

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ЗАОЧНЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. А. АНДРЮЩЕНКО

# ТЕОРИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



ЛЕНИНГРАД  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1990

Редактор Т. В. Мызникова

Рецензенты: кафедра автоматики и телемеханики Ленинградского ин-та точной механики и оптики (зав. кафедрой Ю. А. Сабинин); проф. В. А. Королев (Ленингр. техн. ун-т им. М. И. Калинина)

*Представлено к изданию*

*Северо-Западным заочным политехническим институтом*

УДК 62—50 : (075.8)

**Андрющенко В. А.** Теория систем автоматического управления: Учеб. пособие. — Л., Издательство Ленинградского университета, 1990. 256 с.

ISBN 5-288-00438-2

Рассмотрены вопросы теории синтеза и анализа систем автоматического управления, обеспечивающие заданную точность и динамические свойства объектов автоматизации. Изложены методы расчета и проектирования линейных, нелинейных, цифровых, оптимальных, инвариантных и самонастраивающихся САУ. Основные положения теории подкреплены численными примерами расчета динамики САУ в форме, удобной для инженерного применения, даны примеры практических расчетов и реализации САУ разного типа.

Учебное пособие рассчитано на студентов электромеханических и электротехнических факультетов. Оно может быть полезно также инженерам и специалистам, занимающимся разработкой, проектированием и эксплуатацией САУ и вопросами автоматики. Библиогр. 35 назв. Ил. 115. Табл. 11.

А  $\frac{2402010000-138}{076(02)-90}$  94-90

© В. А. Андрющенко,  
1990

ISBN 5-288-00438-2

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга написана в соответствии с учебной программой по теории систем автоматического управления и предназначена в качестве учебного пособия для студентов вузов по специальности „Автоматизация технологических процессов и производств” (2103), изучающих курс „Теория автоматического управления”. Она может быть также использована студентами вузов других электромеханических специальностей (например, „Автоматика и управление в технических системах” (2101), „Электропривод и автоматизация промышленных установок и технологических процессов” (2105) и т. д.) и специалистами, занимающимися вопросами исследования и проектирования систем автоматического регулирования и управления различного назначения. Предлагаемая книга отражает основные вопросы теории систем автоматического управления, необходимые специалистам, работающим в области автоматизации производственных процессов, промышленных установок и создания систем автоматического управления (САУ).

Современные САУ различного технологического оборудования — сложные динамические системы, что обусловлено высокими требованиями к производительности и точности работы таких систем, а также разнообразием выполняемых ими функций. Но независимо от назначения САУ обычно строятся на определенных принципах и общих положениях с использованием типовых элементов, устройств и их комбинаций.

При проектировании высококачественных САУ находят применение методы анализа и синтеза, разработанные в теории автоматического регулирования и управления. Наиболее широкое распространение получили частотные методы исследования замкнутых систем, на основе которых разработаны удобные инженерные способы синтеза корректирующих цепей и приближенного построения переходных процессов в САУ. Основными достоинствами частотных методов являются их универ-

сальность и простота. К тому же исходные данные для анализа систем (в виде частотных характеристик) могут быть получены не только расчетным, но и экспериментальным путем. Инженерные методики расчета САУ, излагаемые в настоящей книге, также базируются на частотных представлениях.

Пособие состоит из семи глав, в которых рассмотрены основные вопросы анализа и синтеза линейных, нелинейных, цифровых, оптимальных, инвариантных и самонастраивающихся САУ. Особое внимание уделено плавной работе САУ в режиме низких скоростей в связи с возникновением автоколебаний (как релаксационных, так и гармонических), обусловленных нелинейностью изменения момента трения. Появление автоколебаний на выходе САУ, работающей в режиме низких скоростей, отрицательно сказывается на качестве работы и динамической точности автоматизируемого технологического оборудования. Это приводит к необходимости определения условий возникновения и устойчивости автоколебаний, а также средств их подавления при проектировании САУ.

В каждой главе книги подробно излагаются лишь вопросы, достаточно общие или типовые, которые могут служить основой для разработки аналогичных новых САУ разных типов. Математическая трактовка рассматриваемых вопросов позволяет проследить порядок образования расчетных формул или графических методов расчета.

## Глава 1

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При управлении каким-либо объектом без участия человека обеспечивается постоянство определенной физической величины, характеризующей состояние объекта, или изменение этой величины в соответствии с некоторым законом на основании конкретной информации. Осуществляется это с помощью системы автоматического управления (САУ), которая состоит из двух основных частей: объекта управления и управляющего устройства. Объектом управления может быть любое управляемое техническое устройство или какой-либо технологический процесс. Состояние объекта зависит от приложенных к нему воздействий ( $g(t)$ ) и от собственных параметров, поэтому характеризуется выходной величиной  $y(t)$ . Воздействие  $g(t)$ , поступающее на вход управляющего устройства и содержащее информацию о требуемом значении  $y(t)$ , называется *задающим воздействием*. Воздействие, поступающее от управляющего устройства —  $z(t)$  — на вход объекта для обеспечения в нем желаемого процесса, называется *управляющим воздействием*. Воздействие, приложенное к объекту —  $f(t)$  — и вызывающее отклонение управляемого параметра от заданного значения, называется *возмущающим воздействием*.

На рис. 1.1 представлена одна из функциональных схем САУ, на которой показаны основные элементы управляющего устройства (УУ). Задающее воздействие, которое является входным сигналом САУ и определяет требуемый закон изменения выходного сигнала, поступает на чувствительный элемент (ЧЭ). Кроме того, на этот элемент подаются сигналы обратной связи  $y(t)$  и возмущающего воздействия  $f(t)$ . Затем с выхода чувствительного элемента сигнал  $x(t)$ , который является функцией воздействия  $x, y, f$  и характеризует ошибку САУ, усиливается усилителем (У) и поступает на исполнительный механизм (ИМ). Последний вырабатывает и подает на

объект управления (ОУ) управляющее воздействие. Иногда при формировании управляющего воздействия кроме сигнала ошибки учитываются его производные и интеграл. Часто для обеспечения требуемых статических и динамических характеристик системы используются корректирующие устройства — последовательные (КУ1) и параллельные (КУ2). В некоторых случаях в состав САУ могут входить еще и специальные элементы (для согласования отдельных частей системы) и вычислительные устройства (для реализации алгоритма работы управляющего устройства).

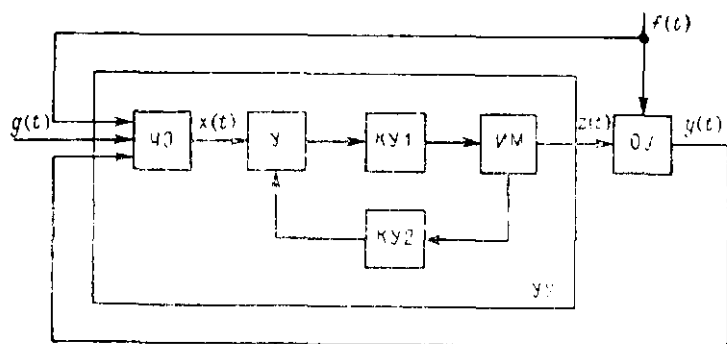


Рис. 1.1.

Системам автоматического управления присущи статическая и динамическая ошибки. *Статической ошибкой* называется установившееся значение разности между заданным и конечным значениями управляемого параметра при постоянном значении задающего или возмущающего воздействия. *Динамической ошибкой* называется значение разности между заданным и текущим значениями управляемого сигнала. Величины статических и динамических ошибок управления в большой степени зависят от структуры управляющего устройства, определяющего так называемый *закон управления*. Система, у которой статическая ошибка не равна нулю, называется *статической*, а с нулевой статической ошибкой — *астатической*. Статизм или астатизм САУ определяется относительно задающего или возмущающего воздействия. В одной и той же САУ эти свойства могут совпадать или не совпадать.

Параметры САУ обусловлены свойствами отдельных ее элементов (например, инерционностью, коэффициентами усиления, трения и т. д.). Параметры систем могут быть *постоянными* и *переменными*. В том случае, когда параметры постоянны или изменяются по линейному закону, САУ называется *линейной системой*, в противном случае — *нелинейной системой*. Ни в какой реальной САУ параметры никогда не бывают постоянными

или изменяются по линейному закону, но часть их можно считать таковыми с большей или меньшей степенью точности.

## 1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Классификацию САУ можно производить с самых разных позиций. Это связано со сложностью структур САУ, их различной физической сущностью, назначением, областью применения и т. д. *По виду используемой управляющим устройством информации различают разомкнутые и замкнутые САУ.*

В разомкнутых системах отсутствует обратная связь между выходом объекта управления и входом управляющего устройства. В таких системах управляемая величина не контролируется. При наличии обратной связи объект управления и управляющее устройство образуют замкнутый контур, обеспечивающий автоматический контроль за состоянием объекта управления.

*По характеру изменения задающего воздействия САУ можно разделить на следующие системы:*

автоматической стабилизации, в которых задающее воздействие постоянно; они предназначены для поддержания постоянства некоторого физического параметра (температуры, давления, скорости вращения и т. д.);

программного управления, в которых задающее воздействие изменяется по какому-либо заранее известному закону (например, по определенной программе может осуществляться изменение скорости вращения электропривода, изменение температуры изделия при его термической обработке и т. д.);

следающие, у которых задающее воздействие изменяется по произвольному, заранее неизвестному закону; они используются при дистанционной записи переходных процессов\*, для согласования каких-нибудь параметров объектов управления при изменении внешних условий и т. д.

В последнее время большое значение приобретают САУ, которые называют *адаптивными* или *самоприспосабливающимися*. Системы эти характеризуются наличием в них какого-либо абсолютно неизвестного действующего фактора. Они могут приспосабливаться к изменению внешних условий работы, а также улучшать свою работу по мере накопления опыта. Характерным примером адаптивной системы может явиться автоматически управляемый снаряд, преследующий цель, а неизвестным фактором — стратегия уклонения цели от встречи.

В свою очередь, адаптивные системы делятся на *оптимальные*, которые обеспечивают автоматическое поддержание в ка-

\* В результате изменения задающего или возмущающего воздействия в САУ наблюдается процесс, который возникает при переходе от одного установившегося состояния к другому.

ком-либо объекте наимыгоднейшего эксплуатационного режима; *самонастраивающиеся*, у которых параметры не остаются неизменными, а преобразуются при изменении внешних условий; *самоорганизующиеся*, у которых алгоритм работы не остается неизменным, а преобразуется при изменении внешних условий; *самообучающиеся*, которые анализируют накопленный опыт управления объектом и на основании этого автоматически совершенствуют свою структуру и способ управления.

По характеру действия САУ различают системы *непрерывного* или *дискретного действия*. Система непрерывного действия состоит только из звеньев, у которых выходной сигнал изменяется плавно при таком же изменении входного сигнала. Система дискретного действия содержит хотя бы одно звено, у которого выходной сигнал изменяется дискретно даже при непрерывном изменении входного сигнала.

По характеру преобразования сигналов САУ можно подразделить на *линейные* и *нелинейные*.

По характеру зависимости параметров САУ во времени различают *стационарные* и *нестационарные* системы.

По количеству управляемых параметров САУ могут быть *одномерными* и *многомерными*.

В основу классификации САУ можно положить и другие признаки. Так, например, их можно классифицировать по физической сущности системы или ее основных звеньев, по мощности исполнительного механизма и т. д.

### 1.3. ПРОГРАММЫ И ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Система автоматического управления осуществляет поддержание постоянного значения управляемого сигнала  $y$  или его изменение по определенной программе. При этом программа либо заранее задается, либо изменяется во время эксплуатации системы в зависимости от конкретных условий. Программы управления могут быть *временными*, т. е.  $y = y(t)$ , и *параметрическими*, т. е. задаваться в текущих координатах:  $y = y(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , где  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — некоторые физические параметры, характеризующие текущее состояние объекта в процессе управления.

Закон управления, т. е. алгоритм формирования наиболее целесообразного сигнала управления  $z$ , должен обеспечивать требуемую точность, устойчивость и качество процесса управления. Математически закон управления определяется уравнением управляющего устройства. Различают *линейные* и *нелинейные законы управления*. Линейные законы определяются линейными уравнениями, для которых разработаны многочисленные прикладные методы исследования устойчивости, точности и качества процесса управления. Для формирования линейных законов управления применяются конкретные схемы

технических устройств. Нелинейные законы определяются разнообразными нелинейными уравнениями. Несмотря на отсутствие общей теории нелинейных законов, исследования и опыт применения отдельных частных видов нелинейных законов показывают, что их использование в САУ значительно расширяет возможности целесообразного изменения точности и качества процессов управления. Нелинейные законы управления можно сгруппировать следующим образом:

а) функциональные, при которых управляющее воздействие на объект выражается в виде нелинейной функции от отклонения управляемой величины, поступающей на вход САУ;

б) логические, при которых управляющее воздействие изменяется по сложному логическому алгоритму;

в) оптимизирующие, при которых управляющее воздействие способствует оптимальному управлению объектом по какому-либо параметру, характеризующему САУ или объект управления;

г) параметрические, когда закон управления выражается в виде нелинейной функции текущих координат, в которых задается параметрическая программа.

Следует отметить, что нелинейные законы управления могут быть связаны как с изменением параметров САУ, так и с изменением ее структуры.

#### **1.4. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Теория автоматического управления изучает общие принципы построения САУ и методы исследования процессов в этих системах. Перед ней ставятся задачи разработки методов синтеза, анализа, коррекции, экспериментального исследования и наладки САУ. С помощью методов синтеза можно осуществлять выбор схемы взаимодействия элементов САУ, а также параметров и характеристик этих элементов таким образом, чтобы система в целом удовлетворяла заданным требованиям к ее поведению в статике и динамике. Методы анализа позволяют определить качественные показатели САУ, а в случае их отличия от заданных — указать пути улучшения статических и динамических свойств системы. Изменение же статических и динамических свойств осуществляется с помощью методов коррекции. Методы экспериментального исследования и наладки САУ дают возможность наиболее рационально и оптимально исследовать и настроить систему в реальных условиях работы.

В настоящее время разработка и проектирование САУ представляет собой довольно сложную задачу, решение которой может быть достигнуто разными путями. Чтобы спроектировать САУ, удовлетворяющую всем требованиям технического задания, обычно приходится просчитывать и сравнивать между со-

бой несколько вариантов поэлементной и принципиальной схемы. Многозначность решения делает проектирование САУ творческой инженерной задачей. Сложность ее решения в значительной степени зависит от вида дифференциальных уравнений, описывающих статические и динамические характеристики САУ. Однако современный уровень развития математики часто оказывается недостаточным для разрешения некоторых задач теории автоматического управления. Тогда используют экспериментальное исследование и моделирование, которые облегчают расчеты и способствуют созданию приближенных инженерных методов решения задач.

## Глава 2

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. УРАВНЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

При синтезе и анализе САУ ее расчленяют на типовые звенья, которые различаются динамическими свойствами.

**Типовые динамические звенья** описываются определенными дифференциальными уравнениями. Это позволяет рассматривать качественные показатели САУ вне зависимости от физической природы ее элементов. Поэтому в основу классификации звеньев кладется вид дифференциального уравнения, которым могут описываться весьма разнообразные устройства как по своей функции, так и по своему конструктивному оформлению.

В теории автоматического управления широко применяется операторная (символическая) форма записи дифференциальных уравнений. В операторной форме дифференциальные уравнения приобретают более простой вид, уменьшается объем записи, а при исследовании САУ во многих случаях сокращаются промежуточные математические преобразования. В такой форме операцию дифференцирования обозначают следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \quad \dots; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n,$$

а операцию интегрирования — обратной величиной:

$$\int_0^t dt = \frac{1}{p}; \quad \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_1 \cdot dt_2 = \frac{1}{p^2}.$$

Используя операторную форму записи, можно, например, дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = f(t)$$

представить в виде

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 x = f(t)$$

или

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) x = f(t).$$

В общем виде дифференциальные уравнения звеньев САУ записываются как

$$d(p) x_{\text{внх}} = k x_{\text{вх}}$$

или

$$d(p) x_{\text{внх}} = m(p) x_{\text{вх}}, \quad (2.1)$$

где  $x_{\text{вх}}$  и  $x_{\text{внх}}$  — соответственно входной и выходной параметры звена САУ;  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $d(p)$  и  $m(p)$  — операторные полиномы (многочлены) от  $p$ .

Если дифференциальные уравнения составлены при нулевых начальных условиях, то символ  $p$  можно рассматривать как алгебраическое число. Это позволяет для решения дифференциальных уравнений использовать алгебраические методы. В дальнейшем, когда потребуются учет ненулевых начальных условий, будут сделаны специальные оговорки.

Основной характеристикой динамического звена является его передаточная функция, которая находится из дифференциального уравнения при нулевых начальных

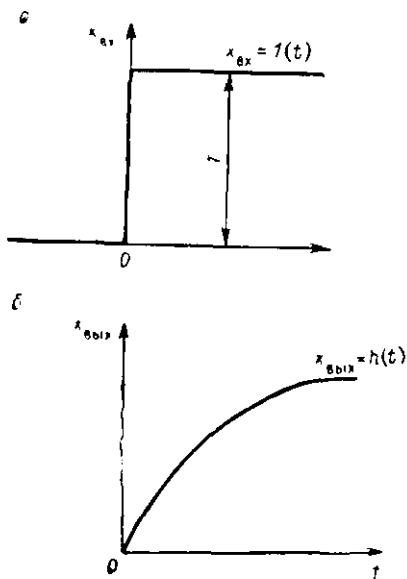


Рис. 2.1.

ных условиях как отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов:

$$W(p) = x_{\text{внх}}(p) / x_{\text{вх}}(p). \quad (2.2)$$

Зная передаточную функцию звена, можно определить выходную его величину, переходя от изображений к оригиналам, из выражения  $x_{\text{внх}} = W(p) x_{\text{вх}}$ .

Для оценки динамических свойств звеньев используют *временные и частотные характеристики*. К временным характеристикам звеньев относятся их переходные функции. Переход-

ная функция звена  $h(t)$  определяет его реакцию на единичную ступенчатую функцию  $x_{вх}=1(t)$  (рис. 2.1, а) и характеризует переход звена от одного установившегося состояния к другому (рис. 2.1, б). Выражение функции  $h(t)$  можно получить посредством решения дифференциального уравнения, которым описывается динамика данного звена при  $x_{вх}=1(t)$  и нулевых начальных условиях.

За единичную ступенчатую функцию принимают скачкообразное воздействие с величиной скачка, равной единице при  $t > 0$ :

$$x_{вх} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ступенчатый сигнал — весьма распространенный вид входного воздействия в САУ, например мгновенный поворот задающей оси следящего привода, мгновенное изменение момента нагрузки электропривода и т. д.

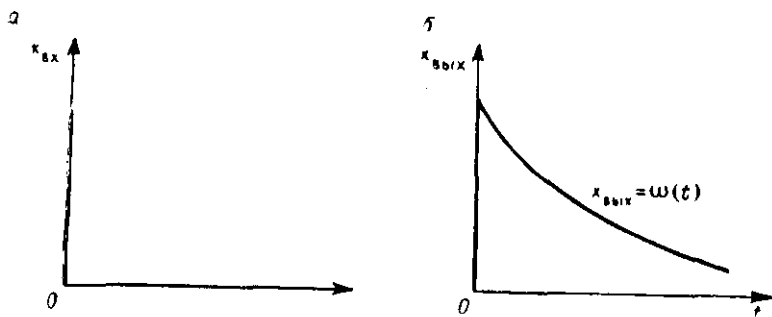


Рис. 2.2.

Другим также распространенным видом входного воздействия в САУ является единичная импульсная входная функция или дельта-функция, представляющая собой производную единичной ступенчатой функции:

$$\delta(t) = 1'(t). \quad (2.4)$$

Дельта-функции свойственна тождественность нулю повсюду, кроме точки  $t=0$ , в которой она стремится к бесконечности (рис. 2.2, а), т. е.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Площадь дельта-функции равна единице, т. е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ . Примером импульсного воздействия может быть кратковременный ток короткого замыкания генератора, который отключается

плавкими предохранителями, кратковременный удар нагрузки на валу электродвигателя и т. д.

Реакция динамического звена на единичную импульсную функцию называется *функцией веса*  $w(t)$  (рис. 2.2, б).

Связь между переходной и весовой функциями линейных звеньев аналогично формуле (2.4) выражается как

$$w(t) = h'(t),$$

и наоборот,

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt. \quad (2.5)$$

Учитывая это простое соотношение между переходной и весовой функциями, в дальнейшем будем использовать в основном первую из них, имея в виду, что вторую всегда можно получить из выражения (2.5).

Рассмотрим частотную функцию, которая является важнейшей характеристикой динамического звена.

При подаче на вход звена гармонического воздействия  $x_{вх} = x_{вх} \sin \omega t$  ( $x_{вх}$  — амплитуда;  $\omega$  — угловая частота этого воздействия) на выходе этого звена в установившемся режиме будет получена также гармоническая функция вида  $x_{вых} = x_{вых} \sin(\omega t + \varphi)$ , отличающаяся от входной по амплитуде и по фазе. Представив входную и выходную гармонические функции в символической записи:

$$\begin{aligned} x_{вх} &= X_{вх} e^{j\omega t}, \\ x_{вых} &= X_{вых} e^{j(\omega t + \varphi)}, \end{aligned}$$

получим частотную передаточную функцию в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi} \quad (2.6)$$

или

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.7)$$

где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — модуль (т. е. амплитуда) и аргумент (т. е. фаза) частотной передаточной функции;  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  — вещественная и мнимая части частотной передаточной функции.

Поскольку частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  почти всегда дробно-рациональная, то ее модуль равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя, т. е. отношению амплитуд выходного сигнала к входному. Аргумент или фаза этой же функции  $W(j\omega)$  равны разности аргументов числителя и знаменателя, т. е. сдвигу фаз выходного сигнала относительно входного.

Для нахождения вещественной и мнимой частей передаточной функции  $W(j\omega)$  необходимо освободиться от мнимости в ее знаменателе. Для этого следует числитель и знаменатель частотной передаточной функции умножить на сопряженный зна-

менателю множитель. Например, если частотная передаточная функция равна  $W(j\omega) = k/[j\omega(1+j\omega T)]$  ( $k$  — коэффициент передачи;  $T$  — постоянная времени), то, умножая числитель и знаменатель  $W(j\omega)$  на сопряженный знаменателю комплекс, получим  $W(j\omega) = kj\omega(1-j\omega T)/[-\omega^2(1+\omega^2 T^2)]$ , откуда после разделения на вещественную и мнимую части будем иметь

$$P(\omega) = -kT/(1 + \omega^2 T^2),$$

$$Q(\omega) = -k[\omega(1 + \omega^2 T^2)].$$

Для наглядного представления частотных свойств динамических звеньев используются так называемые частотные характеристики: во-первых, амплитудная частотная характеристика (АЧХ), которая определяет зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты колебаний при постоянстве амплитуды входного сигнала (рис. 2.3, а); во-вторых, фазовая частотная характеристика (ФЧХ), показывающая фазовые сдвиги, вносимые звеном на разных частотах (рис. 2.3, б); в-третьих, ампли-

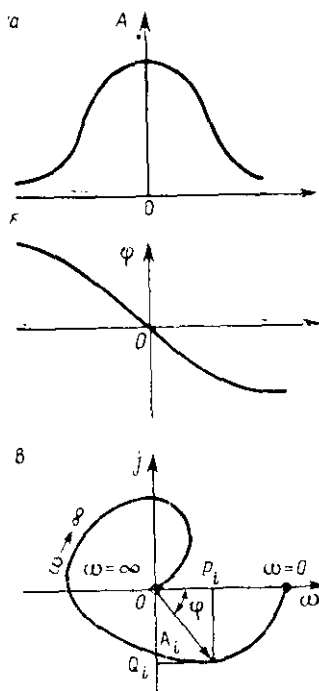


Рис. 2.3.

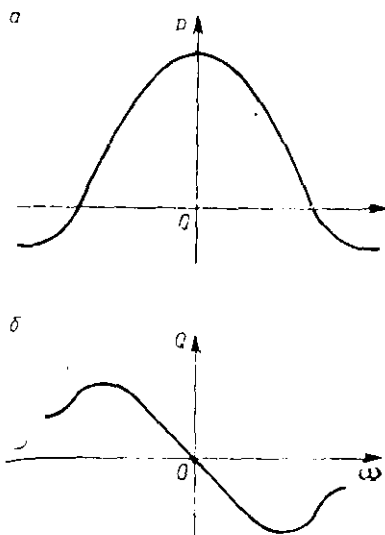


Рис. 2.4.

тудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), которая объединяет амплитудную и фазовую частотные характеристики при использовании их в качестве полярных координат (рис.

2.3, в). Каждая точка АФЧХ соответствует определенному значению частоты  $\omega$ . Эту характеристику можно построить и в прямоугольной системе координат — в комплексной плоскости. При этом координатами будут показанные на рис. 2.3, в проекции  $P$  и  $D$  вектора  $A$  на соответствующие оси.

Иногда строятся также вещественная  $P(\omega)$  и мнимая  $Q(\omega)$  частотные характеристики (рис. 2.4).

Согласно формулам (2.6) и (2.7) связь между названными частотными характеристиками определяется следующими выражениями:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg [Q(\omega) / P(\omega)],$$

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega),$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Частотная передаточная функция звена может быть непосредственно получена из его передаточной функции (2.2) путем замены оператора  $p$  на  $j(\omega)$ , т. е.  $W(j\omega) = W(p) |_{p=j\omega}$ .

При исследовании САУ амплитудную и фазовую частотные характеристики удобно строить в логарифмических координатах. Это дает возможность построить логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) даже для сложных устройств исключительно просто. Прологарифмируем выражение частотной передаточной функции (2.6):

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

Из этого выражения видно, что член  $\ln A(\omega)$  определяет логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАХ), а  $\varphi(\omega)$  — логарифмическую фазовую частотную ха-

рактеристику (ЛФХ). Для построения ЛАХ находится величина  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ , которая выражается в децибелах\* и строится

\* Децибел равен одной десятой бела. Бел представляет собой логарифмическую единицу, которая соответствует десятикратному увеличению мощ-

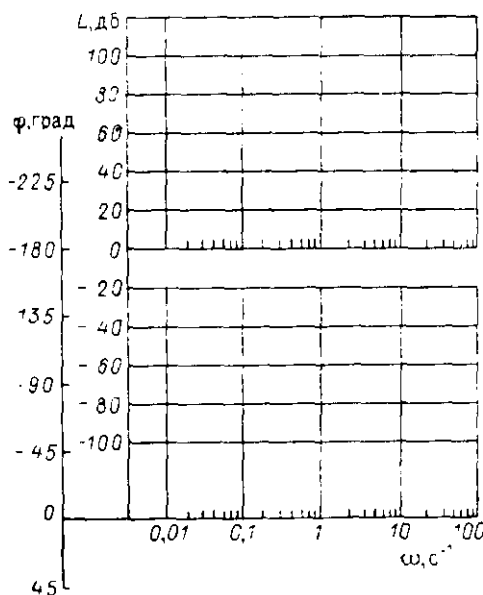


Рис. 2.5.

так же, как и в логарифмическом масштабе частот. Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а  $\lg A^2 = 2 \lg A$ , то усиление в белх, выраженное через отношение амплитуд  $A$ , равно  $2 \lg A$ .

На рис. 2.5 изображена стандартная сетка, используемая для построения ЛАХ и ЛФХ. По оси абсцисс откладывается угловая частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе; отрезки оси, соответствующие изменению частоты в одинаковое число раз, оказываются равными. Интервал частот, отличающихся друг от друга в 10 раз, называют *декадой* и обычно принимают за единицу логарифмического масштаба частот. Ось ординат может пересекать ось частот в произвольном месте, так как точка, соответствующая  $\omega = 0$ , находится слева в бесконечности ( $\lg 0 \rightarrow -\infty$ ). Вертикальную ось обычно проводят так, чтобы справа от нее оказался диапазон частот, существенных для данного устройства. По оси ординат откладывается модуль частотной передаточной функции  $A(\omega)$  в логарифмических единицах — децибелах. Шкала децибел по оси ординат, как видно из рис. 2.5, равномерна. Отношение амплитуд выходного и входного сигналов, равное единице, соответствует нулю децибел (так как  $20 \lg 1 = 0$ ), через эту точку проходит ось частот. Точки амплитудной характеристики, лежащие ниже оси частот, соответствуют усилению, меньшему единицы, т. е. ослаблению (затуханию) сигнала. Нижняя половина графика предназначена для построения ЛФХ. Ось частот этой части графика повторяет верхнюю горизонтальную ось. По оси ординат откладывается величина сдвига фазы  $\varphi(\omega)$  в градусах, в обычном масштабе. Как увидим далее, точку нуля децибел удобно совместить с  $\varphi = -180^\circ$ ; положительные значения фазового сдвига откладываются по оси ординат вниз.

Главным достоинством логарифмического метода является возможность построения частотных характеристик непосредственно по виду передаточной функции. Кроме того, использование логарифмического масштаба позволяет изобразить частотные характеристики устройства в очень широком диапазоне частот и усилений (так как изменению величины в 10 раз соответствует изменение логарифма лишь на единицу).

Рассмотрим временные и частотные характеристики основных динамических звеньев.

Безынерционное звено описывается уравнением

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $k$  — коэффициент передачи (усиления) звена. Передаточная функция этого звена постоянна:  $W(p) = k$ .

---

ности, т. е. 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз, 2 бела — в 100 раз, 3 бела — в 1000 раз и т. д.

К безынерционным звеньям можно отнести (рис. 2.6, б) делитель напряжения, электронный или полупроводниковый усилитель, постоянная времени которого пренебрежимо мала, и т. д.

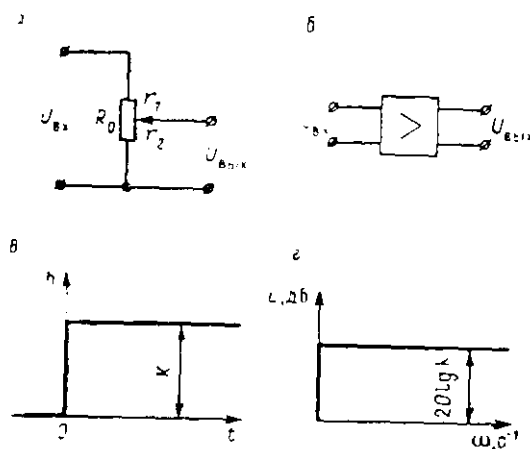


Рис. 2.6.

Переходная функция безынерционного звена является ступенчатой (рис. 2.6, в):  $x_{\text{вых}} = h(t) = k1(t)$ , а логарифмическая амплитудная характеристика представляет собой прямую, проходящую параллельно оси частот на выходе  $20 \lg k$  в децибелах (рис. 2.6, г).

Фазовые сдвиги в безынерционном звене отсутствуют при любой частоте входного сигнала, т. е.  $\varphi = 0$ . Поэтому ЛФХ этого звена совпадает с осью частот и, следовательно, может не учитываться при расчетах.

Апериодическое звено описывается уравнением

$$(Tp + 1)x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $T$  — постоянная времени звена. Передаточная функция этого звена записывается как

$$W(p) = k(1 + Tp). \quad (2.8)$$

Примерами такого типа звена могут быть цепи  $RC$  и  $RL$ , изображенные на рис. 2.7, а, б.

Переходная функция апериодического звена описывается уравнением экспоненты (рис. 2.7, в)

$$x_{\text{вых}} = h(t) = k(1 - e^{-t/T}).$$

Величина отрезка, отсекаемая на асимптоте касательной к экспоненте при  $t=0$ , равна постоянной времени  $T$ . Причем касательную можно провести из любой точки экспоненты, перенеся в эту же точку начало координат.

Практически время переходного процесса считается равным примерно трем постоянным времени, т. е.  $t_n \approx 3T$ , а в более точных расчетах  $t_n = 4T \div 5T$ .

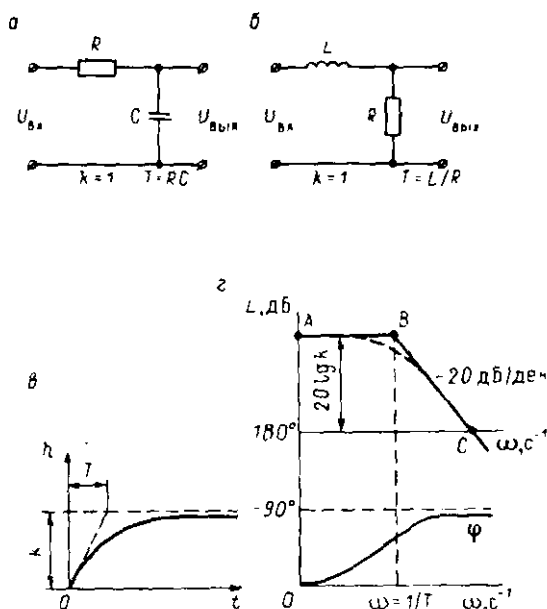


Рис. 2.7.

Для построения логарифмических характеристик этого звена найдем частотную функцию из выражения (2.8), подставив в него  $p = j\omega$ :

$$W(j\omega) = k/(1 + j\omega T).$$

Логарифмическую амплитудную характеристику, описываемую выражением

$$L(\omega) = 20 \lg(k/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad (2.9)$$

строят приближенно. Для этого сначала находят сопрягающую частоту  $\omega = 1/T$  и наносят ее на стандартную сетку (см. рис. 2.5). При малых частотах  $\omega < 1/T$  и  $\omega^2 T^2 \ll 1$  выражение (2.9) можно заменить приближенным:  $L(\omega) \approx 20 \lg k$ , которому соответствует на рис. 2.7, г прямая AB, параллельная оси частот. При больших частотах, когда  $\omega > 1/T$  и  $\omega^2 T^2 \gg 1$ , вместо выражения (2.9) получают приближенное выражение  $L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ , которому на рис. 2.7, г соответствует прямая BC с отрицательным наклоном 20 дБ на декаду, проходящая через точку с координатами  $L(\omega) = 20 \lg k$  и  $\omega = 1/T$ . Ломаная линия ABC и есть приближенная ЛАХ, которую обычно используют при расчетах. Действительная ЛАХ, изображен-

ная пунктиром, отличается от приближенной самое большее на 3 дБ в точке В.

