]; A[K, N+1] = S; D = P[I];$
 $P[I] = P[K]; P[K] = D; ''НА''G); G); ''ДЛЯ''I = I''Ш''$
 $I''ДО''N''ВЫП''P[I] = A[I, N+1]; ''ДЛ''I = I''Ш''I''ДО''$
 $N''ВЫП''RX[I] = (-\sum_{K=1, N} AC[I, K] \times P[K])/SIN$
 $(WT)); RY = DGR; IY = 0; ''ДЛ''K = I''Ш''I''ДО''N''ВЫП''$
 $(RY = RY + CG[K] \times RX[K]; IY = IY + CG[K] \times P[K]);$
 $''ВЫВ''''СТР'', WT, ''ПРОБ'', RY, ''ПРОБ'', IY; LGR =$
 $= 10 \times LG(RY \times RY + IY \times IY); \Phi = ARCTG(IY/RY); ''E''$
 $RY < O''ТО''(''E''IY > O''ТО''(\Phi = 3.14159265 + \Phi) ''ИИ''A''$
 $(\Phi = -3.14159265 + \Phi); \Phi = \Phi \times 57.29578; ''ВЫВ''''СТР'',$
 $WT, ''ПРОБ'', LGR, ''ПРОБ'', \Phi$

Описательная часть программы (2.28) содержит информа-
 цию о значении частоты $0 \leq \omega T < \pi$, порядке системы n , коэффи-
 циенте обхода d_{γ}^* , массивах матриц C_{γ}^* , B_{γ}^* , а также двумерный
 массив коэффициентов системы AI . Например, система второго
 порядка

$$A^* = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0,7073 & 0,6065 \end{bmatrix}, \quad B_{\gamma}^* = \begin{bmatrix} 0,1812 \\ 0,0798 \end{bmatrix}, \quad C_{\gamma}^* = (01), \quad d_{\gamma}^* = 0$$

будет иметь следующую описательную часть: $''ГДЕ''W=1;$
 $T=1; N=2; DGR=0; CG[2]=0, 1; BR[2]=.1812, .0798;$
 $AI[2, 2]=.8187, 0, .7073, .6065; P[2]; RX[2]; AC[2, 2];$
 $A[2, 3]; BV[2, 2]''КОИ''$. Результат счета имеет вид:

а) при $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$

$$WT = .10000000_{10}0 \quad RY = .13283530_{10}1 \quad IY = -.11436334_{10}1 \\
 WT = .10000000_{10}0 \quad LGR = .48748042_{10}1 \quad \Phi = -.40726507_{10}2$$

б) при $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$

$$WT = .10000000_{10}1 \quad RY = -.16533545_{10}0 \quad IY = -.27851450_{10}-1 \\
 WT = .10000000_{10}1 \quad LGR = -.15511158_{10}2 \quad \Phi = -.17043806_{10}3$$

2.2.9. Переход от дифференциального уравнения n -го поряд-

ка или передаточной функции (изображения по Лапласу) к временным характеристикам (переход 1, 2 $\rightarrow$ 4).

Переход от дифференциального уравнения n -го порядка к временным характеристикам $w(t)$, $h(t)$ или его решение в случае воздействия $f(t)$ в виде квазиэкспоненты может осуществляться классическими методами, основными трудностями которых являются определение корней характеристического полинома и вычисление постоянных интегрирования. Дополнительная особенность решения дифференциального уравнения n -го порядка в случае обобщенных функций $f(t)$ (δ -или единичной ступенчатой функции) состоит в необходимости определения посленулевых начальных условий $y(0^+)$, вызванных этими воздействиями.

Трудность решения дифференциального уравнения n -го порядка частично снимается при использовании операционного исчисления — переходе от оригиналов к изображениям. В этом случае легко определяется изображение искомого решения с учетом предначальных условий $y(0^-)$ и исключается этап вычисления постоянных интегрирования. Разумеется, для нахождения аналитического выражения оригинала $y(t)$ как функции времени необходимо найти корни характеристического полинома и коэффициенты разложения изображения на сумму простейших дробей.

Можно написать соответствующую программу получения аналитического выражения для $y(t)$ по дробно-рациональному изображению $Y(s)$, которая будет содержать подпрограммы вычисления корней (с учетом их кратности) и разложения дробно-рационального выражения $Y(s) = A(s)/B(s)$ на сумму простейших дробей [73, 98].

Имеются алгоритмы непосредственной реализации обратного преобразования Лапласа, которые по изображению $Y(s)$ для любого фиксированного $t \geq 0$ позволяют вычислить $y(t)$ [99]. Достоинство этих алгоритмов заключается в возможности вычисления $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ для любого изолированного $t > 0$, а недостаток — в значительном времени вычислений одной точки.

При относительно малых $t \rightarrow 0$ для вычисления $y(t)$ можно воспользоваться рядом Тейлора [75]: $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(0^+) t^i / i!$.

Значения $y^{(i)}(0^+)$ легко вычисляются по дробно-рациональному изображению $Y(s)$ (см. 7.5), однако для сколько-нибудь больших t приходится удерживать значительное число членов ряда, и время вычислений резко увеличивается.

Вопросам вычисления временных характеристик систем управления в литературе уделяется много внимания [2, 32, 36, 64, 66, 73, 77, 90]. Ряд численных методов решения дифференциальных уравнений, а также реализующие их алгоритмы приведены в работах [5, 9, 16, 33, 69, 75].

2.2.10. Переход от разностного уравнения n -го порядка или дискретной передаточной функции (z -изображения) к последовательностям (переход $1^*, 2^* \rightarrow 4^*$) может быть осуществлен несколькими стандартными методами получения обратного z -преобразования: 1) разложение z -изображения в виде дробно-рациональной функции на сумму простейших дробей с известными (табличными) оригиналами, что требует вычисления полюсов; 2) деление полиномов с целью получения разложения по степеням z^{-1} ; 3) использование рекуррентной формулы [14, 28]. Ввиду достаточной известности первых двух методов остановимся только на последнем, более выгодном в вычислительном отношении. В отличие от алгоритма, приведенного в работе [28], ниже приводится алгоритм, позволяющий вычислить значение оригинала по вектору:

$$y_0 = (y(1), y(2), \dots, y(n))^T,$$

$$y_1 = (y(n+1), y(n+2), \dots, y(2n))^T,$$

$$y_i = (y(in+1), y(in+2), \dots, y(in+n))^T, \quad i=0, 1, 2, \dots,$$

по z -изображению следующего вида:

$$Y(z) = \frac{g_{n-1}z^{n-1} + \dots + g_1z + g_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}.$$

Очевидно, что при этом $y(0)=0$. Если же $g_n \neq 0$, то $y(0)=g_n$; в этом случае z -изображение следует представить в виде суммы g_n и правильной дроби со степенью числителя ниже степени знаменателя.

Матричное рекуррентное соотношение для вычисления каждого последующего вектора значений y_i по предыдущему y_{i-1} имеет вид

$$\begin{aligned} Ay_0 &= G_0, \\ Ay_1 &= \hat{A}G_0 = G_1, \\ &\dots \dots \dots \\ Ay_i &= \hat{A}G_{i-1} = G_i, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Вычисление $y_i, i=0, 1, 2, \dots$, по системам уравнений с треугольной матрицей A осуществляется очень просто; так же легко вычисляются правые части $G_i = \hat{A}G_{i-1}$.

2.2.11. Переход от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме к временным характеристикам (переход $3 \rightarrow 4$).

Решение неоднородного уравнения в векторно-матричной форме (1.3) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t) \mathbf{v}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} f(\tau) d\tau$$

или

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{v}(t) + d f(t) = \mathbf{C} \Phi(t) \mathbf{v}(0) + \\ + \int_0^t \mathbf{C} \Phi(t-\tau) \mathbf{B} f(\tau) d\tau + d f(t),$$

откуда следуют выражения для импульсной переходной функции

$$w(t) = \mathbf{C} (\exp \mathbf{A} t) \mathbf{B} + d \delta(t)$$

и переходной характеристики

$$h(t) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} (\exp \mathbf{A} t - \mathbf{E}) \mathbf{B} + d 1(t).$$

Из этих выражений видно, что алгоритм вычисления значений $y(t)$ для любого $t \geq 0$ должен включать в себя вычисление значений матрицы перехода $\Phi(t) = \exp \{\mathbf{A} t\}$.

Матрица перехода может быть вычислена по предварительно найденным аналитическим выражениям [90]. Аналитическое выражение для $\Phi(t)$ может быть также получено по формуле Лагранжа-Сильвестра (случай простых собственных значений):

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} t} = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \dots (\mathbf{A} - s_{i-1} \mathbf{E}) (\mathbf{A} - s_{i+1} \mathbf{E}) \dots (\mathbf{A} - s_n \mathbf{E})}{(s - s_1) \dots (s - s_{i-1}) (s - s_{i+1}) \dots (s - s_n)} e^{s_i t}.$$

2.2.12. Переход от системы разностных уравнений в нормальной форме к последовательностям (переход $3^* \rightarrow 4^*$). Система разностных уравнений

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}^* \mathbf{v}(k) + \mathbf{B}^* f(k), \\ y(k) = \mathbf{C}^* \mathbf{v}(k) + d^* f(k)$$

является готовым рекуррентным соотношением для получения искомой последовательности $y(k)$, $k=0, 1, 2, \dots$. По существу, это готовый алгоритм перехода.

2.2.13. Переход от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме к системе разностных уравнений в нормальной форме (переход $3 \rightarrow 3^*$) связан с дискретизацией времени $t=0, T, 2T, \dots, kT, \dots$ и с рассмотрением взаимосвязи последовательностей $y^*(k)$ и $j^*(k)$ вместо взаимосвязи процессов $y(t)$

и $\dot{y}(t)$. Естественно, что при выборе различных шагов квантования T получаются различные разностные уравнения и входные последовательности $f^*(k)$.

Представляет интерес такой выбор матриц A^* , B^* , C^* и d^* по исходным матрицам A , B , C и d , чтобы при любых начальных условиях и для всех воздействий имело место $y^*(k) = y(t)|_{t=kT}$, $k=0, 1, 2, \dots$. Многие хорошо известные численные методы решения дифференциальных уравнений так называемыми разностными методами (Эйлер, Рунге-Кутта и др. [8]) сводятся к переходу к системе разностных уравнений и отличаются друг от друга способом получения рекуррентного соотношения — системы разностных уравнений. Как правило, исследователя редко интересует подробное протекание процессов регулирования на всем их протяжении; обычно требуется с крупным шагом T быстро просмотреть характер кривой и оценить основные показатели качества. Выбор большого T приводит к большому объему вычислений переходной матрицы при сохранении заданной точности перехода — разницы между решениями $y(t)$ и $y^*(k)$ дифференциального и разностного уравнений. Взаимосвязь ошибки $|y(kT) - y^*(k)|$ и интервала квантования T в общем случае зависит от k , от свойств дифференциального уравнения и от характера воздействия $f(t)$.

Вначале рассмотрим случай автономной системы, т. е. однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} dv/dt &= Av, \\ y &= Cv. \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp \{A(t - t_0)\} v(t_0), \\ y(t) &= Cv(t). \end{aligned}$$

Положим $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, тогда решение запишется так:

$$\begin{aligned} v[(k+1)T] &= \exp \{AT\} v[kT], \\ y[(k+1)T] &= Cv[(k+1)T]. \end{aligned}$$

Отсюда следует система разностных уравнений

$$\begin{aligned} v(k+1) &= A^*v(k), \\ y(k+1) &= Cv(k+1), \quad v(0), \end{aligned}$$

решение которой в точности равно решению дифференциальных уравнений в соответствующих точках $t = kT$. Таким образом, для однородных систем получено следующее соотношение для матриц

$$\begin{aligned} A^* &= \exp \{AT\}, \\ C^* &= C. \end{aligned}$$

Собственные значения z_i и s_i , матриц A^* и A связаны той же функциональной зависимостью, что и матрицы [26]: $z_i = \exp\{s_i T\}$, поэтому, если непрерывная система устойчива и матрица A имеет собственные значения в левой полуплоскости, то дискретная система также устойчива и матрица A^* имеет собственные значения в единичном круге.

Некоторые сведения о вычислении матричного экспоненциала были даны в п. 2.2.11. В литературе приводится много различных способов вычисления матрицы перехода (см., например, [2, 16, 36, 48] и др.). Одним из универсальных способов определения матрицы $A^* = \Phi(T)$, не связанных с вычислением собственных значений, является представление $\Phi(T)$ отрезком ряда Тэйлора:

$$A^* = \Phi(T) = \sum_{r=0}^M A^r T^r / r!,$$

где число членов M определяется свойствами системы и интервалом T .

Следует отметить, что выбор $M=1$ соответствует методу Эйлера, а $M=4$ — методу Рунге-Кутты четвертого порядка [89]. В силу малости M эти методы требуют выбора сравнительно малого T (шага интегрирования).

Матричный полином наиболее удобно вычислять с применением схемы Горнера:

$$A^* = E + TA \left(E - \frac{T}{2} A \left(E + \frac{T}{3} A \left(E - \dots \left(E - \frac{T}{M} A \right) \dots \right) \right) \right).$$

Если матрица A имеет форму Фробениуса, реализация алгоритма вычисления A^* получается наиболее эффективной. Действительно, представим A как сумму двух матриц $A = U + V$, где

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда имеет место

$$A^* = E + T(U + V) \times \left(E + \frac{T}{2} (U + V) \left(E + \dots \left(E + \frac{T}{M} (U + V) \right) \dots \right) \right).$$

Если учесть, что $AR = UR + VR$, где R — некоторая матрица произвольного вида, то алгоритм вычисления $A^* = \Phi(T)$ будет содержать многократное умножение некоторой матрицы R , получающейся в результате выполнения каждого цикла, на матри-

цу сдвига U (что приводит к смещению строк R на одну вверх) и на матрицу V . В произведении VR первые $n-1$ строк будут нулевыми, а последняя является произведением последней (ненулевой) строки V на R . Таким образом, в предлагаемом способе вычисления A^* , т.е. переходной матрицы $\Phi(T)$, операция перемножения матриц сведена к перемножению векторов и, кроме того, исключена процедура формирования факториалов, что уменьшает вероятность переполнения разрядной сетки ЭВМ. Программа вычисления A^* , реализованная на языке АЛМНР-65, приведена ниже:

```
"РАЗР"6."ДЛ"1:=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"ДЛ"J=1"Ш"1
"ДО"Н"ВЫП"В[I, J]="E"1=J"ТО"(1)"ИНА"(0); L=M;
P.R=T/L; "ДЛ"1:=1"Ш"1"ДО"Н"1"ВЫП""ДЛ"J=1"Ш"1
"ДО"Н"ВЫП"Ф[I, J]=B[I+1, J]×R; "ДЛ"J=1"Ш"1(2.29)
"ДО"Н"ВЫП"Ф[N, J]=(Σ(K=1, N, A[K]×B[K, J]))×R;
"ДЛ"1:=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"Ф[I, J]:=1÷Φ[I, J]; L=
:=L-1; "E"1>0"ТО"("ДЛ"1:=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП""ДЛ"
J=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"В[I, J]:=Φ[I, J]; "ИА"Р); "ВЫВ"
"МАС"Ф
```

Описательная часть программы (2.29) имеет вид "ГДЕ" $N=n$; $M=\dots$; $T=\dots$; $A[n]=\dots$; $B[n, n]$; $\Phi[n, n]$ "КОН". Здесь приняты следующие обозначения: A — массив коэффициентов последней строки матрицы A , т.е. коэффициентов характеристического полинома, B — вспомогательный массив, Φ — двумерный массив результата $A^*=\Phi(T)$.

Если рассматривается неавтономная система

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= Av + Bf, \\ y &= Cv + df, \end{aligned}$$

можно выделить два случая: 1) функция $f(t)$ на всем интервале исследований известна заранее; 2) функция $f(t)$ является выходом каких-то других подсистем.

В первом случае можно найти автономную расширенную систему, представляющую собой последовательное соединение системы-генератора и исследуемой системы. Однородные дифференциальные уравнения и начальные условия системы-генератора выбираются таким образом, чтобы решение достаточно хорошо аппроксимировало $f(t)$. По матрицам A , B , C , d неавтономной исследуемой системы и A_r , B_r , C_r автономной системы-генератора легко найти матрицы A_k , B_k , C_k и начальные условия автономной расширенной системы, записанной для некоторого базиса, в общем случае отличающегося от естественного. Тем самым задача перехода $3 \rightarrow 3^*$ в этом случае сведена к уже рассмотренной.

Во втором случае задачу нельзя свести к рассмотрению автономного случая, а выбор интервала квантования T определяется не только свойствами данной подсистемы, но также спектром воздействия $f(t)$, т. е. свойствами тех подсистем, выходом которых оно является. Дискретизация дифференциальных уравнений осуществляется тогда через их решение при том или ином виде интерполяции $f_k(t)$ на интервале между kT и $(k+1)T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[(k+1)T] &= \Phi(T) \mathbf{v}(kT) + \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} f_k(\tau) d\tau, \\ \mathbf{v}[(k+1)T] &= \mathbf{C} \mathbf{v}[(k+1)T] + d f(kT), \quad \mathbf{v}(0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \Phi(T) = \exp \mathbf{A}T, \\ \mathbf{C}^* &= \mathbf{C}, \quad d^* = d. \end{aligned}$$

Выражение для матрицы входа $\mathbf{B}^*$ определяется в зависимости от вида интерполяции или, что то же самое, вида фиксирующего элемента.

В отсутствие фиксатора воздействие представляется последовательностью δ -функций: $f_k(t) = T f(kT) \delta(t)$ и матрица входа имеет вид $\mathbf{B}^* = \Phi(T) \mathbf{B}T$.

Если применена кусочно-постоянная аппроксимация входного воздействия $f_k(t) = f(kT)$, то $\mathbf{B}^* = \mathbf{H}(T) \mathbf{B}$, где интегральная матрица перехода $\mathbf{H}(T) = \int_0^T \Phi(T-\tau) d\tau$.

Случай фиксатора нулевого порядка представляет больший интерес, так как при одном и том же спектре $f(t)$ позволяет выбрать более крупный шаг T .

Вычисление $\mathbf{H}(T)$ можно осуществить по формуле $\mathbf{H}(T) = -\mathbf{A}^{-1}(\Phi(T) - \mathbf{E})$, используя разложение в ряд. Ввиду схожести разложений $\Phi(T)$ и $\mathbf{H}(T)$ алгоритм их вычисления целесообразно объединить в один. Соответствующая программа [34] приведена ниже:

```
"РАЗР"6.F = A[N+1]; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО" N"ВЫП"
A[1] = A[1]/F; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО" N"ВЫП" "ДЛ"J =
1"Ш"1"ДО" N"ВЫП"R[1, J] = "E"1-J"TO"(1)"ИП" (O),
I = M; I.P = T/I; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО" N 1"ВЫП" "ДЛ"J =
1"Ш"1"ДО" N"ВЫП"Ф[1, J] = R[1+1, J] × P; "ДЛ"J = 1"Ш"
1"ДО" N"ВЫП"Ф[N, J] = (Σ (K=1, N, A[K] × R[K, J])) × (2.30)
/P; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО" N"ВЫП" Ф[1, 1] = 1+Ф[1, 1];
I = J - 1; "E"1 > 0"TO" ("E"1 > 1"TO" ("ИА"2)"ИИ"
("ИА"3)); "ИА"4; 2;"ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО" N"ВЫП" "ДЛ"J
```

$\equiv \Gamma \Pi \Gamma \Gamma \text{ДО}^* \text{N}^* \text{ВЫП}^* \text{R}[I, J] = \Phi[I, J]; \text{"НА"}^* \text{Г}; 3. \text{ГДГ}^* \text{Г}$
 $\equiv \Gamma \Pi \Gamma \Gamma \text{ДО}^* \text{N}^* \text{ВЫП}^* \text{ДГ}^* \text{Г} \equiv \Gamma \Pi \Gamma \Gamma \text{ДО}^* \text{N}^* \text{ВЫП}^* \text{Г}$
 $\Pi[I, J] = \Phi[I, J] \times \Gamma; \text{"ВЫВ"}^* \text{"МАСС"}^* \text{Г}; \text{"ПЯ"}^* \text{Г}; 4. \text{"ВЫВ"}^* \text{"МАСС"}^* \Phi$

Описательная часть к программе (2.30) имеет вид: "ГДЕ" $N=n; M=\dots; T=\dots; A[n]=\dots, \dots; B[n, n]; \Phi[n, n]; \Pi[n, n]$ "КОН" Зная $H(T)$, легко получить матрицу входа B^* .

2.2.14. Переходы между временными и частотными характеристиками, а также от них к уравнениям и передаточным функциям. Если временные (1.4) или частотные (1.5) характеристики заданы точно в формульном виде, то достаточно просто составить алгоритмы преобразования этих формул, либо алгоритмы вычисления по ним коэффициентов полиномов уравнений или передаточных матриц.

Если временные или частотные характеристики заданы таблично, т. е. значениями только на конечном множестве аргументов t или ω , то переходы между ними неоднозначны. Получение дифференциальных уравнений или передаточных функций при этом также не может быть осуществлено единственным образом и редуцируется как аппроксимационная задача. Алгоритмы соответствующих приближенных переходов разрабатываются в рамках алгоритмического обеспечения задач идентификации [1, 94].

2.2.15. Опосредованные переходы между различными формами представления непрерывных и дискретных операторов. Выше были рассмотрены некоторые важные алгоритмы непосредственных переходов между различными формами представления линейных операторов. Непосредственным переходом между формами представления операторов в графе взаимосвязи форм (см. рис. 14) соответствуют дуги.

Не все переходы к настоящему времени обеспечены эффективными алгоритмами, поэтому представляет интерес рассмотрение опосредованных переходов. Это имеет значение и в силу необходимости контролировать результаты вычислений. Опосредованным переходам в графе взаимосвязи форм представления операторов (см. рис. 14) соответствуют пути, состоящие из нескольких дуг.

Одним из примеров опосредованного перехода является известный переход от дифференциального уравнения n -го порядка к временным характеристикам, осуществляемый путем численного решения дифференциальных уравнений. Последовательность переходов (путь в графе) может быть описана следующим образом: $1(2) \rightarrow 3 \rightarrow 3^* \rightarrow 4^* \rightarrow 4$. При этом способе построения временных характеристик, во-первых, по дифференциальному уравнению n -го порядка строится система дифференциальных уравнений в нормальной форме; во-вторых, выбирается шаг квантовая T и вычисляются матрицы A^*, B^*, C^* и d^* системы разностных уравнений; в-третьих, строится последова-

тельность и, в-четвертых, путем интерполяции того или иного вида находятся искомые временные характеристики.

Другим примером опосредованного перехода может служить переход от дифференциального уравнения n -го порядка к разностному или от передаточной функции к дискретной передаточной функции: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 4^* \rightarrow 2^*$. Если передаточную функцию $W(s)$ разложить на сумму простейших дробей (вычислив полюсы), то легко найти оригиналы, соответствующие слагаемым. Путем дискретизации этих экспонент $t=kT$, $k=0, 1, 2, \dots$ находятся последовательности, а по ним с помощью формул z -преобразования — слагаемые $W(z)$.

Ранее упоминались опосредованные переходы от нормальной формы дифференциальных или разностных уравнений через передаточные функции к частотным характеристикам ($3 \rightarrow 1$ (2) $\rightarrow 5$ или $3^* \rightarrow 1^*$ (2^*) $\rightarrow 5^*$).

3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ И СВОЙСТВА СИСТЕМ

3.1. Некоторые топологические понятия

Имея информацию о топологии системы, т. е. о взаимосвязях переменных или звеньев системы, можно установить целый ряд важнейших системных свойств, которые, как правило, не изменяются при дальнейшем снятии неопределенности. Установление этих свойств и их исследование требуют введения некоторых топологических понятий, вытекающих из рассмотрения графов.

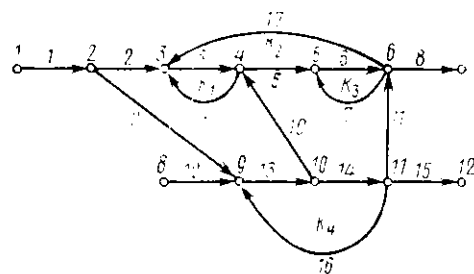


Рис. 15.

Путь $P_{\gamma r}$ между начальной r и конечной γ вершинами графа G представляет собой направленную последовательность инцидентных дуг (смежных вершин), в которой каждая дуга (вершина) встречается только раз. Между вершинами r и γ графа путь может отсутствовать, может быть один путь $P_{\gamma r}$

или несколько путей $P_{\gamma r}^k$, $k=1, 2, \dots$. Путь $P_{\gamma r}^k$ можно задать перечислением множеств вершин $P_{\gamma r}^{vk} = \{r, \dots, \gamma\}$, номеров дуг $P_{\gamma r}^{wk}$ или пар номеров вершин концов j и начал i дуг $P_{\gamma r}^{ik} = \{(i, j)\}$. Например, для графа, изображенного на рис. 15, пути между вершинами 7 и 8 задаются множествами вершин $P_{78}^{x1} = \{7, 6, 5, 4, 10, 9, 8\}$, $P_{78}^{x2} = \{7, 6, 11, 10, 9, 8\}$, множествами номеров дуг $P_{78}^{w1} = \{8, 6, 5, 10, 13, 12\}$, $P_{78}^{w2} = \{8, 11, 14, 13, 12\}$ или множествами дуг, обозначаемых парами вершин: $P_{78}^1 = \{(7, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 10), (10, 9), (9, 8)\}$, $P_{78}^2 = \{(7, 6), (6, 11), (11, 10), (10, 9), (9, 8)\}$.

Для графа G можно говорить о множестве $P_{\gamma\gamma}^h = \{P_{\gamma\gamma}^h\}$ всех путей между вершинами γ и γ .

Контур K представляет собой замкнутый путь, т. е. путь, у которого совпадают начальная и конечная вершины. Любая вершина (дуга) контура может считаться начальной (конечной), поэтому задание контура перечислением вершин (дуг) может начинаться с любой вершины (дуги). Например, контур K_2 графа, изображенного на рис. 15, может быть задан перечислением вершин $K_2^v = \{3, 6, 5, 4, 3\}$, перечислением номеров дуг $K_2^e = \{3, 17, 6, 5\}$ или перечислением пар номеров конечных и начальных вершин дуг $K_2 = \{(3,6), (6,5), (5,4), (4,3)\}$. Очевидно, между любыми двумя вершинами i и j контура существует как «прямой» P_{ij} , так и «обратный» путь P_{ji} вдоль контура.

Множество всех контуров графа G будем обозначать через $\mathcal{K}$. Для графа, изображенного на рис. 15, множество контуров перечисляется следующим образом: $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ или, проще, $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Граф G может не содержать ни одного контура — как модели автоматических систем управления и регулирования такие графы являются вырожденными. Графы автоматических систем регулирования обязательно содержат хотя бы один контур, так как в них реализуется принцип регулирования по отклонению (принцип отрицательной обратной связи). Кроме контура обратной связи, доставляющего информацию о выходе объекта регулирования, в системе регулирования и управления обычно вводится целый ряд корректирующих обратных связей, доставляющих информацию о промежуточных переменных объекта и системы и образующих контуры.

Подграф G_0 , содержащий объединение вершин и дуг всех контуров $K_i \in \mathcal{K}$ графа G , называется контурной частью графа. Среди дуг связанного графа, не принадлежащих ни одному контуру, можно выделить дуги трех типов: 1) ни одна из вершин дуги не принадлежит G_0 (например, дуга (2, 1) на рис. 15); 2) одна вершина дуги принадлежит G_0 (например, дуги (3, 2), (9, 2), (9, 8), (7, 6), и (12, 11) на рис. 15); 3) обе вершины дуги принадлежат G_0 (дуги (4, 10) и (6, 11) на рис. 15).

Два контура K_i и K_j считаются касающимися (соприкасающимися), если имеют хотя бы одну общую вершину, т. е. если множества вершин K_i^v и K_j^v имеют непустое пересечение: $K_i^v \cap K_j^v \neq \emptyset$. Например, контуры K_1 и K_2 графа, изображенного на рис. 15, имеют две общие вершины: $K_1 \cap K_2 = \{3, 4\}$, следовательно, касаются друг друга, а контуры K_1 и K_4 общих вершин не имеют, поэтому не соприкасаются.

Касание контуров γ является бинарным отношением на множестве $\mathcal{K}$ контуров графа и задается множеством пар номеров контуров $(i, j) \in \gamma \equiv \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ — декартово произведение

$\mathcal{H}$ — ребра или множество всевозможных пар. Для рассматриваемого графа (рис. 15) $r = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

Отношение касания контуров рефлексивно и симметрично, но не транзитивно, т. е. из $(i, j) \in r$ и $(j, k) \in r$ не следует $(i, k) \in r$. Следовательно, отношение касания контуров ориентированного графа является отношением толерантности. На графе, изображенном на рис. 15, контур K_1 касается K_2 , контур K_2 касается K_3 , но K_1 не соприкасается с K_3 .

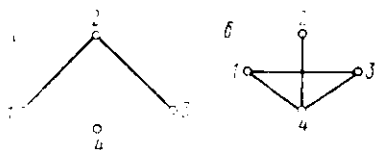
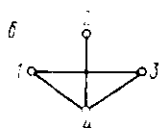


Рис. 16.



Очевидно, бинарное отношение касания контуров на множестве $\mathcal{H}$ является неориентированным графом $R_r = \langle \mathcal{H}, r \rangle$, который назовем графом касания контуров. Для множества контуров $\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4\}$ рассматриваемо-

го графа (рис. 15) на рис. 16а изображена диаграмма графа касания.

Если выделить некоторый контур $K_i \in \mathcal{H}$, то можно говорить о подмножестве контуров $K_i r \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, касающихся контура K_i . Для графа, изображенного на рис. 15, можно выделить следующие подмножества: $K_1 r \mathcal{H} = \{2\}$, $K_2 r \mathcal{H} = \{1, 3\}$, $K_3 r \mathcal{H} = \{2\}$, $K_4 r \mathcal{H} = \emptyset$.

Отношение касания можно распространить и на два подмножества контуров: $\mathcal{H}^l r \mathcal{H}^m = \bigcup_{K_i \in \mathcal{H}^l} K_i r \mathcal{H}^m$.

Могут быть выделены подмножества $K_i \bar{r} \mathcal{H}$ контуров, не касающихся K_i , например, $K_1 \bar{r} \mathcal{H} = \{3, 4\}$, $K_2 \bar{r} \mathcal{H} = \{4\}$, $K_3 \bar{r} \mathcal{H} = \{1, 4\}$, $K_4 \bar{r} \mathcal{H} = \{1, 2, 3\}$.

Аналогично вводится понятие графа некасания контуров $\bar{R}_r = \langle \mathcal{H}, \bar{r} \rangle$ (см. также [86]). Диаграмма графа некасания, введенная для ориентированного графа (рис. 15), изображена на рис. 16б. Очевидно, граф некасания контуров $\bar{R}_r$ является дополнением R_r до полного графа.

Два контура K_i и K_j назовем связанными, если они являются вершинами связного подграфа графа касания R_r , т. е. если они касаются непосредственно (смежные вершины R_r) или связаны последовательно непосредственно соприкасающихся контуров (маршрутом). Контур K_1 и K_3 рассматриваемого графа (рис. 15) не касаются, но являются связанными, так как они касаются одного и того же контура K_2 . Здесь имеется последовательность попарно касающихся контуров (K_1, K_2), (K_2, K_3), чему на графе касания R_r (рис. 16а) соответствует маршрут $\{1, 2, 3\}$. Контур K_4 не связанный; в графе касания R_r он принадлежит разным компонентам связности.

В отличие от отношения касания r связность контуров является бинарным отношением эквивалентности, так как обла-

дает также свойством транзитивности: из $(i, j) \in c$ и $(j, k) \in c$ следует $(i, k) \in c$.

Если ввести понятие графа связности $R_c = \langle \mathcal{K}, c \rangle$, то его подграфы обязательно полные, т. е. в общем случае отношение связности контуров c разбивает множество $\mathcal{K}$ на непересекающиеся подмножества связанных друг с другом контуров $\mathcal{K}^m$, $m = 1, 2, \dots$. На рис. 15 граф G имеет два подмножества связанных контуров $\mathcal{K}^1 = \{1, 2, 3\}$ и $\mathcal{K}^2 = \{4\}$, соответственно граф касания контуров R_K — две компоненты (рис. 16а).

Подграф G_0^m , содержащий вершины и дуги, принадлежащие множеству связанных контуров $\mathcal{K}^m$, будем называть m -й автономной контурной частью графа G . В частном случае контурная часть G_0 может составлять единую автономную контурную часть, все контуры которой связаны; при этом граф касания R_K является связным.

Таким образом, в общем случае граф G распадается на автономные контурные части G_0^m и на не входящие в контурную часть G_0 дуги трех типов.

Легко показать, что автономная контурная часть G_0^m является сильно связным (или сильным) подграфом, т. е. между любыми двумя вершинами $r, \gamma \in G_0^m$ имеется хотя бы один путь $P_{r\gamma}$, и хотя бы один «обратный» путь $P_{\gamma r}$.

Подчеркнем, что собственно автоматические системы регулирования представляют собой сильно связанные графы, а дуги, не принадлежащие контурам, моделируют связи системы с внешней средой или с другими подсистемами сложной системы управления.

Путь $P_{r\gamma}^h$ и контур K_i считаются касающимися, если имеют общую вершину. На графе, изображенном на рис. 15, путь P_{78}^{11} и контур K_1 касаются, так как имеют общую вершину $P_{78}^{11} \cap K_1 = \{4\}$.

Если в графе выделить некоторый путь $P_{r\gamma}^h$, то можно говорить о подмножествах контуров, касающихся этого пути $P_{r\gamma}^h \cap \mathcal{K}$ и не касающихся пути $P_{r\gamma}^h \cap \mathcal{K}$. Например (см. рис. 15), подмножество $P_{78}^{11} \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}$, т. е. путь P_{78}^{11} касается всех контуров, а подмножество $P_{12,8}^{11} \cap \mathcal{K} = \{4\}$. Соответственно можно написать: $P_{78}^{11} \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}$, $P_{12,8}^{11} \cap \mathcal{K} = \{4\}$.

Путь $P_{r\gamma}^h$ и контур K_i назовем связанными, если они касаются непосредственно или путь касается автономной контурной части G_0^m , содержащей контур K_i . В графе, диаграмма которого представлена на рис. 15, путь $P_{11}^{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и контур K_1 несвязанные. Таким образом, отношение пути к контуру может быть трех видов: 1) путь касается контура; 2) путь не касается контура, но связан с контуром; 3) путь

не связан с контуром. Те же виды отношений могут быть между путем P_{ir}^k и подмножеством контуров $\mathcal{H}$.

Если путь и контурная часть несвязанные, то они автономны.

3.2. Топологическая формула для передаточных функций графа

При рассмотрении подсистем сложных систем управления основное внимание уделяется свойствам систем как преобразователей сигналов и соответственно этим свойствам целям подсистем, заданным функционально-целевыми моделями подсистем, например идеальными матрицами передач Φ^* (см. главу 7). Операторы передач представляют собой частные модели систем со связями с внешней средой $M_{\mathcal{F}_{SF}}^u(r)$, переход к которым сопряжен с потерей информации о топологии систем $M_{\mathcal{F}_{SF}}(r)$.

Передача пути P_{ir}^k или разомкнутого контура K_i определяется как композиция передач дуг, образующих пути или контуры.

Передача графа Φ_{ir} от вершины входа $r=1, \dots, l$ к вершине выхода $\gamma=1, \dots, n$ в первую очередь определяется топологическими особенностями графа системы: множеством путей P_{ir}^k , $k=1, 2, \dots$, множествами контуров $\mathcal{H}$ и отношениями касания и связности на множестве контуров, а также касаниями и связностью путей и контуров.

Каждый k -й путь P_{ir}^k , $k=1, 2, \dots$ между вершинами r и γ во взаимосвязи с контурной частью графа G_0 образует канал передачи Φ_{ir}^k между этими вершинами.

В линейных графах передача Φ_{ir} равна сумме передач всех каналов между вершинами r и γ :

$$\Phi_{ir} = \sum_k \Phi_{ir}^k. \quad (3.1)$$

Получение передач каналов Φ_{ir}^k или графа Φ_{ir} означает исключение вершин и дуг графа, кроме вершины r , принятой за вход, и вершины выхода γ , таким образом, что оператор преобразования сигналов между этими вершинами сохраняется. Получение передач для различных r и γ означает также переход к эквивалентному в смысле указанных передач двудольному графу (биграфу).

Каждой вершине графа можно сопоставить уравнение, занесенное в причинно-следственной форме, а графу - систему уравнений. При этом операции получения передачи графа соответствует решение системы уравнений, осуществляемое несколькими способами.

Решению систем уравнений методом исключения соответствуют эквивалентные преобразования сигнальных графов, причем правила преобразований графов основаны на соответствующих преобразованиях систем уравнений. Кроме того, существует другой способ решения, называемый правилом Крамера. При исследовании топологических особенностей графов и свойств систем представляет интерес топологический аналог этого правила — формула Мэсона, оперирующая такими понятиями, как пути, контуры, отношения их касания.

Если k -й путь от вершины r к вершине γ не касается ни одного контура, т. е. $P_{r\gamma}^k \cap \mathcal{K} = \emptyset$, и путь не охвачен обратными связями, то передача канала равна передаче пути: $\Phi_{r\gamma}^k = P_{r\gamma}^k$; если все пути $P_{r\gamma}^k$, $k = 1, 2, \dots$ не связаны с контурами, то в силу (3.1) $\Phi_{r\gamma} = \sum_k P_{r\gamma}^k$. В частном случае это может быть

в графах без контуров ($\mathcal{K} = \emptyset$), моделирующих полностью разомкнутые системы, системы без регуляторов и корректирующих обратных связей.

Более сложными, но вместе с тем и наиболее интересными с точки зрения изучения и формирования системных свойств являются графы систем, содержащие контуры, т. е. всевозможные обратные связи как естественные, так и искусственно вводимые в систему для образования информационных каналов текущего состояния.

Топологическая формула для передачи k -го канала сигнального графа общего вида (формула Мэсона [53]) записывается в следующей форме:

$$\Phi_{r\gamma}^k = P_{r\gamma}^k \Delta_{r\gamma}^k / \Delta, \quad (3.2)$$

где Δ — определитель графа, $\Delta_{r\gamma}^k$ — алгебраическое дополнение (минор) пути $P_{r\gamma}^k$.

Определитель графа Δ характеризует всю контурную часть графа G_0 и обычно записывается в следующем виде:

$$\Delta = 1 - \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} K_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_2} K_{ij} K_{jk} - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{L}_3} K_{ij} K_{jk} K_{ki} + \dots, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{K}$ — множество индексов или номеров контуров, $\mathcal{L}_2 = \{(i, j)\}$ — множество пар индексов некасающихся контуров, $\mathcal{L}_3 = \{(i, j, k)\}$ — множество троек индексов некасающихся троек контуров и т. д. Определитель представляет собой топологическое выражение, отражающее взаимосвязи контуров графа и состоящее из групп слагаемых, соответствующих контурам, парам некасающихся контуров, тройкам некасающихся контуров и т. д. Отметим, что множество $\mathcal{L}_2$ представляет собой отношение некасания контуров $\overline{r}$.

Минор пути Δ_{ir}^k является определителем подграфа, полученного удалением из графа вершин и дуг, образующих путь P_{ir}^k . Иными словами, минор характеризует подмножество контуров $P_{ir}^k \cap \bar{\mathcal{K}}$, не касающихся пути. В частном случае, когда путь не соприкасается с контурной частью, минор пути совпадает с определителем графа, а передача канала — с передачей пути, как это и следует из формулы (3.2).

Если между вершинами r и y существует несколько путей, то формула Мэсона для передачи графа записывается в соответствии с выражением (3.1) в более общем виде:

$$\Phi_{ir} = \left(\sum_k P_{ir}^k \Delta_{ir}^k \right) / \Delta. \quad (3.4)$$

В качестве иллюстрации применения формулы Мэсона получим передачу графа, изображенного на рис. 15, от вершины 1 к вершине 7. Между вершинами 1 и 7 имеются три канала передачи, образованные путями $P_{17}^1 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6)\}$, $P_{17}^2 = \{(2, 1), (9, 2), (10, 9), (4, 10), (5, 4), (6, 5), (7, 6)\}$, $P_{17}^3 = \{(2, 1), (9, 2), (10, 9), (11, 10), (6, 11), (7, 6)\}$, касающимися контурной части G_0 , образованной контурами $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, причем $K_1 = \{(3, 4), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (3, 6)\}$, $K_2 = \{(6, 5), (5, 6)\}$ и $K_4 = \{(10, 9), (11, 10), (9, 11)\}$. Множество пар индексов некасающихся контуров $\mathcal{L}_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$, множество троек $\mathcal{L}_3 = \{(1, 3, 4)\}$, а $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_5 = \dots = \emptyset$.

Определитель графа $\Delta = 1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 + K_1 K_3 + K_1 K_4 + K_2 K_4 + K_3 K_4 - K_1 K_3 K_4$.

Поскольку $P_{17}^1 \cap \bar{\mathcal{K}} = \{4\}$, $P_{17}^2 \cap \bar{\mathcal{K}} = \emptyset$, $P_{17}^3 \cap \bar{\mathcal{K}} = \emptyset$, то миноры путей имеют вид $\Delta_{17}^1 = 1 - K_4$, $\Delta_{17}^2 = 1$, $\Delta_{17}^3 = 1$. Передача графа от вершины 1 к вершине 7 в соответствии с формулой Мэсона (3.4) равна

$$\Phi_{17} = \frac{P_{17}^1 (1 - K_4) + P_{17}^2 + P_{17}^3}{1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 + K_1 K_3 + K_1 K_4 + K_2 K_4 + K_3 K_4 - K_1 K_3 K_4}.$$

Особенность выражений (3.2) — (3.4) заключается в том, что они являются топологическими формулами на уровне таких крупных топологических понятий, как пути, контуры и отношение их касания. Эти выражения имеют смысл и без конкретизации состава путей и контуров, а также структур и параметров их операторов, поэтому могут быть использованы для получения целого ряда важнейших выводов относительно свойств передач и выявления влияния на передачи графа отдельных путей и контуров.

Выражения (3.2) — (3.4) представляют собой функции мно-

гих переменных, аргументами которых являются принятые выше условные обозначения путей и контуров графа или их передач с соответствующими индексами, т. е. номерами. Более детальное изучение систем требует выяснения влияния на передачи или определитель графа операторов отдельных дуг, полиномов числителей и знаменателей передаточных функций дуг, а также параметров операторов дуг. Для этого передаточные функции путей и контуров следует выразить через передаточные функции составляющих их дуг и подставить полученные выражения в формулу Мэсона.

Путь или разомкнутый контур представляют собой последовательности дуг, поэтому их передаточные функции равны произведению передаточных функций этих дуг:

$$P_{\gamma}^k(s) = \prod_{i \in P_{\gamma}^{dk}} W_i(s), \quad (3.5)$$

$$K_i(s) = \prod_{j \in K_i} W_j(s). \quad (3.6)$$

Подстановкой (3.5), (3.6) в выражения (3.2)–(3.4) получают более детализированные выражения для передаточных функций или определителя графа. Для рассмотренного графа (рис. 15) передаточная функция Φ_{71} как функция передач дуг, заданных парами инцидентных вершин, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{71} = & \{(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)(6,5)(7,6)[1 - (10,9)(11,10)(9,11)] + \\ & + (2,1)(9,2)(10,9)(4,10)(5,4)(6,5)(7,6) + (2,1)(9,2)(10,9) \times \\ & \times (11,10)(6,11)(7,6)\} / \{1 - (3,4)(4,3) - (4,3)(5,4)(6,5)(3,6) - \\ & - (6,5)(5,6) - (10,9)(11,10)(9,11) + (3,4)(4,3) \times (6,5)(5,6) + \\ & + (3,4)(4,3)(10,9)(11,10)(9,11) + (6,5)(5,6)(10,9)(11,10) \times \\ & \times (9,11) - (3,4)(4,3)(6,5)(5,6)(10,9)(11,10)(9,11)\}. \end{aligned}$$

В этом выражении для передаточной функции графа записаны только индексы, так как для чисто топологического ранга моделей именно индексы являются информативными.

Выражение для передачи часто записывается с использованием номеров дуг с многократным повторением одного и того же (а потому — неинформативного) символа передаточной функции дуги, например символа W : $\Phi_{71} = \{W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_6 W_7 W_8 \times$
 $\times (1 - W_{13} W_{10} W_{16}) + W_1 W_9 W_{13} W_{10} W_5 W_6 W_8 + W_1 W_9 W_{13} W_6 W_{11} W_8\} /$
 $\{1 - W_3 W_4 - W_3 W_5 W_6 W_9 - W_6 W_7 - W_{13} W_{14} W_{16} + W_3 W_4 W_8 \times$
 $\times W_7 + W_3 W_4 W_{13} W_{14} W_{16} + W_3 W_5 W_6 W_9 W_{13} W_{14} W_{16} + W_6 W_7 W_{13} W_{14} \times$
 $\times W_{16} - W_3 W_4 W_6 W_7 W_{13} W_{14} W_{16}\}.$

Поскольку передаточные функции дуг линейных сигнальных графов представляют собой отношение двух полиномов, т. е. дробно-рациональное выражение комплексного аргумента s (или z в случае дискретных операторов):

$$W_i(s) = N_i(s) D_i(s), \quad (3.7)$$

то передаточные функции путей и разомкнутых контуров также являются отношениями полиномов

$$\begin{aligned} P_{ir}^k(s) &= N_{P_{ir}^k}(s) D_{P_{ir}^k}(s) = \prod_{j \in P_{ir}^k} N_j(s) / \prod_{j \in P_{ir}^k} D_j(s), \\ K_i(s) &= N_{K_i}(s) D_{K_i}(s) = \prod_{j \in K_i} N_j(s) / \prod_{j \in K_i} D_j(s). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определитель графа $\Delta(s)$ в соответствии с выражениями (3.3) и (3.8) представляет собой сумму произведений дробно-рациональных выражений, а следовательно, тоже является отношением полиномов

$$\Delta(s) = N_\Delta(s) D_\Delta(s), \quad (3.9)$$

где $D_\Delta(s)$ — произведение различных полиномов — знаменателей передаточных функций дуг контурной части, а числитель

$$\begin{aligned} N_\Delta = D_\Delta &- \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_2} N_{Ki} (D_\Delta D_{Kj}) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_2} N_{Ki} N_{Kj} (D_\Delta D_{Ki} D_{Kj}) \\ &- \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{L}_3} N_{Ki} N_{Kj} N_{Kk} (D_\Delta D_{Ki} D_{Kj} D_{Kk}) + \dots + \\ &+ (-1)^l \sum_{(i, \dots, l) \in \mathcal{L}_l} N_{Ki} \dots N_{Kl} (D_\Delta D_{Ki} \dots D_{Kl}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если знаменатели передаточных функций контуров все различны, то $D_\Delta(s) = \prod_{i \in \mathcal{K}} D_{Ki}(s)$.

Миноры путей представляются аналогично:

$$\Delta_{ir}^k(s) = N_{\Delta_{ir}^k}(s) D_{\Delta_{ir}^k}(s).$$

Выражение (3.2) для передаточной функции канала $\Phi_{ir}^k(s)$ как отношение дробно-рациональных функций также является отношением полиномов

$$\Phi_{ir}^k(s) = N_{ir}^k(s) D_{ir}^k(s), \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} N_{ir}^k(s) &= N_{P_{ir}^k}(s) N_{\Delta_{ir}^k}(s) D_\Delta(s), \\ D_{ir}^k(s) &= D_{P_{ir}^k}(s) D_{\Delta_{ir}^k}(s) N_\Delta(s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Эти выражения для полиномов наиболее избыточны.

Поскольку в определителе графа Δ входит любой из его

множителей, то полином $D_{\Delta/r}^k(s)$, равный произведению различных полиномов знаменателей передаточных функций контуров $P_{ir}^k \in \mathcal{K}$ является множителем D_Δ . Следовательно, полиномы числителя и знаменателя передаточной функции Φ_{ir}^k примут вид

$$\begin{aligned} N_{ir}^k &= N_{P_{ir}^k} N_{D_{\Delta/r}^k} (D_\Delta / D_{\Delta/r}^k), \\ D_{ir}^k &= D_{P_{ir}^k} N_\Delta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если путь P_{ir}^k имеет общие с контурной частью дуги, то в выражении (3.2) полиномы знаменателей передаточных функций этих дуг сокращаются с соответствующими множителями полинома $(D_\Delta / D_{\Delta/r}^k)$.

В том важнейшем частном случае, когда ищутся передаточные функции сильно связного графа G_0 , все дуги, образующие пути, принадлежат контурам, а полиномы $D_{P_{ir}^k}$ полностью содержатся в полиноме $(D_\Delta / D_{\Delta/r}^k)$. Поэтому знаменатели всех передаточных функций каналов и графа в целом равны числителю определителя:

$$D_{ir}^k = D_{ir} = D_\Delta = N_\Delta. \quad (3.14)$$

Числитель определителя N_Δ , входящий в виде множителя во все знаменатели передаточных функций графа, назовем характеристическим полиномом замкнутой контурной части D_Δ . В этой связи знаменатель D_Δ определителя, равный произведению различных полиномов знаменателей всех разомкнутой контуров, естественно назвать характеристическим полиномом полностью разомкнутой контурной части графа $D_p = D_\Delta$.

Выше предполагается, что различные дуги графа не имеют в точности одинаковых множителей в знаменателях передаточных функций.

Корни полиномов числителя $N_{ir}^k(s)$ и знаменателя $D_{ir}^k(s)$ передаточных функций каналов системы $\Phi_{ir}^k(s)$, т. е. нули и полюсы передаточных функций каналов, являются объединением множеств корней полиномов-множителей. Иначе говоря, в формировании нулей и полюсов каналов системы контурная часть и дуги, не входящие в контурную часть, участвуют совершенно независимо. Из независимости полюсов следует важный вывод: система устойчива тогда и только тогда, если устойчива контурная часть и все дуги, не входящие в нее.

В системах управления, как правило, порядки полиномов $D_\Delta(s)$ и $N_\Delta(s)$ контурной части гораздо выше порядков полиномов дуг, не входящих в контурную часть, поэтому большинство нулей и полюсов каналов определяются соответственно полюсами и нулями определителя $\Lambda(s)$.

Если задается модель системы со связями $M_{\mathcal{T}SF}(2)$ второго ранга неопределенности, то становится возможным раскрыть выражения для полиномов передаточных функций дуг, и вместо рассмотренных выше индексных получаются символьные выражения для определителя графа и передаточных функций каналов и графа в целом.

Топологическая формула для передаточных функций графа (3.2) справедлива для сигнальных графов произвольного вида. Однако если рассматриваются сильно связанные графы систем управления, то для их передаточных функций могут быть получены более экономичные формулы.

Как уже указывалось, формула Мэсона является топологическим аналогом правила Крамера. Поэтому ее доказательство проводится путем перехода от графа к системе уравнений, исследования формы решения уравнений по правилу Крамера и переноса результатов на графовые представления [4, 29, 54].

По графу, дугам (i, j) которого поставлены в соответствие передаточные функции W_{ij} , непосредственно записывается причинно-следственная форма линейных алгебраических уравнений относительно изображений переменных системы $x_i, i = 1, \dots, n$:

$$x_i = \sum_j W_{ij} x_j.$$

Эта система уравнений может быть записана в матричной форме

$$Wx = 0,$$

$$\text{где } x = (x_1, \dots, x_n)^T,$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -W_{12} & \dots & -W_{1n} \\ -W_{21} & 1 & \dots & -W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n1} & -W_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

есть матрица коэффициентов системы уравнений. Следует обратить внимание на то, что матрица W имеет единичную главную диагональ, а ее недиагональные элементы в отличие от соответствующих передаточных функций дуг имеют знак минус.

Если к вершине x_r графа, принятой за входную, присоединить единичную дугу от вершины-источка f_r (рис. 17), то уравнения системы примут вид

$$Wx = B_r f_r,$$

где $B_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ — матрица-столбец с единицей на r -й строке.

Передача графа $\Phi_{\gamma r}$ от вершины r к вершине γ , принятой за выход ($y_\gamma = x_\gamma$), равна значению сигнала x_γ , если к вершине входа x_r приложено единичное воздействие $f_r = 1$.

Значение сигнала x_γ при этом условии равно искомой передаче $\Phi_{\gamma r}$, можно получить, решив систему уравнений

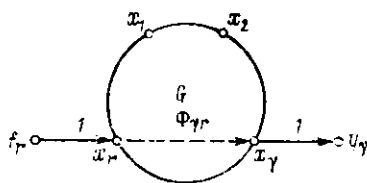


Рис. 17.

$$Wx = B_r$$

по правилу Крамера:

$$\Phi_{\gamma r} = x_{\gamma} = \frac{\Delta_{\gamma r}}{\Delta},$$

где $\Delta = \det W$ — определитель системы, $\Delta_{\gamma r} = \det W'_{\gamma r}$ — определитель матрицы, полученной из W заменой столбца с номером γ на B_r . Поскольку в B_r все элементы, кроме r -го, равны нулю, то $\Delta_{\gamma r}$ — алгебраическое дополнение $W_{r\gamma}$ матрицы W .

Таким образом, получение передачи графа можно свести к вычислению определителя и алгебраического дополнения матрицы соответствующей графу системы уравнений.

Общее выражение для определителя произвольной квадратной матрицы A имеет вид [71]:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^i a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где суммирование осуществляется по всем различным подстановкам из индексов элементов A [46].

Вторые индексы коэффициентов разложения определителя являются перестановками из чисел от 1 до n , поэтому в общем случае число всех слагаемых в разложении определителя $\det A$ равно $n!$.

Знак перед каждым членом разложения $\det A$ определяется числом инверсий в соответствующей перестановке. Говорят, что в перестановке числа i и j составляют инверсию, если $i > j$, но i стоит раньше j . Перестановка является четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности инверсий в последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Важное свойство перестановок — это изменение их четности при любой транспозиции двух символов (не обязательно стоящих рядом).

Всякая подстановка может быть разложена в произведение попарно независимых циклов [46]. Циклом называется подстановка, повторение которой достаточное число раз переводит всякий из ее символов в любой другой.

Циклы называются независимыми, если не имеют общих символов. Число символов, действительно перемещаемых циклом, называется длиной цикла.

Пусть дана подстановка n -й степени и s — число независимых циклов в ее разложении плюс число символов, остающихся ею на месте (всякому символу, остающемуся подстановкой на месте, можно поставить в соответствие «цикл» длиной 1). Разность $d = n - s$ называется декрементом этой подстановки.

Удобным способом определения четности подстановок является разложение их в циклы: четность подстановки совпадает с четностью декремента этой подстановки.

В частном случае матрицы W с единичной главной диагональю и со знаками минус при всех недиагональных элементах разложение определителя $\Delta = \det W$ может быть записано в следующем виде:

$$\Delta = \det W = \begin{vmatrix} 1 & -W_{12} & \dots & -W_{1n} \\ -W_{21} & 1 & \dots & -W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{n1} & -W_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1 + \sum (-1)^d \dots (-1)^k W_{1\alpha_1} \dots W_{n\alpha_n},$$

где единица соответствует произведению диагональных элементов или тождественной подстановке. Сомножитель $(-1)^k$ при слагаемых определителя $\det W$ учитывает знаки минус при недиагональных элементах W , причем k — число недиагональных элементов W_{pi} , $i \neq p$, в соответствующем произведении.

Выражение для $\det W$ можно записать в несколько ином виде [4, 54]. Во-первых, $(-1)^d (-1)^k$; $(-1)^k d$, во-вторых, $c - k - d$; $k(n - s) = s - (n - k)$, где s — число всех циклов, $(n - k)$ — число циклов единичной длины в рассматриваемой подстановке. Следовательно, c есть число циклов с длиной больше единицы. С учетом сказанного выражение для определителя W запишется так:

$$\Delta = \det W = 1 + \sum (-1)^c W'_{1,1} \dots W'_{n,n},$$

где знак произведений определяется числом c циклов неединичной длины в соответствующей подстановке.

Рассмотрим далее, как по графу G находится определитель соответствующей матрицы W ; его также называют определителем графа.

Циклам или циклическим подстановкам из индексов членов определителя на графах соответствуют контуры. Например, члену определителя $W_{18} W_{22} W_{38} W_{47} W_{55} W_{67} W_{74} W_{83}$ или подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

имеющей разложение в циклы $\{(2), (1, 5, 6), (3, 8), (4, 7)\}$, соответствует подграф, изображенный на рис. 18. Подграф содержит один контур единич-

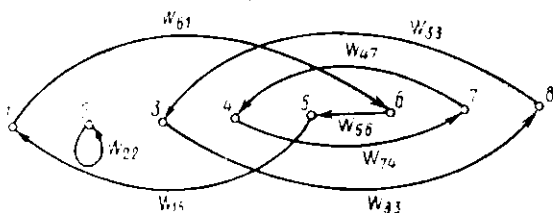


Рис. 18.

ной (петлю) и три контура неединичной длины. Поскольку подстановка распадается на произведение попарно независимых циклов, то соответствующие контуры не имеют общих вершин, т. е. попарно не соприкасаются.

Таким образом, для вычисления определителя по графу необходимо: 1) найти все контуры графа; 2) составить всевозможные комбинации попарно непересекающихся контуров по одному, по два, по три и т. д.; 3) просуммировать передачи контуров и произведений контуров со знаком $(-1)^c$, где c — число контуров в комбинации.

Вычисление передачи $\Phi_{\gamma\gamma}$ требует также нахождения алгебраического дополнения $W_{\gamma\gamma}$ матрицы W . Рассмотрим, к чему сводится соответствующая топологическая операция, т. е. определение числителя передаточной функции $\Phi_{\gamma\gamma}$ по графу G . Для этого прежде всего необходимо выяснить, как из графа G получается другой граф $G_{\gamma\gamma}$, определителем которого является числитель передачи $\Phi_{\gamma\gamma}$ или алгебраическое дополнение $W_{\gamma\gamma}$ матрицы W .

Получение матрицы $W_{\gamma\gamma}$ из матрицы W заменой столбца γ столбцом B , эквивалентно удалению из графа G всех дуг, исходящих из вершины γ ,

кроме дуги с передачей -1 , направленной из вершины γ в вершину r , и петли с передачей $+1$ при вершине γ (рис. 19). Если $\gamma = r$, то при вершине γ оказываются две петли — положительная и отрицательная, которые взаимно уничтожаются.

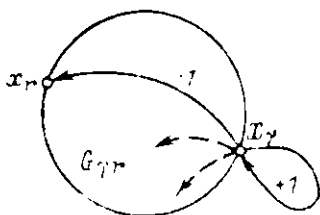


Рис. 19.

Вычисляя определитель $\Delta_{\gamma r}$ графа $G_{\gamma r}$, получаем искомую передачу графа

$$\Phi_{\gamma r} = \Delta \cdot G_{\gamma r}^{-1} \Delta^T(G).$$

Полученная формула удобна в том отношении, что числитель и знаменатель передачи вычисляются по одной и той же процедуре формирования определителя графа.

При формировании определителя графа $G_{\gamma r}$, т. е. числителя $\Delta_{\gamma r}$ передачи $\Phi_{\gamma r}$ в большинстве случаев целесообразно учитывать специфику графа $G_{\gamma r}$. Как будет пока-

зано ниже (см. формулу (3.53)), определитель графа, имеющего в своем составе контур с единичной передачей, равен взятой с минусом сумме произведений передач контуров, касающихся единичного контура, на определители подграфов, полученных удалением этих контуров. Поскольку все контуры, касающиеся единичной петли, т. е. содержащие вершину γ , обязательно содержат дугу (r, γ) с передачей -1 , то передачи этих контуров равны передачам путей со знаком минус: $-P_{\gamma r}^k$. Таким образом, определитель графа $G_{\gamma r}$ есть $\sum_R P_{\gamma r}^k \Delta_{\gamma r}^k$, а топологическая формула для передачи $\Phi_{\gamma r}$ имеет окончательный вид (3.4).

Топологический метод вычисления определителей целесообразно использовать в тех случаях, когда матрица имеет значительное число нулевых элементов. Если матрица содержит все ненулевые элементы, то все $n!$ членов разложения $\det W$ отличны от нуля. С ростом числа уравнений, т. е. вершин графа, число членов определителя быстро возрастает (например, $3! = 6$, $5! = 120$, $10! = 3\,628\,800$).

Число членов определителя n -го порядка в разложении $\det W$ при наличии нулевых элементов равно [72]

$$n! = \sum_{i=1}^q (-1)^i s_i (n-i)!,$$

где s_i — число всевозможных сочетаний по i нулевых элементов, расположенных в различных строках и столбцах определителя, q — наибольшее число нулевых элементов, входящих в такие сочетания. Эта формула отражает тот факт, что число членов разложения определителя и целесообразность применения топологических формул для решений графов и систем уравнений определяются не непосредственно числом нулевых элементов матрицы W , а числом некасающихся пар, троек и т. д. контуров.

3.3. Определитель графа

Определитель графа Δ является одной из форм представления частных моделей M_{SC}'' , на основе которых однозначно выявляются фундаментальные свойства самой системы управления M_S .

Как следует из выражений (3.2) и (3.4), любая передача графа в общем случае содержит в знаменателе определитель

графа, из чего следует, что в общем случае контурные части или сильно связанные компоненты графа и их свойства влияют на все передачи.

В тех случаях, когда имеется неопределенность относительно точек приложения воздействий и выходов, т. е. неопределенность в модели связей системы со средой $M_{\mathcal{F}S}$, исследованию подвергаются характеристики контурной части в виде сомножителя всех передач Δ^{-1} или в виде определителя Δ . Более того, синтез систем со многими входами и выходами, с разнообразными целями и требованиями к процессам управления обязательно должен начинаться с формирования устойчивой, грубой и достаточно быстродействующей контурной части.

Последовательное раскрытие свойств системы управления M_S может осуществляться по моделям $M_S(1)$, $M_S(2)$ и $M_S(3)$ на основе частных моделей в виде индексных, символьных и численных массивов или выражений для определителя Δ . При этом результаты, полученные по моделям $M_S(1)$, будут иметь наиболее общий характер.

Определитель графа G характеризует только контурную часть G_0 , т. е. характеризует множество контуров $\mathcal{K}$ и отношение касания r на этом множестве, иначе граф касания $R_K = \langle \mathcal{K}, r \rangle$. Поэтому определитель часто будем обозначать $\Delta\{\mathcal{K}\}$, каждый раз конкретизируя множество контуров $\mathcal{K}$. При необходимости конкретизации множества пар некасающихся контуров будет использоваться запись $\Delta\{\mathcal{K}, \mathcal{L}_2\}$ или $\Delta\{R_K\}$, а в некоторых случаях приняты формы записи с указанием множеств троек, четверок и т. д. некасающихся контуров: $\Delta\{\mathcal{K}, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_T\}$.

Из выражения для определителя (3.3) следует, что $\Delta\{\emptyset\} = 1$, т. е. определитель графа, не содержащего контуры, равен единице. Определитель конечного множества контуров содержит конечное число членов (хотя, может быть, очень большое), определяемое числом контуров $L = |\mathcal{K}|$, числом пар $|\mathcal{L}_2|$, троек $|\mathcal{L}_3|$ и т. д. Максимальное число попарно некасающихся контуров или число сомножителей T в произведениях наибольшей длины в составе Δ , очевидно, не превосходит L , причем условие $T = L$ достигается в вырожденном случае L автономных контурных частей, содержащих по одному контуру.

Запись определителя в форме (3.3) предполагает любой порядок перечисления контуров K_i , пар $K_i K_j$, троек $K_i K_j K_k$ и т. д. с последующим суммированием произведений с соответствующими знаками. В ряде случаев целесообразны другие способы группировки слагаемых и сомножителей, упрощающие составление определителя и более удобные для некоторых задач анализа.

Задание множества контуров $\mathcal{K}$ перечислением его элементов одновременно упорядочивает, т. е. нумерует контуры, как правило, в порядке их отыскания по тому или иному алгоритму.

Рассмотрим порядок формирования определителя и группировки его элементов на примере графа касания R_1 , изображенного на рис. 20. Множество контуров, точнее номеров или индексов контуров, имеет вид $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Запись начальной части выражения для определителя в соответствии с выражением (3.3) тривиальна: $\Delta = 1 - (K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + K_7) + \dots$.

Для продолжения и завершения записи прежде всего необходимо составить множество пар индексов несоприкасающихся контуров $\mathcal{L}_2$. В соответствии с описанием (3.16) и с графом касания R_k (рис. 20) элементы $\mathcal{L}_2$ пишутся в следующем порядке:

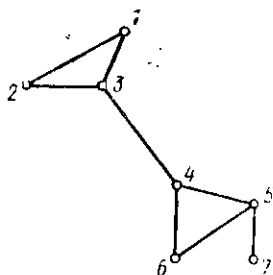


рис. 20.

$i=1$, $\{K_1 \bar{r} \mathcal{K}^{[1]} \} = \{1\} \bar{r} \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$, что дает группу слагаемых определителя $K_1(K_4 + K_5 + K_6 + K_7)$; $i=2$, $\{K_2 \bar{r} \mathcal{K}^{[2]} \} = \{2\} \bar{r} \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$, что дает группы $K_2(K_4 + K_5 + K_6 + K_7)$; $i=3$, $\{K_3 \bar{r} \mathcal{K}^{[3]} \} = \{3\} \bar{r} \{4, 5, 6, 7\} = \{5, 6, 7\}$, что дает $K_3(K_5 + K_6 + K_7)$; $i=4$, $\{K_4 \bar{r} \mathcal{K}^{[4]} \} = \{4\} \bar{r} \{5, 6, 7\} = \{7\}$, что дает $K_4 K_7$; $i=5$, $\{K_5 \bar{r} \mathcal{K}^{[5]} \} = \{5\} \bar{r} \{6, 7\} = \emptyset$; $i=6$, $\{K_6 \bar{r} \mathcal{K}^{[6]} \} = \{6\} \bar{r} \{7\} = \{7\}$, что дает $K_6 K_7$. Поскольку $\mathcal{K}^{[7]} = \emptyset$, то получены и сгруппированы все пары некасавшихся контуров — элементы множества $\mathcal{L}_2 = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 7), (6, 7)\}$, упорядоченные лексикографически.

Тройки индексов $(i, j, k) \in \mathcal{L}_3$ пишутся путем последовательного рассмотрения элементов множества $\mathcal{L}_2$ в соответствии с описанием (3.16): $(1, 4)$: $\{K_1 \bar{r} \mathcal{K}^{[1]} \} \cap \{K_4 \bar{r} \mathcal{K}^{[4]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \{7\} = \{7\}$, что дает первую тройку индексов $(1, 4, 7)$ и соответствующее слагаемое определителя $K_1 K_4 K_7$; $(1, 5)$: $\{K_1 \bar{r} \mathcal{K}^{[1]} \} \cap \{K_5 \bar{r} \mathcal{K}^{[5]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \emptyset = \emptyset$; $(1, 6)$: $\{K_1 \bar{r} \mathcal{K}^{[1]} \} \cap \{K_6 \bar{r} \mathcal{K}^{[6]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \{7\} = \{7\}$, что дает тройку $(1, 6, 7)$ и слагаемое $K_1 K_6 K_7$; $(1, 7)$: $\emptyset$, так как $\mathcal{K}^{[7]} = \emptyset$; $(2, 4)$: $\{K_2 \bar{r} \mathcal{K}^{[2]} \} \cap \{K_4 \bar{r} \mathcal{K}^{[4]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \{7\} = \{7\}$, что дает тройку $(2, 4, 7)$ и слагаемое $K_2 K_4 K_7$; $(2, 5)$: $\{K_2 \bar{r} \mathcal{K}^{[2]} \} \cap \{K_5 \bar{r} \mathcal{K}^{[5]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \emptyset = \emptyset$; $(2, 6)$: $\{K_2 \bar{r} \mathcal{K}^{[2]} \} \cap \{K_6 \bar{r} \mathcal{K}^{[6]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \{7\} = \{7\}$, что дает тройку $(2, 6, 7)$ и слагаемое $K_2 K_6 K_7$; $(2, 7)$: $\emptyset$; $(3, 5)$: $\{K_3 \bar{r} \mathcal{K}^{[3]} \} \cap \{K_5 \bar{r} \mathcal{K}^{[5]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \emptyset = \emptyset$; $(3, 6)$: $\{K_3 \bar{r} \mathcal{K}^{[3]} \} \cap \{K_6 \bar{r} \mathcal{K}^{[6]} \} = \{5, 6, 7\} \cap \{7\} = \{7\}$, что дает тройку $(3, 6, 7)$ и слагаемое $K_3 K_6 K_7$; $(3, 7)$: $\emptyset$; $(4, 7)$: $\emptyset$; $(6, 7)$: $\emptyset$.

Множество $\mathcal{L}_3$ оказалось сформированным и упорядоченным лексикографически: $\mathcal{L}_3 = \{(1, 4, 7), (1, 6, 7), (2, 4, 7), (2, 6, 7), (3, 6, 7)\}$.

Поскольку все тройки содержат номер седьмого, последнего по счету контура, то четверки некасающихся контуров отсутствуют: $\mathcal{L}_4 = \emptyset$. Определитель Δ в соответствии с формой записи (3.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta\{\mathcal{K}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = & 1 - (K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + K_7) \\ & + K_1(K_4 + K_5 + K_6 + K_7) + K_2(K_1 + K_3 + K_6 + K_7) + \\ & + K_3(K_5 + K_6 + K_7) + K_4K_7 + K_5K_7 - K_1K_4K_7 - \\ & - K_1K_5K_7 - K_2K_1K_7 - K_2K_3K_7 - K_3K_6K_7. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Кроме формы (3.3) или (3.17) возможны и иные группировки элементов определителя $\Delta\{\mathcal{K}\}$. Для примера выражение (3.18) можно перегруппировать по-другому:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - K_1(1 - K_4 - K_5 - K_6 - K_7 + K_4K_7 + K_6K_7) - \\ & - K_2(1 - K_4 - K_5 - K_6 - K_7 + K_4K_7 + K_6K_7) - \\ & - K_3(1 - K_5 - K_6 - K_7 + K_6K_7) - \\ & - K_4(1 - K_7) - K_5 - K_6(1 - K_7) - K_7. \end{aligned}$$

Легко заметить, что выражения в скобках суть определители, построенные на подмножествах контуров, не касающихся контуров, вынесенных за скобки, и мажорирующих их индексы:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - K_1\Delta\{K_4, K_5, K_6, K_7\} - K_2\Delta\{K_4, K_5, K_6, K_7\} - \\ & - K_3\Delta\{K_5, K_6, K_7\} - K_4\Delta\{K_7\} - K_5 - K_6\Delta\{K_7\} - K_7. \end{aligned}$$

В общем случае выражение для определителя может быть приведено к следующему виду:

$$\Delta = 1 - \sum_{i \in \mathcal{K}} K_i \Delta\{K_i, \bar{\mathcal{K}}^{[i]}\}. \quad (3.19)$$

При этом определители $\Delta\{K_i, \bar{\mathcal{K}}^{[i]}\}$, в свою очередь, могут быть записаны в форме (3.19), в результате чего появляется рекурсивная форма записи:

$$\Delta = 1 - \sum_{i \in \mathcal{K}} K_i \left(1 - \sum_{j \in K_i, \bar{\mathcal{K}}^{[i]}} K_j (1 - \dots) \right). \quad (3.20)$$

Формулу (3.19) для определителя графа можно интерпретировать как последовательную «разборку» контурной части, начиная с первого контура; последующие члены содержат только «оставшиеся» контуры:

$$\begin{aligned} \Delta_{(i)} = & \Delta_{(i-1)} + \delta\Delta_{(i)}, \quad i = 1, \dots, L, \\ \Delta_{(0)} = & 1, \quad \delta\Delta_{(i)} = -K_i \Delta\{K_i, \bar{\mathcal{K}}^{[i]}\}, \\ \Delta = & \sum_{i=0}^L \delta\Delta_{(i)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Возможна и другая форма записи определителя графа:

$$\Delta = 1 - \sum_{i \in \mathcal{H}} K_i \Delta |K_i \bar{r} \mathcal{H}_{[i]}|, \quad (3.19a)$$

где $\mathcal{H}_{[i]}$ — подмножество контуров с номерами менее i — множество контуров, «собранных» к i -й итерации процесса последовательной «сборки» контурной части.

Процесс формирования контурной части графа и его определителя методом «сборки» проиллюстрируем на примере графа касания, изображенного на рис. 20:

$$\begin{aligned} i=0, \quad \Delta_{(0)} &= 1; \\ i=1, \quad \delta\Delta_{(1)} &= -K_1 \Delta |\emptyset| = -K_1; \\ i=2, \quad \delta\Delta_{(2)} &= -K_2 \Delta |K_2 \bar{r} \mathcal{H}_{[2]}| = -K_2; \\ i=3, \quad \delta\Delta_{(3)} &= -K_3 \Delta |K_3 \bar{r} \mathcal{H}_{[3]}| = -K_3; \\ i=4, \quad \delta\Delta_{(4)} &= -K_4 \Delta |K_4 \bar{r} \mathcal{H}_{[4]}| = -K_4 \Delta |K_1, K_2|; \\ i=5, \quad \delta\Delta_{(5)} &= -K_5 \Delta |K_5 \bar{r} \mathcal{H}_{[5]}| = -K_5 \Delta |K_1, K_2, K_3|; \\ i=6, \quad \delta\Delta_{(6)} &= -K_6 \Delta |K_6 \bar{r} \mathcal{H}_{[6]}| = -K_6 \Delta |K_1, K_2, K_3|; \\ i=7, \quad \delta\Delta_{(7)} &= -K_7 \Delta |K_7 \bar{r} \mathcal{H}_{[7]}| = -K_7 \Delta |K_1, K_2, K_3, K_4, K_5|. \end{aligned}$$

Определитель запишется как сумма приращений:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=0}^7 \delta\Delta_{(i)} = 1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 (1 - K_1 - K_2) - \\ &- K_5 (1 - K_1 - K_2 - K_3) - K_6 (1 - K_1 - K_2 - K_3) - K_7 (1 - K_1 - \\ &- K_2 - K_3 - K_4 - K_5 + K_1 K_4 + K_1 K_5 + K_2 K_5 + K_3 K_6). \end{aligned}$$

При решении различных задач анализа и синтеза подсистем автоматических систем управления, как правило, представляющих собой сильно связанные подграфы, могут оказаться более удобными те или иные формы записи определителя (3.3), (3.17), (3.19), (3.20) или (3.19a). Следует сказать также о вычислительном аспекте — эти формы записи определителя соответствуют различным алгоритмам формирования выражений для Δ или вычисления его значений при фиксированных аргументах.

Топологическая формула для определителя графа может быть написана также в более детализированном виде как выражение для индексов (номеров) дуг, входящих в контуры:

$$\Delta = \Delta[W], \quad (3.22)$$

где W — множество дуг (или номеров дуг) контурной части графа G_0 . Раскрытое выражение для определителя получается при подстановке в ту или иную форму $\Delta\{\mathcal{H}\}$ зависимостей (3.6) передач контуров K_i , $i \in \mathcal{H}$ от передач образующих их

дуг. Определитель можно представить и как отношение полиномов (3.9), как это показано в (3.2).

По любому графу G на основе топологического анализа можно однозначно построить графы касания R_1 или некасания R_K контуров, найти определитель графа Δ , однако обратное не

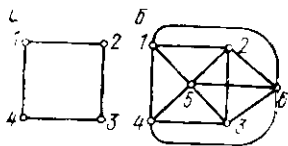


Рис. 21.

всегда имеет место — не любой неориентированный граф может быть графом касания или некасания контуров, следовательно, не любое множество пар некасающихся контуров $\mathcal{L}_2$ соответствует орграфам и не любые выражения вида (3.3), (3.17), (3.19) или (3.19a) являются определителями. В частности, можно показать, что граф в виде цикла из четырех дуг (рис. 21а) не может быть самостоятельным графом касания, а является подграфом графа касания, изображенного на рис. 21б.

3.4. Определители графов с несколькими контурными частями

В общем случае граф системы содержит несколько сильных компонент, иначе говоря, автономных контурных частей G_m^* , $m=1, \dots, M$. При этом каждая из них характеризуется своим определителем $\Delta^m = \Delta\{\mathcal{K}^m\}$, построенным на подмножестве $\mathcal{K}^m$ контуров, входящих в состав только этого сильно связанного подграфа. Связный граф, состоящий из нескольких автономных контурных частей, содержит дуги, соединяющие эти части, но не входящие в контуры.

При исследовании свойств сложных систем и в гораздо большей степени при формировании систем важнейший интерес представляют ответы на вопросы о взаимных влияниях различных контурных частей и об их совместном влиянии на свойства всей контурной части. На ряд этих вопросов можно ответить, изучив связи определителя системы $\Delta = \Delta\{\mathcal{K}, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_T\}$, $\mathcal{K} = \bigcup_{m=1}^M \mathcal{K}^m$, с определителями автономных контурных частей Δ^m .

В [4] показано, что графам, содержащим произвольные подграфы, связанные между собой дугами, не входящими в контур, соответствуют квазиреугольные блочные матрицы, определители которых равны произведению определителей диагональных блоков [26], т. е.

$$\Delta = \prod_{m=1}^M \Delta^m. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что и определители графов в общем случае равны произведению определителей сильно связанных компонент.

В качестве примера напомним выражение для определителя графа, изображенного на рис. 15. Видно (см. также граф касания R_k на рис. 16а), что граф содержит две сильные компоненты с множествами контуров $\mathcal{K}^1 = \{1, 2, 3\}$ и $\mathcal{K}^2 = \{4\}$, по которым легко записываются определители $\Delta^1 = 1 - (K_1 + K_2 + K_3) + K_1 K_3$, $\Delta^2 = 1 - K_4$.

Определитель графа в целом в соответствии с выражением (3.23) записывается следующим образом: $\Delta = \Delta^1 \Delta^2 = [1 - (K_1 + K_2 + K_3) + K_1 K_3] [1 - K_4]$, что вычисляется проще, чем выражение для определителя того же графа, полученное без предварительного выявления автономных контурных частей (см. § 3.2).

Полиномы числителя и знаменателя определителя графа в целом представляют собой произведения соответствующих полиномов для автономных контурных частей:

$$N_\Delta(s) = \prod_{m=1}^n N_\Delta^m(s),$$

$$D_\Delta(s) = \prod_{m=1}^n D_\Delta^m(s).$$

Из этого следует важный вывод о том, что устойчивость системы в общем случае определяется устойчивостью всех автономных, в смысле собственных движений, частей: автономных контурных частей и дуг, не входящих в контуры. Исследование устойчивости, синтез устойчивой системы или системы, обладающей требуемыми запасами устойчивости, т. е. требуемым качеством свободных движений, должны проводиться отдельно для каждой автономной в указанном смысле части. Если требуется обеспечить устойчивость системы или изменить качество свободных движений, прежде всего необходимо установить, какая автономная контурная часть или дуга, не входящая в контурную часть, являются определяющими. В том случае, когда неустойчива m -я контурная часть, никакими изменениями других автономных частей нельзя добиться устойчивости системы. Изменению должна подвергнуться именно m -я контурная часть; если это невозможно, то ее дугами коррекции объединяют с другими частями системы.

Формула (3.23), которую можно получить и без перехода к уравнениям, имеет принципиальное значение для анализа и синтеза систем с несколькими автономными контурными частями. Она важна и в вычислительном аспекте: определители систем следует вычислять после предварительного исследования графов на наличие сильных компонент.

Если две контурные части, образованные контурами $\mathcal{K}^1$ и $\mathcal{K}^2$, не являются полностью автономными, определитель представляется в следующем виде:

$$\Delta = \Delta^1 \Delta^2 - \delta_{\Delta}, \quad (3.24)$$

где приращение определителя δ_{Δ} характеризует взаимосвязи контуров множеств $\mathcal{K}^1$ и $\mathcal{K}^2$. Ясно, что чем меньше реберная связность графа касания R_K , т. е. чем меньше пар контуров (i, j) , $i \in \mathcal{K}^1$, $j \in \mathcal{K}^2$ соприкасаются, тем проще должно быть выражение для δ_{Δ} . Ясно также, что степень связности контурных частей определяется не только числом непосредственно соприкасающихся контуров i и j , $i \in \mathcal{K}^1$, $j \in \mathcal{K}^2$, но также и особенностями контурных частей.

Приращение определителя δ_{Δ} в результате пренебрежения касаниями нескольких пар контуров не меняет числа контуров, т. е. числа слагаемых передач контуров в выражении для Δ , поэтому в выражение для δ_{Δ} могут войти члены определителей, начиная с произведений пар, касание которых нарушает автономность контурных частей. Приращение пар множества $\delta\mathcal{L}_2$ определяется просто — это исходная информация о том, какими касаниями решено пренебречь при составлении произведения определителей или какие ребра графа касания R_K удалены для получения несвязного графа.

Приращение элементов множества некасающихся троек $\delta\mathcal{L}_3$ ищется на базе множества $\delta\mathcal{L}_2$:

$$\delta\mathcal{L}_3 = \{(i, j, k) : (i, j, k) \in \delta\mathcal{L}_2, k \in \{\bar{i}\bar{r}\mathcal{K}^1\} \cup \{\bar{j}\bar{r}\mathcal{K}^2\}\}. \quad (3.25)$$

Четверки некасающихся контуров, образованные при искусственном нарушении касаний, ищутся на базе множества $\delta\mathcal{L}_3$:

$$\delta\mathcal{L}_4 = \{(i, j, k, l) : (i, j, k) \in \delta\mathcal{L}_3, l \in (i, j, k)\bar{r}\mathcal{K}\}. \quad (3.26)$$

и т. д. В описаниях множеств предполагается, что касания определяются по разъединенной контурной части, а дубликации устраняются.

Рассмотрим примеры составления индексных выражений на уровне контуров для определителей по формуле (3.24).

Пусть граф касания контуров некоторой контурной части $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ имеет вид, изображенный на рис. 20. Выделим две контурные части $\mathcal{K}^1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{K}^2 = \{4, 5, 6, 7\}$, т. е. пренебрежем ребром (3, 4) графа R_K . Приращения множеств будут следующими:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= (3, 4); \\ \delta\mathcal{L}_3 &= \{(3, 4, k) : k = (3, 4)\bar{r}\mathcal{K} \setminus \{7\}, \delta\mathcal{L}_2 = (3, 4, 7); \\ \delta\mathcal{L}_4 &= \{(3, 4, 7, l) : l = (3, 4, 7)\bar{r}\mathcal{K} = \emptyset, \delta\mathcal{L}_4 = \emptyset; \\ \delta\mathcal{L}_5 &= \delta\mathcal{L}_6 = \dots = \emptyset. \end{aligned}$$

Таким образом, определитель контурной части $\Delta = \Delta^1 \Delta^2$
 $\delta_2 = (1 - K_1 - K_2 - K_3)(1 - K_4 - K_5 - K_6 - K_7 + K_1 K_5 + K_6 K_7) - K_1 K_4 (1 - K_7).$

В качестве другого примера положим, что в графе касания, изображенном на рис. 20, выделены две другие контурные части: $\mathcal{K}^1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\mathcal{K}^2 = \{5, 6, 7\}$. Приращение множества некасающихся пар в результате пренебрежения касанием двух пар контуров равно: $\delta\mathcal{L}_2 = \{(4, 5), (4, 6)\}$. Приращение $\delta\mathcal{L}_2$ ищется на множестве $\delta\mathcal{L}_1: (1, 5); [4, 5] \bar{r}\mathcal{K} = \{1, 2\}, (4, 6); [4, 6] \bar{r}\mathcal{K} = \{1, 2, 7\}$, следовательно, $\delta\mathcal{L}_3 = \{(4, 5, 1), (4, 5, 2), (4, 6, 1), (4, 6, 2), (4, 6, 7)\}$.

Приращение некасающихся четверок контуров вследствие пренебрежения касаниями двух пар контуров ищется на элементах множества $\delta\mathcal{L}_3: [4, 5, 1] \bar{r}\mathcal{K} = \emptyset, [4, 5, 2] \bar{r}\mathcal{K} = \emptyset, [4, 6, 1] \bar{r}\mathcal{K} = \{7\}, [4, 6, 2] \bar{r}\mathcal{K} = \{7\}, [4, 6, 7] \bar{r}\mathcal{K} = \{1, 2\}$; объединение полученных множеств дает искомую четверку $\delta\mathcal{L}_4 = \{(4, 6, 1, 7), (4, 6, 2, 7)\}$. Пятерок некасающихся контуров не образуется, так как $[1, 4, 6, 7] \bar{r}\mathcal{K} = \{2, 4, 6, 7\} \bar{r}\mathcal{K} = \emptyset$.

Определитель запишется следующим образом: $\Delta = \Delta' \Delta'' - \delta\Delta = (1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 + K_1 K_4 + K_2 K_4) (1 - K_5 - K_6 - K_7 + K_6 K_7) - K_4 K_5 (1 - K_1 - K_2) - K_4 K_6 (1 - K_1 - K_2 - K_7) + K_1 K_7 + K_2 K_7$.

Отметим, что в результате приведенных рассуждений можно записать и более общую формулу

$$\Delta = \tilde{\Delta} - \delta\Delta, \quad (3.27)$$

где Δ — определитель графа с некоторым числом устраненных соприканий контуров, а $\delta\Delta$ — приращение, определяемое на основе описаний (3.25), (3.26) и т. д. При этом запись $\tilde{\Delta}$ может упрощаться из-за того, что появится несколько автономных контурных частей.

По формулам взаимосвязей определителей, записанным в виде (3.27) или иначе

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \delta\Delta, \quad (3.28)$$

можно судить о влиянии тех или иных соприканий контуров на определитель графа, т. е. на свойства контурной части. Также важен вычислительный аспект такого представления определителей.

3.5. Чувствительность определителя и влияние контуров и дуг на свойства систем

Если анализ частных моделей систем управления в виде определителя Δ позволяет установить ряд фундаментальных свойств систем, то характер и степень влияния отдельного контура или дуги, а также совместного влияния нескольких контуров и дуг на свойства контурной части G_0 графа можно выяс-

нить, исследуя чувствительность определителя графа Δ к контуру или дуге, а также чувствительность высших порядков к контурам и дугам графа.

При исследовании чувствительностей определителя на топологическом ранге выражение для Δ рассматривается как функция многих аргументов в виде обозначений (индексов, номеров) передаточных функций контуров K_i , $i=1, \dots, L$:

$$\Delta(K) = \Delta(K_1, \dots, K_L) \quad (3.29)$$

или дуг W_k , $k=1, \dots, Q$:

$$\Delta(W) = \Delta(W_1, \dots, W_Q). \quad (3.30)$$

Линейность (точнее, аффинность) функции (3.29) относительно любого отдельно взятого контура K_i , $i=1, \dots, L$, а также относительно любых касающихся контуров следует из того, что определитель содержит произведения передаточных функций только некасающихся контуров.

Передаточная функция контура как произведение передаточных функций дуг (3.6) является линейной функцией любой отдельно взятой дуги, но она нелинейна при рассмотрении как функции нескольких переменных (дуг).

Определитель как композиция (сложная функция) функции $\Delta(K)$ и $K(W)$ является линейной (аффинной) функцией любой отдельно взятой дуги и любых дуг, принадлежащих разным касающимся контурам.

В общем случае определитель графа представляется как произведение определителей автономных контурных частей (3.23), поэтому определитель Δ как функция отдельно взятого определителя Δ^m , $m=1, \dots, M$ линейен, а как функция нескольких определителей нелинеен.

Чувствительность определителя к контуру. Влияние отдельно контура и совокупные влияния нескольких контуров на определитель Δ характеризуются функциями чувствительности к контурам: влияние одного контура K_i определяется функцией чувствительности первого порядка T_{ki}^1 , влияние контура K_i на чувствительность Δ к K_j — функцией чувствительности второго порядка T_{kikj}^{22} и т. д. Функции чувствительности определителя различных порядков получаются как частные производные

$$\begin{aligned} T_{ki}^1 &= \partial \Delta / \partial K_i, \\ T_{kikj}^{22} &= \partial^2 \Delta / \partial K_i \partial K_j, \\ T_{kikjkk}^{32} &= \partial^3 \Delta / \partial K_i \partial K_j \partial K_k, \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

определителя, рассматриваемого как функция передач контуров (3.29) [21].

Положим, что вычисляется чувствительность, точнее, абсолютная чувствительность определителя к контуру с первым номером K_1 . Поскольку любой контур графа может быть принят за первый, то такое предположение, не снижая общности рассуждений и выводов, позволяет воспользоваться формой записи определителя (3.19). Дифференцируя (3.19) по K_1 , имеем

$$T_{K_1}^{\Delta} = \partial \Delta(K_1) / \partial K_1 = -\Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}. \quad (3.32)$$

В общем случае любого номера контура K_i получится то же выражение для абсолютной чувствительности определителя.

Из формулы (3.32) следует, что если контур K_i касается всех контуров, то $K_i \bar{r} \mathcal{K} = \emptyset$ и $T_{K_i}^{\Delta} = -1$.

Таким образом, степень влияния контура K_i на определитель зависит только от некасающихся с K_i контуров и, что очень важно, чувствительность определителя к контуру K_i не содержит контура K_i .

Используя чувствительность $T_{K_i}^{\Delta}$, определитель графа можно представить в виде следующего разложения:

$$\Delta = \Delta_0 + T_{K_i}^{\Delta} K_i, \quad (3.33)$$

которое в силу свойств $\Delta(K_i)$ содержит только линейный член и член, не зависящий от K_i : $\Delta_0 = \Delta(K_i = 0)$. Формула (3.23) может быть записана и в виде рекуррентного соотношения

$$\Delta_{(i+1)} = \Delta_{(i)} + T_{K_i}^{\Delta} K_i, \quad (3.34)$$

отражающего итеративную процедуру поконтурной сборки контурной части и формирования определителя (см. также формулу (3.19a)).

В ряде случаев удобно оперировать относительной чувствительностью определителя к контуру $S_{K_i}^{\Delta}$, связывающей относительные вариации контура $\delta K_i / K_i$ с относительными вариациями определителя $\delta \Delta / \Delta$:

$$\delta \Delta / \Delta = S_{K_i}^{\Delta} \delta K_i / K_i. \quad (3.35)$$

Относительная чувствительность определителя через абсолютную выражается следующим образом:

$$S_{K_i}^{\Delta} = T_{K_i}^{\Delta} K_i / \Delta. \quad (3.36)$$

Чувствительность определителя к контурам K_i и K_j , т. е. чувствительность второго порядка

$$T_{K_i K_j}^{\Delta} = \partial^2 \Delta(K_i K_j) / \partial K_i \partial K_j, \quad (3.37)$$

равна

$$\begin{aligned} T_{K_i K_j}^{22} &= -\partial \Delta / \partial K_i \bar{r} \mathcal{K}, \quad \partial K_j = -\partial \Delta / \partial K_j \bar{r} \mathcal{K} \quad \partial K_i \\ &= \Delta [K_i \bar{r} \{K_j \bar{r} \mathcal{K}\}] = \Delta [K_j \bar{r} \{K_i \bar{r} \mathcal{K}\}]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Чувствительность второго порядка (3.38) равна нулю при $i=j$, а в случае $i \neq j$ равняется нулю при касании контуров K_i и K_j . Далее, $T_{K_i K_j}^{22}$ равняется единице, если $K_i \bar{r} \{K_i \bar{r} \mathcal{K}\} = K_i \bar{r} \{K_j \bar{r} \mathcal{K}\} = \mathcal{K}$, контуры K_i и K_j не касаются, но K_i касается всех контуров, не соприкасающихся с K_j , и наоборот. Наконец, если $K_j \bar{r} \{K_i \bar{r} \mathcal{K}\} = K_i \bar{r} \{K_j \bar{r} \mathcal{K}\} \neq \mathcal{K}$, то $T_{K_i K_j}^{22}$ представляет собой выражение для некоторого определителя.

Определитель Δ как функция двух касающихся контуров нелинеен, поэтому его разложение в ряд содержит не только линейные члены:

$$\Delta = \Delta(K_i = K_j = 0) + T_{K_i}^1 |_{K_j=0} K_i + T_{K_j}^1 |_{K_i=0} K_j + T_{K_i K_j}^{22} K_i K_j. \quad (3.39)$$

Формулу (3.39) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(0, 0) + (T_{K_i}^1 |_{K_j=0} + T_{K_i K_j}^{22} K_j) K_i + T_{K_j}^1 |_{K_i=0} K_j = \\ &= \Delta(0, 0) + T_{K_i}^1 |_{K_j=0} K_i + (T_{K_j}^1 |_{K_i=0} + T_{K_i K_j}^{22} K_i) K_j. \end{aligned}$$

откуда следует, что влияние контура K_i на определитель характеризуется выражением $T_{K_i}^1 |_{K_j=0} + T_{K_i K_j}^{22} K_j$, а влияние K_j на Δ — выражением $T_{K_j}^1 |_{K_i=0} + T_{K_i K_j}^{22} K_i$. Например в графе, изображенном на рис. 22, $T_{K_1 K_2}^{22} = 0$, т. е. вариация передачи K_1 не изменяет степень абсолютного влияния на Δ контура K_2 . Это же видно из выражения $T_{K_2}^1 = -1$, которое не зависит от K_1 . В то же время $T_{K_1 K_2}^{22} = 1$, т. е. вариация K_1 изменяет влияние контура K_2 на Δ , и, следовательно, целенаправленным изменением передачи контура K_1 можно, к примеру, ослабить влияние на Δ нежелательных вариаций передачи контура K_2 .

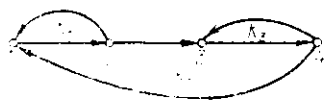


Рис. 22.

Чувствительность второго порядка $T_{K_j K_i}^{22}$ определителя $\Delta[\mathcal{K}]$ к контурам K_i, K_j удобно упорядочить в квадратную симметричную матрицу T_K^{22} размером $L \times L$, $L = |\mathcal{K}|$, на главной диаго-

нали которой находятся нулевые элементы $T_{ii}^{\Delta} = 0, i = 1, \dots, L$.

Для графа и графа касания, изображенных на рис. 15 и 16а, матрица $T_K^{\Delta 2}$, заполненная выражениями для чувствительностей, приведена в табл. 3.1.

Важно заметить, что матрица чувствительностей второго порядка определителя к контурам отражает не только отношение касания на множестве контуров, но также отношение связанности: чем больше ненулевых элементов в i -й строке (столбце), тем топологически слабее i -й контур связан с остальными. Если все элементы строки (столбца), кроме диагонального, отличны от нуля, контур K_i автономен.

На рассмотренном выше примере контур K_4 автономен. Чем больше нулей в i -й строке матрицы $T_K^{\Delta 2}$, тем сильнее i -й контур связан с остальными: например, второй контур связан наиболее сильно с остальными контурами графа, что и следует из рассмотрения второй строки (второго столбца), содержащей единственный отличный от нуля элемент. По виду матрицы $T_K^{\Delta 2}$ можно выявить также автономную контурную часть из нескольких контуров.

Чувствительность определителя к дуге. Чувствительность T_{st}^{Kk} передачи контура K_k к передаче дуги $W_i = W_{st}$ от вершины t к вершине s этого же контура равна произведению всех передаточных функций дуг контура K_k за исключением дуги $W_i = W_{st}$, т. е. равна передаче пути P_{ts}^h от конца дуги (вершины s) к ее началу (вершине t) вдоль контура K_k :

$$T_{st}^{Kk}(s) = \prod_{j \in \{K_k^{\Delta} - i\}} W_j(s) = K_k(s) W_{st}(s) = P_{ts}^h(s). \quad (3.40)$$

Чувствительность первого порядка определителя Δ к дуге $W_i = W_{st}$, входящей в состав одного или нескольких контуров $K_k, k = 1, 2, \dots$:

$$T_{st}^{\Delta} = T_{st}^{\Delta} = \partial \Delta(K_k(W_{st})), \partial W_{st}$$

с учетом (3.32) и (3.40) равна

$$T_{st}^{\Delta} = T_{st}^{\Delta} = \sum_k T_{Kk}^{\Delta} T_{st}^{Kk} = \sum_k P_{ts}^k \Delta_{(K_k)} \bar{f}_{Kk} \mathcal{H}. \quad (3.41)$$

Важным свойством чувствительности T_{st}^{Δ} определителя Δ к дуге W_i является то, что T_{st}^{Δ} не содержит W_i .

Поскольку путь P_{ts}^k вдоль контура K_k содержит в точ-

ности те же вершины, что и сам контур K_k , т. е. множества вершин $P_{ts}^{wk} = K_k^w$, то $\Delta\{K_k \bar{r} \mathcal{H}\}$ является минором k -го пути $P_{ts}^k: \Delta_{ts}^k = \Delta\{K_k \bar{r} \mathcal{H}\}$. Следовательно, чувствительность определителя к дуге в соответствии с выражениями (3.4) и (3.41) равна взятому с обратным знаком числителю формулы Мэсона для передачи графа от вершины s (конца дуги W_{st}) к вершине t (началу дуги):

$$T_{st}^{\Delta} = T_{st}^{\Delta} - \sum_k P_{ts}^k \Delta_{ts}^k, \quad (3.42)$$

т. е. чувствительность определителя к дуге может быть записана в иной форме:

$$T_{st}^{\Delta} = -\Phi_{ts} \Delta, \quad (3.43)$$

откуда следует пропорциональность между чувствительностью определителя и передачей графа.

Относительная чувствительность определителя к дуге

$$S_{st}^{\Delta} = T_{st}^{\Delta} W_{st}^{\Delta} \Delta \quad (3.44)$$

с учетом выражения (3.43) может быть записана в виде

$$S_{st}^{\Delta} = -\Phi_{ts} W_{st}^{\Delta}. \quad (3.45)$$

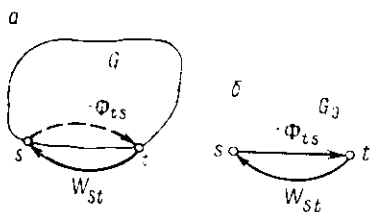


Рис. 23.

Таким образом, для любого графа G относительная чувствительность определителя к дуге равна передаче некоторого эквивалентного контура, образованного дугами $-\Phi_{ts}$ и W_{st} , как это показано на рис. 23.

Используя понятие абсолютной чувствительности определителя к дуге, определитель графа

можно представить в следующем виде:

$$\Delta = \Delta_0 + \delta\Delta = \Delta(W_{st} = 0) + T_{st}^{\Delta} W_{st}^{\Delta} \quad (3.46)$$

или в виде рекуррентного соотношения

$$\Delta_{(i+1)} = \Delta_{(i)} + \delta\Delta_{(i+1)} = \Delta_{(i)} + T_{st}^{\Delta_{(i+1)}} W_{st}^{\Delta_{(i+1)}} \quad (3.47)$$

отражающего итеративную процедуру сборки контурной части и формирования определителя. Следует обратить внимание на то, что в силу линейности $\Delta_{(i+1)}$ относительно W_i выражение $T_{st}^{\Delta_{(i+1)}}$ не содержит W_i и может быть вычислено по графу $G_{(i)}$, если известны вершины съема сигнала t и суммирования s .

Соотношение (3.47) является алгоритмом итеративного вычисления определителя. Проиллюстрируем этот процесс на примере графа, изображенного на рис. 22.

На нулевой итерации ($i=0$) имеет место нуль-граф (рис. 24а) и $\Delta_{(0)}=1$. На первой итерации ($i=1$) вводится дуга $W_1=W_{21}$; при этом ни одного контура не образуется: $\delta\Delta_{(1)}=0$, $\Delta_{(1)}=\Delta_{(0)}=1$ (рис. 24б). Таким образом, $\Delta_{(1)}=1$ в любом случае, а вычисления приращений определителя следует начинать с $i=2$. Для рассматриваемого примера на второй итерации вводится дуга $W_2=W_{12}$ (рис. 24в), которая вместе с W_1 образует контур. Чувствительность $T_{W_2}^{\Delta(2)}=-W_1$, а приращение определителя $\delta\Delta_{(2)}=-W_1 W_2$. Третья и четвертая итерации иллюстрируются на рис. 24г, д; чувствительности $T_{W_3}^{\Delta(3)}=T_{W_4}^{\Delta(4)}=0$, так как отсутствуют пути P_{23} и P_{34} . На пятой итерации вводится дуга $W_5=W_{14}$ (рис. 24е); чувствительность $T_{W_5}^{\Delta(5)}=-W_1 W_3 W_4$, а приращение определителя $\delta\Delta_{(5)}=-W_1 W_3 W_4 W_5$. На шестой итерации вводится последняя дуга $W_6=W_{34}$ (рис. 24ж); от конца дуги (вершина 3) к ее началу (вершина 4) имеется путь $P_{34}=W_4$, минор которого $\Delta_{34}^1=1-W_1 W_2$. Чувствительность $T_{W_6}^{\Delta(6)}=-W_1 (1-W_1 W_2)$, а приращение определителя $\delta\Delta_{(6)}=-W_1 W_6 (1-W_1 W_2)$. В результате определитель графа равен

$$\Delta=1+\sum_{i=1}^6 \delta\Delta_{(i)}=1-W_1 W_2-W_1 W_3 W_4 W_5- \\ -W_1 W_6 (1-W_1 W_2).$$

Алгоритм особенно эффективен для пересчета определителя при введении новой дуги, например с целью коррекции.

Отметим, что аналогично формированию определителя разборкой по контурам (см. формулу (3.19)) можно составить рекуррентные соотношения для формирования определителя последовательным удалением дуг. В обоих алгоритмах последова-

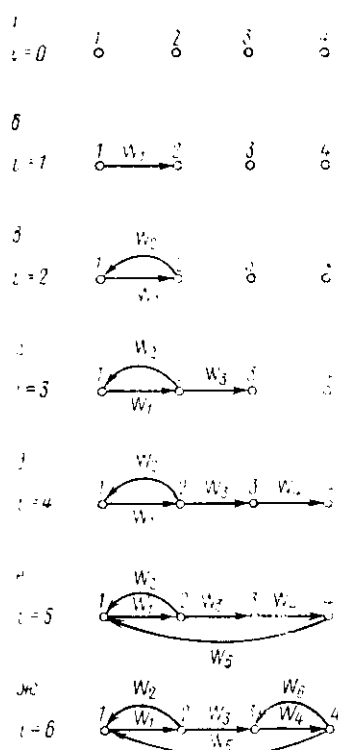


Рис. 24.

тельного наращивания или разборки выбор порядка введения дуг произволен; при этом некоторые последовательности могут быть оптимальными в том или ином смысле.

При необходимости изучения совместного влияния на свойства контурной части вариаций операторов двух и более дуг можно получить и исследовать выражения для функций чувствительности второго и высших порядков определителя к дугам.

3.6. Определители вырожденных систем

Свойства контурной части, существенно влияющие на все передачи системы управления, определяются взаимным расположением контуров и операторами их передач. Представляет интерес рассмотрение нескольких характерных случаев предельных передач контуров: усиления которых стремятся к нулю, к бесконечности и к единице. Кроме того, необходимо рассмотреть обращение в нуль определителя какого-либо подграфа, а также случай, когда операторы двух контуров равны по величине, но обратны по знаку. Во всех перечисленных случаях системы существенно меняют свои свойства, что позволяет говорить о них как о предельных или вырожденных системах.

Если передача некоторого контура K_i обращается в нуль вследствие разрыва связи или стремится к нулю из-за ослабления усиления передачи дуги, принадлежащей этому контуру на всех рассматриваемых частотах, то определитель графа равен определителю подграфа, полученного удалением i -го контура:

$$\lim_{K_i \rightarrow 0} \Delta = \lim_{K_i \rightarrow 0} \left[1 - \sum_{j \in \mathcal{H}^e} K_j \Delta \{ \mathcal{H}^{[j]} \setminus K_j \} \right] = 1 - \sum_{j \in \{ \mathcal{H}^e \setminus i \}} K_j \Delta \{ \mathcal{H}^{[j]} \setminus K_j \} = \Delta \{ \mathcal{H}^e \setminus i \}. \quad (3.48)$$

При этом свойства контурной части и всех связанных с ней передач обязательно изменяются, причем степень и диапазон существенного изменения зависят от ее топологических особенностей. Количественно изменение свойств контурной части определяется сомножителем $K_i \rightarrow 0$ в виде $\Delta \{ K_i \overline{\mathcal{H}^{[i]}} \}$ в выражении (3.19).

Если все контуры графа размыкаются, то $\Delta = 1$. Если усиление контура K_i графа стремится к бесконечности, то определитель также стремится к бесконечности независимо от взаимосвязей контура K_i с другими контурами.

В том случае, когда к бесконечности стремится усиление нескольких контуров, поведение Δ зависит от отношений соприкосновения контуров: $\lim_{K_i \rightarrow \infty} \Delta^{-1} = 0$, где $\mathcal{H}_\infty$ — подмножество контуров с бесконечным усилением, ν — максимальное число попарно некасающихся контуров из $\mathcal{H}_\infty$, т. е. максимальный индекс множества $\mathcal{L}$ на $\mathcal{H}_\infty$. Например, если три контура K_i , K_j и K_k имеют бесконечные усиления и все они попарно не касаются, то $(i, j, k) \in \mathcal{L}_3$, $\nu = 3$ и $\Delta \rightarrow 0$; если все три контура попарно касаются, то $\nu = 1$, $\Delta \rightarrow \infty$.

Если усиление некоторого контура K_i стремится к единице, т. е. граф системы имеет безынерционный контур с положительной единичной передачей, это существенно отражается на выражении для определителя.

Прежде всего заметим, что $K_i \rightarrow 1$ равносильно $1 - K_i \rightarrow 0$, т. е. при этом стремится к нулю минор определителя. Без потери общности положим, что $i=1$, т. е. $K_1 \rightarrow 1$ или $1 - K_1 \rightarrow 0$. Воспользуемся представлением определителя в форме (3.19). Так как K_1 входит только в первый отличный от единицы член, то определитель предельной системы равен

$$\Delta_{\text{пр}} = \lim_{K_1 \rightarrow 1} \Delta = 1 - 1 \cdot \Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}^{(1)}\} = - \sum_{i=2}^L K_i \Delta \{K_i \bar{r} \mathcal{H}^{(i)}\},$$

откуда

$$\Delta_{\text{пр}} = \Delta \{\mathcal{H} \setminus K_1\} - \Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}\}. \quad (3.49)$$

Заметим, что из выражений (3.48) и (3.49) следует $\lim_{K_1 \rightarrow 1} \Delta = \lim_{K_1 \rightarrow 0} \Delta = \Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}\}$. Можно допустить, что к единице стремится усиление последнего по номеру контура $K_L = K_L$. Тогда необходимо воспользоваться формой определителя (3.19a):

$$\Delta_{\text{пр}} = \lim_{K_L \rightarrow 1} \Delta = \Delta \{\mathcal{H} \setminus K_L\} - \Delta \{K_L \bar{r} \mathcal{H}_{(L)}\}. \quad (3.50)$$

Выражение (3.49) для предельного определителя представлено в виде разности двух определителей на пересекающихся множествах $\{\mathcal{H} \setminus K_1\}$ и $\{K_1 \bar{r} \mathcal{H}\}$, поэтому содержит ряд сокращаемых членов. Пусть контуры упорядочены таким образом, что элементам подмножества $K_1 \bar{r} \mathcal{H}$ присвоены последние номера. Тогда определитель $\Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}\}$ без единицы в точности равен последним членам определителя $\Delta \{\mathcal{H} \setminus K_1\}$, и выраже-

ние для определителя предельной системы с учетом $\{\mathcal{K} \setminus K_1\} \cap \cap \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\} = \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}$ запишется так:

$$\Delta_{np} = 1 - \sum_{i \in \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}} K_i \Delta \{K_i \bar{r} \mathcal{K}^{[i]}\} - 1 + \sum_{i \in \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}} K_i \Delta \{K_i \bar{r} \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}^{[i]}\}\} = - \sum_{i \in \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}} K_i \Delta \{K_i \bar{r} \mathcal{K}^{[i]}\}. \quad (3.51)$$

Из него, в частности, следует, что в случае автономного контура K_1 , т. е. при $K_1 \bar{r} \mathcal{K} = \emptyset$, $\Delta_{np} = 0$. Этот факт объясняется также тем, что определитель графа, автономная контурная часть которого состоит из единственного контура K_1 , представляется в виде произведения определителей, один из которых $\Delta^1 = (1 - K_1)$ стремится к нулю при $K_1 \rightarrow 1$.

Важным положением, установленным формулами (3.49) -- (3.51), является то, что при $K_1 \rightarrow 1$ определитель системы вырождается: (3.51) уже не является выражением для определителя — оно не содержит единицы.

Представляет интерес определение множества $\mathcal{K}_{np}$ контуров, входящих в выражение (3.51) для Δ_{np} : $\mathcal{K}_{np}$ содержит все контуры, касающиеся K_1 , и объединение контуров, не касающихся $\{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\}$:

$$\mathcal{K}_{np} = \{K_1 \bar{r} \mathcal{K}\} \cup \{K_i \bar{r} \mathcal{K}^{[i]}\}. \quad (3.52)$$

Таким образом, при $K_1 \rightarrow 1$ или $1 - K_1 \rightarrow 0$ из выражения для определителя исчезает единица и ряд членов, содержащих передачи контуров, не входящих в множество $\mathcal{K}_{np}$. Контуры множества $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{np}$ характерны тем, что, не касаясь непосредственно единичного контура K_1 , соприкасаются со всеми контурами, касающимися K_1 .

Рассмотрим пример вырождения определителя графа, контурная часть которого характеризуется графом касания R_K , изображенным на рис. 25, при $K_1 \rightarrow 1$. Контуры, не соприкасающиеся с K_1 , имеют последние номера: $K_1 \bar{r} \mathcal{K} = \{3, 4, 5, 6\}$. По выражению (3.52) можно определить, какие контуры будут содержаться в Δ_{np} :

$$\mathcal{K}_{np} = \{2\} \cup \{K_i \bar{r} \mathcal{K}^{[i]}\} = \{2\} \cup \{5, 6\} = \{2, 5, 6\}.$$

В $\mathcal{K}_{np}$ не входит контур K_4 ; он не касается K_1 , но касается всех контуров множества $K_1 \bar{r} \mathcal{K}$. Выражение для вырожденного определителя напомним по (3.51):

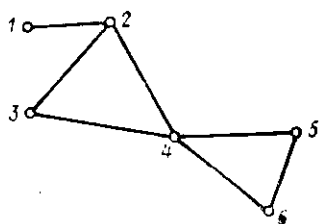


Рис. 25.

$$\Delta_{np} = -K_2 \Delta \{5, 6\} - K_3 \Delta \{5, 6\} = -(K_2 + K_3)(1 - K_5 - K_6).$$

И в общем случае обращение в нуль определителя некоторого подграфа (минора) всегда приводит к качественному изменению определителя, который вырождается, теряя единицу и ряд слагаемых.

Наконец, рассмотрим случай, когда два различных контура графа K_i и K_j имеют в пределе передачи, равные по величине и обратные по знаку: $K_i + K_j \rightarrow 0$.

Без потери общности можно положить, что $i=1$, $j=2$ и $K_2 \rightarrow -K_1$. Определитель в соответствии с формой представления (3.19) запишется так:

$$\Delta = 1 - K_1 \Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}^{[1]}\} - K_2 \Delta \{K_2 \bar{r} \mathcal{H}^{[2]}\} - \sum_{k \in \{\mathcal{H} \setminus \{K_1, K_2\}\}} K_k \Delta \{K_k \bar{r} \mathcal{H}^{[k]}\}.$$

Предельный определитель представляется следующим образом:

$$\Delta_{np} = \lim_{K_2 \rightarrow -K_1} \Delta = 1 - K_1 (\Delta \{K_1 \bar{r} \mathcal{H}^{[1]}\} - \Delta \{K_2 \bar{r} \mathcal{H}^{[2]}\}) - \sum_{k \in \{\mathcal{H} \setminus \{K_1, K_2\}\}} K_k \Delta \{K_k \bar{r} \mathcal{H}^{[k]}\}. \quad (3.53)$$

В частном случае, когда контуры K_1 и K_2 имеют одно и то же подмножество некасающихся с ними контуров, т. е. $\{K_1 \bar{r} \mathcal{H}^{[1]}\} = \{K_2 \bar{r} \mathcal{H}^{[2]}\}$, предельный определитель равен определителю подграфа, полученного размыканием контуров K_1 и K_2 :

$$\Delta_{np} = 1 - \sum_{k \in \{\mathcal{H} \setminus \{1, 2\}\}} K_k \Delta \{K_k \bar{r} \mathcal{H}^{[k]}\}.$$

Пусть в графе касания контуров, изображенном на рис. 20, $K_2 \rightarrow -K_1$. Легко видеть, что $K_1 \bar{r} \mathcal{H} = \{4, 5, 6, 7\} = K_2 \bar{r} \mathcal{H}^{[2]}$, поэтому

$$\Delta_{np} = 1 - K_3 \Delta \{5, 6, 7\} - K_4 \Delta \{7\} - K_5 - K_6 \Delta \{7\} - K_7.$$

Очевидно, при $K_2 \rightarrow -K_1$ уменьшается число членов определителя и в общем случае порядок характеристических полиномов.

Вырождение определителя вследствие потери единицы и уменьшения числа членов приводит к структурным изменениям системы. При неточной компенсации усилений контуров, неточном соблюдении $K_i=1$ некоторые коэффициенты характеристических полиномов будут менять знак, что означает негрубость системы.

3.7. Топологические особенности графа и свойства передач системы

Оптимальная по сложности и динамическим характеристикам контурная часть является необходимым, но недостаточным условием удовлетворительного функционирования подсистемы или системы управления в целом: в конечном счете качество процессов управления оценивается по характеристикам передач и поведению выходов при адекватных задачах исследования и реальной среде моделях сигнальных и параметрических или операторных воздействий на систему.

Многие принципиальные свойства передач каналов и всей системы управления могут быть выявлены на топологическом ранге моделей - на основе анализа графов или структурных схем, представляющих взаимосвязи переменных или звеньев системы. При анализе влияния топологических особенностей графа G на свойства передач $\Phi_{\gamma\tau}$ между вершинами τ и γ , в особенности при формировании требуемых свойств передач, важное значение имеют такие характеристики связности орграфов, как наличие путей $P_{\gamma\tau}^n$, число путей, наличие контурной части, наличие и число контуров, касающихся и не касающихся отдельных путей, наличие автономных контурных частей и т. д.

Роль и значение путей, контуров, контурных частей, а также отдельных дуг графа при формировании передач системы можно выявить из рассмотрения заранее составленных топологических формул для передач графа, содержащих выражения для передач путей, определителя и миноров путей. Однако в действительности сложных системах общие выражения для определителей графов или для передач получаются весьма громоздкими, избыточными и иногда содержат огромное количество членов, в силу чего практически не могут быть составлены и проанализированы.

Выявление качественного характера и степени влияния какого-либо элемента графа на определитель и передачи может быть осуществлено непосредственным анализом расположения в графе или, как еще говорят, позиции, дуги, пути или контура. Для этого требуется заранее изучить различные типы позиций элементов графов и определить характер их влияния на передачи.

Ниже рассмотрены некоторые особенности топологии и проявлений связности сигнальных графов, определяющих качественные характеристики передач систем управления.

Прежде всего заметим, что передача между вершинами τ и γ не тождественна нулю только при наличии в графе G путей между этими вершинами. Если в графе соответствующий путь отсутствует, то переменная y_γ абсолютно инвариантна к воздействию f_τ . Этот вывод, получаемый по модели $M_{\mathcal{F}_{SF}}(1)$ топологического ранга, не может измениться при добавлении структур-

ной или параметрической определенности операторов дуг графа. Следует также сказать, что такой способ абсолютного подавления возмущений и помех устранением путей практически редко реализуется.

Если утверждение о тождественности нулю передачи при отсутствии пути не требует особых доказательств, то утверждение о том, что при наличии единственного пути с ненулевой передачей соответствующая передача динамических систем без изменения топологии принципиально не может быть сделана тождественной нулю, не является столь же очевидным [61].

Если между вершинами $\bar{\gamma}$ и γ имеется более одного пути, то в соответствии с принципом двухканальности (или многоканальности) Б. Н. Петрова принципиальных затруднений при формировании передач не возникает и при условии невырожденности передач дуг графа. Если рассматриваются линейные системы, то на характеристики передач $\Phi_{\gamma\bar{\gamma}}$ не оказывают влияние свойства путей между другими парами вершин графа, если, конечно, передачи этих путей не формируются за счет дуг, общих с путями $P_{\gamma\bar{\gamma}}^h$.

В частном случае автономного от контурной части пути передача канала совпадает с передачей пути. Это вытекает из того, что в соответствии с формулой Мэсона минор пути совпадает с определителем, и они взаимно сокращаются. Контурная часть системы G_0 в целом или некоторая автономная контурная часть G_{ij}^m оказывают влияние на передачу канала только при условии связанности с путем.

Вычисление передач графов следует начать с выделения автономных контурных частей. В противном случае результат содержит избыточность в виде одинаковых на уровне общих выражений сомножителей, которые впоследствии при уточнении параметров из-за ошибок вычислений могут стать различными, что приводит не только к избыточности, но в ряде случаев и к принципиальным ошибкам.

Отдельно взятый контур K_i участвует в формировании передачи канала $\Phi_{\gamma\bar{\gamma}}^h$, если принадлежит связанной с путем $P_{\gamma\bar{\gamma}}^h$ контурной части. Поэтому наиболее существенны две позиции контура K_i относительно пути: контур связан с путем или не связан. Если контур K_i связан с путем $P_{\gamma\bar{\gamma}}^h$, то он может касаться его непосредственно или нет. От этого зависит качественный характер влияния контура на передачу, что отражается в выражении для передачи канала: в первом случае K_i входит только в знаменатель, а во втором в составе минора пути и в числитель.

Характер и степень влияния передачи дуги W_{ij} на передачу канала $\Phi_{\gamma\bar{\gamma}}^h$ определяется позицией дуги по отношению к пути $P_{\gamma\bar{\gamma}}^h$. Множество дуг графа по отношению к выбранному пути $P_{\gamma\bar{\gamma}}^h$ можно разбить на пять подмножеств в зависимости от того,

в какие из составляющих формулы Мэсона — путь, определитель или минор пути — входит передача дуги W_{ij} . Позиции дуг графа по отношению к пути сведены в табл. 3.2.

Для сильно связанного графа могут иметь место только первые три позиции [68, 82]. В книге [82] рассмотрен топологический

Таблица 3.2

Позиция	Определитель	Путь	Минор
1	—	—	—
2	+	+	—
3	+	—	—
4	—	—	—
5	—	—	—

подход к задаче нулевой чувствительности передачи к вариациям оператора дуги и приведено исследование относительной чувствительности передачи для этих позиций дуги по отношению к пути: 1 — дуга входит в путь, 2 — дуга не входит в путь и ни в один из контуров, не касающихся пути, 3 — дуга входит хотя бы в один контур, не касающийся пути.

Если рассматривать позиции дуг относительно передач, образованных несколькими путями, а также учесть возможность нескольких автономных контурных частей, то число позиций дуг увеличивается.

Передачи графа, содержащего дуги с нулевым усилением, определяются тем, в каких позициях по отношению к путям P_{ir}^k в выбранной передаче Φ_{ir} находятся эти дуги.

Если дуга W_{ij} с нулевым коэффициентом усиления по отношению к пути P_{ir}^k находится в первой позиции, то передача канала Φ_{ir}^k также стремится к нулю.

Если дуга с оператором $W_{ij}=0$ имеет вторую позицию, т. е. принадлежит только касающимся пути P_{ir}^k контурам, то передача канала изменяется в результате изменения определителя графа.

Если дуга $W_{ij}=0$ входит хотя бы в один контур, не касающийся пути P_{ir}^k , то изменяются минор пути и определитель графа. Если по отношению ко всем путям P_{ir}^k , $k=1, 2, \dots$, дуга $W_{ij}=0$ занимает одну и ту же позицию, сказанное выше справедливо не только для канала, но и для передачи графа Φ_{ir} в целом.

Легко определить изменение передачи при наличии нескольких путей с различными позициями дуги $W_{ij}=0$, а также изменения каналов и передач при наличии нескольких дуг с нулевым усилением. В частности, если путь P_{ir}^k содержит ν дуг с нулевой передачей, то передача канала $\Phi_{ir}^k \rightarrow 0^\nu$.

Передачи графа Φ_{ir} , содержащего дуги с бесконечно большим усилением, также определяются позицией этих дуг по отношению к путям P_{ir}^k , $k=1, 2, \dots$.

Предположим, что все дуги с бесконечным усилением принадлежат контурной части.

Если дуга $W_{ij} \rightarrow \infty$ имеет первую позицию по отношению к пути P_{ir}^k , то передача канала Φ_{ir}^k определяется из следующего выражения:

$$\Phi_{ir}^k = \lim_{W_{ij} \rightarrow \infty} \frac{P_{ji}^i W_{ij} P_{jr}^h \Delta_{ir}^h}{\Delta_0 + W_{ij} T_{Wij}^\Delta} = \frac{P_{ij}^k P_{jr}^h \Delta_{ir}^h}{-\sum_l P_{ji}^l \Delta_{ji}^l} \quad (3.54)$$

где P_{ji}^l — l -й путь от вершины i к вершине j , Δ_{ji}^l — минор этого пути.

Для примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 26. Пусть усиление дуги $W_{21} \rightarrow \infty$ и требуется определить предельную передачу Φ_{31} . Воспользуемся формулой (3.54), положив $r=3$, $i=1$, $j=2$:



Рис. 26.

$$\Phi_{31} = \frac{W_{21} \cdot 1 \cdot 1}{-(W_{12} + W_{13} W_{32})} = -\frac{W_{32}}{W_{12} + W_{13} W_{32}}.$$

Если для того же графа $W_{32} \rightarrow \infty$, то

$$\Phi_{31} = -\frac{1 \cdot W_{21} \cdot 1}{W_{21} W_{13}} = -\frac{1}{W_{13}}.$$

Пусть дуга с бесконечным усилением $W_{ij} \rightarrow \infty$ по отношению к пути P_{ir}^k находится во второй позиции, т. е. путь P_{ir}^k охвачен обратной связью с бесконечным усилением. Предельная передача канала Φ_{ir}^k при этом определяется следующим образом:

$$\Phi_{ir}^k = \lim_{W_{ij} \rightarrow \infty} \frac{P_{ir}^l \Delta_{ir}^h}{\Delta_0 + W_{ij} T_{Wij}^\Delta} = 0. \quad (3.55)$$

Если дуга $W_{ij} \rightarrow \infty$ принадлежит хотя бы одному контуру, не касающемуся пути P_{ir}^k , то ее передача входит в минор. Предельная передача при этом определяется так:

$$\Phi_{ir}^k = P_{ir}^k \lim_{W_{ij} \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{ir}^{k0} + W_{ij} T_{Wij}^{\Delta_{ir}^k}}{\Delta_0 + W_{ij} T_{Wij}^\Delta} = \frac{P_{ir}^k T_{Wii}^{\Delta_{ir}^k}}{T_{Wij}^\Delta}, \quad (3.56)$$

где $T_{Wij}^\Delta = -\sum_l P_{ji}^l \Delta_{ji}^l$, $T_{Wii}^{\Delta_{ir}^k} = -\sum_s P_{ji}^s \Delta_{ji}^s$,

причем l — номера контуров, содержащих дугу W_{ij} , s — номера только тех из них, которые не касаются пути P_{ir}^k . Если все

контуры, содержащие W_{ij} , не касаются P_{ir}^k , но касаются всех касающихся этого пути контуров, то $\Phi_{ir}^k = P_{ir}^k$; это объясняется тем, что в связанной контурной части бесконечно большими обратными связями оказываются охваченными контуры, касающиеся пути. В результате этого все обратные связи пути P_{ir}^k размыкаются, а передача канала становится равной передаче пути. Следует заметить, что именно в изменении существующих обратных связей, как правило, заключается опосредованная корректирующая роль контуров, непосредственно не касающихся данного пути.

Например, пусть в графе, изображенном на рис. 27, усиление дуги $W_{ij} \rightarrow \infty$. В соответствии с формулой (3.56) предельная передача равна

$$\Phi_{ir\infty} = \frac{W_{ir} W_{ii}}{W_{ii} + W_{ji} W_{ir} W_{ri}}.$$



Рис. 27.

Если граф имеет несколько дуг с бесконечным усилением, кроме того, часть дуг с нулевым усилением, то число различных комбинаций позиций увеличивается, так как необходимо различать не только позиции дуг относительно пути, но также их взаимные позиции, т. е. принадлежность дуг касающимся контурам, некасающимся парам, тройкам и т. д. При этом трудно получить обобщенное аналитическое выражение для предельных передаточных функций, но можно разработать алгоритмы определения порядка ν нуля или бесконечности, к которым может стремиться выбранная передаточная функция графа в результате совместного влияния дуг с нулевыми и бесконечными усилениями. Постановка этой задачи формулируется следующим образом. Пусть передаточные функции некоторых дуг графа имеют сомножитель k^ν , $k \rightarrow \infty$, причем для дуг с нулевым усилением $\nu < 0$, а для дуг с бесконечным усилением $\nu > 0$. Необходимо определить степень ν_{ir} сомножителя $k^{\nu_{ir}}$ передаточной функции графа $\Phi_{ir}(s)$.

Аналогична постановка задачи определения кратности нуля или полюса $s_0^{\nu_{ir}}$, т. е. кратности сомножителя $(s - s_0)$ у передаточной функции $\Phi_{ir}(s)$, если передаточные функции W_{ij} нескольких дуг графа имеют сомножители $(s - s_0)$ в положительной или отрицательной степени ν_{ij} .