Логарифмическая фазовая характеристика такого звена описывается выражением  $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$ , из которого видно, что при сопрягающей частоте фазовый сдвиг  $\varphi = -45^\circ$ . Для частоты  $\omega = 0$  сдвиг по фазе равен нулю, а при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow -90^\circ$ . Кривая, представляющая ЛФХ, симметрична относительно сопрягающей частоты (см. рис. 2.7, з). Построение ЛФХ можно произвести с помощью шаблона, сделанного по точкам относительно ординаты сопрягающей частоты:

| Частота, дек. | Фаза, град. |
|---------------|-------------|
| 0             | -45         |
| 0,25          | -29         |
| 0,6           | -14         |
| 1             | -6          |
| 2             | -0,5        |

Построив одну ветвь, вторую проводят на основании условия симметрии.

Колебательное звено описывается дифференциальным уравнением

$$(T^2 p^2 + 2cTp + 1)x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $c$  — параметр затухания,  $0 < c < 1$ . Передаточная функция этого звена

$$W(p) = k/(1 + 2cTp + T^2 p^2).$$

Примером колебательного звена могут быть PLC-цепи (рис. 2.8, а, б).

Переходная функция колебательного звена (рис. 2.8, в) описывается выражением

$$x_{\text{вых}} = h(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-ct/T}}{\sqrt{1-c^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-c^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \right) \right].$$

Частотная функция его имеет вид

$$W(j\omega) = k/(1 + 2cj\omega T - \omega^2 T^2).$$

Построение ЛАХ такого звена делается в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4c^2 \omega^2 T^2}. \quad (2.10)$$

При малых частотах, когда  $\omega < 1/T$  и  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , вместо выражения (2.10) приближенно будем иметь  $L(\omega) \simeq 20 \lg k$ , чему будет соответствовать на рис. 2.8, з прямая АВ, параллельная оси частот. При больших частотах, когда  $\omega > 1/T$  и  $\omega^2 T^2 \gg 1$ , вместо выражения (2.10) получим приближенное выражение

$$L(\omega) \simeq 20 \lg \sqrt{4c^2 \omega^2 T^2 - \omega^4 T^4}.$$

Этому выражению соответствует прямая  $CD$  (рис. 2.8, г), имеющая отрицательный наклон 40 дБ на декаду. Ломаная линия  $ABCD$  представляет собой приближенную ЛАХ, которой можно воспользоваться при изменении параметра затухания в пределах  $0,5 < c < 1,2$ . При затуханиях, меньших или больших указанных пределов, действительная ЛАХ будет значительно отличаться от приближенной.

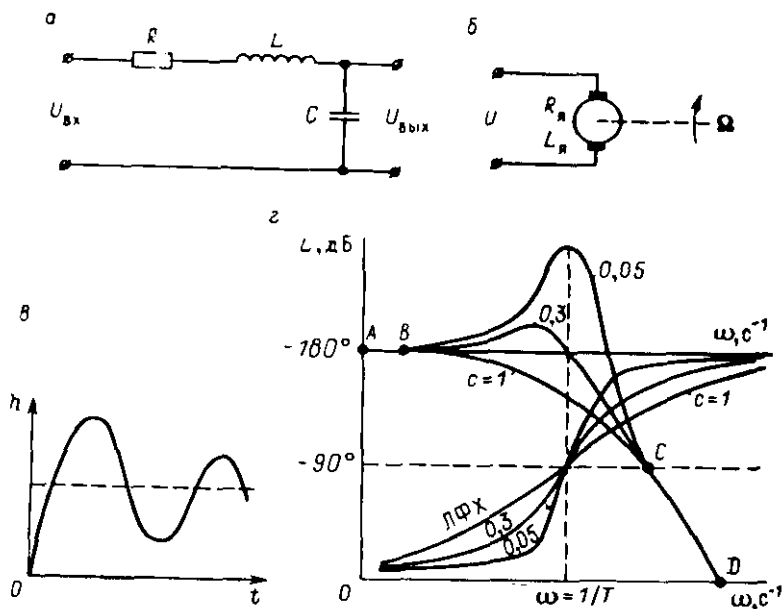


Рис. 2.8.

Логарифмическая фазовая характеристика колебательного звена, описываемая выражением

$$\varphi(\omega) = -\arctg [2c\omega T (1 - \omega^2 T^2)],$$

построена на рис. 2.8, г для разных значений параметра затухания:  $0 < c < 1$ .

Интегрирующее звено описывается дифференциальными уравнениями

$$dx_{\text{вых}}/dt = kx_{\text{вх}} \quad \text{или} \quad p x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}}.$$

Выходной параметр можно определить из уравнения с помощью интегрирования:

$$x_{\text{вых}} = k \int_0^t x_{\text{вх}} dt.$$

Передаточная функция этого звена записывается как  $W(p) = k/p$ .

К интегрирующим звеньям можно отнести примеры, приведенные на рис. 2.9, а, б:  $RC$ -цепь, интегрирующий операционный усилитель и т. д. Переходная функция рассматриваемого звена (рис. 2.9, в) записывается как

$$x_{\text{вых}} = h(t) = kt.$$

Частотная его функция имеет следующий вид:

$$W(j\omega) = k/(j\omega).$$

Логарифмическая амплитудная характеристика интегрирующего звена строится в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg(k/\omega),$$

которое является уравнением прямой (см. рис. 2.9, г) с наклоном  $-20$  дБ на декаду, проходящей через точку  $20 \lg k$  при  $\omega=1$  и пересекающей ось абсцисс при частоте, равной  $k$ .

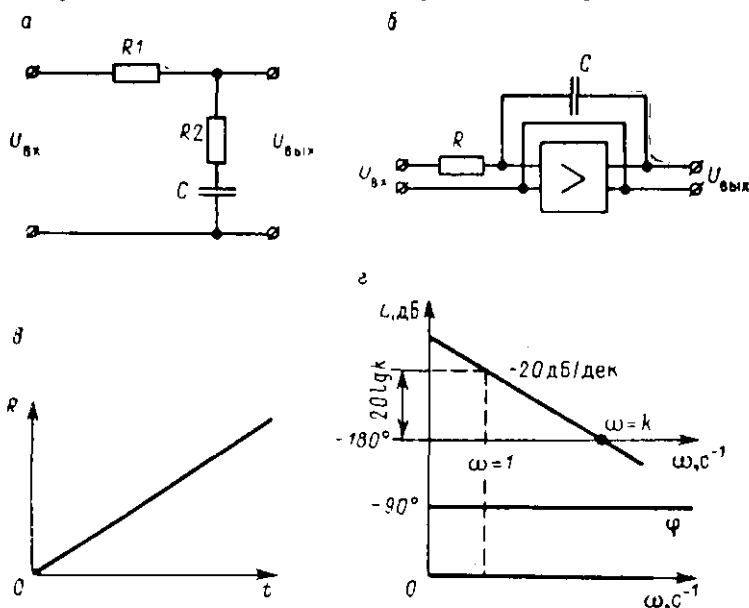


Рис. 2.9.

Логарифмическая фазовая характеристика этого звена представляет собой прямую  $\varphi = 90^\circ$ , которая параллельна оси частот (см. рис. 2.9, г).

Дифференцирующее звено описывается уравнениями

$$x_{\text{вых}} = k dx_{\text{вх}}/dt, \quad x_{\text{вых}} = kp x_{\text{вх}}. \quad (2.11)$$

Передаточная функция этого звена записывается как

$$W(p) = kp. \quad (2.12)$$

Дифференцирующие звенья с такой передаточной функцией называются *идеальными*. Реально дифференцирующие звенья чаще всего применяются в САУ в качестве корректирующих цепей и имеют в большинстве случаев передаточную функцию следующего вида:

$$W(p) = kp_i(1 + Tp).$$

К таким звеньям можно отнести (рис. 2.10, а, б) дифференцирующие RC-цепи, дифференцирующие трансформаторы и т. д.

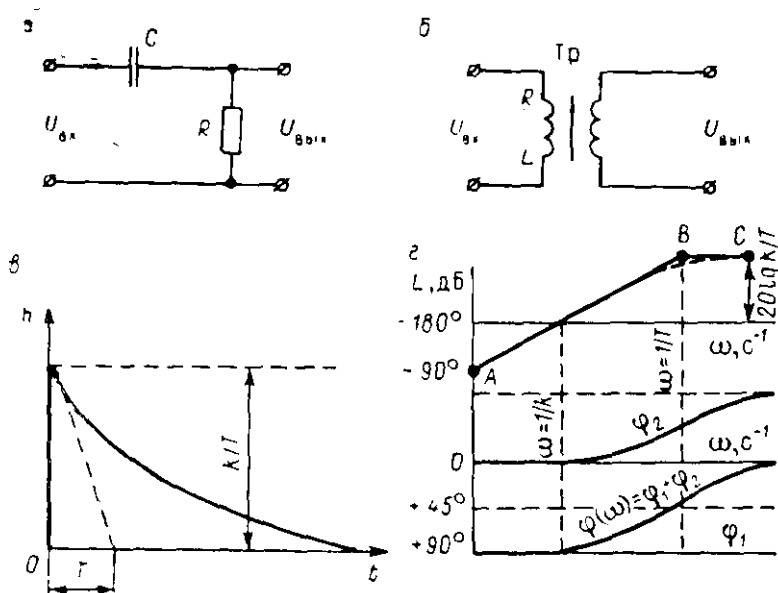


Рис. 2.10.

Нетрудно заметить, что реальное дифференцирующее звено представляет собой два последовательно включенных звена: идеальное дифференцирующее (2.19) и апериодическое (2.8).

Рассмотрим динамические характеристики реального дифференцирующего звена. Его переходная функция описывается выражением

$$x_{\text{вых}} = h(t) = ke^{-t/T}/T.$$

(Кривая переходного процесса представлена на рис. 2.10, в.) Частотная функция дифференцирующего звена записывается как

$$W(j\omega) = kj\omega(1 + j\omega T).$$

Тогда ЛАХ можно построить в соответствии с выражением

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

Для малых частот (при  $\omega < 1/T$ ) имеем  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , поэтому можно воспользоваться следующим приближенным выражением:  $L(\omega) \simeq 20 \lg k\omega$ , которому соответствует на рис. 2.10, г прямая  $AB$  с положительным наклоном 20 дБ на декаду, пересекающая ось абсцисс при частоте  $\omega = 1/k$ . Для больших частот ( $\omega > 1/T$  и  $\omega^2 T^2 \gg 1$ ) в этом случае  $L(\omega) \simeq 20 \lg(k/T)$ , чему на рис. 2.10, г соответствует прямая  $BC$ , параллельная оси абсцисс. Ломаная линия  $ABC$  есть приближенная ЛАХ, отличающаяся от действительной (пунктирная линия) в точке излома на 3 дБ.

Логарифмическая фазовая характеристика дифференцирующего звена строится в соответствии с выражением

$$\varphi(\omega) = +90 - \operatorname{arctg} \omega T,$$

т. е. представляет собой сумму двух слагаемых:  $\varphi_1 = 90^\circ$  и  $\varphi_2 = -\operatorname{arctg} \omega T$ . Результирующая ЛФХ при  $\omega = 1/T$  имеет фазовый сдвиг, равный  $45^\circ$ .

Если дифференцирующее звено описывается уравнением (2.11), то ЛАХ определяется прямой  $AB$ , а ЛФХ —  $\varphi_1 = +90^\circ$ .

Из рассмотренных типовых звеньев элементарными являются безынерционное, интегрирующее и дифференцирующее. Все другие звенья можно сформировать из элементарных путем соответствующего соединения их между собой.

Звенья, у которых переходная функция со временем затухает, называются *устойчивыми*. Типовые звенья всегда устойчивы. Их действие описывается линейными дифференциальными уравнениями с положительными коэффициентами. Исключение составляет интегрирующее звено, которое исходя из условий устойчивости называют *нейтральным*. В *неустойчивых* звеньях переходный процесс является расходящимся. Действие этих звеньев описывается линейными дифференциальными уравнениями с отрицательными коэффициентами. Примерами неустойчивых звеньев являются звенья с передаточными функциями:

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}; \quad W(p) = \frac{k}{1 - Tp}; \quad W(p) = \frac{k}{1 - 2cTp + T^2 p^2}.$$

Для устойчивых и неустойчивых звеньев одного типа АЧХ одинаковы, а ФЧХ различны. На одной и той же частоте вынужденных колебаний сдвиг фаз в устойчивом звене по абсолютной величине меньше, чем в неустойчивом, поэтому устойчивые звенья являются минимально-фазовыми, а неустойчивые — неминимально-фазовыми. Важно также отметить, что ФЧХ типовых звеньев не зависит от коэффициентов передачи этих звеньев.

**Способы соединения звеньев системы.** При исследовании САУ ее можно разбить на комбинацию динамических звеньев с определенными передаточными функциями. Будем считать ди-

намические звенья направленными и независимыми, т. е. такими, сигналы которых проходят только от входа к выходу. Подключение последующих звеньев не влияет на характер переходных и устанавливающихся процессов в предыдущих звеньях. Следовательно, исходные уравнения звеньев и их передаточные функции останутся неизменными. В системах автоматического управления используются следующие соединения динамических звеньев: *последовательное, параллельное и соединение обратной связью.*

При последовательном соединении звеньев (рис. 2.11, а) выходной сигнал предыдущего звена является входным сигналом последующего. Результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) \dots$$

$$\text{или } W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.13)$$

При параллельном соединении (рис. 2.11, б) на вход всех звеньев подается общий сигнал, на выходе образуется сигнал, являющийся суммой выходных сигналов звеньев. Результирующая передаточная функция равна сумме передаточных функций звеньев:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) + \dots$$

$$\text{или } W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.14)$$

При соединении обратной связью (рис. 2.11, в) выходной сигнал первого звена является входным для второго. Причем входной сигнал первого звена образуется в результате сложения

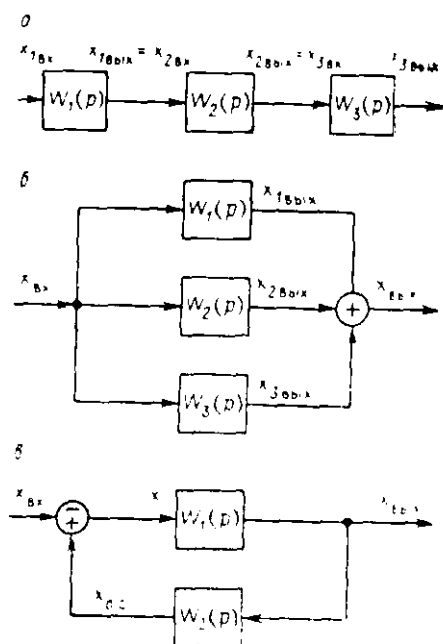


Рис. 2.11.

ния или вычитания входного и выходного сигналов второго звена. Результирующая передаточная функция будет описываться выражением

$$W(p) = W_1(p) [1 \pm W_1(p) W_2(p)]. \quad (2.15)$$

Знак минус в этой формуле ставится при положительной обратной связи, т. е. при сложении сигналов, а знак плюс — при отрицательной обратной связи, т. е. при вычитании сигналов. Если второе звено отсутствует в цепи обратной связи, то передаточная функция примет вид

$$W(p) = W_1(p) [1 \pm W_1(p)].$$

Для САУ с комбинированным включением звеньев следует использовать формулы (2.13) — (2.15).

**Методика составления структурных схем систем.** Для составления дифференциальных уравнений, которые характеризуют процессы в САУ, требуется разделить систему на типовые звенья с определенной комбинацией их включения, т. е. составить структурную схему. Количество типовых звеньев, к которым сводится САУ, определяется необходимой точностью ее описания. Например, при наличии двух разных аperiodических звеньев с разными постоянными времени, в случае отличия последних друг от друга на порядок или более, можно заменить их одним аperiodическим звеном с большей постоянной времени. Если же необходимо уточнить расчет, то следует отказаться от этого упрощения и включить в структурную схему оба исходных аperiodических звена. В большинстве случаев САУ можно привести к последовательному соединению типовых звеньев, образующему замкнутую цепь. Такие САУ называются *одноконтурными*. Другие САУ приводятся к комбинации последовательно и параллельно соединенных типовых звеньев и называются *многоконтурными*.

Многоконтурная система путем преобразований может быть приведена к эквивалентной одноконтурной. При этом пользуются рядом правил. К их числу относятся и те, которые схематически показаны на рис. 2.12 — правила замены групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звена с обратной связью одним эквивалентным звеном. Кроме того, применяются правила переноса воздействий из одной точки системы в другую с условием неизменности сигналов на выходе схемы при выполнении соответствующих преобразований. Так, на рис. 2.12 показано перенесение суммирующего элемента, т. е. выхода параллельной ветви, вперед (рис. 2.12, б) и назад (рис. 2.12, в) относительно направленности действия основного контура. В первом случае в ветвь добавляется фиктивное звено с передаточной функцией  $W_2(p)$ , равной передаточной функции обходного звена основного контура. Во втором слу-

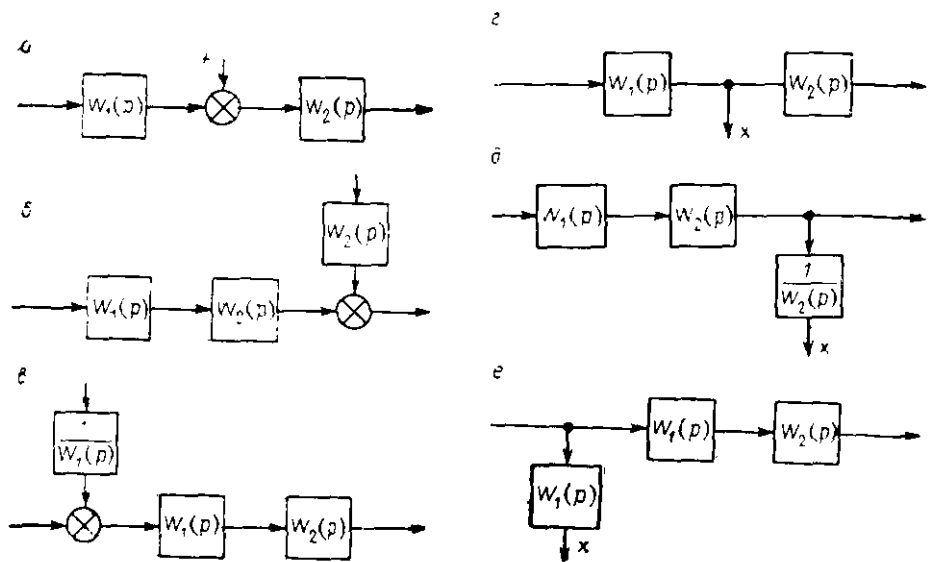


Рис. 2.12.

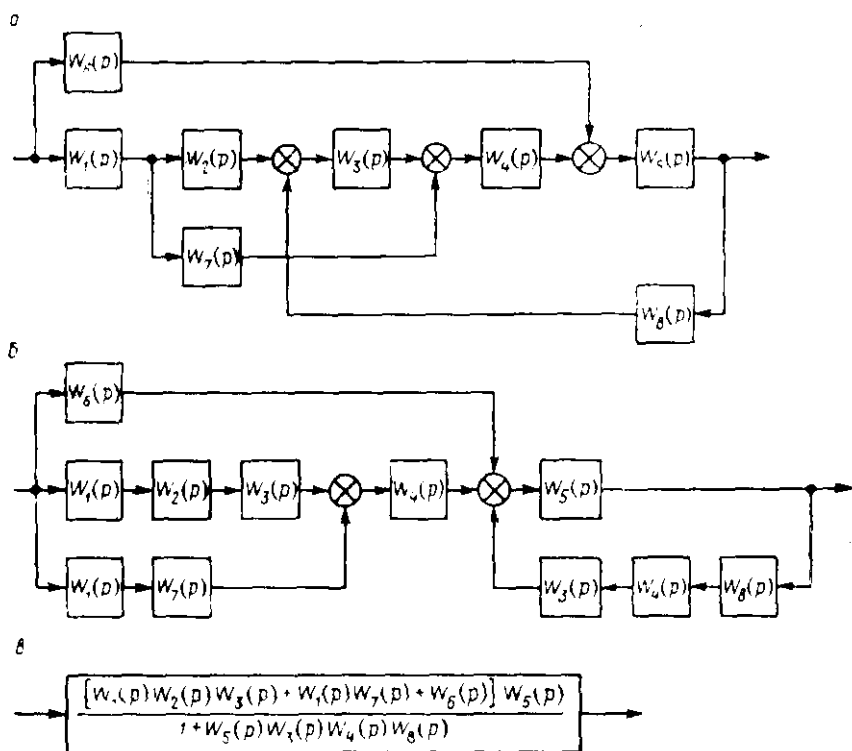


Рис. 2.13.

чае добавляется звено с обратной передаточной функцией  $1/W_1(p)$ . Для схемы рис. 2.12, г показано перенесение точки разветвления, т. е. входа параллельной ветви, вперед (рис. 2.12, д) и назад (рис. 2.12, е). В первом случае в ветвь добавляется звено с обратной передаточной функцией  $1/W_1(p)$  обходного звена, а во втором — звено с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

Рассмотрим пример преобразования структурной схемы САУ, в которой устраняются перекрещивающиеся прямые и обратные связи (рис. 2.13, а).

Преобразование начинается с переноса назад входа нижней параллельной ветви и переноса вперед выхода ветви обратной связи (рис. 2.13, б). Далее объединяются в одно звено цепи, параллельные звеньям  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$ ,  $W_3(p)$ ,  $W_4(p)$ , и в другое звено — ветвь звена  $W_5(p)$  с целью обратной связи. После этого может быть написано выражение общей передаточной функции САУ, приведенной к одному эквивалентному звену (рис. 2.13, в).

**Методика составления дифференциальных уравнений и передаточных функций систем.** После составления структурной схемы САУ реальные элементы этой системы, представленные в виде комбинации типовых звеньев, могут быть описаны дифференциальными уравнениями, которые отражают связь между выходным и входным сигналами этих звеньев. Общее число таких уравнений будет соответствовать числу звеньев или, что то же самое, числу переменных, характеризующих САУ. Из составленной системы уравнений звеньев необходимо исключить все зависимые переменные, кроме одной. Удобнее это начинать с уравнения для последнего звена системы. Затем подставляют полученные значения переменных и их производных в дифференциальные уравнения предыдущих звеньев. Таким образом, дойдя до первого звена САУ, получают дифференциальное уравнение с одной переменной, при этом порядок уравнения будет соответствовать числу переменных в САУ. Обычно звенья в структурной схеме располагаются так, чтобы оставшаяся переменная характеризовала отклонение управляемой величины.

Следует заметить, что в зависимости от сигналов, принятых за входной и выходной, а также от принятых при составлении дифференциальных уравнений допущений один и тот же элемент САУ можно описать разными уравнениями, а значит, и отобразить различными типовыми звеньями. Например, если для электродвигателя постоянного тока (рис. 2.14) за входной сигнал принято напряжение на якоре  $U_a$  ( $U_{возб}$  — напряжение

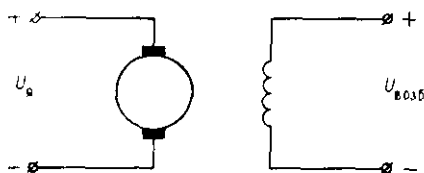


Рис. 2.14.

переменная характеризовала отклонение управляемой величины.

Следует заметить, что в зависимости от сигналов, принятых за входной и выходной, а также от принятых при составлении дифференциальных уравнений допущений один и тот же элемент САУ можно описать разными уравнениями, а значит, и отобразить различными типовыми звеньями. Например, если для электродвигателя постоянного тока (рис. 2.14) за входной сигнал принято напряжение на якоре  $U_a$  ( $U_{возб}$  — напряжение

возбуждения двигателя), а за выходной — угол поворота  $\alpha$  выходного вала и если такой электродвигатель считать безынерционным, то он будет отображен интегрирующим звеном:

$$W_1(p) = \alpha(p) U_n(p) = k_1 p.$$

Если для этого же электродвигателя за выходной сигнал принять скорость вращения  $\Omega = \dot{\alpha}$ , то он будет уже представлен безынерционным (пропорциональным) звеном:

$$W_2(p) = \Omega(p) U_n(p) = k_1.$$

Если же при тех же входных и выходных сигналах учесть инерционность электродвигателя, то он должен быть отображен либо двумя последовательно включенными звеньями — интегрирующим и апериодическим:

$$W_3(p) = \alpha(p) U_n(p) = k_1 [p(1 + T_d p)],$$

либо одним апериодическим звеном:

$$W_4(p) = \Omega(p) U_n(p) = k_1 (1 + T_d p).$$

В зависимости от сложности дифференциального уравнения элемента САУ последний может быть представлен одним или несколькими типовыми звеньями, определенным образом соединенными между собой.

Зная передаточные функции элементов САУ, можно получить передаточную функцию, а по ней частотные и временные характеристики всей системы.

Составим передаточные функции для следящей системы, принципиальная (а) и структурная (б) схемы которой изображены на рис. 2.15.

При несогласованном положении движков потенциометров (П1 и П2) возникает сигнал ошибки, поступающей в виде напряжения на исполнительный двигатель (ИД) через усилитель (У). Двигатель через редуктор (Р) поворачивает движок потенциометра П2 (а следовательно, и нагрузку (Н)) в сторону уменьшения рассогласования задающей и исполнительной осей.

Звенья следящей системы описывают следующие передаточные функции: 1) чувствительный элемент

$$W_1(p) = U(p) / \theta_1(p) = k_1;$$

2) усилитель

$$W_2(p) = U_1(p) U(p) = k_2 (1 + T_1 p);$$

3) исполнительный двигатель с передаточной функцией по сиг-

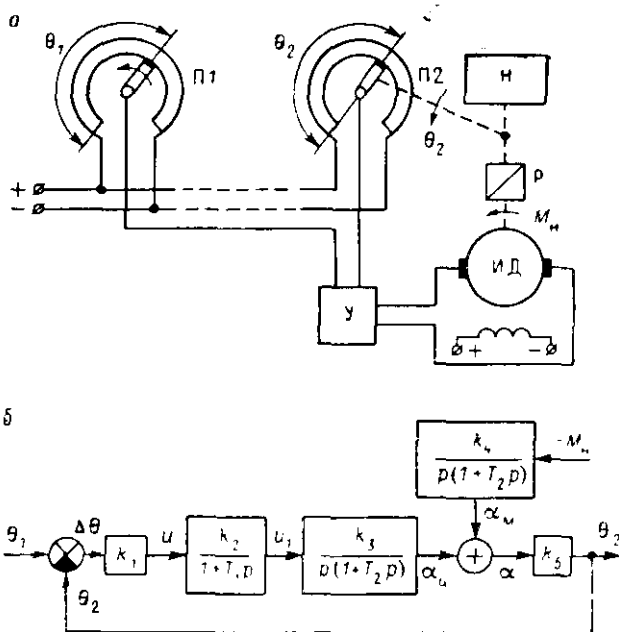


Рис. 2.15.

налу рассогласования

$$W_3(p) = \alpha_n(p), U_1(p) = k_3 [p(1 + T_2 p)]$$

и передаточной функцией по возмущающему воздействию (моменту нагрузки)

$$W_4(p) = \alpha_n(p), M_n(p) = k_4 [p(1 + T_2 p)];$$

4) редуктор

$$W_5(p) = \theta_2(p), \alpha(p) = k_5.$$

Здесь  $k_i$  — коэффициенты передачи соответствующих звеньев системы;  $T_1$  и  $T_2$  — постоянные времени соответственно усилителя и двигателя.

Для разомкнутой следящей системы передаточная функция по задающему воздействию записывается как

$$W(p) = \theta_2(p) / \theta_1(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p) W_5(p)$$

или с соответствующими значениями передаточных функций:

$$W(p) = K_2 [p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)],$$

где  $K_2 = k_1 k_2 k_3 k_5$  — коэффициент передачи следящей системы, а для замкнутой системы как

$$\Phi(p) = \theta_2(p) \theta_1(p) = W(p) [1 + W(p)] \quad (2.16)$$

или  $\Phi(p) = K_2 [p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_2]$ .

Для разомкнутой системы передаточная функция по возмущающему воздействию записывается как

$$W_f(p) = \theta_2(p) M_n(p) \quad (2.17)$$

или  $W_f(p) = k_4 k_5 [p(1 + T_2 p)]$ ,

а для замкнутой — как

$$\Phi_f(p) = \theta_2(p) M_n(p) = W_f(p) [1 + W(p)]$$

или  $\Phi_f(p) = \frac{k_4 k_5 (1 + T_1 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_2}$ .

И, наконец, для замкнутой системы передаточная функция относительно ошибки по заданному воздействию описывается выражением

$$\Phi_x(p) = \Delta \theta(p) \theta_1(p) = 1 [1 + W(p)]$$

или  $\Phi_x(p) = \frac{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + K_2}$ .

При использовании логарифмического частотного метода можно сравнительно просто построить логарифмические характеристики для сложных САУ по логарифмическим характеристикам отдельных звеньев. Так, в общем виде передаточная функция САУ имеет вид

$$W(p) = \frac{k \prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}{p^a \prod_{\alpha=1}^n (1 + T_\alpha p) \prod_{\beta=1}^e (1 + T_\beta p + T_\beta^2 p^2)}.$$

Подставив  $p = j\omega$  и найдя модуль  $|W(j\omega)|$ , можно написать выражение для построения логарифмической амплитудной характеристики системы:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k - \nu 20 \lg \omega + \\ &+ \sum_{i=1}^m 20 \lg \sqrt{1 + T_i^2 \omega^2} - \sum_{\alpha=1}^n 20 \lg \sqrt{1 + T_\alpha^2 \omega^2} - \\ &- \sum_{\beta=1}^e 20 \lg \sqrt{T_\beta^2 \omega^2 + (1 - T_\beta^2 \omega^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

для логарифмической фазовой характеристики системы:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg W(j\omega) = -\frac{\nu\pi}{2} + \sum_{i=1}^m \operatorname{arctg}(\omega T_i) - \\ &- \sum_{\alpha=1}^n \operatorname{arctg}(\omega T_\alpha) + \sum_{\beta=1}^e \operatorname{arctg} \left[ \frac{\omega T_\beta}{1 - T_\beta^2 \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из выражения (2.18) следует, что для построения ЛАХ системы нужно сложить с соответствующими знаками ЛАХ отдельных звеньев. Аналогичное построение ЛФХ системы следует из выражения (2.19).

Рассмотрим на примере порядок построения ЛЧХ для САУ, которая в разомкнутом состоянии имеет частотную передаточную функцию следующего вида:

$$W(j\omega) = k / [(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)], \quad (2.20)$$

где  $k = k_1, k_2, k_3$  — коэффициент передачи системы, равный произведению коэффициентов передачи трех апериодических звеньев;  $T_1, T_2, T_3$  — постоянные времени этих апериодических звеньев. Положим, что выполняется условие  $1 > T_1 > T_2 > T_3$ . Тогда для сопрягающих частот, равных  $\omega_1 = 1/T_1, \omega_2 = 1/T_2, \omega_3 = 1/T_3$ , будет выполнено условие  $1 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ . Построение ЛАХ делается в соответствии с выражением  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ , т. е. в данном случае

$$L(\omega) = 20 \lg k \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \quad (2.21)$$

На стандартной сетке (рис. 2.16) наносятся вертикальные прямые при сопрягающих частотах  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$ . Как правило, построение ЛАХ начинают с области низких частот. При частоте, меньшей первой сопрягающей, т. е.

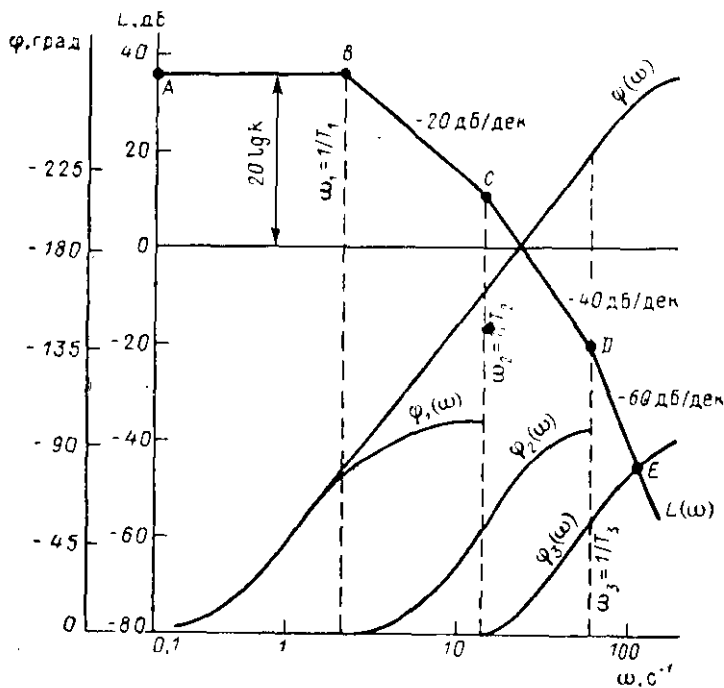


Рис. 2.16.