Так как нули или полюсы s_α , кратность которых предстоит определить, могут рассматриваться как корни соответствующего полинома $d(s)$, то обобщением обсуждаемых выше задач является следующая постановка: определить степень ν_{ir} полинома $d(s)$, входящего множителем передаточной функции $\Phi_{ir}(s)$, если передаточные функции ряда дуг $W_{ij}(s)$ графа име-

ют указанный полным различных степеней v_{ij} в виде сомножителя.

При $d(s)=s$ решение поставленной задачи может быть использовано, например, для определения порядка астатизма передачи. Действительно, в случае $s_0=0$ и передаточной функции $\Phi_{yr}(s)$, имеющей смысл передачи по ошибке, искомая степень $v_{yr} > 0$, т. е. кратность нуля в начале координат означает порядок астатизма системы по этой передаче.

Алгоритм решения поставленной задачи, базирующийся на структурно-топологическом анализе графов, приводится в следующей главе.

Передачи графа, содержащего единичный контур, т. е. контур, передача которого равна плюс единице, представляют особый интерес. Это объясняется тем, что при этом определитель графа вырождается (см. § 3.6).

Как следует из формулы Мэсона для канала передачи (3.2), обращение в единицу передаточной функции некоторого контура K_i прежде всего сказывается на передачах тех каналов, которые образованы путями, не соприкасающимися только с контуром K_i . Миноры таких путей равны $(1 - K_i)$ и стремятся к нулю при $K_i \rightarrow 1$, что вызывает обращение в нуль передачи канала Φ_{yr}^k независимо от передачи пути, а следовательно, приводит к абсолютной инвариантности составляющей выхода y_{yr}^k к воздействию j . Однако при этом вырождается определитель графа, как это показано в § 3.6.

3.8. Чувствительность передач графа

При исследовании чувствительности передачи канала Φ_{yr}^k или системы в целом Φ_{yr} соответствующие передачи рассматриваются как функции передач путей, контуров или дуг в зависимости от того, влияние каких составляющих на Φ_{yr}^k или Φ_{yr} исследуется.

Абсолютная чувствительность передачи Φ_{yr} к пути P_{yr}^k определяется просто:

$$T_{P_{yr}^k}^{y_{yr}} = \Delta_{yr}^k / \Delta. \quad (3.57)$$

Отсюда следует, что вклад передачи пути в передачу системы в целом определяется соотношением числа контуров, касающихся и не касающихся пути; чем больше контуров графа, не касающихся пути, тем сильнее влияние передачи собственно пути; если все контуры не касаются пути, то $T_{P_{yr}^k}^{y_{yr}} = 1$.

Абсолютная чувствительность передачи канала Φ_{yr}^k к контуру K_i определяется следующим образом:

$$T_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = \frac{\partial}{\partial K_i} \cdot \frac{P_{\gamma r}^k \Delta_{\gamma r}^k}{\Delta}, \quad (3.58)$$

причем, если контур K_i не связан с путем, то $T_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = 0$. В том случае, когда K_i касается пути $P_{\gamma r}^k$, имеем

$$T_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = P_{\gamma r}^k \Delta_{\gamma r}^k \frac{\partial}{\partial K_i} \frac{1}{\Delta(K_i)} = -\Phi_{\gamma r}^k \frac{T_{Ki}^{\Delta}}{\Delta}. \quad (3.59)$$

Может быть получено выражение для относительной чувствительности передачи канала к передаче контура $S_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = -S_{Ki}^{\Delta}$. Если контур K_i не касается пути $P_{\gamma r}^k$, но принадлежит к связанной с путем контурной части, то

$$T_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = P_{\gamma r}^k \frac{T_{Ki}^{\Delta_{\gamma r} k} - T_{Ki}^{\Delta} \Delta_{\gamma r}^k}{\Delta^2} = \frac{P_{\gamma r}^k T_{Ki}^{\Delta_{\gamma r} k}}{\Delta} - \Phi_{\gamma r}^k \frac{T_{Ki}^{\Delta}}{\Delta}.$$

Относительная чувствительность передачи канала $\Phi_{\gamma r}^k$ к передаче некасающегося пути $P_{\gamma r}^k$ контура K_i равна

$$S_{Ki}^{\Phi_{\gamma r} k} = S_{Ki}^{\Delta_{\gamma r} k} - S_{Ki}^{\Delta},$$

т. е. разности относительных чувствительностей минора и определителя.

Прежде чем рассматривать чувствительности передач к дугам графа, следует определить вспомогательные понятия чувствительностей передач контуров и путей к дуге. Чувствительность контура к дуге была введена ранее и выражается формулой (3.40). Чувствительность пути $P_{\gamma r}^k$ к дуге W_{ij}

$$T_{W_{ij}}^{P_{\gamma r} k} = P_{\gamma r}^k P_{jr}^k \quad (3.60)$$

равна произведению путей от вершины r к началу дуги W_{ij} и от конца дуги к вершине γ вдоль пути $P_{\gamma r}^k$.

Относительные чувствительности передач путей и контуров к дуге равны единице.

Чувствительность передачи графа $\Phi_{\gamma r}$ к дуге W_{ij} , находящейся в любой позиции, может быть получена с использованием моделей или графов чувствительности [24, 40, 41], обобщающих метод М. Л. Быховского [13].

Пусть задан граф G (рис. 28а), чувствительность передачи $\Phi_{\gamma r}$ которого к дуге W_{ij} требуется определить. Предположим, что передача дуги W_{ij} получила приращение δW_{ij} , что вызовет приращения переменных δx_γ , δx_i и δx_j (рис. 28б). Вместо графа,

изображенного на рис. 28б, можно рассмотреть эквивалентный ему граф с двумя вершинами-истоками (рис. 28в). В силу линейности графа основные составляющие переменных x_i , x_j , x_γ вызваны воздействием f_r , а дополнительные — δx_i , δx_j , δx_γ — сигналом $x_j + \delta x_j$, приложенным к графу через дугу с передачей δW_{ij} (рис. 28г).

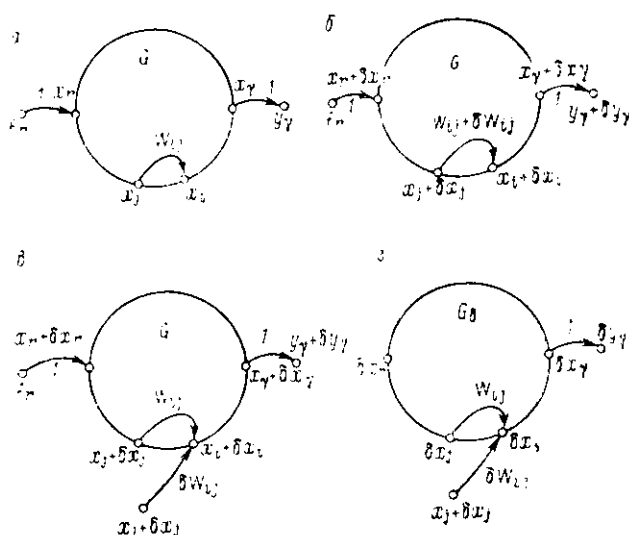


Рис. 28.

Дополнительные движения переменных можно получить с помощью модели чувствительности, граф которой изображен на рис. 29.

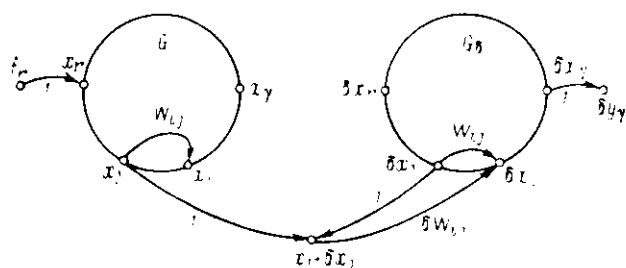


Рис. 29.

По определению чувствительность передачи Φ_{f_r} к передаче дуги W_{ij} равна

$$T_{W_{ij}}^{\Phi_{f_r}} = \lim_{\delta W_{ij} \rightarrow 0} \frac{\delta \Phi_{f_r}}{\delta W_{ij}} = \lim_{\delta W_{ij} \rightarrow 0} \frac{\delta x_\gamma}{\delta W_{ij}} \cdot \frac{1}{f_r}. \quad (3.61)$$

Из графа чувствительности (рис. 29) следуют уравнения:

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \Phi_{ir} \delta W_{ij} (x_j + \delta x_j), \\ x_j + \delta x_j &= x_j + \Phi_{ij} \delta W_{ij} (x_j + \delta x_j), \\ x_j &= \Phi_{jr} f_r,\end{aligned}$$

решая которые, получим

$$\frac{\delta x_i}{\delta W_{ij}} = \frac{1}{f_r} = \frac{\Phi_{ir} \Phi_{jr}}{1 - \Phi_{ij} \delta W_{ij}}.$$

Подставив это выражение в (3.61), получим искомое выражение для чувствительности передачи к дуге

$$T_{W_{ij}}^{\Phi_{ir}} = \Phi_{ir} \Phi_{jr}. \quad (3.62)$$

Таким образом, чувствительность передачи графа к дуге равна произведению двух передач графа: передачи Φ_{ir} от конца дуги к выходу графа и передачи Φ_{jr} от входа к началу дуги.

Чувствительность второго порядка $T_{(i,j)(l,m)}^{\Phi_{ir}^{(2)}}$ передачи Φ_{ir} к дугам W_{ij} и W_{lm} характеризует совместное влияние передач двух дуг на передачу системы и определяется дифференцированием $T_{W_{ij}}^{\Phi_{ir}}$ или $T_{(i,j)}^{\Phi_{ir}}$ по W_{lm} [13].

Общее выражение для чувствительности n -го порядка передачи Φ_{ir} к дугам $W_{ij}, \dots, W_{st}$ определяется следующим образом:

$$T_{(i,j) \dots (s,t)}^{\Phi_{ir}^{(n)}} = \sum_{k=1}^n \prod_{p=1}^{n+1} \Phi_{y_p x_p} \quad (3.63)$$

где Φ_{yx} — передача графа между вершинами y и x , которые в каждом произведении (3.63) являются одной из возможных последовательностей передач от r к y между концами и началами дуг $(i, j), \dots, (s, t)$.

Основную формулу для чувствительности передачи к дуге (3.62) можно получить и дифференцированием формулы Мэсона по передаче дуги:

$$T_{W_{ij}}^{\Phi_{ir}} = \frac{\partial}{\partial W_{ij}} \frac{\sum_k (W_{ij})}{\Delta(W_{ij})},$$

где через $\sum_k (W_{ij})$ обозначена линейная функциональная зависимость числителя формулы Мэсона от дуги W_{ij} .

Относительная чувствительность $S_{W_{ij}}^{\Phi_{ir}}$ передачи Φ_{ir} к дуге W_{ij} с соответствующей абсолютной чувствительностью связана следующим образом:

$$S_{W_{ij}}^{u_{ij}r} = \frac{\partial \ln \Phi_{ir}}{\partial \ln W_{ij}} = T_{W_{ij}}^{u_{ij}r} \frac{W_{ij}}{\Phi_{ir}}. \quad (3.64)$$

Подставляя выражение для передачи графа в (3.64), получаем

$$S_{W_{ij}}^{u_{ij}r} = S_{W_{ij}}^u - S_{W_{ij}}^A, \quad (3.65)$$

где $S_{W_{ij}}^u$, $S_{W_{ij}}^A$ — относительные чувствительности числителя формулы Мэсона и определителя графа к дуге W_{ij} .

В силу линейности (аффинности) числителя формулы Мэсона и определителя графа как функций передачи дуги W_{ij} выражение для передачи запишется так:

$$\Phi_{ir} = \frac{\sum_{\Delta} \Phi_{ir}^{\Delta} + W_{ij} T_{W_{ij}}^{\Delta}}{\Delta} = \frac{\sum_{\Delta} \Phi_{ir}^{\Delta} (1 + W_{ij} T_{W_{ij}}^{\Delta})}{\Delta}. \quad (3.66)$$

Если воспользоваться представлением (3.66) для передачи графа, то выражение для относительной чувствительности получится в виде формулы Линча [82]:

$$S_{W_{ij}}^{u_{ij}r} = \Delta^{-1} \Delta' = \sum_i \sum_j.$$

Выражения для абсолютных и относительных чувствительностей в случае передач, заданных дробно-рациональными передаточными функциями, также получаются в виде дробно-рациональных выражений.

Представляет интерес задача нахождения графа G_W и его вершин m и n , таких, чтобы передаточная функция Φ_{nm} графа G_W между вершинами m и n была равна относительной чувствительности $S_{W_{ij}}^{u_{ij}r}$ передачи Φ_{ir} графа G к дуге W_{ij} . Решение этой задачи для различных позиций дуги W_{ij} с использованием понятия диполя чувствительности приведено в работе [82].

4. АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ТОПОЛОГИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Задачи анализа топологии систем управления

Под анализом топологии, или топологическим анализом, систем управления понимается выявление некоторых свойств систем и процессов управления с помощью моделей топологического ранга неопределенности $M(1)$, т. е. на основе исследования взаимосвязей переменных или звеньев, иначе говоря, различных проявлений соединимости или связности ориентированных графов.

Как указывалось, выводы, полученные по рангу неопределенности $M(1)$, не изменяются при увеличении определенности моделей путем конкретизации структур операторов дуг или их параметров, т. е. при переходе к моделям $M(2)$ или $M(3)$, кроме тех, как правило, негрубых, вырождающихся или неустойчивых предельных систем, когда сочетание типов структур операторов и значений параметров приводит к изменению структуры выражений для определителей или передач систем. Если исследователя не устраивает какой-либо результат анализа модели $M(1)$, то требуемое изменение свойств обычно может быть получено только соответствующим изменением топологии системы.

Анализ сложных расширенных систем, включающих в себя модели среды и связей системы со средой, может быть проведен при различных уровнях неопределенности, т. е. в случае комбинации различных рангов неопределенностей отдельных подсистем, связей или среды. Именно в силу этого становится возможным и имеет смысл раздельный анализ контурных частей, передач и расширенной системы в целом, каждый из результатов которого имеет важное самостоятельное значение. При этом справедливо положение, заключающееся в большей значимости результатов, полученных при большей неопределенности моделей.

Связь между особенностями топологии систем и свойствами систем управления устанавливается с помощью выражений для определителей систем и топологических формул для передач — формул Мэзона [53], а для соответствующих графов — формул Коутса [95], Анисимова [4]. Однако, как показано в предыдущем разделе, ряд основных свойств систем можно выявить непосредственно из анализа особенностей графов: наличия контуров и сильно связанных подграфов, числа контуров, их касания и связности, позиций дуг относительно путей передач и друг друга и др. Сказанное приобретает особое значение в случае анализа действительно сложных систем с большим числом некасающихся контуров, когда индексные выражения для определителей и операторов передач приобретают чрезвычайно громоздкий, избыточный с позиций конкретных задач анализа и трудно обозримый вид.

Топологические особенности автоматических систем управления с относительно простой взаимосвязью переменных или звеньев легко выявляются по геометрическим образам (рисункам) моделей — графам или структурным схемам, представленным в привычной и удобной для анализа форме. Например, непосредственный обзор графа, изображенного на рис. 15, позволяет безошибочно найти пути, контуры, определить отношения их соприкосновения, выделить сильно связанные подграфы и т. д.

Однако если граф системы содержит значительное число вершин, дуг и контуров, то поиск наиболее удобного для топологического анализа геометрического образа (диаграммы графа) представляет собой самостоятельную задачу. Даже в случае достаточно наглядного графа большой сложности беспроблемный топологический анализ крайне затрудняется и, так правило, сопровождается ошибками. Уже для относительно несложных систем управления, графы которых изображены на рис. 30–31, поиск всех путей, контуров, некасающихся пар, троек и т. д. контуров требует большой внимательности.

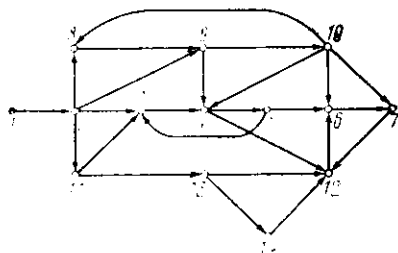


Рис. 30.

Изложенное заставляет разрабатывать и использовать специальные алгоритмы анализа топологии.

В традиционных постановках задач расчета и проектирования автоматических систем управления и регулирования методы и алгоритмы топологического анализа применялись редко, хотя в ряде смежных областей, например при проектировании электронных цепей, широко используются весьма развитые методы и алгоритмы анализа сигнальных и полюсных графов [4, 70, 73, 74].

Алгоритмы топологического анализа зависят от формы представления информации о взаимосвязях системы и условно могут быть разбиты на теоретико-множественные [43, 44, 56, 71, 79], основанные на операциях на множествах и методах комбинаторики, и алгебраические (матричные), основанные на матричных операциях и теоремах теории графов [43] и др.

В силу конечности множеств, задающих конечные графы, всегда имеется очевидный подход к решению задач анализа топологии, заключающийся в переборе всех элементов или их комбинаций, удовлетворяющих определенным условиям. Однако характерным для комбинаторных задач является то, что даже просто формализуемые задачи могут для своего решения потребовать перебора чрезвычайно больших множеств [56].

Материал третьей главы, посвященной топологическим особенностям систем управления, а также обзор некоторых задач анализа позволяют выделить ряд основных алгоритмов анализа сигнальных графов, представляющих собой модели систем управления. К ним относятся следующие алгоритмы:

- поиска путей;
- удаления вершин графа, заведомо не принадлежащих контурам;
- поиска контуров;
- поиска пар некасающихся контуров;
- выделения контурных частей;
- формирования множеств некасающихся троек, четверок и т. д. контуров.

К этой группе алгоритмов анализа топологии тесно примыкают алгоритмы структурно-топологического анализа, предназначенные для выявления влияния на передачи графа дуг, передаточные функции которых равны нулю или бесконечности, содержат интегрирующие или дифференцирующие звенья, чисто мнимые нули и полюсы и т. д.

С помощью перечисленных алгоритмов можно написать программы для ЭВМ, позволяющие автоматизировать топологический анализ сложных систем управления.

Ниже приведены некоторые важнейшие алгоритмы анализа орграфов, основанные на теоретико-множественном задании графов, операциях на множествах и модификации комбинаторного метода «перебор с возвратом» [44, 56].

4.2. Алгоритмы поиска путей

Путь является одним из основных понятий, характеризующих связность (достижимость) орграфов и определяющих важные свойства систем, которые они моделируют.

Алгоритмам поиска путей посвящены многие работы [10, 43, 56, 59]; предложено большое число различных алгоритмов [6, 44, 86, 87, 96] и др.

Важность алгоритмов поиска путей следует также из того, что на их основе с небольшими модификациями могут быть получены алгоритмы поиска контуров, сильно связанных подграфов и т. д. Ниже приводятся два варианта алгоритмов поиска всех путей $\mathcal{P}_{\gamma r} = \{P_{\gamma r}^h\}$, $h = 1, \dots, q_{\gamma r}$, между двумя вершинами графа r и γ , основанных на эффективном переборе.

Исходными данными для этих алгоритмов являются граф G и номера r и γ начальной и конечной вершин искомого пути. В результате действий, предусмотренных алгоритмами поиска путей, заполняются массивы, элементами которых являются номера вершин, принадлежащих путям $P_{\gamma r}^h$.

В первом алгоритме граф G задается отображениями $\Gamma(i)$, $i = 1, \dots, N$. На первом шаге алгоритма начальная вершина r включается в формируемое множество $P_{\gamma r}$, элементами которого будут вершины искомого пути. Затем в $P_{\gamma r}$ добавляется любая из вершин i отображения $\Gamma(r)$, после чего анализируется множество $\Gamma(i)$ и любая его возможная вершина добавляется в $P_{\gamma r}$ и т. д. Под «возможной» понимается вершина, еще не включенная в $P_{\gamma r}$.

На некотором шаге j может возникнуть ситуация, когда очередной шаг вперед не делается. Это бывает, во-первых, при нахождении одного из искомого пути и, во-вторых, при отсутствии хотя бы одной возможной вершины, которую можно добавить в $P_{\gamma r}$. В первом случае найденный путь, т. е. содержимое $P_{\gamma r}$, фиксируется, после чего осуществляется возврат, а во втором производится только возврат.

Возврат состоит в удалении из $P_{\gamma r}$ последней введенной в него вершины и в выборе на предыдущем шаге $(j-1)$ другой возможной вершины. Если таковой не существует, то делается возврат к $(j-2)$ -му шагу и т. д.

Поиск путей заканчивается тогда, когда множество $P_{\gamma r}$ состоит только из начальной вершины r и не существует никакой возможной вершины, которую можно добавить в $P_{\gamma r}$.

Программа, реализующая описанный алгоритм на языке АНАЛИТИК, приведена ниже. Стандартная информатива:

```

"ПУСТ"ПУТ "РАЗР"PN; J=1; IK[J]=1; "ДЛ"K=1"Ш"Г"ДО
"NG"ВЫП" ("ДЛ"K=1"Ш"Г"ДО"NP"ВЫП" "E"IS[2xK]=
=1"ТО"(МК[J]=IS[2xK-1]; J=J+1); IK[J+1]=J; J4=
=0; I=M1; J=1; I2=IK[J+1]-1; I1=IK[J]; "ДЛ"K=I1
"Ш"Г"ДО"И2"ВЫП"М[K]=МК[K]; IА[J]=M1; I.24. "ДЛ"K=
=I1"Ш"Г"ДО"И2"ВЫП"("Г"М[K]>0"ТО"(J2=M[K]; "НА"
L26)); "НА" L25; L26. M[K]=0; IА[J]=1; IА[J+1]=J2; "E"
J2≠N1"ТО"(I=J2; J=J+1; I1=IK[J]; I2=IK[J+1]-1;
"ДЛ"K=I1"Ш"Г"ДО"И2"ВЫП"(M[K]=МК[K]; "ДЛ"K3=
=I1"Ш"Г"ДО"J"ВЫП"("E"М[K]=IА[K3]"ТО"М[K]=0; "НА"
L24)); J4=J4+1; "ВЫВ"01, J4, J+1, "MASS" IА; IА[J+1]=0;
"ДЛ"K=I1"Ш"Г"ДО"И2"ВЫП"("E"М[K]>0"ТО" "НА" L24;

```

L25. "E"J>I"TO"J=J-1; IA[J+1]=0; I=IA[J]; I1=IK[I]; I2=IK[I+1]-1; "E"1≠M1"TO""HA"L24; "ДЛ"K=I"Ш"1"ДО"12"ВЫП""E"M[K]>0"TO""HA"L24; I=I"КОП"

Рабочая информация вводит в ЭВМ следующие исходные данные: число вершин графа NG; число дуг NP; одномерный массив топологии IS пар номеров вершин дуг, где i -й дуге соответствуют два элемента: $(2i)$ -й, равный номеру начальной, и $(2i-1)$ -й, равный номеру конечной вершины; номера M1 и M1 начальной и конечной вершин, между которыми ищутся пути; а также рабочие массивы: МК, М с числом элементов, равным NP, и IK и IA с числом элементов $(NG + 1)$. В директиве указывается разрядность счета PN.

В данной программе предварительно по массиву IS формируется эквивалентное задание графа одномерными массивами МК, IK. В массив МК последовательно записываются элементы $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(NG)$, а в i -й элемент массива IK заносится номер элемента МК, с которого начинается запись множества $\Gamma(i)$.

Исходной информацией для второго алгоритма является множество дуг графа G, задаваемое парами вершин, и номера r и u начальной и конечной вершин искомого пути P_{ru}^k , $k=1, 2, \dots$. В результате поиска путей заполняется матрица S, в строках которой записываются номера вершин в том порядке, в каком они входят в пути. Первый столбец этой матрицы содержит одно и то же число r .

Алгоритм предусматривает направленный перебор массива дуг графа и заполнение ряда первых строк матрицы путей S отрезками путей, имеющих совпадающие начальные участки.

Программная реализация этого алгоритма приводится ниже.

"РАЗР"4. QD=Q+DQ "ДЛ"1=I"Ш"1"ДО"QD"ВЫП""ДЛ"J=1"Ш"1"ДО"Р"ВЫП" S[I, J]=0; S[I, 1]=R; F=1; K=0; K1=1; M1. K=K+1; MM. "E"S[K, 1]=0"TO"("HA"MB); "ДЛ"V=1"Ш"1"ВЫП""E"S[K, V]=0"TO"(X=S[K, V-1]; "HA"M2); M2. "ДЛ"1=V"Ш"1"ВЫП"("E"X=I"TO"("HA"M1); "E" F=0"TO"("ДЛ"11=1"Ш"1"ДО"Р"ВЫП"(S[K, 11]=S[K1, 11]; S[K1, 11]=0); F=1; K1=K1-1; "HA"MM); F=0; J=0; M3. J=J+1; "E"J>Q"TO"("HA"M5); "E"MS[J, 2]=X"TO"("HA"M4)"ИНА"("HA"M3); M4. Y=MS[J, 1]; "ДЛ"U=1"Ш"1"ДО"1-1"ВЫП""E"S[K, U]=Y"TO"("HA"M3); "E" F=0"TO"(F=1; Z=Y; S[K, 1]=Z)"ИНА"(K1=K1+1; "E"K1>QD"TO"("ВЫВ""УВЕЛИЧИТЬ DQ"; "СТОП"); "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"1-1"ВЫП" S[K1, 1]=S[K, 1]; S[K1, 1]=Y); "HA"M3; M5. "E" F=1"TO"(X=Z); MB. K=0; M1. K=K+1; "E" S[K, 1]=0"TO"("E"K=1"TO"("ВЫВ""K=0); "СТОП"); "ВЫВ""СТРО", K, "ПРОБ"; "ДЛ"1=1"Ш"1"ВЫП"(A=S[K, 1]; "ВЫВ""ЗНА", "E"A=I"TO"("ВЫВ""; "HA"MB1); "ВЫВ"";

Описательная часть программы имеет вид: "ГДЕ" $P=p$; $Q=q$; $R=r$; $\Gamma=\gamma$; $DQ=\dots$; $MS[q, 2]=\dots$; $S[q+DQ, p]$ "КОН". Здесь приняты следующие идентификаторы: P — число вершины графа, Q — число дуг, R — начальная, Γ — конечная вершины искомого пути, $MS[q, 2]$ — массив дуг графа, $S[q, p]$ — двумерный массив путей, являющийся результатом поиска. Если число путей между вершинами r и γ превышает число дуг, то программа предусматривает вывод информации о необходимости увеличить число строк матрицы S на величину DQ .

В качестве примера на рис. 30 представлен граф с $P=14$ и $Q=25$. Описательная часть программы для этого графа запишется следующим образом: "ГДЕ" $P=14$; $Q=25$; $R=1$; $\Gamma=7$; $DQ=0$; $MS[25, 2]=2, 1, 11, 2, 3, 11, 3, 2, 9, 2, 8, 2, 9, 8, 8, 10, 4, 3, 3, 5, 13, 11, 12, 13, 14, 13, 12, 4, 5, 4, 4, 9, 10, 9, 4, 10, 6, 5, 6, 10, 7, 10, 6, 12, 7, 6, 12, 7, 12, 14$; $S[25, 14]$ "КОН". В результате работы алгоритма отыскиваются и распечатываются в виде строк матрицы S все 18 путей: $K1: 1, 2, 11, 3, 4, 12, 6, 7$; $K2: 1, 2, 3, 4, 12, 6, 7$; $K3: 1, 2, 9, 4, 12, 6, 7$; $K4: 1, 2, 8, 9, 4, 12, 6, 7$; $K5: 1, 2, 11, 13, 12, 6, 7$; $K6: 1, 2, 11, 3, 4, 5, 6, 7$; $K7: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $K8: 1, 2, 9, 10, 7$; $K9: 1, 2, 9, 4, 5, 6, 7$; $K10: 1, 2, 8, 9, 10, 4, 12, 6, 7$; $K11: 1, 2, 8, 9, 4, 5, 6, 7$; $K12: 1, 2, 11, 13, 14, 12, 6, 7$; $K13: 1, 2, 9, 10, 4, 12, 6, 7$; $K14: 1, 2, 9, 10, 6, 7$; $K15: 1, 2, 8, 9, 10, 6, 7$; $K16: 1, 2, 8, 9, 10, 7$; $K17: 1, 2, 8, 9, 10, 4, 5, 6, 7$; $K18: 1, 2, 9, 10, 4, 5, 6, 7$.

Описательная часть программы для поиска путей от вершины 1 до вершины 9 в графе, изображенном на рис. 31, имеет вид: "ГДЕ" $P=17$; $Q=28$; $R=1$; $\Gamma=9$; $DQ=0$; $MS[28, 2]=2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 1, 9, 3, 5, 2, 16, 16, 5, 17, 2, 10, 17, 11, 10, 12, 11, 13, 12, 14, 13, 15, 14, 15, 12, 10, 12, 13, 7, 6, 14, 8, 14, 8, 15, 8, 9, 17, 12, 7, 5$; $S[28, 17]$ "КОН". Результат счета для этого примера печатается в следующей форме: $K1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $K2: 1, 2, 17, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 8, 9$; $K3: 1, 2, 17, 10, 11, 12, 13, 14, 8, 9$; $K4: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$; $K5: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 8, 9$; $K6: 1, 2, 17, 10, 11, 12, 15, 8, 9$; $K7: 1, 2, 17, 10, 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 9$; $K8: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 14, 15, 8, 9$; $K9: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 8, 9$; $K10: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13, 14, 8, 9$.

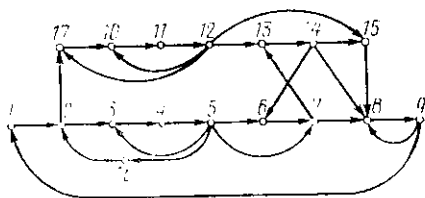


Рис. 31.

4.3. Некоторые алгоритмы упрощения анализа топологии

Эффективность алгоритмов поиска путей может быть увеличена, если от графа G перейти к гомеоморфному графу G' ,

содержащему меньшее число дуг и вершин, но такое же число путей между вершинами, общими для G и G' .

Два графа G и G' называются гомеоморфными, если их можно получить из одного графа последовательным подразбиением дуг [84]. Например, графы, изображенные на рис. 32, гомеоморфны, так как граф G получается подразбиением дуг $(3, 1)$, $(5, 3)$, $(3, 6)$ и $(8, 6)$ графа G' .

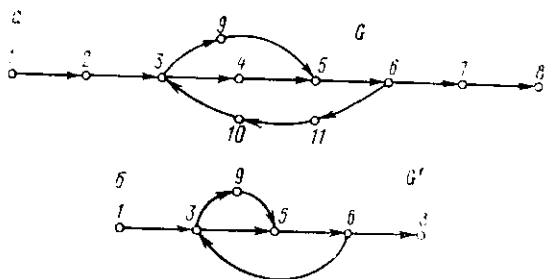


Рис. 32.

После отыскания путей в графе G' с меньшим числом вершин можно легко определить пути в исходном графе G ; для этого массивы путей дополняют ранее удаленными вершинами. Можно составить простой алгоритм перехода к гомеоморфному графу и получения путей исходного графа по массивам, кодирующим пути гомеоморфного графа.

При исключении вершин с единичной полустепенью и исхода и захода и переходе к гомеоморфному графу с меньшим числом вершин и дуг следует учитывать возможности появления кратных дуг и петель, т. е. получения мульти- или псевдографов. Поэтому, если принятый способ кодирования графов и используемые алгоритмы не рассчитаны на класс мульти- или псевдографов, то при разработке алгоритма перехода к гомеоморфному графу с меньшим числом дуг это обстоятельство должно учитываться особо.

Гомеоморфные графы содержат одно и то же число контуров, причем соответствующие контурам массивы совпадают с точностью до удаленных вершин. Следовательно, переход к графу с меньшим числом вершин и дуг в общем случае повышает эффективность поиска контуров вследствие уменьшения объема перебора.

При поиске контуров имеется еще одна возможность сокращения перебора, заключающаяся в удалении тех вершин графа, которые заведомо не могут войти в состав контуров. Необходимым (но недостаточным) условием принадлежности вершины графа контуру является отличие от нуля полустепеней исхода и захода, т. е. вершина не должна быть источником или стоком.

Например, в графе, условно изображенном на рис. 33, вершины 1, 4, 5, и 10 не могут принадлежать контурам.

Прежде чем искать в графе G контуры, целесообразно перейти к подграфу $G^{(i)}$, не содержащему вершин, заведомо не входящих в состав контуров. Поскольку при удалении вершин удаляются и инцидентные ей дуги, полученный подграф $G^{(i)}$ может в свою очередь содержать стоки и истоки. Например, из рис. 34 видно, что после удаления вершины 1 и инцидентной ей дуги (1, 2), полученный подграф имеет вершину 2, подлежащую удалению. Процесс последовательного удаления вершин (и дуг) завершается, если на k -й итерации подграф $G^{(k)}$ не содержит ни одной вершины типа сток или исток.

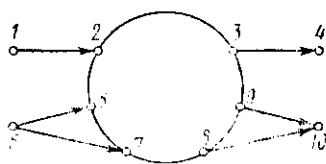


Рис. 33.

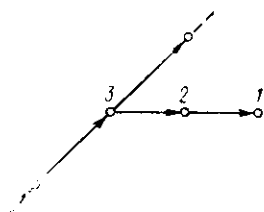


Рис. 34.

Программа удаления вершин и дуг, не принадлежащих контурам, имеет вид:

```

"РАЗР"4.MNP[I]=MS[I, 1]; I=1; II=
=1; II=1; MH. I=I+1; "E" I>Q"TO"
("E" II=I"TO" (I=0; II=2; "HA"MH)
"IIA"("HA"MH); A=MS[I, II];
"ДЛ"J=I"П"Г"ДО"II"ВЫП" "E" MNP
[J]=A"TO"("HA"MH); II=II+1; MNP
[I]=A; "HA"MH; MH. Q1=Q; P1=
=P; PD=P+DP; I=0; M. I=I+1;
"E" I>P1"TO"("HA"MH); NP=MNP[I]; J=0; МФ. J=J+1;
"E" J>Q1"TO"("HA"MH); "E"MS[J, 1]=NP"TO" (Ф=2; Ф1=1;
"HA"МФ1); "E"MS[J, 2]=NP"TO" (Ф=1; Ф1=2; "HA"МФ1);
"HA"МФ; МФ1. J1=J; МФ4. J1=J1+1; "E"J1≤Q1"TO"
("E"MS[J1, Ф1]=NP"TO"("HA"MH); "HA"МФ4); J1=J; МФ2.
"E"MS[J1, Ф1]=NP"TO"(XP=MS[J1, Ф1]; MS[J1, 1]=
=MS[Q1, 1]; MS[J1, 2]=MS[Q1, 2]; J1=J1-1; Q1=Q1-1;
"ДЛ"JJ=I+I"П"Г"ДО"R1"ВЫП" "E" MNP[J1]=XP"TO"
("HA"МФ3); P1=P1+1; "E" P1>PD"TO"("ВЫВ""УВЕЛИ-
ЧИТЬ DP"; "СТОП"); MNP[P1]=
=XP); МФ3. J1=J1+1; "E"J1≤Q
1"TO"("HA"МФ2); "HA" M; MB.
"ДЛ" W=I"П"Г"ДО"Q1"ВЫП"
("ВЫВ""СТРО", W, "ПРОБ"; "ВЫВ"
"ЗН"MS[W, 1]; "ВЫВ"; "ВЫВ"
"ЗН"MS[W, 2]);

```

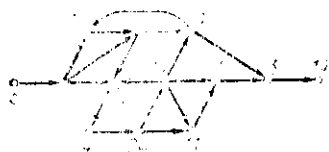


Рис. 35.

Для графа, представленного на рис. 35, описательная часть программы запишется следующим образом: "ГДЕ" $P=13$; $Q=20$; $MS[20, 2]=7, 5, 22, 7, 6, 7, 12, 7, 6, 12, 12, 9, 9, 6, 22, 6, 22, 14, 4, 22, 24, 4, 14, 24, 11, 24, 11, 14, 1, 14, 1, 11, 3, 1, 3, 9, 9, 14, 19, 3$; $MNP[26]$ "КОН". Здесь P — число вершин, Q — число дуг,

$MS[q, 2]$ — массив дуг графа G , $MHP[26]$ — вспомогательный массив.

Результат удаления вершин и дуг из графа, изображенного на рис. 35, использованием приведенного алгоритма печатается в виде массива дуг нового графа: 9, 14; 24, 4; 14, 24; 4, 22; 6, 12; 12, 9; 9, 6; 22, 6; 22, 14.

4.4. Алгоритмы поиска контуров

Для поиска контуров в графе также могут быть применены различные модификации метода перебора. Ниже приводятся два алгоритма поиска контуров, основанные на различных подходах к поиску.

4.4.1. Контур в графе представляет собой замкнутый путь, поэтому для нахождения контуров можно модифицировать алгоритмы поиска путей, в частности алгоритмы, рассмотренные выше.

В общем случае можно зафиксировать любые две вершины графа r и r и искать пути $\mathcal{P}_{rr} = \{P_{rr}^h\}$ от r к r и пути $\mathcal{P}_{rr} = \{P_{rr}^h\}$ от r к r . Контуров графа соответствуют элементам декартова произведения $\mathcal{P}_{rr} \times \mathcal{P}_{rr}$ множеств путей, а число найденных при этом контуров равно произведению мощностей множеств $|\mathcal{P}_{rr}| \cdot |\mathcal{P}_{rr}|$. Очевидно, что все эти контуры образуют группу соприкасающихся контуров, т. е. полный подграф графа касания R_k .

В частном случае вершины r и r выбираются смежными, т. е. фиксируется дуга графа $(r, r) = P_{rr}$ и ищутся пути $\mathcal{P}_{rr} = \{P_{rr}^h\}$, замыкающие дугу (r, r) до контура. При этом число найденных контуров равно числу путей $|\mathcal{P}_{rr}|$. Поскольку все контуры, содержащие дугу (r, r) , оказываются найденными, то дуга (r, r) может быть удалена из графа, в результате чего получается подграф, вершины r и r которого могут оказаться стоковыми или истоковыми. Прежде чем приступить к поиску следующей группы соприкасающихся контуров, целесообразно удалить стоковые и истоковые вершины со всеми инцидентными им дугами.

Если необходимо найти все множество контуров графа $\mathcal{K}$, то описанные процедуры применяются до получения нуля-графа.

Совместное поочередное применение алгоритмов поиска путей и удаления вершин может дать существенный эффект при отыскании всех контуров графа. Этот эффект может быть усилен, если на каждом этапе фиксируется дуга, входящая в состав наибольшего числа контуров. Поэтому, если имеется информация о таких дугах, ее целесообразно использовать в начале поиска.

Контуры могут быть найдены также поочередной фиксацией вершин и поиском путей от вершины r к ней же. После отыска-

ния всех контуров, содержащих вершину r , последняя может быть удалена из графа вместе со всеми инцидентными ей дугами. Если полученный подграф содержит вершины типа стоков или истоков, они удаляются до последующего этапа поиска контуров.

За вершину r , фиксируемую на каждом этапе поиска контуров, следует выбрать ту, которая входит в максимальное число контуров. Поскольку текущую информацию о числе контуров, в которые входят те или иные вершины графа, получить сложно, то на каждом этапе поиска можно фиксировать вершину i , имеющую максимальное число инцидентных дуг, т. е. степень s_i . Вершина максимальной степени легко определяется по заданию графа. В силу сказанного алгоритм поиска контуров целесообразно базировать именно на фиксации единственной вершины, а не различных вершин r и u или дуги.

Очевидно, все контуры $\mathcal{K}(i)$, найденные при фиксации i -й вершины, соприкасаются. Если следующую $(i+1)$ -ю вершину выбрать из подмножества вершин, принадлежащих контурам $\mathcal{K}(i)$, то подмножество контуров $\mathcal{K}(i+1)$ будет касаться хотя бы одного из контуров $\mathcal{K}(i)$, и множества $\mathcal{K}(i)$ и $\mathcal{K}(i+1)$ окажутся связанными. Следующую $(i+2)$ -ю вершину можно также выбрать из множества вершин, принадлежащих контурам $\mathcal{K}(i) \cup \mathcal{K}(i+1)$, что обеспечит нахождение подмножества $\mathcal{K}(i+2)$, связанного с ранее найденными контурами. Хотя такой выбор вершин несколько уменьшает эффективность поиска всех контуров графа, однако обладает большим преимуществом, заключающимся в выделении автономных контурных частей, т. е. сильно связанных подграфов одновременно с поиском контуров. Все контуры $\mathcal{K}^m = \bigcup \mathcal{K}^m(i)$, найденные за один m -й цикл фиксации вершин, и только они, принадлежат m -й автономной контурной части G''_m .

Вывод информации о найденных в процессе поиска контурах производится так, что некоторым образом выделяются подмножества заведомо касающихся контуров $\mathcal{K}^m(i)$ и контуры m -й автономной контурной части $\mathcal{K}^m = \bigcup \mathcal{K}^m(i)$.

Заметим, что число вершин $n_m = |\{\mathcal{K}^m(i)\}|$, которое понадобилось фиксировать для полного выделения m -й сильно связной компоненты графа, является верхней оценкой T_m числа некасающихся контуров данной автономной контурной части.

После полного выделения одной автономной контурной части и удаления вершин и дуг типа истоков и стоков новая фиксируемая вершина выбирается из оставшихся как вершина с максимальной степенью.

Программная реализация описанного алгоритма поиска контуров $\mathcal{K} = \bigcup_m \mathcal{K}^m$, групп заведомо касающихся контуров $\mathcal{K}^m(i)$

и контуров одной контурной части приведена в следующем параграфе.

4.4.2. В данном алгоритме поиска всех контуров графа используется та же техника, что и в первом алгоритме поиска путей, описанном в § 4.2.

Алгоритм работает следующим образом. Выбирается начальная вершина с номером 1. Если в множестве $\Gamma^{-1}(1)$ отсутствуют вершины ($\Gamma^{-1}(1) = \emptyset$), то выбирается начальная вершина с номером 2. В противном случае из вершины 1 начинается поиск контуров методом перебора с возвратом, который отличается от метода поиска путей, описанного в п. 4.2.1, тем, что в множество K , где накапливаются номера вершин, не заносится начальная вершина. По окончании поиска контуров из множества $\Gamma(i)$, $1 < i \leq N$, исключается вершина 1 и выбирается начальная вершина с номером 2. Если в множестве $\Gamma^{-1}(2)$ отсутствуют вершины, номера которых больше 2, то выбирается начальная вершина 3. В противном случае из вершины 2 начинается поиск контуров, по окончании которого из множеств $\Gamma(i)$, $2 < i \leq N$, исключается вершина 2, выбирается начальная вершина 3 и т. д. Поиск всех контуров в графе заканчивается тогда, когда завершается поиск контуров из вершины $(N-1)$.

Анализ множества $\Gamma^{-1}(m)$ до начала поиска контуров из вершины m , а также исключение вершины m из отображений $\Gamma(i)$, $m < i \leq N$, по окончании поиска приводят к сокращению необходимого времени вычислений.

Стандартная информатива программы поиска контуров на языке АНАЛИТИК, реализующей описанный алгоритм, имеет вид:

```

"ПУСТ"КОН. "РАЗР"PN; "ДЛ"И=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП""ДЛ"
J=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"МК[I, J]=0; "ДЛ"И=1"Ш"1"ДО"
NP"ВВП"МК[IS[2×I], IS[2×I-1]]=1; "ВВВ""МАСС"МК;
КОН1."ДЛ"И=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"(IA[I]=0; M3[I]=0);
NK=0; I4=1; I=1; I1=1; "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"
M2[K]=МК[I, K]; L16. "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"
("E"М2[K]=1"ТО"(J2=K; "HA"Л15)); "HA"Л14; L15. M2[J2]=
=0; "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"М[I, K]=M2[K]; "E"J2<
<I4"ТО" "HA"Л16; "E"J2=IA[I]"ТО"(IA[I1]=1; "HA"Л17);
"ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"М2[K]=МК[J2, K]; M3[J2]=
=1; MP [I1]=J2; "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"("E"М2[K]+
+M3[K]=2"ТО"М2[K]=0; M[J2, K]=M2[K]; IA[I1]=1;
I1=I1+1; I=J2; "HA"Л16; L17. NK=NK+1; "ВВВ""СТР",
NK, I1, "МАСС"IA; "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"("E"
M2[K]=1"ТО""HA"Л16); L14. "E"И>1"ТО"(IA[I1]=0; И=
=И-1); "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"("E"М3[K]=1"ТО"
"HA"Л19); "HA"Л18; L19. M3[MP[I1]]=0; I=IA[I1]; "ДЛ"K=
=1"Ш"1"ДО"NG"ВВП"М2[K]=M[I, K]; "E"И>I4"ТО""HA"

```

L16; "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"BBП"("Е"М2[K] = 1"ТО""НА" L16); L18.I4=I4+1; I=I4; "Е"NG-I4 ≥ 1"ТО"("ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"NG"BBП"("М2[K] = MK[I, K]; M[I, K] = M2[K]; M3[K]=0); I1=1; IA[I1]=0; "НА" L16); I=1"КОИ"

В рабочей информативе описываются исходные данные: NG, NP, IS, аналогичные числам и массивам рабочей информативы для поиска путей (см. п. 4.2.1), а также рабочие массивы MK, M [NG, NG]; M2, M3, MP, IA[NG].

В директиве "ВЫП" PN=...; "НА"КОИ"КОИ" задается разрядность счета PN.

4.5. Алгоритмы анализа отношений касания контуров

Решение многих задач анализа и синтеза топологии, выявление различных свойств систем связаны с установлением отношений касания контуров, т. е. с выделением пар $\mathcal{L}_2^m$, троек $\mathcal{L}_2^m$ и т. д. некасающихся контуров, принадлежащих m -й автономной контурной части G_0^m .

4.5.1. Частично информация о заведомо касающихся контурах получается при их поиске путем фиксации вершин графа; там же получается верхняя оценка числа некасающихся контуров анализируемой автономной контурной части. Поэтому поиск всех пар некасающихся контуров $\mathcal{L}_2^m$ одной и той же автономной контурной части следует вести только на парах контуров из различных подмножеств, т. е. на $\{\mathcal{X}^m(i) \times \mathcal{X}^m(j)\}$, $i=1, \dots, n_m-1$, $j=i+1, \dots, n_m$. При этом множество всех некасающихся пар контуров $\mathcal{L}_2$ графа с несколькими автономными контурными частями дополнительно к $\bigcup_m \mathcal{L}_2^m$ содержит множество всех пар из различных контурных частей, однако в случае известных $\mathcal{L}_2^m$ нет никакой необходимости их объединения и формирования $\mathcal{L}_2$. Каждая автономная контурная часть должна исследоваться отдельно; определитель всей системы Δ легко получается как произведение определителей автономных контурных частей.

Поскольку при поиске контуров результат представляет собой массивы номеров вершин значительного объема и, кроме того, при поиске контуров по алгоритму, рассмотренному в п. 4.4, получается значительная информация о группах касающихся и некасающихся контуров, имеет смысл объединение программ поиска контуров и пар некасающихся контуров. Такая объединенная программа приводится ниже:

"РАЗР"1.IG=0; Q1=Q; NA=0; NA1 = 1; LK = P + 2; CG = P + 3; CA = P + 4; KΓ = 0; "ДЛ"1 = 1"ПГ"1"ДО"Q2"ВЫП" "ДЛ"J = 1"ПГ"1"ДО"CA"ВЫП"S[I, J]=0; MV[I, J]=MS[I, J]; I=1; P1=1; H=1; M2. I=I+1; "Е"1>Q"ТО""Е"Н = 1"ТО" (I = 0; H = 2; "НА"М2); X=MS[I, H]; "ДЛ"J=1"ПГ"1"ДО"Р1

"ВЫП" "Е" MV[1, J] = X "ТО" "НА" M2; P1 = P1 + 1; MV[1, P1] =
 = X; "Е" P1 = P "ТО" "НА" M3; "НА" M2; M3. "ДЛ" J = 1 "Ш" 1
 "ДО" P1 "ВЫП" (X = MV[1, J]; Y = 0; Z = 0; "ДЛ" JJ = 1 "Ш" 1
 "ДО" Q1 "ВЫП" ("Е" MS[J, 1] = X "ТО" Y = Y + 1; "Е" MS[J, 2] =
 = X "ТО" Z = Z + 1); MV[2, J] = Y; MV[3, J] = Z); "ВЫВ" P1;
 M4. U = 0; I = 0; M5. I = I + 1; "Е" I > P1 "ТО" ("Е" U = 1 "ТО"
 "НА" M3; "НА" M10); "Е" MV[2, 1] = 0 "ИЛИ" MV[3, 1] = 0 "ТО"
 (U = 1; W = MV[1, 1]; MV[1, 1] = MV[1, P1]; MV[2, 1] =
 = MV[2, P1]; MV[3, 1] = MV[3, P1]; I = I - 1; P1 = P1 - 1;
 "Е" P1 = 1 "ТО" "НА" M40; II = 0; M6. II = II + 1; "Е" II > Q1 "ТО"
 "НА" M7; "Е" MS[II, 1] = W "ИЛИ" MS[II, 2] = W "ТО" (MS
 [II, 1] = MS[Q1, 1]; MS[II, 2] = MS[Q1, 2]; Q = Q1 - 1; "ВЫВ"
 Q1; "Е" Q1 = 1 "ТО" "НА" M40; II = II - 1); "НА" M6; M7. "Е"
 NA = NA1 "ТО" ("ДЛ" T = 1 "Ш" 1 "ДО" P2 "ВЫП" "Е" MR[T] =
 = W "ТО" (MR[T] = MR[P2]; P2 = P2 - 1; "Е" P2 = 0 "ТО" (NГ =
 = 0; S[KГ, CA] = NA; NA1 = NA1 + 1)); "НА" M5); "НА" M5;
 M10. "Е" NA1 > NA "ТО" ("ДЛ" I = 1 "Ш" 1 "ДО" P1 "ВЫП" MR[I] =
 = MV[1, I]; P2 = P1; "ВЫВ" P2); M11. D = 0; I = 0; M12. I =
 = I + 1; "Е" I > P2 "ТО" "НА" M13; C = MR[I]; "ДЛ" J = 1 "Ш" 1
 "ВЫП" "Е" MV[1, J] = C "ТО" (A = MV[2, J] + MV[3, J]; "Е" A >
 > D "ТО" (P1 = C; B = J; D = A); "НА" M12); M13. "ВЫВ" P1;
 F = 1; K = KГ; K1 = K + 1; II = K + 1; S[K1, 1] = P1; S[K1,
 LK] = 1; Б1. K = K + 1; "ВЫВ" K; МБ. "Е" S[K, 1] = 0 "ТО"
 "НА" M18; Ю = S[K, LK]; X = S[K, Ю]; Б2. "ДЛ" I = Ю + 1 "Ш"
 1 "ВЫП" ("Е" I ≥ 3 "ТО" "Е" X = P1 "ТО" (S[K, LK] = I - 2; "НА"
 Б1); "Е" F = 2 "ТО" ("ДЛ" II = 1 "Ш" 1 "ДО" LK "ВЫП" (S[K, II] =
 = S[K1, II]; S[K1, II] = 0); F = 1; K1 = K1 - 1; "НА" МБ);
 F = 0; J = 0; Б3. J = J + 1; "Е" J > Q1 "ТО" "НА" Б5; "Е" MS[J,
 2] = X "ТО" ("НА" Б4) "ИНА" ("НА" Б3); Б4. Y = MS[J, 1]; "ДЛ"
 Я = 2 "Ш" 1 "ДО" I = 1 "ВЫП" "Е" S[K, Я] = Y "ТО" "НА" Б3; "Е" F =
 = 0 "ТО" (F = 1; Z = Y; S[K, 1] = Z) "ИНА" (K1 = K1 + 1; "Е"
 K1 > Q2 "ТО" ("ВЫВ" УВЕЛИЧИТЬ Q2; "СТОП"); "ДЛ" T =
 = 1 "Ш" 1 "ДО" I = 1 "ВЫП" S[K1, T] = S[K, T]; S[K1, I] = Y;
 S[K1, LK] = 1); "НА" Б3; Б5. "Е" F = 1 "ТО" (X = Z); M18. KГ =
 = K - 1; NГ = NГ + 1; S[KГ, CГ] = NГ; M20. "Е" NA1 > NA "ТО"
 (P2 = 0; NA = NA + 1); M21. "ДЛ" I = II "Ш" 1 "ДО" KГ "ВЫП"
 (L = S[I, LK]; "ДЛ" J = 2 "Ш" 1 "ДО" L "ВЫП" (R = S[I, J];
 "ДЛ" JJ = 1 "Ш" 1 "ДО" P2 "ВЫП" "Е" MR[JJ] = R "ТО" "НА"
 M22; P2 = P2 + 1; MR[P2] = R; M22. R = 0)); M30. "ВЫВ" P2;
 MV[2, B] = 0; "НА" M4; M40. LM = KГ; S[KГ, CA] = NA; "ДЛ"
 I = 1 "Ш" 1 "ДО" LM "ВЫП" ("ВЫВ" "СТРО"; "ДЛ" J = 1 "Ш" 1
 "ДО" CA "ВЫП" (X = S[I, J]; "ВЫВ" "ЗН" X; "ВЫВ" ".)) ПИК.
 "ДЛ" I = 1 "Ш" 1 "ДО" L2 M "ВЫП" ML2[I, 3] = 0; L2 = 0; KГ = 0;
 I = 1; МАА. "Е" I > LM - 1 "ТО" "НА" "ВЫВ"; "ДЛ" J = 1 "Ш" 1
 "ВЫП" "Е" S[J, CA] ≠ 0 "ТО" (AL = S[J, CA]; AK = J; "НА" МА1);
 МА1. "Е" I > AK "ТО" (ML2[L2, 3] = AL; "НА" МАА); NГ = KГ +
 + 1; "ДЛ" J = NГ "Ш" 1 "ДО" AK "ВЫП" "Е" S[J, CГ] ≠ 0 "ТО"
 (KГ = J; "НА" МА2); МА2. I = NГ - 1; МА3. I = I + 1; "Е" I >

$> K\Gamma$ "ТО" "НА" МА1; ДЛA=S[1, LK]; J=KГ; МА4. J=J+1;
 "Е"J>AK "ТО" "НА" МА3; ДЛB=S[J, LK]; "ДЛ"П=1"Ш"1
 "ДО"ДЛА"ВЫП" "ДЛ"JJ=1"Ш"1"ДО"ДЛB"ВЫП" "Е" S[1,
 П]=S[J, JJ]"ТО" "НА" МА4; L2=L2+1; "Е" L2>L2M"ТО"
 "ВЫВ" "УВЕЛИЧИТЬ L2M"; ML2[L2, 1]=1; ML2[L2, 2]=J;
 "НА" МА4; ВЫВ. "ВЫВ" "МАСС" ML2.

Описательная часть про-
 граммы для примера, изобра-
 женного на рис. 36, имеет вид
 "ГДЕ" P=19, Q=34; MS
 [34, 2]=2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6,
 5, 7, 6, 8, 7, 9, 3, 10, 9, 11, 10,
 8, 11, 6, 11, 10, 7, 9, 10, 9, 11, 3,
 5, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 3, 8, 15, 2, 7,
 19, 13, 12, 14, 13, 15, 14, 16, 15,
 17, 16, 18, 17, 19, 18, 13, 14, 15,
 16, 15, 17, 15, 19, 18, 19; Q2=

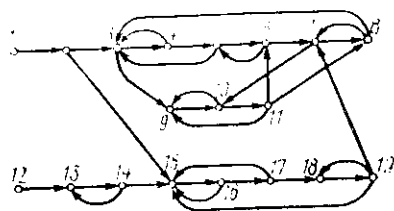


Рис. 36.

=34; S[34, 23]; MV[3, 19]; MR[19]; L2M=50; ML2[50, 3]"КОН".
 Здесь приняты следующие идентификаторы: P, Q — числа
 вершин и дуг графа; MS[Q, 2] — массив дуг графа; S[Q2, P+
 +4] — массив масспв, в строках которого будут записаны пе-
 перечислением вершин найденные контуры; число Q2 строк массива
 S полагается равным Q и при необходимости может быть
 увеличено; MV[3, P], MR[P] — вспомогательные массивы;
 ML2 [L2M, 3] — рабочий массив, в котором будут перечислены
 пары номеров некасающихся контуров, число строк L2M мас-
 сива ML2 выбирается достаточно большим и может увеличи-
 ваться.

В каждой строке массива S на третьем от конца месте за-
 писывается число вершин, входящих в состав соответствующего
 контура. Второй от конца столбец массива S предназначен для
 отделения групп контуров, найденных при фиксации одной вер-
 шины. Последний столбец служит для отделения друг от дру-
 га автономных контурных частей. Для этой же цели предназна-
 чен и третий столбец массива ML2.

Результат работы алгоритма для описанного примера при-
 водится ниже:

АКЧ-1: L1: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 3; L2: 3, 9, 10, 11, 8, 3; L3: 3, 4, 3;
 L4: 3, 4, 5, 3; L5: 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 8, 3; L6: 3, 9, 10, 11, 6, 7,
 8, 3; L7: 3, 9, 10, 11, 6, 5, 3; L8: 11, 8, 7, 10, 11; L9: 11, 6, 7, 10,
 11; L10: 11, 9, 10, 11; L11: 7, 8, 7; L12: 10, 9, 10; L13: 6, 5, 6;
 АКЧ-2: L14: 15, 16, 17, 15; L15: 15, 16, 15; L16: 15, 16, 17, 18,
 19, 15; L17: 19, 18, 19;
 АКЧ-3: L18: 14, 13, 14.

Некасающиеся контуры:

АКЧ-1: 1, 10; 1, 12; 2, 13; 3, 8; 3, 9; 3, 10; 3, 11; 3, 12; 3,
 13; 4, 8; 4, 9; 4, 10; 4, 11; 4, 12; 7, 11; 8, 13; 10, 11; 10, 13; 11, 12;
 11, 13; 12, 13;

Если при поиске контуров не выделяются подмножества заведомо касающихся контуров, а также автономные контурные части, то поиск пар $(i, j) \in \mathcal{L}_2$ осуществляется перебором на всем множестве $\mathcal{M}$, причем в случае лексикографического порядка номеров (i, j) и множества $\mathcal{L}_2$ проверку соприкасания (наличия общих вершин) контура K_i следует осуществлять только для $K_i, j > i$. Однако после этого возникает задача выявления автономных контурных частей путем анализа на связность графа касания R_{Π} .

4.5.2. Для исследования влияния нескольких дуг и контуров на свойства контурной части графа, для формирования определителей автономных контурных частей кроме множеств $\mathcal{L}_2^m$ пар некасающихся контуров необходимо найти множества некасающихся троек $\mathcal{L}_3^m$, четверок $\mathcal{L}_4^m$ и т. д. При этом в соответствии с выражениями (3.16) множество $\mathcal{L}_3$ формируется по элементам множества $\mathcal{L}_2$, а $\mathcal{L}_4$ по $\mathcal{L}_3$ и т. д., причем в силу лексикографического упорядочения элементов переборы осуществляются только на подмножествах, мажорирующих старшие номера контуров пар, троек и т. д.

Эффективность перебора $\mathcal{L}_2$ при выборе элементов $\mathcal{L}_3$ может быть повышена, если до перебора из $\mathcal{L}_2$ удалить те пары, которые заведомо не могут войти в тройки. Необходимым условием существования тройки (i, j, k) , включающей в себя номер i , является наличие в $\mathcal{L}_2$ по крайней мере двух пар (i, j) и (i, k) , т. е. вхождение номера i по меньшей мере в две пары. Поэтому из множества $\mathcal{L}_2$ можно удалить часть элементов и осуществлять поиск троек в массиве $\mathcal{L}_2$ с меньшим числом элементов. Аналогично сказанному поиск четверок целесообразно ограничить перебором множества $\mathcal{L}_3$, полученного из $\mathcal{L}_2$ удалением тех троек, которые заведомо не входят в четверки, и т. д.

Ниже приведена программа АНСК для поиска некасающихся n -к контуров ($n \geq 3$), т. е. формирования множества $\mathcal{L}_n^m$ на основе множества некасающихся пар $\mathcal{L}_2^m$:

```
"РАЗР"4. NN=N+1; I=0; J=0; I=I+1; "E" I > LM"TO"
("HA"2); "ДЛ"J=1"Ш"1"ДО"L2M"ВЫП"("E"ML2[J, 1]=1
"ИЛИ"ML2[J, 2]=1"ТО"(F=F+1; JJ=J); "E" F=2"ТО"
("HA"1)); "E" F=1"ТО"(ML2[JJ, 1]=0); "HA"1; 2. K=0;
"ДЛ" I=1"Ш"1"ДО"L2M"ВЫП" "E"ML2[I, 1] ≥ 1"ТО"(K=
=K+1; SN[K, 1]=ML2[I, 1]; SN[K, 2]=ML2[I, 2]); 3.
SN[I, NN]-1; K8=1; "ДЛ" I=2"Ш"1"ДО"K"ВЫП"("E"SN[I,
1]=SN[I-1, 1]"ТО"(K8=K8+1)"ИИ" (K8=1); SN[I, NN]=
=K8); 4. NI=2; NJ=1; KX=K; K1=0; K5=K; 9. NI=NI+
+1; NJ=NJ+1; K7=0; 10. K2=K1; 11. K2=K2+1; "E" K2 ≥
≥ K5"ТО"("HA"30); "E"SN[K2+1, NN]=1"ТО"("HA"11);
12. K3=K2; K4=0; 13. K3=K3+1; "E" K3 > K5"ТО"("HA"11);
```

"E"SN[K3, NN]=1"TO"("HA"11); K4=K4+1; "E"K4 $\geq$ 2"TO"
(K7=1); 14. X=SN[K2, NJ]; Y=SN[K3, NJ]; "ДЛ"1=1"Ш"
1"ДО"K"ВЫП"("E"SN[1, 1]>X"TO"("HA"13); "E"SN[1, 1]=
=X"И"SN[1, 2]=Y"TO"("HA"21)); "HA"13: 21. KX=KX+1;
"E" KX>SNM"TO"("ВЫВ" 'УВЕЛИЧИТЬ SNM'; "СТОП");
"ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"NJ"ВЫП"SN[KX, 1]=SN[K2, 1]; SN[KX,
NI]=Y; SN[KX, NN]=K4; "HA"13: 30. K6=KX-K5; "ВЫВ"
"СТРО"2, '1'; "ВЫВ""ЗН"NI, 'M='; "ВЫВ""ЗН"K6; "E"K6=
=0"TO"("СТОП"); "ДЛ"1=K5+1"Ш"1"ДО"KX"ВЫП"("ВЫВ"
"СТРО"; "ВЫВ""ЗН"SN[1, 1]; "ДЛ"J=2"Ш"1"ДО"NI"ВЫП"
("ВЫВ"; "ВЫВ""ЗН"SN[1, J]); K1=K5; K5=KX; "E"K7=
=1"TO"("HA"9); Z=NI+1; "ВЫВ""СТРО"2, '1'; "ВЫВ""ЗН"
Z, 'M=0'

Описательная часть программы АИСК графа для 1-й автоном-
ной контурной части, изображенного на рис. 36, имеет вид
"ГДЕ"N=5; LM=13; L2M=21; ML2[21, 2] = 1, 10, 1, 12, 2, 13,
3, 8, 3, 9, 3, 10, 3, 11, 3, 12, 3, 13, 4, 8, 4, 9, 4, 10, 4, 11, 4,
12, 7, 11, 8, 13, 10, 11, 10, 13, 11, 12, 11, 13, 12, 13; SNM=30;
SN[30, 6] "КОИ".