$\omega < \omega_1$ , выражение (2.21) примет вид  $L(\omega) \approx 20 \lg k$ , которому соответствует прямая  $AB$ , параллельная оси частот на высоте  $20 \lg k$  (дБ) в точке  $\omega = 1$ . Эту прямую необходимо провести в низкочастотной области до первой сопрягающей частоты  $\omega_1$  (точка  $B$ ). В диапазоне частот  $\omega_1 \div \omega_2$  на ход общей

характеристики ЛАХ начнет оказывать влияние аperiodическое звено с постоянной времени  $T_1$ . Поскольку постоянная времени находится в знаменателе частотной функции (2.20), то ЛАХ «изламывают» на 20 дБ на декаду вниз. Если постоянная времени находится в числителе частотной функции, то ЛАХ «изламывают» на 20 дБ на декаду вверх. Следовательно, в точке  $B$  общий наклон ЛАХ будет 20 дБ на декаду. В диапазоне частот  $\omega_2 \div \omega_3$ , начиная с точки  $C$ , общий наклон ЛАХ будет равен  $-40$  дБ на декаду. И последняя высокочастотная часть общей ЛАХ будет иметь отрицательный наклон 60 дБ на декаду. Ломаная линия  $ABCDE$  представляет собой приближенную результирующую ЛАХ рассматриваемой системы.

В данном примере система была статической. Если же необходимо построить результирующую ЛАХ астатической системы регулирования, то отличие будет заключаться в наклоне первой низкочастотной части ЛАХ (в примере он равен нулю — прямая  $AB$ ), причем наклон должен быть равен  $n \cdot 20$  дБ на декаду ( $n$  — порядок астатизма).

Логарифмическая фазовая характеристика системы регулирования определяется выражением

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_1 - \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_3.$$

Каждое слагаемое этого выражения представляет собой одну и ту же зависимость фазового сдвига аperiodического звена, поэтому достаточно построить зависимость одного звена, например  $\varphi_1(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T_1$ . Остальные слагаемые получаются простым сдвигом фазовой характеристики  $\varphi_1(\omega)$  так, чтобы при соответствующей сопрягающей частоте иметь фазовый сдвиг  $45^\circ$ . Затем производят геометрическое суммирование ЛФХ аperiodических звеньев и получают результирующую системы:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega).$$

## 2.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Любая САУ характеризуется переходным процессом, который возникает в ней при нарушении состояния равновесия вследствие какого-либо воздействия. Переходный процесс  $x(t)$  зависит как от свойств системы, так и от вида возмущающего воздействия. В переходном процессе различают две составляющие:

$$x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{св}}(t),$$

первая из них выражает вынужденные движения, определяемые возмущающим воздействием и свойствами системы; вторая — свободные движения системы, определяемые начальными условиями и свойствами самой системы.

Основной динамической характеристикой САУ является ее *устойчивость*. Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться к состоянию установившегося равновесия после устранения возмущения, которое вывело ее из этого состояния. Физическую трактовку понятия устойчивости можно пояснить следующим примером. Если шар помещен в верхнюю точку возвышенности (рис. 2.17,  $a$ ), то система неустойчива, поскольку при малейшем отклонении шара от начального положения он скатится по склону поверхности и не возвратится в исход-

ное положение. Если же шар помещен во впадине (рис. 2.17, б), то система устойчива: после отклонения шар обязательно возвратится к первоначальному положению. В обеих ситуациях устойчивость и неустойчивость системы не зависят от величины начальных отклонений шара. Однако возможны случаи, когда система при малых отклонениях будет устойчива, а при больших—неустойчива, например, если шар находится во впадине, а впадина расположена на вершине выпуклой поверхности (рис. 2.17, в). Принято считать, что такая система устойчива в малом и неустойчива в большом, поскольку устойчивость связана с величиной начального отклонения.

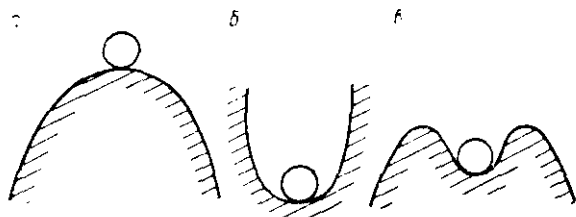


Рис. 2.17.

Система автоматического управления будет устойчива, если в переходном процессе свободная составляющая с течением времени стремится к нулю, т. е. если  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{св}(t) \rightarrow 0$ . При невыполнении этого условия САУ считается неустойчивой.

Свободное движение системы определяется однородным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x_{св}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{св}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{св}}{dt} + a_n x_{св} = 0, \quad (2.22)$$

Здесь  $x_{св}$  — свободное движение системы, которое определяет динамическую ошибку;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — постоянные коэффициенты, которые определяются параметрами системы. Уравнение (2.22) имеет решение в виде

$$x_{св}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (2.23)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни характеристического уравнения системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (2.24)$$

полученного на основании дифференциального уравнения (2.22).

Если для разомкнутой САУ известна передаточная функция  $W(p)$ , то для замкнутой системы передаточная функция будет иметь вид  $\Phi(p) = W(p) / [1 + W(p)]$ , откуда, приравни-

вая знаменатель к нулю, получим характеристическое уравнение системы:

$$1 + W(p) = 0.$$

В зависимости от вида корней уравнения (2.24) переходный процесс в системе будет затухающим или расходящимся. Рассмотрим случай, когда корни — вещественные, комплексные и чисто мнимые.

**Вещественные корни.** Если все корни являются вещественными и отрицательными, т. е.  $P_i = -\alpha_i$ , то каждое слагаемое уравнения (2.23)  $C_i \exp(-\alpha_i t)$  с течением времени будет стремиться к нулю, а следовательно, и весь переходный процесс будет затухающим, устойчивым (рис. 2.18). Но если среди вещественных отрицательных корней есть один вещественный положительный корень  $p_k = +\alpha_k$ , то соответствующее слагаемое  $A_k \exp(+\alpha_k t)$  при  $t \rightarrow \infty$  будет беспредельно увеличиваться. Поэтому, хотя все слагаемые, кроме одного, будут затухать, процесс будет расходящимся, неустойчивым (см. рис. 2.18).

**Комплексные корни.** Предположим, что при решении уравнения (2.23) мы получим два комплексных сопряженных корня, а все остальные корни — вещественные, отрицательные. Оставим в стороне влияние вещественных корней, о чем только что было сказано. Тогда, если комплексные корни будут иметь отрицательную вещественную часть  $p_{k, k+1} = -\alpha \pm j\beta$ , то слагаемые уравнения (2.23), определяемые этими корнями, предстанут в виде

$$C_k e^{-(\alpha + j\beta)t} + C_{k+1} e^{-(\alpha - j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

где  $A$  и  $\psi$  — новые постоянные интегрирования, полученные в результате преобразований слагаемых с помощью формул Эйлера:

$$\begin{aligned} e^{j\beta t} &= \cos \beta t + j \sin \beta t, \\ e^{-j\beta t} &= \cos \beta t - j \sin \beta t. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что сумма слагаемых, соответствующая комплексным корням, представляет собой составляющую в виде гармонической функции с угловой частотой  $\beta$  и амплитудой  $A e^{-\alpha t}$ . Параметр  $\alpha$  является показателем затухания огибающей  $k$ -кривой переходного процесса (рис. 2.19, а). При положительной вещественной части комплексных корней  $p_{k, k+1} = +\alpha \pm j\beta$  колебания переходного процесса будут не затухающими, а расходящимися (рис. 2.19, б).

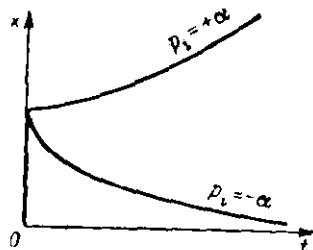


Рис. 2.18.

Чисто мнимые корни. В этом случае  $\alpha=0$ , а корни  $p_{k, k+1} = \pm j\beta$ . Слагаемые, определяемые этими корнями в уравнении (2.23), будут представлять собой

$$C_k e^{+j\beta t} + C_{k+1} e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \psi).$$

Из этого равенства видно, что составляющая переходного про-

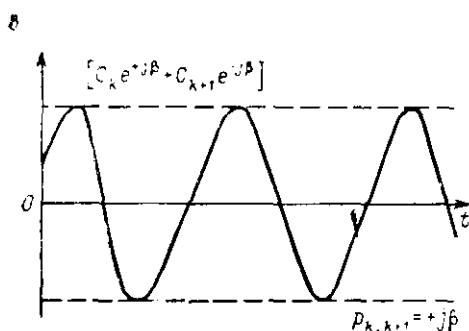
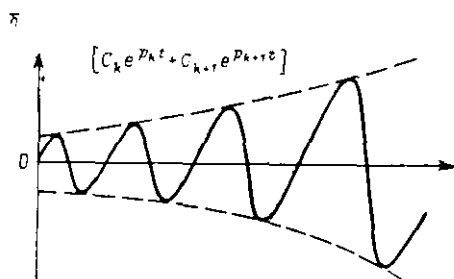
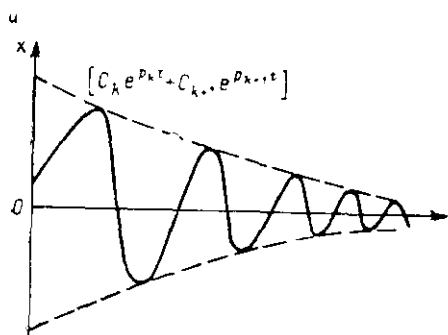


Рис. 2.19.

цесса представляет собой незатухающие колебания с угловой частотой и постоянной амплитудой (см. рис. 2.19, в).

Следовательно, для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы вещественные корни и вещественные части комплексных сопряженных корней характеристического уравнения были отрицательными. Если хотя бы один вещественный корень или вещественные части каких-нибудь комплексных сопряженных корней положительны, переходный процесс в целом будет расходящимся, и САУ окажется неустойчивой.

Для большей наглядности значения корней характеристического уравнения можно представить в виде точек на комплексной плоскости с координатами  $\alpha_i$  и  $j\beta_i$  (рис. 2.20). Для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения лежали слева от мнимой оси плоскости корней. Если

хотя бы один из корней окажется справа от мнимой оси, система будет неустойчива. Мнимая ось представляет собой границу устойчивости. Если один из корней лежит в начале координат, т. е. имеется нулевой корень, систему называют *нейтрально-устойчивой*. В этом случае она безразлична к значению самого

управляемого сигнала и устойчива относительно скорости его изменения. Если на границе устойчивости лежит пара комплексных корней, то система будет иметь незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой (см. рис. 2.19, в).

Следует обратить внимание, что все реальные САУ являются нелинейными. Линейные характеристики звеньев и линейные дифференциальные уравнения можно получить путем линеаризации реальных характеристик и уравнений. Обоснование законности линеаризации нелинейных САУ содержится в теоремах А. М. Ляпунова. Суть этих теорем заключается в следующем:

1. Если линеаризованная система устойчива, то устойчива исходная нелинейная система.

2. Если линеаризованная система неустойчива, то неустойчива и исходная нелинейная система.

3. Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то для определения устойчивости исходной нелинейной системы необходимо произвести дополнительные исследования по исходным нелинейным уравнениям системы.

Эти теоремы справедливы для исследования устойчивости САУ в малом, а также по отношению к несильно выраженным нелинейностям. К нелинейностям релейного типа эти теоремы неприменимы. Методы исследования нелинейных САУ будут рассмотрены в гл. 3.

**Критерии устойчивости.** Определение устойчивости САУ путем вычисления корней характеристического уравнения не всегда приемлемо из-за высокого порядка решаемых алгебраических уравнений. Поэтому на практике используют разные критерии устойчивости, позволяющие без вычисления корней судить об устойчивости исследуемой системы. Различают алгебраические и частотные критерии оценки устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости основаны на исследовании зависимости между коэффициентами характеристического уравнения и характером распределения корней этого уравнения в комплексной плоскости. Наиболее распространенным является *критерий Гурвица* (он был сформулирован в 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем). Математическое обоснование этого критерия довольно сложно, поэтому приведем его без доказательства. Критерий Гурвица может

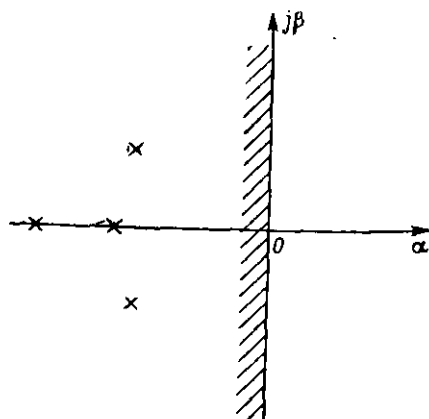


Рис. 2.20.

быть сформулирован следующим образом: система с характеристическим уравнением

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

будет устойчивой, если определитель Гурвица и все его диагональные миноры положительны, т. е. если  $\Delta_n > 0$ ;  $\Delta_{n-1} > 0$ ; ...;  $\Delta_1 > 0$ . Определитель Гурвица имеет вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

и составляется следующим образом. По главной диагонали в порядке возрастания индексов выписываются все коэффициенты от  $a_1$  до  $a_n$ . Затем каждый из столбцов дополняется вверх коэффициентами с возрастающими индексами, а вниз — с убывающими. В случае отсутствия коэффициентов подставляются нули. Диагональные миноры составляются по следующему правилу:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

и т. д. Условия нахождения САУ на границе устойчивости можно получить, приравняв к нулю последний определитель:  $\Delta_n = 0$ . При этом все остальные определители должны быть положительными.

Раскрывая определители Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерии устойчивости для систем первого, второго, третьего и более высоких порядков. Для системы первого порядка, имеющей уравнение  $a_0 p + a_1 = 0$ , условия устойчивости следующие:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$

т. е. коэффициенты уравнения должны быть положительны. Для системы второго порядка, описываемой уравнением  $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ , условия устойчивости —

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0,$$

т. е. необходимым и достаточным условием устойчивости, как и в предыдущем случае, является положительность всех коэффициентов уравнения. Для системы третьего порядка будем иметь уравнение  $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ . Условия устойчивости определяются здесь следующими неравенствами:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0,$$

т. е. помимо положительности коэффициентов уравнения требуется еще, чтобы произведение средних коэффициентов ( $a_1 a_2$ ) было больше произведения крайних ( $a_0 a_3$ ). Для системы четвертого порядка, имеющей уравнение  $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$ , условия устойчивости выражаются, кроме положительности всех коэффициентов, в виде неравенства

$$\Delta_4 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

Для системы более высоких порядков критерий Гурвица требует анализа очень громоздких выражений. Поэтому им целесообразно пользоваться при исследовании систем не выше пятого порядка.

Частотные критерии устойчивости основаны на изучении связи между формой частотной характеристики САУ и характером распределения корней характеристического уравнения. Рассмотрим некоторые частотные критерии, которые на практике нашли наибольшее применение.

В 1938 г. советский ученый А. В. Михайлов предложил *графический критерий устойчивости*, суть которого заключается в следующем. Если характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

то, представив левую часть этого уравнения в виде функции от

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (2.25)$$

и заменив  $p$  на  $j\omega$ , получим уравнение комплексного вектора

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n,$$

конец которого при изменении угловой частоты колебаний от нуля до бесконечности опишет на комплексной плоскости некоторую кривую — годограф, эта кривая называется *кривой Михайлова*.

Для построения кривой Михайлова необходимо в функции  $D(p)$  (см. формулу (2.25)) заменить  $p$  на  $j\omega$  и разделить действительную и мнимую части  $D(j\omega)$ :

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (2.26)$$

где вещественная частотная часть содержит четные степени:

$$X(\omega) = a_n + a_{n-2}\omega^2 + \dots, \quad (2.27)$$

а мнимая — нечетные:

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$$

Далее, задаваясь разными значениями  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , по формулам (2.26) и (2.27)

вычислим координаты точек годографа. При  $\omega \rightarrow \infty$  функция  $D(j\omega)$  тоже неограниченно возрастает.

**Критерий Михайлова** формируется следующим образом. Система  $n$ -го порядка будет устойчива, если годограф  $D(j\omega)$ , начинаясь на действительной положительной полуоси, обгибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно  $n$  квадрантов. На рис. 2.21а изображены кривые Михайлова при разных значениях  $n$  для устойчивых систем. Для устойчивых САУ кривая Михайлова всегда имеет плавную спиралевидную форму, уходящую в бесконечность в квадранте комплексной плоскости, номер которого соответствует степени характеристического уравнения. Больше, чем  $n$  квадрантов, кривая Михайлова вообще не может пройти. Неустойчивость системы всегда связана с нарушением последовательного обхода квадрантов кривой Михайлова (рис. 2.21, б).

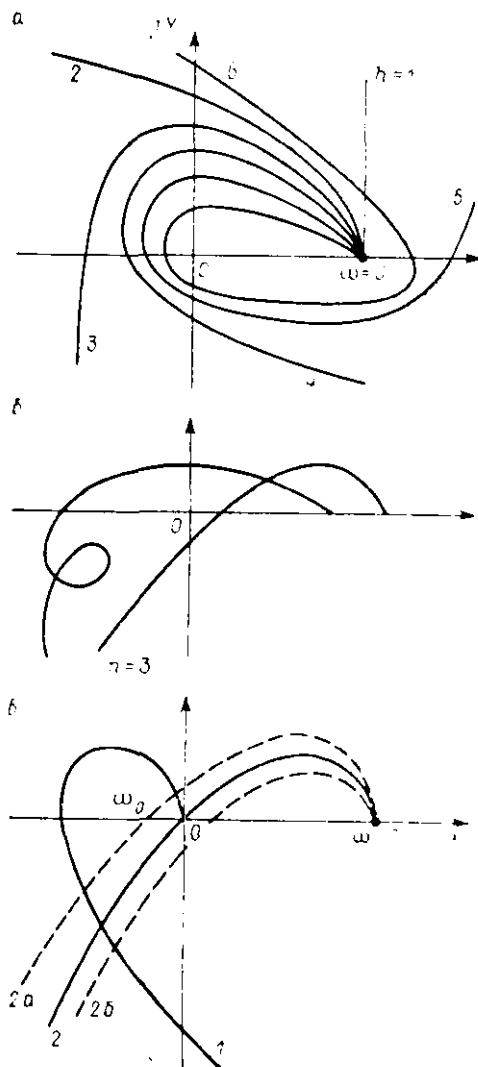


Рис. 2.21.

Условием нахождения САУ на границе устойчивости является прохождение кривой Михайлова через начало координат (см. рис. 2.21, б). Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, т. е. свободный член этого уравнения  $a_n = 0$ , то начало кривой Михайлова будет в начале координат (кривая 1 на рис. 2.21, в). В случае получения в решении уравнения чисто мнимых корней кривая Михайлова будет соответствовать кривой 2 на рис. 2.21, в. Последнее означает наличие в САУ незатухающих колебаний с частотой  $\omega_0$ , т. е. нахождение этой системы на границе устойчивости. Незначительные изменения параметров системы могут сделать ее либо устойчивой, либо неустойчивой. В зависимости от этого кривая Михайлова примет вид пунктирных линий: 2а — для устойчивой системы и 2б — для неустойчивой на рис. 2.21, в.

Для оценки устойчивости замкнутой САУ при известной амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы применяют критерий, предложенный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом. Необходимая АФЧХ может быть получена как аналитически, так и экспериментально. Последнее обстоятельство выгодно отличает рассматриваемый критерий устойчивости от уже названных.

Отметим, что разомкнутая САУ может быть устойчивой, неустойчивой или находиться на границе устойчивости. Если САУ состоит из устойчивых звеньев, то она будет устойчивой в разомкнутом состоянии. При наличии хотя бы одного неустойчивого элемента разомкнутая система будет неустойчивой. При наличии одного интегрирующего звена разомкнутая САУ находится на границе устойчивости.

Сформулируем теперь *критерий Найквиста*. Чтобы замкнутая САУ была устойчивой, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

1) при устойчивой разомкнутой САУ (или находящейся на границе устойчивости) АФЧХ при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не должна охватывать точку с координатами  $-1, j0$ ;

2) при неустойчивой разомкнутой САУ АФЧХ при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  должна охватывать точку  $-1, j0$  столько раз, сколько корней характеристического уравнения разомкнутой системы лежит справа от мнимой оси плоскости корней.

На рис. 2.22 приведены примеры АФЧХ, которые соответствуют устойчивой (а) и неустойчивой (б) замкнутой САУ для случая, когда в разомкнутом состоянии система устойчива. Амплитудно-фазовые частотные характеристики построены в плоскости  $W(j\omega) = U + jV$ , где  $U = \operatorname{Re} W(j\omega)$  — вещественная часть разомкнутой частотной передаточной функции, откладываемая по оси абсцисс;  $V = \operatorname{Im} W(j\omega)$  — мнимая часть этой же передаточной функции, откладываемая по оси ординат. Примеры, соответствующие случаю, при котором разомкнутая САУ неустой-

чива и  $n$  корней лежат справа от мнимой оси плоскости корней, приведены на рис. 2.22, в, г. Здесь при  $n=2$  характеризуется устойчивая САУ (рис. 2.22, в), а на рис. 2.22, г — неустойчивая.

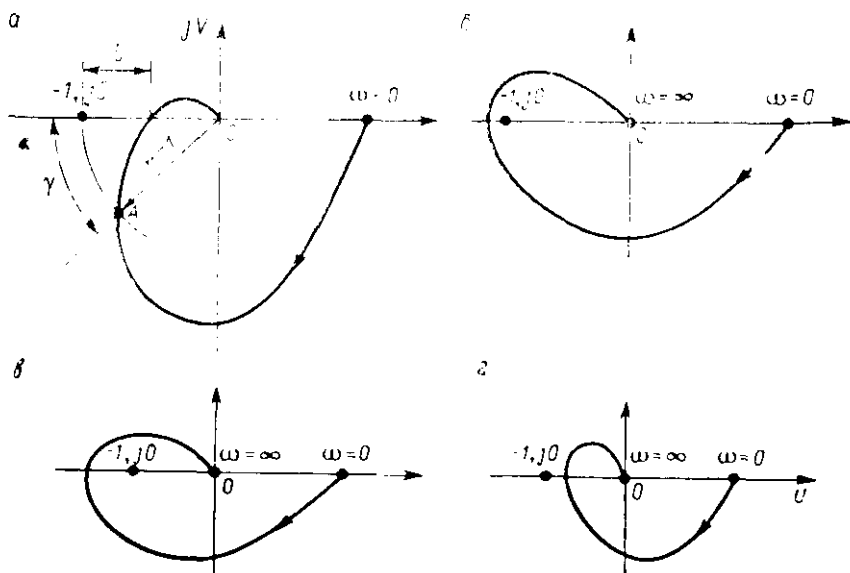


Рис. 2.22.

Проведем окружность с единичным радиусом до пересечения с АФЧХ и через точки  $A$  и нулевую — прямую линию (см. рис. 2.22, а). Тогда величины  $l$  и  $\gamma$  будут определять запас устойчивости по амплитуде ( $l$ ) и фазе ( $\gamma$ ). Чем больше эти параметры, тем устойчивее САУ.

Отметим, что в некоторых случаях критерий Найквиста применять нецелесообразно, поскольку у многоконтурных САУ, особенно с перекрестными связями, определение числа положительных корней ( $n$ ) может оказаться затруднительным.

В инженерной практике широкое применение получил способ определения устойчивости САУ по *логарифмическим частотным характеристикам*. В основу этого способа положен критерий Найквиста, но строится при этом не амплитудно-фазовая характеристика, а логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАХ) и логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФХ) разомкнутой системы. Построения ЛАХ и ЛФХ делаются в соответствии с выражениями (2.16) и (2.17) на стандартной сетке (см. рис. 2.5). Критерий устойчивости, основанный на рассмотрении логарифмических частотных характеристик, формулируется следующим образом.

Если разомкнутая САУ устойчива, то для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы во всех областях положительных ЛАХ  $[L(\omega) > 0]$  разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики  $\varphi(\omega)$  через линию  $-180^\circ$  равнялась нулю. На рис. 2.23 показаны примеры логарифмических характеристик устойчивой и неустойчивой системы, если разомкнутая система устойчива.

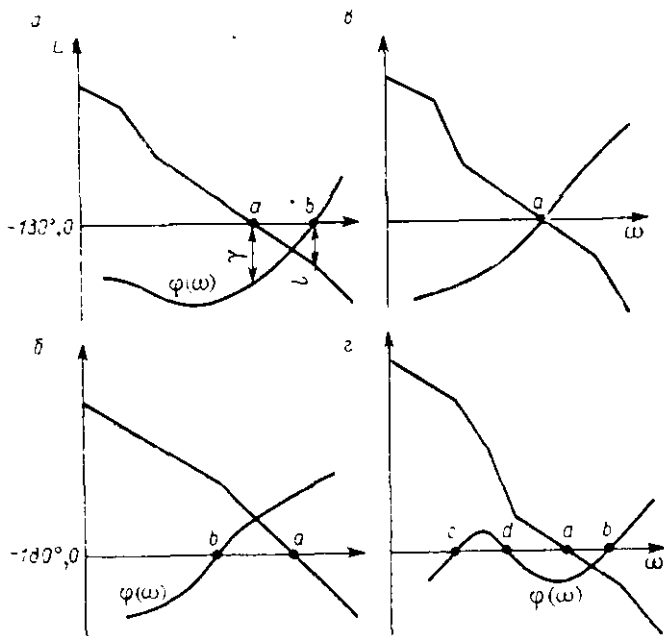


Рис. 2.23.

Система будет абсолютно устойчивой, если точка  $a$  пересечения ЛАХ с осью частот лежит левее точки  $b$ , в которой фазовый сдвиг достигает значения  $-180^\circ$  (рис. 2.23, а). На рис. 2.23, б изображен случай неустойчивой системы (точка  $a$  лежит правее точки  $b$ ). Если же ЛАХ и ЛФХ пересекаются в одной точке  $a$  (рис. 2.23, в), то система находится на границе устойчивости. И, наконец, на рис. 2.23, г изображен случай условно-устойчивой системы. Здесь точка  $a$  лежит левее точки  $b$ , но фазовый сдвиг достигает значения  $-180^\circ$  в области положительных ЛАХ дважды (точки  $c$  и  $d$ ). Значение фазы, имеющей место при пересечении амплитудной характеристикой  $L(\omega)$  оси частот (точка  $a$  на рис. 2.23, а), определяет запас устойчивости по фазе ( $\gamma$ ). Значение амплитуды, имеющей место при пересечении фазовой характеристикой  $\varphi(\omega)$  линии  $-180^\circ$  (точка  $b$  на рис. 2.23, а), определяет запас устойчивости по амплитуде ( $l$ ).

В большинстве случаев для нормальной работы САУ запас устойчивости по фазе составляет около  $30^\circ \div 60^\circ$ , а запас по амплитуде —  $(6 \div 20)$  дБ. При оценке устойчивости может считаться достаточным, если отрезок характеристики, пересекающей ось частот с наклоном  $-20$  дБ на декаду, охватывает область частот не менее  $0,75$  декады.

**Исследование устойчивости многоконтурных систем.** Большинство реальных САУ имеют не один, а несколько контуров обратной связи, которые улучшают динамические свойства этих систем. Система, таким образом, становится многоконтурной. Управление несколькими параметрами также может быть реализовано многоконтурными системами. Кроме того, с многоконтурными системами сталкиваются при проектировании сложных САУ, состоящих из нескольких взаимодействующих друг с другом следящих систем и систем стабилизации. Анализ устойчивости многоконтурных САУ обычно сложнее, чем одноконтурных. Одна из основных причин этого — то, что передаточные функции многоконтурных САУ с разомкнутой главной обратной связью не являются произведением простых сомножителей.

Весьма часто многоконтурные САУ можно упростить, преобразовав их структурные схемы с помощью приемов, рассмотренных ранее. В этом случае исследование устойчивости можно произвести упомянутыми методами. Однако более общий метод исследования устойчивости многоконтурной САУ основан на том, что сначала система анализируется известными методами в полностью разомкнутом состоянии, а затем — при последовательном включении каждой из обратных связей, имеющих в системе.

Необходимо подчеркнуть, что возможны случаи, при которых САУ, устойчивая в своем окончательном рабочем состоянии, может быть неустойчивой, если некоторые из ее внутренних обратных связей разомкнуты.

Иногда оценить устойчивость САУ можно по ее структуре. Это исключает необходимость составления и решения характеристического уравнения системы. Если система имеет структуру, при которой невозможно обеспечить устойчивость ни при каких значениях параметров ее элементов, то она называется *структурно-неустойчивой*. Примером таких систем могут быть системы, которые имеют два интегрирующих звена.

Предположим, что система, состоящая из одного апериодического и двух интегрирующих звеньев, имеет передаточную функцию

$$W(p) = k/[p^2(1 + Tp)],$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы

$$Tp^3 + p^2 + k = 0.$$

Для этого уравнения необходимое условие устойчивости не выполняется при любых значениях параметров  $T$  и  $k$ . Следовательно, система будет структурно-неустойчивой.

Структурно-неустойчивую систему можно превратить в устойчивую, только лишь изменив ее структуру, т. е. введением дополнительных обратных связей. Следовательно, в ряде случаев при анализе и синтезе САУ можно заранее отбросить варианты со структурно-неустойчивыми системами. Это особенно существенно при проектировании сложных САУ.

### 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**Показатели качества работы систем.** Устойчивость САУ является необходимым, но недостаточным условием ее технической пригодности. В конечном результате качество САУ определяется *точностью ее работы в реальных условиях*, т. е. при непрерывном изменении управляющих и возмущающих воздействий. Точность работы однозначно оценивается величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями управляемого сигнала:

$$x(t) = g(t) - y(t).$$

Однако мгновенные значения ошибки не могут быть определены при проектировании, так как во время работы САУ входной сигнал и возмущающие воздействия могут изменяться во времени случайным, неизвестным заранее образом. Поэтому качество работы САУ приходится оценивать с помощью косвенных показателей (критериев качества), которые характеризуют процесс управления раздельно в установившемся и переходном типовых режимах. В настоящее время для исследования качества линейных САУ применяют следующие основные косвенные критерии:

- 1) *алгебраические критерии*, основанные на знании распределения корней характеристического уравнения;
- 2) *интегральные критерии*, основанные на интегральных характеристиках;
- 3) *частотные критерии*, основанные на частотных характеристиках.

Широкое распространение получили частотные методы, поскольку с их помощью сравнительно просто и без излишне громоздких вычислений можно исследовать работу большинства реальных САУ.

**Точность работы систем в установившихся режимах.** Типовые законы изменения во времени входного сигнала (или возмущающего воздействия) должны быть достаточно простыми и по возможности близкими к реальным входным сигналам (или возмущениям) системы. На практике для оценки установившихся

режимов чаще всего используются следующие четыре типовых закона.

1. Неизменность управляющего и возмущающих воздействий. В качестве первого типового режима рассмотрим установившееся состояние САУ при

$$g(t) = g_0 = \text{const}, \quad f_i(t) = f_{i0} = \text{const},$$

где  $f_i(t)$  — каждое из возмущений, действующих на САУ. Ошибка системы в этом режиме называется *статической*. Она не меняется во времени, но может зависеть от величины входного и возмущающих воздействий:

$$x_{\text{ст}} = \left[ \frac{g_0}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[ \sum_{i=1}^m \frac{W_i(p) f_{i0}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = x_{\text{ст}}^1 + x_{\text{ст}}^e. \quad (2.28)$$

Здесь  $W(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию;  $W_i(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы по  $i$ -му возмущению;  $m$  — число действующих на систему возмущений. Первое слагаемое в астатических САУ равно нулю. Оно может отличаться от нуля только в статических (по управляющему воздействию) системах. Но и при статическом управлении эта составляющая может быть сведена к нулю при помощи масштабирования входного сигнала или при использовании неединичной обратной связи. Следовательно, статическая ошибка САУ в основном определяется вторым слагаемым выражения (2.28), т. е. возмущениями, действующими на систему (а также внутренними нелинейностями). К числу основных возмущающих воздействий можно отнести следующие факторы:

статическую нагрузку исполнительного механизма САУ; составляющая статической ошибки, вызванная нагрузкой, обычно наиболее велика;

конструктивные и технологические погрешности чувствительного элемента САУ, приводящие к ошибке нулевого положения, т. е. к появлению сигнала на выходе чувствительного элемента при равенстве требуемого ( $g(t)$ ) и действительного ( $y(t)$ ) значений управляемого сигнала или к равенству нулю выходного сигнала чувствительного элемента при  $g(t) \neq y(t)$ ;

люфт механической передачи между выходным валом исполнительного механизма и осью чувствительного элемента;

медленные колебания напряжения и частоты питающей сети, следствием которых является снижение передаточных коэффициентов элементов системы (отклонения частоты сети от номинального значения, кроме того, приводят к фазовым сдвигам, что может дополнительно уменьшить передаточный коэффициент системы);

изменения температуры внешней среды, приводящие к коле-

баниям передаточного коэффициента, дрейфу нуля и фазовым сдвигам в усилительном элементе САУ;

помехи (в частности, квадратурные) и временной дрейф нуля усилительного элемента системы.

2. Движение САУ с постоянной скоростью. Второй типовой установившийся режим осуществляется путем изменения входного сигнала САУ во времени по линейному закону; возмущающие воздействия при этом остаются неизменными:

$$g(t) = \Omega t, \quad f_i(t) = f_{i0} = \text{const}$$

( $\Omega = \text{const}$  — скорость изменения входной величины САУ). Ошибка системы в таком режиме может быть представлена суммой двух составляющих:

$$x_{\Omega = \text{const}} = \left[ \frac{\Omega p}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[ \frac{\sum_{i=1}^m W_i(p) f_{i0}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = x_{\Omega} + x_{\text{ст}}. \quad (2.29)$$

Второе слагаемое выражения (2.29) — это статическая ошибка, вызванная возмущающими воздействиями (в том числе и собственной погрешностью чувствительного элемента); причины ее появления были рассмотрены ранее. Следует отметить, что член  $x_{\text{ст}}$  в режиме движения САУ с постоянной скоростью может отличаться от того же режима, но при неизменном входном сигнале, например в результате скоростной ошибки чувствительного элемента САУ. Первое слагаемое стремится к бесконечности в статических (по управляющему воздействию) САУ и обращается в нуль в системах с астатизмом выше первого порядка. При астатизме первого порядка выражение (2.29) может быть записано в виде

$$x_{\Omega = \text{const}} = x_{\Omega} + x_{\text{ст}} = \Omega K_{\Omega} + x_{\text{ст}},$$

где  $K_{\Omega}$  — передаточный коэффициент разомкнутой САУ с астатизмом первого порядка по управляющему воздействию (добротность по скорости);  $x_{\Omega} = \Omega/K_{\Omega} = \text{const}$  — установившееся значение скоростной ошибки. Скоростная ошибка или определяемая ею добротность системы по скорости  $K_{\Omega} = \Omega/x_{\Omega}$  (в 1/с) могут служить удобным критерием качества для САУ с астатизмом первого порядка. На рис. 2.24 представлены зависимости выходного сигнала  $y(t)$  астатической системы от времени при изменении входного сигнала  $g(t)$

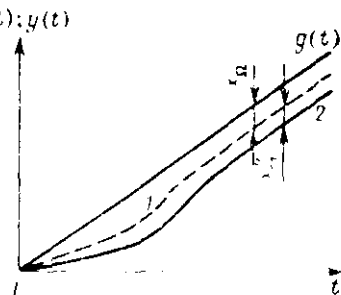


Рис. 2.24.

с постоянной скоростью. Кривая 1 соответствует отсутствию возмущающих воздействий, а кривая 2 — случаю постоянства возмущающих воздействий.

3. Движение САУ с постоянным ускорением. Для оценки качества САУ с астатизмом второго порядка удобен режим установившегося движения САУ с постоянным ускорением:  $\varepsilon = \text{const}$ . Возмущения, как и в предыдущем случае, полагаются неизменными:

$$g(t) = \varepsilon t^2/2, \quad f_i(t) = f_{j0} = \text{const}.$$

Установившаяся ошибка такой системы

$$x_{\varepsilon=\text{const}} = x_{\varepsilon} + x''_{\text{ст}} = \varepsilon K_{\varepsilon} + x'_{\text{ст}}.$$

Здесь  $K_{\varepsilon}$  — передаточный коэффициент разомкнутой системы с астатизмом второго порядка (добротность системы по ускорению). Ошибка  $x_{\varepsilon}$  или определяемый ею коэффициент добротности по ускорению  $K_{\varepsilon} = \varepsilon/x_{\varepsilon}$  (в  $1/\text{с}^2$ ) являются критериями качества САУ в этом типовом режиме.

4. Движение САУ по синусоидальному закону. Синусоидальный закон наиболее близок к реальному изменению входного параметра многих САУ. Исследование поведения системы в синусоидальном установившемся режиме работы позволяет, как будет показано далее, оценить и многие характеристики переходного режима. Большинство возмущающих воздействий в этом режиме остаются неизменными\*. В первом приближении все возмущения можно считать неизменными, т. е. при

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t, \quad f_i(t) = f_{i0} = \text{const}$$

( $g_{\max}$  — амплитуда входного синусоидального воздействия;  $\omega_k$  — его частота). В линеаризованной САУ составляющая ошибки, обусловленная входным синусоидальным воздействием, в установившемся режиме также будет меняться по гармоническому закону:

$$x_{\sin} = x_{\sin \max} \sin (\omega_k t + \psi).$$

Ее максимальное значение может быть найдено подстановкой  $p = j\omega_k$  в выражение передаточной функции замкнутой системы по ошибке:

$$\Phi_x(j\omega_k) = x(j\omega_k)/g(j\omega_k) = 1/[1 + W(j\omega_k)].$$

Отсюда

$$|x(j\omega_k)| = x_{\sin \max} = g_{\max}/[1 + W(j\omega_k)]. \quad (2.30)$$

\* Однако в большинстве САУ одно из основных возмущений — статический момент нагрузки реактивного типа (момент сил сухого трения) — меняет знак при изменении направления движения выходной оси. Учет изменения знака статического момента даже в простейших САУ приводит к громоздким расчетным выражениям.

Модуль знаменателя выражения (2.30) значительно больше единицы, поэтому можно записать с очень малой погрешностью:

$$x_{\sin \max} \simeq g_{\max} |W(j\omega_k)| = g_{\max} A(\omega_k),$$

где  $A(\omega_k)$  — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при  $\omega = \omega_k$ . Полная максимальная ошибка установившегося синусоидального режима определяется приближенной суммой:

$$x_{\sin = \text{const}} = x_{\sin \max} + x_{\text{ст}}^* = g_{\max} A(\omega_k) + x_{\text{ст}}^* \quad (2.31)$$

и является удобным критерием качества системы с астатизмом любого порядка. С помощью этого критерия можно ориентировочно оценить и максимальное значение ошибки устойчивой САУ в реальных условиях, подобрав синусоидальный режим  $g(t) = g_{\max} \sin \omega_k t$ , приближенно эквивалентный действительному изменению входного сигнала системы. Условием эквивалентности является равенство максимальных значений скорости и ускорения действительного изменения управляемого сигнала и синусоидального режима:

$$g_{\max} \omega_k = \Omega_{\text{вх. max}}, \quad g_{\max} \omega_k^2 = \varepsilon_{\text{вх. max}}. \quad (2.32)$$

Из системы уравнений (2.32) находим амплитуду ( $g_{\max}$ ) и частоту ( $\omega_k$ ) эквивалентной синусоиды:

$$g_{\max} = \Omega_{\text{вх. max}}^2 \varepsilon_{\text{вх. max}}, \quad \omega_k = \varepsilon_{\text{вх. max}} / \Omega_{\text{вх. max}}.$$

По величине ошибки эквивалентного режима, определяемой равенством (2.31), можно ориентировочно судить о максимальном значении реальной установившейся (динамической) ошибки системы.

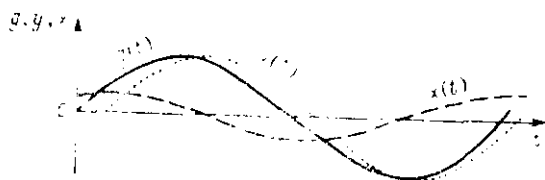


Рис. 2.25.

На рис. 2.25 представлены зависимости от времени выходного сигнала  $y(t)$  и ошибки  $x(t)$  САУ при синусоидальном изменении входного сигнала  $g(t)$  в условиях отсутствия возмущающих воздействий.

Оценка качества работы систем в переходных режимах целесообразна либо по кривой переходного процесса в замк-

нотой системе, возникающего при типовом, чаще всего скачкообразном изменении во времени входного или возмущающего воздействия, либо по амплитудно-фазовой частотной характеристике системы в разомкнутом состоянии.

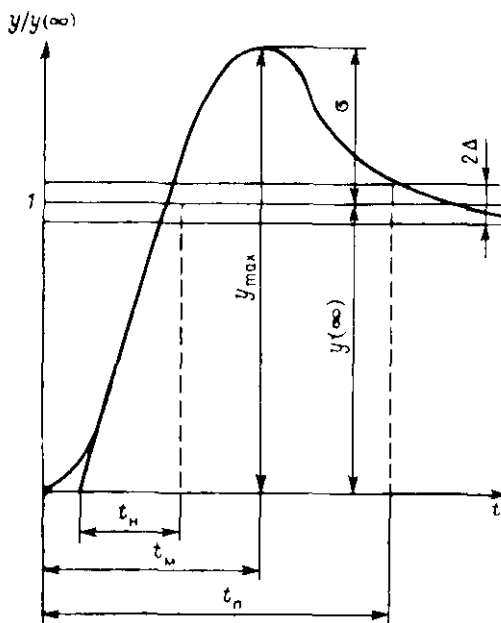


Рис. 2.26.

Временные показатели качества. По переходной характеристике замкнутой САУ — реакции на скачкообразный входной сигнал, математически описываемый выражениями (2.3), можно определить такие показатели качества переходного режима, как *склонность системы к колебаниям* и *быстродействие системы*.

Склонность системы к колебаниям (а для большинства систем и запас устойчивости) характеризуется числом колебаний, которые наблюдаются в течение переходного процесса (рис. 2.26), и так называемым *перерегулированием*:

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%.$$

Здесь  $y_{\max}$  — максимальное значение выходного сигнала в течение переходного процесса;  $y(\infty) \neq 0$  — установившееся значение выходного сигнала после завершения переходного процесса.

Быстродействие системы оценивается *длительностью переходного процесса* ( $t_n$ ), т. е. временем, протекающим от момен-

та приложения скачкообразного воздействия до момента, когда выходной сигнал будет отличаться от установившегося значения не более чем на  $\Delta = 0,03 y(\infty)$ .

Важным показателем качества переходного режима является *время нарастания* ( $t_n$ ), т. е. интервал между точкой пересечения оси времени с касательной, которая проведена к осредненной кривой переходной характеристики в точке  $y = 0,5 y(\infty)$ , и точкой пересечения этой касательной на абсциссе с горизонталью  $y = y(\infty)$  (см. рис. 2.26). Передний фронт кривой переходного процесса осредняется в том случае, когда на него накладываются высокочастотные колебания (в системах высокого порядка).

Частотные показатели качества замкнутой САУ в переходном режиме могут быть определены по АФЧХ системы в разомкнутом состоянии. Особенно удобны для этой цели логарифмические амплитудная и фазовая характеристики.

Склонность системы к колебаниям (а для большинства систем и запас устойчивости) оценивается *показателем колебательности* ( $M$ ) — максимальной ординатой АЧХ замкнутой системы при единичной начальной ординате (рис. 2.27, а).

Величина показателя колебательности может быть найдена и по АЧФХ системы в разомкнутом состоянии. Действительно, горизонтальная прямая, проведенная на плоскости амплитудной характеристики замкнутой системы  $N(\omega)$  на высоте  $M$  (пря-

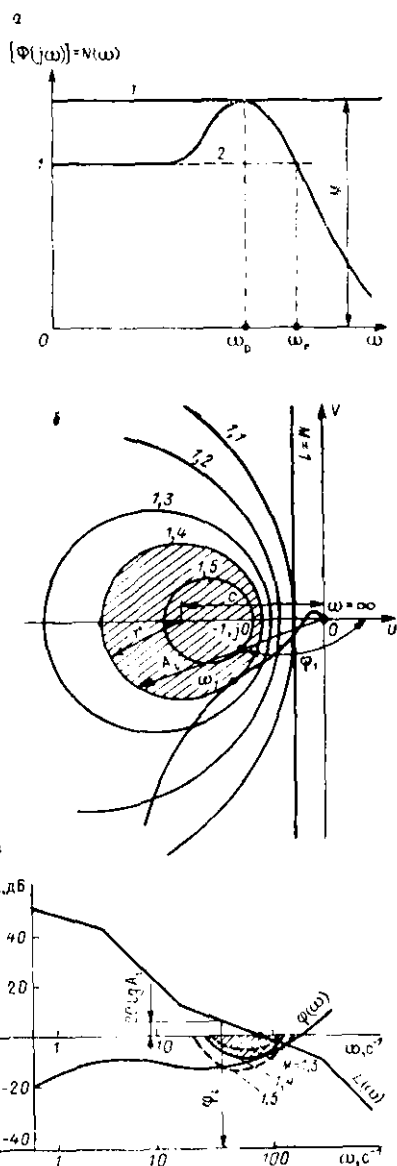


Рис. 2.27.

мая 1 на рис. 2.27, а), отображается на комплексную плоскость ( $V$ ,  $U$ ) частотной функции разомкнутой системы  $W(j\omega)$  в виде окружности радиусом  $r=M/(M^2-1)$ , центр которой смещен влево от начала координат на расстояние  $s=M^2/(M^2-1)$ . Начертив семейство окружностей, соответствующих разным значениям  $M$ , и отметив наименьшую из них, которой касается АФЧХ разомкнутой системы, найдем показатель колебательности этой системы в замкнутом состоянии. На рис. 2.27, б АФЧХ в точке  $\omega$  касается окружности, которая соответствует  $M=1,4$ .

Однако построение АФЧХ  $W(j\omega)$  на комплексной плоскости требует большого объема вычислительной работы (особенно для сложных систем). Поэтому в инженерной практике показатель колебательности системы находят по ее логарифмическим частотным характеристикам разомкнутого состояния, строящимся без громоздких вычислений.

Для определения показателя колебательности с помощью ЛАЧХ и ЛФЧХ семейство окружностей разных  $M$  (точнее, полуокружностей, расположенных ниже оси  $U$ ) перестраивают на логарифмическую плоскость в виде криволинейных зон, запретных для фазовой характеристики. Чтобы получить запретную зону выбранного показателя колебательности, измеряют длины векторов, соединяющих начало координат и несколько точек полуокружности, и находят предельно допустимые фазовые сдвиги, при которых АФХ системы может коснуться (извне) этой окружности (например,  $A_i$  и  $\varphi_i$  на рис. 2.27, б). Найденные величины  $\varphi_i$  откладывают на логарифмической плоскости в соответствии со значениями ординат амплитудной частотной характеристики исследуемой системы, равными взятым  $A_i$  (в децибелах), и соединяют нанесенные точки плавной кривой (рис. 2.27, в).

Если логарифмическая фазовая характеристика коснется одной из запретных зон (например, зоны  $M=1,4$  на рис. 2.27, в), то это значит, что АФЧХ разомкнутой системы на комплексной плоскости касается окружности с тем же индексом ( $M=1,4$  на рис. 2.27, б), а амплитудная характеристика замкнутой системы — соответствующей горизонтали ( $M=1,4$  на рис. 2.27, а), т. е. система в замкнутом состоянии имеет показатель колебательности, равный  $M$ .

В устойчивой САУ большая величина показателя колебательности будет соответствовать меньшему запасу устойчивости системы. При  $M \rightarrow \infty$  высота резонансного пика ЛЧХ замкнутой системы стремится к бесконечности, окружности на плоскости АФЧХ разомкнутой системы стягиваются в точку  $(-1, 0)$ , а запретная зона — в точку  $(\omega_{ср}, 0)$ , т. е. условие  $M$  свидетельствует о том, что система находится на границе устойчивости.

Количественной оценкой второго показателя качества систе-

мы в переходном режиме — *быстродействия* — является так называемая *полоса пропускания* — *диапазон частот, проходящих через замкнутую систему без ослабления*. Частота  $\omega_n$ , которая ограничивает полосу пропускания, определяется точкой пересечения горизонтали (прямая 2 на рис. 2.27, а), проведенной на высоте  $N(\omega) = 1$ , с АЧХ замкнутой системы.

Расчетное или экспериментальное построение АЧХ замкнутой системы намного сложнее, чем разомкнутой. Поэтому полосу пропускания замкнутой системы целесообразно отыскивать по логарифмической АЧХ системы в разомкнутом состоянии.

Во многих САУ частота среза  $\omega_{ср}$ , при которой ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс (см. рис. 2.27, в), близка к частоте резонанса  $\omega_r$ , которая, в свою очередь, мало отличается от  $\omega_n$  (см. рис. 2.27, а). Следовательно, по величине  $\omega_{ср}$  можно судить (с небольшим запасом) о полосе пропускания замкнутой САУ, т. е. количественно оценить ее быстродействие.

Таким образом, качество САУ в переходном режиме может быть оценено как по временным, так и по частотным характеристикам. Оба эти способа в настоящее время имеют большое распространение. Использование того или иного способа определяется удобством его применения в конкретной системе. Однако в большинстве случаев предпочтение отдается частотным методам оценки по следующим причинам: во-первых, основным инженерным методом расчета динамики САУ в настоящее время является частотный; исходные данные при его использовании удобно задавать в частотной форме; во-вторых, частотный способ позволяет оценить свойства замкнутой системы по ее характеристикам в разомкнутом состоянии; в-третьих, гармоническое воздействие на входе ближе к реальным условиям работы многих САУ, чем скачкообразное изменение входного сигнала.

Хотя временные и частотные оценки свойств переходного режима обычно используются независимо друг от друга, но иногда оказывается необходимым сопоставить их между собой. Связь между временными и частотными характеристиками САУ очень сложна и в общем виде может быть определена только для простейших систем. Однако передаточная функция многих замкнутых САУ, показатель колебательности которых  $M > 1$ , может быть приближенно представлена в виде

$$\Phi(p) \approx 1 (1 + 2\zeta T p + T^2 p^2).$$

Для таких систем можно сравнительно просто найти связь между временными и частотными показателями переходного режима: частота среза  $\omega_{ср}$  и время достижения первого максимума на переходной характеристике связываются приближенным соотношением (см. рис. 2.26)  $t_{\max} \approx \pi / \omega_{ср}$ , а длительность

переходного процесса, заканчивающегося после одного-двух перерегулирований:  $t_n \approx (1 + 2) \cdot 2\pi/\omega_{ср}$ .

Связь между затуханием ( $\sigma$ ), перерегулированием ( $\sigma$ , %) и показателем колебательности ( $M$ ) для этого случая представлена на рис. 2.28. В более сложных случаях для связи временных и частотных показателей следует пользоваться специальными номограммами.

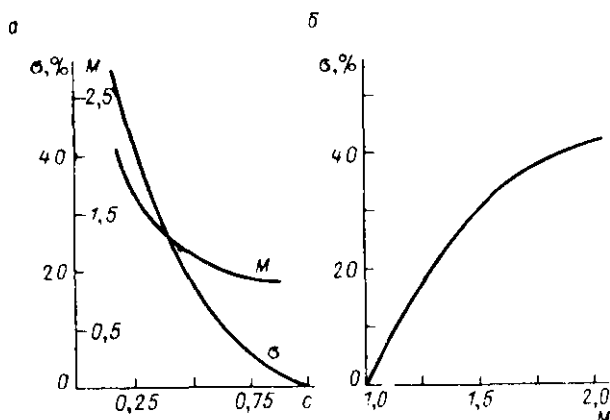


Рис. 2.28.

Оценка показателей качества по вещественной частотной характеристике  $P(\omega)$  может быть сделана на основании существующей связи между этой характеристикой замкнутой системы и кривой переходного процесса  $x(t) = h(t)$  (для единичного внешнего воздействия при нулевых начальных условиях САУ). Связь эта описывается следующим выражением:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.33)$$

Однако вычисление интеграла в правой части этого уравнения представляет большие трудности. Поэтому обычно используют приближенное решение задачи.

Анализ интеграла (2.33) дает возможность выявить следующие положения оценки качества переходного процесса:

1. Мало отличающимся вещественным характеристикам соответствуют примерно одинаковые переходные процессы. Следовательно, можно определить форму кривой переходного процесса, если вещественная характеристика мало отличается от типовой, для которой переходный процесс известен.

2. На форму кривой переходного процесса значительное влияние оказывает лишь область так называемых существен-

ных частот вещественной характеристики  $\omega_c$ , т. е. частот, при которых ординаты  $P(\omega)$  имеют сравнительно большие значения (рис. 2.29). Используя это свойство, можно ограничиваться при исследовании САУ интервалом существенных частот. Заметим, что область несущественных частот ( $\omega > \omega_c$ ) влияет главным образом на начальную часть переходного процесса, а начало вещественной частотной характеристики определяет в основном конечную его часть. Таким образом, пренебрежение этими факторами делает оценку переходного процесса более грубой.

3. Если вещественная характеристика  $P(\omega)$  представляет собой положительную невозрастающую функцию (кривая 1 на рис. 2.30), то величина перерегулирования  $\sigma$  не будет превышать 18%.

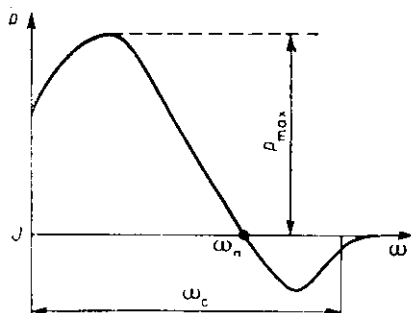


Рис. 2.29.

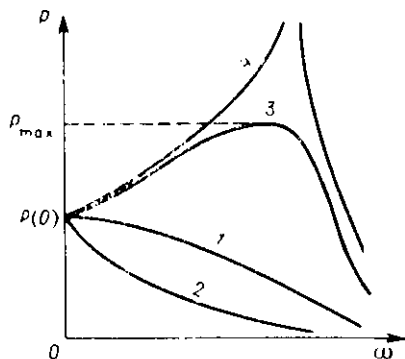


Рис. 2.30.

4. Если вещественная характеристика  $P(\omega)$  с увеличением  $\omega$  монотонно убывает (кривая 2 на рис. 2.30), то переходный процесс будет протекать без перерегулирования. При этом время затухания процесса определяется неравенством  $t_n > 4\pi/\omega_c$ .

5. Если значение вещественной характеристики  $P(\omega)$  при каких-нибудь значениях  $\omega$  больше  $P(0)$  (кривая 3 на рис. 2.30), то перерегулирование будет не больше значения, определяемого выражением  $[1,18 P_{\max}(\omega) - P(0)]/P(0)$ .

6. Если вещественная характеристика  $P(\omega)$  пересекает ось абсцисс при частоте  $\omega = \omega_n$  (см. рис. 2.29), то время затухания переходного процесса определяется неравенством

$$\pi/\omega_n < t_n < 4\pi/\omega_n.$$

Интервал частот  $0 \leq \omega \leq \omega_n$ , в котором  $P(\omega) > 0$ , называется *интервалом положительности вещественной частотной характеристики замкнутой системы*.

7. Если вещественная характеристика  $P(\omega)$  в какой-то точке  $\omega$  терпит разрыв, т. е.  $P(\omega) \rightarrow \infty$  (кривая 4 на рис. 2.30), то система находится на границе устойчивости.

8. Если две вещественные характеристики, сходные по форме:  $P_1(\omega)$  и  $P_2(\omega)$ , отличаются лишь масштабом по оси  $\omega$ , т. е.  $P_1(n(\omega)) = P_2(\omega)$ , то переходный процесс  $h_1(t)$ , соответствующий характеристике  $P_1(\omega)$ , будет затухать в  $n$  раз быстрее, чем переходный процесс  $h_2(t)$ , который определяется характеристикой  $P_2(\omega)$ .

9. Необходимым, но недостаточным условием стремления переходного процесса  $h(t)$  к установившемуся значению является выполнение неравенства  $|P(\omega)| < P(0)$ .

На основании перечисленных признаков можно грубо оценить качество переходного процесса  $h(t)$  в замкнутой САУ по виду ее вещественной частотной характеристики  $P(\omega)$ .

Доказано, что если две функции  $P_1(\omega)$  и  $P_2(\omega)$  совпадают в интервале частот  $0 < \omega < \omega_{\text{ср}}$  ( $\omega_{\text{ср}}$  — частота среза), а при  $\omega > \omega_{\text{ср}}$  их разность  $\rho(\omega) = P_1(\omega) - P_2(\omega)$  имеет  $N$  экстремумов, то для того, чтобы две переходные функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , соответствующие  $P_1(\omega)$  и  $P_2(\omega)$ , отличались не более чем на  $\varepsilon_0$  при  $t > t_1$ , т. е. удовлетворяли неравенству  $|x_1(t) - x_2(t)| \leq \varepsilon_0$ , достаточно выполнить неравенство

$$\varepsilon_0 \leq \frac{2}{\pi} M \int_{\omega_{\text{ср}} t}^{(k+N)\pi} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right| d\omega,$$

где  $M$  — наибольший экстремум;  $k = \omega_{\text{ср}} t / \pi$  — наименьшее целое число. Показано, что если, начиная с некоторого  $\omega_n$ ,  $|P(\omega)/P(0)| < (0,1 \div 0,2)$ , то при практической оценке качества вид функции  $P(\omega)$  при  $\omega > \omega_n$  можно не принимать во внимание.

При синтезе САУ целесообразно вводить дополнительный запас по фазе. Это позволит учитывать в расчетах влияние малых постоянных времени. Для удобства можно установить одно и то же значение суммы малых постоянных времени для всех типов ЛАХ. Например,  $\sum_{m=1}^n \tau_m = 0,1$ . В этом случае необходимый запас по фазе  $\Delta\tau = (5 \div 6)$ .

По виду переходного процесса в средней его части передаточная функция типа

$$W(p) = K_2(1 + T_2 p) [p(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \dots]$$

может быть сведена к эквивалентной передаточной функции вида

$$W(p) = K_2(1 + T_2 p) \left[ p(1 + T_1 p) \left( 1 + p \sum_{m=1}^n T_m \right) \right]$$

или, если положить  $\sum_{m=1}^n T_m = T_3$ , — к передаточной функции вида

$$W(p) = K_2 (1 + T_2 p) / [p (1 + T_1 p) (1 + T_3 p)].$$

Аналогичные рассуждения можно сделать по отношению к передаточным функциям других видов.

Построение кривой переходного процесса  $y = \varphi(t)$  замкнутой САУ при единичном скачкообразном воздействии удобно делать с помощью метода трапецидальных частотных характеристик. Для этого необходимо построить вещественную частотную характеристику  $P(\omega)$  замкнутой по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы, воспользовавшись номограммами, приведенными на рис. 2.31, где по оси ординат отложены значения модуля коэффициента передачи разомкнутой системы  $L(\omega)$  в децибелах, а по оси абсцисс — значения фазы  $\varphi(\omega)$  коэффициента передачи, и в этой системе координат построены линии равных значений  $P(\omega) = \text{const}$ .

Определив по логарифмическим частотным характеристикам значения  $L(\omega_i)$  и  $\varphi(\omega_i)$  для частоты  $\omega_i$ , можно найти по номограммам соответствующее значение  $P(\omega_i)$  и построить таким образом вещественную частотную характеристику  $P(\omega)$ . Затем

вещественную частотную характеристику  $P(\omega)$  исследуемой системы (рис. 2.32, а) аппроксимируют трапецидальными частотными характеристиками так, чтобы при сложении ординат всех трапеций (рис. 2.32, б) получилась исходная характеристика. Для каждой трапеции определяется коэффициент наклона  $\chi = \omega_{i1}/\omega_{oi}$  (рис. 2.32, б\*) и по нему из табл. 2.1 берутся значения  $h$ -функций.

Кривая переходного процесса получается суммированием построенных  $h$ -функций с учетом пересчета масштабов, поскольку для каждой трапеции значения  $P_{oi}$  и  $\omega_{oi}$  отличны от единицы.

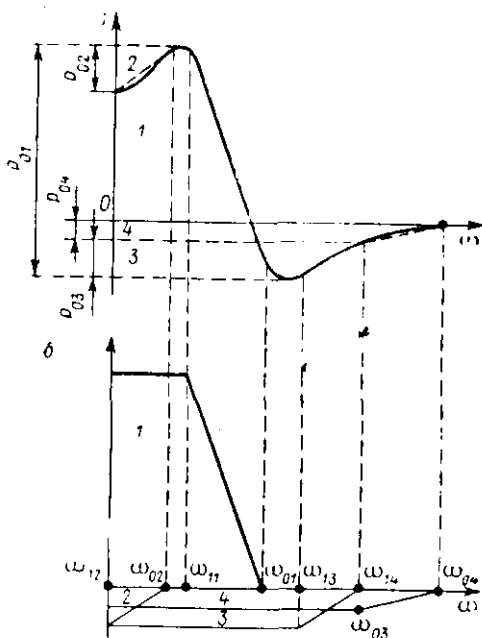


Рис. 2.32.

\* На рис. 2.32 трапеции обозначены цифрами 1—4.

| $\frac{\chi}{\tau}$ | 0,00  | 0,05  | 0,10  | 0,15  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,35  | 0,40  | 0,45  |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0                 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,5                 | 0,138 | 0,165 | 0,176 | 0,184 | 0,192 | 0,199 | 0,207 | 0,215 | 0,223 | 0,231 |
| 1,0                 | 0,310 | 0,301 | 0,340 | 0,356 | 0,371 | 0,386 | 0,401 | 0,417 | 0,432 | 0,447 |
| 1,5                 | 0,449 | 0,469 | 0,494 | 0,516 | 0,538 | 0,560 | 0,594 | 0,603 | 0,617 | 0,646 |
| 2,0                 | 0,572 | 0,597 | 0,628 | 0,655 | 0,683 | 0,709 | 0,681 | 0,761 | 0,786 | 0,810 |
| 2,5                 | 0,674 | 0,705 | 0,797 | 0,833 | 0,867 | 0,833 | 0,839 | 0,891 | 0,938 | 0,943 |
| 3,0                 | 0,775 | 0,790 | 0,828 | 0,863 | 0,896 | 0,928 | 0,958 | 0,987 | 1,013 | 1,038 |
| 3,5                 | 0,783 | 0,853 | 0,892 | 0,928 | 0,963 | 0,994 | 1,024 | 1,050 | 1,074 | 1,095 |
| 4,0                 | 0,857 | 0,896 | 0,938 | 0,974 | 1,008 | 1,039 | 1,060 | 1,090 | 1,107 | 1,124 |
| 4,5                 | 0,883 | 0,923 | 0,960 | 0,997 | 1,029 | 1,057 | 1,080 | 1,100 | 1,115 | 1,129 |
| 5,0                 | 0,896 | 0,936 | 0,978 | 1,012 | 1,042 | 1,067 | 1,087 | 1,103 | 1,112 | 1,117 |
| 5,5                 | 0,900 | 0,940 | 0,986 | 1,019 | 1,046 | 1,067 | 1,083 | 1,093 | 1,095 | 1,097 |
| 6,0                 | 0,904 | 0,942 | 0,981 | 1,013 | 1,037 | 1,054 | 1,065 | 1,070 | 1,068 | 1,062 |
| 6,5                 | 0,904 | 0,943 | 0,980 | 1,009 | 1,030 | 1,043 | 1,050 | 1,043 | 1,043 | 1,033 |
| 7,0                 | 0,904 | 0,944 | 0,978 | 1,006 | 1,024 | 1,035 | 1,037 | 1,033 | 1,023 | 1,009 |
| 7,5                 | 0,907 | 0,945 | 0,980 | 1,006 | 1,019 | 1,025 | 1,025 | 1,017 | 1,005 | 0,989 |
| 8,0                 | 0,910 | 0,951 | 0,985 | 1,008 | 1,020 | 1,024 | 1,021 | 1,012 | 0,995 | 0,981 |
| 8,5                 | 0,918 | 0,956 | 0,989 | 1,010 | 1,021 | 1,022 | 1,018 | 1,007 | 0,992 | 0,977 |
| 9,0                 | 0,924 | 0,965 | 0,996 | 1,016 | 1,025 | 1,025 | 1,018 | 1,006 | 0,992 | 0,978 |
| 9,5                 | 0,932 | 0,972 | 1,004 | 1,022 | 1,029 | 1,027 | 1,019 | 1,006 | 0,993 | 0,982 |
| 10,0                | 0,939 | 0,978 | 1,009 | 1,025 | 1,031 | 1,027 | 1,019 | 1,006 | 0,993 | 0,987 |
| 10,5                | 0,944 | 0,985 | 1,013 | 1,028 | 1,033 | 1,028 | 1,017 | 1,005 | 0,993 | 0,991 |
| 11,0                | 0,947 | 0,988 | 1,015 | 1,029 | 1,031 | 1,025 | 1,014 | 1,002 | 0,993 | 0,989 |
| 11,5                | 0,949 | 0,988 | 1,016 | 1,027 | 1,028 | 1,021 | 1,010 | 0,999 | 0,991 | 0,987 |
| 12,0                | 0,950 | 0,988 | 0,015 | 1,025 | 1,024 | 1,015 | 1,004 | 0,994 | 0,988 | 0,986 |
| 12,5                | 0,950 | 0,988 | 1,013 | 1,022 | 1,019 | 1,010 | 0,999 | 0,990 | 0,986 | 0,987 |
| 13,0                | 0,950 | 0,989 | 1,012 | 1,019 | 1,015 | 1,005 | 0,994 | 0,986 | 0,985 | 0,987 |
| 13,5                | 0,950 | 0,990 | 1,011 | 1,017 | 1,011 | 1,000 | 0,990 | 0,983 | 0,984 | 0,988 |
| 14,0                | 0,952 | 0,990 | 1,011 | 1,016 | 1,009 | 0,997 | 0,988 | 0,983 | 0,985 | 0,991 |
| 14,5                | 0,954 | 0,990 | 1,012 | 1,015 | 1,008 | 0,996 | 0,987 | 0,985 | 0,988 | 0,996 |
| 15,0                | 0,956 | 0,993 | 1,012 | 1,014 | 1,007 | 0,995 | 0,988 | 0,987 | 0,991 | 1,000 |
| 15,5                | 0,959 | 0,995 | 1,014 | 1,014 | 1,006 | 0,995 | 0,989 | 0,988 | 0,996 | 1,004 |
| 16,0                | 0,961 | 0,997 | 1,015 | 1,014 | 1,006 | 0,995 | 0,991 | 0,992 | 0,998 | 1,007 |
| 16,5                | 0,964 | 0,999 | 1,016 | 1,014 | 1,005 | 0,995 | 0,993 | 0,995 | 1,002 | 1,009 |
| 17,0                | 0,965 | 1,001 | 1,016 | 1,013 | 1,005 | 0,995 | 0,994 | 0,997 | 1,005 | 1,010 |
| 17,5                | 0,966 | 1,002 | 1,015 | 1,012 | 1,003 | 0,995 | 0,994 | 0,998 | 1,006 | 1,010 |
| 18,0                | 0,966 | 1,002 | 1,015 | 1,011 | 1,002 | 0,995 | 0,995 | 1,001 | 1,008 | 1,010 |
| 18,5                | 0,966 | 1,001 | 1,015 | 1,009 | 1,001 | 0,994 | 0,995 | 1,001 | 1,007 | 1,009 |
| 19,0                | 0,967 | 1,000 | 1,015 | 1,008 | 0,998 | 0,992 | 0,995 | 1,001 | 1,006 | 1,006 |
| 19,5                | 0,967 | 1,000 | 1,014 | 1,006 | 0,996 | 0,991 | 0,995 | 1,001 | 1,005 | 1,004 |
| 20,0                | 0,967 | 1,000 | 1,013 | 1,005 | 0,995 | 0,991 | 0,955 | 1,001 | 1,005 | 1,003 |
| 20,5                | 0,968 | 1,002 | 1,012 | 1,004 | 1,994 | 0,991 | 0,996 | 1,002 | 1,004 | 1,001 |
| 21,0                | 0,968 | 1,002 | 1,011 | 1,003 | 0,994 | 0,992 | 0,997 | 1,003 | 1,004 | 1,000 |
| 22,0                | 0,971 | 1,002 | 1,011 | 1,002 | 0,995 | 0,993 | 1,000 | 1,005 | 1,004 | 0,999 |
| 22,5                | 0,973 | 1,002 | 1,011 | 1,002 | 0,996 | 0,995 | 1,002 | 1,006 | 1,004 | 0,999 |
| 23,0                | 0,974 | 1,005 | 1,011 | 1,002 | 0,996 | 0,996 | 1,004 | 1,007 | 1,003 | 0,998 |
| 23,5                | 0,975 | 1,005 | 1,010 | 1,002 | 0,996 | 0,998 | 1,004 | 1,008 | 1,003 | 0,998 |
| 24,0                | 0,975 | 1,005 | 1,010 | 1,001 | 0,996 | 0,999 | 1,005 | 1,007 | 1,002 | 0,997 |
| 24,5                | 0,975 | 1,005 | 1,009 | 1,000 | 0,996 | 0,999 | 1,005 | 1,006 | 1,001 | 0,997 |
| 25,0                | 0,975 | 1,005 | 1,008 | 1,000 | 0,995 | 0,999 | 1,005 | 1,004 | 1,000 | 0,996 |