Здесь приняты следующие идентификаторы: N - размер-
ность максимально возможной n -ки некасающихся контуров;
LM - число контуров; L2M - число пар некасающихся конту-
ров; ML2[L2M, 2] - массив пар номеров некасающихся конту-
ров; SN[SNM, N+1] - вспомогательный массив, в строки ко-
торого записываются некоторые n -ки некасающихся контуров, $n =$
=3, 4, Так как заранее общее число всех n -к предсказать
невозможно, то число строк SNM массива SN выбирается про-
извольным и при необходимости увеличивается.

В результате работы программы печатаются тройки и чет-
верки некасающихся контуров:

L3M=10: 3, 8, 13; 3, 10, 11; 3, 10, 13; 3, 11, 12; 3, 11, 13; 3, 12,
13; 4, 10, 11; 4, 11, 12; 10, 11, 13; 11, 12, 13; L4M=2: 3, 10, 11,
13; 3, 11, 12, 13; L5M=0.

Множество пятерок некасающихся контуров пусто.

4.6. Алгоритм определения кратности нулей или полюсов передаточных функций топологически сложных систем

Как указывалось в третьей главе, особый интерес при ис-
следовании представляет определение влияния на те или иные
передаточные функции сложных систем дуг, передаточные функ-
ции которых имеют нулевые (пренебрежимо малые) или беско-
нечные усиления, интеграторы или дифференциаторы, чисто
мнимые нули и полюсы и т. д. Алгоритм определения кратности
нулей или полюсов, а в общем случае - степени полинома
 $d(s)$ заранее заданного типа, в передаточной функции $\Phi_{\Sigma}(s)$
может быть разработан на основе формулы Мэсона (3.4).

Подчеркнем, что алгоритм должен позволять определить искомую степень $v_{\Sigma\gamma}$ заданного полинома $d(s)$, входящего в $\Phi_{\Sigma\gamma}$, из-за наличия таких полиномов в числителях или знаменателях передаточных функций некоторых дуг графа, а не вследствие соответствующего выбора параметров системы. Именно поэтому рассматриваемый алгоритм относится к типу структурно-топологических.

Числитель и знаменатель формулы (3.4) представляют собой сумму дробно-рациональных выражений, содержащих заданный сомножитель $d(s)$ различных степеней: $\sum_i d^{v_i}(s) V_i(s)$. На основе соотношения

$$\sum_i d^{v_i}(s) V_i(s) = d^{v_c}(s) \sum_i d^{v_i - v_c}(s) V_i(s), \quad (4.1)$$

где

$$v_c = \min_i \{v_i\},$$

из выражений для числителя и знаменателя передаточной функции (3.4) можно вынести за знак суммы сомножитель $d(s)$ в степени $v_{\Sigma\gamma}$ и v_Δ соответственно. Искомый показатель степени $v_{\Phi\gamma}$ сомножителя $d(s)$ передачи графа равен разности соответствующих показателей числителя $v_{\Sigma\gamma}$ и знаменателя v_Δ формулы (3.4):

$$v_{\Phi\gamma} = v_{\Sigma\gamma} - v_\Delta. \quad (4.2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к нахождению на основе соотношений (4.1) степеней v_Δ и $v_{\Sigma\gamma}$ знаменателя и числителя формулы Мэсона.

Вычисление v_Δ осуществляется с использованием выражения для определителя $\Delta(s)$ графа, содержащего в качестве слагаемого единицу, т. е. член, в котором любой полином $d(s)$ имеет нулевую степень $v_i=0$, а $V_i(s)=1$.

Поскольку в силу выполнения (4.1) имеет место

$$v_\Delta \geq 0, \quad (4.3)$$

то при определении v_Δ представляют интерес только те слагаемые $\Delta(s)$, которые содержат полином $d(s)$ в отрицательной степени. Отсюда, в свою очередь, следует вывод о необходимости учета только множества контуров $\mathcal{K}^- = \{K^k\}$ с передачами, имеющими сомножитель $d(s)$ в отрицательной степени. Последнее обстоятельство позволяет существенно сократить объем анализа, так как поиск контуров графа можно ограничить только теми контурами, которые содержат хотя бы одну дугу с передачей, имеющей отрицательную степень $d(s)$. Из соотношения (4.1) с учетом неравенства (4.3) можно записать выражение для показателя степени v_Δ сомножителя $d(s)$ определителя $\Delta(s)$ графа:

$$\nu_{\Delta} = \min \left\{ 0, \min_{K^k \in \mathcal{K}^-} \{\nu_K^k\}, \dots, \min_{I_R^{IR} \in \mathcal{L}_R^-} \{\nu_{IR}^{IR}\} \right\}, \quad (4.4)$$

где ноль соответствует единице определителя; $\mathcal{L}_R^- = \{L_R^{IR}\}$, $IR = 1, 2, \dots$ — множество сочетаний из $R \geq 2$ некасающихся контуров $K^k \in \mathcal{K}^-$, выражения которых содержат сомножитель $d(s)$ в отрицательной степени. Некасание означает отсутствие одинаковых вершин.

При вычислении показателей степени $\nu_{\Sigma_{ir}}$ полинома $d(s)$, входящего сомножителем в числитель формулы (3.4), с учетом выражения (4.1) получим

$$\nu_{\Sigma_{ir}} = \min_i \{\nu_{P_{ir}}^i + \nu_{\Delta_{ir}}^i\}, \quad (4.5)$$

где показатель степени $\nu_{\Delta_{ir}}^i$ сомножителя $d(s)$ алгебраического дополнения пути P_{ir}^i вычисляется аналогично ν_{Δ} на подмножестве контуров, не касающихся пути P_{ir}^i , а показатель степени $\nu_{P_{ir}}^i$ пути находится как алгебраическая сумма показателей степени $\nu_{w_{ir}}^i$ передач дуг, входящих в путь P_{ir}^i .

Поскольку числитель (3.4) можно представить в виде

$$\sum_i P_{ir}^i(s) \Delta_{ir}^i(s) = \sum_i P_{ir}^i(s) \sum_j L_j^i(s) = \sum_i \sum_j P_{ir}^i(s) L_j^i(s),$$

где $L_j^i(s)$ — слагаемое алгебраического дополнения i -го пути (включая единицу), то с учетом выражения (4.1) имеет место соотношение

$$\nu_{\Sigma_{ir}} = \min_i \min_j \{\nu_{P_{ir}}^i + \nu_{L_j}^i\}. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что для определения $\nu_{\Sigma_{ir}}$ достаточно найти такой путь и некасающееся его слагаемое определителя $\Delta(s)$, сумма показателей степеней сомножителя $d(s)$ которых минимальна (условно полагаем, что единица не касается любого пути).

Исходными данными для алгоритма определения показателя степени $\nu_{\Phi_{ir}}$ заданного сомножителя $d(s)$ передачи графа являются X — конечное непустое множество вершин графа (переменных системы), $|X| = N$; $W = \{W_{ij}\}$ — конечное множество дуг графа (звеньев системы), $|W| = Q$; $W_d \subseteq W$ — подмножество дуг, передачи которых имеют ненулевые показатели степени заданного сомножителя $d(s)$, номера вершин r и i , между которыми исследуется передача Φ_{ir} .

Алгоритм определения $\nu_{\Phi_{ir}}$, базирующийся на использовании соотношений (4.2), (4.4) и (4.6), имеет следующий вид (рис. 37):

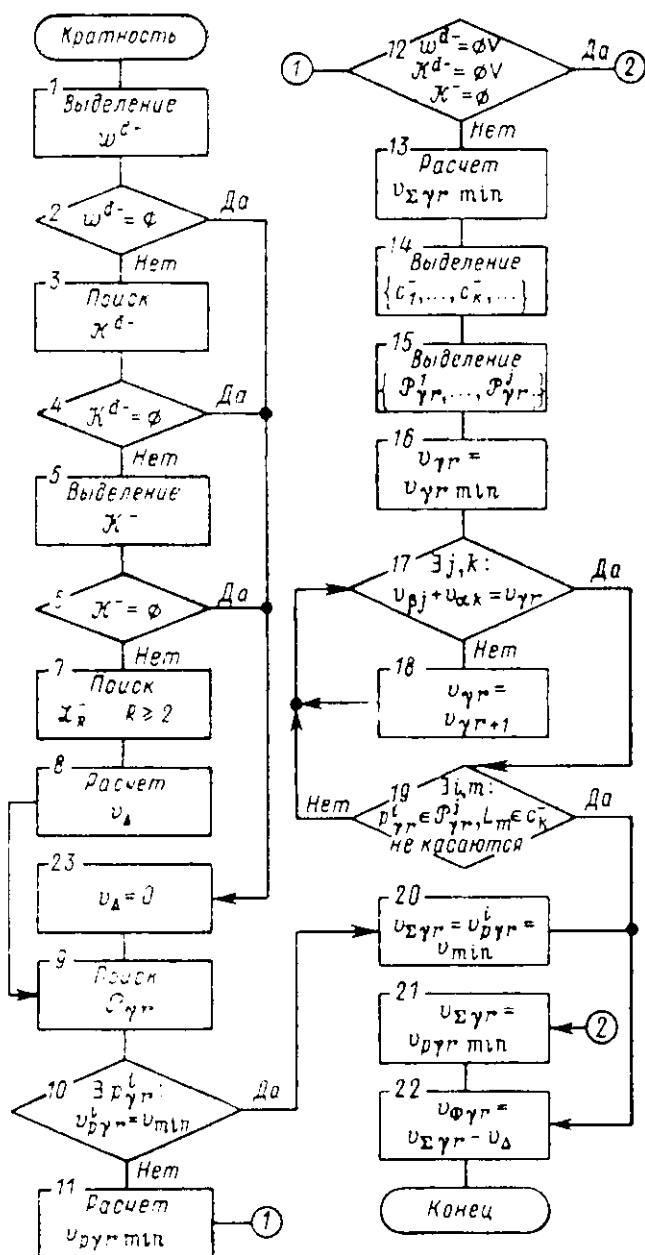


Рис. 37.

1) на основе заданных показателей степеней $\gamma_{W_{ij}}$ дуг $W_{ij} \in W_d$ выделяется подмножество дуг $W_{d-} \subseteq W_d$ с передачами, имеющими отрицательную степень $\gamma_{W_{ij}}$ сомножителя $d(s)$;

2) если $W_{d-} = \emptyset$, то согласно выражению (3.4) показатель степени сомножителя $d(s)$ определителя $\gamma_d = 0$ (блок 23), и работа алгоритма продолжается с п. 9;

3) находится подмножество контуров $\mathcal{H}_{d-}$, содержащих хотя бы одну дугу $W_{ij} \in W_{d-}$, и для каждого контура определяется показатель степени γ_K^k сомножителя $d(s)$;

4) если $\mathcal{H}_{d-} = \emptyset$, то $\gamma_d = 0$, и работа алгоритма продолжается с п. 9;

5) на основе полученных результатов (п. 3) выделяется подмножество контуров $\mathcal{H}^- \subseteq \mathcal{H}_{d-}$, передачи которых имеют сомножитель $d(s)$ в отрицательной степени $\gamma_K^k < 0$;

6) если $\mathcal{H}^- = \emptyset$, то $\gamma_d = 0$, и работа алгоритма продолжается с п. 9;

7) находятся множества $\mathcal{L}_R$ сочетаний из $R \geq 2$ некасающихся контуров $K^* \in \mathcal{H}^-$, и для каждого сочетания определяется показатель степени $\gamma_{L,R}^R$ сомножителя $d(s)$;

8) по формуле (4.4) вычисляется показатель степени γ_d сомножителя $d(s)$ определителя графа;

9) находится множество путей между вершинами r и r $\mathcal{P}_{rr} = \{P_{rr}^i\}$, $i = 1, \dots, N_{rr}$, и для каждого пути определяется показатель степени $\gamma_{P_{rr}}^i$ сомножителя $d(s)$;

10) если при наличии в графе дуг с отрицательными степенями $d(s)$, т. е. $W_{d-} \neq \emptyset$, есть путь, у которого показатель степени сомножителя $d(s)$ равен сумме всех отрицательных показателей сомножителей дуг $W_{ij} \in W_{d-}$, т. е. $\gamma_{P_{rr}}^i = \gamma_{\min} = \sum_{W_{ij} \in W_{d-}} \gamma_{W_{ij}}$, то показатель степени $\gamma_{\Sigma rr}$ сомножителя $d(s)$

в числителе формулы (3.4) равен $\gamma_{\Sigma rr} = \gamma_{P_{rr}}^i = \gamma_{\min}$ (блок 20), и работа алгоритма продолжается с п. 17;

11) на основе полученных показателей степеней $\gamma_{P_{rr}}^i$ путей $P_{rr}^i \in \mathcal{P}_{rr}$ (п. 9) определяется их минимальное $\gamma_{P_{rr} \min} = \min_i \{\gamma_{P_{rr}}^i\}$ значение;

12) если $W_{d-} = \emptyset$, или $\mathcal{H}_{d-} = \emptyset$, или $\mathcal{H}^- = \emptyset$, то в силу вычисления (4.4), (4.6) $\gamma_{\Sigma rr} = \gamma_{P_{rr} \min}$ (блок 21), и работа алгоритма продолжается с п. 17;

13) определяется минимальное возможное значение $\gamma_{\Sigma rr}$ по очевидному выражению:

$$\gamma_{\Sigma rr \min} = \begin{cases} A = \gamma_{P_{rr} \min} + \gamma_d, & \text{если } A \geq \gamma_{\min}, \\ \gamma_{\min}, & \text{если } A \leq \gamma_{\min}. \end{cases}$$

14) множество слагаемых определителя $C^- = \{L_m\} = 1 \cup \cup \mathcal{H}^- \cup \dots \cup \mathcal{L}_R^-$ разбивается на непересекающиеся подмножества $\{C_1^-, \dots, C_k^-, \dots\}$ с одинаковыми показателями степеней $\nu_{\alpha 1}, \nu_{\alpha 2}, \dots, \nu_{\alpha k}, \dots$ сомножителя $d(s)$;

15) множество путей $\mathcal{P}_{\gamma r}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $\{\mathcal{P}_{\gamma r}^1, \dots, \mathcal{P}_{\gamma r}^j, \dots\}$ с одинаковыми показателями степеней $\nu_{\beta 1}, \dots, \nu_{\beta j}, \dots$ сомножителя $d(s)$;

16) на основе формулы (4.6) и полученных результатов (пп. 13—15) определяется показатель степени $\nu_{\gamma r}$ сомножителя $d(s)$ числителя формулы (3.4) (блоки 16—19), где j, k — номера подмножеств множеств $\mathcal{P}_{\gamma r}$ и C^- ;

17) по формуле (4.2) подсчитывается искомый показатель степени $\nu_{\Phi \gamma r}$ сомножителя $d(s)$ исследуемой передаточной функции системы (блок 22).

При определении показателя степени $\nu_{\Phi \gamma r}$ сомножителя $d(s)$ нескольких передач пп. 9—13, 15—17 (блоки 9—13, 15—19) выполняются для каждой передачи, пп. 1—8, 14 (блоки 1—8, 14) выполняются один раз, что сокращает объем вычислений.

5. АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАЧ И ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Об алгоритмах получения передач и функций чувствительности

В основе многих задач расчета систем управления лежит получение различных частных моделей и характеристик $M_{\psi U}''(r)$: определителей Δ , операторов передач Φ_{yr} между заданными входами f_r и выходами y_r , функций чувствительности определителей и передач к контурам или дугам. Перечисленные характеристики систем могут быть получены по моделям с раскрытой топологией, как правило, путем устранения избыточности в результате исключения ряда внутренних переменных, т. е. сворачивания графов, решения соответствующих уравнений. Например, получение операторов передач Φ_{yr} , $y=1, \dots, m$; $r=1, \dots, l$, связано с переходом к описанию системы со связями с внешней средой в виде двудольного графа, имеющего максимальную неопределенность относительно топологии системы.

Модели систем управления с раскрытой топологией, как было показано в первой главе, наиболее часто представляются в нескольких формах: 1 - графы, 2 - структурные схемы, 3 - системы уравнений различных порядков, записанные в причинно-следственной форме, и 4 - системы алгебраических и дифференциальных уравнений первого порядка (обобщенная нормальная форма). Эти формы описания моделей эквивалентны в смысле количества информации о топологических и иных свойствах систем, однако с каждой из них связаны свои методики и алгоритмы решения различных задач анализа и синтеза. При этом оказывается, что одни и те же по смыслу задачи теории управления и регулирования в зависимости от формы представления топологии модели имеют различную степень сложности. Например, задача получения функций чувствительности или передач системы с небольшим числом контуров решается просто и наиболее наглядным образом, если исходная информация представлена в виде графов, но в случае системы со значительным количеством путей и некасающихся конту-

ров те же задачи целесообразно решать численно на основе матричного представления систем уравнений. Следует сказать, что, используя взаимные переходы от одних форм представления топологически сложных систем к другим, можно значительно повысить гибкость и эффективность методического, алгоритмического и программного обеспечения задач расчета систем управления.

В том случае, когда модели систем заданы графами или структурными схемами, характеристики получаются на основе так называемых эквивалентных преобразований их топологических формул, например, выражений для определителя через передаточные функции контуров, формулы Мэзона, выражений для функций чувствительности определителя или передач и т. д. Если модели представлены системами уравнений, то для тех же целей используются методы решения систем алгебраических уравнений: исключения переменных, правило Крамера, обращение матрицы.

Алгоритмам и программам получения передач сложных систем, заданных в различной форме, посвящено большое количество работ (см., например, [3, 4, 5, 73, 86]); в данной главе приводятся несколько алгоритмов получения определителей, передач и функций чувствительности сложных систем, заданных графами или системами уравнений в обобщенной нормальной форме.

Если модель топологически сложной системы задана в виде структурной схемы, то по ней можно предварительно построить граф, т. е. записать массивы, кодирующие соответствующий граф, и далее получить необходимые характеристики по графу.

Модели сложных систем в виде дифференциальных уравнений различных порядков, записанных в причинно-следственной форме, представляют, по существу, граф Мэзона.

5.2. Алгоритмы и программы получения передач на основе топологических формул

По линейным моделям $M_N(1)$, $M_{\mathcal{A}Sf}(1)$ чисто топологического ранга, т. е. по графам с полностью неопределенными операторами передач дуг, на основе формулы Мэзона (3.4) можно получить индексные выражения для определителя и передач. При дальнейшем раскрытии неопределенности модели путем введения информации о структуре операторов появляются символьные выражения. Наконец, подстановкой численных значений параметров операторов передач получаются полностью или частично определенные выражения для определителя и передач. Таким образом, топологический подход и использование топологических методов дают возможность последовательно работать с моделями различных рангов неопределенности и из-

злекать из них необходимую информацию для каждого этапа анализа.

Алгоритмы получения определителя и передач в индексном, символьном, численном или смешанном видах имеют различные реализации.

5.2.1. Индексные выражения для конкретных передач графа наиболее удобно представить в виде массивов, кодирующих определитель графа Δ и числитель формулы Мэзона [3].

Кодирование определителя графа Δ может быть осуществлено с помощью двух массивов: MKD — для записи состава контуров и MD — для сложных слагаемых, представляющих собой произведения передаточных функций некасающихся контуров. Введение двух массивов для задания индексного выражения определителя обусловлено соображением однородности элементов массивов. Массив MKD заполняется номерами дуг графа, входящих в j -й контур, по группам в порядке возрастания номеров контуров j , $j=1, \dots, N_k$, где N_k — число контуров. Контур K_j нумеруются в порядке их отыскания по соответствующим алгоритмам (см. гл. 4). Группы номеров дуг различных контуров K_j в массиве MKD разделяются между собой нулями.

Анализ множества контуров $\mathcal{K}$ дает множества пар $\mathcal{L}_2$, троек $\mathcal{L}_3$ и т. д. некасающихся контуров, элементы которых соответствуют сложным слагаемым определителя и нумеруются также в порядке их выявления, начиная с $N_k + 1$. Каждое сложное слагаемое определителя можно представить как произведение двух слагаемых с меньшими номерами, поэтому все группы номеров в массиве сложных слагаемых MD состоят из двух номеров и нет необходимости в разделителе между группами.

Числитель формулы Мэзона $\sum P_{tr}^k \Lambda_{tr}^k$ кодируется одномерным массивом MM, заполняющимся по группам в порядке возрастания их номеров $k=1, 2, \dots, \text{НП}$, где НП — число путей от вершины входа к вершине выхода (номер группы равен номеру пути). Группу с номером k образуют индексы слагаемых определителя, составляющих минор k -го пути, ноль, номера дуг, входящих в k -й путь, и ноль. Числа элементов массивов MKD, MD, MM будем обозначать ТК, TD, ТМ соответственно.

Итак, формула Мэзона, т. е. индексное выражение для конкретной передачи, кодируется тремя целыми числами ТК, TD, ТМ и тремя одномерными целыми массивами MKD, MD, MM, которые с помощью соответствующих алгоритмов заполняются по результатам поиска контуров, некасающихся пар, троек и т. д. контуров, путей и тех слагаемых определителя, которые образованы некасающимися путями контурами.

5.2.2. Диалоговый алгоритм и программа получения передаточных функций на структурно-параметрическом уровне (в символьно-численном виде) предназначены для вычисления топологическим методом передаточных функций $\Phi_{yr}(s)$ сложных стационарных линейных систем управления с несколькими

входами $j_r, r=1, \dots, l$, и выходами $y_\gamma, \gamma=1, \dots, n$, представленных конечными сигнальными графами с весами дуг в виде

$$W(s) = \frac{\sum_j g_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (5.1)$$

где g_j и a_i — числа или символы (простые выражения).

Программа на языке АНАЛИТИК предполагает вычисление передаточных функций в символьном, численном или символьно-численном виде (5.1), что имеет важное значение при дальнейшем использовании полученного выражения в программах расчета частотных характеристик, показателей качества, оптимизации и других, написанных на языках АНАЛИТИК, АЛГОЛ, ФОРТРАН и т. п.

Вычисление передаточной функции $\Phi_{yr}(s)$ производится на основе индексных массивов определителя MKD, MD, числителя MM и чисел ТК, TD, TM, полученных на этапе топологического анализа, с использованием информации о передаточных функциях дуг. Эта информация задается двумя массивами B и C коэффициентов полиномов числителей $g_j, j=0, 1, \dots, m$, и знаменателей $a_i, i=0, 1, \dots, n$ дробно-рациональных выражений вида (5.1). В массивах B и C коэффициенты различных полиномов разделяются буквой K.

При расчете по формуле Мэсона осуществляется сложение, умножение и деление дробно-рациональных функций; при этом общими для всех операций являются алгоритмы сложения и умножения двух полиномов, которые реализованы с учетом возможностей языка АНАЛИТИК.

Во избежание завышения порядков результирующих полиномов при сложении и делении двух дробно-рациональных функций делается проверка состава их знаменателей на наличие одинаковых сомножителей. По этой же причине при составлении исходных данных рекомендуется заменить дуги, знаменатели весов которых представляют собой произведение полиномов, последовательным соединением нескольких дуг с весами, не имеющими в знаменателях произведений полиномов.

В режиме диалога можно вычислять несколько передаточных функций; при этом в очередном расчете используются результаты первого вычисления, что сокращает время счета и является одним из достоинств топологического метода расчета.

Для получения передаточной функции топологически сложной системы к стандартной информативе, приведенной ниже, необходимо дописать рабочую информативу и директиву.

Стандартная информатива:

"ПУСТ"ФGR."РАЗ"PC; G=0; "ДЛ"И=1"Ш"1"ДО"NP"ВВП"
(Ч[1]=0; "ДЛ"J=1"Ш"1"ВВП"(G=G+1; "Е"В[G]=K"ТО"
"ПА"1.10"ИИ"А"Ч[1]=Ч[1]+В[G]×S↑(J-1)); L10.); G=0;

"ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" NP "ВВП" (3[I] = 0; "ДЛ" J = I "Ш" I "ВВП"
 (G = G + 1; "E" C[G] = K "ТО" "НА" L1 "ИНА" 3[I] = 3[I] +
 + C[G] × S↑(J - 1)); L1.1; T = 10; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" NP
 "ВВП" Э[I] = 1; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" NP "ВВП" (Y = Э[I]; "ДЛ"
 J = I + I "Ш" I "ДО" NP "ВВП" ("E" Y ≠ Э[J] "ТО" ("E" 3[Y] =
 3[Э[J]] "ТО" Э[J] = Y)); Γ = 1; N = 1; Ш = 0; П[I] = 1; "E"
 ТК = O "ТО" (Б = 1; Ы = 0; "НА" LK); "ДЛ" F = I "Ш" I "ДО" ТК
 "ВВП" (G = MKD[F]; "E" G > 0 "ТО" (Γ = Γ × Ч[G]; Ш = Ш + 1;
 O[Ш] = Э[G]) "ИНА" ("ВЗЯ" (-Γ); "ПРИВ"!!; Л[N] = P3; N =
 = N + 1; П[N] = Ш + 1; Γ = 1)); Φ = 0; "ДЛ" F = I "Ш" I "ДО" TD
 "ВВП" (G = MD[F]; Γ = Γ × Л[G]; "ДЛ" I = П[G] "Ш" I "ДО"
 П[G + 1] - 1 "ВВП" (Ш = Ш + 1; O[Ш] = O[I]); Φ = Φ + 1; "E" Φ =
 = 2 "ТО" ("ВЗЯ" Γ; "ПРИВ"!!; Л[N] = P3; N = N + 1; П[N] =
 = Ш + 1; Γ = 1; Φ = 0)); F = 1; L1.Γ = Л[F]; Ы = П[F + 1] -
 П[F]; X = П[F] - 1; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" Ы "ВВП" M[I] =
 - O[X + 1]; "E" T = 0 "ТО" (T = 1; "НА" L4; "E" N = F = I "ТО" "НА"
 L3; F = F + 1; L2.Q = 0; "ДЛ" I = П[F] "Ш" I "ДО" П[F + 1] -
 1 "ВВП" (Q = Q + 1; И[Q] = O[I]); R = Q; Б = 1; "ДЛ" I = I "Ш"
 I "ДО" Ы "ВВП" (Я = M[I]; "ДЛ" J = I "Ш" I "ДО" R "ВВП" ("E"
 Я = И[J] "ТО" (И[J] = 0; "НА" L1); Б = Б × 3[Я]; 1; J = Ы; П =
 - 1; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" R "ВВП" (Я = И[I]; "E" Я ≠ 0 "ТО" (J =
 J + 1; M[J] = Я; Н = Н × 3[Я])); Ы = J; "ВЗЯ" Γ × П + Б ×
 × Л[F]; "ПРИВ"!!; Γ = P3; "E" T = 1 "ТО" "НА" L4; F = F + 1;
 "E" F ≤ N - 1 "ТО" "НА" L2; L3.Б = 1; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" Ы
 "ВВП" Б = Б × 3[M[I]]; "E" T = 2 "ТО" "НА" L6; "ВЗЯ" T + Б;
 "ПРИВ"!!; Γ = P3; LK. "E" T = 1 "ТО" (T = 0; J = Ы; "НА" L5); Φ =
 = N + 1; Л[N] = Γ; X = П[N] - 1; "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" Ы "ВВП"
 O[X + 1] = M[I]; N = N + 1; П[N] = X + Ы + 1; L.M. "РАЗ" PC;
 П = 0; N = Φ; T = 0; L4.Ц = П + 1; F = MM[Ц]; "E" F > 0 "ТО"
 ("E" T = 0 "ТО" "НА" L1 "ИНА" "НА" L2) "ИНА" ("E" T = 0 "ТО"
 (Γ = 1; J = 0; "НА" L5) "ИНА" "НА" L3); L5.Ц = Ц + 1; F =
 = MM[Ц]; "E" F > 0 "ТО" (J = J + 1; M[J] = Э[F]; Γ = Γ × Ч[F];
 "НА" L5); Ы = J; "ВЗЯ" Γ; "ПРИВ"!!; Л[N] = P3; X = П[N] - 1;
 "ДЛ" I = I "Ш" I "ДО" Ы "ВВП" O[X + 1] = M[I]; N = N + 1;
 П[N] = X + Ы + 1; "E" П < TM "ТО" "НА" L4; T = 2; F = Φ; "НА"
 L1; L6. "E" ТК = 0 "ТО" "НА" L9; Б = Γ; "ДЛ" I = П[Φ - 1] "Ш"
 I "ДО" П[Φ] - 1 "ВВП" (Я = O[I]; "ДЛ" J = I "Ш" I "ДО" Ы "ВВП"
 "E" Я = (M[J] "ТО" (M[J] = 0; "НА" L7); Б = Б × 3[Я]; "ВЗЯ" Б;
 "ПРИВ"!!; Б = P3; L7; Л[N] = Б; Б = Л[Φ - 1]; "ДЛ" I = I "Ш"
 I "ДО" Ы "ВВП" (Я = M[I]; "E" Я ≠ 0 "ТО" (Б = Б × 3[Я]; "ВЗЯ" Б;
 "ПРИВ"!!; Б = P3)); Γ = Л[N]; Б = Б; L9. "РАЗ" PB; "ВЗЯ" Γ;
 "ПРИВ"!!; Γ = P3; "ВЗЯ" Б; "ПРИВ"!!; Б = P3; J = 0; F = Γ;
 "ВВВ" "СТР", [ЧИСЛИТЕЛЬ]; L1.S = 1; "ДЛ" I = O "Ш" I "ВВП"
 ("ВЗЯ" F/S; "ПРИВ"!!; "ИАЗ" Y; S = 0; "ВВЧ" Y; "СТЕ" "ЗИ" S;
 "ВВВ" "ЗИ" "СТР", Y, [S↑], 1; "E" P3 = Y "ТО" "НА" LB; F =
 = P3 - Y; LB. "ВВВ" "ЗИ" "СТР", [ПОРЯДОК], 1; J = J + 1;
 "E" J < 2 "ТО" ("ВВВ" "СТР", [ЗНАМЕНАТЕЛЬ]; F = Б; "НА"
 LП); L8.J = O "КОИ" ◇

В рабочей информативе должны быть заданы: число дуг NP , массивы $MKD[TK]$, $MD[TD]$, $MM[TM]$, кодирующие знаменатель и числитель формулы Мэзона, длины TK , TD и TM этих массивов, массивы B , C коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций дуг; рабочие массивы: $M[NP]$; $I[NP]$; $\Xi[NP]$; $\Upsilon[NP]$; $Z[NP]$; $L[P]$; $O[TK-NK + (TD/2+NI+1)NP]$; $E[P]$, где $P=NK+TD/2+NI+2$.

Если контуров нет, то $TK=0$, и массив MKD не составляется. Если нет некасающихся контуров, то $TD=0$, и массив MD не составляется. При равенстве единице алгебраического дополнения k -го пути в соответствующей группе массива MM отсутствуют номера слагаемых определителя.

В качестве символов в весах дуг рекомендуется использовать идентификаторы из двух и более знаков, не встречающиеся в рабочей информативе и директиве и не начинающиеся с буквы L .

В директиве должны быть заданы: PC — разрядность машинных вычислений; PB — разрядность при выводе результатов. Директива оканчивается оператором "IIA" FGP .

После вычисления первой по порядку передаточной функции в случае необходимости определения других передаточных функций в ЭВМ вводится новая директива, в которой задаются число TM и массив $MM[TM]$, кодирующие числитель формулы Мэзона. При этом могут быть изменены разрядности вычислений PC и вывода PB .

Директива оканчивается оператором "IIA" LM .

Во избежание переполнения массивов L , O , E при повторном счете рекомендуется первым рассчитывать канал с максимальным числом путей между его входом и выходом. На печать выводятся коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции в порядке возрастания степеней s . Могут быть выведены выражения числителя и знаменателя передаточной функции, для чего перед оператором вывода фразы ЧИСЛИТЕЛЬ вставляется оператор "ВЫВ" "СТР", G , "СТР", B .

Если необходимо получить определитель графа, то перед меткой LM помещается оператор "ВЫВ""СТР", G , "МАСС", M , по которому выводится выражение числителя (G) и номера дуг, знаменатели весов которых образуют знаменатель определителя (массив M).

Если исследуется отдельно числитель формулы Мэзона, то после метки $L6$ помещается оператор "ВЫВ""СТР", G , "СТР", B , который выводит выражения числителя (G) и знаменателя (B).

Рассмотрим процесс кодирования и результаты вычисления по описанному алгоритму символично-численных передаточных функций Φ_{41} и Φ_{21} от вершины 1 к вершинам 4 и 2 графа, изображенного на рис. 38.

Передающие функции дуг имеют вид: $W_1(s)=2,7/s$, $W_2=-k_1$, $W_3=k_2$, $W_4(s)=3,1/s$, $W_5=-k_3$. Составим выражения для определителя графа без учета палинция двух автономных контурных частей: $\Delta(s) = 1 - K_1 - K_2 + K_1 K_2 = 1 - W_1 W_2 - W_4 W_5 + W_1 W_2 W_4 W_5$ и числителей формулы Мэсона для передачи $\Phi_{41}: W_1 W_3 W_4$, а для передачи $\Phi_{21}: (1 - K_2) W_1$.

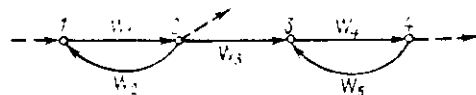


Рис. 38.

Рабочая информация имеет вид:
 ПУСТ NR=5; ТК=6; TD=2; TM=5; B[10]=2.7, K, -K1, K, K2, K, 3.1, K, -K3, K; C[12]=0, 1, K, 1, K, 1, K, 0, 1, K, 1, K; MKD[6]=1, 2, 0, 4, 5, 0; MD[2]=1, 2; MM[5]=0, 1, 3, 4, 0; M[5]; N[5]; O[5]; P[5]; Q[6]; R[19]; S[6] "КОН".
 Директива: "ВЫП" PC=8; PB=6; "НА" FGR "КОН".

Результаты счета:

ЧИСЛИТЕЛЬ
 .837000₁₀1 × K2 S↑0
 ПОРЯДОК 0
 ЗНАМЕНАТЕЛЬ
 .837000₁₀1 × K1 × K3 S↑0
 .270000₁₀1 × K1 + .310000₁₀1 × K3 S↑1
 1 S↑2
 ПОРЯДОК 2
 Время счета - 14 с.

Директива для вычисления передаточной функции $\Phi_{21}(s)$:
 "ВЫП" PC=6; PB=4; TM=4; "НА" LM "ГДЕ" MM[4]=
 =2, 0, 1, 0 "КОН".

Результаты счета:

ЧИСЛИТЕЛЬ
 .8370₁₀1 × K3 S↑0
 .2700₁₀1 S↑1
 ПОРЯДОК 1
 ЗНАМЕНАТЕЛЬ
 .8370₁₀1 × K1 × K3 S↑0
 .2700₁₀1 × K1 + .3100₁₀1 × K3 S↑1
 1 S↑2
 ПОРЯДОК 2
 Время счета - 3 с.

5.2.3. Алгоритм "FGR" предназначен для получения передаточных функций в индексном и численном виде с автоматическим заполнением массивов MKD, MD, MM, кодирующих формулу Мэсона в результате поиска контуров, сочетаний некасающихся контуров и путей с их алгебраическими дополнениями. Алгоритм реализован в виде программы на языке АЛГОЛ-60

(транслятор ТА-1М). С помощью этой программы можно исследовать системы, представленные графами, содержащими не более 45 вершин. Это объясняется тем, что граф в ЭВМ представляется матрицей смежности, каждая строка которой хранится в одной ячейке памяти, состоящей из 45 двоичных разрядов.

Укрупненная блок-схема алгоритма получения передаточных функций сложных систем на основе последовательного использования моделей $M_S(1)$, $M_{\mathcal{Z}_{SF}}(1)$, $M_{\mathcal{Z}_{SF}}(2)$, $M_{\mathcal{Z}_{SF}}(3)$ приведена на рис. 39.

В блоках 1—13 производится топологический анализ графа, в результате которого находятся контуры, сочетания непересекающихся контуров, пути с их алгебраическими дополнениями и составляются массивы MKD, MD, MM, кодирующие формулу Мэзона; в блоках 14—24 осуществляется расчет передаточной функции на параметрическом уровне, заканчивающийся определением порядков и коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции между заданными вершинами входа r и выхода γ .

Алгоритмы поиска путей и контуров, определения сочетаний непересекающихся контуров приведены в гл. 4; правила формирования массивов MD, MKD и MM описаны в п. 5.2.1.

Вычисление передаточной функции на параметрическом уровне (в численном виде) начинается с формирования массивов M, IB, N, IA, MP, описанных в работе [3], (блок 16).

При расчете по формуле Мэзона осуществляется сложение, умножение и деление дробно-рациональных функций, при этом общими для всех операций являются алгоритмы сложения и умножения двух полиномов.

В алгоритме вычисления передаточных функций особо выделяются следующие случаи: 1) $TK=0$ (отсутствие контуров в графе), на печать выводится фраза "КОНТУРОВ НЕТ" (блоки 7, 8); 2) $TD=0$ (все контуры касаются); 3) $TM=0$ (между заданными вершинами графа нет путей), на печать выводится фраза "ПЕРЕДАЧИ НЕТ" (блоки 14, 15) и численный анализ не производится; 4) алгебраическое дополнение пути равно единице.

Исходные данные программы приведены в порядке ввода в ЭВМ:

NG - число вершин графа;

NP - число дуг;

NB, NA - числа элементов массивов B и A;

IS - массив топологии, в котором i -й дуге соответствуют два элемента: $(2i-1)$ -й, равный номеру конечной вершины, и $2i$ -й, равный номеру начальной вершины i -й дуги;

M1, N1 — номера вершин, между которыми ищется передача;

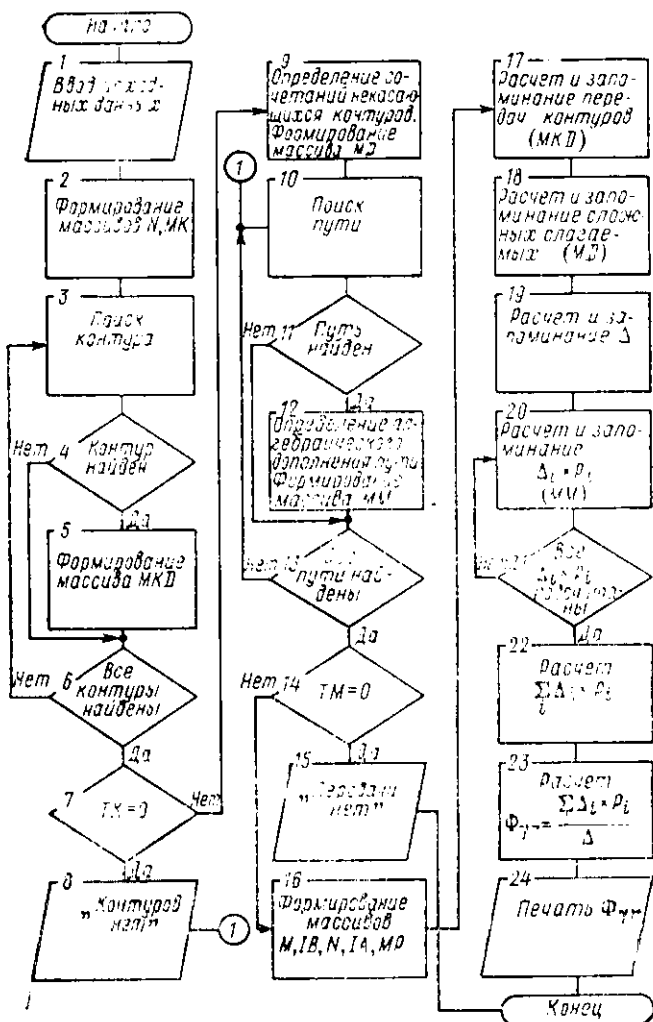


Рис. 39.

B, A — массивы коэффициентов полиномов числителей и знаменателей весов дуг;

MAV — число, строго большее коэффициентов всех полиномов, используемое при составлении массивов B и A ;

IAI — вспомогательное число, вводимое в коде с единицей во втором слева разряде, используемое для надежности формирования массива N при топологическом анализе.

Выходные данные программы разбиты на три части.

1. Топологический анализ: NK — число контуров; NP — число путей; TK, TD, TM, MKD, MD, MM — числа и массивы, кодирующие формулу Мэсона.

2. Структурный анализ: порядки числителя и знаменателя искомой передаточной функции.

3. Численный (параметрический) анализ: $B1, A1$ — массивы коэффициентов полиномов числителя и знаменателя искомой передачи.

Выражение передаточной функции выводится на печать в удобном для использования виде.

При необходимости могут быть дополнительно выведены на печать выражения для определителя графа и числителя формулы Мэсона.

В качестве примера расчета по программе рассмотрим граф, изображенный на рис. 40. Пусть требуется получить передаточ-

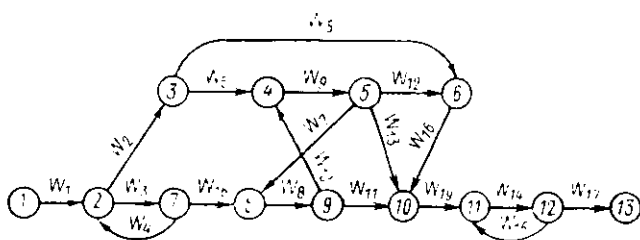


Рис. 40.

ную функцию между первой и тринадцатой вершинами ($r=1, y=13$).

Передаточные функции дуг имеют вид

$$W_1 = \frac{0,459}{1 + 1,2s}; \quad W_{10} = 0,217;$$

$$W_2 = \frac{1,2}{0,783 + 0,3s + 0,0238s^2}; \quad W_{11} = 0,0163;$$

$$W_3 = \frac{1,38}{0,92 + 0,5s + 0,0465s^2}; \quad W_{12} = 6,854;$$

$$W_4 = \frac{-0,374}{1 + 0,1s}; \quad W_{13} = 0,0035;$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= 0,841; & W_{14} &= \frac{1}{1 + 4,884s}; \\
W_6 &= -0,771; & W_{15} &= \frac{0,142}{1 + 475,6s}; \\
W_7 &= 0,0026; & W_{16} &= \frac{0,261}{1 + 0,17s}; \\
W_8 &= \frac{88,5}{1 + 0,239s}; & W_{17} &= 1; \quad W_{18} = 1; \\
W_9 &= \frac{1}{1 + 5,042s}; & W_{19} &= 1.
\end{aligned}$$

Исходные данные:

NG=13; NP=19; NB=38; NA=49;
 IS[1:38]=2; 1; 3; 2; 7; 2; 2; 7; 6; 3; 4; 3; 8; 5; 9; 8; 5; 4; 4; 9; 10;
 9; 6; 5; 10; 5; 12; 11; 11; 12; 10; 6; 13; 12; 8; 7; 11; 10;
 M1=1; N1=13;
 B[1:38]=0,459; $1_{10}+17$; 1; 2; $1_{10}+17$; 1; 38; $1_{10}+17$; -0,374;
 $1_{10}+17$; 0,841; $1_{10}+17$; -0,771; $1_{10}+17$; 0,0026; $1_{10}+17$; 88,5;
 $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 0,217; $1_{10}+17$; 0,0163; $1_{10}+17$; 0,854; $1_{10}+17$;
 -0,0035; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; -0,142; $1_{10}+17$; 0,261; $1_{10}+17$;
 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$;
 A[1:49]=1; 1; 2; $1_{10}+17$; 0,783; 0; 3; 0,0238; $1_{10}+17$; 0,92;
 0,5; 0,046; $1_{10}+17$; 1; 0,1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$;
 1; 0,239; $1_{10}+17$; 1; 5,042; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1;
 $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; 4,884; $1_{10}+17$; 1; 475,6; $1_{10}+17$; 1; 0,17;
 $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$; 1; $1_{10}+17$;
 MAB= $1_{10}+17$;
 IAI=0 0317 200 0000 0000 0000

Результаты счета по программе "ФГР"

Топологический анализ

КОНТУРОВ 3

ПУТЕЙ 7

ТК=11 TD=8 TM=78

МАССИВ MKD

3, 4, 0, 9, 7, 8, 10, 0, 14, 15, 0.

МАССИВ MD

1, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3.

МАССИВ MM

0, 1, 2, 6, 9, 12, 16, 19, 14, 17, 0, 0, 1, 2, 6, 9, 7, 8, 11, 19, 14, 17,
 0, 0, 1, 2, 6, 9, 13, 19, 14, 17, 0, 2, 0, 1, 2, 5, 16, 19, 14, 17, 0, 0,
 1, 3, 18, 8, 10, 9, 12, 16, 19, 14, 17, 0, 0, 1, 3, 18, 8, 10, 9, 13, 19,
 14, 17, 0, 0, 1, 3, 18, 8, 11, 19, 14, 17, 0.

Структурный анализ

Порядки: числителя 6 знаменателя 11

Численный анализ

282 364+01 S↑0

134 858+04 S↑1

269 376 + 04 S↑2
 147 777 + 04 S↑3
 335 926 + 03 S↑4
 334 278 + 02 S↑5
 120 540 + 01 S↑6

122 004 + 01 S↑0
 522 741 + 03 S↑1
 646 450 + 04 S↑2
 268 064 + 05 S↑3
 429 791 + 05 S↑4
 321 987 + 05 S↑5
 134 701 + 05 S↑6
 342 822 + 04 S↑7
 544 400 + 03 S↑8
 525 440 + 02 S↑9
 279 939 + 01 S↑10
 625 149 01 S↑11

5.3. Алгоритмы вычисления операторов передач по уравнениям систем

Если модель топологически сложной системы представлена в обобщенной нормальной форме (1.15), (1.16), т. е. матрицами A, H, B, R, G, L , то искомые операторы передач от входов f_r , $r=1, \dots, l$, к выходам x_γ , $\gamma=1, \dots, P$, наиболее удобно представить в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \hat{A}v + \hat{B}f, \\ x &= \hat{C}v + \hat{D}f,\end{aligned}\tag{5.2}$$

полученной в результате исключения переменных x из первой системы дифференциальных уравнений. Из сопоставления выражений (1.15), (1.16) и (5.2) легко видеть, что матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ вычисляются по следующим выражениям, являющимся алгоритмами перехода к нормальной форме:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= G^{-1}R, \\ \hat{D} &= G^{-1}L, \\ \hat{A} &= A + HC, \\ \hat{B} &= B + HD.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Уравнения (5.2) связывают векторы входа f и выхода x . Если требуется получить только одну из связей между входом

f_r и выходом x_r , то вместо (5.2) следует записать:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \hat{A}v + \hat{B}_r f_r, \\ x_r &= \hat{C}_r v + \hat{d}_{tr},\end{aligned}\quad (5.4)$$

где $\hat{B}_r$ — r -й столбец матрицы $\hat{B}$, $\hat{C}_r$ — r -я строка матрицы $\hat{C}$, $\hat{d}_{tr}$ — элемент матрицы $\hat{D}$.

Для перехода к нормальной форме вида (5.2) от обобщенной нормальной формы (1.15а), (1.16а), (1.16б) из второй системы уравнений (1.16а) следует явно выделить x и подставить это выражение в первую систему уравнений для переменных состояния и в третью систему уравнения для переменных выхода; в результате вместо выражений (5.3) получают более общие:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= C_p - C_s G^{-1} R, \\ \hat{D} &= D - C_s G^{-1} L, \\ \hat{A} &= A - H G^{-1} R, \\ \hat{B} &= B - H G^{-1} L.\end{aligned}$$

Если операторы передач между входами и выходами должны быть приведены к форме передаточных функций $\Phi_{yr}(s) = G_{yr}(s)/D(s)$, то по матрицам $\hat{A}$, $\hat{B}_r$, $\hat{C}_r$ и коэффициенту обхода $\hat{d}_{tr}$ вычисляются коэффициенты полинома числителя $G_{yr}(s)$ и характеристического полинома $D(s) = \det(sE - \hat{A})$.

На основе матриц обобщенной нормальной формы возможно численное определение коэффициентов полиномов числителя и знаменателя определителя $\Delta(s)$ соответствующего графа. Как показано ранее (см. гл. 3), определитель графа $\Delta(s)$ представляется как отношение характеристических полиномов $D(s)$ и $D_p(s)$ замкнутой и полностью разомкнутой систем: $\Delta(s) = \frac{D(s)}{D_p(s)}$. Характеристический полином замкнутой системы $D(s)$

получается по матрице $\hat{A}$ нормальной формы: $D(s) = \det(sE - \hat{A})$. Ясно, что характеристический полином $D_p(s)$ полностью разомкнутой системы равен произведению знаменателей передаточных функций всех дуг графа (всех звеньев структурной схемы) или определяется по матрице A обобщенной нормальной формы: $D_p(s) = \det(sE - A)$.

В ряде случаев представляет интерес вычисление статических коэффициентов передач $\Phi_{yr}(0)$. Решение этой задачи лег-

ко найти по уравнениям статистики, полученным из (5.2) приравняв нулю всех производных:

$$0 = \hat{A}v + \hat{B}f,$$

$$y = \hat{C}v + \hat{D}f.$$

Подставив во второе уравнение значение вектора $v = -\hat{A}^{-1}\hat{B}f$, имеем $y = (-\hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{B} + \hat{D})f$, т. е. матрица статистических коэффициентов равна $\Phi(0) = -\hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{B} + \hat{D}$. Отдельно взятый коэффициент усиления $\Phi_{ir}(0)$ может быть вычислен следующим образом:

$$\Phi_{ir}(0) = -\hat{C}_i\hat{A}^{-1}\hat{B}_r + \hat{d}_{ir}, \quad (5.5)$$

где $\hat{C}_i$ — i -я строка матрицы $\hat{C}$, $\hat{B}_r$ — r -й столбец матрицы $\hat{B}$, а $\hat{d}_{ir}$ — элемент $\hat{D}$.

Статистический коэффициент передачи может быть вычислен также по массивам, кодирующим топологические формулы для передач, в результате подстановки вместо операторов дуг их коэффициентов усиления.

5.4. Вычисление чувствительности определителя и передач графа

Топологическая формула (3.43) для чувствительности T_{ij}^{Δ} определителя графа Δ к дуге W_{ij} представляет собой взятый с обратным знаком числитель формулы Мэсона для передаточной функции от конца дуги к ее началу, т. е. от вершины i к вершине j . Следовательно, для вычисления $T_{W_{ij}}^{\Delta} = T_{ij}^{\Delta}$ могут быть использованы алгоритмы, которые обсуждались в п.п. 5.2 и 5.3.

В случае получения чувствительностей определителя к дуге по топологическим формулам на основе модели первого ранга неопределенности индексное выражение для $T_{W_{ij}}^{\Delta}$ кодируется одномерным массивом ММ, заполняемым в результате поиска путей между вершинами i и j , контуров подграфов и отношений их соприкасания.

После подстановки в индексные выражения для $T_{W_{ij}}^{\Delta}$ передаточных функций дуг графа, входящих в пути P_{ij}^{Δ} и их алгебраические дополнения, можно получить символьные, численные или смешанные выражения для функций чувствительности $T_{W_{ij}}^{\Delta}$.

Функции чувствительности определителя графа Δ можно вычислять с помощью программы "ФГР" (см. п. 5.2.3). Существуют два варианта использования программы.

1. Без изменения программы. Во входных данных целые числа $M1, N1$ будут номерами конечной и начальной вершин дуги, к которой вычисляется чувствительность определителя. Недостатком этого варианта является определение избыточного числа слагаемых определителя: контуров, пар, троек и т. д. некасающихся контуров.

2. Этот недостаток отсутствует во втором варианте, который связан с исключением из графа дуги, к которой ищется чувствительность. Суть алгоритма исключения дуги заключается в обнулении двух элементов массива топологии IS , соответствующих исключаемой дуге. При необходимости массив топологии может быть восстановлен.

Чувствительность определителя графа Δ к дуге W_{ij} можно вычислить и несколько избыточным образом как передаточную функцию $\Phi_{ji}^0(s)$ графа без дуги W_{ij} , умноженную на определитель со знаком минус: $T_{W_{ij}}^{\Delta}(s) = -\Phi_{ji}^0(s) \Delta(G \setminus \{i, j\})$. Если учесть, что

$$\Phi_{ji}^0(s) = N_{ji}(s) D(s) \quad (5.6)$$

$$\text{и } \Delta s = D(s) D_p(s), \text{ то}$$

$$T_{W_{ij}}^{\Delta}(s) = -N_{ji}(s) D_p(s). \quad (5.7)$$

Из сравнения выражений (5.6) и (5.7) следует, что чувствительность определителя к дуге можно получить заменой полинома знаменателя передаточной функции $\Phi_{ji}^0(s)$ на характеристический полином полностью разомкнутой системы.

При полностью определенной модели топологически сложной системы, содержащей значительное число некасающихся контуров, чувствительность определителя к дуге целесообразно вычислить матричными методами.

Имея алгоритмы определения чувствительности определителя к дуге, можно реализовать способ коррекции определителя графа при добавлении новой дуги $W_k = W_{ij}$: $\Delta_{(i+1)} = \Delta_{(i)} + \dots + T_{W_k}^{\Delta} W_k$.

Обозначим через $D_{(i)}$, $D_{(i+1)}$, N_{ji} и $D_p(i)$, $D_p(i+1)$, D_W полиномы числителя и знаменателя $\Delta_{(i)}$, $\Delta_{(i+1)}$ и W_k . Тогда, учитывая формулу (5.7), получим

$$\Delta_{(i+1)} = \frac{D_{(i+1)}}{D_{p(i+1)}} = \frac{D_{(i)}D_W + N_{ji}N_{ji}}{D_{p(i)}D_W}. \quad (5.8)$$

Реализация алгоритма вычисления определителя $\Delta_{(i+1)}$ выраженного формулой (5.8), приведена ниже:

"РАЗР" 30.KN=UK[NK+1]; "ДЛ" I=1"Ш" I"ДО" NK+1"ВЫП"
(UK[I]=UK[I]/KN; "E" I≤MWK+1"ТО" WKM[I] = WKM[I]/
/KN); "ДЛ" I=1"Ш" I"ДО" N+1"ВЫП" (U[I]=0; D[I]=0;
MB[I]=0); LL=0; "ДЛ" I=1"Ш" I"ДО" NK+1"ВЫП" (BI=

$= UK[LL + 1];$ "ДЛ"J=I"Ш"Г"ДО"НИ + I"ВЫП"(I = LL +
 + J; U[L] = U[L] + BI × UI[J]; D[L] = D[L] + BI × DI[J]); LL =
 = LL + 1); LL = 0; "ДЛ"1 = I"Ш"Г"ДО"MP + I"ВЫП"(BI =
 = P[LL + 1]; "ДЛ"J=I"Ш"Г"ДО"MWK + I"ВЫП"(I = LL +
 + J; MB[L] = MB[L] + BI × WKM[J]); LL = LL + 1); "ДЛ"
 I = I"Ш"Г"ДО"N + I"ВЫП"(D[I] = D[I] - MB[I]; WPM[I] =
 = D[I] - U[I]); "ДЛ"М = N + 1 "Ш" - I"ДО"1 "ВЫП"("E"
 ABS(WPM[M]) < EPS"ТО"WPM[M] = O"ГНА" "НА"Ц); И. М =
 = М - 1; "РАЗР"6; "ВЫВ" "МАСС"Д; "ВЫВ" "МАСС"У;
 "ВЫВ" "СТРО"; М; "ВЫВ" "МАСС"WPM.

Алгоритм также реализует вычисление коэффициентов поли-
 нома $N_{g(i+1)}$ числителя передаточной функции скорректирован-
 ной эквивалентной разомкнутой системы $W_{ap(i+1)}(s) =$
 $= \Lambda_{(i+1)}(s) - 1$.

Описательная часть программы имеет вид: "ГДЕ"НИ = ...;
 DI[НИ + 1] = ...; UI[НИ + 1] = ...; UK[NK + 1] = ...;
 NK = ...; MWK = ...; WKM[MWK + 1] = ...; MP = ...; P[MP +
 + 1] = ...; EPS = ...; N = ...; D[N + 1]; U[N + 1]; WPM[N +
 + 1]; MB[N + 1]"КОИ".

Здесь приняты следующие идентификаторы:

НИ, NK, MWK, MP — степени полиномов $D_{(i)}$, D_w , N_w , N_{ji} со-
 ответственно. Данные идентификаторы программы обозначают
 следующие полиномы: DI = $D_{(i)}$, UK = D_w , WKM = N_w , P =
 = N_{ji} , D = $D_{(i+1)}$, U = $D_{p(i+1)}$, WPM = $N_{g(i+1)}$. Рабочие масси-
 вы D, U, WPM имеют размерность $N = NI + NK$, MB — вспомо-
 гательный рабочий массив — размерность N.

Чувствительность $T_{W_{ij}}^{F_{ij}}$ передаточных функций $\Phi_{jr}(s)$ графа
 к дуге W_{ij} осуществляется по формуле (3.62), по алгоритмам
 получения передаточных функций.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНЫХ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ

6.1. О некоторых особенностях исследования устойчивости сложных систем

При исследовании автоматических систем управления в подавляющем большинстве случаев приходится иметь дело с многоконтурными системами. Они образуются за счет включения местных корректирующих цепей и в первую очередь обратных связей, обеспечивающих устойчивость, заданные показатели качества, малую чувствительность к возмущениям и к изменениям параметров отдельных элементов системы и т. д.

В более сложных случаях, когда приходится иметь дело с многосвязными системами, дополнительные контуры могут быть образованы внутренними связями в самом объекте или между объектами, а также специально вводимыми связями, обеспечивающими автономность отдельных подсистем или их необходимое взаимодействие, устойчивость и качество и т. д.

Следует заметить, что проблема устойчивости сложных многоконтурных систем не может и не должна рассматриваться только с точки зрения устойчивости всей системы в целом. Условие устойчивости всей системы, являясь безусловно необходимым, оказывается в целом ряде случаев недостаточным из-за того, что в реальных системах наряду с устойчивостью всей системы также необходимо обеспечить устойчивость отдельных ее подсистем при широком диапазоне настроек связей между подсистемами или даже полном нарушении этих связей, например при частичном разрушении топологии системы в случае неисправностей.

При исследовании устойчивости сложных систем управления необходимо также учитывать, что они могут включать в себя автономные, слабо связанные контурные части, а также ряд контурных частей, объединенных между собой слабыми контурами, т. е. контурами с малыми передачами и т. д.

Применение критериев Гурвица, Рауса и Михайлова для исследования устойчивости сложных систем связано с исследова-

нием характеристических полиномов контурной части всей системы или в тех случаях, когда они выделены, отдельных автономных контурных частей и не требует наличия информации о структуре системы, т. е. позволяет исследовать устойчивость системы при полной неопределенности ее структуры (топологии) для исследователя. Однако потеря информации о структуре приводит к значительным дополнительным затруднениям при последующем анализе и синтезе сложной системы.

В общую процедуру анализа устойчивости топологически сложных систем управления и их связей должен обязательно включаться этап топологического анализа моделей первого ранга неопределенности с целью выделения автономных контурных частей, т. е. сильно связанных подграфов и дуг, не входящих в контуры. Соответствующие алгоритмы анализа топологии приведены в гл. 4. Поскольку устойчивость дуг связей подсистем между собой и со средой, не входящих в контурную часть, и всех автономных контурных частей подсистем является условием устойчивости всей системы, то анализ топологии есть составная часть анализа устойчивости топологически сложных систем, позволяющая не только упростить задачу путем декомпозиции, но и дающая необходимую информацию об основных динамических свойствах отдельных составляющих сложной системы.

Применение частотных критериев устойчивости также связано с необходимостью иметь полную топологическую определенность сложной системы для установления влияния отдельных звеньев на устойчивость, построения соответствующих частотных характеристик и выполнения заданной критерием последовательности вычислительных процедур.

Широкое применение ЭВМ для анализа топологии, вычисления и построения частотных характеристик сложных систем позволяет все шире применять частотные критерии для исследования устойчивости и качества многоконтурных систем любой сложности.

Все отмеченные выше особенности требуют не только оценки существующих критериев по их эффективности при исследовании устойчивости сложных систем управления, но и поиска новых форм критериев и вычислительных процедур.

6.2. Исследование устойчивости по характеристическим полиномам и матрицам

Устойчивость системы, представляющей собой контурную часть графа, может быть установлена по характеристическому полиному $D(s)$ или матрице коэффициентов A нормальной формы записи дифференциальных уравнений. В разд. 5 приведены необходимые алгоритмы получения характеристического полинома $D(s)$ или матрицы коэффициентов A по моделям с рас-

крытой топологией, заданным в виде графов, структурных схем или уравнениями в обобщенной нормальной форме.

6. 2. 1. Если определены коэффициенты a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, характеристического полинома $D(s)$, то для исследования устойчивости системы могут быть применены критерии Михайлова (при $s = j\omega$), Гурвица и, что особенно эффективно при использовании ЭВМ, — критерий устойчивости Рауса.

В разд. 2 приведена программа, позволяющая получить значения полинома $D(s)$ при $s = j\omega$, на основе которой можно построить годограф Михайлова.

Алгоритм Рауса также позволяет определить принадлежность всех корней полинома

$$D(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n \quad (6.1)$$

левой полуплоскости. Операторная часть программы, реализующей алгоритм Рауса на языке АЛМИР-65, выглядит следующим образом:

```
"РАЗР"6. "E" A[1] ≤ 0 "ТО" ("НА" 1); "ДЛ" K = 1 "Ш" 1 "ДО" N
"ВЫП" ("E" A[K+1] ≤ 0 "ТО" ("НА" 1); ALFA = A[K]/A[K+1];
K1 = K+2; "E" K1 ≤ N "ТО" ("ДЛ" 1 = K1 "Ш" 2 "ДО" N "ВЫП"
A[I] = A[I] - ALFA × A[I+1]); "НА" 2; 1. "ВЫВ" "НЕ"; 2.
"ВЫВ" "УСТ.", "ПРОБ", "СИСТЕМА"
```

В описательной части программы: "ГДЕ" $N = n$; $A[n+1] = -\dots, \dots$ "КОН" массив коэффициентов A заполняется от коэффициента a_n при старшей степени.

В результате счета на печать выдается код "УСТ. СИСТЕМА" или "НЕУСТ. СИСТЕМА".

Пример. Пусть требуется определить, устойчива ли система, имеющая характеристический полином $D(s) = 0,035s^5 + 1,242s^4 + 14,527s^3 + 57,955s^2 + 118,9s + 21$.

Описательная часть программы запишется: "ГДЕ" $N = 5$; $A[6] = .035, 1.242, 14.527, 57.955, 118.9, 21$ "КОН". Результат счета: "УСТ.СИСТЕМА".

6.2.2. При необходимости определить устойчивость системы по матрице коэффициентов A можно пойти двумя путями. Во-первых, по матрице A вычисляются коэффициенты характеристического полинома $D(s) = \det(sE - A)$ (см. разд. 2); далее применяется алгоритм Рауса. Во-вторых, для определения принадлежности собственных значений матрицы A левой полуплоскости может быть использован прием [30, 89], заключающийся в отображении левой полуплоскости в круг единичного радиуса и соответствующем преобразовании матрицы:

$$B = (A + E)(A - E)^{-1} = E + 2(A - E)^{-1}. \quad (6.2)$$

Если все собственные значения A принадлежат левой полуплоскости, то собственные значения B принадлежат единично-

му кругу. Алгоритм дробно-линейного преобразования (6.2) легко реализуется с использованием подпрограммы обращения матриц.

Установление принадлежности собственных значений матрицы B единичному кругу основано на том, что при возведении матрицы в любую степень в ту же степень возводятся ее собственные значения. При этом, если все собственные значения B по модулю меньше единицы, то при возведении их в степени $k \rightarrow \infty$ они убывают до нуля; убывают и элементы степеней матрицы B^k . Убывание B^k при $k \rightarrow \infty$ можно установить по последовательности

$$\{B\}, \{B^2\}, \{B^4\}, \{B^8\}, \dots, \quad (6.3)$$

образованной нормами матрицы B . Сходимость последовательности (6.3) к нулю рекомендуется проверять по убыванию ее элементов, начиная с $k_n \geq 1$ [16]. Для ускорения работы алгоритма целесообразно использовать достаточное условие $|\text{Sp} B^k| \geq n(\text{Sp } B^k - \text{след матрицы } B^k)$, при выполнении которого собственные значения B не принадлежат единичному кругу, и достаточное условие $\|B_k\| < 1$ принадлежности единичному кругу.

Программа для определения принадлежности собственных значений матрицы единичному кругу, реализующая описанный выше алгоритм на языке АЛМIP-65, приведена ниже:

```
"РАЗР"6. 1. K = 1; 2. M = 0; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"N"ВЫП"
(H[I] = Σ(J = 1, N, ABS(B[I, J]))); "E"1"1"1" > M"ТО"(M =
- H[I]); 3. "E" M < 1"ТО"("ВЫВ" M; "HA"13); 4. SP = Σ(I =
1, N, B[I, I]); 5. "E" SP > N"ТО"("ВЫВ" SP; "HA"12); 6. "ДЛ"
1 = 1"Ш"1"ДО"N"ВЫП" "ДЛ" J = 1"Ш"1"ДО"N"ВЫП" A[I, J] =
Σ(Q = 1, N, B[I, Q] × B[Q, J]); 7. "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"N"ВЫП"
"ДЛ" J = 1"Ш"1"ДО"N"ВЫП" B[I, J] = A[I, J]; 8. K = K + 1; 9.
"E" K < KN"ТО"("HA"2); 10. M1 = 0; "ДЛ"1 = 1"Ш"1"ДО"N
"ВЫП" (H[I] = Σ(J = 1, N, ABS(B[I, J]))); "E" H[I] > M1"ТО"
(M1 = H[I]); 11. "E" M1 > M"ТО"("HA"12)"И"HA"("HA"13);
12. "ВЫВ"[HE]; 13. "ВЫВ"[УСТ];
```

Описательная часть программы имеет вид: "ГДЕ" $N = n$; $KN = k_n$; $B[n, n] = \dots, \dots$; $A[n, n]$; $Q[n, n]$; $H[n]$ "КОН".

В связи с тем, что характеристический полином $D(s)$ или матрица A не содержат информации о принадлежности контуров, дуг и параметров той или иной автономной контурной части, да и вообще не содержат информации о наличии автономных контурных частей, применение любого критерия к $D(s)$ или A , позволяя с той или иной степенью сложности решить задачу исследования устойчивости, не дает четких представлений о том, какие автономные контурные части, контуры, дуги и па-

параметры оказывают наибольшее влияние на устойчивость всей системы в целом и отдельных ее контурных частей. Выявление этого влияния значительно затрудняется и тем, что коэффициенты характеристического полинома $D(s)$ и элементы матрицы A могут сложным образом зависеть от параметров всех контуров, входящих в M автономных контурных частей.

Если контурная часть всей системы включает в себя M автономных контурных частей (рис. 41), характеристический полином системы $D(s)$ может быть представлен в виде произведения характеристических полиномов

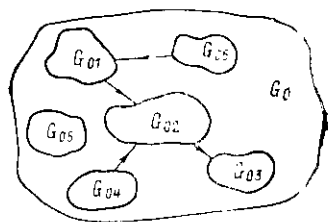


Рис. 41.

$$D_m(s) = a_{n_m} s^{n_m} + a_{n_m-1} s^{n_m-1} + \dots + a_{1_m} s + a_{0_m} \quad (6.4)$$

отдельных контурных частей, т. е.

$$D(s) = \prod_{m=1}^M D_m(s). \quad (6.5)$$

Следует заметить, что в общем случае, когда модели заданы без раскрытия топологии, задача разложения полинома $D(s)$ на множители $D_m(s)$, т. е. выделения автономных контурных частей, являясь достаточно сложной, а в ряде случаев, например, когда система уравнений задана в общем виде, и просто невозможной из-за потери информации о структурных (топологических) особенностях системы.

Раскрытие неопределенности относительно отдельных автономных контурных частей, т. е. представление $D(s)$ в виде (6.5), позволяет осуществить декомпозицию всей контурной части системы на M автономных контурных частей $D_m(s)$ меньшей размерности. При этом исследование устойчивости или запасов устойчивости каждой автономной контурной части значительно упрощается благодаря снижению порядка ($n_m < n$) полинома $D_m(s)$, полностью снимается неопределенность относительно устойчивости или запасов устойчивости каждой из автономных контурных частей, уменьшается избыточность во всех зависимостях, определяющих влияние параметров на устойчивость или запас устойчивости каждой автономной контурной части.

Однако и в этом случае задача исследования устойчивости как бы отрывается от всех остальных задач анализа и синтеза конкретной системы или из-за отсутствия у исследователя полной информации (определенности) о топологии системы, или из-за сложной связи коэффициентов полинома $D_m(s)$ с топологией системы даже при наличии такой информации. Следует

заметить, что в последнем случае такая связь может быть выявлена значительно проще, если для этого широко применять оценки функций чувствительности первого и более высоких порядков $D_m(s)$ к параметрам q_j .

6.3. Обобщение частотного критерия устойчивости на многоконтурные системы

Непосредственное применение частотного критерия устойчивости Найквиста, позволяющего по амплитудно-фазовой или логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой, для исследования многоконтурных систем обычно связано с необходимостью дополнительных исследований, позволяющих установить число полюсов передаточной функции разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости. Эти полюсы могут быть обусловлены как неустойчивыми звеньями, так и неустойчивыми внутренними контурами, и определение их числа для передаточной функции разомкнутой в каком-либо месте многоконтурной системы оказывается часто не менее сложной задачей, чем исследование устойчивости всей системы. Поэтому применение частотных критериев устойчивости для сложных многоконтурных систем связано с разработкой определенных процедур исследования и построения соответствующих частотных характеристик.

Обобщение частотного критерия устойчивости на многоконтурные системы, основанное на исследовании совокупности $(N_k - 1)$ частотных характеристик $W_{pi}(j\omega)$, образованных в результате последовательного замыкания $(N_k - 1)$ контуров, дано в работах [17, 80].

Трудность и сложность исследования устойчивости зависит от топологии многоконтурной системы и порядка замыкания контуров. Более простые частотные характеристики разомкнутой системы $W_{pi}(j\omega)$ и процедура исследования устойчивости получаются в том случае, когда исходный граф $\tilde{G}_0$ контурной части системы имеет регулярную структуру G_0^* или заранее приводится к графу G_0^* с упорядоченной структурой контуров.

На рис. 42а показан граф G_0^* с регулярной структурой, об-

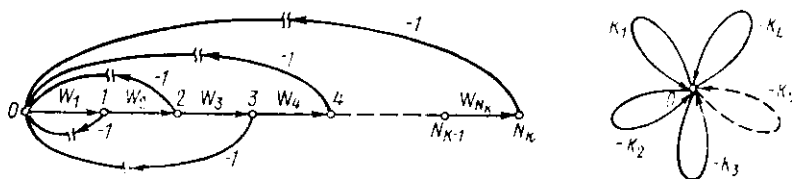


Рис. 42.

разованный Λ_k соприкасающимися контурами K_i , замкнутыми единичными отрицательными обратными связями, общей вершиной (0) и общими дугами W_j , $j \in J = \{1, \dots, N_h\}$.

На рис. 42б показан граф G_0^* с регулярной структурой, образованный L соприкасающимися контурами K_i и общей вершиной (0).

Для этих графов G_0^* с регулярной структурой имеют место следующие выражения для передачи i -го контура:

$$K_i(s) = \prod_{j=1}^{i-1} W_j(s), \quad (6.6)$$

определителя графа при замыкании i -контуров:

$$\Delta_i(s) = \Delta_{i-1}(s) + K_i(s), \quad (6.7)$$

передаточной функции разомкнутой системы, образованной из i -контуров графа:

$$W_{pi}(s) = \frac{N_{pi}(s)}{D_{pi}(s)} = \frac{\prod_{j=1}^{i-1} W_j(s)}{1 + \sum_{j=1}^{i-1} K_j(s)} = \frac{K_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}. \quad (6.8)$$

Представив определитель графа G_0^* в виде

$$\Delta(s) = \frac{D(s)}{D_p(s)} = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_0(s)} \cdot \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_1(s)} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_l(s)}{\Delta_{l-1}(s)} \quad (6.9)$$

и учитывая, что $\Delta_0(s) = 1$, и

$$\Delta_i(s) \Delta_{i-1}(s) = 1 + W_{pi}(s), \quad (6.10)$$

как это следует из выражений (6.8) — (6.10), можно установить связь между характеристическими полиномами замкнутой системы $D(s)$, полностью разомкнутой системы $D_p(s)$ и передаточными функциями $W_{pi}(s)$:

$$\frac{D(s)}{D_p(s)} = \prod_{i=1}^l \frac{R}{1} [1 + W_{pi}(s)]. \quad (6.11)$$

Приведение графа контурной части G_0 общего вида к одному из графов с регулярной структурой G_0^* обычно является довольно сложной задачей и приводит к потере части связей между структурой и свойствами, поэтому целесообразно рассмотреть прямой путь представления определителя любого графа в виде произведения (6.11) с передаточными функциями $W_{pi}(s)$.

Как показано в третьей главе, контурная часть графа может быть образована последовательным введением контуров, т. е. замыканием обратных связей, под которыми понимаются дуги или пути, составленные из нескольких дуг графа, приводя-

щие к появлению в графе хотя бы одного дополнительного контура.

Передаточная функция $W_{pi}(s)$ разомкнутой эквивалентной одноконтурной системы, получаемой на i -й итерации сборки графа, т. е. при размыкании i -й обратной связи — $W_{h,z}(s)$ между вершинами z , h , как это показано на рис. 43, определяется выражением

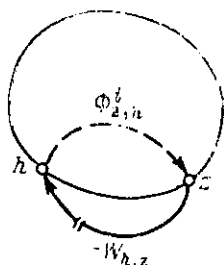


Рис. 43.

$$W_{pi}(s) = [\Phi_{z,h}^i (-W_{h,z}(s))], \quad (6.12)$$

в которое входит передаточная функция $\Phi_{z,h}^i(s)$ между вершинами z и h , образованная при замыкании всех предыдущих $i-1$ обратных связей.

Учитывая, что

$$\Phi_{z,h}^{i-1}(s) = \frac{\Phi_{z,h}^i}{1 + \Phi_{z,h}^i(s) W_{h,z}(s)}, \quad (6.13)$$

можно легко показать справедливость выражения (6.10), а следовательно, и (6.11) в данном случае.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример последовательности замыкания обратных связей в системе, граф которой показан на рис. 44ж. Передаточные функции $W_{pi}(s)$, $\Phi_{z,h}^i(s)$ и обратные связи — $W_{h,z}^i(s)$ удобно характеризовать последовательностью вершин графа, если принять следующую сокращенную форму записи:

$$W_{pi}(s) = [\Phi_{z,h}^i(s) (-W_{h,z}^i(z))] \cdot [z, h(h, j, j+1, \dots, z)]^{(i)}. \quad (6.14)$$

В качестве одного из вариантов последовательности замыкания обратных связей для системы, показанной на рис. 44ж, можно, например, принять вариант $\{W_{pi}(s)\} = \{[2, 1(1, 2)]^{(1)}, [2, 1(1, 5, 4, 3, 2)]^{(2)}, [4, 3(3, 4)]^{(3)}, [5, 4(4, 10, 9, 5)]^{(4)}, [10, 9(9, 8, 7, 6, 10)]^{(5)}, [8, 6(6, 8)]^{(6)}, [3, 8(8, 3)]^{(7)}, [7, 3(3, 7)]^{(8)}\}$, соответствующий последовательности замыкания контуров (рис. 44).

При таком подходе к формированию всех $W_{pi}(s)$ исключается процедура преобразования графа контурной части G_0 в граф G_0^* с регулярной структурой, но значительно усложняется процесс определения передаточных функций $\Phi_{z,h}^i(s)$, а следовательно, и $W_{pi}(s)$. При исследовании устойчивости сложных систем последовательным замыканием обратных связей для получения частотных характеристик эквивалентных разомкнутых систем необходимо использовать приведенные в гл. 5 алгоритмы, позволяющие автоматизировать расчеты.

Для графов с регулярной структурой в процессе формирования семейства $W_{pi}(s)$ происходит последовательное накопление информации, поэтому все предыдущие результаты полностью используются для последующего шага. Это позволяет для сравнительно простых систем применять номограмму замыкания [80] и проводить графоаналитические расчеты. И при исследовании устойчивости произвольных многоконтурных систем частотным методом, опирающимся на последовательное замыкание контуров, накапливается информация о свойствах топологически сложных систем, роли отдельных контуров. Для формирования частотных характеристик $W_{pi}(j\omega)$ также могут быть разработаны алгоритмы коррекции характеристик $(i-1)$ -й итерации.

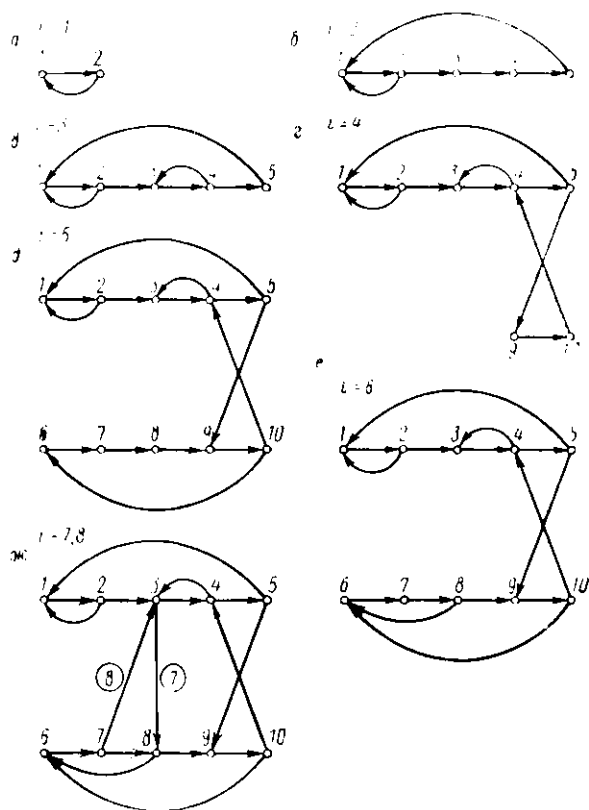


Рис. 44.

Перейдем к рассмотрению частотных условий и критериев устойчивости, позволяющих в рамках описанной выше процедуры проводить исследование устойчивости сложных систем.

На основе принципа аргумента и соотношения $D_i(s)/D_{pi}(s) = 1 + W_{pi}(s)$ (см. (6.11)) можно установить связь между числами правых полюсов P_{zi} и P_{pi} полиномов $D(s)$ и $D_{pi}(s)$. Пусть порядки полиномов числителей передаточных функций обратных связей не превышают порядки знаменателей, тогда порядки n_{zi} и n_{pi} полиномов $D_i(s)$ и $D_{pi}(s)$ одинаковы и равны n_i . Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg D_i(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg D_{pi}(j\omega) = \pi(P_{pi} - P_{zi}) \quad (6.15)$$

$$\text{или} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg (1 + W_{pi}(j\omega)) = \pi(P_{pi} - P_{zi}). \quad (6.16)$$

Записав (6.16) в форме

$$\left| \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg (1 + W_{pi}(j\omega)) \right| / 2\pi = (P_{pi} - P_{zi}) / 2 = \nu_{pi} / 2, \quad (6.17)$$

можно сформулировать следующее утверждение: число охватов годографом $(1 + W_{pi}(j\omega))$ начала координат равно полуразности правых полюсов передаточных функций разомкнутой и замкнутой систем. В частности, для устойчивости замкнутой на i -й итерации системы ($P_{zi} = 0$) необходимо и достаточно, чтобы годограф $(1 + W_{pi}(j\omega))$ охватывал начало координат $P_{pi}/2$ раз.

На основе выражения (6.9) можно записать условие, при выполнении которого замкнутая система будет устойчива, т. е. не будет иметь полюсов в правой полуплоскости в том случае, когда полностью разомкнутая система имеет P_0 полюсов в правой полуплоскости:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg D(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg D_p(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2P_0) \frac{\pi}{2} = P_0 \pi \quad (6.18)$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^N \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg |1 + W_{pi}(j\omega)| - \sum_{i=1}^N P_i = P_0 \pi. \quad (6.19)$$

Следует заметить, что P_0 обычно известно или может быть сравнительно просто определено по виду отдельных звеньев, входящих в систему.

Вместо условий (6.16) — (6.19), учитывающих изменение аргумента функции $1 + W_{pi}(j\omega)$ относительно начала координат, можно перейти к определению изменения аргумента функции $W_{pi}(j\omega)$ относительно точки $(-1, j0)$, как это показано на рис. 45.

В этом случае частотный критерий устойчивости для многоконтурной системы можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы многоконтурная система, характеристический полином $D_p(p)$ которой в полностью разомкнутом состоя-

нии имеет P_0 корней в правой полуплоскости, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы суммарная разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов отрезка вещественной оси $(-\infty, -1)$ (или число охватов точки $(-1, j0)$ в положительном направлении — против часовой стрелки) всех амплитудно-фазовых характеристик $W_{pi}(j\omega)$, $i \in I = \{1, \dots, R\}$, образованных при последовательном замыкании (в определенном порядке для графа с регулярной структурой или в произвольном порядке для графа общего вида) обратных связей, при изменении частоты ω от 0 до ∞ равнялась $0,5P_0$.

В случае исследования устойчивости сложных систем по логарифмическим характеристикам

$$\begin{aligned} L_i(\omega) &= 20 \lg |W_{pi}(j\omega)|, \\ \varphi_i(\omega) &= \arg W_{pi}(j\omega), \quad i \in I \end{aligned} \quad (6.20)$$

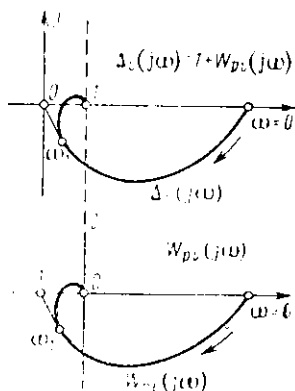


Рис. 45.

частотный критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы многоконтурная (N_k -контурная) система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до ∞ разность между числом положительных (снизу вверх) и отрицательных (сверху вниз) переходов всех N_k фазовых характеристик $\varphi_i(\omega)$, $i \in I = \{1, 2, \dots, N_k\}$ разомкнутых контуров, образованных при последовательном замыкании (в определенном порядке для графа с регулярной структурой или в произвольном порядке для графа общего вида) обратных связей, через линии $\pm(2k+1)\pi$, $k=0, 1, 2, \dots$ в области частот, где соответствующие логарифмические амплитудные характеристики разомкнутых контуров $L_i(\omega) > 0$, равнялась $0,5P_0$.

Подводя итоги рассмотрения процедур исследования устойчивости многоконтурных систем по частотным характеристикам разомкнутой системы на основе частотного критерия, следует отметить:

1) рассмотренный подход к исследованию устойчивости многоконтурных систем в своей основе имеет большую избыточность, что следует из преобразования (6.9). Дополнительная трудоемкость анализа, обусловленная этой избыточностью, легко преодолевается при графоаналитических методах исследования сравнительно простых систем, когда в процессе самого

исследования последовательно определяются и характеристики $W_{pi}(j\omega)$, а также при автоматизации расчетов;

2) процедура построения семейства $W_{pi}(j\omega)$, $i \in I$ в случае графа с регулярной структурой и тем более в случае графа общего вида также имеет большую избыточность и, следовательно, связана с значительным объемом вычислений, которые достаточно просто выполняются на ЭВМ (см. гл. 5);

3) в зависимости от порядка преобразования контуров исходного графа контурной части системы к контурам графа с регулярной структурой или от порядка замыкания контуров в общем случае можно получить различные, возможно и очень сильно различающиеся амплитудно-фазовые $W_p(j\omega)$ или логарифмические $L_p(\omega)$, $\varphi_p(\omega)$ частотные характеристики. Поэтому любая из этих частотных характеристик, однозначно определяя устойчивость, будет давать свои запасы устойчивости по модулю и по фазе, показателю колебательности и т. д., т. е. задача определения запасов устойчивости и показателя колебательности сложной системы без специально определенного каждый раз порядка замыкания контуров с выделением последнего контура в этом случае решается неоднозначно;

4) вместе с тем достоинством рассмотренной выше процедуры исследования устойчивости многоконтурных систем является автоматическое выделение автономных контурных частей, и при правильном выборе порядка замыкания контуров можно оценить влияние отдельных обратных связей на устойчивость всей автономной контурной части или только какой-либо ее составляющей.

6.4. Частотные методы исследования устойчивости контурных частей сложной системы по определителю графа

Как будет показано ниже, наиболее экономные методы исследования устойчивости сложных многоконтурных систем могут быть получены на основе исследования не определителя Δ_0 графа G_0 всей контурной части системы

$$\Delta_0(s) = \prod_{m=1}^M \Delta_m(s), \quad (6.21)$$

а определителей Δ_m графов G_m автономных контурных частей:

$$\Delta_m(s) = \frac{D_{1:m}(s)}{D_{p:m}(s)} = 1 - \sum_{i \in \mathcal{K}} K_i(s) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_2} K_i(s) K_j(s) - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{L}_3} K_i(s) K_j(s) K_k(s) + \dots \quad (6.22)$$

Исследование устойчивости автономной контурной части. Автономную контурную часть системы можно представить в виде эквивалентного графа с регулярной структурой, как это показано на рис. 46 или 47. Это даст возможность оценить влияние контуров и передач составляющих их дуг на определитель Δ и передаточную функцию W_p эквивалентной разомкнутой системы.

Введем понятие обобщенной передаточной функции разомкнутого графа G_m автономной контурной части

$$W_{pm}(s) = \Delta_m(s) - 1 \quad (6.23)$$

и обобщенной частотной характеристики разомкнутого графа автономной контурной части

$$W_{pm}(j\omega) = \Delta_m(j\omega) - 1. \quad (6.24)$$

В дальнейшем, где это не приводит к неопределенности, автономную контурную часть будем называть просто контурной частью.

Перейдем к определению частотных условий и критериев устойчивости, позволяющих исследовать устойчивость по определителю графа $\Delta_m(j\omega)$ или обобщенной частотной характеристике разомкнутой контурной части $W_{pm}(j\omega)$.

Пусть характеристический полином $D_{pm}(s)$ полностью разомкнутого графа G_m имеет P_{0m} полюсов в правой полуплоскости. Контурная часть системы будет устойчива, если при изменении частоты ω от 0 до ∞ выполняется условие

$$\delta_{0 \rightarrow \infty} \arg \Delta_m(j\omega) = \delta_{0 \rightarrow \infty} \arg D_m(j\omega) - \delta_{0 \rightarrow \infty} \arg D_{pm}(j\omega) = P_{0m}\pi, \quad (6.25)$$

т. е. частотная характеристика $\Delta_m(j\omega)$ охватывает начало координат P_{0m} раз в положительном направлении (против часовой стрелки) при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

Вместо условия (6.25), учитывающего изменение $\arg \Delta_m(j\omega)$ относительно начала координат, легко перейти к условию, учитывающему изменение $\arg W_{pm}(j\omega) = \varphi_{pm}(\omega)$ относительно точки $(-1, j0)$.

В этом случае условие устойчивости будет иметь вид

$$\delta_{0 \rightarrow \infty} \arg W_{pm}(j\omega) = P_{0m}\pi, \quad (6.26)$$

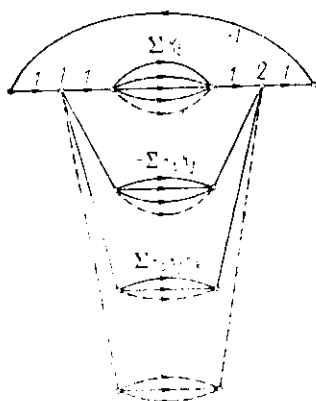
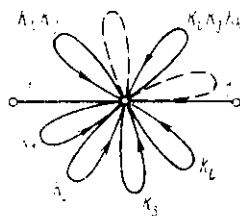


Рис. 46.



т. е. аналогично обычному условию в критерии Найквиста для одноконтурных систем.

Таким образом, частотный критерий устойчивости для многоконтурной системы можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы многоконтурная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов отрезка вещественной оси $(-\infty, -1)$ (или число охватов точки $(-1, j0)$ в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки) обобщенной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой контурной части $W_{pm}(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ равнялась $0,5P_{0m}$, где P_{0m} — число полюсов в правой полуплоскости в характеристических полиномах всех дуг, входящих в контурную часть графа.

Также легко сформулировать критерий для исследования устойчивости сложных многоконтурных систем по обобщенным логарифмическим амплитудным и фазовым характеристикам разомкнутой контурной части:

$$\begin{aligned} L_{pm}(\omega) &= 20 \lg |W_{pm}(j\omega)|, \\ \varphi_{pm}(\omega) &= \arg W_{pm}(j\omega). \end{aligned} \quad (6.27)$$

При исследовании устойчивости автономной контурной части по обобщенным частотным характеристикам разомкнутой автономной контурной части:

1) исключается большая избыточность рассмотренных выше частотных критериев, потому что устойчивость автономной контурной части сложной системы определяется по одной обобщенной характеристике, построение которой также проводится при минимальной избыточности;

2) однозначно по обобщенным частотным характеристикам определяются запасы устойчивости по модулю и фазе, показатель колебательности и т. д. для автономной контурной части сложной системы.

Исследование устойчивости контурной части всей системы. Рассмотрим граф G_0 контурной части системы, включающий в себя M автономных контурных частей (см. рис. 41).

Введем понятия обобщенной передаточной функции и обобщенной частотной характеристики разомкнутого графа G_0 контурной части сложной системы

$$W_{p0}(s) = \Lambda_0(s) - 1, \quad (6.28)$$

$$\tilde{W}_{p0}(j\omega) = \Lambda_0(j\omega) - 1, \quad (6.29)$$

которые в этом случае имеют только формальный, а не физический смысл.

Пусть характеристические полиномы D_{pm} каждого полностью разомкнутого графа автономной контурной части G_m имеют по P_{0m} полюсов в правой полуплоскости. Тогда контурная часть всей системы будет устойчива, если при изменении частоты ω от 0 до ∞ выполняется условие

$$\begin{aligned} \delta \arg \Lambda_0(j\omega) &= \delta \arg D_0(j\omega) - \delta \arg D_{p0}(j\omega) = \\ &= - \sum_{m=1}^M P_{0m} \pi - \sum_{m=1}^M P_{0m}^* \pi. \end{aligned}$$

Если контурная часть системы устойчива, то $P_{0m}^* = 0$ при $m = 1, 2, \dots, M$, т. е. каждая автономная контурная часть не должна иметь полюсов P_{0m}^* , лежащих в правой полуплоскости.

Следовательно, условие устойчивости контурной части имеет вид

$$\delta \arg \Lambda_0(j\omega) = - \sum_{m=1}^M P_{0m} \pi = P_0 \pi,$$

и поэтому критерии устойчивости, сформулированные для автономной контурной части, могут быть использованы и для этого случая, если пользоваться обобщенными частотными характеристиками $W_{p0}(j\omega)$ или $L_{p0}(\omega)$, $\varphi_{p0}(\omega)$ с учетом $P_0 = - \sum_{m=1}^M P_{0m}$.

При исследовании устойчивости системы по обобщенным частотным характеристикам контурной части всей системы возникают проблемы неопределенности параметров, оказывающих влияние на устойчивость всей контурной части системы и ее автономных частей, становятся неопределенными понятия запаса устойчивости, колебательности и т. д. В этом случае в результате объединения всех контурных частей вносится неопределенность относительно автономных контурных частей и вместе с тем вводится большая избыточность в определитель графа из-за большого числа несоприкасающихся контуров, образованных автономными контурными частями.

6.5. О некоторых особенностях исследования устойчивости по частотным характеристикам разомкнутой системы и обобщенным частотным характеристикам автономной контурной части

Выше были сформулированы частотные критерии устойчивости и рассмотрены особенности применения различных критериев.

В настоящем параграфе целесообразно на простейших примерах показать ряд дополнительных особенностей исследова-

ния устойчивости по частотным характеристикам разомкнутой системы $W_{pi}(j\omega)$ и обобщенным частотным характеристикам $W_{pm}(j\omega)$ автономной контурной части.

Рассмотрим в качестве иллюстрации простейшие примеры исследования устойчивости по частотным характеристикам разомкнутой системы $W_{pi}(j\omega)$ и обобщенным частотным характеристикам разомкнутой контурной части $W_{pm}(j\omega)$.

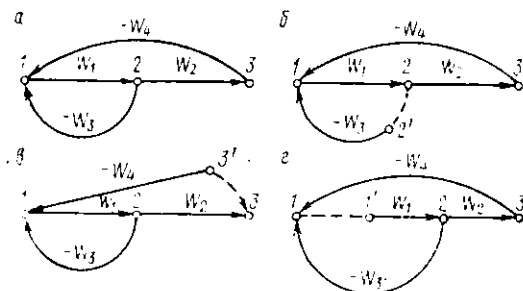


Рис. 48.

Граф контурной части двухконтурной системы показан на рис. 48. Передачи дуг определяются выражениями

$$W_1(s) = \frac{10}{0,1s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{1}{s^2(s + 1)},$$

$$W_3(s) = \frac{10s}{s + 1}, \quad W_4(s) = 1,$$

а передачи контуров имеют вид

$$K_1(s) = -W_1(s)W_3(s) = \frac{-100s}{(s + 1)(0,1s + 1)},$$

$$K_2(s) = -W_1(s)W_2(s)W_4(s) = \frac{-10}{s^2(s + 1)(0,1s + 1)}.$$

Определитель графа запишется следующим образом:

$$\Delta(s) = 1 - K_1(s) - K_2(s) = 1 +$$

$$+ \frac{100s}{(s + 1)(0,1s + 1)} + \frac{10}{s^2(s + 1)(0,1s + 1)}.$$

Характеристический полином системы представляет собой числитель определителя графа $D(s) = s^2(s + 1)(0,1s + 1) + 100s^3 + 10 = 0,1s^4 + 101,1s^3 + s^2 + 10$ и соответствует неустойчивой системе, так как коэффициент при s равен нулю. Корни полинома $D(s)$ вычислены на ЭВМ и имеют следующие значения: $s_{1,2} = 0,228 \pm j 0,400$; $s_3 = -0,446$; $s_4 = -1010,99$.

Исследование устойчивости по полному $D(s)$ легко проводится с помощью алгоритма Рауса (см. 6.2). Исследование устойчивости по характеристическому полиному всей системы, позволяя ответить на конечный вопрос, вместе с тем не дает четких представлений о том, какие контуры, дуги и параметры оказывают наибольшее влияние на устойчивость и запасы устойчивости системы в целом и отдельных ее контурных частей. По этой причине во многих случаях целесообразно использовать частотные критерии устойчивости, связанные с последовательным усложнением контурной части.

6.5.1. Непосредственное применение частотного критерия устойчивости Найквиста для анализа многоконтурной системы связано с выбором места размыкания, причем от этого существенно зависит как взаимосвязь параметров с частотными характеристиками, так и сложность решения задачи. Ниже для иллюстрации зависимости частотных характеристик от места размыкания рассмотрены все три варианта размыкания графа, изображенного на рис. 48а.

При исследовании передаточных функций разомкнутых систем $W_{pi}(s)$ и соответствующих частотных характеристик удобно положить, что они представляют собой прямые передачи, замыкаемые единичными отрицательными обратными связями. Поэтому ниже везде $W_{pi}(s)$ берется со знаком минус.

Передаточная функция разомкнутой системы при размыкании только второго контура в вершине 2—2' (рис. 48б) определяется выражением

$$W_{p1}(s) = \frac{W_3 W_1}{1 + W_1 W_2 W_3} = \frac{100s^3}{s^2(s+1)(0,1s+1) + 10} \quad (6.30)$$

Передаточная функция разомкнутой системы в случае размыкания первого контура той же системы в вершине 3—3' (рис. 48в) определяется иным выражением

$$W_{p2}(s) = \frac{W_3 W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3} = \frac{10}{s^2[(0,1s+1)(s+1) + 100s]} \quad (6.31)$$

Наконец, передаточная функция разомкнутой системы, получаемой в результате размыкания в узле 1—1' обеих контуров сразу (рис. 48г), определяется следующим выражением:

$$W_{p3}(s) = W_1(W_3 + W_2 W_4) = \frac{10(10s^3 + 1)}{s^2(0,1s+1)(s+1)} \quad (6.32)$$

Выражения (6.30)—(6.32) для трех вариантов передаточных функций разомкнутых систем одной и той же двухконтурной системы (рис. 48а) существенно различны.

При исследовании устойчивости замкнутой системы частотным критерием Найквиста прежде всего необходимо установить число P_i правых полюсов $W_{pi}(s)$, $i=1, 2, 3$.

Как показывает анализ выражения (6.30) для $W_{p1}(s)$, даже для простейшего примера двухконтурной системы при неудачном выборе места размыкания контура определение устойчивости не упростилось — характеристический полином разомкнутой системы $D_{p1}(s) = s^2(s+1)(0,1s+1) + 10$ имеет четвертый порядок и определение числа P_1 , его правых корней — задача не более простая, чем определение устойчивости замкнутой системы по полиному $D(s)$. Подсчитаны корни $D_{p1}(s)$: $s_{1,2} = 0,835 \pm \pm j1,719$; $s_3 = -2,786$; $s_4 = -9,885$, откуда следует, что $P_1 = 2$.

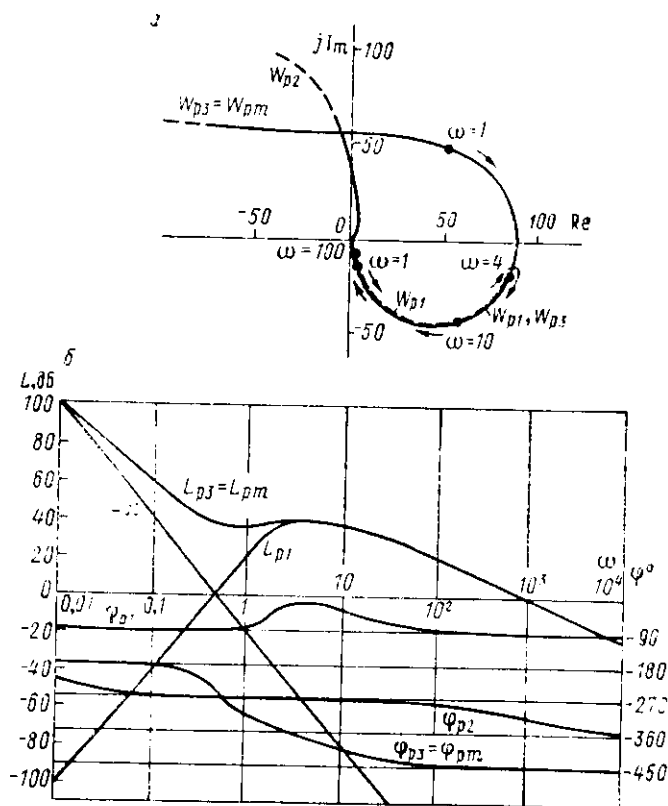


Рис. 49.

Выражение для характеристического полинома разомкнутой системы $W_{p2}(s) D_{p2}(s) = s^2[(0,1s+1)(s+1) + 100s]$ проще, так как содержит в качестве сомножителя полином второго порядка. Поскольку все три коэффициента полинома положительны, разомкнутая система не содержит правых полюсов $P_2 = 0$.

В случае третьего варианта разомкнутой системы $W_{p3}(s)$, когда размыкаются оба контура, т. е. система размыкается полностью (рис. 48б), знаменатель $D_{p3}(s)$ имеет предельно простую структуру и представляет собой произведение полиномов

знаменателей передаточных функций контуров $K_1(s)$ и $K_2(s)$, которые, в свою очередь, являются произведениями соответствующих полиномов передач дуг, образующих эти контуры: $D_{p3}(s) = s^2(0,1s+1)(s+1)$. В этом случае легко видеть, что разомкнутая система не имеет правых корней ($P_3=0$).

Однако третий вариант размыкания возможен только тогда, когда граф имеет регулярную структуру. Даже в случае простой двухконтурной системы легко видеть практическую невозможность применения частотного критерия в традиционной форме.

На рис. 49а показаны амплитудно-фазовые характеристики $W_{pi}(j\omega)$, а на рис. 49б — логарифмические частотные характеристики $L_{pi}(\omega)$, $\varphi_{pi}(\omega)$ для трех вариантов размыкания. Из-за наличия двух нулевых полюсов (интегрирующих звеньев) $W_2(s)$ замкнутая система структурно-неустойчива и имеет два полюса в правой полуплоскости ($P_3=2$), что и видно из характеристик на рис. 49: АФХ $W_{pi}(j\omega)$ не имеет переходов через отрезок $(-\infty, -1)$, т. е. не охватывает точку $(-1, j0)$, следовательно, из (6.16): $P_3=P_1=2$; АФХ $W_{p2}(j\omega)$ и $W_{p3}(j\omega)$ имеют по одному отрицательному переходу через отрезок $(-\infty, -1)$, следовательно, $P_3=P_{2(3)} - (-2) = 2$.

6.5.2. Проиллюстрируем далее применение частотных критериев устойчивости сложных систем на основе характеристик, получаемых при последовательном замыкании контуров двухконтурной системы (см. рис. 48а), когда происходит накопление информации о свойствах контуров, в частности, о числе правых полюсов замыкаемых систем.

Для рассматриваемого примера возможны два варианта последовательности замыкания обратных связей:

$$\{W_{pi}\} = \{[2, 1(1, 3, 2)]^{(1)}, [2, 1(1, 2)]^{(2)}\},$$

который иллюстрируется графами на рис. 50, и

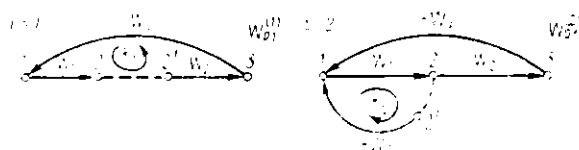


Рис. 50.

$$\{W_{i2}\} = \{[2, 1(1, 2)]^{(1)}, [2, 1(1, 3, 2)]^{(2)}\},$$

графы которого изображены на рис. 51.

Выражения для передаточных функций соответствующих разомкнутых систем имеют вид

$$W_{pi}^{(1)}(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(0,1s+1)},$$

$$W_{p1}^{(2)}(s) = \frac{W_1(s) W_3(s)}{1 - W_1(s) W_4(s) W_2(s)} = \frac{100s^3}{s^2(s+1)(0,1s+1) + 10},$$

$$W_{p2}^{(1)}(s) = W_1(s) W_3(s) = \frac{100s}{(s+1)(0,1s+1)},$$

$$W_{p2}^{(2)}(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_4(s)}{1 + W_1(s) W_3(s)} = \frac{10}{s^2[(s+1)(0,1s+1) + 100s]}.$$

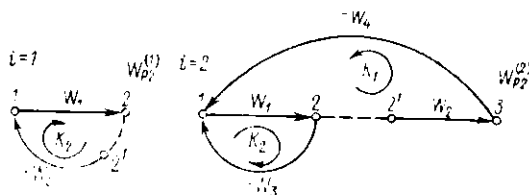


Рис. 51.

Вначале рассмотрим первый вариант последовательности замыкания. Частотные характеристики $L_{p1}^{(1)}(\omega)$, $\varphi_{p1}^{(1)}(\omega)$ разомкнутой системы ($P_0 = 0$) изображены на рис. 52. Частотная

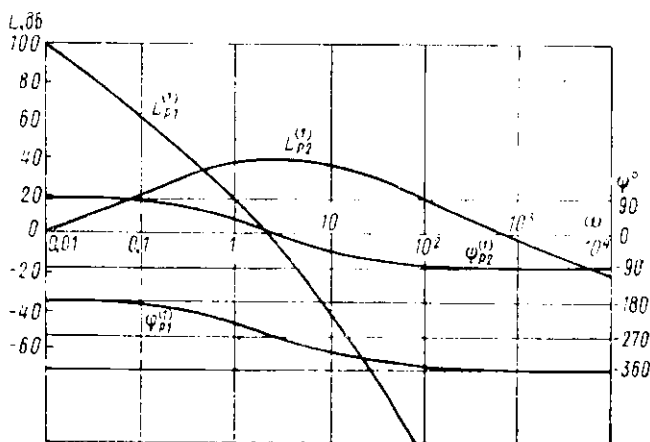


Рис. 52.

характеристика $\varphi_{p1}^{(1)}(\omega)$ совершает один отрицательный переход, поэтому при замыкании $W_{p1}^{(1)}(s)$ отрицательной обратной связью (контур K_1) замкнутая система будет иметь два правых полюса: $P_1^{(1)} = 2$. Эта информация используется для последующего замыкания. Частотные характеристики $W_{p1}^{(2)}(j\omega) = W_{p1}(j\omega)$ изображены на рис. 49. Число переходов равно нулю, следова-

тельно, замкнутая система (см. рис. 50а) имеет два правых полюса, т. е. неустойчива.

Из анализа частотных характеристик $L_{p2}^{(1)}(\omega)$ и $\varphi_{p2}^{(1)}(\omega)$ устойчивой разомкнутой системы $W_{p2}^{(1)}$, изображенных на рис. 52, ясно, что при ее замыкании единичной отрицательной обратной связью (контур K_2) получается устойчивая система. Поскольку передача $W_1 W_2$ не имеет правых полюсов, то $P_2^{(1)} = 0$. Частотные характеристики $W_{p2}^{(2)}(j\omega) = W_{p2}^*(j\omega)$ изображены на рис. 49, откуда видно, что они совершают один отрицательный переход через отрезок $(-\infty, -1)$. Следовательно, замкнутая система имеет два правых полюса.

Таким образом, на основе анализа частотных характеристик последовательно замыкаемых систем исследование устойчивости многоконтурной системы легко доводится до конца при применении ЭВМ. Избыточность этой процедуры, заключающаяся в необходимости построения частотных характеристик $W_{pi}(j\omega)$, компенсируется дополнительно получаемой информацией о влияниях отдельных дуг и контуров на устойчивость системы при вариациях их операторов.

6.5.3. Как показано выше, наиболее экономичный частотный метод исследования устойчивости многоконтурных систем основан на использовании обобщенной передаточной функции полностью разомкнутой контурной части (6.23).

Для рассматриваемого примера обобщенная передаточная функция определяется выражением

$$W_{pm}^*(s) = \lambda_m(s) - 1 = \frac{10(10s^3 + 1)}{s \cdot (s + 1)(0,1s + 1)}. \quad (6.33)$$

Очевидно, в этом случае довольно просто определяется число правых полюсов разомкнутых систем, так как знаменатель $W_{pm}^*(s)$ представляет собой произведение полиномов знаменателей передач контуров, которые, в свою очередь, являются произведениями соответствующих полиномов передаточных функций дуг, образующих контуры.

В общем случае передаточная функция $W_{pm}(s)$ определяется формулой (6.23). Только для графа системы с регулярной структурой (рис. 44) возможно единственное размыкание, разрушающее все контуры, когда получается $W_{pm}(s)$. В рассматриваемом примере показан граф с регулярной структурой, поэтому $W_{p3}(s) = W_{pm}(s)$.

На рис. 49 приведены частотные характеристики $W_{pm}(j\omega)$ (рис. 49а), $L_{pm}(\omega)$, $\varphi_{pm}(\omega)$ (рис. 49б), которые показывают, что при замыкании единичной отрицательной обратной связью системы $W_{pm}(s)$ будем иметь неустойчивую систему с двумя правыми корнями характеристического полинома.

7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ИНВАРИАНТНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Чувствительность переменных систем управления

Системы управления обладают целым рядом особых свойств, имеющих определенную общность и оказывающихся различными проявлениями независимости (слабой зависимости, нечувствительности или малочувствительности) переменных или некоторых функционалов от переменных системы от сигнальных или (и) операторных воздействий среды на систему. Явление независимости вынужденных составляющих основных движений системы от внешних воздействий называется инвариантностью. Параметрическая инвариантность означает нечувствительность дополнительных движений к вариациям параметров; в общем случае можно рассматривать нечувствительность к вариациям структур операторов или даже топологии системы. Об автономности подсистем сложной системы говорят при независимости выходов подсистем от переменных или воздействий других подсистем. Понятия инвариантности и автономности тесно связаны с понятием неуправляемости, когда некоторые переменные инвариантной системы «неуправляемы» по соответствующему входному воздействию. В ряде случаев свободные движения, вызванные ненулевыми предначальными условиями, являющимися отражением предыстории системы, сформированной приложенными ранее воздействиями, по некоторым переменным системы могут быть скомпенсированы изменением параметров или воздействиями. Независимость движений от параметров может быть достигнута за счет взаимной компенсации вариаций нескольких параметров; возможно построение систем, в которых инвариантность достигается взаимной компенсацией нескольких воздействий, а также воздействий и параметров и т. д. и т. н.

В то время как отдельная компенсация того или иного вида приводит, как правило, к частному эффекту, в принципе обеспечивая полную независимость (нулевую чувствительность)

от одного воздействия или параметра, специальная организация топологии систем, заключающаяся в наличии обратных связей, образующих контуры, приводит к универсальному эффекту одновременного ослабления зависимости многих переменных системы от целого ряда воздействий и уменьшению чувствительностей к вариациям нескольких параметров. Можно утверждать, что именно наличие этих свойств, проявляющихся при специальной организации топологии и соответствующем выборе структур операторов и значений параметров, превращает динамическую систему в систему управления.

Для изучения с единых позиций всех проявлений независимости, слабой зависимости, нечувствительности и малочувствительности в системах управления, раскрытия всех возможных форм и условий инвариантности [47, 49, 93], полиинвариантности [45], автономности в многосвязных [23] и сложных системах, параметрической и двукратной инвариантности [62], физической реализуемости инвариантных систем [61] в работах [19, 20] предложено анализировать чувствительности переменных к параметрам системы управления и к специально введенным параметрам, характеризующим передачи каналов внешних воздействий. Анализ матриц чувствительности, устанавливающих причинно-следственные связи между переменными и параметрами системы, и каналов передачи воздействий, т. е. анализ некоторой совокупности частных моделей, получаемых из топологически сложной модели системы, позволяет выявить все возможные формы взаимной компенсации и абсолютной инвариантности одной или нескольких переменных системы — выявить условия инвариантности, полиинвариантности, инвариантности линейной формы переменных, автономности подсистем сложных систем, параметрической и двукратной инвариантности, компенсации начальных условий и т. д.

Рассмотрение моделей системы управления с максимальной топологической определенностью позволяет установить взаимнооднозначную связь между условиями инвариантности и топологией системы, сформулировать условия физической реализуемости абсолютно инвариантных систем в виде требований к передачам путей и минорам определителя графа, учитывающих число и особенности путей передачи воздействий, а также передачи и взаимное расположение контуров.

Уравнения систем и их решение. Пусть поведение одной из выбранных переменных $x_i(t)$ описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами (1.18):

$$D(p, q)x_i(t) = \sum_{r=1}^l N_{ir}(p, q)z_r f_r(t), \quad (7.1)$$

$$x_i^{(i)}(t) = p^i x_i(t) \Big|_{t=0}, \quad i=0, 1, \dots, n-1; \quad p = d/dt,$$

где коэффициенты полиномов $D(p, q)$ и $N_{ir}(p, q)$ степеней n и m_{ir} зависят от параметров системы $q_j, j=1, \dots, k$.

Следует еще раз заметить, что совокупность (7.1) при $r=1, \dots, n$ не является системой уравнений: каждое из этих уравнений, будучи частной моделью системы со связями с внешней средой $M_{\mathcal{E}SF}$ или расширенной системы M_R , полностью характеризует поведение одной из физических переменных системы, например ошибку, выходную переменную и т. д.

Преобразуя обе части уравнения (7.1) по Лапласу, можно получить выражение для изображения переменных системы:

$$x_r(s) = \sum_{r=1}^l \Phi_{ir}(s, q) \beta_r f_r(s) + \sum_{i=0}^{n-1} H_{ri}(s, q) x_{r0}^{(i)}, \quad (7.2)$$

где $\Phi_{ir}(s, q) = N_{ir}(s, q) D(s, q)$ — передаточная функция системы от воздействия $f_r^*(t)$ к переменной $x_i(t)$, $H_{ri}(s, q) = = D_{0i}(s, q) D(s, q)$ — изображение составляющей движения переменной $x_r(t)$ при начальном условии $x_{r0}^{(i)}$.

Поведение переменной $x_r(t)$ во времени при заданных внешних воздействиях и начальных условиях определяется в результате применения к (7.2) обратного преобразования Лапласа:

$$x_r(t) = \mathcal{L}^{-1} \{x_r(s)\} = \sum_{r=1}^l \beta_r \mathcal{L}^{-1} \{\Phi_{ir}(s, q) f_r(s)\} + \sum_{i=0}^{n-1} x_{r0}^{(i)} \mathcal{L}^{-1} \{H_{ri}(s, q)\}. \quad (7.3)$$

Чувствительность переменных систем. При заданных внешних воздействиях на систему $f_r^*(t), r=1, \dots, l$, изображение переменной $x_r(s)$ является функцией параметров системы q , каналов воздействия β_r и начальных условий $x_{r0}^{(i)}$. Если приращение параметров системы Δq считать малым и учесть линейную зависимость функции (7.2) от аргументов β_r и $x_{r0}^{(i)}$, то выражение (7.2) для изображения переменной можно разложить в ряд Тейлора в окрестности следующих значений аргументов: $\beta_{r0}, r=1, \dots, l$; $q_{j0}, j=1, \dots, k$; $x_{r0}^{(i)}, i=0, 1, \dots, n-1$:

$$x_r(s) = x_{r0}(s) + \Delta x_r(s) \approx \sum_{r=1}^l \frac{\partial x_r}{\partial \beta_r} \beta_r +$$

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{r=1}^l \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_r}{\partial \beta_r} \right) \beta_r + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_r}{\partial x_{i0}^{(i)}} \right) x_{i0}^{(i)} \right] \Lambda q_j + \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial x_r}{\partial x_{i0}^{(i)}} x_{i0}^{(i)} \right| \quad (7.4)$$

Приближенное выражение (7.4) при $\beta_r = \beta_{r0} + \Delta\beta_r$, $x_{i0}^{(i)} = x_{i00}^{(i)} + \Delta x_{i0}^{(i)}$ учитывает члены, содержащие произведения $\beta_r \Delta q$, $x_{i0}^{(i)} \Delta q_j$, так как $\Delta\beta_r$ и $\Delta x_{i0}^{(i)}$ не являются малыми, и не учитывает члены высшего порядка малости, в которые входят произведения Δq_j .

Коэффициенты выражения (7.4) являются соответствующими функциями чувствительности изображения переменной $x_r(s)$, а именно:

$$\frac{\partial x_r(s, q_0)}{\partial \beta_r} = \Phi_{r\beta_r}(s, q_0) f_r(s) = T_{r\beta_r}^{xy}(s) \quad (7.5)$$

— чувствительность к параметру канала воздействия β_r , или чувствительность к воздействию;

$$\frac{\partial x_r(s, q_0)}{\partial x_{i0}^{(i)}} = H_{ri}(s, q_0) = T_{rqi}^{xy}(s) \quad (7.6)$$

— чувствительность к начальным условиям;

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{r=1}^l T_{r\beta_r}^{xy}(s) \beta_r + \sum_{i=0}^{n-1} T_{rqi}^{xy}(s) x_{i0}^{(i)} \right] = T_{rqi}^{xy}(s) \quad (7.7)$$

— чувствительность к параметру системы q_j .

Учитывая принятые определения функций чувствительности (7.5)—(7.7), совокупность выражений (7.4) при $\gamma=1, \dots, n$ можно представить в виде

$$x_\gamma(s) \approx \sum_{r=1}^l T_{r\beta_r}^{xy}(s) \beta_r + \sum_{j=1}^k T_{qj}^{xy}(s) \Delta q_j + \sum_{i=0}^{n-1} T_{x_{i0}^{(i)}}^{xy}(s) x_{i0}^{(i)}, \quad (7.8)$$

или в матричной форме

$$x = T_\beta^x \beta + T_q^x \Delta q + T_0^x, \quad (7.9)$$

где x , β и Δq — векторы размеров n , l и k соответственно;

$$\mathbf{T}_i^x = \{T_{ij}^{xj}\} = \begin{bmatrix} T_{i1}^{x1} & T_{i2}^{x1} & \dots & T_{il}^{x1} \\ T_{i1}^{x2} & T_{i2}^{x2} & \dots & T_{il}^{x2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i1}^{xn} & T_{i2}^{xn} & \dots & T_{il}^{xn} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

матрица чувствительности переменных системы к параметрам каналов воздействий размером $\mu \times l$;

$$\mathbf{T}_q^x = \{T_{qj}^{xj}\} = \begin{bmatrix} T_{q1}^{x1} & T_{q2}^{x1} & \dots & T_{qk}^{x1} \\ T_{q1}^{x2} & T_{q2}^{x2} & \dots & T_{qk}^{x2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{q1}^{xn} & T_{q2}^{xn} & \dots & T_{qk}^{xn} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

матрица чувствительности переменных к параметрам системы размером $\mu \times k$;

$$\mathbf{T}_x^x = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{x10}^{x1} & \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{T}_{x20}^{x2} & \mathbf{x}_{20} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}_{x\mu 0}^{xn} & \mathbf{x}_{\mu 0} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

матрица-столбец размером $\mu \times 1$, определяющая приращение вектора $\mathbf{x}$, обусловленное начальными условиями, причем $\mathbf{T}_{x10}^{x1}$ — матрица-строка размером $1 \times n$ чувствительности переменной x_1 к собственным начальным условиям.

Функция чувствительности (7.7) может быть определена через функции чувствительности второго порядка изображения переменной $x_j(s)$ к параметрам каналов воздействий β_j и к параметрам системы q_j :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} T_{x10}^{x1}(s) = T_{qj}^{q1r}(s) f_r(s) = \frac{\partial \Phi_{1r}(s, q_0)}{\partial q_j}, \quad (7.13)$$

а также к начальным условиям и параметрам q_j :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} T_{x10}^{x1}(s) = T_{qj}^{H1i}(s) = \frac{\partial H_{1i}(s, q_0)}{\partial q_j}. \quad (7.14)$$

Чувствительность передаточной функции системы к параметрам

$$T_{qj}^{q1r}(s) = \frac{\partial \Phi_{1r}(s, q_0)}{\partial q_j} \quad (7.15)$$

при $r=1, 2, \dots, l$; $j=1, 2, \dots, k$; $\gamma=1, 2, \dots, \mu$ образует пространственную матрицу размером $l \times k \times \mu$.

Связь функций чувствительности с топологией системы. Функции чувствительности не содержат информации о топологии системы и являются частными моделями, характеризующими влияние на выбранные переменные параметров системы и каналов передачи воздействий. Результаты теории линейных направленных графов и исследования, проведенные в разделе 3, позволяют установить связь между функциями чувствительности и топологией системы.

Функция чувствительности изображения переменной $x_\gamma(s)$ к параметру p_r канала воздействия, т. е. чувствительность к воздействию f_r , зависит от топологии системы, а передаточная функция, т. е. передача графа между узлами γ и r , определяется формулой Мэсона (3.4).

Передача графа между узлами γ и r равна сумме передач всех каналов между этими узлами (3.1), а связь чувствительности к воздействию с передачами каналов определяется выражением

$$T_{\gamma r}^{\gamma r}(s, q) = f_r(s) \sum_i \Phi_{i,r}^i(s, q). \quad (7.16)$$

Функция чувствительности изображения переменной к параметру системы q_j или чувствительности к параметру (7.7) при нулевых начальных условиях

$$T_{qj}^{\gamma r}(s, q_0) = \sum_i T_{qj}^{ri}(s, q_0). \quad (7.17)$$

$$\text{где } T_{qj}^{\gamma r}(s, q_0) = \gamma_r \frac{\partial}{\partial q_j} T_{\gamma r}^{\gamma r}(s, q_0) = \gamma_r f_r(s) \sum_i T_{i,r}^{ri}(s, q_0), \quad (7.18)$$

зависит от внешних воздействий $p_r f_r(s)$ и функций чувствительности $T_{i,r}^{ri}(s, q_0)$ к параметру q_j всех каналов передачи от входов f_r , $r=1, \dots, l$, к выходам x_γ .

Чувствительность i -го канала передачи воздействия от вершины f_r к вершине x_γ к параметру q_j :

$$T_{i,r}^{ri}(s, q_0) = \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi_{i,r}^i(s, q_0) = \Phi_{i,r}^i(s, q_0) \left[\frac{T_i^{i,ri}(s, q_0)}{\Delta_{i,r}^i(s, q_0)} - \frac{T_i^{\Delta,ri}(s, q_0)}{\Delta_{i,r}^i(s, q_0)} - \frac{T_i^{\Delta}(s, q_0)}{\Delta(s, q_0)} \right] + \frac{1}{q_{j_0}} \Phi_{i,r}^i(s, q_0) [S_j^{p,ri}(s, q_0) + S_j^{\Delta,ri}(s, q_0) - S_j^{\Delta}(s, q_0)] \quad (7.19)$$

может быть определена по абсолютным $T_j^{p\gamma ri}$, $T_j^{\lambda\gamma ri}$, T_j^{λ} или логарифмическим $S_j^{p\gamma ri}$, $S_j^{\lambda\gamma ri}$, S_j^{λ} функциям чувствительности i -го пути P_{jr}^i , минора Δ_{jr}^i и определителя графа Δ к параметру q_{jr} .

7.2. Инвариантность переменных системы

Инвариантность переменных к воздействиям. При рассмотрении инвариантности переменных системы к воздействиям будем считать, что параметры системы не изменяются ($q_j = q_{j0}$), а начальные условия — нулевые.

Под абсолютной инвариантностью переменных системы x_r , $r=1, 2, \dots, n$, к воздействию f_r , $r=1, 2, \dots, l$, понимается тождественность нулю этих переменных

$$x_{jr}(s) \equiv 0 \quad (7.20)$$

или линейной формы от них

$$\sum_r a_r x_{jr}(s) \equiv 0. \quad (7.21)$$

т. е. понятие инвариантности используется в самом широком смысле. Анализ элементов матрицы чувствительности (7.10) позволяет на основе единого подхода рассмотреть различные формы инвариантности переменных к воздействиям и определить условия инвариантности в виде требований, которым должны удовлетворять функции чувствительности переменных x_r к параметрам β_r каналов передачи воздействий f_r .

В табл. 7.1 показаны различные формы и условия абсолютной инвариантности переменных и линейной формы от них к воздействиям.

При классической форме абсолютной инвариантности [49] условие (7.20) выполняется благодаря свойствам системы, обеспечивающим

$$T_{jr}^{\lambda\gamma}(s, q) \equiv 0, \quad (7.22)$$

т. е. тождественность нулю одного или в случае полиинвариантности [45] соответствующего числа элементов матрицы чувствительности (7.10), что при любых ограниченных воздействиях эквивалентно условию равенства нулю высоты полинома в правой части уравнения системы.

В ряде случаев могут иметь большое практическое значение и другие формы инвариантности, при которых сами переменные системы не инвариантны к каждому из воздействий, однако условия инвариантности переменных или их линейной

формы выполняются для некоторой совокупности заданных воздействий на систему.

При известных воздействиях инвариантность переменных (7.20) может быть достигнута путем взаимной компенсации

Таблица 7.1

Абсолютная инвариантность к воздействиям

Формы инвариантности	Инвариантность переменных $x_{\gamma r} = 0$		Инвариантность линейной формы переменных $\sum_{\gamma} a_{\gamma} x_{\gamma r} = 0$	
	При любых воздействиях за счет свойств системы	При известных воздействиях за счет взаимной компенсации влияния на переменные	При любом воздействии за счет свойств системы	При известных воздействиях за счет их совместного влияния на переменные
Условия инвариантности	$T_{\beta r}^{x\gamma} = 0$	$\sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$	$\sum_{\gamma} a_{\gamma} T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$	$\sum_{\gamma} a_{\gamma} \sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$
Переменной x_a к воздействию f_b	$\gamma = a, r = b$	—	—	—
Переменных x_{γ} к воздействию f_b	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b$	—	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b$	—
Переменной x_a к воздействию f_r	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots$	—	—
Переменных x_{γ} к воздействию f_r	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$
Селективная инвариантность	$\gamma = r = 1, 2, \dots$	—	—	$\gamma = r = 1, 2, \dots$
Условия автономности подсистем	$\gamma = r, \gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	—	—	$\gamma = r, T_{\beta r}^{x\gamma} = 0, \gamma, r = 1, 2, \dots$

влияния этих воздействий на рассматриваемые переменные системы при выполнении условия

$$\sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} (s) \beta_r = 0. \quad (7.23)$$

Инвариантность линейной формы от координат (7.21) может быть обеспечена свойствами системы, т. е. структурой, типами элементов и значениями параметров при одном произвольном воздействии $\hat{f}_r$, если выполняется условие

$$\sum_i a_i T_{ir}^{x_i}(s) \hat{z}_r = 0, \quad (7.24)$$

или при известных воздействиях - совместным влиянием на переменные системы при

$$\sum_i a_i \sum_r T_{ir}^{x_i}(s) \hat{z}_r = 0. \quad (7.25)$$

В многосвязной системе, включающей в себя ряд подсистем, выполнение условий инвариантности выходных переменных подсистем к воздействиям, приложенным к другим подсистемам:

$$T_{ir}^{x_i}(s) \hat{z}_r = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad r = \overline{1, M}, \quad (7.26)$$

обеспечивает автономность подсистем. Инвариантность линейной формы координат автономных подсистем имеет место при выполнении условий (7.25), (7.26).