Таблица 2.1

| $\chi$ | 0,50  | 0,55  | 0,60  | 0,65  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,85  | 0,90  | 0,95  | 1     |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0    | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,5    | 0,240 | 0,248 | 0,255 | 0,259 | 0,267 | 0,275 | 0,282 | 0,290 | 0,297 | 0,304 | 0,314 |
| 1,0    | 0,461 | 0,476 | 0,490 | 0,505 | 0,519 | 0,534 | 0,547 | 0,562 | 0,575 | 0,593 | 0,603 |
| 1,5    | 0,665 | 0,685 | 0,706 | 0,722 | 0,740 | 0,758 | 0,776 | 0,794 | 0,813 | 0,832 | 0,844 |
| 2,0    | 0,833 | 0,856 | 0,878 | 0,899 | 0,919 | 0,938 | 0,956 | 0,974 | 0,986 | 1,003 | 1,020 |
| 2,5    | 0,967 | 0,985 | 1,010 | 1,031 | 1,042 | 1,060 | 1,078 | 1,098 | 1,113 | 1,125 | 1,133 |
| 3,0    | 1,061 | 1,082 | 1,100 | 1,117 | 1,130 | 1,142 | 1,154 | 1,164 | 1,172 | 1,176 | 1,178 |
| 3,5    | 1,115 | 1,132 | 1,145 | 1,158 | 1,181 | 1,166 | 1,171 | 1,174 | 1,175 | 1,175 | 1,175 |
| 4,0    | 1,142 | 1,152 | 1,158 | 1,159 | 1,60  | 1,161 | 1,156 | 1,149 | 1,141 | 1,131 | 1,118 |
| 4,5    | 1,138 | 1,134 | 1,134 | 1,138 | 1,132 | 1,127 | 1,111 | 1,099 | 1,085 | 1,071 | 1,053 |
| 5,0    | 1,118 | 1,115 | 1,107 | 1,098 | 1,084 | 1,069 | 1,053 | 1,037 | 1,019 | 1,001 | 0,986 |
| 5,5    | 1,092 | 1,083 | 1,070 | 1,050 | 1,032 | 1,016 | 0,994 | 0,979 | 0,962 | 0,951 | 0,932 |
| 6,0    | 1,051 | 1,037 | 1,021 | 1,003 | 0,984 | 0,956 | 0,949 | 0,934 | 0,922 | 0,920 | 0,906 |
| 6,5    | 1,018 | 1,001 | 0,982 | 0,946 | 0,948 | 0,936 | 0,920 | 0,910 | 0,903 | 0,903 | 0,905 |
| 7,0    | 0,993 | 0,975 | 0,957 | 0,941 | 0,927 | 0,917 | 0,911 | 0,908 | 0,909 | 0,915 | 0,925 |
| 7,5    | 0,974 | 0,958 | 0,944 | 0,926 | 0,922 | 0,911 | 0,920 | 0,927 | 0,934 | 0,946 | 0,958 |
| 8,0    | 0,966 | 0,951 | 0,941 | 0,935 | 0,932 | 0,936 | 0,944 | 0,955 | 0,970 | 0,986 | 1,004 |
| 8,5    | 0,970 | 0,949 | 0,944 | 0,948 | 0,951 | 0,958 | 0,974 | 0,990 | 1,006 | 1,023 | 1,041 |
| 9,0    | 0,975 | 0,960 | 0,961 | 0,966 | 0,976 | 0,990 | 1,006 | 1,023 | 1,039 | 1,053 | 1,061 |
| 9,5    | 0,982 | 0,972 | 0,980 | 0,987 | 1,000 | 1,015 | 1,033 | 1,048 | 1,059 | 1,066 | 1,066 |
| 10,0   | 0,987 | 0,985 | 0,993 | 1,006 | 1,020 | 1,036 | 1,049 | 1,059 | 1,063 | 1,062 | 1,056 |
| 10,5   | 0,993 | 0,996 | 1,007 | 1,017 | 1,033 | 1,046 | 1,054 | 1,058 | 1,055 | 1,048 | 1,033 |
| 11,0   | 0,997 | 1,002 | 1,014 | 1,027 | 1,039 | 1,047 | 1,048 | 1,044 | 1,034 | 1,021 | 1,005 |
| 11,5   | 0,977 | 1,006 | 1,017 | 1,029 | 1,037 | 1,043 | 1,034 | 1,024 | 1,010 | 0,994 | 0,977 |
| 12,0   | 0,997 | 1,006 | 1,019 | 1,026 | 1,027 | 1,025 | 1,015 | 1,000 | 0,984 | 0,969 | 0,958 |
| 12,5   | 0,997 | 1,006 | 1,018 | 1,019 | 1,017 | 1,010 | 0,995 | 0,979 | 0,965 | 0,954 | 0,949 |
| 13,0   | 0,998 | 1,006 | 1,014 | 1,012 | 1,005 | 0,993 | 0,980 | 0,964 | 0,955 | 0,950 | 0,955 |
| 13,5   | 1,000 | 1,006 | 1,010 | 1,005 | 0,995 | 0,982 | 0,968 | 0,958 | 0,954 | 0,958 | 0,970 |
| 14,0   | 1,002 | 1,006 | 1,008 | 0,999 | 0,987 | 0,974 | 0,965 | 0,961 | 0,965 | 0,976 | 0,990 |
| 14,5   | 1,005 | 1,006 | 1,005 | 0,994 | 0,983 | 0,970 | 0,969 | 0,971 | 0,981 | 0,997 | 1,010 |
| 15,0   | 1,008 | 1,007 | 1,002 | 0,993 | 0,983 | 0,976 | 0,978 | 0,987 | 1,001 | 1,017 | 1,030 |
| 15,5   | 1,011 | 1,007 | 1,001 | 0,993 | 0,985 | 0,984 | 0,991 | 1,003 | 1,019 | 1,032 | 1,040 |
| 16,0   | 1,011 | 1,008 | 1,000 | 0,996 | 0,995 | 1,001 | 1,014 | 1,027 | 1,036 | 1,039 | 1,039 |
| 16,5   | 1,012 | 1,008 | 1,000 | 0,996 | 0,995 | 1,001 | 1,014 | 1,027 | 1,036 | 1,038 | 1,028 |
| 17,0   | 1,009 | 1,007 | 0,999 | 0,997 | 0,999 | 1,008 | 1,020 | 1,030 | 1,032 | 1,027 | 1,012 |
| 17,5   | 1,008 | 1,005 | 0,997 | 0,998 | 1,002 | 1,012 | 1,023 | 1,027 | 1,023 | 1,013 | 0,988 |
| 18,0   | 1,006 | 1,002 | 0,997 | 0,998 | 1,004 | 1,014 | 1,020 | 1,018 | 1,038 | 0,993 | 0,979 |
| 18,5   | 1,001 | 0,999 | 0,995 | 0,998 | 1,003 | 1,012 | 1,014 | 1,007 | 0,981 | 0,978 | 0,969 |
| 19,0   | 0,998 | 0,995 | 0,993 | 0,997 | 1,004 | 1,009 | 1,006 | 1,007 | 0,981 | 0,969 | 0,956 |
| 19,5   | 0,996 | 0,992 | 0,992 | 0,996 | 1,003 | 1,005 | 0,998 | 0,985 | 0,973 | 0,967 | 0,973 |
| 20,0   | 0,996 | 0,991 | 0,992 | 0,995 | 1,003 | 1,001 | 0,991 | 0,979 | 0,972 | 0,974 | 0,985 |
| 20,5   | 0,995 | 0,991 | 0,994 | 0,996 | 1,001 | 0,996 | 0,986 | 0,976 | 0,974 | 0,990 | 1,001 |
| 21,0   | 0,995 | 0,993 | 0,997 | 0,996 | 0,999 | 0,993 | 0,983 | 0,975 | 0,981 | 1,002 | 1,016 |
| 21,5   | 0,996 | 0,995 | 1,000 | 0,995 | 0,998 | 0,992 | 0,986 | 0,988 | 0,997 | 1,013 | 1,024 |
| 22,0   | 0,996 | 0,996 | 1,000 | 0,997 | 0,997 | 0,991 | 0,991 | 0,997 | 1,012 | 1,024 | 1,029 |
| 22,5   | 0,997 | 1,000 | 1,004 | 1,000 | 0,996 | 0,992 | 0,998 | 1,008 | 1,022 | 1,028 | 1,026 |
| 23,0   | 0,998 | 1,001 | 1,005 | 1,001 | 0,997 | 0,994 | 1,002 | 1,015 | 1,025 | 1,027 | 1,016 |
| 23,5   | 0,999 | 1,002 | 1,008 | 1,002 | 0,998 | 0,997 | 1,007 | 1,017 | 1,023 | 1,023 | 1,002 |
| 24,0   | 1,000 | 1,002 | 1,007 | 1,003 | 0,999 | 1,000 | 1,008 | 1,017 | 1,015 | 1,012 | 0,988 |
| 24,5   | 1,000 | 1,002 | 1,006 | 1,003 | 1,004 | 1,002 | 1,005 | 1,014 | 1,005 | 0,995 | 0,979 |
| 25,0   | 1,000 | 1,004 | 1,002 | 1,003 | 1,001 | 1,003 | 1,005 | 1,008 | 0,991 | 0,985 | 0,975 |

Для этого значения функции увеличиваются в  $P_{0i}$  раз, а значение аргумента уменьшается в  $\omega_{0i}$  раз. Данные приведены ниже:

|                                      |     |     |     |     |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $\tau$ . . . . .                     | 0,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 |
| $h_i$ . . . . .                      |     |     |     |     |
| $y_i(t) = h_i P_{0i}$ . . . . .      |     |     |     |     |
| $t_i = \tau / \omega_{0i}$ . . . . . |     |     |     |     |

по ним строится график переходного процесса. Полученная суммарная кривая  $y_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)$  (рис. 2.33), где  $n$  — число

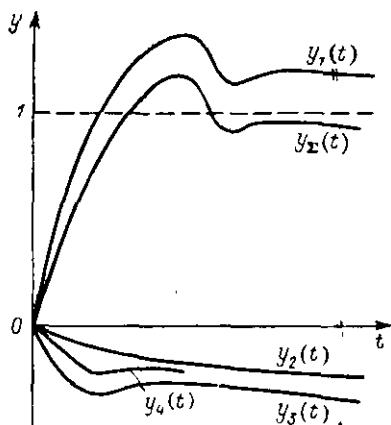


Рис. 2.33.

трапеций, будет представлять собой искомую приближенную характеристику переходного процесса. Точность построения кривой переходного процесса зависит от точности аппроксимации трапециями площади, ограниченной кривой  $P(\omega)$ .

## 2.4. МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА РАБОТЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для обеспечения требуемых статических и динамических характеристик САУ применяется различная коррекция. Коррекция САУ относится к области синтеза систем, поскольку при расчете коррекции необходимо выяснить, какие дополнительные звенья, выполняющие функции корректирующих устройств, должны быть введены в систему для обеспечения заданных характеристик. Задача синтеза корректирующих устройств не является однозначной. Один и тот же результат может быть получен разными техническими средствами. Различают три способа включения корректирующих устройств в систему: *последовательное, параллельное и цепь местной (корректирующей) обратной связи*.

Последовательное корректирующее устройство включается в главную цепь последовательно с некорректированной частью системы (рис. 2.34, а), где  $W_{\text{ук}}(p) = W_{\text{овз}}(p) W_0(p)$  — переда-

точная функция нескорректированной системы;  $W_{п.к}(p)$  — передаточная функция корректирующего устройства. Следует отметить, что последовательное корректирующее устройство может содержать параллельные цепи или местные обратные связи.

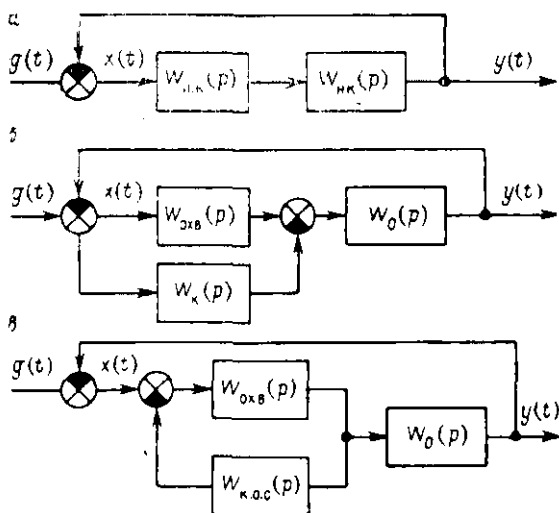


Рис. 2.34.

Параллельное корректирующее устройство  $W_k(p)$ , как видно из рис. 2.34, б, включается параллельно части системы  $W_{о.н.б}(p)$ , состоящей из одного или нескольких звеньев. Сигнал на выходе параллельной коррекции алгебраически суммируется с выходным сигналом охваченной части системы.

Корректирующее устройство, выполненное в виде дополнительной обратной связи (как правило, отрицательной), охватывает часть нескорректированной системы (рис. 2.34, в, где  $W_{о.н.б}(p)$  — передаточная функция звеньев системы, охваченных обратной связью;  $W_o(p)$  — передаточная функция звеньев, не охваченных обратной связью;  $W_{к.о.с}(p)$  — передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи).

Корректирующие устройства одного типа могут быть заменены эквивалентными устройствами другого типа. Для получения формул перехода достаточно приравнять передаточные функции последовательного, параллельного соединений звеньев и соединения типа обратной связи:

$$W_{п.к}(p) W_{о.н.б}(p) = W_{о.н.б}(p) + W_k(p) = \frac{W_{о.н.б}(p)}{1 + W_{о.н.б}(p) W_{к.о.с}(p)} \quad (2.34)$$

Из выражения (2.34) легко найти формулы перехода от одного

типа коррекции к другому:

$$\begin{aligned} W_{п. к.}(p) &= [W_{о\kappa\beta}(p) + W_{\kappa}(p)] W_{о\kappa\eta}(p); \\ W_{п. к.}(p) &= 1/[1 + W_{о\kappa\beta}(p) W_{\kappa, о. с.}(p)]; \\ W_{\kappa}(p) &= W_{о\kappa\beta} [W_{п. к.}(p) - 1]; \\ W_{\kappa}(p) &= -W_{о\kappa\beta}^2(p) W_{\kappa, о. с.}(p) [1 - W_{о\kappa\beta}(p) W_{\kappa, о. с.}(p)]; \quad (2.35) \\ W_{\kappa, о. с.}(p) &= [1 - W_{п. к.}(p)]/[W_{о\kappa\beta}(p) W_{п. к.}(p)]; \\ W_{\kappa, о. с.}(p) &= -W_{\kappa}(p)/[W_{о\kappa\beta}^2(p) + W_{о\kappa\beta}(p) W_{\kappa}(p)]. \end{aligned}$$

Динамические свойства линейных замкнутых САУ при использовании эквивалентных корректирующих устройств различного типа будут одинаковыми. Однако реальные САУ всегда содержат элементы с нелинейными статическими характеристиками (насыщение, люфт, зона нечувствительности и т. д.), ухудшающими, как правило, качество системы. Отрицательные обратные связи уменьшают влияние нелинейностей охватываемых звеньев. Поэтому использование корректирующих отрицательных обратных звеньев в большинстве систем более целесообразно, чем включение последовательных или параллельных корректирующих устройств. Кроме того, ввод корректирующих обратных связей обычно не требует дополнительного усиления, так как на вход звена обратной связи подается сигнал относительно большой величины с выхода охватываемых звеньев. Отрицательными сторонами применения этого вида коррекции являются трудность суммирования сигналов обратной связи и прямой цепи системы и возможность неустойчивости замкнутого контура, образованного охватываемыми звеньями и корректирующей обратной связью.

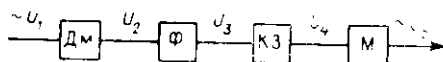
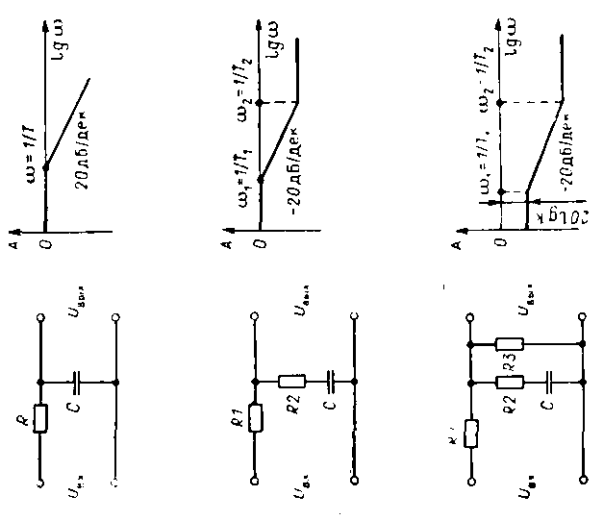
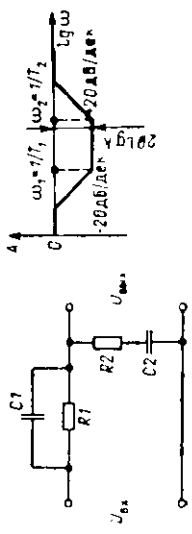
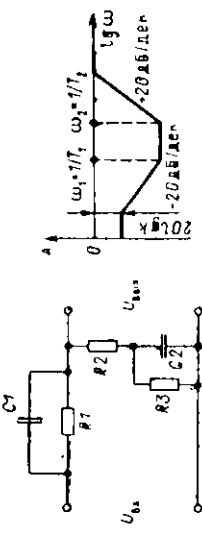


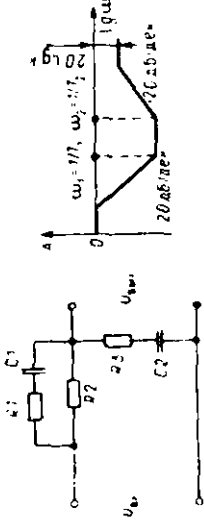
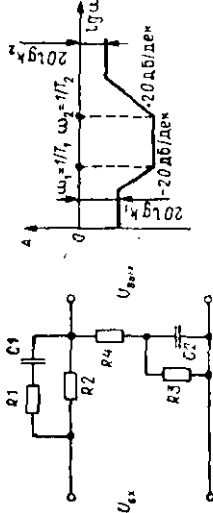
Рис. 2.35.

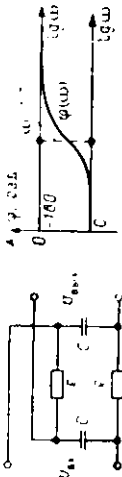
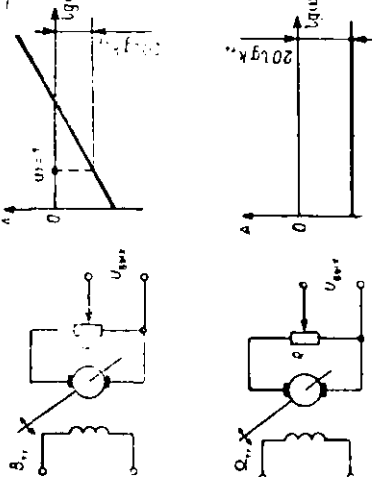
Последовательную коррекцию удобно применять, если в главной цепи САУ есть участок постоянного тока; в этом случае корректирующее звено может быть несложным  $RC$ -контуром. В системах, работающих на переменном токе, участок для включения простой последовательной коррекции образуют искусственно с помощью схемы, представленной на рис. 2.35. Модулированный сигнал переменного тока поступает на демодулятор (ДМ), затем после выпрямления на фильтр (Ф) и далее на последовательное корректирующее звено (КЗ). Выходное напряжение корректирующего звена преобразуется с помощью модулятора (М) в переменное. Если усиление сигнала после его коррекции ведется на постоянном токе, то из схемы (рис. 2.35) исключают модулятор.

| Тип устройства                    | Схема и логарифмическая амплитудная характеристика | Передающая функция |                                                                                                                                               |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                 | 2                                                  | 3                  |                                                                                                                                               |
| Пассивный дифференцирующий контур |                                                    |                    | $W(p) = \frac{Tp}{1 + Tp}; \quad T = RC$                                                                                                      |
|                                   |                                                    |                    | $W(p) = \frac{T_2 p}{1 + T_1 p}; \quad T_1 = (R_1 + R_2)C;$ $T_2 = R_1 C; \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$                                    |
|                                   |                                                    |                    | $W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{1 + T_2 p}; \quad T_1 = RC; \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$ $T_2 = R_2 T_1 (R_1 + R_2) = R_1 R_2 C (R_1 + R_2)$ |

| 1                                     | 2                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Пассивный интегрирующий контур</p> |  | $W(p) = \frac{1}{1 + T_1 p}; \quad T = RC$<br>$W(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}; \quad T_2 = R_2 C; \quad T_1 = (R_1 + R_2) C$<br>$W(p) = \frac{K(1 + T_2 p)}{1 + T_1 p}; \quad T_2 = R_2 C;$ $T_1 = \left[ R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right] C;$ $K = R_2 / (R_1 + R_3)$ |

| 1                                                             | 2                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Пассивный<br/>интегродиффе-<br/>ренцирующий<br/>контур</p> |  | $W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 p^2 + [T_1(1 + R_1/R_2) + T_2] p + 1};$ $T_1 = R_2 C_2;$ $T_2 = R_1 C_1; K = (T_1 + T_2) / [T_1(1 + R_1/R_2) + T_2]$                                      |
|                                                               |  | $W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 p^2 + [T_1(1 + R_1/R_2) + T_2] p + (R_1 + R_2 + R_3) / (R_2 + R_3)};$ $T_2 = R_1 C_1; T_1 = R_2 R_3 / (R_2 + R_3);$ $K = (R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$ |

| 1                                                             | 2                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Пассивный<br/>интегрирующе-<br/>ренцирующий<br/>контур</p> |  | $W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 [1 + R_1 R_2 / R_3 (R_1 + R_2)] p^2 + [T_1 (1 + R_2 / R_3) + T_2] p + 1}$ $T_1 = R_3 C_2; \quad T_2 = (R_1 + R_2) C_1;$ $K = R_3 (R_1 + R_2) / (R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)$                                                                                                                  |
|                                                               |  | $W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{T_1 T_2 [1 + R_1 R_2 / R_3 (R_1 + R_2)] p^2 + [T_1 (1 + R_2 / R_4) + T_2] p + 1 + R_1 R_2 [(R_1 + R_2) (R_3 + R_4)] p + (R_2 + R_3 + R_4) (R_3 + R_4)}$ $T_1 = R_3 R_4 C_2 / (R_3 + R_4); \quad T_2 = (R_1 + R_2) C_1;$ $K_1 = 1 / [1 + R_2 (R_3 + R_4)];$ $K_2 = 1 / [1 + R_1 R_2 / R_4 (R_1 + R_2)]$ |

| 1                            | 2                                                                                  | 3                                                                                                                                              |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Фазосдвигающий контур</p> |  | $W(p) = \frac{1 - Tp}{1 + Tp}; \quad T = RC; \quad \varphi = -2 \arctg \omega T$                                                               |
| <p>Тахогенератор</p>         |  | $W(p) = U_{\text{вых}}(p) / \Omega_{\text{тр}}(p) = p K_{\text{тр}}$<br><br>$W(p) = U_{\text{вых}}(p) / \Omega_{\text{тр}}(p) = K_{\text{тр}}$ |

Параллельные корректирующие устройства обычно применяют при необходимости осуществления сложных законов регулирования (ввод дифференцирующих или интегрирующих звеньев с передаточными функциями высоких порядков).

Использование последовательных или параллельных корректирующих пассивных схем часто требует включения дополнительных каскадов усиления, чтобы сохранить нужное значение передаточного коэффициента системы. Применение корректирующих устройств конкретного типа в основном определяется удобствами их технического осуществления в системе. В некоторых САУ приходится использовать одновременно несколько видов коррекции.

Напомним, что при включении в схему САУ корректирующих устройств любого типа необходимо обеспечить правильное сопряжение их с остальными элементами системы; в противном случае действие корректирующей цепи может быть нулевым.

Схемы наиболее распространенных корректирующих устройств и их характеристики приведены в табл. 2.2.

**Принципы выбора схемы и расчета параметров корректирующего устройства методом логарифмических характеристик.** Чтобы оценить качество нескорректированной САУ и установить необходимость коррекции, следует построить на логарифмической плоскости амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой основной цепи системы. Поскольку необходимая величина передаточного коэффициента САУ на данном этапе расчета неизвестна, то положение амплитудной характеристики  $L(\omega)$  по высоте фиксируется контрольными

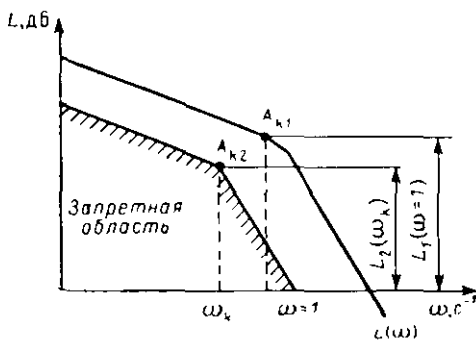


Рис. 2.36.

ми точками  $A_{\kappa 1}$  и  $A_{\kappa 2}$ , координаты которых определяются требованиями к точности работы САУ (рис. 2.36). Ординату  $L_1$  первой контрольной точки  $A_{\kappa 1}$  находят по допустимой величине статической или скоростной ошибки:  $L_1 = 20 \lg K$ , где  $K = K_{дв} \cdot K_p \cdot K_{ч.э.} \cdot K_{в.у.} \cdot K_y$  — передаточный коэффициент разомкнутой системы, равный произведению коэффициентов передачи элементов САУ: двигателя, редуктора, чувствительного элемента, вспомогательных устройств, усилителя.

Первую контрольную точку откладывают на частоте  $\omega = 1$ , так как ордината первой (низкочастотной) асимптоты ЛАХ разомкнутой системы любого порядка астатизма

при этой частоте равна передаточному коэффициенту системы (в децибелах). Вторую контрольную точку строят, исходя из требований к динамической точности. Для ее построения можно воспользоваться формулами  $\omega_k = \varepsilon_{\max} / \Omega_{\max}$ ,  $L_2(\omega_k) = 20 \lg \Omega_{\max}^2 / (\varepsilon_{\max} \chi_{\Omega + \varepsilon = \text{const}})$  ( $\chi_{\Omega + \varepsilon = \text{const}, \max}$  — максимальная амплитуда ошибки установившегося режима). Область, находящаяся ниже контрольной точки  $A_{k2}$  и двух прямых с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек, является запретной областью для ЛАХ замкнутой системы с астатизмом любого порядка (см. рис. 2.36). Если система работает со скоростью и ускорением не более  $\Omega_{\max}$  и  $\varepsilon_{\max}$ , то ошибки системы не будут больше  $\chi_{\Omega + \varepsilon = \text{const}, \max}$  при условии непрохождения ЛАЧХ системы через запретную область.

После нанесения на логарифмическую плоскость контрольных точек  $A_{k1}$  и  $A_{k2}$  строят амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой основной цепи нескорректированной системы. Первая (низкочастотная) асимптота амплитудной характеристики должна проходить не ниже первой контрольной точки; в то же время вторая контрольная точка не должна быть выше амплитудной характеристики. Взаимное расположение амплитудной и фазовой характеристик дает возможность оценить устойчивость и качество нескорректированной системы. Если показатели качества будут отличаться от заданных в худшую сторону, то переходят к следующему шагу расчета.

**Построение желаемых ЛАЧХ и ЛФЧХ.** Многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что логарифмическая амплитудная характеристика разомкнутой системы регулирования, устойчивой в замкнутом состоянии, почти всегда пересекает ось частот участком, имеющим наклон  $20$  дБ/дек. Случаи пересечения оси частот участком амплитудной характеристики с наклоном  $40$  или  $60$  дБ/дек, хотя и возможны, но практически не встречаются, ибо такая система останется устойчивой лишь при очень низком коэффициенте усиления. Наклон  $20$  дБ/дек очень редко может быть сохранен неизменным на более низких частотах, так как при этом затруднительно получить необходимую точность отработки. Наклон высокочастотных участков характеристики также превышает  $20$  дБ/дек (в системах, описываемых уравнениями порядка выше первого). Таким образом, наиболее рациональная форма логарифмической частотной характеристики

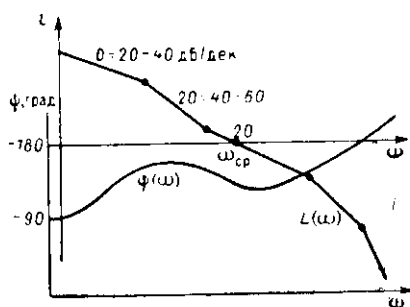


Рис. 2.37.

разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии, имеет вид, показанный на рис. 2.37. Наклон первой (низкочастотной) асимптоты характеристики определяется порядком астатизма системы и может быть равен 0; 20 и 40 дБ/дек. Участок характеристики, сопрягающей среднечастотную часть с низкочастотной асимптотой, может иметь наклон 20, 40 и 60 дБ/дек; излому ЛАХ вверх в конце сопрягающего участка соответствует положительный сдвиг фазы в районе частоты среза  $\omega_{ср}$  (характерный выем на ЛФЧХ).

Желаемые ЛАЧХ и ЛФЧХ, как правило, имеют описанную форму и строятся на графике, на котором нанесены контрольные точки  $A_{k1}$  и  $A_{k2}$  и построены ЛАЧХ и ЛФЧХ нескорректированной системы. При построении желаемых ЛАЧХ и ЛФЧХ исходят из следующих требований: во-первых, скорректированная система должна удовлетворять заданным показателям качества (допустимые значения ошибок установившихся режимов, требующийся запас устойчивости и быстродействие); во-вторых, желаемые ЛАЧХ и ЛФЧХ должны по возможности меньше отличаться от характеристик нескорректированной системы; в-третьих, следует стремиться к тому, чтобы желаемая ЛАЧХ на высоких частотах не проходила выше ЛАЧХ нескорректированной системы более чем на 20—25 дБ.

Построение желаемых ЛАЧХ и ЛФЧХ удобно вести в определенном порядке. Сначала строится низкочастотная часть ЛАЧХ с учетом условий требуемой точности, определяемой допустимой величиной установившейся ошибки; наклон ее определяется порядком астатизма системы, а положение по высоте — контрольными точками  $A_{k1}$  и  $A_{k2}$ . Затем строится среднечастотная часть ЛАЧХ с учетом требований к устойчивости и быстродействию системы. Для этого через точку на оси частот, соответствующую частоте среза (или, если это возможно, правее этой точки), проводится прямая с наклоном —20 дБ/дек. Желаемая частота среза определяется по формуле  $\omega_{ср.ж} \geq a\pi/t_n$ , где  $t_n$  — заданное время переходного процесса при единичном скачкообразном входном воздействии и нулевых начальных условиях САУ;  $a$  — коэффициент, определяемый по заданной величине перерегулирования  $\sigma$ :

|                        |     |     |     |     |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $\sigma$ , % . . . . . | 15  | 20  | 25  | 30  |
| $a$ . . . . .          | 1,7 | 2,2 | 3,0 | 4,0 |

Частоты излома  $\omega'$  и  $\omega''$  среднечастотной части ЛАЧХ можно определить из приближенных соотношений

$$\omega'' \simeq (2 \div 4) \omega_{ср.ж}, \quad \omega' \simeq \omega_{ср.ж}^2 / \omega''.$$

Среднечастотная часть желаемой ЛАЧХ сопрягается с низкочастотной прямыми, имеющими наклон —20, —40 или (в крайнем случае) —60 дБ/дек. Высокочастотная часть ЛАЧХ строится с учетом простоты технической реализации корректирующего устройства.

Следует иметь в виду, что за пределами области (рис. 2.38)  $L(\omega) < -20$  дБ/дек корректирование ЛАХ бесполезно. Ниже указанного уровня желаемая ЛАЧХ системы должна полностью совпадать с ЛАЧХ нескорректированной системы.

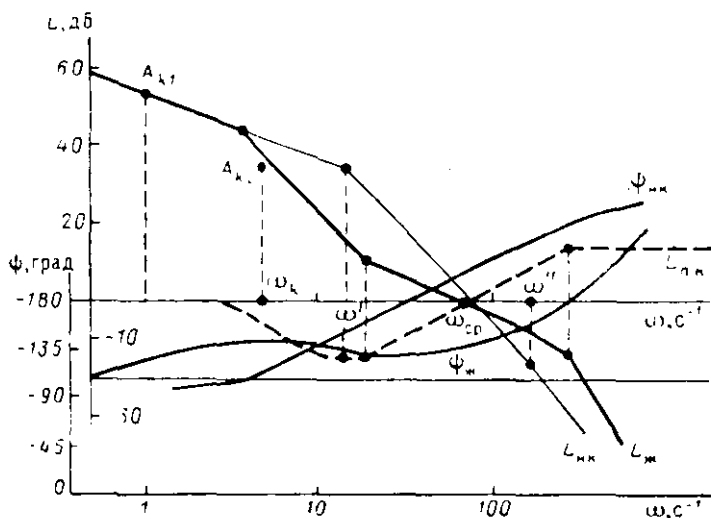


Рис. 2.38.

Построение желаемых ЛАЧХ и ЛФЧХ можно считать законченным, если удовлетворены все требования к качеству системы. В противном случае следует вернуться к статическому расчету и изменить параметры элементов основной цепи, выбрать более мощный или менее инерционный двигатель, использовать усилитель с меньшей постоянной времени, включить жесткую отрицательную обратную связь, охватывающую наиболее инерционные элементы системы, и т. д.

**Построение ЛАХ корректирующего устройства.** Логарифмическая амплитудная характеристика последовательной коррекции находится вычитанием ординат ЛАХ нескорректированной системы и желаемой ЛАХ:

$$20 \lg A_{п.к}(\omega) = 20 \lg A_{ж}(\omega) - 20 \lg A_{нк}(\omega). \quad (2.36)$$

Действительно, при включении последовательно в основную цепь привода устройства с частотной функцией  $W_{п.к}(j\omega)$  общая частотная функция будет

$$\begin{aligned} W_{ск}(j\omega) &= W(j\omega) W_{п.к}(j\omega), \\ A_{ск}(\omega) &= A(\omega) = A_{п.к}(\omega), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $W_{ск}(j\omega)$  и  $A_{ск}(\omega)$  — частотная функция скорректированной системы и ее модуль;  $W(j\omega)$  и  $A(\omega)$  — частотная функция

основной цепи исходной системы и ее модуль. Из равенства (2.37), записываемого в логарифмическом масштабе как

$$20 \lg A_{\text{с.к.}}(\omega) = 20 \lg A(\omega) + 20 \lg A_{\text{п.к.}}(\omega),$$

непосредственно получаем выражение (2.36) при  $A_{\text{с.к.}}(\omega) = A_{\text{ж.}}(\omega)$ , т. е. при условии совпадения ЛАХ скорректированной системы с ЛАХ желаемой.

Пример построения ЛАХ последовательного корректирующего устройства показан на рис. 2.38 (пунктирная линия).

Наиболее простой способ построения логарифмической амплитудной характеристики корректирующей обратной связи основан на использовании формул эквивалентного перехода (2.35) от одного вида коррекции к другому\*:

$$W_{\text{п.к.}}(p) = 1 [1 + W_{\text{охв.}}(p) W_{\text{к.о.с.}}(p)].$$

Переходя к амплитудным частотным характеристикам, можем записать

$$A_{\text{п.к.}}(\omega) = 1 [1 + W_{\text{охв.}}(j\omega) W_{\text{к.о.с.}}(j\omega)].$$

Для диапазона частот, в котором

$$W_{\text{охв.}}(j\omega) W_{\text{к.о.с.}}(j\omega) = A_{\text{охв.}}(\omega) A_{\text{к.о.с.}}(\omega) \gg 1, \quad (2.38)$$

$$A_{\text{п.к.}}(\omega) \simeq 1 / A_{\text{охв.}}(\omega) A_{\text{к.о.с.}}(\omega),$$

в логарифмическом масштабе

$$20 \lg A_{\text{п.к.}}(\omega) \simeq - [20 \lg A_{\text{охв.}}(\omega) + 20 \lg A_{\text{к.о.с.}}(\omega)].$$

Отсюда

$$20 \lg A_{\text{охв.}}(\omega) \simeq - [20 \lg A_{\text{п.к.}}(\omega) + 20 \lg A_{\text{к.о.с.}}(\omega)].$$

Погрешность приближенного равенства (2.39) не превышает 3 дБ, если неравенство (2.38), записанное в логарифмическом масштабе, имеет вид  $20 \lg A_{\text{охв.}}(\omega) + 20 \lg A_{\text{к.о.с.}}(\omega) \geq 11 \text{ дБ}$ , если же  $20 \lg A_{\text{охв.}}(\omega) + 20 \lg A_{\text{к.о.с.}}(\omega) \geq 33 \text{ дБ}$ , то погрешность равенства (2.39) меньше 1 дБ.

Следовательно, для построения ЛАХ корректирующей обратной связи ( $L_{\text{к.о.с.}}$ ), придающей системе требуемое качество, нужно сложить ЛАХ последовательного корректирующего устройства ( $L_{\text{п.к.}}$ ), найденную описанным ранее способом, с ЛАХ звеньев, которые предполагается охватить обратной связью ( $L_{\text{охв.}}$ ), и в соответствии с равенством (2.39) найти зеркальное отображение суммарной характеристики относительно оси частот (рис. 2.39). Для оценки диапазона частот, в котором погрешность построения  $\Delta A_{\text{к.о.с.}}$  не превышает допустимой величины (обычно  $\Delta A_{\text{к.о.с.}} \leq 3 \text{ дБ}$ ), следует зеркально отобразить относительно оси частот ЛАХ последовательной коррекции и вы-

\* Напомним, что эти формулы справедливы для линейных систем.

делить частоты, на которых ординаты этой ЛАХ больше 11 дБ. В найденной полосе частот  $\omega_n \div \omega_b$  (см. рис. 2.39) ЛАХ корректирующей обратной связи можно считать построенной достаточно точно. Для частот, лежащих за границами диапазона

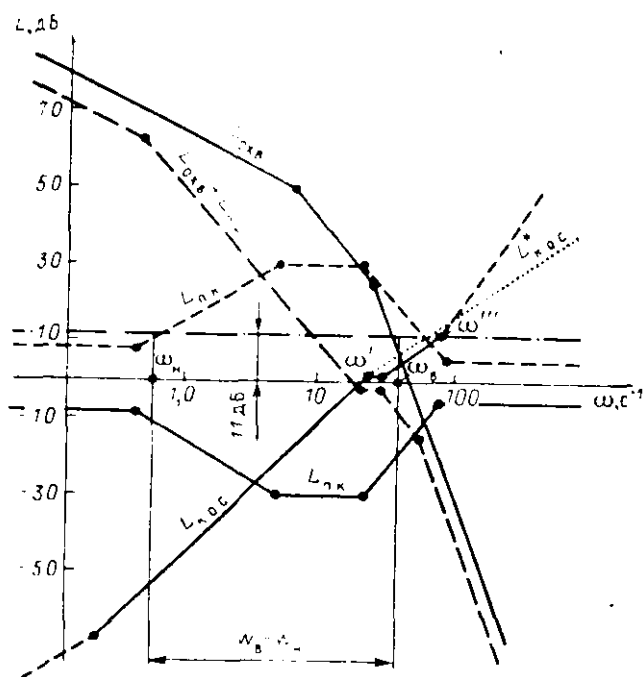


Рис. 2.39.

$\omega_n \div \omega_b$ , ЛАХ корректирующей обратной связи приходится строить по точкам, используя точную формулу эквивалентного перехода (2.35):

$$A_{к. о. с.}(\omega) = [1 - W_{п. к.}(j\omega)] (A_{о. хв.}(\omega) A_{п. к.}(\omega)).$$

Во многих случаях, однако, удастся обойтись без вычислений, если из физических соображений установлен возможный вид ЛАХ корректирующей обратной связи вне полосы  $\omega_n \div \omega_b$ . На высоких частотах, например, звенья, охватываемые обратной связью, имеют, как правило, очень низкий коэффициент передачи; корректирующая обратная связь почти не оказывает влияния на работу привода, и ее ЛАХ на высоких частотах может быть практически любой формы (точечная линия  $L_{к. о. с.}$  на рис. 2.39).

Если корректирующая обратная связь содержит хотя бы одно дифференцирующее звено, то на низких частотах ее ЛАХ также может идти достаточно произвольно, так как сигнал на выходе дифференцирующей цепи на низких частотах может быть настолько малым, что его влияние на работу системы окажется ничтожным.

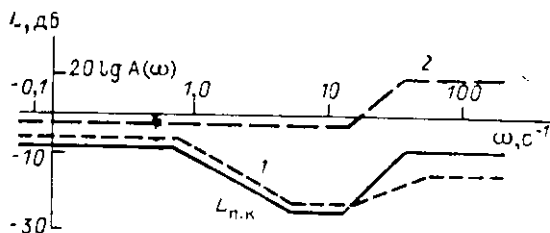


Рис. 2.40.

Иногда ЛАХ последовательной коррекции или корректирующей обратной связи получается сложной, и ей соответствует технически трудно реализуемое устройство. В этом случае целесообразно попытаться упростить найденную характеристику, исключая, например, рядом находящиеся изломы вверх и вниз ( $\omega'$  и  $\omega''$  на рис. 2.39) и изломы на очень высоких или низких частотах ( $\omega'''$ ), либо представить сложную ЛАХ в виде суммы двух более простых (рис. 2.40); корректирующее устройство, имеющее одну из полученных характеристик (например 1 на рис. 2.40), включить последовательно в основную цепь системы, а по второй характеристике (2) найти эквивалентную ЛАХ корректирующего звена в цепи обратной связи. После упрощения характеристики необходимо обратным построением найти ЛАФЧХ скорректированной системы и убедиться, что показатели ее качества по-прежнему удовлетворяют заданию.

**Определение схемы и параметров корректирующего устройства.** Схему корректирующего устройства (чаще всего пассивной электрической цепи), соответствующую найденной частотной характеристике, можно отыскать при помощи общих методов теории электрических цепей. Эти методы, однако, слишком сложны для использования их в инженерных расчетах. Поэтому для определения схемы цепи по ЛАЧХ последнюю заменяют суммой простых характеристик, каждой из которых соответствует известное звено, либо находят схему цепи, соответствующую исходной ЛАХ, по табл. 2.2. После того как схема устройства, имеющего данную частотную характеристику, определена, расчет параметров обычно нетруден. Ход расчета показан на примерах в литературе.

Заметим, что для обоснованного выбора типа корректирующего устройства необходимо не только учесть факторы, пере-

численные ранес, но часто требуется найти ЛАХ, схему и параметры последовательной коррекции и наиболее удобной обратной корректирующей связи. Сравнение реализаций позволит сделать правильный выбор вида коррекции.

После расчета необходимо уточнить коэффициент передачи усилителя САУ ( $K_y$ ). Для этого следует измерить ординату первой асимптоты ЛАХ скорректированной системы на частоте  $\omega = 1$ :  $L_{ск} = 20 \lg K_{мл}$ , найти коэффициент усиления усилителя

$$K_y'' = K_{треб} / (K_{дв} K_{рел} K_{ч.з} K_{у.м} K_{п.у})$$

и, если для коррекции системы требуется активное последовательное корректирующее устройство, увеличить его в соответствующее число раз. Например, для коррекции системы, характеристики которой изображены на рис. 2.39, требуется активное корректирующее устройство последовательного типа с ЛАХ ( $L_{п.к}$ ), поднимающейся над осью частот на 12 дБ. Значит, коэффициент усиления усилителя системы необходимо увеличить в пять раз. После этого в систему можно включать пассивное корректирующее устройство, вносящее затухание на частоте  $\omega = 1$ , тоже равное 12 дБ; передаточный коэффициент разомкнутой системы останется равным требуемому.

## Глава 3

# НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 3.1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

К нелинейным относятся системы, в которых связь между выходным и входным сигналами одного или нескольких основных элементов задается нелинейными уравнениями. Любая реальная САУ всегда содержит нелинейности вследствие наличия люфтов, трения, ограниченной мощности исполнительных элементов и других факторов. Если влияние нелинейностей на систему несущественно, то ее можно линеаризовать. Это позволяет свести рассмотрение динамических свойств САУ к решению линейной задачи. Однако на практике часто приходится встречаться с САУ, которые имеют существенные нелинейные характеристики, влияющие на динамические свойства системы.

Нелинейности, встречающиеся в САУ, либо являются неотъемлемыми физическими свойствами элементов (например, сухое трение, люфт, прилипание, насыщение и т. д.), либо преднамеренно вводятся в систему для получения требуемых показателей качества САУ (например, релейные усилители, нелинейные корректирующие устройства и т. д.).

Нелинейные системы могут обладать качественными особенностями, которые несвойственны линейным системам. К таким особенностям относятся, например, возникновение периодических колебаний (называемых автоколебаниями), возможность нескольких равновесных состояний, только часть которых устойчива, переход системы из одного установившегося движения в другое под действием внешних сил и т. д.

Обычно в любой нелинейной САУ можно выделить группу линейных элементов (ЛЭ) и один или несколько нелинейных (НЭ). При одном нелинейном элементе структурная схема САУ может быть представлена как одноконтурная, состоящая из последовательно включенных линейных и нелинейного элементов (рис. 3.1.). При других видах включения линейных и нелинейных частей САУ ее также можно привести к схеме,

показанной на рис. 3.1, с помощью структурных преобразований. При составлении структурной схемы нелинейной САУ вместо нелинейного элемента обычно указывают его нелинейную статическую характеристику или, если это возможно, записывают аналитическое выражение нелинейной функции элемента. Нелинейные статические характеристики могут быть разбиты на две группы: *однозначные* и *неоднозначные*.

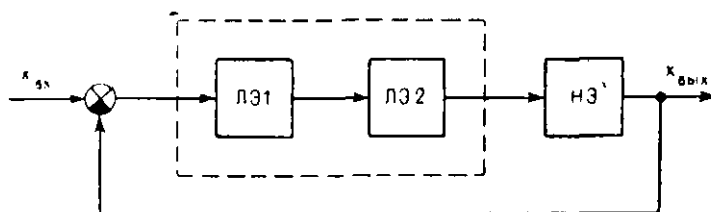
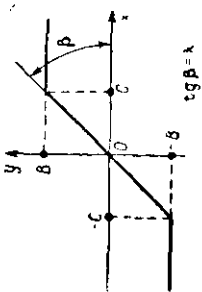
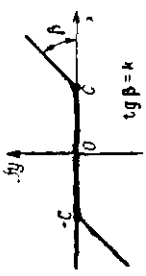
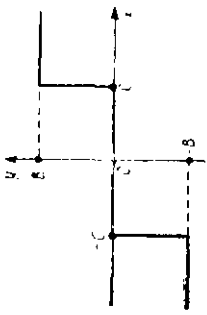


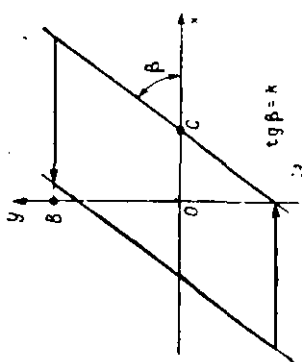
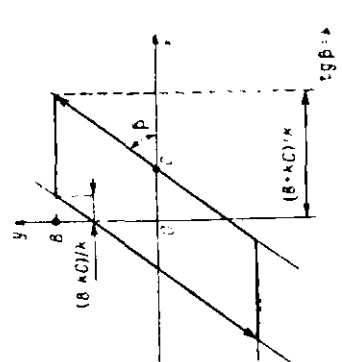
Рис. 3.1.

Нелинейные элементы с однозначной нелинейной характеристикой имеют однозначную зависимость между входным и выходным сигналами как при увеличении, так и при уменьшении входного сигнала. Элементы с неоднозначной нелинейной характеристикой имеют разные зависимости между входным и выходным сигналами, которые определяются знаком изменения входного сигнала. Указанные группы нелинейностей можно классифицировать и по другим признакам. В табл. 3.1 приводятся некоторые типовые нелинейные характеристики и аналитические зависимости между входным сигналом  $x$  и выходным  $y$ . Нелинейности типа насыщения, зоны нечувствительности и релейного переключения имеют однозначные и симметричные характеристики, а нелинейности типа люфта и насыщения с петлей гистерезиса — неоднозначные и, как правило, несимметричные.

Следует отметить, что к нелинейным САУ в отличие от линейных неприменим метод суперпозиции, который дает возможность определить движение линейной САУ под воздействием возмущения как сумму частных составляющих от отдельных компонентов возмущения. Так, например, определенные сведения о переходном процессе в нелинейной САУ при подаче единичного входного воздействия не позволяют оценить реакции системы на скачкообразное воздействие большей или меньшей величины. Невозможно также предвидеть, какова будет реакция системы на линейно возрастающий сигнал, даже если известна реакция на скачкообразное воздействие. Таким образом, нельзя использовать известную реакцию САУ на сигнал одного вида для определения реакции на сигнал другого вида. Причем реакция системы на определенный сигнал зависит так-

Таблица 3.1

| Нели-<br>нейность             | Наименование и<br>графический вид нелинейности                                      | Аналитическое описание нелинейной<br>зависимости                                                                                  | Формулы коэффициентов гармонической<br>линеаризации                                                                       |   |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|                               |                                                                                     |                                                                                                                                   | 3                                                                                                                         | 4 |
| 1                             | 2                                                                                   | 3                                                                                                                                 | 4                                                                                                                         | 5 |
| Насыщение                     |  | $y = \begin{cases} kx & \text{при }  x  \leq C \\ B & \text{при } x \geq C \\ -B & \text{при } x \leq -C \end{cases}$             | $a(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{C}{A} + \frac{C}{A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} \right)$<br>при $A \geq C$     |   |
|                               |  | $y = \begin{cases} 0 & \text{при }  x  \leq C \\ k(x - C) & \text{при } x \geq C \\ k(x + C) & \text{при } x \leq -C \end{cases}$ | $a(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{C}{A} + \frac{C}{A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} \right)$<br>при $A \geq C$ |   |
| Релейное<br>переключе-<br>ние |  | $y = \begin{cases} B & \text{при } x > C \\ 0 & \text{при }  x  \leq C \\ -B & \text{при } x < -C \end{cases}$                    | $a(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}}$<br>при $A > C$                                                       |   |

| 1                              | 2                                                                                   | 3                                                                                                                                                                                           | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Лифт                           |  | $y = \begin{cases} k(x - C) & \text{при } \dot{x} > C \\ k(x + C) & \text{при } \dot{x} < -C \end{cases}$                                                                                   | $a(A) = \frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2C}{A} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2C}{A} \right) \sqrt{\frac{C}{A} \left( 1 - \frac{C}{A} \right)} \right] \text{ при } A > C$ $b(A) = -\frac{4kC}{\pi A} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) \text{ при } A > C$                                                                       |
| Нашивание с петлей гистерезиса |  | $y = \begin{cases} b & \text{при } x > \frac{B + kC}{k} \\ -b & \text{при } y < -\frac{B + kC}{k} \\ k(x - C) & \text{при } \dot{x} > C \\ k(x + C) & \text{при } \dot{x} < -C \end{cases}$ | $a(A) = \frac{k}{\pi} \left( \arcsin \frac{B + kC}{kA} + \arcsin \frac{B - kC}{kA} + \frac{B + kC}{kA} \sqrt{1 - \frac{(B + kC)^2}{k^2 A^2}} + \frac{B - kC}{kA} \sqrt{1 - \frac{(B - kC)^2}{k^2 A^2}} \right)$ <p style="text-align: center;">при <math>A &gt; \frac{B + kC}{k}</math></p> $b(A) = \frac{4BC}{\pi A^2} \text{ при } A > \frac{B + kC}{k}$ |

же и от вида нелинейности, присущей данной системе. На рис. 3.2 показано изменение гармонического сигнала в зависимости от вида нелинейности. Обычно при гармоническом входном возмущении на выходе нелинейного элемента появляются

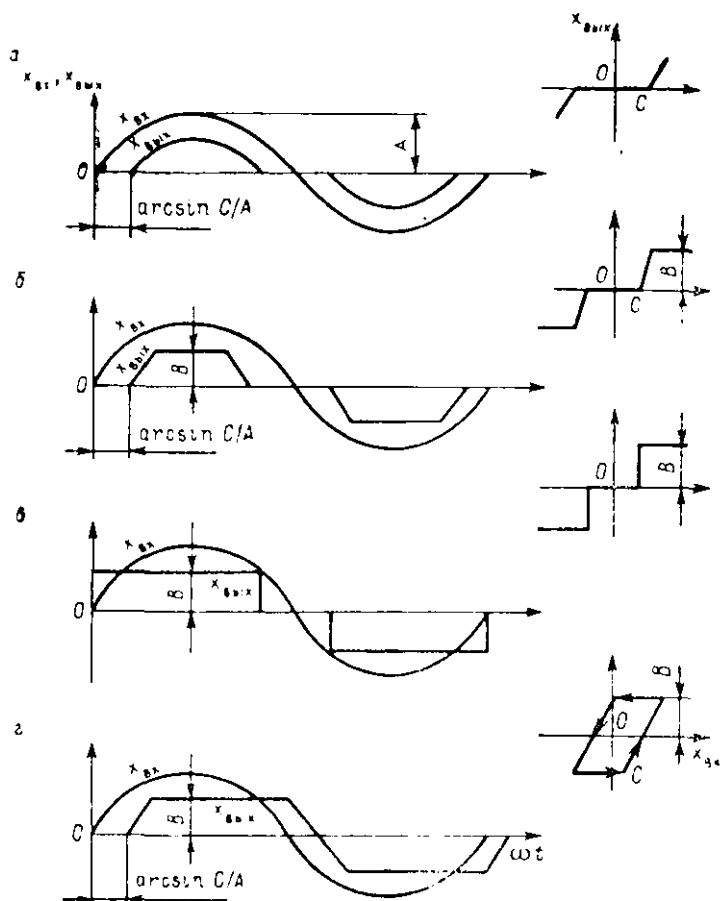


Рис. 3.2.

сложного вида периодические колебания. Кроме основной гармоник они содержат также высшие гармоники (которые на рис. 3.2 не приводятся). Следовательно, анализ и синтез нелинейных САУ оказывается значительно сложнее, чем линейных.

## 3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При анализе нелинейных САУ прежде всего определяются возможные состояния равновесия системы и исследуется их устойчивость, определяются периодические движения и исследуется их устойчивость, изучаются процессы перехода от одного к другому установившемуся состоянию при разных начальных условиях. Началом анализа нелинейных САУ обычно является определение устойчивости системы и наличия автоколебаний.

**Возможные состояния равновесия.** Из-за наличия нелинейных характеристик выходной сигнал нелинейной САУ не будет пропорционален входному, поэтому форма реакции системы на скачкообразное воздействие будет зависеть от величины этого воздействия. Для некоторых нелинейных САУ применение входного воздействия может превратить устойчивый переходный процесс в неустойчивый, и наоборот. (В то время как устойчивость линейной САУ зависит только от ее параметров и не зависит от внешних воздействий.)

В нелинейной САУ статические и динамические процессы значительно разнообразнее, чем в линейной. Характер переходного процесса в нелинейной системе часто зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных САУ употребляются понятия *устойчивости в малом, в большом и в целом*. Система устойчива в малом, если она устойчива при бесконечно малых отклонениях от исходного режима. Система устойчива в большом, если она устойчива при конечных отклонениях, возможных в данной системе по условиям ее работы. Система устойчива в целом, если она устойчива при неограниченных отклонениях.

Для нелинейных систем характерен режим незатухающих колебаний, которые возникают в них при отсутствии периодических внешних воздействий вследствие внутренних свойств системы. Эти колебания могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивые колебания нелинейных САУ называются *автоколебаниями*. Если колебания в нелинейной САУ устанавливаются в результате периодических внешних воздействий, то они называются *вынужденными*. Следует заметить, что при затухающих колебаниях переходного процесса происходит изменение периода колебаний.

Нелинейные дифференциальные уравнения, к которым приводит исследование САУ, часто имеют довольно высокий порядок. В настоящее время большинство групп нелинейных уравнений не может быть решено в общем виде. В конкретном случае иногда можно исследовать нелинейную систему точными аналитическими методами. Для этого необходимо, чтобы нелинейные характеристики были выражены посредством аналитических зависимостей. Но так как в большинстве случаев это

невозможно, то при исследовании нелинейных САУ большую роль приобретают различные приближенные методы.

Использование приближенных методов, как правило, не дает достаточно полного представления о всех динамических свойствах САУ. Поэтому применение нескольких методов в каждом конкретном случае часто дает более полную картину анализа. Тем не менее использование каждого из приближенных методов позволяет исследователю ответить на ряд отдельных существенных вопросов, например об устойчивости, наличии в системе автоколебаний, характере каких-либо режимов и т. д. В настоящее время разработано большое количество методов исследований нелинейных САУ. Многие из них пригодны только для ограниченного круга задач и лишь некоторые имеют достаточно общее применение в области исследования нелинейных САУ.

Исследование нелинейных САУ можно также производить методами математического моделирования, которые могут быть реализованы с помощью аналоговых или вычислительных элементов. Эффективность их в том, что динамику сложной и дорогостоящей реальной САУ можно исследовать с помощью сравнительно простой электронной аппаратуры. Применение электронных моделей предпочтительнее при исследовании систем, описываемых сложными нелинейными дифференциальными уравнениями, математическое решение которых оказывается невозможным. Однако использование электронных моделей для исследования САУ не исключает необходимости аналитических методов расчета, как точных, так и приближенных, позволяющих получать обобщающие результаты.

**Метод Ляпунова.** Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости любых нелинейных САУ могут быть получены с помощью метода А. М. Ляпунова. Для этого необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и вычислить производную по времени от этой функции

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с учетом уравнения движения системы  $dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), где  $x_i$  — координаты системы;  $f_i$  — известные функции, заданные в пространстве этих координат.

**Знакоопределенной функцией** называется такая функция, которая во всех точках некоторой области вокруг начала координат сохраняет один знак и нигде, кроме начала координат, не обращается в нуль. Если же функция сохраняет знак во всех точках этой области, но обращается в нуль и в других точках области, то она называется **знакопостоянной функцией**.

Если при  $V > 0$  имеет место  $W < 0$ , то САУ называется *асим-*

*потенцически устойчивой*. Если при  $V > 0$  имеет место  $W = 0$ , то САУ называется *устойчивой*. Сформулированные условия устойчивости составляют основу метода Ляпунова, который заключается в отыскании для исследуемой нелинейной САУ функции  $V$ , удовлетворяющей выдвинутым требованиям и называемой *функцией Ляпунова*.

Трудность использования этого метода в том, что отсутствуют общие правила отыскания функции Ляпунова. Данный метод позволяет получить достаточные условия устойчивости, которые не всегда будут необходимыми. Другими словами, при выполнении условий устойчивости система будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области ее устойчивости. От удачного подбора функции Ляпунова будет зависеть степень близости полученных условий устойчивости к необходимым и достаточным.

Если при исследовании устойчивости нелинейной САУ методом Ляпунова получены условия устойчивости, не зависящие от формы нелинейной характеристики, которая ограничена в некоторой области, то они называются *условиями абсолютной устойчивости*. В связи с этим принято считать, что *абсолютно устойчивая нелинейная САУ устойчива при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к некоторому определенному классу*.

**Метод В. М. Попова.** Рассмотрим исследование абсолютной устойчивости нелинейных САУ частотным методом румынского математика В. М. Попова. Задача эта возникает в случаях неустойчивости нелинейных характеристик звеньев системы.

Обычно в САУ выделяются линейная и нелинейная части. При известной частотной функции линейной части системы  $W_n(j\omega)$  и заданном значении параметра  $K$ , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики  $\varphi(\sigma)$ , произвольно располагающейся в заданной области, необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость данной САУ для любой характеристики  $\varphi(\sigma)$ , удовлетворяющей следующим условиям:  $0 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq K$  при  $\sigma \neq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Тогда критерий абсолютной устойчивости для нелинейных САУ формулируется следующим образом: *для абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно, чтобы при заданных  $W_n(j\omega)$  и  $K$  существовало такое конечное действительное число  $q$ , при котором для всех  $\omega \geq 0$  выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} [(1 + jq\omega) W_n(j\omega)] + 1/K > 0. \quad (3.1)$$

Первое слагаемое неравенства (3.1) можно привести к виду

$$\operatorname{Re} [(1 + jq\omega) W_n(j\omega)] = \operatorname{Re} [W_n(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} W_n(j\omega)] = X - qY,$$

где  $X = \operatorname{Re} [W_n(j\omega)]$ ;  $Y = \omega \operatorname{Im} [W_n(j\omega)]$ . Учитывая эти преобра-

зования, неравенство (3.1) примет вид

$$X - qY + 1/K > 0. \quad (3.2)$$

Приравнявая выражение (3.2) к нулю, получим *уравнение*

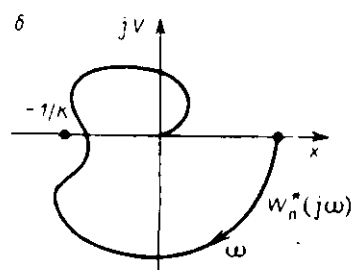
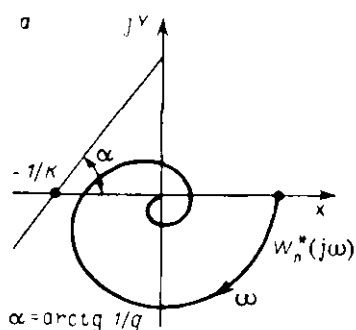


Рис. 3.3.

*прямой* (так называемой *прямой Попова*)  $X - qY + 1/K = 0$ , проходящей через точку  $(-1/K; j0)$  и имеющей угловой коэффициент  $1/q$  (рис. 3.3, а).

Рассмотренный критерий имеет более удобную геометрическую формулировку: нелинейная САУ абсолютно устойчива, если в плоскость  $W_n^*(j\omega) = X + jY$  можно провести прямую, проходящую через точку  $(-1/K; j0)$  так, чтобы вся частотная характеристика  $W_n^*(j\omega)$  находилась от нее справа (см. рис. 3.3, а). Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна (см. рис. 3.3, б). Величина  $q$ , связанная с угловым коэффициентом, определяется из условия (3.2) так, чтобы при из-

вестных параметрах САУ неравенство соблюдалось для всех частот. Видоизмененная характеристика  $W_n^*(j\omega)$  связана с  $W_n(j\omega)$  равенствами

$$\operatorname{Re} [W_n^*(j\omega)] = \operatorname{Re} [W_n(j\omega)];$$

$$\operatorname{Im} [W_n^*(j\omega)] = \omega \operatorname{Im} [W_n(j\omega)].$$

Наиболее широкое практическое применение для исследования нелинейных САУ получили фазовый метод и метод гармонического баланса.

**Фазовый метод** основан на понятии о фазовом пространстве. В принципе фазовым методом можно исследовать системы, которые описываются дифференциальными уравнениями любого порядка. Суть метода сводится к следующему. Если САУ описывается дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, то ее состояние может быть задано  $n$  числами, которые можно рассматривать как задание некоторой точки в  $n$ -мерном пространстве. При этом каждой точке  $n$ -мерного пространства будет соответствовать одно определенное состояние (определен-

ная фаза) системы. Поэтому такое многомерное пространство называется *фазовым пространством*. Ввиду затруднений, возникающих при рассмотрении  $n$ -мерного пространства при  $n > 3$ , применение фазового метода ограничено системами не выше третьего порядка.

Для САУ, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка, фазовое пространство является двумерным, т. е. превращается в фазовую плоскость. На фазовой плоскости (рис. 3.4) по оси абсцисс откладывается значение исследуемой переменной  $x$  (обычно отклонение управляемого сигнала от заданного значения), а по оси ординат — скорость изменения этой переменной  $y = \dot{x}$ . Состояние САУ второго порядка в каждый момент времени характеризуется значениями координат  $x$  и  $y$ , что соответствует определенной изображающей точке на фазовой плоскости, например точке  $M$  на рис. 3.4. При изменении состояния системы изображающая точка на фазовой плоскости перемещается по кривой, которая называется *фазовой траекторией*. Направление движения изображающей точки обозначают на траектории стрелками. Направление движения изображающей точки в верхней полуплоскости всегда может быть только слева направо, т. е. в сторону увеличения  $x$ , а в нижней полуплоскости — справа налево. Фазовая траектория пересекает ось абсцисс всегда под прямым углом. Это следует из того, что в точке пересечения производная  $y = dx/dt = 0$ , и поэтому координата  $x$  должна быть экстремальной.

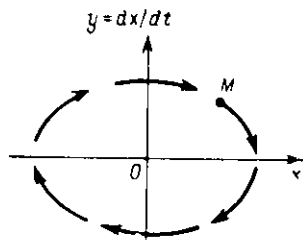


Рис. 3.4.