Условия автономности подсистем многосвязной системы управления. Многосвязная система автоматического управления включает в себя ряд подсистем, управляемые переменные которых изменяются не только в зависимости от своих воздействий (управляющих и возмущающих), но и от воздействий, приложенных к другим подсистемам.

В результате выделения переменных, воздействий подсистем и последующего упорядочения строк матрицы (7.10), можно путем расщепления при помощи горизонтальных и вертикальных линий представить ее в виде квадратной блочной матрицы:

$$T_{\hat{z}}^x = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1M} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{M1} & T_{M2} & \dots & T_{MM} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

Блоки T_{mm} , $m=1, \dots, M$ главной диагонали матрицы (7.27) являются матрицами чувствительности переменных подсистем к своим воздействиям. Остальные блоки T_{mt} , $t=1, \dots, m-1, m+1, \dots, M$, m -й строки являются матрицами чувствительности подсистемы к чужим воздействиям, т. е. характеризуют связи между подсистемами. Обращение в нуль одной или нескольких матриц связей приводит к одной из форм автономности подсистем.

Полная автономность подсистем, т. е. инвариантность переменных всех подсистем к чужим воздействиям, имеет место при превращении блочной матрицы (7.27) в диагональную.

Взаимная автономность, т. е. инвариантность переменных подсистем к чужим воздействиям и переменных других подсистем к воздействиям рассматриваемой подсистемы, имеет место при тождественном обращении в нуль матриц связей в строке и столбце подсистемы.

Односторонняя автономность имеет место при тождественном обращении в нуль матриц связей в строке подсистем, кроме блока на главной диагонали. При односторонней автономности подсистемы на нее не влияют чужие воздействия, но воздействия подсистемы оказывают влияние на переменные других подсистем.

Абсолютная инвариантность при ненулевых начальных условиях. При выполнении условий абсолютной инвариантности переменной $x_i(t)$ к воздействию f_r^* , как видно из выражения (7.8), требование тождественности нулю переменной не может быть выполнено, если система имела ненулевые начальные условия. Формально можно ввести в рассмотрение условия абсолютной инвариантности переменной x_i к начальным условиям

$$\sum_{i=0}^{n-1} T_{x_i, 0i}^{y_i}(s) = 0. \quad (7.28)$$

Однако условие (7.28) нельзя выполнить, так как оно требует понижения порядка системы. В то же время может оказаться возможным способ компенсации движения $x_i(t)$ из-за ненулевого начального условия $x_{i,0}^{(i)}$ с помощью специально подобранного компенсирующего воздействия

$$f_r^*(s) = \frac{D_{0i}(s)}{K_r(s)} x_{i,0}^{(i)}, \quad (7.29)$$

полученного из общего условия компенсации воздействий

$$\sum_{i=1}^l T_{x_i}^{y_i}(s) \beta_r = \sum_{i=0}^{n-1} T_{x_i, 0i}^{y_i}(s) x_{i,0}^{(i)} = 0. \quad (7.30)$$

Можно также представить случай взаимной компенсации добавочных движений $x_i(t)$, вызванных изменением начальных условий и вариацией параметров. Так, например, при отсутствии внешних воздействий, одним ненулевым начальным условием $x_{i,0}^{(i)} \neq 0$ и вариации одного параметра q , взаимная компенсация возможна при выполнении условия

$$T_{x_{i0}i}^{x_{i0}}(s) x_{i0}^{(i)} - \frac{\partial}{\partial q_j} T_{x_{i0}i}^{x_{i0}}(s) \Delta q_j = 0.$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров системы. Анализ элементов матрицы чувствительности (7.11) позволяет при нулевых начальных условиях рассмотреть различные формы инвариантности координат x_{i0} к вариациям параметров q_j и определить соответствующие условия инвариантности.

Инвариантность к ва

Формы инвариантности		Инвариантность переменных:	
		вследствие нулевой чувстви- тельности к параметрам	при любом воздействии и извест- ных параметрах вследствие взаимной компенсации влияния изменений параметров на переменные системы
Условия инвариант- ности		$\sum_i T_j^{ri}(s, q_0) = 0$	$\sum_j \Delta q_j \sum_i T_j^{ri}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{ri}(s, q_0) = 0$
Перемен- ной x_a к пара- метру q_c	одно воз- действие f_b	$\gamma = a, r = b, j = c,$ $i = 1, 2, \dots$	—
	несколько воздейств.	$\gamma = a, j = c,$ $r = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	—
Перемен- ной x_a к пара- метрам q_j	одно воз- действие f_b	$\gamma = a, r = b, j = 1, 2, \dots,$ $i = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = b, j = 1, 2, \dots,$ $i = 1, 2, \dots$
	несколько воздейств.	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
Перемен- ных x_{γ} к пара- метру q_c	одно воз- действие f_b	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b,$ $j = c, i = 1, 2, \dots$	—
	несколько воздейств.	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = c, i = 1, 2, \dots$	—
Перемен- ных x_{γ} к пара- метрам q_j	одно воз- действие f_b	$r = b, \gamma = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$r = b, \gamma = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
	несколько воздейств.	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$

Абсолютная инвариантность переменных к вариациям параметров понимается в широком смысле, когда в окрестности точки $q_j = q_{j0}$ при малых Δq_j выполняется условие

$$x_{\gamma q}(s) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_j T_{qj}^{\gamma i}(s, q_0) \Delta q_j = 0 \quad (7.31)$$

для этих координат или условие

Таблица 7.2

риациям параметров

$x_{\gamma q}(s) = 0, \quad \sum_{j=1}^k T_{qj}^{\gamma i}(s, q_0) \Delta q_j = 0$	
при изменениях параметров и известных воздействиях вследствие взаимной компенсации влияния воздействий на переменные системы	при известных воздействиях и параметрах вследствие взаимной компенсации их влияния на переменные
$\sum_r g_r f_r \sum_i T_j^{\gamma i}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{\gamma i}(s, q_0) \neq 0$	$\sum_j \Delta q_j \sum_r g_r f_r \sum_i T_j^{\gamma i}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{\gamma i}(s, q_0) \neq 0$
—	—
$r = 1, 2, \dots, i = a, j = c, \dots$	—
—	—
$j = a, r = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$j = a, r = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
—	—
$i = 1, 2, \dots, r = c, j = 1, 2, \dots$	—
—	—
$i = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$	$i = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$

$$\sum_i b_i x_{iq}(s) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_i b_i \sum_j T_{qj}^{x_i}(s, q_0) \Delta q_j = 0 \quad (7.32)$$

для линейной формы координат.

В табл. 7.2 показаны различные формы инвариантности переменных к вариациям параметров.

Инвариантность переменных к вариациям параметров при отсутствии априорной информации об изменениях воздействий и параметров имеет место, если выполняется условие

$$\sum_i T_j^{y_i}(s, q_0) = 0, \quad (7.33)$$

т. е. в случае нулевой чувствительности системы к параметрам.

Большое практическое значение имеют формы инвариантности, которые не требуют нулевой чувствительности к параметрам.

При любом воздействии на систему инвариантность переменных к известным вариациям параметров может быть достигнута путем взаимной компенсации их влияния на переменные при

$$\sum_j \Delta q_j \sum_i T_j^{y_i}(s, q_0) = 0, \quad \sum_i T_j^{y_i}(s, q_0) \neq 0. \quad (7.34)$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров может быть обеспечена при известных воздействиях путем взаимной компенсации влияния воздействия на переменные системы, если выполняется условие

$$\sum_r \beta_r f_r(s) \sum_i T_j^{y_i}(s, q_0) = 0, \quad \sum_i T_j^{y_i}(s, q_0) \neq 0. \quad (7.35)$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров при известных воздействиях достигается путем взаимной компенсации их влияния на переменные системы при

$$\sum_j \Delta q_j \sum_r \beta_r f_r(s) \sum_i T_{ij}^{y_i}(s, q_0) = 0, \quad \sum_i T_{ij}^{y_i}(s, q_0) \neq 0, \quad (7.36)$$

$$\sum_j \Delta q_j \sum_i T_{ij}^{y_i}(s, q_0) \neq 0, \quad \sum_r \beta_r f_r(s) \sum_i T_{ij}^{y_i}(s, q_0) = 0.$$

В качестве иллюстрации на рис. 53 изображен граф, позволяющий в первом приближении определить приращения переменных

$$\Delta x_i(s) = \sum_{j=1}^k \Delta q_j \sum_{r=1}^l \beta_r f_r(s) \sum_{i=1}^{l_i} T_{ij}^{y_i}(s, q_0),$$

при $\gamma=1, 2$; $k=2$; $l=2$; $l_{\gamma r}=1$.

Двукратная инвариантность. Требования абсолютной инвариантности переменных x_r при одновременном изменении внешнего воздействия к вариации параметров удовлетворяются при самых общих предположениях, если выполняется условие

$$\sum_r T_{r,r}^{xy}(s, q_0) \dot{q}_r + \sum_j \Delta q_j \sum_r T_{r,j}^{xy}(s, q_0) = 0 \quad (7.37)$$

или условия

$$\sum_r T_{r,r}^{xy}(s, q_0) \dot{q}_r = 0, \quad \sum_j \Delta q_j \sum_r T_{r,j}^{xy}(s, q_0) = 0. \quad (7.38)$$

Условие (7.38) требует инвариантности переменных в отдельности к воздействиям и к вариациям параметров (см. табл. 7.1 и 7.2), а условие (7.37) отражает возможность взаимной компенсации приращений переменной, вызванных внешними воздействиями и вариациями параметров, а следовательно, требует взаимной зависимости воздействия и вариаций параметров.

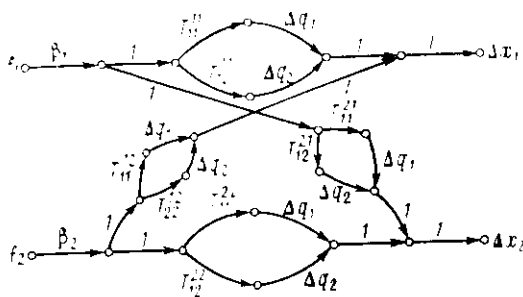


Рис. 53.

В простом случае одного внешнего воздействия f_r и одного изменяющегося независимо от f_r параметра q , абсолютная инвариантность переменной $x_r(t)$ имеет место при

$$T_{r,r}^{xy}(s) = 0, \quad T_{q,j}^{xy}(s) = 0. \quad (7.39)$$

Учитывая выражение (7.7), условия (7.39) при $f_r \neq 0$ можно представить в виде

$$T_{r,r}^{xy}(s) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_j} T_{r,r}^{xy}(s) = 0. \quad (7.40)$$

Условия (7.40) обеспечивают двукратную инвариантность в системе, т. е. инвариантность переменной к воздействию и инвариантность условий инвариантности к малому изменению параметра.

В общем случае при нескольких воздействиях и вариациях нескольких параметров (7.38) могут быть получены более сложные формы двукратной инвариантности.

7.3. Физическая реализуемость условий абсолютной инвариантности

Любая динамическая система должна удовлетворять условиям устойчивости и грубости. Поэтому, предпринимая те или иные меры по обеспечению абсолютной инвариантности переменных системы к сигнальным или параметрическим (в общем случае — операторным) воздействиям среды, прежде всего требуется проверить, не нарушаются ли при этом необходимые условия устойчивости и грубости.

Инвариантная система будет устойчива, если ее передаточные функции не содержат полюсов, лежащих в правой полуплоскости корней. Анализ передаточных функций графа (3.4) между всеми вершинами x_r и f_r , как это показано в п. 3.2, позволяет сделать вывод, что инвариантная система будет устойчивой, если определитель графа $\Delta(s, q)$ не содержит нулей, лежащих в правой полуплоскости, и, кроме того, если передаточные функции всех дуг графа, не входящих в контуры, не имеют полюсов, лежащих там же.

При выполнении условий абсолютной инвариантности приходится сталкиваться с необходимостью решения проблемы грубости системы. Негрубость очень часто обуславливается вырождением систем, т. е. понижением порядка характеристического полинома, происходящим при стремлении выполнить условия абсолютной инвариантности. Ясно, что негрубая система не может быть физически реализована.

Ниже рассмотрены некоторые условия физической реализуемости абсолютной инвариантности в системах управления в зависимости от топологических свойств этих систем. При этом выделим общие условия, которым должны удовлетворять системы во всех случаях, а также некоторые дополнительные условия, которые свойственны тем или иным формам инвариантности.

Абсолютная инвариантность переменных x_r к любым воздействиям f_r достигается при тождественности нулю чувствительности переменной к параметру канала воздействия β_r :

$$T_{\beta_r}^{x_r}(s) = \Phi_{r_r}(s) f_r(s) \equiv 0. \quad (7.41)$$

Тождество (7.41) выполняется, если 1) $f_r \equiv 0$, $\Phi_{r_r} \neq 0$; 2) $f_r \neq 0$, $\Phi_{r_r} \equiv 0$.

Первый случай указывает на возможность реализации инвариантности в системе путем устранения источников внешнего воздействия, а второй — представляющий наибольший интерес с точки зрения синтеза автоматических систем управления.

инвариантных к воздействиям произвольного вида, требует такого выбора топологии, структур операторов и параметров системы, чтобы соответствующие передаточные функции системы были тождественны нулю.

При $f_r(s) \equiv 0$ абсолютная инвариантность может быть реализована за счет свойств системы, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{i_{\gamma r}} \Phi_{ir}^i(s, q) = \frac{1}{\Delta(s, q)} \sum_{i=1}^{i_{\gamma r}} P_{ir}^i(s, q) \Delta_{ir}^i(s, q) = 0. \quad (7.42)$$

Если в графе системы управления имеется единственный путь от вершины r к вершине γ , то условие (7.42) абсолютной инвариантности переменной x_γ , имеющей смысл ошибки, к любому воздействию f_r запишется так:

$$\frac{1}{\Delta(s, q)} P_{\gamma r}(s, q) \Delta_{\gamma r}(s, q) = 0. \quad (7.43)$$

Тождество (7.43) достигается при условии

$$P_{\gamma r}(s, q) \Delta_{\gamma r}(s, q) = 0, \quad \Delta(s, q) \neq 0 \quad (7.44)$$

или
$$\Delta(s, q) \rightarrow \infty, \quad P_{\gamma r}(s, q) \Delta_{\gamma r}(s, q) \rightarrow \infty. \quad (7.45)$$

Условие тождественности нулю $P_{\gamma r} \Delta_{\gamma r}$ выполняется, во-первых, в тривиальном случае отсутствия пути, что выявляется на топологическом ранге по алгоритмам поиска путей (см. гл.4), или при нулевой передаче пути $P_{\gamma r}(s, q)$, что устанавливается на параметрическом уровне задания модели.

Если нулевая передача пути обеспечивается вследствие ослабления передачи дуги, принадлежащей контурной части G_0 , то меняются определитель графа $\Delta(s, q)$ и характеристические полиномы. При этом определитель графа становится равным определителю подграфа, полученного удалением дуги с исчезающей передачей, и вопросы устойчивости и грубости должны решаться с учетом конкретных структур операторов и значений параметров q .

Во-вторых, условие (7.44) выполняется при обращении в нуль минора пути

$$\Delta_{\gamma r}(s, q) = 0. \quad (7.46)$$

Как это следует из сказанного выше (§ 3.6), обращение в нуль любого минора приводит к качественному изменению свойств контурной части — вырождению определителя, т. е. к уменьшению числа его членов, что вызывает во всех практически важных случаях понижение порядка характеристического полинома, и система становится негрубой. Поскольку при этом не выполняется одно из основных требований к динамическим системам, такая система является неработоспособной.

в результате чего вынужденные составляющие переменной выхода y_γ , имеющей смысл ошибки преобразования, тождественны нулю при воздействиях f_γ , уровень которых равен бесконечности ($\gamma = 1$)-го порядка. При этом по аналогии с астатизмом - инвариантностью на нулевой частоте - можно говорить об абсолютной инвариантности γ -го порядка.

Вопросы влияния дуг с бесконечным усилением на передачу графа решаются по моделям структурно-топологического уровня определенности (см. § 3.7). В гл. 4 приводится алгоритм определения кратности нулей и полюсов передаточных функций, который в частном случае может быть использован для определения кратности γ передаточной функции $\Phi_{\gamma\gamma}(s)$.

При реализации абсолютной инвариантности за счет бесконечно большого коэффициента усиления возникает проблема устойчивости. В этом находит свое отражение одно из принципиальных противоречий систем с обратной связью - противоречие между качеством вынужденных и собственных движений.

Ряд теоретических задач, связанных с разработкой одно- и многосвязных систем управления, устойчивых при бесконечно большом коэффициенте усиления, решается в работе [52]. Однако при практическом использовании этих результатов следует помнить, что модели систем управления адекватны реальным устройствам только на определенном конечном интервале частот. Если коэффициент усиления в каком-либо контуре системы неограниченно возрастает, то существенными в смысле устойчивости становятся характеристики системы при таких высоких частотах, где модель не соответствует реальности и не может служить предметом исследований в связи с целями, поставленными перед системой управления. Повышение до бесконечности коэффициента усиления системы с целью достижения абсолютной инвариантности, таким образом, должно сопровождаться непрерывным уточнением модели системы в области все более и более высоких частот с соответствующим усложнением операторов дуг коррекции, что реально не может быть сделано. Следовательно, абсолютная инвариантность за счет бесконечно большого коэффициента усиления практически не реализуема.

Обеспечение абсолютной инвариантности в одноканальных системах из-за введения контура K^{-1} с единичным усилением, не сопрягающегося с путем, приводит к неточным решениям вследствие вырождения определителя - сокращения единицы. Можно попытаться скомпенсировать вырождение единицы определителя дополнительным введением еще одного контура K^{-1} с единичным отрицательным усилением, касающегося пути и всех остальных контуров. Однако по существу это случай системы с двумя контурами, усиления которых стремятся к единице, а знаки противоположны (см. § 3.6). Неточная реализация условий $K^{-1}=1$, $K^{-1}=-1$ приводит к изменению знака

коэффициента при старшей степени характеристического полинома, т. е. к потере устойчивости.

Рассмотрим граф системы, изображенный на рис. 55а. Пусть

требуется обеспечить абсолютную инвариантность переменной вершины 5 к возмущению f_1 . От воздействия f_1 к вершине 5 имеется единственный путь P_{54} , минор которого равен единице. Если ввести в граф дугу (2, 3), а тем самым контур $K_1 = \{(2, 3), (3, 2)\}$, и обеспечить $K_1 \rightarrow 1$, то минор пути P_{54} станет равным нулю: $\Delta_{54} = 1 - K_1 = 0$. Однако при этом абсолютно инвариантная система станет негрубой (рис. 55, б), так как происходит вырождение определителя из-за потери единицы, сокращаемой с K_1 :

$$\Delta_{np} = \lim_{K_1 \rightarrow 1} (1 - K_1 - K_3).$$

Введем в систему еще один контур K_2 с единичным отрицательным усилением: $K_2 \rightarrow -1$, который касается и пути P_{54} , и контура K_1 (рис. 55 в, г, д). В составе определителя за счет K_2 появится $+1$, а других дополнительных слагаемых не будет, так как K_2 касается всех контуров:

$$\Delta_{np} = \lim_{\substack{K_1 \rightarrow +1 \\ K_2 \rightarrow -1}} (1 - K_1 - K_2 - K_3) = 1 - K_3.$$

Минор пути $\Delta_{54} = 0$ также не изменится, поскольку контур K_2 выбран касающимся пути. Следовательно, полученная система абсолютно инвариантна, однако она не будет работоспособной из-за негрубости.

Заметим, что полученная система представляет собой эквивалент системы с «косвенным измерением возмущений» [42]. Действительно, в системе с косвенным измерением возмущений (рис. 55е) условия равенства переменной вершины 6 возмущению f_1 и компенсации реакций на f_1 и x_6 в вершине 3 обуславливают $K_1 \rightarrow +1$ и $K_2 \rightarrow -1$. Отсюда следует иная интерпретация

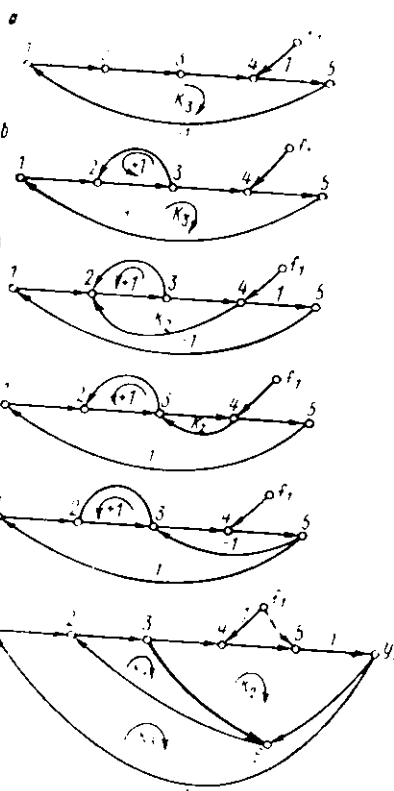


Рис. 55.

свойств системы с косвенным измерением возмущений, опирающаяся на топологическую формулу для передачи и свойства контуров и путей графа. Одновременно получены несколько эквивалентных по свойствам топологий систем.

Важно также отметить, что указанная схема может обеспечить и полиинвариантность, т. е. инвариантность переменной вершины к нескольким воздействиям, приложенным к системе таким образом, что пути от их точек приложения до вершины 5 не касаются контура $K_1 \rightarrow +1$ и касаются контура $K_2 \rightarrow -1$ (рис. 55e).

Выше рассмотрены различные возможности реализаций условий абсолютной инвариантности в одноканальном случае и установлено, что во всех вариантах абсолютная инвариантность переализуема из-за негрубости или потери устойчивости. Следует иметь в виду, что хотя при единственном канале абсолютная инвариантность недостижима, рассмотренные средства (ослабление воздействия, передачи пути, уменьшение минора пути и увеличение определителя) широко применяются для обеспечения малых ошибок, т. е. инвариантности до ϵ [50, 65, 88].

Дополнительные каналы передачи воздействий в системах управления могут быть получены в результате изменения связей системы со средой путем измерения воздействий, к которым требуется обеспечить инвариантность, что имеет место в комбинированных системах, а также за счет изменения топологии самой системы путем введения необходимых внутренних связей, что возможно, например, в многосвязных системах управления.

При $\Lambda_{yr}^t (s, q) \neq 0$ в системах, имеющих конечное значение коэффициентов передач дуг, выполнение условия (7.42) возможно при $t_{yr} \geq 2$, т. е. при наличии не менее двух каналов или путей передачи для каждого воздействия (принцип многоканальности Б. Н. Петрова). Если для каждого из воздействий выделить один компенсирующий канал, то передаточная функция прямого компенсирующего пути, образующего этот канал, должна быть физически осуществима.

Для получения требуемой передаточной функции компенсирующего канала для компенсации основного (неизменяемого), во-первых, могут целенаправленно изменяться структура и параметры передачи путей за счет изменения передач дуг, не входящих в контурную часть, т. е. изменения передач связей системы со средой. В этом случае определитель графа Δ и его миноры не претерпевают изменений. Устойчивость инвариантной системы определяется устойчивостью системы до формирования передач компенсации и устойчивостью ее дуг.

Во-вторых, передачи компенсирующих каналов могут быть изменены путем изменения операторов и параметров дуг, входящих в контуры, что изменяет определитель графа. Этот спо-

соб реализации абсолютной инвариантности затрагивает устойчивость системы.

Инвариантность координат к известным воздействиям. Эта форма инвариантности координат может быть реализована путем взаимной компенсации влияния воздействий при

$$\sum_{r=1}^l g_r f_r(s) \sum_{i=1}^{t_{ir}} P_{ir}^i(s, q) \Delta_{ir}^i(s, q) = 0, \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{\Delta(s, q)} \sum_{i=1}^{t_{lr}} P_{lr}^i(s, q) \Delta_{lr}^i(s, q) = 0, \quad l \geq 2, \quad t_{lr} \geq 1,$$

т. е. требует наличия полной информации о воздействиях и системах.

Параметрическая инвариантность при нулевой чувствительности. Инвариантность переменных к неизвестным малым вариациям параметров при произвольных воздействиях реализуется в системах с нулевой чувствительностью, если выполняется условие

$$-\frac{1}{q_j \Delta(s, q_0)} \sum_i P_{ir}^i(s, q_0) \Delta_{ir}^i(s, q_0) [S_j^{P_{ir}^i}(s, q_0) + S_j^{\Delta_{ir}^i}(s, q_0) - S_j^{\Delta}(s, q_0)] = 0. \quad (7.50)$$

Условие (7.50) может выполняться в одно- и многоканальных системах, если параметр q_j не входит в соответствующие пути, миноры: определитель графа, а также в тех случаях, когда для каждого из каналов выполняется условие

$$[S_j^{P_{ir}^i}(s, q_0) + S_j^{\Delta_{ir}^i}(s, q_0) - S_j^{\Delta}(s, q_0)] = 0. \quad (7.51)$$

В многоканальных системах возможна нулевая чувствительность к параметру вследствие взаимной компенсации влияния отдельных каналов (7.50).

В системах с бесконечным коэффициентом передачи k_∞ соответствующих дуг графа при $\Delta(s, q_0) \rightarrow \infty$ имеет место нулевая чувствительность к изменениям параметров.

Параметрическая инвариантность из-за взаимной компенсации. В табл. 7.2 показаны различные формы параметрической инвариантности вследствие взаимной компенсации влияния изменений параметров, воздействий или параметров и воздействий одновременно при ненулевой чувствительности к параметрам.

Наибольший интерес представляют формы инвариантности за счет взаимной компенсации известных изменений нескольких параметров системы при выполнении условия (7.34), которые реализуются в целом ряде самонастраивающихся систем.

7.4. Цели систем и требования к процессам управления

Каждая система управления выполняет самостоятельные функции и обеспечивает достижение заданных целей управления в условиях ее причинно-следственного взаимодействия с внешней средой и возможного изменения ряда параметров в процессе эксплуатации.

На каждый управляемый процесс возлагаются самостоятельные функции, связанные, например, с генерированием и преобразованием энергии, переносом потоков жидкости и газов, формообразованием твердых тел, передачей и преобразованием информации и т. д.

Цели управления определяют необходимое поведение системы управления, т. е. необходимый закон изменения заданных переменных или некоторых характеристик системы управления в условиях ее причинно-следственного взаимодействия с внешней средой.

В ряде случаев на первом этапе проектирования можно определить идеальные цели управления, например воспроизведение с нулевой ошибкой управляющих воздействий или некоторых функций от них, нулевую чувствительность к возмущающим воздействиям и помехам, автономность отдельных переменных системы управления к некоторым возмущениям, нулевую чувствительность к изменениям параметров объекта управления, выпуск всей продукции высшего качества и т. д.

Как правило, идеальные цели управления не могут быть достигнуты в системах управления из-за физической нереализуемости таких систем, большой мощности управляющих устройств, высокой их стоимости, большого веса, габаритов и т. д. Часто идеальные цели управления, например идеальные воспроизведения управляющего воздействия и нулевая чувствительность системы к помехам на этом же входе оказываются противоречивыми и поэтому принципиально не могут быть одновременно реализованы в данной системе управления.

Модели целей управления M_s^* целесообразно представить в виде идеальной (эталонной) матрицы чувствительности переменных системы к параметрам каналов передачи воздействий: $M_s^* \rightarrow T_{\beta}^{y*}$.

Таким образом, элементами T_{β}^{y*} , $\gamma = 1, \dots, p$; $r = 1, \dots, l$, матрицы T_{β}^{y*} являются идеальные реакции системы на отдельные воздействия. В области изображений элементы матрицы $T_{\beta}^{y*}(g)$, где $g = s$ в случае преобразования по Лапласу функций непрерывного времени, $g = z$ в случае z -преобразования функций дискретного времени, представляют собой произведения изображений воздействий на эталонные операторы преобразований. Например, если ставится задача воспроизведения

воздействия f_r выходом y_r , соответствующий элемент идеальной матрицы чувствительности будет тождествен изображению воздействия: $T_{yr}^{yi}(g) \equiv f_r(g)$; если требуется подавление воздействия f_r на выходе y_r , то $T_{yr}^{yi*}(g) \equiv 0$. В том случае, когда переменная y_r должна представлять собой заданное не тривиальное преобразование Φ_{yr}^* входа f_r , элемент идеальной матрицы чувствительности имеет вид

$$T_{yr}^{yi*}(g) \equiv \Phi_{yr}^*(g) f_r(g),$$

где Φ_{yr}^* может обозначать операцию интегрирования, дифференцирования и т. п. Если на некоторую функцию чувствительности системы T_{yr}^{yi} , т. е. реакцию выхода y_r на воздействие f_r , не накладывается никаких ограничений, можно принять $T_{yr}^{yi*} \equiv T_{yr}^{yi}$.

Таким образом, матрица идеальных функций чувствительности T_{yr}^{yi*} является формализацией целей управления и характеризует идеальную расширенную систему. Как указывалось, при рассмотрении модели целей управления нас не будут интересовать проблемы физической реализуемости системы.

Динамические свойства автоматических систем управления целесообразно для всех выходных переменных оценивать по процессам, имеющим смысл ошибок, а не по виду реакции системы на то или иное воздействие [65]. В качестве иллюстрации на рис. 56 показаны переходные процессы $y_r(t)$ и ошибки в

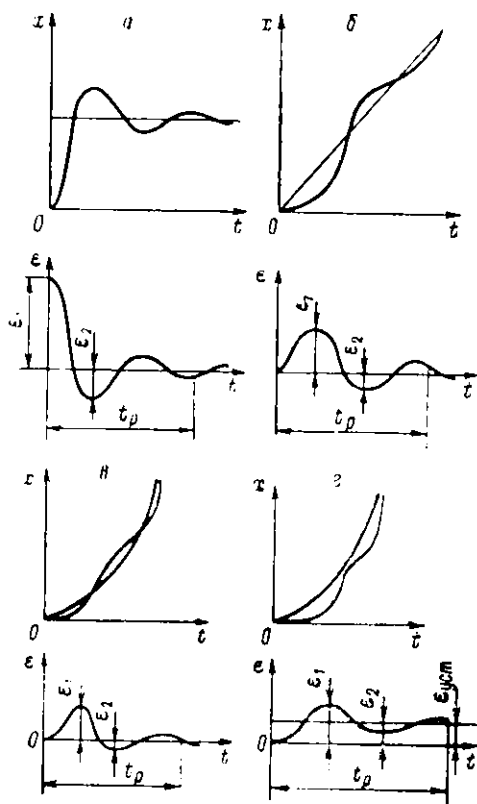


Рис. 56.

системе управления при обработке ступенчатого управляющего воздействия (рис. 56а), обработке управляющего воздействия

с постоянными скоростью $f_r(t) = f_{r1}t$ (рис. 56б) и ускорением $f_r(t) = 0,5 f_{r2}t^2$ (рис. 56в) без установившейся ошибки и при наличии ее.

Физические переменные реальной автоматической системы управления, соответствующие ошибке e_{yr} , могут быть выделены только в простейших случаях, например в одноконтурных системах с единичной отрицательной обратной связью или в других системах, приводящихся к ним. Даже в простейшей одноконтурной системе с неединичной обратной связью в явном виде отсутствует переменная, характеризующая переходную ошибку $e_{yr}(t)$.

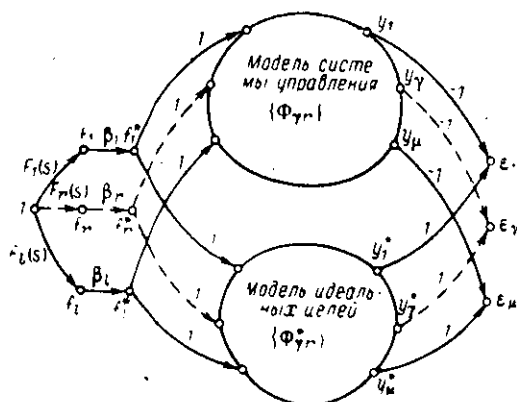


Рис. 57.

С учетом сказанного при рассмотрении причинно-следственных моделей систем управления вместе с идеальными целями управления целесообразно ввести понятие матрицы чувствительности ошибок, получаемой в результате сравнения матрицы функций чувствительности переменных расширенной системы управления к параметрам каналов передачи воздействий $T_{\beta r}^{yT}$ и идеальной матрицы чувствительности (рис. 57):

$$T_{\beta r}^{*y} = T_{\beta r}^{yT*} - T_{\beta r}^{yT}, \quad \gamma = 1, \dots, \mu; \quad r = 1, \dots, l. \quad (7.52)$$

Суждение о качестве систем управления по переменным ошибкам и на основе их функций чувствительности $T_{\beta r}^{*y}$ носит общий характер и обеспечивает однозначность оценок систем при различных воздействиях.

В том случае, когда имеется ненулевая установившаяся составляющая ошибки, переходная составляющая ошибки равна разности суммарной ошибки ϵ_{yr} и установившейся ошибки $\epsilon_{yr \text{ уст}}$: $\epsilon_{yr \text{ пер}}(t) = \epsilon_{yr}(t) - \epsilon_{yr \text{ уст}}(t)$. Выделение установившихся $\epsilon_{yr \text{ уст}}$ или в частном случае статических $\epsilon_{yr}(\infty)$ ошибок в матрицах функций чувствительности

$$T_{\beta r}^{\text{т}} = T_{\beta r}^{\text{т}} \text{уст} + T_{\beta r}^{\text{т}} \text{пер} \quad (7.53)$$

позволяет отдельно рассматривать критерии качества систем в установившихся и переходных режимах.

Для количественной оценки свойств U_{φ}^u систем управления ($\varphi=S$), систем со связями с внешней средой ($\varphi=\mathcal{F}SF$) и расширенных систем ($\varphi=R$) используются оценки частных моделей и характеристик $M_{\varphi U}^u$ — разнообразные показатели и критерии качества $I_i[M_{\varphi U}^u]$ и обобщенные критерии (функционалы) J_j , построенные на частных критериях I_i . На критерии качества, вычисленные на основе частных моделей и характеристик различных рангов неопределенности $M_{\varphi U}^u(r)$, $r=1, 2, 3$, распространяется понятие ранга.

По частным моделям M_{SU}^u оценивают свойства U_S^u самих систем: по множеству контуров $\mathcal{K}$ и множествам $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$, индексному выражению для определителя определяют число контуров, особенности их соприкосновения и связности; по частным моделям второго ранга типа символьных выражений для определителей, характеристических полиномов устанавливается структурная устойчивость, определяется порядок системы; по таким полностью определенным характеристикам, как определитель $\Delta(s)$, характеристический полином $D(s)$, матрица коэффициентов A , частотная характеристика эквивалентной одноконтурной разомкнутой системы $W_a(j\omega) = \Delta(j\omega) - 1$ оцениваются степень и запасы устойчивости. Функции чувствительности T_K^A и T_W^A определителя Δ к операторам контуров и дуг позволяют оценить влияние особенностей топологии системы и вариаций операторов на свойства контурных частей. По оценкам частных моделей M_{SU}^u могут быть установлены факты негрубости системы.

Частные модели $M_{\mathcal{F}SFU}^u(1)$ позволяют определить число каналов передачи воздействий и реализуемость абсолютной инвариантности, найти части системы, которые полностью неуправляемы и ненаблюдаемы по различным входам и выходам, установить позиции отдельных дуг по отношению к путям и т. д. Показатели качества, вычисленные по частным моделям $M_{\mathcal{F}SFU}^u(2)$ типа символьных выражений для передаточных функций систем $\Phi_w(s)$, характеризуют физическую осуществимость условий абсолютной инвариантности, астатизм каналов. По частным моделям $M_{\mathcal{F}SFU}^u(3)$ вычисляются точность, колебательность, резонансная частота, полоса пропускания, прямые показатели качества и др.

Критерии качества, вычисленные на основе частных моделей $M_{RU}^u(3)$, например функций чувствительности выходов к

параметрам каналов воздействий, позволяют оценить основные и дополнительные процессы.

В практических постановках задач важной составляющей понятия качества систем является сложность систем управления. Можно говорить об оценках сложности топологии (например, число дуг коррекции), структуры операторов (например, порядок дифференциального уравнения). Некоторые дополнительные оценки сложности вводятся и на параметрическом ранге моделей (например, пассивность коррекции, полоса частот и т. д.).

В каждой конкретной задаче анализа или синтеза систем управления исходя из постановки задачи, требований к отдельным показателям, вычислительных особенностей, а также учитывая, что ряд критериев характеризуют приблизительно одни и те же стороны качества процессов, выбирается свой векторный критерий качества I , компонентами которого являются те или иные частные критерии I_i , подробная схема получения которых обсуждается ниже. Задание векторного критерия I с указанием экстремизации, например минимизации всех частных критериев I_i , зависящих от параметров, структур операторов и топологий систем, представляет значительную определенность требований к качеству процессов управления, т. е. к степени достижения идеальных целей системы и качеству систем в целом.

В случае единственного критерия I или интегрального критерия J лучшей считается та из сравниваемых между собой систем, у которой значения I или J , например, меньше.

Введение векторного критерия качества I для оценки ошибок систем вносит определенную специфику при сопоставлении систем с одинаковыми целями между собой. Существенным отличием векторного случая является то, что две системы могут быть не сравнимыми по векторному критерию, когда одна из них лучше по одним, частным критериям, а другая — по другим. Множество всех систем, несравнимых по векторному критерию, образует множество (область) Парето.

Требования к качеству процессов и инвариантность до ε . Полная определенность требований (модели требований M_T) достигается после установления допустимых значений принятых частных критериев I_i . Если допустимые значения частных критериев обозначить I_{iT} , то требования к качеству процессов выражаются в виде системы неравенств:

$$M_T : \begin{cases} I_1 \leq I_{1T} \\ \vdots \\ I_p \leq I_{pT} \end{cases}, \quad (7.54)$$

Таким образом, модель требований M_T к системам управления оказывается описанной в терминах критериев качества,

ограничивающих степень отклонения процессов от идеальных целей управления. Как говорилось выше (см. § 1.6), особенностью такого описания систем является то, что при этом сохраняется большая неопределенность относительно топологии, структуры операторов и параметров тех систем, которые принадлежат M_T .

Модель требований к системам управления M_T может вырабатываться постепенно и уточняться в процессе синтеза и проектирования.

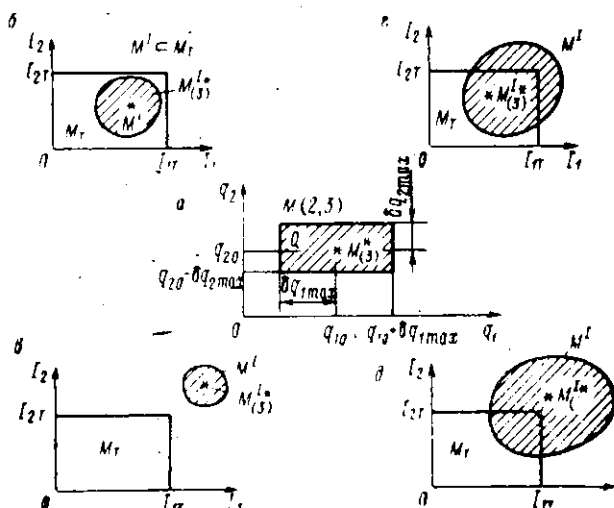


Рис. 58.

Требования к системам управления, выраженные в виде (7.54), в пространстве частных критериев I_i представляются многомерным параллелепипедом с вершиной в начале координат. На рис. 58 иллюстрируется частный случай требований, формализованных в виде ограничений на компоненты I_1 и I_2 векторного критерия размерности $p=2$. Все системы, частные критерии которых I_1 и I_2 представляют вектор с концом в прямоугольнике $0 < I_1 \leq I_{1T}$, $0 < I_2 \leq I_{2T}$, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к их процессам управления.

Модели $M_\Phi(3)$ на пространстве критериев отображаются в виде точки. Как это следует из гл. 1, модели $M(1)$, $M(2)$, а также модели смешанных рангов неопределенности представляют собой множества более определенных, а в конечном счете — множества $\{M(3)\}$ — полностью определенных моделей. Эти модели на пространство критериев отображаются в виде не обязательно связанных областей. Для примера на рис. 58а приведена геометрическая иллюстрация модели системы $M(2, 3)$, один из операторов которой содержит параметры q_1 и q_2 , значения которых принадлежат множеству $Q = \{(q_1, q_2) :$

$\{|q_1 - q_{10}| \leq \delta q_{1\max}, |q_2 - q_{20}| \leq \delta q_{2\max}\}$. Различные случаи отображения $M(2, 3) \rightarrow M^1$ модели системы смешанного ранга на плоскость критериев I_1, I_2 и проверки условий (1.23) включения множеств систем в множество M_T приведены на рис. 58 б, в, г, д. Предполагается, что параметры q_1 и q_2 варьируются в области Q , что является причиной дополнительных движений системы в окрестности основных движений при номинальных значениях q_{10}, q_{20} параметров. В этом случае вариации частных критериев оценивают дополнительные движения, а размеры области M^1 на плоскости критериев — влияние вариаций параметров на качество основных процессов.

Отображение моделей $M_S(3), M_{\mathcal{F}SF}(3)$ или $M_R(3)$ на пространство частных критериев $(I_1, \dots, I_p)$ является однозначным, т. е. каждой полностью определенной системе соответствует единственное значение конкретного частного критерия $I_i[M(3)], i=1, \dots, p$. Однако обратное не имеет места, т. е. точке I пространства критериев могут соответствовать сколько угодно систем, отличающихся топологией, структурой операторов и значениями параметров. Соответственно, области M_T в пространстве критериев отвечает объединение множеств систем, являющихся отображениями точек M_T .

Выбор единственного варианта из этого множества, иначе управление неоднозначности или неопределенности, составляет предмет синтеза систем — определения значений параметров, структур операторов или в общем случае формирования топологий. Именно в силу сказанного задачи синтеза (обратные задачи), вообще говоря, более трудны для решения, чем задачи анализа. Решение задач синтеза осложняется из-за отсутствия общих алгоритмов отображения точек пространства критериев на области значений параметров, структур операторов и топологий систем.

Необходимость введения оценок, показателей качества или частных критериев, численно характеризующих процессы управления и системы в целом, объясняется тем, что к передачам Φ_{yr} систем не всегда предъявляется требование совпадения с эталоном Φ_{yr}^* — требование абсолютной инвариантности. Во многих практически важных случаях добиваются инвариантности до ϵ , причем в расчетной практике под ϵ как раз и понимаются допустимые значения частных критериев качества процессов I_{it} , так как именно они характеризуют отклонение системы от абсолютной инвариантности. Из анализа процедур формирования частных критериев следует, что при $\epsilon_{yr}(t) \equiv 0$ все они равны нулю. Если же $I_i \neq 0, i=1, \dots, p$, но удовлетворяются условия (7.54), можно говорить, что в системе достигнута инвариантность до ϵ , где вектор допустимых отклонений частных критериев I_T количественно определяет понятие «до ϵ ».

7.5. Формирование критериев качества и некоторые алгоритмы их вычисления

При решении задач анализа и синтеза сложных систем управления вопросы вычисления формализованных оценок качества систем остаются одними из центральных, поскольку снижение времени вычисления отдельных частных критериев за счет использования ЭВМ компенсируется увеличением числа частных критериев. Ниже приводится формализованная схема вычисления критериев качества I_i по частным моделям третьего ранга неопределенности $M_{\Phi U}$ (3).

7.5.1. Наличие матриц функций чувствительности ошибок к параметрам каналов передачи воздействий (7.53) при различных видах аргумента g позволяет получить (практически с избытком) полный набор показателей качества процессов $y_{vr}(g)$, каждый из которых представляет функционал (в том числе норму в соответствующем функциональном пространстве) от специальным образом сформированной скалярной функции $P_\rho(g)$ [18].

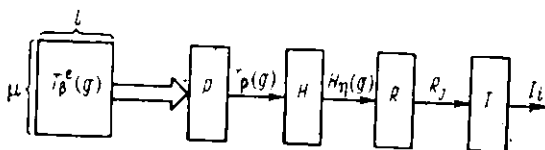


Рис. 59.

Рассмотрим схему (рис. 59) формирования частных показателей качества систем управления по матрицам функций чувствительности ошибок $T_p^e(g)$ к параметрам каналов передачи воздействий, где аргумент g отражает вид представления непрерывной модели во временной ($g \equiv t$), частотной ($g \equiv j\omega$) или комплексной ($g \equiv s$) областях. Получение показателей качества проводится по некоторой унифицированной схеме, представляемой в виде последовательности операций над матрицей функций чувствительности $T_p^e(g)$: линейного преобразования P в скалярную функцию $P_\rho(g)$, нелинейного преобразования H_η , вычисления функционалов R_j и при необходимости преобразования функционалов R_j в частные критерии I_i , имеющие смысл потери качества.

Линейное преобразование P_ρ над матрицей T_p^e позволяет получить скалярную функцию $P_\rho(g)$ как линейную комбинацию элементов матрицы $T_p^e(g)$:

$$P_\rho(g) = A_\rho(g) T_p^e(g) B_\rho(g). \quad (7.55)$$

Суть преобразования (7.55) состоит в умножении матрицы T_p^e

при $r=1, 2, \dots, l$; $j=1, 2, \dots, k$; $\gamma=1, 2, \dots, n$ образует пространственную матрицу размером $l \times k \times n$.

Связь функций чувствительности с топологией системы. Функции чувствительности не содержат информации о топологии системы и являются частными моделями, характеризующими влияние на выбранные переменные параметров системы и каналов передачи воздействий. Результаты теории линейных направленных графов и исследования, проведенные в разделе 3, позволяют установить связь между функциями чувствительности и топологией системы.

Функция чувствительности изображения переменной $x_\gamma(s)$ к параметру β_r канала воздействия, т. е. чувствительность к воздействию $\hat{f}_r$, зависит от топологии системы, а передаточная функция, т. е. передача графа между узлами γ и r , определяется формулой Мэсона (3.4).

Передача графа между узлами γ и r равна сумме передач всех каналов между этими узлами (3.1), а связь чувствительности к воздействию с передачами каналов определяется выражением

$$T_{\gamma r}^i(s, q) = f_r(s) \sum_i \Phi_{\gamma r}^i(s, q). \quad (7.16)$$

Функция чувствительности изображения переменной к параметру системы q или чувствительности к параметру (7.7) при нулевых начальных условиях

$$T_{qj}^{\gamma r}(s, q_0) = \sum_r T_{qj}^{\gamma r}(s, q_0), \quad (7.17)$$

$$\text{где } T_{qj}^{\gamma r}(s, q_0) = \partial_r \frac{\partial}{\partial q_j} T_{\gamma r}^i(s, q_0) = \partial_r f_r(s) \sum_i T_{\gamma r}^{i,j}(s, q_0), \quad (7.18)$$

зависит от внешних воздействий $\beta_r \hat{f}_r(s)$ и функций чувствительности $T_{\gamma r}^{i,j}(s, q_0)$ к параметру q_j всех каналов передачи от входов $\hat{f}_r$, $r=1, \dots, l$, к выходам x_γ .

Чувствительность i -го канала передачи воздействия от вершины $\hat{f}_r$ к вершине x_γ к параметру q :

$$\begin{aligned} T_{\gamma r}^{i,j}(s, q_0) &= \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi_{\gamma r}^i(s, q_0) = \\ &= \Phi_{\gamma r}^{i,j}(s, q_0) \left[\frac{T_j^{i,j,r}(s, q_0)}{P_j^{i,j}(s, q_0)} - \frac{T_j^{\Delta i,j}(s, q_0)}{\Delta_j^{i,j}(s, q_0)} - \frac{T_j^{\Delta}(s, q_0)}{\Delta(s, q_0)} \right] \\ &+ \frac{1}{q_0} \Phi_{\gamma r}^i(s, q_0) [S_j^{p,i,r}(s, q_0) + S_j^{z,i,r}(s, q_0) - S_j^z(s, q_0)] \quad (7.19) \end{aligned}$$

может быть определена по абсолютным $T_j^{P_{ir}}, T_j^{A_{ir}}, T_j^{\Delta}$ или логарифмическим $S_j^{P_{ir}}, S_j^{A_{ir}}, S_j^{\Delta}$ функциям чувствительности i -го пути P_{ir}^i , минора Δ_{ir}^i и определителя графа Δ к параметру q_r .

7.2. Инвариантность переменных системы

Инвариантность переменных к воздействиям. При рассмотрении инвариантности переменных системы к воздействиям будем считать, что параметры системы не изменяются ($q_r = q_{r0}$), а начальные условия — нулевые.

Под абсолютной инвариантностью переменных системы x_r , $r=1, 2, \dots, n$, к воздействию f_r , $r=1, 2, \dots, l$, понимается тождественность нулю этих переменных

$$x_{r,r}(s) = 0 \quad (7.20)$$

или линейной формы от них

$$\sum_i a_{ir} x_{r,i}(s) = 0. \quad (7.21)$$

т. е. понятие инвариантности используется в самом широком смысле. Анализ элементов матрицы чувствительности (7.10) позволяет на основе единого подхода рассмотреть различные формы инвариантности переменных к воздействиям и определить условия инвариантности в виде требований, которым должны удовлетворять функции чувствительности переменных x_r к параметрам β_r каналов передачи воздействий f_r .

В табл. 7.1 показаны различные формы и условия абсолютной инвариантности переменных и линейной формы от них к воздействиям.

При классической форме абсолютной инвариантности [49] условие (7.20) выполняется благодаря свойствам системы, обеспечивающим

$$T_{ir}^{A_i}(s, q) = 0, \quad (7.22)$$

т. е. тождественность нулю одного или в случае полиинвариантности [45] соответствующего числа элементов матрицы чувствительности (7.10), что при любых ограниченных воздействиях эквивалентно условию равенства нулю высоты полинома в правой части уравнения системы.

В ряде случаев могут иметь большое практическое значение и другие формы инвариантности, при которых сами переменные системы не инвариантны к каждому из воздействий, однако условия инвариантности переменных или их линейной

формы выполняются для некоторой совокупности заданных воздействий на систему.

При известных воздействиях инвариантность переменных (7.20) может быть достигнута путем взаимной компенсации

Таблица 7.1

Абсолютная инвариантность к воздействиям

Формы инвариантности	Инвариантность переменных $x_{\gamma r} = 0$		Инвариантность линейной формы переменных $\sum_i a_i x_{\gamma r} = 0$	
	При любых воздействиях за счет свойств системы	При известных воздействиях за счет взаимной компенсации влияния на переменные	При любом воздействии за счет свойств системы	При известных воздействиях за счет их совместного влияния на переменные
Условия инвариантности	$T_{\beta r}^{x\gamma} = 0$	$\sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$	$\sum_i a_i T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$	$\sum_i a_i \sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} \beta_r = 0$
Переменной x_a к воздействию f_b	$\gamma = a, r = b$	—	—	—
Переменных x_i к воздействию f_b	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b$	—	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b$	—
Переменной x_a к воздействиям f_r	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots$	—	—
Переменных x_i к воздействиям f_r	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$
Селективная инвариантность	$\gamma = r = 1, 2, \dots$	—	—	$\gamma = r = 1, 2, \dots$
Условия автономности подсистем	$\gamma \neq r, \gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots$	—	—	$\gamma \neq r, T_{\beta r}^{x\gamma} = 0, \gamma, r = 1, 2, \dots$

влияния этих воздействий на рассматриваемые переменные системы при выполнении условия

$$\sum_r T_{\beta r}^{x\gamma} (s) \beta_r = 0. \quad (7.23)$$

Инвариантность линейной формы от координат (7.21) может быть обеспечена свойствами системы, т. е. структурой, типами элементов и значениями параметров при одном произвольном воздействии f_r , если выполняется условие

$$\sum_i a_i T_{ir}^{xy}(s) \xi_r = 0, \quad (7.24)$$

или при известных воздействиях — совместным влиянием во переменные системы при

$$\sum_i a_i \sum_r T_{ir}^{xy}(s) \xi_r = 0. \quad (7.25)$$

В многосвязной системе, включающей в себя ряд подсистем, выполнение условий инвариантности выходных переменных подсистем к воздействиям, приложенным к другим подсистемам:

$$T_{ir}^{xy}(s) \xi_r = 0, \quad i \neq r, \quad (7.26)$$

обеспечивает автономность подсистем. Инвариантность линейной формы координат автономных подсистем имеет место при выполнении условий (7.25), (7.26).

Условия автономности подсистем многосвязной системы управления. Многосвязная система автоматического управления включает в себя ряд подсистем, управляемые переменные которых изменяются не только в зависимости от своих воздействий (управляющих и возмущающих), но и от воздействий, приложенных к другим подсистемам.

В результате выделения переменных, воздействий подсистем и последующего упорядочения строк матрицы (7.10), можно путем рассечения при помощи горизонтальных и вертикальных линий представить ее в виде квадратной блочной матрицы:

$$T_{xy}^y = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1M} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{M1} & T_{M2} & \dots & T_{MM} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

Блоки T_{mm} , $m=1, \dots, M$ главной диагонали матрицы (7.27) являются матрицами чувствительности переменных подсистем к своим воздействиям. Остальные блоки T_{mt} , $t=1, \dots, m-1, m+1, \dots, M$, m -й строки являются матрицами чувствительности подсистемы к чужим воздействиям, т. е. характеризуют связи между подсистемами. Обращение в нуль одной или нескольких матриц связей приводит к одной из форм автономности подсистем.

Полная автономность подсистем, т. е. инвариантность переменных всех подсистем к чужим воздействиям, имеет место при превращении блочной матрицы (7.27) в диагональную.

Взаимная автономность, т. е. инвариантность переменных подсистем к чужим воздействиям и переменных других подсистем к воздействиям рассматриваемой подсистемы, имеет место при тождественном обращении в нуль матриц связей в строке и столбце подсистемы.

Односторонняя автономность имеет место при тождественном обращении в нуль матриц связей в строке подсистем, кроме блока на главной диагонали. При односторонней автономности подсистемы на нее не влияют чужие воздействия, но воздействия подсистемы оказывают влияние на переменные других подсистем.

Абсолютная инвариантность при ненулевых начальных условиях. При выполнении условий абсолютной инвариантности переменной $x_r(t)$ к воздействию f_r^* , как видно из выражения (7.8), требование тождественности нулю переменной не может быть выполнено, если система имеет ненулевые начальные условия. Формально можно ввести рассмотрение условия абсолютной инвариантности переменной x_r к начальным условиям

$$\sum_{i=0}^{n-1} T_{x_i^0}^{A_i}(s) = 0. \quad (7.28)$$

Однако условие (7.28) нельзя выполнить, так как оно требует понижения порядка системы. В то же время может оказаться возможным способ компенсации движения $x_r(t)$ из-за ненулевого начального условия $x_{r0}^{(i)}$ с помощью специально подобранного компенсирующего воздействия

$$f_r^*(s) = - \frac{D_{0r}(s)}{K_{r,r}(s)} x_{r0}^{(i)}, \quad (7.29)$$

полученного из общего условия компенсации возмущений

$$\sum_{i=1}^l T_{x_i^0}^{A_i}(s) q_{r,i} + \sum_{i=0}^{n-1} T_{x_i^0}^{A_i}(s) x_{r0}^{(i)} = 0. \quad (7.30)$$

Можно также представить случай взаимной компенсации добавочных движений $x_r(t)$, вызванных изменением начальных условий и вариацией параметров. Так, например, при отсутствии внешних воздействий, одним ненулевым начальным условием $x_{r0}^{(i)} \neq 0$ и вариации одного параметра q , взаимная компенсация возможна при выполнении условия

$$T_{x_{i0}^{xy}}^{xy}(s) x_{i0}^{(i)} - \left[\frac{\partial}{\partial q_j} T_{x_{i0}^{xy}}^{xy}(s) \Delta q_j \right] = 0.$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров системы. Анализ элементов матрицы чувствительности (7.11) позволяет при нулевых начальных условиях рассмотреть различные формы инвариантности координат x_{γ} к вариациям параметров q_j и определить соответствующие условия инвариантности.

Инвариантность к ва

Формы инвариантности		Инвариантность переменных:	
		вследствие нулевой чувствительности к параметрам	при любом воздействии и известных параметрах вследствие взаимной компенсации влияния изменений параметров на переменные системы
Условия инвариантности		$\sum_i T_j^{ri}(s, q_0) = 0$	$\sum_j \Delta q_j \sum_i T_j^{ri}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{ri}(s, q_0) \neq 0$
Переменной x_a к параметру q_c	одно воздействие f_b	$\gamma = a, r = b, j = c,$ $i = 1, 2, \dots$	—
	несколько воздейств.	$\gamma = a, j = c,$ $r = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	—
Переменной x_a к параметрам q_j	одно воздействие f_b	$\gamma = a, r = b, j = 1, 2, \dots,$ $i = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = b, j = 1, 2, \dots,$ $i = 1, 2, \dots$
	несколько воздейств.	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
Переменных x_{γ} к параметру q_c	одно воздействие f_b	$\gamma = 1, 2, \dots, r = b,$ $j = c, i = 1, 2, \dots$	—
	несколько воздейств.	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = c, i = 1, 2, \dots$	—
Переменных x_{γ} к параметрам q_j	одно воздействие f_b	$r = b, \gamma = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$r = b, \gamma = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
	несколько воздейств.	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$

Абсолютная инвариантность переменных к вариациям параметров понимается в широком смысле, когда в окрестности точки $q_j = q_{j0}$ при малых Δq_j выполняется условие

$$x_{\gamma q}(s) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_j T_{q_j}^{\gamma j}(s, q_0) \Delta q_j = 0 \quad (7.31)$$

для этих координат или условие

Таблица 7.2

риациям параметров

$x_{\gamma q}(s) = 0, \sum_{j=1}^k T_{q_j}^{\gamma j}(s, q_0) \Delta q_j = 0$	
при изменении параметров и известных воздействиях вследствие взаимной компенсации влияния воздействий на переменные системы	при известных воздействиях и параметрах вследствие взаимной компенсации их влияния на переменные
$\sum_r g_r f_r \sum_i T_j^{\gamma r i}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{\gamma r i}(s, q_0) = 0$	$\sum_j \Delta q_j \sum_r g_r f_r \sum_i T_j^{\gamma r i}(s, q_0) = 0,$ $\sum_i T_j^{\gamma r i}(s, q_0) = 0$
—	—
$\gamma = a, j = c,$ $r = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	—
—	—
$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = a, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$
—	—
$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = c, i = 1, 2, \dots$	—
—	—
$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$	$\gamma = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$

$$\sum_i b_i x_{ij}(s) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_i b_i \sum_j T_{ij}^{ij}(s, q_0) \Delta q_j = 0 \quad (7.32)$$

для линейной формы координат.

В табл. 7.2 показаны различные формы инвариантности переменных к вариациям параметров.

Инвариантность переменных к вариациям параметров при отсутствии априорной информации об изменениях воздействий и параметров имеет место, если выполняется условие

$$\sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) = 0, \quad (7.33)$$

т. е. в случае нулевой чувствительности системы к параметрам.

Большое практическое значение имеют формы инвариантности, которые не требуют нулевой чувствительности к параметрам.

При любом воздействии на систему инвариантность переменных к известным вариациям параметров может быть достигнута путем взаимной компенсации их влияния на переменные при

$$\sum_j \Delta q_j \sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) = 0, \quad \sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) \neq 0. \quad (7.34)$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров может быть обеспечена при известных воздействиях путем взаимной компенсации влияния воздействия на переменные системы, если выполняется условие

$$\sum_i \beta_i f_i(s) \sum_j T_{ij}^{ij}(s, q_0) = 0, \quad \sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) \neq 0. \quad (7.35)$$

Инвариантность переменных к вариациям параметров при известных воздействиях достигается путем взаимной компенсации их влияния на переменные системы при

$$\begin{aligned} \sum_j \Delta q_j \sum_i \beta_i f_i(s) \sum_j T_{ij}^{ij}(s, q_0) &= 0, \quad \sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) \neq 0, \\ \sum_j \Delta q_j \sum_i T_{ij}^{ij}(s, q_0) &\neq 0, \quad \sum_i \beta_i f_i(s) \sum_j T_{ij}^{ij}(s, q_0) = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

В качестве иллюстрации на рис. 53 изображен граф, позволяющий в первом приближении определить приращения переменных

$$\Delta x_i(s) = \sum_{j=1}^n \Delta q_j \sum_{r=1}^l \beta_r f_r(s) \sum_{i=1}^{l_{jr}} T_{ij}^{ij}(s, q_0),$$

при $\gamma=1, 2$; $k=2$; $l=2$; $l_{jr}=1$.

Двукратная инвариантность. Требования абсолютной инвариантности переменных x_r при одновременном изменении внешнего воздействия к вариациям параметров удовлетворяются при самых общих предположениях, если выполняется условие

$$\sum_r T_{sr}^{xy}(s, q_0) \beta_r + \sum_j \Delta q_j \sum_r T_{qr}^{xy}(s, q_0) = 0 \quad (7.37)$$

или условия

$$\sum_r T_{sr}^{xy}(s, q_0) \beta_r = 0, \quad \sum_j \Delta q_j \sum_r T_{qr}^{xy}(s, q_0) = 0. \quad (7.38)$$

Условие (7.38) требует инвариантности переменных в отдельности к воздействиям и к вариациям параметров (см. табл. 7.1 и 7.2), а условие (7.37) отражает возможность взаимной компенсации приращений переменной, вызванных внешними воздействиями и вариациями параметров, а следовательно, требует взаимной зависимости воздействия и вариаций параметров.

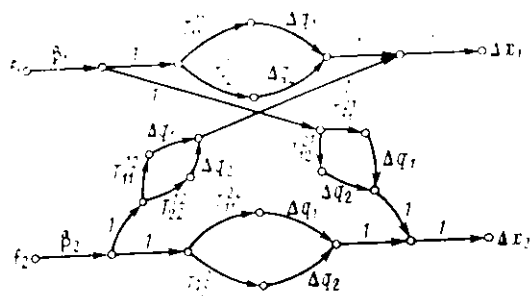


Рис. 53.

В простом случае одного внешнего воздействия $\dot{f}_r$ и одного изменяющегося независимо от $\dot{f}_r$ параметра q , абсолютная инвариантность переменной $x_r(t)$ имеет место при

$$T_{sr}^{xy}(s) = 0, \quad T_{qr}^{xy}(s) = 0. \quad (7.39)$$

Учитывая выражение (7.7), условия (7.39) при $\beta_r \neq 0$ можно представить в виде

$$T_{sr}^{xy}(s) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_j} T_{sr}^{xy}(s) = 0. \quad (7.40)$$

Условия (7.40) обеспечивают двукратную инвариантность в системе, т. е. инвариантность переменной к воздействию и инвариантность условий инвариантности к малому изменению параметра.

В общем случае при нескольких воздействиях и вариациях нескольких параметров (7.38) могут быть получены более сложные формы двукратной инвариантности.

7.3. Физическая реализуемость условий абсолютной инвариантности

Любая динамическая система должна удовлетворять условиям устойчивости и грубости. Поэтому, предпринимая те или иные меры по обеспечению абсолютной инвариантности переменных системы к сигнальным или параметрическим (в общем случае — операторным) воздействиям среды, прежде всего требуется проверить, не нарушаются ли при этом необходимые условия устойчивости и грубости.

Инвариантная система будет устойчива, если ее передаточные функции не содержат полюсов, лежащих в правой полуплоскости корней. Анализ передаточных функций графа (3.4) между всеми вершинами x_r и f_r , как это показано в п. 3.2, позволяет сделать вывод, что инвариантная система будет устойчивой, если определитель графа $\Delta(s, q)$ не содержит нулей, лежащих в правой полуплоскости, и, кроме того, если передаточные функции всех дуг графа, не входящих в контуры, не имеют полюсов, лежащих там же.

При выполнении условий абсолютной инвариантности приходится сталкиваться с необходимостью решения проблемы грубости системы. Негрубость очень часто обуславливается вырождением систем, т. е. понижением порядка характеристического полинома, происходящим при стремлении выполнить условия абсолютной инвариантности. Ясно, что негрубая система не может быть физически реализована.

Ниже рассмотрены некоторые условия физической реализуемости абсолютной инвариантности в системах управления в зависимости от топологических свойств этих систем. При этом выделим общие условия, которым должны удовлетворять системы во всех случаях, а также некоторые дополнительные условия, которые свойственны тем или иным формам инвариантности.

Абсолютная инвариантность переменных x_r к любым воздействиям f_r достигается при тождественности нулю чувствительности переменной к параметру канала воздействия β_r :

$$T_{\beta_r}^{x_r}(s) = \Phi_{r,r}(s) f_r(s) \equiv 0. \quad (7.41)$$

Тождество (7.41) выполняется, если 1) $f_r \equiv 0$, $\Phi_{r,r} \neq 0$; 2) $f_r \neq 0$, $\Phi_{r,r} \equiv 0$.

Первый случай указывает на возможность реализации инвариантности в системе путем устранения источников внешнего воздействия, а второй — представляющий наибольший интерес с точки зрения синтеза автоматических систем управления,

инвариантных к воздействиям произвольного вида, требует такого выбора топологии, структур операторов и параметров системы, чтобы соответствующие передаточные функции системы были тождественны нулю.

При $f_r(s) \equiv 0$ абсолютная инвариантность может быть реализована за счет свойств системы, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{i_{\gamma r}} \Phi_{ir}^i(s, q) = \frac{1}{\Delta(s, q)} \sum_{i=1}^{i_{\gamma r}} P_{ir}^i(s, q) \Delta_{ir}^i(s, q) = 0. \quad (7.42)$$

Если в графе системы управления имеется единственный путь от вершины r к вершине γ , то условие (7.42) абсолютной инвариантности переменной x_γ , имеющей смысл ошибки, к любому воздействию f_r запишется так:

$$\frac{1}{\Delta(s, q)} P_{ir}(s, q) \Delta_{ir}(s, q) = 0. \quad (7.43)$$

Тождество (7.43) достигается при условии

$$P_{ir}(s, q) \Delta_{ir}(s, q) = 0, \quad \Delta(s, q) \neq 0 \quad (7.44)$$

или
$$\Delta(s, q) \rightarrow \infty, \quad P_{ir}(s, q) \Delta_{ir}(s, q) = \dots \quad (7.45)$$

Условие тождественности нулю $P_{ir} \Delta_{ir}$ выполняется, во-первых, в тривиальном случае отсутствия пути, что выявляется на топологическом ранге по алгоритмам поиска путей (см. гл.4), или при нулевой передаче пути $P_{ir}(s, q)$, что устанавливается на параметрическом уровне задания модели.

Если нулевая передача пути обеспечивается вследствие ослабления передачи дуги, принадлежащей контурной части G_0 , то меняются определитель графа $\Delta(s, q)$ и характеристические полиномы. При этом определитель графа становится равным определителю подграфа, полученного удалением дуги с исчезающей передачей, и вопросы устойчивости и грубости должны решаться с учетом конкретных структур операторов и значений параметров q .

Во-вторых, условие (7.44) выполняется при обращении в нуль минора пути

$$\Delta_{ir}(s, q) = 0. \quad (7.46)$$

Как это следует из сказанного выше (§ 3.6), обращение в нуль любого минора приводит к качественному изменению свойств контурной части — вырождению определителя, т. е. к уменьшению числа его членов, что вызывает во всех практически важных случаях понижение порядка характеристического полинома, и система становится негрубой. Поскольку при этом не выполняется одно из основных требований к динамическим системам, такая система является неработоспособной.

Следовательно, реализация абсолютной инвариантности в системе за счет выполнения условия (7.46) невозможна, так как приводит к негрубой системе.

Рассмотрим в качестве примера граф (рис. 54), контур K_1 которого, образованный дугами (2.3) и (3.2), имеет передачу $+1$. Путь от возмущающего воздействия f_1 до выхода системы y_1 не касается единичного контура, следовательно, выход y_1 абсолютно инвариантен к f_1 при абсолютно точной реализации условия $W_{23}W_{32} = k_{23}k_{32} = 1$. Однако при этом происходит вырождение определителя графа, т. е. понижается порядок полинома числителя.

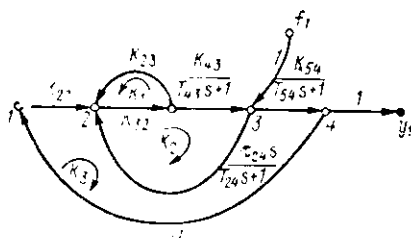


Рис. 54.

следует $\Delta_{\text{нр}} = -K_2 - K_3 = D_{\text{нр}}/D_p$, где $D_p = (T_{43}s + 1)(T_{24}s + 1)$, $(T_{54}s + 1)$, $D_{\text{нр}} = k_{21}k_{32}k_{43}(T_{24}s + 1) + k_{52}k_{43}T_{24}s(T_{54}s + 1)$. Порядок характеристического полинома $D_{\text{нр}}$ равен двум, т. е. обращение в единицу передачи контура K_1 приводит к понижению порядка полинома.

Практически абсолютно точно реализовать условие $K_1 = -1$ невозможно, поэтому положим, что $1 - K_1 = \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая величина неопределенного знака. Характеристический полином не точно реализованной системы имеет вид

$$D_s = \varepsilon T_{43}T_{24}T_{54}s^3 + [k_{32}k_{43}T_{24}T_{54} + \varepsilon(T_{43}T_{24} + T_{43}T_{54} + T_{24}T_{54})]s^2 + [k_{21}k_{32}k_{43}k_{51}T_{24} + k_{32}k_{43}T_{24} + \varepsilon(T_{43} + T_{24} + T_{54})]s + (\varepsilon + k_{21}k_{32}k_{43}k_{51}).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит понижение порядка и один корень уходит в бесконечность. Однако полученная абсолютно инвариантная система негруба, так как при точной реализации системы разность ε может стать отрицательной, один корень полинома D_s с отрицательным коэффициентом при старшей степени окажется в правой полуплоскости, и система станет неустойчивой.

Теоретически абсолютная инвариантность может быть достигнута при выполнении условия (7.45) или условия более общего, когда определитель графа стремится к бесконечности более высокого порядка, чем числитель:

$$\Delta^{(1, \gamma)} \rightarrow \infty, \quad (P_{\gamma r} \Delta_{\gamma r})^{l-1} \rightarrow \infty, \quad \gamma \geq 1. \quad (7.47)$$

При выполнении условия (7.47) передача канала $\Phi_{\gamma r}^k$, а в случае одноканальности и системы $\Phi_{\gamma r}$ стремится к нулю порядка γ :

$$\Phi_{\gamma r}^{l-1} \rightarrow 0, \quad (7.48)$$

в результате чего вынужденные составляющие переменной выхода y , имеющей смысл ошибки преобразования, тождественны нулю при воздействиях f , уровень которых равен бесконечности $(\nu - 1)$ -го порядка. При этом по аналогии с астатизмом — инвариантностью на нулевой частоте — можно говорить об абсолютной инвариантности ν -го порядка.

Вопросы влияния дуг с бесконечным усилением на передачу графа решаются по моделям структурно-топологического уровня определенности (см. § 3.7). В гл. 4 приводится алгоритм определения кратности нулей и полюсов передаточных функций, который в частном случае может быть использован для определения кратности ν передаточной функции $\Phi_{\nu}(s)$.

При реализации абсолютной инвариантности за счет бесконечно большого коэффициента усиления возникает проблема устойчивости. В этом находит свое отражение одно из принципиальных противоречий систем с обратной связью — противоречие между качеством вынужденных и собственных движений.

Ряд теоретических задач, связанных с разработкой одно- и многосвязных систем управления, устойчивых при бесконечно большом коэффициенте усиления, решается в работе [52]. Однако при практическом использовании этих результатов следует помнить, что модели систем управления адекватны реальным устройствам только на определенном конечном интервале частот. Если коэффициент усиления в каком-либо контуре системы неограниченно возрастает, то существенными в смысле устойчивости становятся характеристики системы при таких высоких частотах, где модель не соответствует реальности и не может служить предметом исследований в связи с целями, поставленными перед системой управления. Повышение до бесконечности коэффициента усиления системы с целью достижения абсолютной инвариантности, таким образом, должно сопровождаться непрерывным уточнением модели системы в области все более и более высоких частот с соответствующим усложнением операторов дуг коррекции, что реально не может быть сделано. Следовательно, абсолютная инвариантность за счет бесконечно большого коэффициента усиления практически не реализуема.

Обеспечение абсолютной инвариантности в одноканальных системах из-за введения контура K^{-1} с единичным усилением, не соприкасающегося с путем, приводит к неточным решениям вследствие вырождения определителя — сокращения единицы. Можно попытаться скомпенсировать вырождение единицы определителя дополнительным введением еще одного контура K^{-1} с единичным отрицательным усилением, касающегося пути и всех остальных контуров. Однако по существу это случай системы с двумя контурами, усиления которых стремятся к единице, а знаки противоположны (см. § 3.6). Неточная реализация условий $K^{-1}=1$, $K^{-1}=-1$ приводит к изменению знака

коэффициента при старшей степени характеристического полинома, т. е. к потере устойчивости.

Рассмотрим граф системы, изображенный на рис. 55а. Пусть

требуется обеспечить абсолютную инвариантность переменной вершины 5 к возмущению f_1 . От воздействия f_1 к вершине 5 имеется единственный путь P_{54} , минор которого равен единице. Если ввести в граф дугу (2, 3), а тем самым контур $K_1 = \{(2, 3), (3, 2)\}$, и обеспечить $K_1 \rightarrow 1$, то минор пути P_{54} станет равным нулю: $\Delta_{54} = 1 - K_1 = 0$. Однако при этом абсолютно инвариантная система станет негрубой (рис. 55, б), так как происходит вырождение определителя из-за потери единицы, сокращаемой с K_1 :

$$\Delta_{np} = \lim_{K_1 \rightarrow 1} (1 - K_1 - K_3).$$

Введем в систему еще один контур K_2 с единичным отрицательным усилением: $K_2 \rightarrow -1$, который касается и пути P_{54} и контура K_1 (рис. 55 в, г, д). В составе определителя за счет K_2 появится $+1$, а других дополнительных слагаемых не будет, так как K_2 касается всех контуров:

$$\Delta_{np} = \lim_{\substack{K_1 \rightarrow +1 \\ K_2 \rightarrow -1}} (1 - K_1 - K_2 - K_3) = 1 - K_3.$$

Минор пути $\Delta_{54} = 0$ также не изменится, поскольку контур K_2 выбран касающимся пути. Следовательно, полученная система абсолютно инвариантна, однако она не будет работоспособной из-за негрубости.

Заметим, что полученная система представляет собой эквивалент системы с «косвенным измерением возмущений» [42]. Действительно, в системе с косвенным измерением возмущений (рис. 55е) условия равенства переменной вершины 6 возмущению f_1 и компенсации реакций на f_1 и x_6 в вершине 3 обуславливают $K_1 \rightarrow +1$ и $K_2 \rightarrow -1$. Отсюда следует иная интерпретация

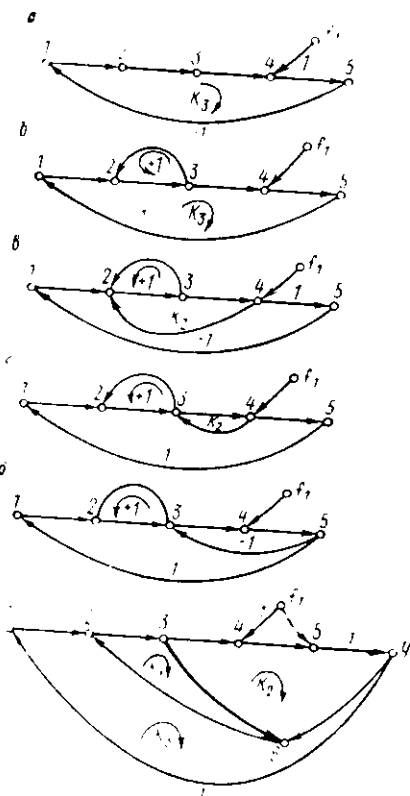


Рис. 55.

свойств системы с косвенным измерением возмущений, опирающаяся на топологическую формулу для передачи и свойства контуров и путей графа. Одновременно получены несколько эквивалентных по свойствам топологий систем.

Важно также отметить, что указанная схема может обеспечить и полиинвариантность, т. е. инвариантность перемещенной вершины к нескольким воздействиям, приложенным к системе таким образом, что пути от их точек приложения до вершины 5 не касаются контура $K_1 \rightarrow +1$ и касаются контура $K_2 \rightarrow -1$ (рис. 55e).

Выше рассмотрены различные возможности реализаций условий абсолютной инвариантности в одноканальном случае и установлено, что во всех вариантах абсолютная инвариантность нереализуема из-за негрубости или потери устойчивости. Следует иметь в виду, что хотя при единственном канале абсолютная инвариантность недостижима, рассмотренные средства (ослабление воздействия, передачи пути, уменьшение минора пути и увеличение определителя) широко применяются для обеспечения малых ошибок, т. е. инвариантности до ϵ [50, 65, 88].

Дополнительные каналы передачи воздействий в системах управления могут быть получены в результате изменения связей системы со средой путем измерения воздействий, к которым требуется обеспечить инвариантность, что имеет место в комбинированных системах, а также за счет изменения топологии самой системы путем введения необходимых внутренних связей, что возможно, например, в многосвязных системах управления.

При $\Delta_{qr}^i(s, q) \neq 0$ в системах, имеющих конечное значение коэффициентов передач дуг, выполнение условия (7.42) возможно при $t_{qr} \geq 2$, т. е. при наличии не менее двух каналов или путей передачи для каждого воздействия (принцип многоканальности Б. И. Петрова). Если для каждого из воздействий выделить один компенсирующий канал, то передаточная функция прямого компенсирующего пути, образующего этот канал, должна быть физически осуществима.

Для получения требуемой передаточной функции компенсирующего канала для компенсации основного (неизменяемого), во-первых, могут целенаправленно изменяться структура и параметры передачи путей за счет изменения передач дуг, не входящих в контурную часть, т. е. изменения передач связей системы со средой. В этом случае определитель графа Δ и его миноры не претерпевают изменений. Устойчивость инвариантной системы определяется устойчивостью системы до формирования передач компенсации и устойчивостью ее дуг.

Во-вторых, передачи компенсирующих каналов могут быть изменены путем изменения операторов и параметров дуг, входящих в контуры, что изменяет определитель графа. Этот спо-

соб реализации абсолютной инвариантности затрагивает устойчивость системы.

Инвариантность координат к известным воздействиям. Эта форма инвариантности координат может быть реализована путем взаимной компенсации влияния воздействий при

$$\sum_{r=1}^l \beta_r f_r(s) \sum_{i=1}^{t_{ir}} P_{ir}^i(s, q) \Delta_{ir}^i(s, q) = 0, \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{\Delta(s, q)} \sum_{i=1}^{t_{ir}} P_{ir}^i(s, q) \Delta_{ir}^i(s, q) = 0, \quad l \geq 2, \quad t_{ir} \geq 1,$$

т. е. требует наличия полной информации о воздействиях в системах.

Параметрическая инвариантность при нулевой чувствительности. Инвариантность переменных к неизвестным малым вариациям параметров при произвольных воздействиях реализуется в системах с нулевой чувствительностью, если выполняется условие

$$\frac{1}{q_j \Delta(s, q_0)} \sum_i P_{ir}^i(s, q_0) \Delta_{ir}^i(s, q_0) [S_j^{P_{ir}^i}(s, q_0) + S_j^{\Delta_{ir}^i}(s, q_0) - S_j^{\Delta}(s, q_0)] = 0. \quad (7.50)$$

Условие (7.50) может выполняться в одно- и многоканальных системах, если параметр q_j не входит в соответствующие пути. миноры и определитель графа, а также в тех случаях, когда для каждого из каналов выполняется условие

$$[S_j^{P_{ir}^i}(s, q_0) + S_j^{\Delta_{ir}^i}(s, q_0) - S_j^{\Delta}(s, q_0)] = 0. \quad (7.51)$$

В многоканальных системах возможна нулевая чувствительность к параметру вследствие взаимной компенсации влияния отдельных каналов (7.50).

В системах с бесконечным коэффициентом передачи k_∞ соответствующих дуг графа при $\Delta(s, q_0) \rightarrow \infty$ имеет место нулевая чувствительность к изменениям параметров.

Параметрическая инвариантность из-за взаимной компенсации. В табл. 7.2 показаны различные формы параметрической инвариантности вследствие взаимной компенсации влияния изменений параметров, воздействий или параметров и воздействий одновременно при ненулевой чувствительности к параметрам.

Наибольший интерес представляют формы инвариантности за счет взаимной компенсации известных изменений нескольких параметров системы при выполнении условия (7.34), которые реализуются в целом ряде самонастраивающихся систем.

7.4. Цели систем и требования к процессам управления

Каждая система управления выполняет самостоятельные функции и обеспечивает достижение заданных целей управления в условиях ее причинно-следственного взаимодействия с внешней средой и возможного изменения ряда параметров в процессе эксплуатации.

На каждый управляемый процесс возлагаются самостоятельные функции, связанные, например, с генерированием и преобразованием энергии, переносом потоков жидкости и газов, формообразованием твердых тел, передачей и преобразованием информации и т. д.

Цели управления определяют необходимое поведение системы управления, т. е. необходимый закон изменения заданных переменных или некоторых характеристик системы управления в условиях ее причинно-следственного взаимодействия с внешней средой.

В ряде случаев на первом этапе проектирования можно определить идеальные цели управления, например воспроизведение с нулевой ошибкой управляющих воздействий или некоторых функций от них, нулевую чувствительность к возмущающим воздействиям и помехам, автономность отдельных переменных системы управления к некоторым возмущениям, нулевую чувствительность к изменениям параметров объекта управления, выпуск всей продукции высшего качества и т. д.

Как правило, идеальные цели управления не могут быть достигнуты в системах управления из-за физической нереализуемости таких систем, большой мощности управляющих устройств, высокой их стоимости, большого веса, габаритов и т. д. Часто идеальные цели управления, например идеальные воспроизведения управляющего воздействия и нулевая чувствительность системы к помехам на этом же входе оказываются противоречивыми и поэтому принципиально не могут быть одновременно реализованы в данной системе управления.

Модели целей управления M_s^* целесообразно представить в виде идеальной (эталонной) матрицы чувствительности переменных системы к параметрам каналов передачи воздействий: $M_s^* \rightarrow T_{\beta}^{y*}$.

Таким образом, элементами T_{β}^{y*} , $\gamma = 1, \dots, n$; $r = 1, \dots, l$, матрицы T_{β}^{y*} являются идеальные реакции системы на отдельные воздействия. В области изображений элементы матрицы $T_{\beta}^{y*}(g)$, где $g: ts$ в случае преобразования по Лапласу функций непрерывного времени, $g: z$ в случае z -преобразования функций дискретного времени, представляют собой произведения изображений воздействий на эталонные операторы преобразований. Например, если ставится задача воспроизведения

воздействия f_r выходом y_r , соответствующий элемент идеальной матрицы чувствительности будет тождествен изображению воздействия: $T_{\beta r}^{yI}(g) = f_r(g)$; если требуется подавление воздействия f_r на выходе y_r , то $T_{\beta r}^{yI*}(g) = 0$. В том случае, когда переменная y_r должна представлять собой заданное не тривиальное преобразование $\Phi_{\gamma r}^*$ входа f_r , элемент идеальной матрицы чувствительности имеет вид

$$T_{\beta r}^{yI*}(g) = \Phi_{\gamma r}^*(g) f_r(g),$$

где $\Phi_{\gamma r}^*$ может обозначать операцию интегрирования, дифференцирования и т. п. Если на некоторую функцию чувствительности системы $T_{\beta r}^{yI}$, т. е. реакцию выхода y_r на воздействие f_r , не накладывается никаких ограничений, можно принять $T_{\beta r}^{yI*} = T_{\beta r}^{yI}$.

Таким образом, матрица идеальных функций чувствительности $T_{\beta r}^{yI*}$ является формализацией целей управления и характеризует идеальную расширенную систему. Как указывалось, при рассмотрении модели целей управления нас не будут интересовать проблемы физической реализуемости системы.

Динамические свойства автоматических систем управления целесообразно для всех выходных переменных оценивать по процессам, имеющим смысл ошибок, а не по виду реакции системы на то или иное воздействие [65]. В качестве иллюстрации на рис. 56 показаны переходные процессы $y_v(t)$ и ошибки в

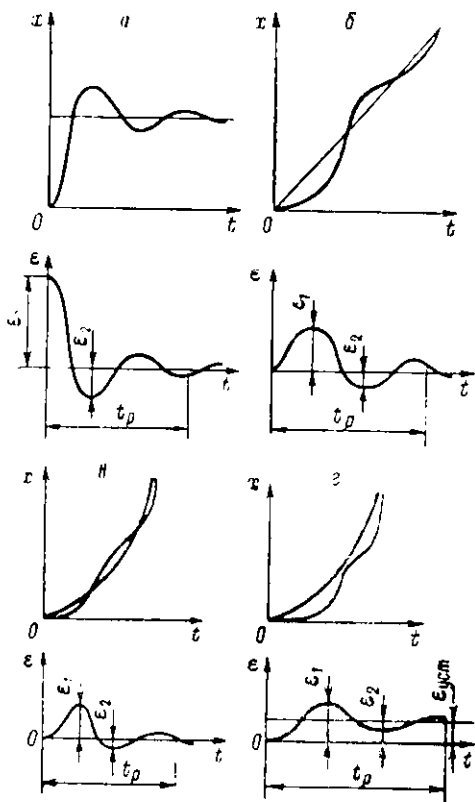


Рис. 56.

системе управления при отработке ступенчатого управляющего воздействия (рис. 56а), отработке управляющего воздействия

с постоянными скоростью $f_r(t) = f_{r1}t$ (рис. 56б) и ускорением $f_r(t) = 0,5 f_{r2}t^2$ (рис. 56в) без установившейся ошибки и при наличии ее.

Физические переменные реальной автоматической системы управления, соответствующие ошибке ε_{yr} , могут быть выделены только в простейших случаях, например в одноконтурных системах с единичной отрицательной обратной связью или в других системах, приводящихся к ним. Даже в простейшей одноконтурной системе с неединичной обратной связью в явном виде отсутствует переменная, характеризующая переходную ошибку $\varepsilon_{yr}(t)$.

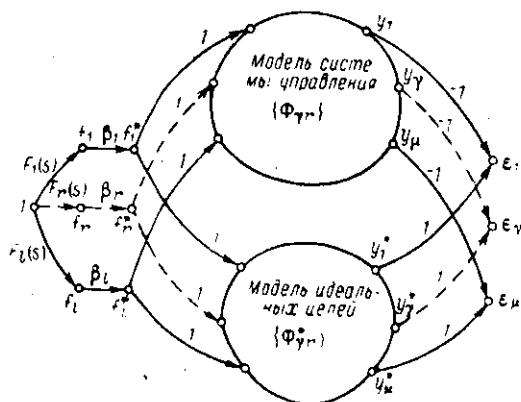


Рис. 57.

С учетом сказанного при рассмотрении причинно-следственных моделей систем управления вместе с идеальными целями управления целесообразно ввести понятие матрицы чувствительности ошибок, получаемой в результате сравнения матрицы функций чувствительности переменных расширенной системы управления к параметрам каналов передачи воздействий $T_{\beta r}^{y_l}$ и идеальной матрицы чувствительности (рис. 57):

$$T_{\beta r}^{y_l} = T_{\beta r}^{y_l*} - T_{\beta r}^{y_l}, \quad \gamma = 1, \dots, \mu; \quad r = 1, \dots, l. \quad (7.52)$$

Суждение о качестве систем управления по переменным ошибкам и на основе их функций чувствительности $T_{\beta r}^{y_l}$ носит общий характер и обеспечивает однозначность оценок систем при различных воздействиях.

В том случае, когда имеется ненулевая установившаяся составляющая ошибки, переходная составляющая ошибки равна разности суммарной ошибки ε_{yr} и установившейся ошибки $\varepsilon_{yr \text{ уст}}$: $\varepsilon_{yr \text{ пер}}(t) = \varepsilon_{yr}(t) - \varepsilon_{yr \text{ уст}}(t)$. Выделение установившихся $\varepsilon_{yr \text{ уст}}$ или в частном случае статических $\varepsilon_{yr}(\infty)$ ошибок в матрицах функций чувствительности

$$T_{\beta r}^{\alpha \gamma} = T_{\beta r}^{\alpha \gamma} \text{ уст} + T_{\beta r}^{\alpha \gamma} \text{ пер} \quad (7.53)$$

позволяет отдельно рассматривать критерии качества систем в установившихся и переходных режимах.

Для количественной оценки свойств U_{φ}^u систем управления ($\varphi=S$), систем со связями с внешней средой ($\varphi=\mathcal{F}SF$) и расширенных систем ($\varphi=R$) используются оценки частных моделей и характеристик $M_{\varphi U}^u$ — разнообразные показатели и критерии качества $I_i[M_{\varphi U}^u]$ и обобщенные критерии (функционалы) J_j , построенные на частных критериях I_i . На критерии качества, вычисленные на основе частных моделей и характеристик различных рангов неопределенности $M_{\varphi U}^u(r)$, $r=1, 2, 3$, распространяется понятие ранга.

По частным моделям M_{SU}^u оценивают свойства U_S^u самих систем: по множеству контуров $\mathcal{K}$ и множествам $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$, индексному выражению для определителя определяют число контуров, особенности их соприкосновения и связности; по частным моделям второго ранга типа символьных выражений для определителей, характеристических полиномов устанавливается структурная устойчивость, определяется порядок системы; по таким полностью определенным характеристикам, как определитель $\Delta(s)$, характеристический полином $D(s)$, матрица коэффициентов A , частотная характеристика эквивалентной одноконтурной разомкнутой системы $W_o(j\omega) = \Delta(j\omega) - 1$ оцениваются степень и запасы устойчивости. Функции чувствительности T_K^A и T_W^A определителя Δ к операторам контуров и дуг позволяют оценить влияние особенностей топологии системы и вариаций операторов на свойства контурных частей. По оценкам частных моделей M_{SU}^u могут быть установлены факты негрубости системы.

Частные модели $M_{\mathcal{F}SFU}^u(1)$ позволяют определить число каналов передачи воздействий и реализуемость абсолютной инвариантности, найти части системы, которые полностью неуправляемы и ненаблюдаемы по различным входам и выходам, установить позиции отдельных дуг по отношению к путям и т. д. Показатели качества, вычисленные по частным моделям $M_{\mathcal{F}SFU}^u(2)$ типа символьных выражений для передаточных функций систем $\Phi_{\gamma}(s)$, характеризуют физическую осуществимость условий абсолютной инвариантности, астатизм каналов. По частным моделям $M_{\mathcal{F}SFU}^u(3)$ вычисляются точность, колебательность, резонансная частота, полоса пропускания, прямые показатели качества и др.

Критерии качества, вычисленные на основе частных моделей $M_{RU}^u(3)$, например функций чувствительности выходов к

параметрам каналов воздействий, позволяют оценить основные и дополнительные процессы.

В практических постановках задач важной составляющей понятия качества систем является сложность систем управления. Можно говорить об оценках сложности топологии (например, число дуг коррекции), структуры операторов (например, порядок дифференциального уравнения). Некоторые дополнительные оценки сложности вводятся и на параметрическом ранге моделей (например, пассивность коррекции, полоса частот и т. д.).

В каждой конкретной задаче анализа или синтеза систем управления исходя из постановки задачи, требований к отдельным показателям, вычислительных особенностей, а также учитывая, что ряд критериев характеризуют приблизительно одни и те же стороны качества процессов, выбирается свой векторный критерий качества I , компонентами которого являются те или иные частные критерии I_i , подробная схема получения которых обсуждается ниже. Задание векторного критерия I с указанием экстремизации, например минимизации всех частных критериев I_i , зависящих от параметров, структур операторов и топологий систем, представляет значительную определенность требований к качеству процессов управления, т. е. к степени достижения идеальных целей системы и качеству систем в целом.

В случае единственного критерия I или интегрального критерия J лучшей считается та из сравниваемых между собой систем, у которой значения I или J , например, меньше.

Введение векторного критерия качества I для оценки ошибок систем вносит определенную специфику при сопоставлении систем с одинаковыми целями между собой. Существенным отличием векторного случая является то, что две системы могут быть не сравнимыми по векторному критерию, когда одна из них лучше по одним частным критериям, а другая — по другим. Множество всех систем, несравнимых по векторному критерию, образует множество (область) Парето.

Требования к качеству процессов и инвариантность до ϵ . Полная определенность требований (модели требований M_T) достигается после установления допустимых значений принятых частных критериев I_i . Если допустимые значения частных критериев обозначить I_{it} , то требования к качеству процессов выражаются в виде системы неравенств:

$$M_T : \begin{cases} I_1 \leq I_{1t}, \\ \vdots \\ I_p \leq I_{pt}. \end{cases} \quad (7.54)$$

Таким образом, модель требований M_T к системам управления оказывается описанной в терминах критериев качества,

ограничивающих степень отклонения процессов от идеальных целей управления. Как говорилось выше (см. § 1.6), особенно-стью такого описания систем является то, что при этом сохра-няется большая неопределенность относительно топологии, структуры операторов и параметров тех систем, которые при-надлежат M_T .

Модель требований к системам управления M_T может выра-батываться постепенно и уточняться в процессе синтеза и про-ектирования.

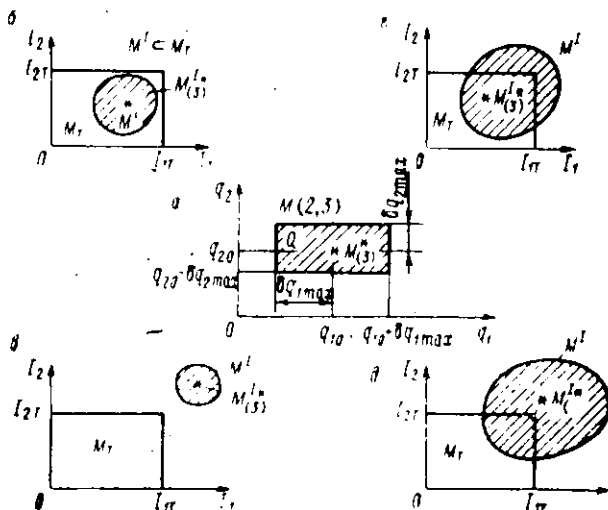


Рис. 58.

Требования к системам управления, выраженные в виде (7.54), в пространстве частных критериев I_i представляются многомерным параллелепипедом с вершиной в начале координат. На рис. 58 иллюстрируется частный случай требований, формализованных в виде ограничений на компоненты I_1 и I_2 векторного критерия размерности $p=2$. Все системы, частные критерии которых I_1 и I_2 представляют вектор с концом в прямоугольнике $0 < I_1 \leq I_{1T}$, $0 < I_2 \leq I_{2T}$, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к их процессам управления.

Модели $M_\Phi(3)$ на пространстве критериев отображаются в виде точки. Как это следует из гл. 1, модели $M(1)$, $M(2)$, а также модели смешанных рангов неопределенности представляют собой множества более определенных, а в конечном счете — множества $\{M(3)\}$ — полностью определенных моделей. Эти модели на пространство критериев отображаются в виде не обязательно связных областей. Для примера на рис. 58а приведена геометрическая иллюстрация модели системы $M(2, 3)$, один из операторов которой содержит параметры q_1 и q_2 , значения которых принадлежат множеству $Q = \{(q_1, q_2) :$

справа на матрицу-столбец $B_p(g) = \{b_r(g)\}$ размером $(l \times 1)$, а слева — на матрицу-строку $A(g) = \{a_\gamma(g)\}$ размером $(1 \times \mu)$.

Если, например, необходимо оценить отдельно взятое слагаемое процесса $\varepsilon_{\gamma r}$, то скалярная функция $P_p(g)$ получается из матрицы $T_{\beta}^i(g)$ умножением ее справа на матрицу-столбец $B(g)$ с единственным отличным от нуля элементом $b_r(g)$, а слева — на строчную матрицу $A(g)$ с единственным отличным от нуля элементом $a_\gamma(g)$, т. е.

$$P_p(g) = a_\gamma T_{\beta r}^i(g) b_r(g).$$

В самом общем случае в результате преобразования (7.55) можно получить скалярную функцию $P_p(g)$ как линейную комбинацию всех элементов матрицы $T_{\beta}^i(g)$, т. е.

$$\begin{aligned} P_p(g) &= \sum_{r=1}^l b_r(g) \left[\sum_{\gamma=1}^{\mu} a_\gamma(g) T_{\beta r}^i(g) \right] = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\mu} a_\gamma(g) \left[\sum_{r=1}^l b_r(g) T_{\beta r}^i(g) \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

В выражение (7.56) входит линейная форма реакций всех переменных $\varepsilon_{\gamma r}(g)$, $\gamma = 1, 2, \dots, \mu$, на одно воздействие $f_r(g)$: $\left[\sum_{\gamma=1}^{\mu} a_\gamma(g) T_{\beta r}^i(g) \right]$ или линейная форма реакций одной координаты $\varepsilon_{\gamma r}(g)$ на все воздействия $f_r(g)$, $r = 1, \dots, l$, $\left[\sum_{r=1}^l b_r(g) T_{\beta r}^i(g) \right]$. Необходимость и целесообразность введения различных конструкций матриц $A(g)$ и $B(g)$ связана с возможностью единообразного подхода к рассмотрению показателей качества одной из выходных переменных $\varepsilon_{\gamma r}(g)$ или любой линейной формы входных и выходных переменных, а также различных форм инвариантности и компенсации в системах управления [19, 20].

В качестве иллюстрации в табл. 7.3 приведены примеры нескольких конкретных типов преобразований P_p и соответствующий им вид скалярной функции $P_p(g)$.

Элементы матриц $A(g)$ и $B(g)$ могут представлять собой нули, постоянные, единицы с разными знаками, а также выбранные весовые функции, например t^i — в случае вычисления моментов i -го порядка переходной ошибки $\varepsilon_{\gamma r} \text{ пер}(t)$ или линейных комбинаций ошибок.

Преобразование H_γ , $\gamma = 1, 2, \dots$ позволяет получить функцию $H_\gamma(g)$ путем нелинейного (в частности, линейного) преобразования функции $P_p(g)$:

$$H_\gamma(g) = H_\gamma[P_p(g)], \quad \gamma = 1, 2, \dots \quad (7.57)$$

В качестве примеров нелинейных преобразований функции $P_p(g)$ можно привести операции возведения в степень k : $H_\gamma(g) = [P_p(g)]^k$, определения модуля $H_\gamma(g) = \text{mod } P_p(g)$ и т. д.

Преобразование R_j над функцией $H_\gamma(g)$ позволяет получить функционал (оценку) $R_j = R_j\{H_\gamma(g)\}$, например, за счет осреднения на $[g_{\text{гр}}, \infty)$: $R_j = \int_{g_{\text{гр}}}^{\infty} H_\gamma(g) dg$, поиска экстремума $R_j = \text{extr}_g H_\gamma(g)$, оценок сверху или снизу, определение нулей и т. д.

Таблица 7.3

Тип преобразования P_ρ	A (g)	B (g)	$P_\rho(g) = P_\rho\{T_\rho^*(g)\}$
P_1	$a_\gamma(g) = 1, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = 1, r = b;$ $b_r(g) = 0, r \neq b$	$T_{\beta b}^{*a}(g)$
P_2	$a_\gamma(g) = g, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = 1, r = b;$ $b_r(g) = 0, r \neq b$	$g T_{\beta b}^{*a}(g)$
P_3	$a_\gamma(g) = g^2, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = 1, r = b;$ $b_r(g) = 0, r \neq b$	$g^2 T_{\beta b}^{*a}(g)$
P_4	$a_\gamma(g) = 1, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = 1,$ $r = 1, \dots, l$	$\sum_{r=1}^l T_{\beta r}^{*a}(g)$
P_5	$a_\gamma(g) = 1, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = b_r,$ $r = 1, \dots, l$	$\sum_{r=1}^l b_r T_{\beta r}^{*a}(g)$
P_6	$a_\gamma(g) = 1, \gamma = a;$ $a_\gamma(g) = 0, \gamma \neq a$	$b_r(g) = g b_r,$ $r = 1, \dots, l$	$g \sum_{r=1}^l b_r T_{\beta r}^{*a}(g)$
P_7	$a_\gamma(g) = 1,$ $\gamma = 1, \dots, \mu$	$b_r(g) = 1, r = b,$ $b_r(g) = 0, r \neq b$	$\sum_{\gamma=1}^{\mu} T_{\beta b}^{*\gamma}(g)$

Преобразование I_i над функционалом R_j позволяет ввести единообразные шкалы полезности и представляет собой неформальное преобразование, посредством которого из частного показателя R_j формируется частный критерий качества $I_i = I_i(R_j)$. В зависимости от вида аргумента g и преобразований P_ρ , H_η и R_j все частные критерии $I_g(\gamma, r, \eta, j)$ упорядочиваются в пятимерную матрицу, называемую матричным критерием качества процессов в системах управления.

Традиционно применяемые при оценке процессов в непрерывных системах управления показатели качества являются результатом описанного последовательного преобразования мат-

рицы T_r^i . Например, если рассматриваются оригиналы ($g \equiv t$) (в преобразовании P приняты матрицы с отличными от нуля элементами $a_r = b_r = 1$, $P_r = T_{rr}^i(t)$), а варьируются виды преобразований R_j при $H_r(P_r) = P_r$, то осреднением на $[t_{rp}, \infty)$ можно получить линейную интегральную оценку; поиском на $[t_{rp}, \infty)$ — экстремальные значения переходных ошибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ и соответствующие им моменты времени $t_1, t_2, \dots$; поиском нулей — время переходного процесса t_p , первого согласования t_y , частоту f_k и число полуколебаний и др. В том случае, когда $a_r(t) = t$, $b_r = 1$, преобразование H_r суть вычисление модуля, а R_j — осреднение, получается интегральная оценка с весом $\int_{t_{rp}}^{\infty} t |T_{rr}^i(t)| dt$.

По описанной схеме можно получить матричный критерий качества систем вместе со связями со средой $M\mathcal{F}_{sr}$, если воздействия не определены. Роль матрицы функций чувствительности ошибок в этом случае играет матрица передач $\{\Phi_{vr}\}$.

В том случае, если не определены связи системы со средой, т. е. задана модель системы M_s , представляющая собой сильно связный граф или контурную часть, то оцениваются скалярная функция $\Delta^{-1}(g)$, матрица A коэффициентов нормальной формы или характеристический полином $D(s)$, на основе которых можно получить ряд единых для всей системы частных критериев, не зависящих от комбинаций вершин входов и выходов и от дуг графа, где размыкается контурная часть. В частности, по частотной характеристике эквивалентной разомкнутой системы $W_s(j\omega) = \Delta(j\omega) - 1$ можно получить запасы устойчивости по модулю ΔR и фазе $\Delta\varphi$. Отметим, что для эквивалентной системы с передачей $\Delta^{-1}(s)$ можно получить все те показатели, что и для случая полностью определенной системы. Частотные характеристики $\Delta^{-1}(j\omega)$ и $(\Delta(j\omega) - 1)\Delta^{-1}(j\omega)$ позволяют вычислить показатели колебательности M, M^E , а также резонансные частоты ω_r, ω_r^E .

Показатели качества и частные критерии, полученные по характеристикам контурной части системы управления, являются наиболее универсальными и отражают общие свойства системы, присущие всем передачам при любых воздействиях.

Алгоритмы вычисления установившихся ошибок при воздействиях полиномиального типа.

Запишем изображение оцениваемой ошибки, представляющей собой сумму установившейся и переходной составляющих:

$$E(s) = E_{уст}(s) + E_{пер}(s) = \Phi_e(s) F(s),$$

$$\text{где } \Phi_e(s) = \frac{s^r B_m(s)}{A_n(s)} = \frac{s^r (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (7.58)$$

есть передаточная функция замкнутой системы по ошибке;

$$F(s) = 1, s^{l+1}, l = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (7.59)$$

— изображение типового воздействия. В выражении (7.58) выполняются следующие соотношения: $v+m \leq n$, $b_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $v=0, 1, 2, \dots$ — порядок астатизма. Изображение (7.59) обобщает изображения δ -функций различных порядков и полиномиальные воздействия: $l = -2$ — δ -функция второго порядка $f(t) = \delta^{(2)}(t)$; $l = -1$ — δ -функция $f(t) = \delta(t)$; $l=0$ — единичная ступенчатая функция $f(t) = 1(t)$; $l=1$ — линейная функция $f(t) = t$ и т. д.

Установившаяся составляющая ошибки $e_{уст}(t)$ при подаче на вход системы δ -функций ($l < 0$) равна нулю, так как из-за условия $a_0 \neq 0$ передаточная функция (7.58) не имеет полюсов в начале координат.

При степенных типовых воздействиях ($l \geq 0$) $f(t) = t^l/l!$ расчет установившейся ошибки производится с использованием коэффициентов ошибок:

$$e_{уст}(t) = C_0 f(t) + C_1 f'(t) + \dots + C_l f^{(l)}(t), \quad (7.60)$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots$ — коэффициенты ошибок.

Если $v \neq 0$, несколько первых коэффициентов ошибок равны нулю: $C_0 = C_1 = \dots = C_{v-1} = 0$, поэтому следует вычислять только коэффициенты $C_v, C_{v+1}, \dots$.

Для численного определения p ненулевых коэффициентов ошибок $C_v, \dots, C_{v+p-1}$ наиболее удобна рекуррентная формула [81]:

$$C_{v+k} = \left(b_k - \sum_{r=1}^k C_{k-r} a_r \right) / a_0, \quad k=0, 1, \dots, p-1, \quad (7.61)$$

причем $b_k = 0$ при $k > m$, $a_r = 0$ при $r > n$.

Программа, реализующая (7.61) на языке АЛМНР-65, приводится ниже:

```
"РАЗР"6. F=M+1; AM=A[1]; "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"Р"
ВЫП"ВN[1]="Е"1"≤F"ТО" (B[1])"ИНА"(0); C[1]=
=BN[1]/AM; "Е"Р=1"ТО"("НА"1); "ДЛ"1=2"Ш"1"
ДО"Р"ВЫП"("Е"1≤N+1"ТО"(Z=1-1); C[1]=(BN[1]-
-Σ(K=1, Z, A[K+1]×C[1-K]))/AM; 1."ВЫВ"
"МАСС"С◇
(7.62)
```

Описательная часть программы (7.62): "ГДЕ" $N=n$; $M=m$; $P=p$; $V[m+1]=\dots$; $A[n+1]=\dots$; $BN[n+p]$; $C[p]$ "КОН", где приняты следующие идентификаторы: N, M — порядки полиномов A и B ; P — число вычисляемых ненулевых коэффициентов ошибок; $A[n+1]$, $B[m+1]$ — массивы коэффициентов полиномов, заполняемые в порядке возрастания степеней.

Вычисление начальных значений ошибки и ее производных. Подача на вход системы типового воздействия (7.59) при ну-

левых предначальных условиях в зависимости от соотношения степеней полиномов n и m , порядка астатизма v и степени воздействия l вызывает появление ненулевых посленачальных условий $e(0+)$, $e'(0+)$, ..., $e^{(n-1)}(0+)$, а в некоторых случаях и δ -функций тех или иных порядков.

Представляет интерес вычисление площадей δ -функций (если они имеют место) и вектора приращения начальных условий, вызванных приложением типового воздействия (7.59), поскольку переходная составляющая процесса может рассматриваться как свободное движение системы при этих начальных условиях. Начальные условия наряду с корнями характеристического полинома определяют процессы, поэтому в ряде случаев могут рассматриваться как некоторые из косвенных показателей качества, характеризующих начальный участок процессов. Кроме того, имея достаточно большое число производных $e^{(i)}(0+)$, можно вычислить ординаты процессов (см. п. 2.2.9).

При выполнении условия $m + v \geq n + l + 1$ (7.63) изображение ошибки $E(s)$ представляет собой неправильную дробь, которая может быть записана в следующем виде:

$$E(s) = E_{n1}(s) + E_{n2}(s) = D_r s^r + \dots + D_1 s + D_0 + G(s)/A_n(s). \quad (7.64)$$

Первое слагаемое $E_{n1}(s)$ соответствует δ -функциям $D_0 \delta(t)$, $D_1 \delta'(t)$, ..., $D_r \delta^{(r)}(t)$, $r = m + v - (n + l - 1)$ в начале координат. Второе слагаемое $E_{n2}(s)$ — изображение переходной составляющей процесса; порядок полинома $G(s)$ по крайней мере на единицу меньше n .

Алгоритм вычисления коэффициентов D_i , $i = 0, 1, \dots, r$, на языке АЛМИР-65 имеет вид

```
"РАЗР"6. R=NЮ-L-1; F=R+M+1; "ДЛ"1=1"Ш"
1"ДО"F"ВЫП"BN[I]="E"1>R"ТО"(B[I-R])"ИНА"(0);
AN=A[N+1]; Q=M+R-N; D[Q+1]=BN[F]/AQ"E"Q=
O"ТО"("ИНА"5); "ДЛ"1=Q"Ш"-1"ДО"1"ВЫП"("E"Q≤
≤N"ТО"(Y=Q-I+1)"ИНА"("E"1 ≥ Q-N+1"ТО"(Y=
Q-I+1)"ИНА"(Y=N)); D[I]=(BN[I+N]-Σ(K=1, Y,
A[N-K+1]×D[I+K]))/AN; 5."ВЫВ" "МАСС"D (7.65)
```

В описательной части к программе (7.65) должно быть указано: "ГДЕ" $N=n$; $M=m$; $L=l$; $NЮ=v$; $A[n+1]=\dots, \dots$, $B[m+1]=\dots, \dots$, $D[m+v-n-l]$; $BN[v+m-l]$ "КОН".

Вычисление посленачальных значений ошибки e и ее производной любых порядков весьма быстро осуществляется по рекуррентным формулам, полученным из теорем о дифференцировании и о начальном значении оригинала. Программа на АЛМИР-65 для вычисления начальных значений ошибки и ее $r-1$ производных имеет вид

```
"РАЗР"6. Z=A[N+1]; Y[1]=G[N]/Z; "ДЛ"1=2"Ш"
"О"N"ВЫП"Y[1]=(G[N-I+1]-Σ(K=1, I-1, A[N-
1]×Y[I-K]))/Z; "ДЛ"1=N+1"Ш"1"ДО"R"ВЫП"
```

$$Y[I] = (-\sum_{K=1, N, A[N-K+1]} \times Y[I-K]) / Z; \text{ "ВЫВ" } \\ \text{"МАСС"} Y \diamond \quad (7.66)$$

В описательной части к (7.66) должно быть указано: "ГДЕ" $N=n$; $R=r$; $A[n+1] = \dots, \dots$; $G[n] = \dots, \dots$; $Y[r]$ "КОН".

Получение изображения переходной составляющей ошибки. Вычисление ряда прямых и косвенных оценок переходных ошибок $\epsilon_{\text{пер}}(t)$ требует выделения из процесса $\epsilon(t)$ устойчивой системы затухающей переходной составляющей, что может быть сделано путем вычитания из $\epsilon(t)$ установившейся составляющей и устранения возможных δ -функций в начале координат. Эту операцию наиболее просто осуществить в области изображений.

Получение изображения переходной ошибки $E_{\text{пер}}(s)$ связано с вычислением изображения установившейся ошибки

$$E_{\text{уст}}(s) = \left(\sum_{k=0}^l C_k s^k \right) F(s) = (C_0 + C_1 s + \dots + C_l s^l) \cdot s^{l+1}$$

при $\nu < l+1$ или изображения δ -функций $E_{\text{п1}}(s) = \sum_{k=0}^{\nu} D_k s^k$ при $m + \nu \geq n + l + 1$ с последующим вычитанием дробно-рациональных выражений для получения коэффициентов полинома $G(s)$ в числителе $E_{\text{п2}}(s)$. Вычислять полином $A(s)$ знаменателя $E_{\text{п2}}(s)$ нет необходимости, так как это есть знаменатель $\Phi_c(s)$.

Программа определения изображения переходной ошибки с анализом соотношений между n , m , ν и l представлена ниже:

"РАЗР"6. $R = \text{НЮ} - L - 1$; "Е" $R \geq 0$ "ТО" ("НА"1) "ИНА" ("НА"2); 1. "ВЫВ" $\text{EPSВЫН} = 0$; "ПРОБ"; $F = R + M + 1$; "Е" $M + R < N$ "ТО" ("НА"3) "ИНА" ("НА"4); 3. "ВЫВ" $D = 0$; "ДЛ" $I = 1$ "Ш"1 "ДО" F "ВЫП" $G[I] = \text{"Е"} I > R$ "ТО" ($B[I-R]$) "ИНА" (0); "Е" $F < N$ "ТО" ("ДЛ" $I = F + 1$ "Ш"1 "ДО" N "ВЫП" $G[I] = 0$); "НА"7; 4. "ДЛ" $I = 1$ "Ш"1 "ДО" F "ВЫП" $BN[I] = \text{"Е"} I > R$ "ТО" ($B[I-R]$) "ИНА" (0); $AN = A[N+1]$; $Q = M + R - N$; $D[Q+1] = BN[F]/AN$; "Е" $Q = 0$ "ТО" ("НА"5); "ДЛ" $I = Q$ "Ш"1 "ДО" I "ВЫП" ("Е" $Q \leq N$ "ТО" ($Y = Q - I + 1$) "ИНА" ("Е" $I \geq Q - N + 1$ "ТО" ($Y = Q - I + 1$) "ИНА" ($Y = N$))); $D[I] = (BN[I + N] - \sum_{K=1, U, A[N-K+1]} \times D[I+K]) / AN$; 5. "ВЫВ" "МАСС" D ; "ДЛ" $I = 1$ "Ш"1 "ДО" N "ВЫП" ("Е" $I \leq Q + 1$ "ТО" ($U = I$); $G[I] = BN[I] - \sum_{K=1, U, D[K]} \times A[I+1-K]$); "НА"7; 2. $P = -R$; $AM = A[1]$; "ДЛ" $I = 1$ "Ш"1 "ДО" $N + P$ "ВЫП" $BN[I] = \text{"Е"} I \leq M + 1$ "ТО" ($B[I]$) "ИНА" (0); $C[I] = BN[I] / AM$; "Е" $P = 1$ "ТО" ("НА"6); "ДЛ" $I = 2$ "Ш"1 "ДО" P "ВЫП" ("Е" $I \leq N + 1$ "ТО" ($Z = I - 1$); $C[I] = (BN[I] - \sum_{K=1, Z, A[K+1]} \times C[I-K]) / AM$); 6. $S = P$; "ДЛ" $I = 1$ "Ш"1 "ДО" N "ВЫП" ("Е" $I \geq N - P + 2$ "ТО" ($S = N - I + 1$); $G[I] = BN[I + P] - \sum_{K=1, S, C[P-K+1]} \times A[I+K]$); 7. "ВЫВ" "МАСС" G $\diamond$

В результате работы программы вычисляется массив коэффициентов полинома $G(s)$ числителя $E_{п2}(s)$ (7.64). При выполнении условия $v > l$ программа выводит на печать: EPS УСТ=0; при соблюдении (7.63) в соответствии с выражением (7.64) дополнительно выводится массив коэффициентов D . Описательная часть программы (7.67) имеет вид: "ГДЕ" $N=n$; $M=m$; $NIO=v$; $L=l$; $A[n+1]=\dots$; $B[m+1]=\dots$; $BN[\max\{v+m-l, n+l+1-v\}]$; $G[n]$; $D[m+v-n-l]$; $C[l+1-v]$ "КОН".

Алгоритмы вычисления интегральных показателей качества. Интегральные квадратичные оценки (ИКО) являются важными показателями качества процессов и используются при различных спектрах входных воздействий в большинстве методик синтеза систем автоматического управления и регулирования.

Интегральная квадратичная оценка может быть определена с помощью следующего выражения:

$$V = \int_0^{\infty} \varepsilon_{п2}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_{п2}(s) E_{п2}(-s) ds, \quad (7.68)$$

где $\varepsilon_{п2}(t)$ — переходная составляющая ошибки системы, $E_{п2}(s)$ — ее изображение по Лапласу.

Существует большое число способов получения значений ИКО для линейных систем; для изображений $E_{п2}(s)$, описываемых дробно-рациональными выражениями вида (7.64), целесообразно применить описанный в работе [58] алгоритм, который за конечное число элементарных операций позволяет определять точное значение оценки. Операторная часть программы, реализующей этот алгоритм на языке АЛМИР-65, имеет вид

```
"РАЗР"6. A1[1]=A[N+1]; "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"N
"ВЫП"(A1[1+1]=A[N-1+1]; G1[1]=G[N-1+1]);
V=0; "Е"А1[1]≤0"ТО"("НА"1); "ДЛ"K=1"Ш"1"ДО"
"N"ВЫП"("Е"А1[K+1] ≤ 0"ТО"("НА"1); ALFA=A1
[K]/A1[K+1]; BETA=G1[K]/A1[K+1]; V=V+(BETA↑2)/
ALFA; K1=K+2; "Е"K1≤N"ТО"("ДЛ"1=K1"Ш"2"ДО"
"N"ВЫП"(A1[1]=A1[1]-ALFA × A1[1+1]; G1[1]=
G1[1]-BETA×A1[1+1])); V=V/2; "НА"2; 1. "ВЫВ"
"НЕУСТ"; 2. "ВЫВ"V◇ (7.69)
```

Для применимости алгоритма (7.69) необходимо, чтобы степень полинома числителя была меньше степени полинома знаменателя. Из изложенного выше следует, что дробно-рациональное изображение ошибки $E_{п2}(s)$ этому условию удовлетворяет. Описательная часть программы (7.69): "ГДЕ" $N=n$; $A[n+1]=\dots$; $G[n]=\dots$; $A1[n+1]$; $G1[n]$ "КОН".

Следует отметить одну особенность вычисления ИКО по изображению переходной ошибки. Если при определенном входном воздействии $1/s^{l+1}$ изображение переходной ошибки

имеет вид $E_{n2}(s) = G_m(s)/A_n(s)$, $m < n$, то при изменении степени воздействия $l = l_1 - 1$, что соответствует умножению $E_n(s)$ на s , получим ИКО от производной $\epsilon'_n(t)$. Действительно, ИКО вычисляется всегда по дробно-рациональному отношению при $m < n$. При умножении его на s возможны две ситуации: 1) $s E_n(s) = \mathcal{L}\{\epsilon'_n(t)\}$ при $m+1 < n$, 2) $s E_n(s) = \mathcal{L}\{\epsilon'_n(t)\} + b_{n-1}/a_n$ при $m+1 = n$. Отношение b_{n-1}/a_n как раз представляет собой площадь δ -функции в начале координат, которая вычисляется отдельно и в состав ИКО не входит.

Интегральные линейные оценки (моменты) могут быть получены по выражениям:

$$I_r = \int_0^{\infty} t^r \epsilon_{n2}(t) dt = (-1)^r \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^r}{ds^r} \epsilon_{n2}(s) = (-1)^r L_r, \quad (7.70)$$

где L_r — коэффициенты, вычисляемые аналогично коэффициентам ошибки с той лишь разницей, что в качестве исходной информации используется изображение $E_{n2}(s)$, а не $\Phi_e(s)$. Поэтому для их получения может быть непосредственно применен алгоритм (7.62).

Для обеспечения гибкости формирования косвенного векторного критерия представляется целесообразным сконструировать единый алгоритм, который позволил бы сразу получить желаемую комбинацию из рассмотренных выше критериев качества. Исходными данными для этого алгоритма являются массивы полиномов $B(s)$ и $A(s)$ передаточной функции системы по ошибке $\Phi_e(s)$. В зависимости от конкретных требований задается число p вычисляемых коэффициентов ошибки, степень воздействия l , указывается на необходимость вычисления изображения переходной ошибки (в случае требования получить полином числителя $E_{n2}(s)$ и (или) интегральные оценки), указывается на необходимость вычисления интегральной квадратичной оценки V и требуемого числа моментов L_r .

За основу такого единого алгоритма принимаются алгоритмы (7.62), (7.65), (7.68), (7.67) и (7.69). Программа БВК, реализующая объединенную систему алгоритмов, приведена ниже:

"РАЗР"6. M2. "Е"ЧКО<1"ТО"("НА"K1); D=ЧКО; Ф=НЮ+M+1; AM=A[1]; "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"Д"ВЫП"В1[1] = "Е"1 ≤ НЮ"ТО"(0)"ИНА"("Е"1 ≤ Ф"ТО"(B[1])"ИНА"(0)); КО[1]=B[1]/AM; "Е"Д=1"ТО"("НА"9); "ДЛ"1=2"Ш"1"ДО"Д"ВЫП"("Е"1 ≤ N+1"ТО"(Z=I-1); КО[1]=(B[1]-Σ(K=1, Z, A[K+1]×КО[I-K]))/AM); 9. "ВЫВ""МАСС"КО; K1. "Е"НВЕРС<1"ТО"("НА"БФП); ЦЛ=0; K2.ЦЛ=ЦЛ+1; "Е"ЦЛ>ЧСВ"ТО"("НА"БФП); L=СВ[ЦЛ]; "ВЫВ""СТРО", L, "ПРОБ"; M3. R=НЮ-L-1; "Е"R≥0"ТО"("НА"1)"ИНА"("НА"2); 1. "ВЫВ""EPSВЫН=0", "ПРОБ"; F=R+M+1; "Е"

$M+R < N$ "ТО" ("НА"3) "ИНА" ("НА"4); 3. "ВЫВ" "D=0"; "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "F" "ВЫП" "G[I] = "E" "I > R" "ТО" (B[I-R]) "ИНА" (0); "E" "F < N" "ТО" ("ДЛ" "I = F + 1" "Ш" "I" "ДО" "N" "ВЫП" "G[I] = 0; "НА"7; 4. "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "F" "ВЫП" "BN" [I] = "E" "I > R" "ТО" (B[I-R]) "ИНА" (0); AN=A[N+1]; Q=M+R-N; D[Q+1] = BN[F]/AN; "E" "Q=0" "ТО" ("НА"5); "ДЛ" "I=Q" "Ш" "I" "ДО" "I" "ВЫП" ("E" "Q ≤ N" "ТО" (Y=Q-1+1) "ИНА" ("E" "I ≥ Q-N+1" "ТО" (Y=Q-1+1) "ИНА" (Y=N)); D[I] = (BN[I+N] - Σ(K=1, Y, A[N-K+1] × D[I+K]))/AN); 5. "ВЫВ" "МАСС" "D; "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "N" "ВЫП" ("E" "I ≤ Q+1" "ТО" (U=1); G[I] = BN[I] - Σ(K=1, U, D[K] × A[I+1-K])); "НА"7; 2. P=-R; "ДЛ" "I = 1" "Ш" "I" "ДО" "N+P" "ВЫП" "BN" [I] = "E" "I ≤ M+1" "ТО" (B[I]) "ИНА" (0); C[I] = BN[I]/AM; "E" "P=1" "ТО" ("НА"6); "ДЛ" "I = 2" "Ш" "I" "ДО" "P" "ВЫП" ("E" "I ≤ N+1" "ТО" (Z=I-1); C[I] = (BN[I] - Σ(K=1, Z, A[K+1] × C[I-K]))/AM); 6. S=P; "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "N" "ВЫП" ("E" "I ≥ N-P+2" "ТО" (S=N-I+1); G[I] = BN[I+P] - Σ(K=1, S, C[P-K+1] × A[I+K])); 7. "ВЫВ" "МАСС" "G; M4. "E" "HBV < 1" "ТО" ("НА"K3); A1[I] = A[N+1]; "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "N" "ВЫП" (A1[I+1] = A[N-I+1]; G1[I] = G[N-I+1]; V=0; "E" "A1[I] ≤ 0" "ТО" ("НА"12); "ДЛ" "K = 1" "Ш" "I" "ДО" "N" "ВЫП" ("E" "A1[K+1] ≤ 0" "ТО" ("НА"12); ALFA=A1[K]/A1[K+1]; BETA=G1[K]/A1[K+1]; V=V+(BETA+2)/ALFA; K1=K+2; "E" "K1 ≤ N" "ТО" "ДЛ" "I=K1" "Ш" "2" "ДО" "N" "ВЫП" (A1[I] = A1[I]-ALFA × A1[I+1]; G1[I] = G1[I]-BETA × A1[I+1])); V=V/2; "НА"13; 12. "ВЫВ" "НЕУСТ", "ПРОБ"; 13. "ВЫВ" "СТРО", V; K3. "E" "ЧЛМ < 1" "ТО" ("НА"K2); Л = ЧЛМ; AM=A[1]; "ДЛ" "I=1" "Ш" "I" "ДО" "Л" "ВЫП" "B2[I] = "E" "I ≤ M+1" "ТО" (G[I]) "ИНА" (0); ЛМ[I] = B2[I]/AM; "E" "Л = 1" "ТО" ("НА"21); "ДЛ" "I=2" "Ш" "I" "ДО" "Л" "ВЫП" ("E" "I ≤ N+1" "ТО" (Z=I-1); ЛМ[I] = (B2[I] - Σ(K=1, Z, A[K+1] × ЛМ[I-K]))/AM); 21. "ВЫВ" "МАСС" "ЛМ; "НА"K2; БФП. "СТОП" ◇

Описательная часть программы имеет вид: "ГДЕ" A[n+1] = ..., ..., B[m+1] = ..., ..., NYO = ..., ..., ЧКО = ..., ..., ЧСВ = ..., ..., ЧЛМ = ..., ..., HBEPS = ..., ..., HBV = ..., ..., СВ [ЧСВ] = ..., ..., КО [ЧКО]; B1[ЧКО]; BN[max{v+m-l, n+l+1-v}]; G[n]; D[m+v-n-l]; C[l+1+v]; A1[n+1]; G1[n]; ЛМ [ЧЛМ]; B2[ЧЛМ] "КОН".