Фазовые траектории устойчивой САУ должны стремиться к началу координат при неограниченном возрастании времени. А фазовые траектории неустойчивой САУ должны неограниченно удаляться от начала координат фазовой плоскости. Замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические процессы.

Для получения уравнения фазовых траекторий исходное уравнение системы преобразуют таким образом, чтобы можно было исключить время. Если САУ описывается дифференциальным уравнением второго порядка, то его следует свести к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y), \quad (3.3)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — в общем случае нелинейные функции координат  $x$  и  $y$ .

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий в плоскости  $xy$  получается при исключении времени из уравнений

(3.3). Для этого второе уравнение делят на первое:

$$dx dy = f_2(x, y) f_1(x, y).$$

Решением этого уравнения будет некоторая функция  $y = F(x)$ , графическое изображение которой даст фазовую траекторию на плоскости  $x, y$ .

Рассмотрим типичные виды фазовых траекторий, одновременно связывая их построение с анализом переходного процесса.

**Затухающий колебательный процесс.** Если начальные условия переходного процесса ненулевые (рис. 3.5, а), т. е.  $x = x_0$ ,  $x = x_0 = y$ , то на фазовой плоскости (см. рис. 3.5, б) начальная изображающая точка  $M_0$  будет иметь координаты  $x_0$  и  $y_0$ . В начале переходного процесса значение координаты  $x$  увеличивается до точки 1, а координаты  $y = x$  уменьшается. Изображающая точка на фазовой плоскости будет перемещаться по траектории от точки  $M_0$  до точки 1, в которой имеет место максимум величины  $x$  и  $y = x = 0$ . На участке 1-2 процесс в системе идет с уменьшением координаты  $x$ , т. е. с отрицательной производной  $y = x < 0$ . Аналогичным образом можно построить остальные точки (3, 4, 5 и т. д.) фазовой траектории. В результате на фазовой плоскости получим *фазовый портрет затухающего колебательного процесса*, который изобразится в виде спирали, свертывающейся к началу координат. Начало координат фазовой плоскости соответствует устойчивому установившемуся режиму в системе, где  $x = 0$  и  $y = x = 0$ . В данном случае начало координат называется *устойчивым фокусом* (рис. 3.5, б).

**Расходящийся колебательный процесс.** Рассуждая аналогичным образом, можно построить фазовый портрет для расходящихся колебаний переходного процесса (рис. 3.6, а). Фазовая траектория будет иметь вид спирали, удаляющейся от начала координат (рис. 3.6, б). Если такой фазовый портрет возникает при сколь угодно малом начальном отклонении, то система будет неустойчива в равновесном состоянии ( $x = 0$  и  $y = 0$ ). Начало координат фазовой плоскости в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

**Периодический колебательный процесс.** Если колебательный процесс в системе периодический (рис. 3.7, а), то он на фазовой плоскости изобразится в виде замкнутой кривой, которая называется *циклом* (рис. 3.7, б). Для синусоидальных колебаний фазовая траектория имеет вид эллипса, а для несинусоидальных колебаний — вид произвольной замкнутой кривой. Начало координат фазовой плоскости называется *центром*.

**Апериодический затухающий процесс,** разновидности которого изображены на рис. 3.8, а, на фазовой плоскости будет изображаться в виде кривой, вливающейся в начало координат (рис. 3.8, б). При этом изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, асимптотически приближается к началу ко-

ординат при  $t \rightarrow \infty$ . Начало координат фазовой плоскости называется *устойчивым узлом*.

Апериодический расходящийся процесс, варианты которого представлены на рис. 3.9, *а*, на фазовой плоскости изобразится в виде кривой, удаляющейся от начала координат (рис. 3.9, *б*). В случае, когда процесс расходится при сколь угодно малом начальном отклонении, начало координат фазовой плоскости называется *неустойчивым узлом*.

Устойчивые автоколебания. Если на фазовой плоскости существует замкнутая фазовая траектория (рис. 3.10), к которой в пределе стремятся все фазовые траектории плоскости, то такая замкнутая кривая называется *устойчивым предельным циклом*. Все фазовые траектории, находящиеся внутри предельного цикла, соответствуют расходящемуся процессу и в пределе сливаются с замкнутой фазовой траекторией (предельным циклом). Фазовые траектории, находящиеся снаружи предельного цикла, будут соответствовать сходящемуся процессу и в пределе также сольются с замкнутой фазовой траекторией.

Неустойчивые автоколебания. Если на фазовой плоскости существует замкнутая фазовая траектория (рис. 3.11), от которой внутрь и наружу расходятся фазовые траектории, то такая замкнутая кривая называется *неустойчивым предельным циклом*. Фазовые траектории, находящиеся внутри этого предельного цикла, соответствуют сходящемуся процессу, а находящиеся снаружи — расходящемуся процессу. Следовательно, если начальная точка процесса  $M_0(x_0, y_0)$  находится внутри предельного цикла, то система устойчива. Если же эта точка находится вне его, то система будет неустойчива. Такая система называется *устойчивой в малом и неустойчивой в большом*.

Таким образом, устойчивость нелинейной САУ может зависеть также и от начальных условий.

Периодический режим, который соответствует неустойчивому предельному циклу, в реальных САУ не может долго существовать, поскольку любое случайное воздействие вызовет изменение фазовой траектории.

Определим фазовый портрет для точки, которая совершает гармонические колебания по закону  $x = A \sin \omega t$  (см. рис. 3.7, *а*). Для построения фазового портрета найдем скорость изменения координаты  $x$ . В рассматриваемом примере

$$y = dx/dt = \omega A \cos \omega t.$$

Исключив время  $t$  из уравнений для  $x$  и  $y$ , получим уравнение фазовых траекторий

$$x^2 A^2 + y^2 (\omega^2 A^2) = 1.$$

Из последнего выражения следует, что периодические колеба-

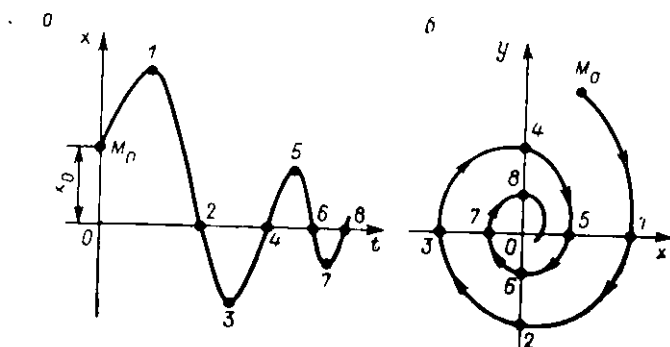


Рис. 3.5.

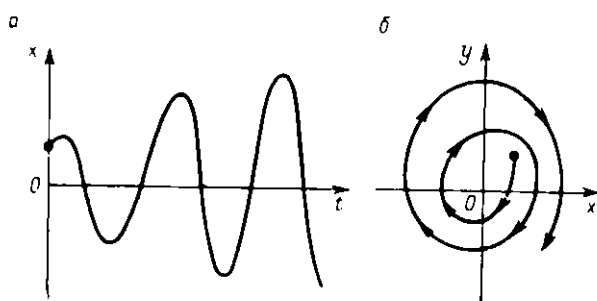


Рис. 3.6.

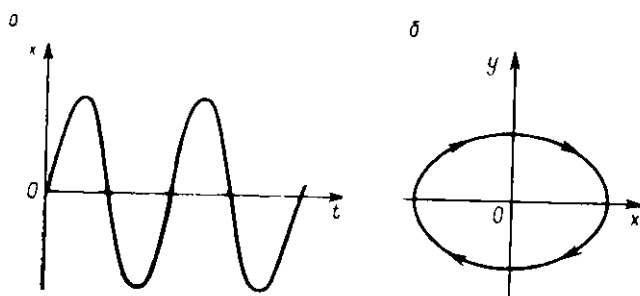


Рис. 3.7.

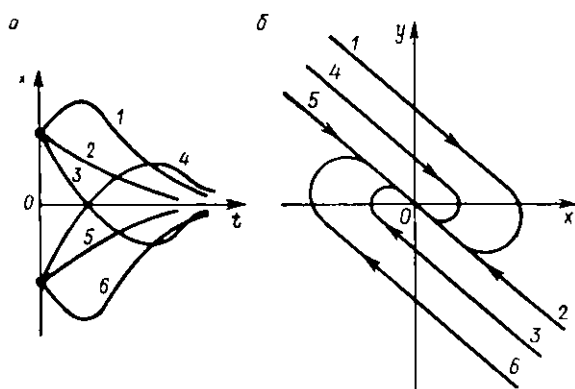


Рис. 3.8.

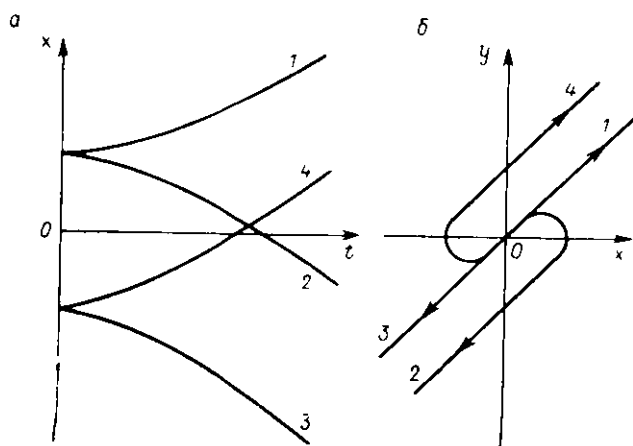


Рис. 3.9.

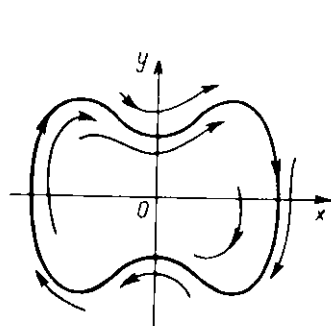


Рис. 3.10.

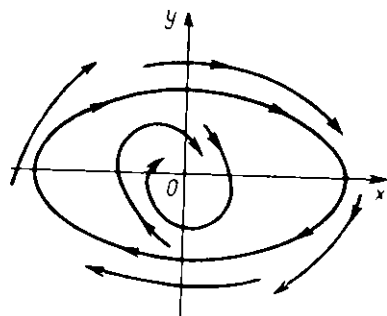


Рис. 3.11.

ния на фазовой плоскости имеют замкнутые траектории — эллипсы (см. рис. 3.7, б). При этом разным амплитудам колебаний на фазовой плоскости соответствует семейство эллипсов.

Построим фазовый портрет для точки, совершающей затухающие колебания:

$$x = Ae^{kt} \sin \omega t.$$

В данном случае скорость изменения координаты  $x$  определяется уравнением

$$y = \frac{dx}{dt} = A\omega e^{-kt} \left( \cos \omega t - \frac{k}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Исключив время  $t$  из уравнений для  $x$  и  $y$ , получим уравнение для фазовых траекторий, которые определяются свертывающимися спиралями:

$$(y + kx)^2 + \omega^2 x^2 = C \exp \left( 2 \frac{k}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y + kx}{\omega x} \right).$$

График затухающих колебаний точки и ее фазовый портрет для рассматриваемого примера изображены на рис. 3.5.

**Метод гармонического баланса.** Одним из важнейших приближенных методов является метод гармонического баланса,

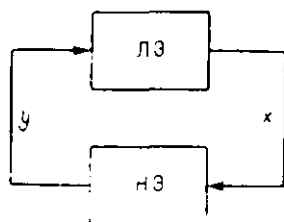


Рис. 3.12.

или эквивалентной линеаризации, разработанный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Он получил на практике очень широкое распространение вследствие исключительной простоты вычислений и, в большинстве случаев, удовлетворительной точности. Метод применим к нелинейным системам любого порядка, но годится только лишь для исследования колебательных процессов.

Основная идея метода заключается в линеаризации нелинейностей САУ в режиме автоколебаний, которые предполагаются близкими к синусоидальным. Это предположение будет справедливо для большинства САУ, поскольку линейная часть их обычно является низкочастотным фильтром, значительно ослабляющим высшие гармоники.

Рассмотрим САУ с одним нелинейным элементом. Ее можно привести к схеме, в которой нелинейный элемент выделен, а все линейные элементы объединены в одну линейную общую часть системы (рис. 3.12).

Положим, что на вход нелинейного элемента, уравнение которого имеет вид

$$y = F(x), \tag{3.4}$$

поступает гармонический сигнал

$$x = A \sin \omega t, \quad (3.5)$$

где  $A$  и  $\omega$  — амплитуда и угловая частота. Тогда на выходе нелинейного элемента сигнал будет представлять некоторую периодическую функцию времени, вид которой определяется характеристикой конкретного нелинейного элемента. Подставляя выражение (3.5) в заданную нелинейную функцию (3.4), получим

$$y = F(A \sin \omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_1 \sin k\omega t + A_2 \cos k\omega t). \quad (3.6)$$

Разложив выражение (3.6) в ряд Фурье и отбросив все высшие гармоники (считая, что они не пропускаются линейной частью системы), кроме первой, получим

$$y = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t.$$

Считая, что в искомых колебаниях отсутствует постоянная составляющая, т. е.  $A_0 = 0$ , и приняв  $\omega t = \varphi$ , имеем

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \sin \varphi + \\ + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \right] \cos \varphi.$$

Тогда приближенная эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента, которая определяется как отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала нелинейного элемента к амплитуде его входного гармонического сигнала и в общем случае представляет комплексную величину, имеет следующий вид:

$$J(A) = \frac{A_1}{A} + \frac{jA_2}{A} = a(A) + jb(A), \quad (3.7)$$

где  $a(A)$  и  $b(A)$  — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые выражениями

$$a(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi; \\ b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (3.8)$$

Амплитуда эквивалентной передаточной функции, показывающая, во сколько раз первая гармоника на входе нелинейного элемента больше амплитуды  $A$  синусоидального входного

сигнала, рассчитывается по формуле

$$q(A) = |J(A)| = \sqrt{a^2(A) + b^2(A)}.$$

Фаза эквивалентной передаточной функции, определяющая разность фаз между первой гармоникой на выходе нелинейного элемента и синусоидальным входным сигналом, находится по формуле

$$\varphi(A) = \arctg [b(A)/a(A)].$$

Полученные формулы показывают, что эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента зависит от амплитуды входного сигнала и не зависит от его частоты. Величину  $J(A)$  также называют *комплексным коэффициентом усиления*, или *амплитудной характеристикой нелинейного элемента*. Метод линеаризации нелинейного уравнения (3.7) носит название *гармонической линеаризации*.

На практике часто используется величина, обратная эквивалентной передаточной функции нелинейного элемента:

$$Z_n(A) = 1/J(A). \quad (3.9)$$

Пользуясь формулами (3.7) и (3.8), можно найти эквивалентную передаточную функцию нелинейных элементов, имеющих разные характеристики.

Иногда бывает удобным пользоваться так называемой *нормированной эквивалентной передаточной функцией*. Для этой цели  $J(A)$  выражается в функции от безразмерной амплитуды входного сигнала  $A/\alpha$ , где  $\alpha$  — какой-либо параметр нелинейной характеристики, который влияет на величину  $J(A)$ . В зависимости от типа нелинейности за параметр  $\alpha$  может быть принята либо ширина гистерезисной петли, либо ширина зоны нечувствительности, либо величина насыщения и т. д. После линеаризации нелинейности системы полученное линейное дифференциальное уравнение исследуемой САУ решается с помощью известных критериев устойчивости линейных систем. Отыскиваются значения амплитуды и частоты, при которых возможно существование в рассматриваемой САУ устойчивых автоколебаний.

Типы нелинейностей, встречающиеся в САУ наиболее часто, были приведены в табл. 3.1. В ней кроме аналитического описания этих нелинейностей даны также и формулы коэффициентов гармонической линеаризации  $a(A)$  и  $b(A)$ . Для однозначных нелинейностей (типа насыщения, зоны нечувствительности, релейного переключения) коэффициент гармонической линеаризации  $b(A)$  равняется нулю, для многозначных (типа люфта, насыщения с петлей гистерезиса) — отличен от нуля. Следовательно, эквивалентная передаточная функция нелинейных элементов с однозначной характеристикой является чисто вещественной,  $J(a) = A(a)$  и  $\varphi(A) = 0$ .

Введем понятия *устойчивости нелинейной САУ* и *устойчивости автоколебаний*. Под устойчивостью нелинейной САУ следует понимать отсутствие в ней автоколебаний и устойчивость обычного равновесного состояния. Под устойчивостью автоколебаний в системе следует понимать такой режим автоколебаний, который физически выполним в САУ и устойчиво существует при возможных отклонениях параметров этих колебаний как по амплитуде, так и по частоте, возникающих по какой угодно причине.

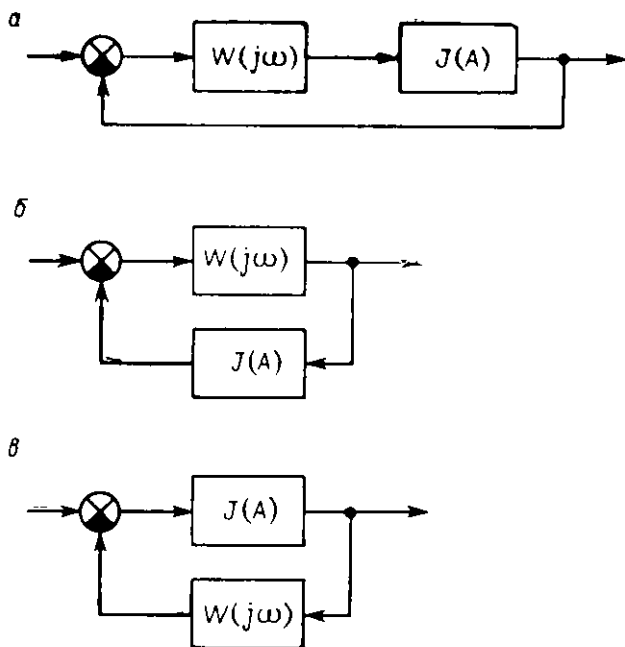


Рис. 3.13.

Следует отметить, что многоконтурную нелинейную САУ перед началом анализа динамики необходимо привести к одно-контурной системе с помощью структурных преобразований, виды которых представлены на рис. 3.13. Передаточная функция замкнутой системы для первой схемы (рис. 3.13, а) имеет вид

$$\Phi(A, j\omega) = W(j\omega) J(A) [1 + W(j\omega) J(A)],$$

для второй схемы (рис. 3.13, б)

$$\Phi(A, j\omega) = W(j\omega) [1 + W(j\omega) J(A)],$$

а для третьей (рис. 3.13, в)

$$\Phi(A, j\omega) = J(A) [1 + W(j\omega) J(A)].$$

В этих выражениях  $J(A)$  — эквивалентная функция нелинейного элемента;  $W(j\omega)$  — частотная передаточная функция линейной части системы.

Анализ устойчивости этих систем выполняется с помощью характеристического уравнения  $1 + W(j\omega)J(A) = 0$ , откуда  $W(j\omega) = -1/J(A)$  или, учитывая выражение (3.9),

$$W(j\omega) = -Z_n(A). \quad (3.10)$$

Это уравнение можно решить графически, построив отдельно амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента, взятую с обратным знаком. Если характеристики (годографы)  $W(j\omega)$  и  $-Z_n(A)$  системы пересекаются в точке  $M$  на комплексной плоскости (рис. 3.14, а), то в исследуемой системе возможны автоколебания, поскольку удовлетворяется равенство (3.10). Частота  $\omega_M$  автоколебаний определяется в точке пересечения  $M$  по отметкам текущей частоты  $\omega$  на годографе  $W(j\omega)$ , а амплитуда  $A$  находится в точке пересечения  $M$  по отметкам текущей амплитуды  $A$  на годографе  $-Z_n(A)$ . Если же эти годографы не пересекаются, то автоколебания в системе отсутствуют (рис. 3.14, б). И, наконец, если годографы соприкасаются в точке  $M$ , то система находится на границе автоколебаний (рис. 3.14, в).

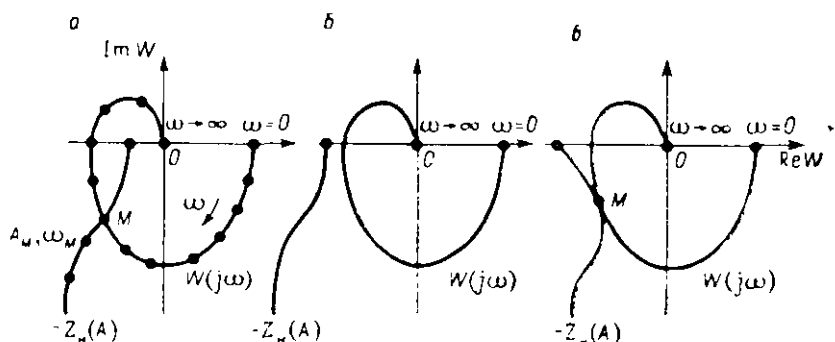


Рис. 3.14.

Далее необходимо решить вопрос об устойчивости автоколебаний, для чего пользуются следующим приемом.

Задается некоторое приращение  $\pm \Delta A$  амплитуде возможных автоколебаний  $A_M$ . Амплитуда становится равной  $A = A_M \pm \Delta A$  (рис. 3.15). Для устойчивости автоколебаний требуется, чтобы при положительном  $\Delta A$  колебания становились затухающими, т. е. амплитуда их уменьшалась во времени, а при отрицательном  $\Delta A$  колебания становились расходящимися. При

этом первичные приращения амплитуды  $\Delta A$  сводятся к нулю, и система возвращается в точку  $M$  (см. рис. 3.15).

На рис. 3.16 изображен случай, когда годографы  $W(j\omega)$  и  $Z_n(A)$  пересекаются в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Это возможно при наличии в системе неоднозначной нелинейности. Согласно приведенному правилу точка  $M_1$  соответствует устойчивому режиму автоколебаний, а точка  $M_2$  — неустойчивому.

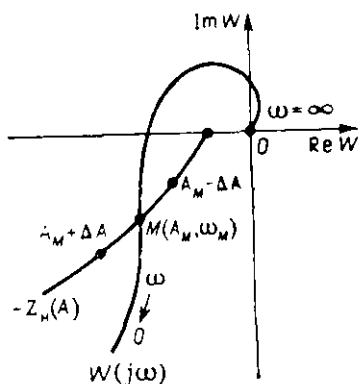


Рис. 3.15.

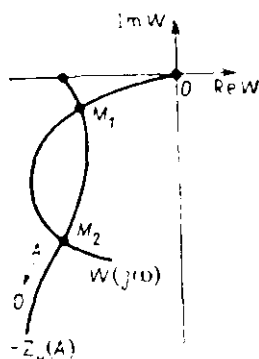


Рис. 3.16.

Наиболее просто и наглядно анализ устойчивости нелинейных САУ может быть выполнен с помощью метода логарифмических частотных характеристик. В основе этого метода лежит способ гармонической линеаризации нелинейностей.

В системе возникают периодические режимы работы, если одновременно выполняются условия гармонического баланса амплитуд и фаз:

$$20 \lg H(\omega) = 20 \lg |1 q(A)|;$$

$$\psi(\omega) = \pi - \varphi(A), \quad (3.11)$$

получающиеся при подстановке в уравнение (3.10) зависимостей  $W(j\omega) = H(\omega) \exp[j\psi(\omega)]$ ,  $J(A) = q(A) \exp[j\varphi(A)]$ , где  $H(\omega)$  — амплитудная частотная характеристика линейной части системы;  $\psi(\omega)$  — фазовая частотная характеристика линейной части системы;  $q(A)$ ,  $\varphi(A)$  — эквивалентные амплитуда и фаза нелинейного элемента.

Для систем электроприводов с однозначными нелинейностями  $\varphi(A) = 0$ , поскольку коэффициент гармонической линеаризации  $b(A) = 0$ . И тогда условия гармонического баланса (3.11) примут следующий вид:

$$20 \lg H(\omega) = 20 \lg |1 q(A)|, \quad \psi(\omega) = \pi. \quad (3.12)$$

Одновременность выполнения условий (3.11) или (3.12) заключается в том, что точки пересечения амплитудных харак-

теристик  $20 \lg H(\omega)$ ,  $20 \lg \{1/[q(A)]\}$  и фазовых характеристик  $\psi(\omega)$ ,  $\pi - \varphi(A)$  (для многозначных нелинейностей) или  $\psi(\pi)$ ,  $\pi$  (для однозначных нелинейностей) лежат на одной вертикали.

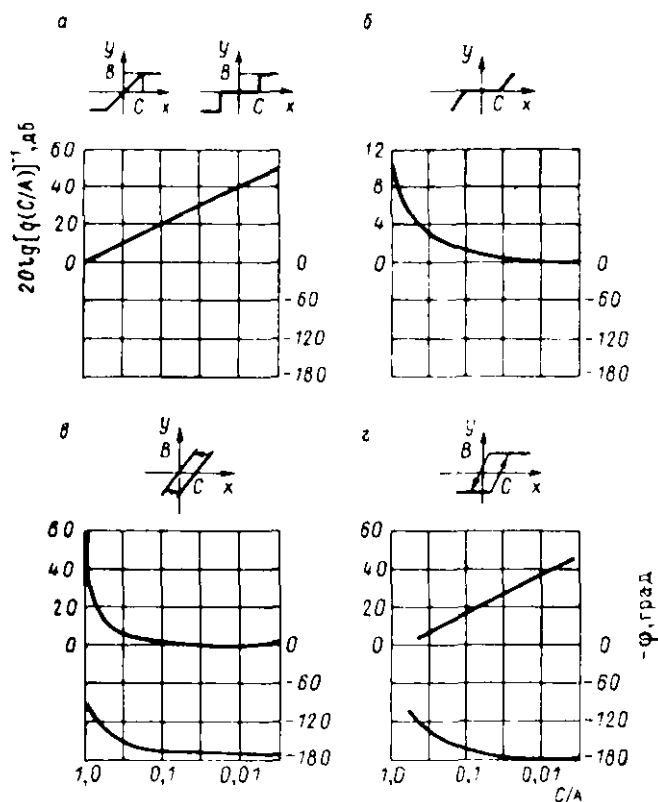


Рис. 3.17.

Для определения периодических процессов в нелинейной системе следует логарифмические характеристики линейной части построить на полулогарифмической бумаге, а обратные значения эквивалентных амплитуд и фаз нелинейного элемента — на полулогарифмической прозрачной бумаге в виде шаблона того же масштаба, что и характеристики линейных систем. На рис. 3.17 изображены шаблоны для однозначных (а, б) и многозначных (в, г) нелинейных элементов, характеристики которых приведены в табл. 3.1.

Рассмотрим пример определения автоколебаний в нелинейной САУ с нелинейностью типа люфт.

На логарифмические частотные характеристики линейной части САУ, представленные на рис. 3.18, накладывается шаблон (рис. 3.17, г) так, чтобы

его ось совпала с осью частот. Перемещая шаблон вдоль оси частот, определяют точки пересечения кривых  $20 \lg \{1/[q(C/A)]\}$  с  $H(\omega)$  и  $180^\circ - \varphi(C/A)$  с  $\varphi(\omega)$ .

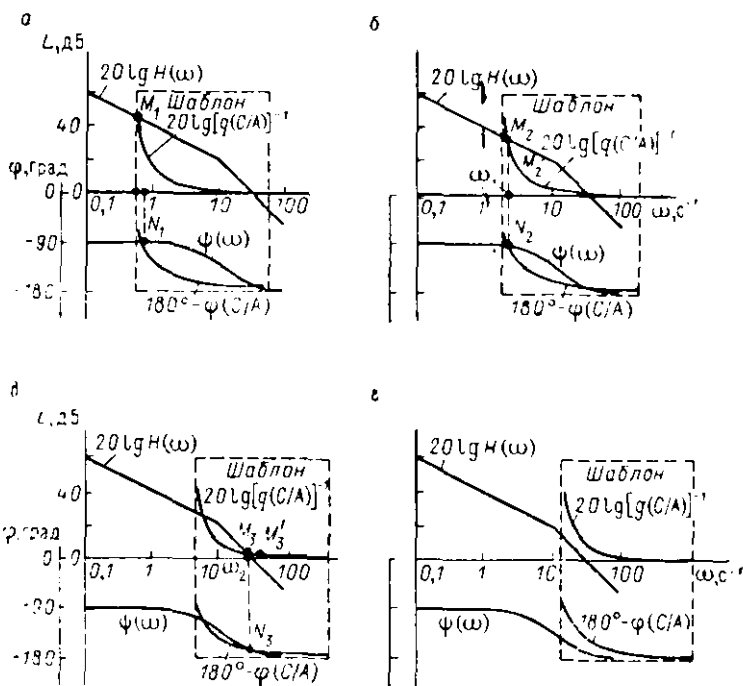


Рис. 3.18.

При первом положении шаблона (рис. 3.18, а) точки пересечения  $M_1$  и  $N_1$  не лежат на одной вертикали. Значит, при этих параметрах нелинейной части в системе отсутствуют периодические колебания. При дальнейшем перемещении шаблона вправо точки пересечения  $M_2$  и  $N_2$  окажутся на одной вертикали (рис. 3.18, б). Это второе положение шаблона соответствует возникновению в системе периодического процесса с частотой  $\omega_1$ . Перемещая шаблон вправо, снова получают две точки пересечения  $M_3$  и  $N_3$  (рис. 3.18, в), которые также будут соответствовать периодическому процессу с частотой  $\omega_2$ . И, наконец, при самом крайнем положении шаблона (рис. 3.18, г) пересечение амплитудных и фазовых частотных характеристик отсутствует.

Таким образом, мы получили две частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Чтобы определить, какая из них соответствует устойчивым колебаниям, а какая — неустойчивым, следует дать приращение  $\Delta A$  амплитуде входного сигнала  $A$ . Если с ростом амплитуды  $A + \Delta A$  точка пересечения характеристик  $20 \lg \{1/[q(C/A)]\}$  и  $20 \lg H(\omega)$ , лежащая на одной вертикали с точкой пересечения характеристик  $180^\circ - \varphi(C/A)$  и  $\varphi(\omega)$ , находится вне области, образованной линиями  $20 \lg H(\omega)$  и осью частот, то в нелинейной системе возникнут устойчивые колебания автоколебания. И, наоборот, если с увеличением амплитуды точка пересечения будет находиться внутри указанной области, то в нелинейной системе возникнут неустойчивые колебания.

Давая приращение амплитуде  $A$  на  $\Delta A$  в точке  $M_2$  (рис. 3.18, б) и в точке  $M_3$  (рис. 3.18, в), соответственно получим точки  $M_2'$  (рис. 3.18, б) и  $M_3'$

(рис. 3.18, в). Из сказанного ранее следует, что точка  $M_2$  характеризует устойчивые колебания (автоколебания) в системе с частотой  $\omega_1$  и амплитудой  $A_1$ , а точка  $M_3$  в сочетании с параметрами  $\omega_2$  и  $A_2$  соответствует неустойчивым колебаниям в системе.

Изменение параметров автоколебаний или полное устранение их в САУ можно осуществить с помощью корректирования линейной части системы или изменения параметров нелинейностей. Для устранения автоколебаний корректирующие устройства выбираются таким образом, чтобы пересечение логарифмических частотных характеристик линейной части с логарифмическими характеристиками обратных эквивалентных амплитуд и фаз нелинейного элемента было невозможным.

### 3.3. КОРРЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для удовлетворения требуемых показателей качества САУ применяются корректирующие устройства, которые можно разделить на два типа: *линейные* и *нелинейные*. Возможности линейных корректирующих устройств в нелинейных САУ достаточно ограничены. Например, в САУ с люфтами в механических передачах могут возникнуть автоколебания. При использовании линейных корректирующих устройств подавление автоколебаний в таких системах возможно в очень ограниченном диапазоне изменения параметров, в то время как применение нелинейных корректирующих устройств устраняет автоколебания в широком диапазоне изменения параметров.

Нелинейные корректирующие устройства используются не только для подавления автоколебаний, но и для улучшения качества процессов управления и повышения точности САУ. Например, при включении двух-трех однозначных нелинейных элементов в параллельные корректирующие устройства САУ можно увеличить запасы ее устойчивости по фазе без изменения частоты среза. В этом случае уменьшается влияние помех на систему при сохранении высоких показателей качества переходного процесса.

Сложность современных высококачественных САУ приводит к усложнению также и нелинейных корректирующих устройств, которые могут состоять из двигателей, усилителей, аналоговых и цифровых вычислительных устройств и т. д. Все нелинейные корректирующие устройства, которые встречаются в САУ, можно разделить на три основные группы:

- нелинейные четырехполюсники последовательного и параллельного действия;
- устройства, реализующие нелинейные законы управления;
- нелинейные устройства, включающие в себя элементы неизменяемой части системы.

Нелинейные четырехполюсники могут быть получены путем

включения нелинейного элемента, во-первых, между двумя линейными фильтрами (рис. 3.19, а), во-вторых, в обратную связь таким образом, чтобы она совместно с динамическими элементами  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  прямой цепи системы образовала внутренний контур (рис. 3.19, б), в-третьих, путем включения линейного фильтра так, чтобы он совместно с динамическими элементами  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  образовал внутренний контур (рис. 3.19, в). Нелинейные элементы представляют собой четырехполюсники, выполненные из диодов, сопротивлений и полупроводниковых операционных усилителей.