При использовании программы БВК необходимо уточнять, какие задачи решаются. Идентификатор ЧКО указывает число коэффициентов ошибок, подлежащих вычислению (ЧКО=0, 1, 2, ...); HBEPS=1 указывает на необходимость вычислять изображение переходной ошибки $E_{п2}$; ЧСВ — число степеней воздействий, при которых требуется вычислять $E_{п2}$; HBV=1 указывает на необходимость вычисления ИКО; ЧЛМ — число линейных интегральных оценок (моментов), при ЧЛМ=0 моменты не вычисляются.

Алгоритмы вычисления корневых показателей качества. Некоторые ограничения и условия на расположение корней характеристических полиномов $D(s)$ или собственных значений матриц A моделей систем управления, при выполнении которых имеет место определенный класс движений при типовых начальных условиях, называют корневыми показателями качества. Корневые показатели качества, как правило, дают некоторые параметры областей на комплексной плоскости, в которых расположены корни характеристического полинома. Говоря о локализации корней, целесообразно различать две задачи: 1) установление принадлежности корней области с заранее заданными формой и параметрами; 2) определение параметров области заданной формы, которой принадлежат все корни. Следует отметить, что решение первой задачи имеет качественный, а второй — количественный характер. Примером первой задачи является определение того, имеет ли система заданную степень устойчивости η , степень затухания ψ и т. д., а решение второй — позволяет найти численные значения показателей η , ψ и т. д., которыми обладает система [16].

Корневые показатели качества, разумеется, могут устанавливаться по значениям корней, вычисленным по тем или иным алгоритмам поиска корней полиномов или собственных значений сопровождающих матриц. Однако при этом получается избыточная информация из-за значительного объема вычислений.

В различных приложениях решаются задачи локализации корней или собственных значений областями различных форм [89]. При этом разработка алгоритмического обеспечения оказывается связанной с вопросом: какие формы областей следует выбрать, т. е. какие алгоритмы следует разрабатывать? Прежде чем ответить на него, необходимо сказать о возможности отображений комплексных плоскостей.

Пусть на плоскости s задана область Γ и необходимо определить, принадлежат ли ей корни полинома или собственные значения матрицы A . Положим, что нет алгоритма, решающего данную задачу для этой формы области, но имеются алгоритмы для других конфигураций областей, например для области Λ . Введем отображение $s=f(\lambda)$, переводящее точки Γ в точки области Λ , и согласно этому вычислим коэффициенты полинома $H(\lambda)=D(f(\lambda))$ или элементы новой матрицы B . Тогда исходная задача оказывается трансформированной в другую: определить, принадлежат ли корни $H(\lambda)$ области Λ . Отсюда следует, что имеются два пути определения принадлежности корней заданной области Γ : 1) применение алгоритма локализации, разработанного для области формы Γ ; 2) отображение, переводящее область Γ в другую форму Λ , обеспеченную алгоритмом. Разумеется, при этом необходим дополнительный алгоритм соответствующего пересчета коэффициентов

полиномов или элементов матриц, который может быть достаточно сложным.

Для примера, если необходимо установить, обладает ли полином $D(s)$ заданной степенью устойчивости η , часть левой полуплоскости $\text{Res} \leq \eta < 0$ можно отобразить на левую полуплоскость $\lambda = s + \eta$. При этом $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \eta \mathbf{E}$, а коэффициенты смещенного полинома $H(\lambda)$ вычисляются по обобщенной схеме Горнера. Программа на языке АЛМИР-65 [55] имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{"РАЗР"6. "ДЛ"1=1"Ш"1"ДО"N"ВЫП"(Q1=P[1]; "ДЛ"} \\ & \text{J=2"Ш"1"ДО"N + 2-1"ВЫП"(Q2 = P[J] + Q1 \times C;} \\ & \text{Q1=Q2; P[J]=Q2)); "ВЫВ" "МАСС"Р \diamond \quad (7.71) \end{aligned}$$

Описательная часть программы (7.71): "ГДЕ" $N=n$; $C = -\eta$; $A[n+1]=\dots$; "КОН", где C — степень устойчивости, N — порядок полинома, A — массив коэффициентов, заполняемый, начиная со старшего. Применяя к $H(\lambda)$ алгоритм Рауса (см. гл. 6), устанавливают принадлежность его корней левой полуплоскости, что одновременно означает наличие у исходного полинома $D(s)$ степени устойчивости η .

Если необходимо установить принадлежность собственных значений $\mathbf{A}$ кругу (a, R) , где a — действительное число, можно воспользоваться отображением $\lambda = (s - a)/R$ круга (a, R) в круг единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости λ [89]. Далее к матрице

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - a\mathbf{E})/R \quad (7.72)$$

применяется алгоритм определения принадлежности собственных значений матриц единичному кругу (см. гл. 6). Алгоритм преобразования матриц (7.72) легко реализуется программно.

В ряде задач может быть использовано отображение левой полуплоскости на правую $\lambda = -s$. При этом $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, а коэффициенты полинома $H(\lambda)$ от соответствующих коэффициентов $D(s)$ отличаются знаками минус при нечетных степенях.

Напомним, что алгоритм определения устойчивости по матрице $\mathbf{A}$, рассмотренный ранее (см. гл. 6), также является примером решения задачи локализации с помощью отображения левой полуплоскости в круг единичного радиуса.

Более полно вопросы отображения плоскостей применительно к матрицам рассмотрены в работе [89].

Таким образом, разработку алгоритмов локализации корней оказывается связанной с вопросом разработки алгоритмов отображения. И ответ на вопрос: стоит ли создавать алгоритм локализации для новой конкретной конфигурации области или проще реализовать алгоритм отображения на область, обеспеченную готовым алгоритмом, — должен быть получен в каждом случае дополнительными исследованиями.

Другим сильным средством расширения возможностей алгоритмов локализации является использование взаимных перехо-

дов между матрицами и полиномами. Если имеется полином $D(s)$ (матрица A) и нужно ответить на вопрос о принадлежности всех его корней (собственных значений) области Γ , но нет эффективного алгоритма для полинома (матрицы), то следует записать сопровождающую матрицу (вычислить коэффициенты характеристического полинома) и применить соответствующий алгоритм локализации для матрицы (полинома).

Вопросы взаимосвязи алгоритмов локализации корней более полно рассмотрены в работе [16].

Решение второй задачи, связанной с нахождением численных значений корневых показателей качества, может быть осуществлено на базе алгоритмов решения первой задачи локализации корней, когда определяется, обладает ли система наперед заданным качеством. Вычисление фактических значений корневых показателей при этом строится как поиск путем целенаправленного перебора по одной из известных схем [85].

Алгоритмы вычисления частотных показателей качества. Широкое применение в традиционных методах расчета линейных систем автоматического управления нашли частотные характеристики и вычисленные на их основе частные критерии. Это объясняется относительной простотой их получения и хорошо прослеживаемой связью с показателями качества процессов.

Для простейших одноконтурных и приводимых к ним систем наиболее часто используются следующие косвенные частотные показатели качества: показатель колебательности $M = \max_{\omega} |\Phi_{\gamma r}(j\omega)|$, где $\Phi_{\gamma r}$ — передача по каналу воспроизведения; или показатели колебательности по ошибке: $M^E = \max_{\omega} |\Phi_{\gamma r}^E(j\omega)|$; резонансные частоты ω_p и ω_p^E ; максимум вещественной частотной характеристики $P_{\max}$; частота положительности ω_+ вещественной частотной характеристики; частота среза ω_{cp} ; запасы устойчивости по модулю ΔR , ΔI и по фазе $\Delta \varphi$ и др.

Значения ординат частотных характеристик в общем случае вычисляются гораздо быстрее ординат переходных процессов, в результате чего быстрее вычисляются и частотные показатели, несмотря на то, что для их определения, как правило, требуется привлечение алгоритмов поиска экстремумов или нулей нелинейных функций.

Напомним, что по частотным характеристикам эквивалентной одноконтурной разомкнутой системы $W_r(j\omega) = \Delta(j\omega) - 1$ в случае многоконтурных систем могут быть оценены единые для всей системы показатели качества ω_{cp}^3 , ΔR , $\Delta \varphi$ — аналоги частотных показателей одноконтурных разомкнутых систем [22].

8. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

8.1. О задачах и алгоритмах анализа линейных систем

В § 1.6 приведена общая схема анализа систем управления — дана последовательность основных действий по выявлению различных свойств U^u , $u = 1, 2, \dots$, топологически сложных систем $M_\varphi(r)$, $\varphi = S, \mathcal{F}SF, R$, на основе множества частных моделей и характеристик $\{M_{\varphi U}^u(r)\}$ или значений частных $I_i[M_{\varphi U}^u(r)]$ и обобщенных J_j критериев, полученных по моделям топологического ($r=1$), структурного ($r=2$) или параметрического ($r=3$) рангов неопределенности. В соответствии с этой схемой решение задач анализа систем с раскрытой топологией требует разработки двух основных подсистем алгоритмов: получения частных моделей $M_\varphi(r) \rightarrow \{M_{\varphi U}^u(r)\}$ и вычисления критериев качества $M_{\varphi U}^u(r) \rightarrow \{J_i\}$.

Модели анализируемых систем и их частные модели, по которым непосредственно выявляются свойства систем или вычисляются оценки качества, как правило, имеют различные формы представления. Модели систем управления с раскрытой топологией M_φ , $\varphi = S, \mathcal{F}SF, R$, могут быть заданы в форме графов, структурных схем, систем уравнений различных порядков в причинно-следственной форме и в обобщенной нормальной форме, т. е. в специальной форме Коши с дополнительными алгебраическими уравнениями связей внутренних переменных и выходов, сохраняющей информацию о топологии систем и структур отдельных операторов. Существование этих и, возможно, других форм объясняется тем, что, во-первых, для построения моделей применяются разные способы и алгоритмы, дающие результат в той или иной форме, во-вторых, для различных алгоритмов получения частных моделей и характеристик оказываются удобными соответствующие формы представления исходной информации о топологически сложных системах, а, в-третьих, на выбор формы моделей оказывают влияние вкусы и привычки ис-

следователей, соображения удобства кодирования и ввода в ЭВМ информации и т. д. Гибкость алгоритмического обеспечения анализа линейных систем в значительной степени будет определяться возможностью и простотой переходов между различными формами представления моделей систем с раскрытой топологией. По этой причине в состав комплекса алгоритмов анализа следует включать и подсистему алгоритмов переходов между формами задания моделей.

Частные модели и характеристики $\{M_{ij}^u\}$ — определители, операторы передач, функции чувствительности и т. д. — в зависимости от выявляемых свойств U^u или от форм задания исходных моделей с раскрытой топологией представляются в виде дробно-рациональных выражений или полиномов от комплексного аргумента s , матриц, временных, частотных характеристик, а также индексных, символьных или смешанных массивов и выражений. Следовательно, в комплексе алгоритмов должна быть подсистема алгоритмов взаимосвязи этих форм представления частных моделей, что во многих случаях упрощает получение характеристик нужных форм, определяемых теми разнообразными свойствами, наличие которых в анализируемой системе требуется выявить.

Из приведенного неполного перечисления основных алгоритмов даже без раскрытия их содержания становится ясно, что задачи анализа сложных систем управления могут быть успешно решены только при наличии сложного комплекса алгоритмов, представляющего собой совокупность взаимосвязанных подсистем, имеющих достаточно самостоятельные функции.

По существу, основными алгоритмами, обеспечивающими анализ систем управления, являются алгоритмы перехода между различными формами представления информации об анализируемых системах $M_q(r)$, $\varphi = S, \mathcal{F}, SF, R$, множествах $\{M_{ij}^u(r)\}$, $u=1, 2, \dots$, частных моделей и характеристик и о свойствах U^u систем управления различных рангов неопределенности ($r=1, 2, 3$), оцениваемых векторами самых разнообразных частных критериев I_i или обобщенными критериями J_j . При этом важнейшим оказывается вопрос о возможности тех или иных переходов между различными формами представления информации о моделях, так как от ответа на этот вопрос зависит, какие алгоритмы анализа в принципе могут быть разработаны.

В этой связи важной является задача нахождения способов описания или перечисления всего множества принципиально возможных алгоритмов подготовки данных для заключительного этапа анализа. Одновременно следует определить подсистемы алгоритмов, обеспечивающих решение заданных подклассов задач анализа, минимально необходимые для этого алгоритмы, указать наиболее рациональные пути развития и совершенствования алгоритмического обеспечения.

8.2. Множество форм представления моделей систем

Для удобства дальнейшего изложения любую информацию о системах управления будем называть моделью, особо выделяя относительную определенность различных форм представления моделей. В силу этого моделью будут называться не только модели с раскрытой топологией $\{M_q(r)\}$ или частные модели $\{M_{\varphi}^u(r)\}$, но также различные частные $\{I_i\}$ и обобщенные $\{J\}$ критерии.

С целью четкого выделения этапов последовательного раскрытия неопределенности исследуемых систем управления в первой главе введены понятия моделей $M_q(r)$, систем $(\varphi=S)$, систем со связями $(\varphi=\mathcal{F}SF)$ и расширенных топологически сложных систем $(\varphi=R)$ «чистых» и смешанных рангов. Все эти модели, содержащие информацию о топологии систем управления, можно объединить в одну группу: $\mathcal{M}_G = \{M_\varphi(r), M_\varphi(r, p), M_q(r, p, q): \varphi=S, \mathcal{F}SF, R; r=0, 1, 2, 3; p=1, 2, 3; q=2, 3; q > p > r\}$.

В другую группу $\mathcal{M}_\Phi$ входят не содержащие информацию о топологии частные модели и характеристики $\{M_{\varphi}^u(r)\}$ самих систем $M_S(r)$ — определители Δ , характеристические полиномы D , матрицы коэффициентов A нормальной формы записи дифференциальных уравнений, частотные характеристики $W_s(j\omega)$ эквивалентных одноконтурных систем, функции чувствительности определителей и др.; систем со связями $M_{\mathcal{F}SF}(r)$ — передаточные функции $\Phi_{ir}(s)$, матрицы $\langle A, B, C, D \rangle$, временные и частотные характеристики, функции чувствительности передач и др.; расширенных систем $M_R(r)$ — функции чувствительности $1_{\beta r}^{y_i}$ выходов y_i к параметрам систем и специально введенным параметрам β_r связей со средой на входе F , матрицы коэффициентов A_R с блоками дифференциальных уравнений генераторов воздействий, основные и дополнительные процессы и др. Характеристики $\{M_{\varphi}^u(r)\}$, полученные по полностью определенным моделям, могут иметь вид различных выражений, списков и массивов: индексных, если они получены по моделям $M_\varphi(1)$, символьных, в случае $M_\varphi(2)$, и смешанных, если модели имели смешанный ранг неопределенности.

Третью группу моделей $\mathcal{M}_I$ образуют всевозможные оценки, показатели качества, частные $\{I_i\}$ и обобщенные $\{J\}$ критерии. Элементы множества $\mathcal{M}_I$ не содержат информации ни о структуре, ни о топологии систем управления, но за счет максимального устранения избыточности позволяют количественно охарактеризовать именно те свойства, которые требуется исследовать. В этой группе данных о системах можно выделить следующие подмножества оценок: топологии, структуры, а также

свойств самих систем, передач и процессов по полностью определенным моделям. Оценки, критерии качества полностью определенных систем принято разделять на корневые, временные или прямые, частотные и интегральные.

На рис. 60 условно в виде прямоугольников изображены различные формы представления информации о моделях систем. Существенной особенностью взаимного расположения по уровням и группировке этих форм является учет их относительной определенности: на самой верхней плоскости расположены модели M_G с раскрытой топологией; на средней плоскости сгруппированы частные модели M_Φ , не содержащие полной информации о топологии систем управления; нижняя плоскость отведена под множество M_I оценок и критериев качества систем и процессов. Между плоскостями M_G и M_Φ штриховой линией выделено множество $M_{G\Phi}$ моделей с частично свернутой топологией, полученных за счет исключения внутренних переменных, звеньев или уравнений с сохранением эквивалентности выбранных характеристик. Для случаев $\{M_\Phi(3)\}$, $\{M_{\Phi I}^u(3)\}$ и $\{I_\Phi[M_{\Phi I}^u(3)]\}$ на рис. 60 также выделены плоскости, на которых размещаются частные модели и оценки, характеризующие установившиеся, в частности равновесные, движения (модели статик).

На самом верхнем уровне M_G , кроме моделей $M_\Phi(3)$, $\Phi=S$, $\mathcal{F}SF$, R с полностью известными топологией, структурами всех операторов и значениями параметров, размещены модели структурного $M_\Phi(2)$ и топологического $M_\Phi(1)$ рангов, а также модели нулевого ранга $M_\Phi(0)$, представляющие множества переменных, воздействий и выходов. В штриховых прямоугольниках изображены модели смешанных рангов в соответствии с их определенностью относительно моделей «чистых» рангов. Для каждого из рангов неопределенности на плоскости M_G размещены модели систем M_S , систем со связями $M_{\mathcal{F}SF}$ и расширенных систем M_R с указанием формы задания топологически сложной системы: 1 — графы, 2 — структурные схемы, 3 — дифференциальные уравнения различных порядков, 4 — обобщенная нормальная форма.

Средний уровень размещения моделей на рис. 60 отводится под частные модели и характеристики. В случае полной определенности частные модели задаются в форме дробно-рациональных выражений, матриц, временных и частотных характеристик. Частные модели, получаемые по исходным описаниям $M_\Phi(2)$, имеют вид символьных, а по $M_\Phi(1)$ — индексных выражений или массивов. Смешанные ранги моделей систем с раскрытой топологией соответственно дают смешанные выражения или массивы, описывающие частные модели или характеристики: символьно-численные — для $M_{\Phi I}^u(2, 3)$, индексно-символьные — для $M_{\Phi I}^u(1, 2)$, индексно-символьно-численные — для $M_{\Phi I}^u(1, 2, 3)$.

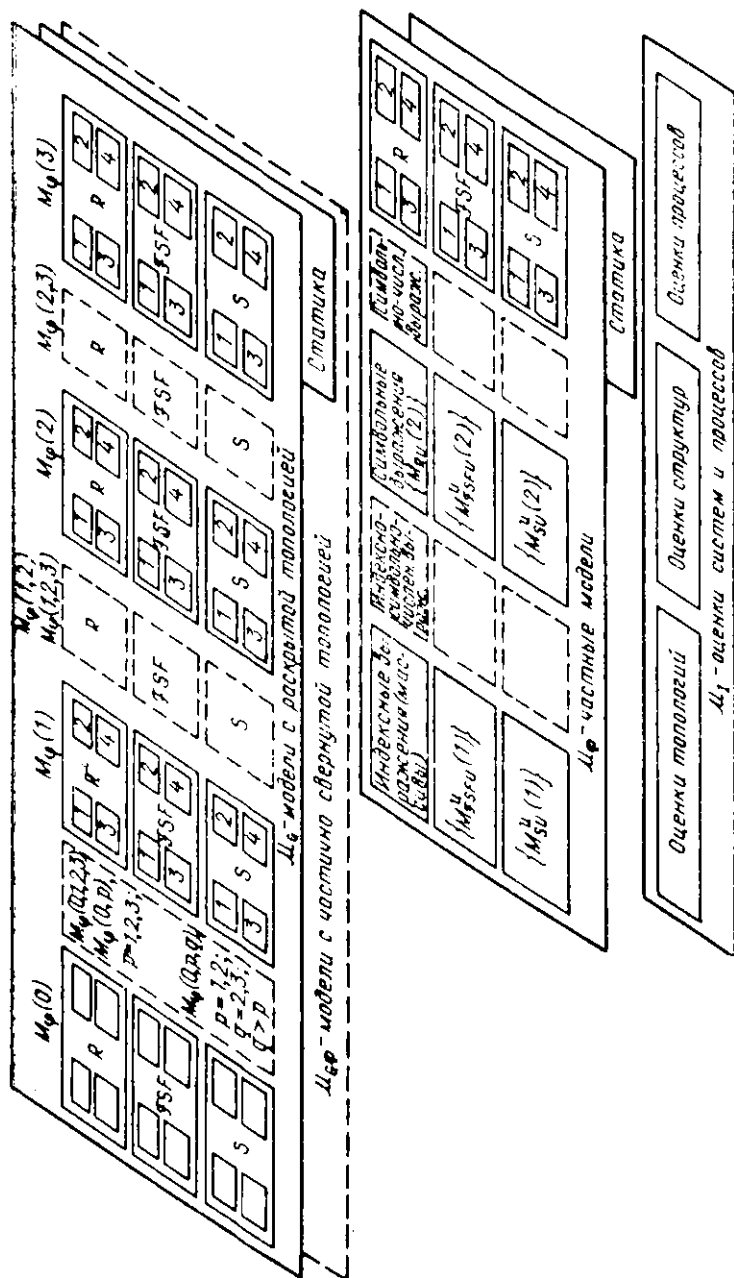


Рис. 60.

8.3. Относительная определенность форм представления моделей

Уровень определенности или информативности различных форм представления моделей может быть различным. В случае одного и того же ранга модели $\mathcal{M}_G$ содержат больше информации, чем элементы $\mathcal{M}_\Phi$ или $\mathcal{M}_{G\Phi}$, а последние более информативны по сравнению с оценками и критериями $\mathcal{M}_I$, вычисленными на их основе. Модели установившихся процессов, в частности статистики, более бедны по сравнению с динамическими моделями. В случае совпадения рангов модели расширенных систем — $M_R(r)$ и $M_{RV}(r)$, модели систем со связями — $M_{\mathcal{G}_{SF}}(r)$ и $M_{\mathcal{G}_{SRV}}(r)$, модели самих систем — $M_S(r)$ и $M_{SR}(r)$ располагаются в порядке убывания информативности. Относительная определенность моделей M_q одного типа, но различных рангов также очевидна.

Не для любых двух форм моделей можно установить относительную определенность: это имеет место для моделей разного типа, ряда случаев смешанных рангов, различных критериев качества и т. д.

Для формализации и полноты описаний всех случаев относительной определенности моделей на множестве $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_G, \mathcal{M}_\Phi, \mathcal{M}_I, \dots\}$ различных форм представления моделей с раскрытой топологией, частных моделей, оценок и т. д. удобно ввести бинарное отношение Ω — «не более информативна», в результате чего из множества $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ всех упорядоченных пар выделяется подмножество $\mathcal{H} = \{(\mu^i, \mu^j)\} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. При этом запись $(\mu^i, \mu^j) \in \mathcal{H}$ означает, что модель μ^i не более информативна, чем μ^j .

Множество $\mathcal{M}$ и бинарное отношение Ω на $\mathcal{M}$ представляют собой ориентированный граф относительной определенности моделей $\mathcal{H} = \langle \mathcal{M}, \Omega \rangle$, вершинам которого соответствуют различные формы моделей μ^i , а дугам (μ^i, μ^j) — принципиально возможные переходы между моделями. Очевидно, переход между двумя различными формами представления моделей возможен только в случае одинаковой информативности или если исходная форма более информативна, чем конечная.

В графе $\mathcal{H}$ можно выделить несколько важных подграфов, построенных на подмножествах моделей. Это в первую очередь подграфы $\mathcal{H}_G$, $\mathcal{H}_\Phi$ и $\mathcal{H}_I$, построенные на тех вершинах $\mathcal{M}$, которые соответствуют моделям с раскрытой топологией $\mathcal{M}_G$, частным моделям $\mathcal{M}_\Phi$ и оценкам $\mathcal{M}_I$. Далее выделяются подграфы моделей для установившихся движений и моделей с частично свернутой топологией. В пределах этих подграфов, в свою очередь, можно рассматривать подграфы для $\varphi = S, \mathcal{G}_{SF}, R$ и для моделей одного типа и одинакового ранга неопределенности.

Граф относительной определенности моделей $\mathcal{H}$ является односторонне связным, так как он не содержит дуг, направленных от $\mathcal{M}_\Phi$ к $\mathcal{M}_\Omega$, от $\mathcal{M}_I$ к $\mathcal{M}_\Phi$ и к $\mathcal{M}_\Omega$. Односторонняя связность $\mathcal{H}$ выражается также в том, что в подграфе $\mathcal{H}_\Omega = \langle \mathcal{M}_\Omega, \Omega \rangle$, в свою очередь, выделяются подграфы, которые принципиально достижимы только в одну сторону, например по модели расширенной системы M_R легко перейти к моделям M_S или M_{FSF} , по моделям с полностью раскрытой топологией третьего ранга неопределенности $M(3)$ легко получить модели $M(2)$, $M(1)$ или $M(0)$, однако обратные переходы требуют привлечения дополнительной информации.

В то же время следует отметить наличие в $\mathcal{H}$ полных подграфов (клик). К ним, в частности, относятся подграфы на вершинах $\mathcal{M}_\Phi(r) \in \mathcal{M}_\Omega$, соответствующих четырем формам представления топологически сложных систем ($\Phi=S$), систем со связями ($\Phi=FSF$) и расширенных систем ($\Phi=R$) одних и тех же рангов неопределенности $r=1, 2, 3$ (рис. 61). Если частные модели систем $\{M_{\Phi U}^u(3)\}$ в форме временных и частотных характеристик задаются точно, то все четыре рассмотренные выше формы представления определителей систем, операторов передач и функций чувствительности также оказываются информационно эквивалентными, что выражается в наличии в составе графа $\mathcal{H}_\Phi = \langle \mathcal{M}_\Phi, \Omega \rangle$ соответствующих полных подграфов.

Подграф $\mathcal{H}_I$, построенный на вершинах, соответствующих различным оценкам, как правило, оказывается нуль-графом, так как в общем случае не существует однозначной связи между различными показателями качества, и точные связи между ними могут быть установлены только для простейших систем. Тем не менее важным фактором, используемым при анализе и синтезе систем с типовыми характеристиками, является возможность на основе одних критериев качества процессов и систем приближенно оценить значения других.

Вершины $\mathcal{H}$, соответствующие моделям $M_R(3)$, образуют вершинную базу этого орграфа — из них достижима любая вершина $\mathcal{H}$.

Переходы между формами представления моделей, соответствующие раскрытию неопределенности относительно топологии, структуры или параметров системы, среды или связей не могут быть осуществлены без привлечения дополнительной информации. При анализе такая дополнительная информация может, например, означать принятие доопределенных моделей среды

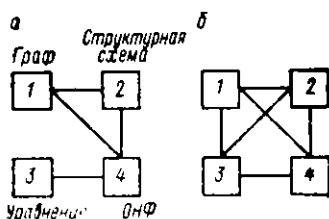


Рис. 61.

$\hat{M}_F$ или связей системы со средой $\hat{M}_{SF}$, $\hat{M}_{FS}$ за счет перехода к типовым воздействиям или связям.

В отличие от задач анализа синтез систем всегда означает переход от менее определенных моделей к более определенным за счет привлечения информации о целях управления и требованиях к системам и процессам. При этом, как было сказано в § 1.6, выделяются задачи синтеза топологии — переходы от $M_\varphi(0)$, $M_\varphi(0, p)$, $p=1, 2, 3$, $M_\varphi(0, p, q)$, $p=1, 2$; $q=2, 3$; $p < q$; $M_\varphi(0, 1, 2, 3)$ к $M_\varphi(1)$, $M_\varphi(1, p)$, $p=2, 3$, $M_\varphi(1, 2, 3)$, структурного синтеза — переходы от $M_\varphi(1)$, $M_\varphi(1, p)$, $p=2, 3$, $M_\varphi(1, 2, 3)$ к $M_\varphi(2)$, $M_\varphi(2, 3)$ и параметрического синтеза — переходы к $M_\varphi(3)$ систем ($\varphi=S$), систем со связями ($\varphi=FSF$) и расширенных систем ($\varphi=R$).

Получение моделей с большей определенностью, т. е. раскрытие неопределенности моделей, происходит при построении моделей за счет идентификации объектов, среды или использования информации, содержащейся в различных принципиальных схемах, и других технических данных устройств, объектов и систем.

8.4. Граф алгоритмического обеспечения задач анализа линейных непрерывных систем управления

Очевидно, могут быть разработаны только те алгоритмы анализа линейных систем, которые соответствуют принципиально возможным переходам, т. е. элементам отношения Ω или дугам графа $\mathcal{H}$.

Если из графа $\mathcal{H} = \langle \mathcal{M}, \Omega \rangle$ выделить некоторый подграф, дугам (μ^i, μ^j) которого приписать алгоритм перехода α_{ij} или несколько вариантов алгоритмов α_{ij}^k , $k=1, 2, \dots$, то получается мультиграф алгоритмического обеспечения $\mathcal{A}$.

Графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ неизоморфны — граф $\mathcal{A}$ содержит меньшее количество дуг, но некоторые из них могут быть кратными. Развитое алгоритмическое обеспечение определяется эквивалентностью графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ в смысле достижимости, т. е. разрабатывая новые алгоритмы, следует стремиться к равенству матриц достижимостей $R_{\mathcal{A}}$ и $R_{\mathcal{H}}$ графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$. В матрице достижимостей R элемент в i -й строке и j -м столбце равен единице, если вершина i достижима из вершины j , и равен нулю в противном случае.

В матрицах расстояний $\mathcal{B}$, характеризующих ориентированные графы, (i, j) -й элемент равен расстоянию из вершины j в вершину i ; если из вершины j в вершину i нет пути, соответствующий элемент полагают равным бесконечности. Графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ имеют различные матрицы расстояний $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$: элементы матрицы $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$, как правило, больше (или равны) соответствующих элементов $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$. Действительно, рассмотрим подграфы отно-

сительной определенности различных форм представления топологически сложных систем или подграфы для форм представления операторов передач, которые являются полными (рис. 61б). Однако минимально необходимые наборы алгоритмов переходов между формами представлений систем с раскрытой топологией или операторов передач должны обеспечить лишь сильную связность этих подграфов алгоритмического обеспечения (см., например, рис. 61а). Далее, граф $\mathcal{H}$ имеет дуги, направленные от вершин $\mathcal{A}_0$ к вершинам $\mathcal{A}_1$, однако, разрабатывая алгоритмы, соответствующие достижимости можно обеспечить за счет более длинных путей, состоящих из нескольких дуг $\mathcal{A}_0$, дуг от $\mathcal{A}_0$ к $\mathcal{A}_\Phi$, несколько дуг $\mathcal{A}_\Phi$ и, наконец, дуг от $\mathcal{A}_\Phi$ к вершинам частных критериев и оценок.

В соответствии со свойствами графов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$ из графа алгоритмического обеспечения $\mathcal{A}$ выделяются несколько подграфов, иначе подсистемы алгоритмов, имеющих самостоятельные функции и цели в рамках общей задачи линейного анализа. В качестве таких подсистем следует назвать следующие: алгоритмы получения частных моделей и характеристик топологически сложных систем, т. е. алгоритмы сворачивания, алгоритмы вычисления оценок систем и процессов, алгоритмы переходов между формами представления топологически сложных систем, алгоритмы взаимосвязи операторов передач и т. д.

При анализе систем особую роль играют изложенные частично в главе 5 алгоритмы получения частных моделей и характеристик за счет сворачивания топологически сложных моделей. Сворачивание позволяет исключить внутренние переменные, не интересующие исследователя при выявлении тех или иных конкретных свойств системы. В зависимости от ранга неопределенности исходной модели алгоритмы сворачивания могут быть численными, символично-численными или индексно-символично-численными, индексными и т. д.

Наиболее изученными являются вопросы разработки алгоритмов численного типа, обеспечивающих переходы между полностью определенными моделями. Символично-численные алгоритмы позволяют получить выражения для определителей передач и функций чувствительности сложных систем смешанного ранга неопределенности $M_\Phi(2, 3)$, содержащие символы — обозначения некоторых параметров систем. Индексно-символично-численные алгоритмы являются еще более общими и дают выражения, содержащие индексы (номера) операторов с неопределенной структурой, символы неконкретизированных параметров и числовые данные. Чисто индексные алгоритмы сворачивания основываются на топологическом анализе моделей первого ранга неопределенности и дают индексные массивы или выражения, кодирующие общие выражения для определителей, передач и функций чувствительности.

В состав индексных алгоритмов, как это следует из глав 4 и

5, входят алгоритмы поиска контуров графа, некасающихся пар и n -к контуров, выделения сильно связанных подграфов или контурных частей, поиска путей между выбранными вершинами, подмножеств контуров, не касающихся заданного пути, составления массивов, кодирующих определитель графа и числитель формулы Мэсона, чувствительности различных порядков определителя и передач к дугам, составления матриц позиций дуг относительно путей и друг друга и т. д.

Алгоритмам, оперирующим разнородными типами данных: числами, символами и индексами, в методиках анализа автоматических систем управления уделялось недостаточное внимание, однако значительная роль этих алгоритмов определяется тем, что с их помощью существенно ускоряется решение задач синтеза и исследование влияния отдельных звеньев и параметров на свойства систем в целом.

Анализ систем часто означает сопоставление показателей или критериев качества. Вычисление критериев качества процессов по полностью определенным моделям осуществляется на основе матриц функций чувствительности выходов $\{T_{pr}^{y_i}\}$, передач $\{\Phi_{pr}\}$ или определителей Δ систем, приведенных в соответствующую форму представления. Как показано в седьмой главе, получение показателей качества проводится по некоторой унифицированной схеме (рис. 59), которую условно можно представить в виде последовательности операций, позволяющей формировать матричный критерий качества систем вместе со связями со средой $M_{\mathcal{F}_{SF}}(3)$. Если задана модель системы $M_S(3)$, представляющая собой сильно связанный граф или контурную часть, то оценивается скалярная функция $\Delta^{-1}(g)$, $g=t, s, j\omega$, матрица коэффициентов нормальной формы A или характеристический полином $D(s)$, функции чувствительности, на основе которых можно получить целый ряд единых для всей системы частных критериев.

Взаимные переходы между различными формами представления причинно-следственных моделей (рис. 61a) обеспечивают удобство задания исходной информации о топологически сложных системах и гибкость алгоритмического обеспечения в целом. Эти переходы требуют разработки соответствующих алгоритмов, вообще говоря, зависящих от форм представления элементов сложных систем.

Важную подсистему образуют численные алгоритмы взаимосвязи форм представления операторов (см. рис. 14). Их роль определяется и тем, что с их помощью операторы топологически сложных систем могут быть приведены к единой форме, что необходимо для последующего сворачивания. Этой подсистеме алгоритмов была посвящена гл. 2.

В силу принципа последовательного раскрытия неопределенностей и принятого способа задания моделей различных рангов неопределенностей получение менее определенных мо-

делей из более определенных сводится к простому игнорированию части информации. Например, модель $M_\Phi(3)$ полностью определенной системы в форме графа задается множествами пар вершин (дуг), типов структур операторов и значений параметров. Если устранить значение какого-либо одного или всех параметров, то получится модель смешанного $M_\Phi(2, 3)$ или второго ранга неопределенности. Если же не принимать во внимание информацию о структуре одного, нескольких или всех операторов, то получится модель смешанного $M_\Phi(1, 2)$, или первого ранга. Аналогично, имея модель расширенной системы M_R любого ранга неопределенности, легко получить модель $M_{\mathcal{A}SR}$ системы со связями со средой или модель системы M_S . При этом вследствие устранения неопределенных воздействий или связей полученная частичная модель может иметь более высокий ранг, чем модель расширенной системы. Получение моделей статик из соответствующих динамических моделей также не требует разработки специального алгоритмического обеспечения.

В ряде случаев представляют интерес оценки топологий и структур, получаемые по моделям первого и второго рангов неопределенности. Важность этих оценок, раскрывающих топологические и структурные особенности, определяется тем, что они на ранних этапах проектирования позволяют выбрать наиболее перспективные варианты систем.

Алгоритмы и программы решения задач линейного анализа систем управления при графовой интерпретации алгоритмического обеспечения представляются путями P_{ij}^k между двумя различными вершинами μ^j и μ^i графа $\mathcal{A}$. Если при данном наборе алгоритмов путь P_{ij} существует, то из готовых программных модулей возможно составление программы решения задачи преобразования форм модели μ^j в форму μ^i , которую проектировщик признал как более соответствующую для сопоставления с требованиями или с другой системой. В случае наличия нескольких путей задача может быть решена различным образом, и появляется возможность сравнения результатов. Задание на анализ с помощью алгоритмического обеспечения, представленного графом $\mathcal{A}$, сводится к указанию исходной вершины, введение соответствующей информации и указанию конечной вершины (конечных вершин). Может быть также конкретизирован путь, если путей несколько.

На рис. 62 изображен вариант подграфа алгоритмического обеспечения, построенный на подмножестве полностью определенных моделей. Как было сказано выше, пути на этом графе представляют некоторые программы решения тех или иных задач анализа. Для примера укажем несколько типовых функций $\Phi_{\gamma\tau}(s)$ между вершинами τ и γ топологически сложных систем, заданных уравнениями в причинно-следственной форме, с

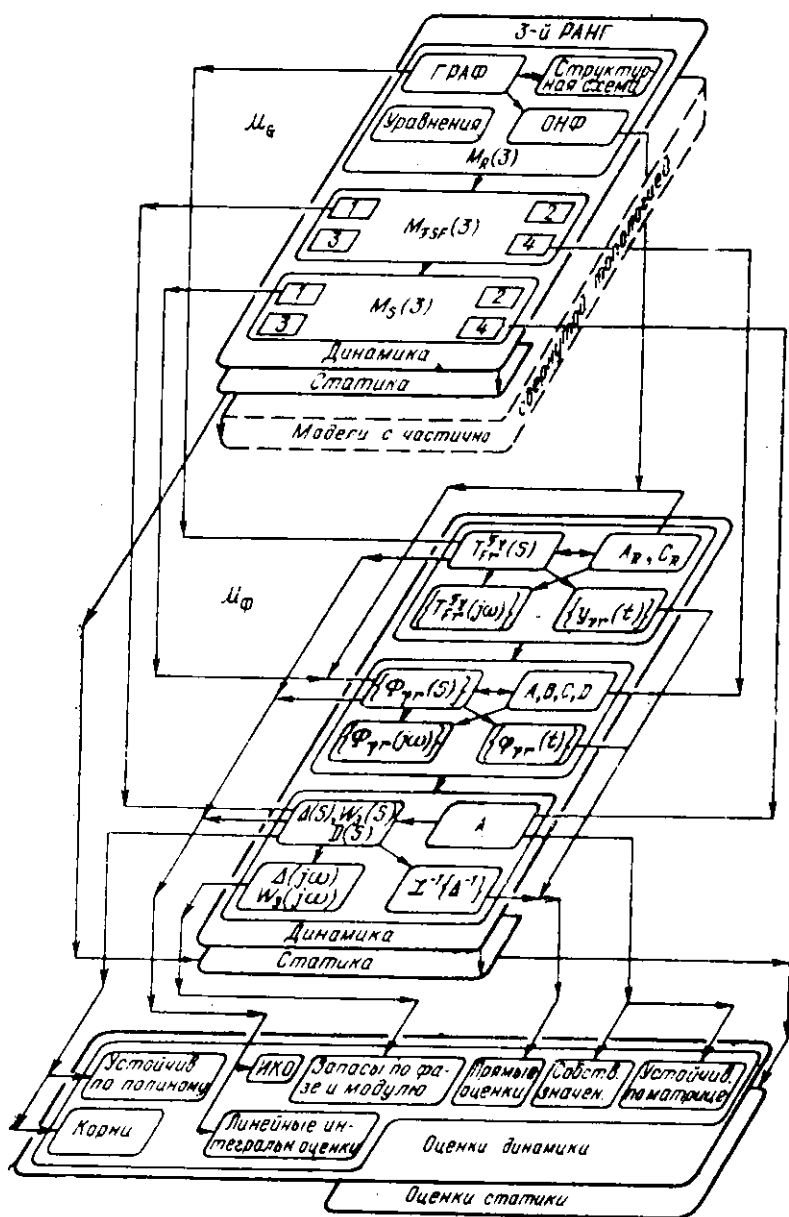


Рис. 62.

переходом к графу и с последующим использованием формулы Мэсона (рис. 63а); 2 — получение частотных характеристик матричными методами (рис. 63б); 3 — определение устойчивости сложной системы, заданной системой уравнений в причинно-следственной форме (рис. 63в).

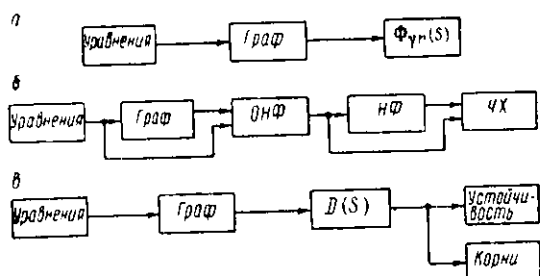


Рис. 63.

8.5. Систематизация алгоритмов и разработка программного обеспечения анализа

Значение систематизации алгоритмов для разработки алгоритмического обеспечения задач линейной теории управления определяется тем, что введенные понятия графов относительной определенности моделей $\mathcal{H}$ и алгоритмического обеспечения $\mathcal{A}$ позволяют найти множество всех алгоритмов, определить минимальный набор алгоритмов, обеспечивающих решение заданного круга задач, указать наиболее рациональные пути развития и совершенствования алгоритмического обеспечения, а также позволяют сопоставить затраты на разработку какого-либо нового алгоритма с его значением в системе алгоритмического обеспечения. На основе исследования графа $\mathcal{A}$ можно найти своеобразные «узкие» места существующих наборов программ анализа и предложить способы их устранения. По множеству форм представления моделей и по графам $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$ легко устанавливается, какие алгоритмы принципиально не могут быть разработаны, а какие из возможных алгоритмов к настоящему времени не разработаны, но могут быть полезными или важными при решении задач анализа систем управления по линейным моделям.

Если две формы моделей μ^j и μ^i достижимы в графе $\mathcal{A}$, но путь $P_{ij} = \{(i, k), (k, l), \dots, (m, j)\}$ является достаточно длинным, то в случае типичности соответствующей этому пути задачи анализа целесообразно сокращение длины пути, например за счет добавления алгоритма α_{ij} , т. е. образования пути единичной длины. Алгоритм α_{ij} может быть разработан самостоятельно на новых принципах или может представлять собой простое объединение алгоритмов из имеющегося набора. Например,

анализ устойчивости топологически сложной системы, заданной графом Мэзона, может осуществляться по следующему пути (рис. 62): 1) переход к обобщенной нормальной форме (в пределах $\mathcal{M}_G$); 2) переход к нормальной форме, т. е. к $\mathcal{M}_F$; 3) переход к характеристическому полиному $D(s)$ в пределах $\mathcal{M}_F$; 4) применение алгоритма Рауса, т. е. переход к подмножеству $\mathcal{M}_1$. Длина пути при этом получается равной четырем. Если применить алгоритм определения устойчивости по матрице коэффициентов A нормальной формы, то этот путь имеет длину, равную трем. Из подпрограмм, реализующих указанные алгоритмы, можно составить одну программу определения устойчивости системы управления, заданной графом Мэзона. Тогда длина пути между исходной формой представления модели в виде графа к конечному пункту — выявлению устойчивости — будет равной единице. Отметим, что исследование устойчивости могло быть проведено и построением частотных характеристик (см. гл. 6), например по алгоритму, соответствующему пути на графе $\mathcal{A}$, отдельно показанному на рис. 63б.

В случае равной эффективности, надежности, быстродействия и т. д. алгоритмов расширение алгоритмического обеспечения, т. е. эволюцию графа $\mathcal{A}$, в результате добавления новых дуг (алгоритмов) наиболее естественно осуществлять по критерию минимизации некоторого осредненного расстояния $\rho[N(\mathcal{A} - \mathcal{H})N']$, построенного на разности матриц расстояний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ орграфов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ с учетом весов N относительной частоты использования алгоритмов или типичности задач. Если же исходный граф $\mathcal{A}$ не обеспечивает достижимость, эквивалентную графу $\mathcal{H}$, то выбор каждого вновь разрабатываемого алгоритма может быть осуществлен по критерию максимизации числа ненулевых элементов разности матриц достижимостей $\mathcal{A}\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}\mathcal{A}$ графов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$.

При развитии алгоритмического обеспечения следует также учитывать то обстоятельство, что в ряде случаев алгоритмы не являются равноценными по некоторым оценкам, для различных исходных данных (число уравнений, порядок и т. д.), что требуется учитывать при выборе наиболее рационального варианта эволюции $\mathcal{A}$. Например, во многих случаях при формировании и развитии подсистемы алгоритмов учитывается дополнительное требование наличия нескольких различных вариантов некоторых алгоритмов и программ решения одной и той же задачи с целью увеличения достоверности результатов.

Развитое алгоритмическое обеспечение должно быть гибким, должно допускать решение задач анализа несколькими путями. Наиболее рациональный путь решения конкретной задачи при этом может с помощью специальных программ оптимизации находиться автоматически, если каждой дуге графа $\mathcal{A}$, т. е. алгоритмам анализа, поставить в соответствие некоторое число, оценивающее алгоритмы с определенной стороны.

Сопоставляя задачи анализа линейных непрерывных и дискретных систем (см., например, гл. 2), можно легко убедиться в том, что для класса линейных дискретных систем алгоритмическое обеспечение имеет ту же самую организацию, т. е. графы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$ те же, что и для непрерывного случая, с точностью до интерпретации вершин, причем модели чисто топологического ранга для непрерывных и дискретных случаев одинаковы. Поэтому там, где это не требует особых затрат, разработку алгоритмического обеспечения линейного анализа целесообразно вести одновременно для непрерывных и дискретных моделей. В пользу этого говорит также то, что реализация непрерывных моделей на ЦВМ связана с их дискретизацией и что ряд соответствующих алгоритмов переходов для обоих классов совпадает. При совместной разработке алгоритмов анализа линейных непрерывных и дискретных моделей дополнительно к указанным выше подсистемам требуются подсистемы алгоритмов дискретизации непрерывных моделей (см. п. 2.2.13), а в общем случае — алгоритмы приближения дискретных моделей непрерывными с дополнительными условиями их применимости.

Разработка программного обеспечения задач анализа систем управления проходит ряд этапов, начиная от эпизодического применения программ для решения отдельных задач, например определения устойчивости, построения частотных характеристик и т. д., до библиотек и пакетов программ, ориентированных на решение задач некоторого класса, сформулированных в содержательных терминах теории управления [78].

Пакеты программ содержат программные модули, из которых в соответствии с заданиями составляются программы решения задач, а также определенные сведения о решаемых пакетом классе задач, объединяемых термином «модель предметной области».

Одним из основных требований к принципу и форме систематизации алгоритмов выступает простота и наглядность интерпретации процесса составления программ решения конкретных задач анализа систем управления с использованием данного комплекса программных модулей. Приведенные выше графы взаимной определенности моделей $\mathcal{H}$ и алгоритмического обеспечения $\mathcal{A}$ могут составлять основу или окажутся полезными при разработке языка пакета, выборе форм представления модели предметной области и планировании вычислений.

При разработке программного обеспечения важнейшим является выбор форм описания объектов исследований. Приведенная в первой главе формализация моделей систем, среды и связей систем со средой различных рангов неопределенности, позволяющая вводить в ЭВМ информацию поэтапно, является одной из удобных форм, могущих составить основу разработки языка описаний линейных стационарных систем в пакетах программ и банках данных.

В графе алгоритмического обеспечения $\mathcal{A}$ вершинам соответствуют формы представления информации о моделях, а дугам — алгоритмы переходов. Возможно построение реберного орграфа $L(\mathcal{A})$ [84], который имеет множество дуг $\mathcal{A}$ в качестве вершин. Тогда дугам $L(\mathcal{A})$ будут соответствовать результаты работы алгоритмов — всевозможные сведения о моделях систем. Эта графовая интерпретация подсистем и комплексов алгоритмического обеспечения в ряде случаев является более удобной.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев А. А., Григорян В. Г., Солодовников А. И. Математические модели объектов и методы их идентификации. Л., 1978. 82 с.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 424 с.
3. Андронов В. Н., Веревкин А. П., Имаев Д. Х. Расчет частотных характеристик сложных систем управления. — В кн.: Вопросы автоматизации химико-технологических процессов. Вып. 31. Уфа, 1975, с. 75—82.
4. Анисимов В. И. Топологический расчет электронных схем. Л., 1977. 240 с.
5. Анисимов В. И., Перков Н. К. Программа машинного расчета частотных и переходных характеристик линейных систем. — В кн.: Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 1. Л., 1974, с. 8—18.
6. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М., 1979. 535 с.
7. Барковский В. В., Захаров В. М., Шаталов А. С. Методы синтеза систем управления. М., 1969. 327 с.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973. 631 с.
9. Башарин А. В. и др. Алгоритм последовательного типа для анализа нелинейных систем автоматического управления на ЦВМ. — В кн.: Автоматизация проектирования в энергетике и электротехнике. Иваново, 1979, вып. 2, с. 64—70.
10. Башмаков И. А., Бесфамильный М. С. Некоторые вопросы построения пакета прикладных программ для решения графовых задач. — Труды МЭИ, вып. 178. Теория графов. М., 1974, с. 126—132.
11. Борцов Ю. А., Соколовский Г. Г. Тиристорные системы электропривода с упругими связями. Л., 1979. 160 с.
12. Белова Д. А., Кузин Р. Е. Применение ЭВМ для анализа и синтеза автоматических систем управления. М., 1979. 264 с.
13. Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., 1958. 156 с.
14. Бэджетт Р. Новый метод получения обратного z-преобразования. — ТИИЭР, т. 54, 1966, № 7, с. 87—88.
15. Вавилов А. А. Структурный и параметрический синтез сложных систем. Л., 1979. 87 с.
16. Вавилов А. А. и др. Машинные методы расчета систем автоматического управления / Вавилов А. А., Имаев Д. Х., Родионов В. Д., Яковлев В. Б. Л., 1978. 114 с.
17. Вавилов А. А., Верхлат М. Е., Рубашкин И. Б. Силовые электро-механические следящие системы копировально-фрезерных станков. М.; Л., 1964. 407 с.

18. Вавилов А. А., Веревкин А. П., Имаев Д. Х. Параметрический синтез систем управления как задача векторной оптимизации. — В кн.: Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 2. Л., 1976, с. 8—19.
19. Вавилов А. А., Имаев Д. Х. Анализ параметрической чувствительности и синтез структур инвариантных систем управления. — В кн.: Автоматическое управление и регулирование. — Изв. ЛЭТИ. Вып. 111. 1972, с. 8—23.
20. Вавилов А. А., Имаев Д. Х. Параметрическая чувствительность и абсолютная инвариантность. — В кн.: Материалы 4-го Всесоюзного совещания по теории чувствительности и теории инвариантности автоматических систем. Киев, Ч. 3. 1971, с. 131—144.
21. Вавилов А. А., Имаев Д. Х., Пошехонов Л. Б. Метод коррекции контурной части сложных систем, базирующийся на оценке чувствительности определителя графа. — В кн.: Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 4. Л., 1978, с. 75—84.
22. Веревкин А. П., Имаев Д. Х. К оценке качества процессов в сложных линейных системах управления. — В кн.: Вопросы автоматизации химико-технологических процессов. Вып. 31. Уфа, 1975, с. 68—74.
23. Вознесенский Н. Н. О принципах и схемах автоматического регулирования. — Прикладная математика и механика. 1942, вып. 1, т. 6.
24. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Л.; М. Ч. 1, 1965. 393 с. Ч. 2, Л.; М., 1966. 364 с. Ч. 3, Л., 1970. 328 с.
25. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М., 1979. 336 с.
26. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966. 575 с.
27. Деруссо П., Рой Ч., Клауз Ч. Пространство состояний в теории управления. М., 1970. 620 с.
28. Дженкинс. Полезная рекурсивная формула для получения обратных z-преобразований. — ТИИЭР, т. 55, 1967, № 4, с. 104—108.
29. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., 1970. 703 с.
30. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., 1959. 324 с.
31. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, 1969. 543 с.
32. Ивановский Р. И., Таринов А. Г. Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ. М., 1970. 171 с.
33. Имаев Д. Х., Пошехонов Л. Б. Некоторые алгоритмы реализации линейных непрерывных моделей на ЦВМ. — В кн.: Вопросы теории систем автоматического управления. Вып. 3. Л., 1977, с. 52—56.
34. Имаев Д. Х., Пошехонов Л. Б. Алгоритмы получения некоторых быстроисчисляемых критериев качества линейных непрерывных систем. — Изв. ЛЭТИ, вып. 222. 1977, с. 24—29.
35. Исследования по общей теории систем. М., 1969. 520 с.
36. Калахан Д. Методы машинного расчета электронных схем. М., 1970. 351 с.
37. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 1971. 398 с.
38. Катханов М. Н., Сафронов В. В. Об одном преобразовании формулы Мэсона. — Изв. вузов. Приборостроение, 1976, № 12, с. 40—42.
39. Катханов М. Н., Бригаднов А. А. Топологический принцип определения чувствительности одного класса многосвязных систем управления. — В кн.: Вопросы кибернетики. Теория чувствительности и ее применение. Вып. 23. М., 1977, с. 22—26.
40. Кокотович П. В. Метод точек чувствительности в исследовании и оптимизации линейных систем управления. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 12, с. 1670—1676.
41. Кокотович П. В., Рутман Р. С. Чувствительность систем автоматического управления (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1965, № 4, с. 730—745.
42. Костюк О. М. Условие эквивалентности систем дифференциального управления и систем управления по возмущению. — Автоматика, 1961, № 1.

43. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М., 1975. 478 с.
44. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М., 1978. 432 с.
45. Кулебакин Б. С., Ларичев О. И. Полиинвариантность в системах автоматического управления. — Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности. М., 1964, с. 49—55.
46. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1965. 431 с.
47. Кухтенко А. И. Проблемы инвариантности в автоматике. Киев, 1963. 376 с.
48. Лиу М. Л. Новый метод расчета переходной характеристики. — ТИИЭР, т. 54, 1966, № 1, с. 24.
49. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. — Автоматика и телемеханика, 1940, № 5, с. 4—66.
50. Лузин Н. Н., Кузнецов П. И. К абсолютной инвариантности и инвариантности до ϵ в теории дифференциальных уравнений. — Доклады АН СССР, т. 51, 1946, № 4, с. 247—249, № 5, с. 331—333.
51. Маркевичус Р. Языки программирования для обработки графов. — В кн.: Автоматизация процессов планирования и управления. Вып. 5. Вильнюс, 1977, с. 9—30.
52. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., 1959. 284 с.
53. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. М., 1963. 620 с.
54. Наумов Л. А., Цимбалист Э. И. Об одном доказательстве формулы топологической передачи графа. — В кн.: Изв. Томского политех. ин-та, т. 270, 1973, с. 84—89.
55. Набор программ для ЭВМ «Мир». Киев, 1973. 227 с.
56. Нивергельт Ю., Фаррар Дж., Рейнголд Э. Машинный подход к решению математических задач. М., 1977. 351 с.
57. Орурк И. А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. М., 1965. 206 с.
58. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М., 1973. 319 с.
59. Поваров Г. Н. О структурной теории сетей связи. — В кн.: Проблемы передачи информации. Вып. 1. М., 1959, с. 126—140.
60. Петров Б. Н. О построении и преобразовании структурных схем. — Изв. ОТН АН СССР, 1945, № 12, с. 1146—1162.
61. Петров Б. Н. О применении условий инвариантности. — Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 2. М., 1955.
62. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю. Двукратная инвариантность систем автоматического управления. — Докл. АН СССР. М., 1965, № 4, с. 789—790.
63. Проектирование следящих систем с помощью ЭВМ / Под ред. В. С. Медведева. М., 1979. 367 с.
64. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Чернолуцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979. 208 с.
65. Расчет автоматических систем / Под ред. А. В. Фатеева. М., 1973. 336 с.
66. Родионов В. Д., Яковлев В. Б. О выборе оптимального базиса представления на ЦВМ математической модели линейной системы автоматического управления. — Изв. ЛЭТИ, вып. 202. 1976, с. 70—78.
67. Розенвассер Е. И., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. Л., 1969. 208 с.
68. Рутман Р. С. Условия нулевой чувствительности линейных систем управления. — Техническая кибернетика, 1969, № 2, с. 153—161.
69. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. М., 1978. 512 с.
70. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. М., 1971. 446 с.
71. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Киев, 1975. 785 с.

72. Сигорский В. П., Калниболотский Ю. М. Алгоритмы анализа электронных схем. — Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1968, № 11, с. 1125—1145.
73. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. М., 1976. 608 с.
74. Слипченко В. Г., Табарный В. Г. Машинные алгоритмы и программы моделирования электронных схем. Киев, 1976. 160 с.
75. Смольников Л. П., Бычков Ю. А., Гудкова Н. В. Расчет систем управления (численные методы). Л., 1979. 112 с.
76. Солодовников В. В., Бирюков В. Ф., Тумаркин В. И. Принцип сложности в теории управления. М., 1977. 341 с.
77. Сольнищев Р. И. Вычислительные машины в судовой гироскопии. Л., 1977. 311 с.
78. Тамм Б. Г., Тыгуз Э. Х. Пакеты программ. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 5, с. 111—124.
79. Тарасов Ю. И. Алгоритм и программа нахождения определителей системы линейных алгебраических уравнений. — Изв. ЛЭТИ, вып. 176, 1975, с. 16—19.
80. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. Кн. 1. М., 1967. 767 с. Кн. 2. М., 1967. 678 с.
81. Теория автоматического управления / Под ред. А. В. Нетушила. М., 1976. 400 с.
82. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. М., 1972. 239 с.
83. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. И. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1963. 734 с.
84. Харари Ф. Теория графов. М., 1973. 300 с.
85. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975. 534 с.
86. Цимбалист Э. И., Наумов Л. А. О некоторых алгоритмах анализа сложных систем. — Изв. Томского политехн. ин-та, т. 270, 1973, с. 90—97.
87. Цой С., Цхай С. М. Прикладная теория графов. Алма-Ата, 1971. 500 с.
88. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М., 1977. 560 с.
89. Чернецкий В. Н., Дидук Г. А., Потапенко А. А. Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Л., 1970. 374 с.
90. Чеховой Ю. Н., Кунцевич В. М. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев, 1970. 339 с.
91. Шаталов А. С. Структурные методы в теории управления и электроавтоматике. М.; Л., 1962. 408 с.
92. Шатихин Л. Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. М., 1974. 274 с.
93. Шипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. — Автоматика и телемеханика, 1939, № 1, с. 49—66.
94. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М., 1975. 683 с.
95. Coates C. L. General topological formulas for linear networks. — IRS Trans., CT-5, 1959, June, p. 42—50.
96. Danielson G. H. On finding the simple paths and circuits in graphs. — IEEE Trans., CT-15, p. 294—295.
97. Genesio R., Milanese M. A note on the derivation and use of reduced order models. — IEEE Trans. on Automatic Control, 1976, N 2, p. 118—122.
98. Metsa I. L. Computer programs for computational assistance in the study of linear control theory. McGraw-Hill, 1970. 129 p.
99. Harald S. Numerical inversion of Laplace transform. — Comm. of the ACM, 1970, N 1, p. 47—49.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Модели линейных систем управления	7
1.1. Основные свойства систем управления и некоторые принципы построения их моделей	—
1.2. Причинно-следственные модели систем управления	11
1.3. Модели среды и связей системы со средой	19
1.4. Формы представления моделей систем управления	21
1.5. Частные модели и характеристики систем управления	29
1.6. Основные задачи теории управления	34
2. Алгоритмы связи форм представления линейных операторов	42
2.1. Систематизация алгоритмов связи линейных операторов	—
2.2. Алгоритмы и программы связи форм представления операторов	44
3. Топологические особенности и свойства систем	69
3.1. Некоторые топологические понятия	—
3.2. Топологическая формула для передаточных функций графа	73
3.3. Определитель графа	82
3.4. Определители графов с несколькими контурными частями	88
3.5. Чувствительность определителя и влияние контуров и дуг на свойства систем	91
3.6. Определители вырожденных систем	98
3.7. Топологические особенности графа и свойства передач системы	102
3.8. Чувствительность передач графа	107
4. Алгоритмы анализа топологии систем управления	112
4.1. Задачи анализа топологии систем управления	—
4.2. Алгоритмы поиска путей	114
4.3. Некоторые алгоритмы упрощения анализа топологии	117
4.4. Алгоритмы поиска контуров	120
4.5. Алгоритмы анализа отношений касания контуров	123
4.6. Алгоритм определения кратности нулей или полюсов передаточных функций топологически сложных систем	127
5. Алгоритмы получения передач и функций чувствительности систем управления	133
5.1. Об алгоритмах получения передач и функций чувствительности	—
5.2. Алгоритмы и программы получения передач на основе топологических формул	134
5.3. Алгоритмы вычисления операторов передач по уравнениям систем	144

5.4. Вычисление чувствительности определителя и передач графа	146
6. Исследование устойчивости сложных многоконтурных систем	149
6.1. О некоторых особенностях исследования устойчивости сложных систем	—
6.2. Исследование устойчивости по характеристическим полиномам и матрицам	150
6.3. Обобщение частотного критерия устойчивости на многоконтурные системы	154
6.4. Частотные методы исследования устойчивости контурных частей сложной системы по определителю графа	160
6.5. О некоторых особенностях исследования устойчивости по частотным характеристикам разомкнутой системы и обобщенным частотным характеристикам автономной контурной части	163
7. Параметрическая чувствительность и инвариантность систем управления	170
7.1. Чувствительность переменных систем управления	—
7.2. Инвариантность переменных системы	176
7.3. Физическая, реализуемость условий абсолютной инвариантности	184
7.4. Цели систем и требования к процессам управления	191
7.5. Формирование критериев качества и некоторые алгоритмы их вычисления	198
8. Систематизация алгоритмов линейного анализа систем управления	211
8.1. О задачах и алгоритмах анализа линейных систем	—
8.2. Множество форм представления моделей систем	216
8.3. Относительная определенность форм представления моделей	—
8.4. Граф алгоритмического обеспечения задач анализа линейных непрерывных систем управления	218
8.5. Систематизация, алгоритмов и разработка программного обеспечения анализа	223
Указатель литературы	227

ИБ № 1127

*Александр Александрович Вавилов
Дамир Хабибович Имаев*

**Машинные методы расчета
систем управления**

*Редактор Ф. И. Шаренкова
Художественный редактор В. Н. Васильев
Технический редактор А. В. Борщева
Корректоры К. Я. Евнина, Л. И. Чулкова*

Сдано в набор 04.11.80. Подписано в печать 18.05.81. М-18774. Гарнитура литературная. Печать высокая. Бум. тип. № 1. Формат 60×90/16. Печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 14,01.

Тираж 5000 экз. Заказ № 435. Цена 45 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164, Ленинград. В-164.
Университетская наб., 7/9.

Типография Изд-ва ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164, Ленинград. В-164,
Университетская наб., 7/9.