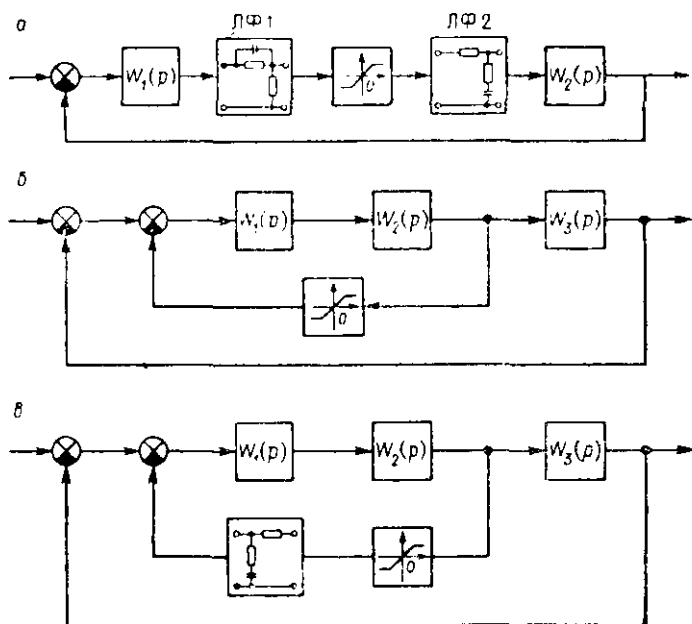


Рис. 3.19.

Устройства, реализующие нелинейные законы управления, по виду функциональных преобразований делятся на *функциональные, логические, оптимизирующие и параметрические*. Функциональные применяются для компенсации влияния нелинейностей в САУ, для улучшения их устойчивости и повышения точности работы системы. Логические используются для повышения устойчивости и улучшения качества САУ. Они позволяют изменять параметры или структуру систем. Такие оптимизирующие устройства обеспечивают в САУ наивыгоднейший режим работы по определенному показателю качества системы или по его какому-либо параметру. Обычно эти оптимизирующие устройства реализуются с помощью сочетания функциональных и логических. И, наконец, рассматриваемые пара-

метрические устройства обеспечивают управление системами по отклонениям от заданного закона или заданной программы.

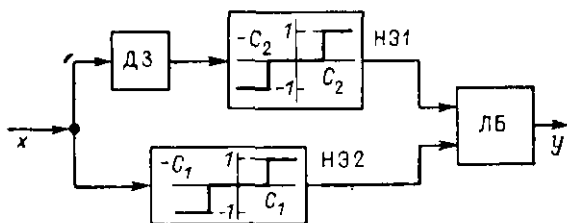


Рис. 3.20.

На рис. 3.20 приведена структурная схема, реализующая логический нелинейный закон управления вида

$$y = \begin{cases} +1 & \text{при } x > C_1; \dot{x} > -C_2; \\ 0 & \text{при } x \geq C_1; \dot{x} \leq -C_2; \\ 0 & \text{при } x \leq C_1; \dot{x} > C_2; \\ -1 & \text{при } x < C_1; \dot{x} < -C_2. \end{cases}$$

Эта схема состоит из дифференцирующего звена (ДЗ), двух нелинейных элементов (НЭ1 и НЭ2) и логического блока (ЛБ), с помощью которого изменяется сигнал управления  $y$ . Нелинейные блоки имеют характеристики типа зоны нечувствительности  $C_1$  и  $C_2$ . Величины этих зон устанавливаются в зависимости от требований, предъявляемых к САУ.

Нелинейные корректирующие устройства, использующие элементы неизменяемой части системы, меняют коэффициенты усиления в устройствах, которые находятся в прямой цепи в процессе работы САУ, или перестраивают ее структуру, или перестраивают программу режима работы самой системы.

На рис. 3.21 представлена структурная схема следящего электропривода с нелинейным демпфированием, позволяющая получить высокое быстродействие и малое перерегулирование при переходном процессе. Корректирующее устройство состоит из двух тахогенераторов ( $Tg1$  и  $Tg2$ ), сидящих на общем валу электродвигателя (Дв). Тахогенератор  $Tg1$  обеспечивает скоростную обратную связь, а тахогенератор  $Tg2$  — демпфирование с переменным коэффициентом. Переменное демпфирование достигается за счет подачи на обмотку возбуждения  $Tg2$  сигнала, пропорционального ошибке рассогласования. Якорные обмотки тахогенераторов  $Tg1$  и  $Tg2$  включены встречно относительно друг друга. Усилители  $У1$  и  $У2$  служат для усиления сигналов, поступающих на их вход.

При больших сигналах рассогласования демпфирование в следящей системе почти отсутствует. Это обеспечивает максимально возможную скорость нарастания переходного процесса. По мере уменьшения сигнала рассогласования демпфирование увеличивается и в системе происходит активное затухание переходного процесса.

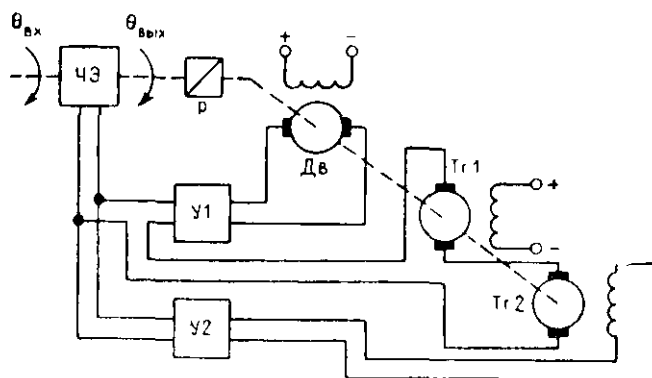


Рис. 3.21.

Логарифмические амплитудные частотные характеристики системы при отсутствии демпфирования и при его наличии показаны на рис. 3.22. Характеристика  $L(\omega)$  соответствует работе системы при больших углах рассогласования, а  $L^*(\omega)$  — при малых. В этом случае полоса пропускания частот зависит от величины демпфирования. Чем больше величина демпфирования, тем меньше частота среза, т. е.  $\omega_{ср}^* < \omega_{ср}$ .

На рис. 3.23 изображены кривые переходных процессов в следящем электроприводе. Кривая 1 соответствует переходному процессу при отсутствии в системе нелинейного корректирующего устройства, а кривая 2 — при наличии нелинейного демпфирования. Переходный процесс в первом случае имеет по сравнению со вторым более затяжной характер и большое перерегулирование.

Изменение формы переходного процесса в следя-

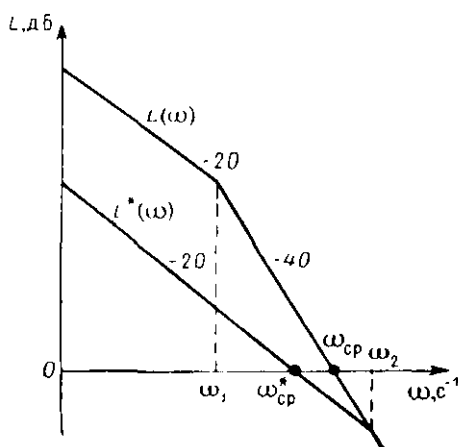


Рис. 3.22.

щем электроприводе может быть достигнуто с помощью нелинейных корректирующих устройств (НКУ), включенных последовательно в основную цепь системы. На рис. 3.24 изображен следящий электропривод с нелинейным интегрирующим звеном, которое включено

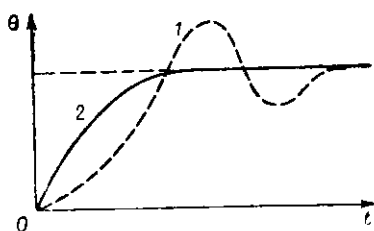


Рис. 3.23.

между усилительными каскадами  $У1$  и  $У2$  и состоит из  $RC$ -элементов, полупроводниковых диодов  $Д1$  и  $Д2$  и дополнительных источников постоянного тока  $Е1$  и  $Е2$ . Последние определяют момент работы в системе нелинейного демпфирования. Если сигнал рассогласования по величине

меньше напряжения дополнительных источников питания  $Е1$  и  $Е2$ , то в системе электропривода осуществляется нелинейное демпфирование. И, наоборот, при сигнале рассогласования, большем по величине напряжения этих источников, нелинейное демпфирование отсутствует. На рис. 3.25 приведены соответствующие логарифмические амплитудные характеристики для большого угла рассогласования — кривая  $L(\omega)$  и для малого угла рассогласования — кривая  $L^*(\omega)$ .

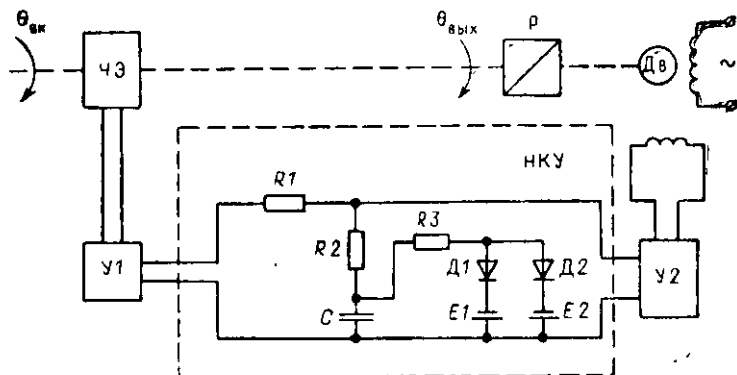


Рис. 3.24.

Расчет САУ с нелинейными корректирующими устройствами методом гармонической линеаризации в основном аналогичен расчету обычных нелинейных систем.

Следует отметить, что применение нелинейных корректирующих устройств в САУ для улучшения переходного процесса при входных воздействиях одного вида (например, ступенчатых

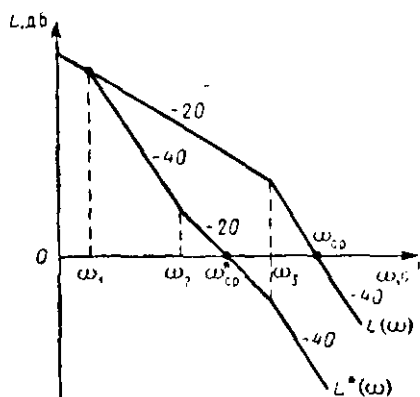


Рис. 3.25.

возмущений) может привести к ухудшению переходного процесса в системе при других по типу входных воздействиях (например, при синусоидальных воздействиях).

## Глава 4

# ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 4.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

В настоящее время при автоматизации технологического оборудования широкое применение находят цифровые системы управления. Использование в этих системах цифровых вычислительных устройств (ЦВУ) обеспечивает реализацию достаточно сложных алгоритмов (законов) управления, а также высокую точность вычислений, связанных с коррекцией динамических свойств САУ. Цифровые САУ относятся к классу *дискретных систем*, в которых квантование сигнала осуществляется одновременно по времени и по уровню. При малом количестве уровней квантования цифровая САУ становится существенно нелинейной и сводится к релейной, а при большом количестве уровней квантования — к импульсной системе, поскольку дискретностью по уровню можно пренебречь.

При синтезе цифровых САУ можно использовать либо цифровую вычислительную машину (ЦВМ), либо отдельные цифровые устройства (ЦУ) в виде сумматоров, интеграторов и т. д. В первом случае машина, как правило, выполняет функции управляющих вычислительных машин, во втором цифровые устройства обеспечивают необходимые вычислительные и логические операции в каждом канале управления одномерной и многомерной систем. Использование цифровых устройств позволяет во многих случаях упростить САУ путем применения простых и надежных модулей, расположить цифровую вычислительную часть системы в непосредственной близости от основных элементов канала управления. Использовать цифровую вычислительную машину в САУ целесообразно в случаях сложной обработки поступающей информации или при решении нескольких задач обслуживания разных каналов управления с разделением по времени поступающей для обработки информации. Включение в контур управления такой машины требует наличия в САУ вспомогательных элементов, осущест-

вляющих преобразование непрерывных процессов в дискретные и обратно. Но это окупается возможностью реализации практически любого алгоритма управления. В зависимости от способа включения цифровой вычислительной машины цифровые САУ могут быть трех типов:

с машиной, включенной вне замкнутого контура управления (рис. 4.1, а); в этом случае машина служит для формирования на основании наблюдаемого процесса  $x$  оптимального задающего воздействия  $x_0$  на входе управляемой системы (УС);

с машиной, включенной в замкнутый контур управления (рис. 4.1, б); при этом улучшения динамических свойств САУ достигают благодаря возможности формирования практически любого алгоритма управления и изменения его в процессе работы; точность такой САУ ограничивается непрерывным сравнивающим устройством, включенным в цепь управления до цифровой машины;

с машиной, в которой происходит сравнение задающего воздействия  $x_0$  с выходным сигналом  $y$  (рис. 4.1, в). Такая САУ обладает всеми качествами предыдущей системы и к тому же является более точной за счет увеличения разрешающей способности цифрового сравнивающего устройства. С точки зрения структуры она охватывает обе предыдущие системы.

На рис. 4.2 представлена структурная схема цифровой САУ, где в качестве вычислительного устройства используется машина, которая в зависимости от ошибки ( $e^*$ )\*, заданной в цифровом виде, формирует требуемый алгоритм управления ( $u^*$ ). Сигнал управления поступает на объект (О) через преобразователь дискретных данных в непрерывные (Пр). Для функционирования вычислительной машины на ее входе сигналы должны быть представлены в цифровом виде. Поэтому в системе управления имеются два преобразователя непрерывных

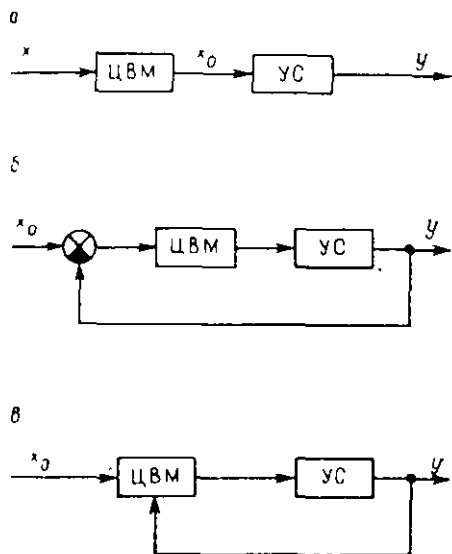


Рис. 4.1.

\* Напомним читателю, что в непрерывных системах ошибку принято обозначать через  $x$ .

величин в дискретные: первый преобразует входной сигнал  $x$  в дискретный  $x^*$ , а второй — выходной сигнал объекта  $y$  в  $y^*$ .

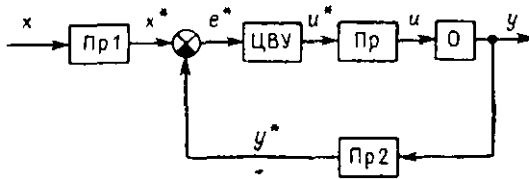


Рис. 4.2.

При автоматизации технологического оборудования выбор конкретного типа вычислительной машины определяется в первую очередь теми функциями, которые ей приходится выполнять в САУ. Это могут быть обработка поступающей информации, которая требует вычислительных или логических операций, улучшение динамических свойств САУ путем введения корректирующих программ, операции оптимизации САУ по некоторым статическим и динамическим параметрам, операции контроля, поиск неисправностей и т. д. Основным методом исследования цифровых САУ является их моделирование на универсальных цифровых вычислительных машинах и на аналого-цифровых вычислительных комплексах. Однако моделирование обычно проводят совместно с аналитическими исследованиями, при помощи которых обосновывают структуру проектируемой цифровой САУ, определяют основные ее параметры и качественные показатели.

Теоретической базой для аналитических исследований цифровых САУ является теория дискретных систем (точнее импульсных), в основу которой положены функциональные преобразования — дискретное преобразование Лапласа и  $z$ -преобразование, используемые для синтеза и анализа дискретных САУ при детерминированных и случайных воздействиях. Большую роль в теории дискретных и непрерывных САУ играют широко используемые на практике метод логарифмических характеристик и частотные методы. В настоящее время теория дискретных систем достаточно хорошо разработана применительно к импульсным и релейным САУ, но практически еще не создана для цифровых систем. Это объясняется сложностью возникающих процессов при одновременном квантовании информации по времени, что относит цифровые САУ к классу импульсных систем, и по уровню, что делает эти САУ нелинейными. Поэтому для исследования цифровых САУ мы воспользуемся методами расчета, которые основаны на рассмотрении линеаризованных импульсных систем с учетом влияния, оказываемого квантованием по уровню.

Импульсная САУ может быть представлена в виде соединения импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части системы (НЧС) (рис. 4.3, а). Импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в последовательность модулированных импульсов (рис. 4.3, б) с параметрами  $A$  (амплитуда импульса),  $\gamma T$  (длительность импульса) и  $T$  (период чередования  $\sigma$  импульсов). В общем случае импульсный элемент может быть заменен последовательным соединением идеального импульсного элемента и специально выбранного непрерывного фильтра, который называется *экстраполятором*, или *формирующим элементом*. Идеальный импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал в мгновенные импульсы в виде  $\delta$ -функций, а экстраполятор формирует импульсы заданной формы из  $\delta$ -импульсов.

В простейшем случае импульсное звено можно выполнить в виде ключа, который замыкается с периодом  $T$ . Если время замыкания ключа мало по сравнению с  $T$  и постоянными времени непрерывной части системы, а сигнал на входе ключа  $e = \text{const}$  при замкнутом его состоянии, то последовательность модулированных импульсов на входе ключа можно заменить последовательностью  $\delta$ -функций:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Значение каждой  $\delta$ -функции пропорционально величине сигнала на входе ключа в момент его замыкания. На выходе импульсного элемента получают сигнал

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT). \quad (4.1)$$

Импульсный элемент на структурной схеме обычно изображается в виде прямоугольника (рис. 4.3, в) или ключа (рис. 4.3, г).

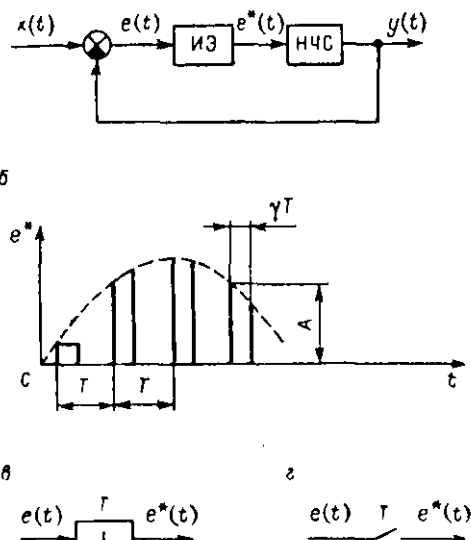


Рис. 4.3.

Сигналы в импульсных САУ могут быть представлены в виде *дискретных* (или так называемых *решетчатых*) *функций времени*, значения которых определены для дискретных моментов  $t=nT$  ( $n$  — целое число, а  $T$  — период повторения). Между этими значениями независимой переменной дискретная функция равна нулю. Любую непрерывную функцию  $f(t)$  (рис. 4.4, а) можно заменить дискретной (решетчатой) (рис. 4.4, б):

$$f[nT] = f(t)|_{t=nT}.$$

Ординаты, определяющие дискретные значения решетчатой функции в одинаковые моменты времени, называются *дискретными*.

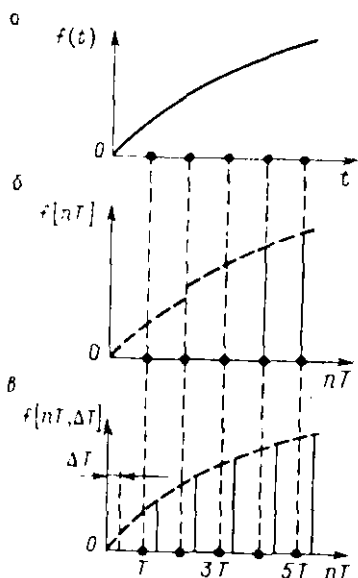


Рис. 4.4.

Дискретные  $f(t)$  могут быть также определены и для смещенных моментов  $t=nT+\Delta T$  (рис. 4.4, в). Это позволяет просматривать процессы внутри периодов с дискретностью  $T$ . Смещение  $\Delta T = \text{const}$  может иметь положительное значение (как показано на рис. 4.4, в) или отрицательное — при выполнении условия  $|\Delta T| < T$ .

Решетчатая функция может формироваться не только из какой-либо исходной непрерывной функции. Любая числовая последовательность некоторой величины, которая определена в дискретные одинаковые моменты времени, также может быть представлена в виде решетчатой функции. Аналогом дифференциалов непрерывной функции для решетчатой являются разности, а аналогом интегралов — суммы.

Первая разность, т. е. разность первого порядка, решетчатой функции определяется выражением

$$\Delta f[nT] = f[nT + T] - f[nT]. \quad (4.2)$$

Вторая разность, т. е. разность второго порядка, определяется как первая разность от первой разности:

$$\Delta^2 f[nT] = \Delta f[nT + T] - \Delta f[nT],$$

а учитывая выражение (4.2),

$$\Delta^2 f[nT] = f[nT + 2T] - 2f[nT + T] + f[nT].$$

Разность  $k$ -го порядка

$$\Delta^k f[nT] = \Delta^{k-1} f[nT+T] - \Delta^{k-1} f[nT]. \quad (4.3)$$

Для решения разностных уравнений (4.3) удобно воспользоваться операционным методом, основанным на дискретном преобразовании Лапласа в соответствии с формулой

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT}, \quad (4.4)$$

где  $F^*(p)$  — изображение оригинала дискретной функции  $f[nT]$ . Эта формула является обобщением на дискретные функции обычного преобразования Лапласа

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^t f(t) e^{-pt} dt, \quad (4.5)$$

где  $F(p)$  — изображение оригинала непрерывной функции  $f(t)$ .

Как видно из формулы (4.4), дискретное преобразование устанавливает функциональную связь между решетчатыми функциями (сигналами) и их изображениями, которые являются функциями величины  $e^{-pT}$ . По существу, выражение (4.3) есть сумма изображений всех  $\delta$ -функций, входящих в формулу (4.1).

Для исследования импульсных САУ на практике весьма распространено  $z$ -преобразование, которое получается из дискретного преобразования Лапласа путем подстановки  $z = e^{pT}$ :

$$F(z) = Z[f[nT]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] z^{-n}, \quad (4.6)$$

где  $F(z)$  — изображение в соответствии с  $z$ -преобразованием.

При исследовании динамических свойств САУ в первую очередь необходимо определить ее передаточные функции. Рассмотрим сначала передаточные функции импульсных САУ. Передаточная функция разомкнутой импульсной системы — это отношение изображений (в соответствии с дискретным преобразованием Лапласа) выходного и входного импульсных сигналов (см. рис. 4.3, а) при нулевых начальных условиях, т. е.

$$W^*(p) = Y^*(p) / E^*(p).$$

Аналогично определяется эта передаточная функция в соответствии с  $z$ -преобразованием:

$$W(z) = Y(z) / E(z).$$

Для определения передаточной функции  $W(z)$  по известной передаточной функции приведенной непрерывной части САУ  $W(p)$  необходимо сначала с помощью обратного преобразова-

ния Лапласа найти весовую функцию непрерывной части системы:

$$w(t) = L^{-1} [W(p)].$$

Затем по этой функции определяют соответствующую ей дискретную (решетчатую) весовую функцию  $w[nT]$ , по которой, используя  $z$ -преобразования, находят искомую передаточную функцию:

$$W(z) = Z\{w[nT]\}.$$

Последняя формула показывает, что передаточная функция разомкнутой импульсной системы равна изображению выходного сигнала, который представляет собой решетчатую приведенную весовую функцию  $w[nT]$  и отличается от обычной его функции для непрерывной части системы дополнительным множителем, имеющим размерность времени.

Передаточная функция замкнутой импульсной системы, определяемая в соответствии с уравнением замыкания через дискретную передаточную функцию разомкнутой САУ (см. рис. 4.3, а)

$$\Phi(z) = Y(z)/X(z) = W(z)/[1 + W(z)], \quad (4.7)$$

позволяет вычислить реакцию замкнутой САУ на задающее воздействие. Если передаточную функцию (4.7) представить в виде отношения двух полиномов относительно переменной  $z$ :

$$\Phi(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0},$$

где  $a_0, \dots, a_m$  и  $b_0, \dots, b_k$  — некоторые постоянные коэффициенты, то можно записать следующее уравнение:

$$[a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0] Y(z) = [b_k z^k + \dots + b_1 z + b_0] X(z). \quad (4.8)$$

Приравнивая левую часть этого уравнения к нулю, получаем характеристическое уравнение замкнутой импульсной САУ:

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (4.9)$$

При переходе в уравнении (4.8) от изображений к оригиналам записываем разностное уравнение САУ:

$$a_m y[nT + mT] + \dots + a_1 y[nT + T] + a_0 y[nT] = \\ = b_k x[nT + kT] + \dots + b_1 x[nT + T] + b_0 x[nT].$$

Передаточная функция ошибки импульсной системы определяется через дискретную передаточную функцию разомкнутой САУ по формуле

$$\Phi_e(z) = E(z)/X(z) = 1/[1 + W(z)].$$

По этой передаточной функции при известном задающем воздействии можно оценить динамическую точность импульсной САУ, найдя решетчатую функцию ошибки.

Основным звеном цифровой САУ является вычислительная машина, которая преобразует дискретные сигналы, поступающие на ее вход, в дискретные сигналы выхода. Преобразование дискретных сигналов осуществляется в соответствии с определенной программой работы машины. Передаточная функция цифровой вычислительной машины — это отношение изображений входного и выходного сигналов (см. рис. 4.1), которые взяты в безразмерной (цифровой) форме:

$$D(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \frac{b_s + b_{s-1}z + \dots + b_1z^{s-1} + b_0z^s}{a_k + a_{k-1}z + \dots + a_1z^{k-1} + a_0z^k}, \quad (4.10)$$

где  $E^*(z)$  и  $U^*(z)$  — изображения ( $z$ -преобразования) решетчатых функций  $e^*[nT]$  и  $u^*[nT]$ . На практике обычно  $k \geq s$ . Переходя от изображений к оригиналам, из выражения (4.10) можно получить разностное уравнение для машины:

$$a_k e^*[nT - kT] + \dots + a_1 e^*[nT - T] + a_0 e^*[nT] = b_s u^*[nT - sT] + \dots + b_1 u^*[nT - T] + b_0 u^*[nT], \quad (4.11)$$

которое соответствует линейному алгоритму ее работы. Из уравнения (4.11) следует, что значение выходного сигнала определяется предыдущими его значениями и настоящими и предыдущими значениями входного сигнала, следовательно, на практике программа машины может быть реализована.

Передаточная функция разомкнутой цифровой САУ (см. рис. 4.2) может быть определена как произведение передаточных функций машины и непрерывной части системы, которая объединяет преобразователь и объект управления:

$$W(z) = D(z) W_0(z). \quad (4.12)$$

Тогда зависимость между изображениями входного сигнала  $y[nT]$  и входного  $e[nT]$  будет иметь вид

$$Y(z) = W(z) E(z). \quad (4.13)$$

Учитывая, что  $E(z) = X(z) - Y(z)$ , из выражения (4.13) получаем

$$Y(z) = W(z) X(z) / [1 + W(z)] = H(z) X(z), \quad (4.14)$$

$$E(z) = X(z) / [1 + W(z)] = H_e(z) X(z), \quad (4.15)$$

$$\text{где } H(z) = W(z) / [1 + W(z)] \quad (4.16)$$

— дискретная передаточная функция замкнутой цифровой САУ, а

$$H_e(z) = 1 / [1 + W(z)] \quad (4.17)$$

— дискретная передаточная функция ошибки замкнутой цифровой САУ.

Передаточные функции  $W(z)$ ,  $H(z)$  и  $H_e(z)$  используются для оценки динамических свойств и качества цифровых систем. Формулы (4.12) — (4.17) относятся к простейшей одноканальной цифровой САУ с единичной обратной связью. Аналогично передаточные функции могут быть определены и для других структурных схем более сложного вида.

Рассмотрим частотные передаточные функции цифровых САУ. Подадим на вход системы (см. рис. 4.2) решетчатую функцию, которая представляет собой синусоидальную последовательность

$$e_c[nT] = a \sin(n\omega T + \varphi) \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (4.18)$$

где  $a$  — амплитуда;  $\varphi$  — начальная фаза;  $T$  — период повторения;  $\omega$  — угловая частота;  $T_1 = 2\pi/\omega$  — период синусоидальной последовательности. В общем случае синусоидальная последовательность (4.18) в отличие от непрерывной гармонической функции является непериодической функцией  $n$ . Она будет непериодической функцией только при соизмеримости периода повторения ( $T$ ) и периода гармонической функции ( $T_1$ ). В символической записи синусоидальная последовательность (4.18) заменится последовательностью комплексных чисел:

$$e_c[nT] = ae^{j(n\omega T + \varphi)} = ae^{jn\omega T},$$

где  $a = ae^{j\varphi}$  — комплексное число. Если обозначить  $e^{j\omega T} = z$ , то получим

$$e_c[nT] = dz^n,$$

где  $z$  — произвольное комплексное число с модулем, равным единице. Тогда каждой частоте будет соответствовать определенная точка на окружности с единичным радиусом, которая расположена на комплексной плоскости (рис. 4.5).

Частотные передаточные функции цифровой САУ можно найти из дискретных передаточных функций посредством подстановки в выражения (4.12), (4.16), (4.17)  $z = e^{j\omega T}$ : для разомкнутой системы

$$W(e^{j\omega T}) = D(e^{j\omega T}) W_0(e^{j\omega T}),$$

для замкнутой системы

$$H(e^{j\omega T}) = W(e^{j\omega T}) / [1 + W(e^{j\omega T})],$$

для ошибки замкнутой системы

$$H_e(e^{j\omega T}) = 1 / [1 + W(e^{j\omega T})].$$

Эти частотные передаточные функции характеризуют цифро-

вую САУ со структурной схемой, изображенной на рис. 4.2. Аналогично можно получить частотные передаточные функции и для других структур САУ. Зная частотные передаточные функции, можно построить различные частотные характеристики САУ в функции круговой частоты  $\omega$ . Но построение их осложняется трансцендентностью исходных выражений, содержащих  $\omega$ , и периодичностью всех характеристик, поэтому на практике при синтезе и анализе цифровых САУ применяются частотные передаточные функции и частотные характеристики с использованием так называемой *псевдочастоты*. Переход к псевдочастоте делается на основании  $\omega$ -преобразования, при помощи которого окружность с радиусом  $r = e^{j\omega T} = 1$  отображается на мнимую ось плоскости комплексной величины  $\omega$ .

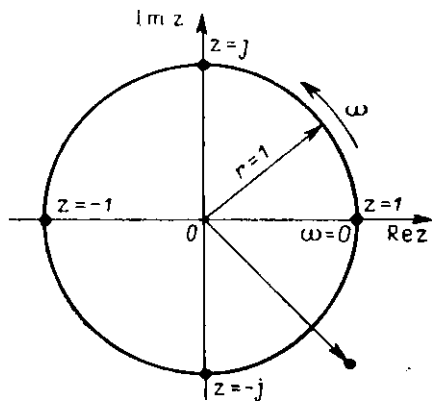


Рис. 4.5.

Комплексные величины  $\omega$  и  $z$  связаны между собой билинейными преобразованиями:

$$z = (1 + \omega)(1 - \omega), \quad (4.19)$$

$$\omega = (z - 1)/(z + 1). \quad (4.20)$$

Подставив в выражение (4.20)  $z = e^{j\omega T}$ , получим

$$\omega = (e^{j\omega T} - 1)/(e^{j\omega T} + 1) = j \operatorname{tg}(\omega T/2) = j\bar{\lambda},$$

где  $\bar{\lambda} = \operatorname{tg}(\omega T/2)$  — относительная псевдочастота. Абсолютная псевдочастота определяется из выражения

$$\lambda = 2 [T \operatorname{tg}(\omega T/2)] = 2/(\bar{\lambda} T). \quad (4.21)$$

В случае воздействия на входе цифровой САУ медленно меняющегося гармонического сигнала (что соответствует работе этой системы на низких скоростях)  $\operatorname{tg}(\omega T/2) \simeq \omega T/2$  и псевдочастота  $\lambda \simeq \omega$ . Следовательно, при малых частотах частотные характеристики, построенные в функции псевдочастоты, практически совпадают с частотными характеристиками, построенными в функции обычной круговой частоты. Подставляя в выражения для частотных передаточных функций  $W(z)$ ,  $H(z)$  и  $H_c(z)$  значения  $z$  из выражения (4.19) и заменяя  $\omega = j(T/2)\lambda$ , получаем частотные передаточные функции: для разомкнутой цифровой САУ

$$W^*(j\lambda) = W[1 + j(T/2)\lambda]/[1 - j(T/2)\lambda],$$

для замкнутой цифровой САУ

$$H^*(j\lambda) = H[1 + j(T/2)\lambda] / [1 - j(T/2)\lambda],$$

для ошибки замкнутой цифровой САУ

$$H_e^*(j\lambda) = H_e[1 + j(T/2)\lambda] / [1 - j(T/2)\lambda].$$

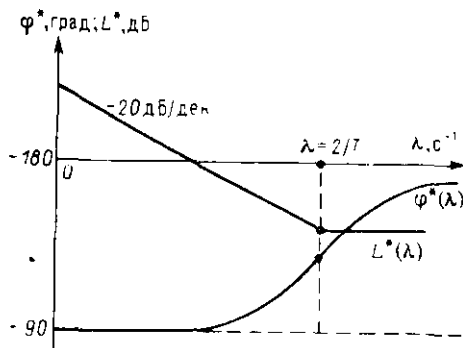


Рис. 4.6.

Построение частотных характеристик в функции абсолютной псевдочастоты  $\lambda$  не вызывает каких-либо трудностей. Например, пусть разомкнутая цифровая САУ имеет дискретную передаточную функцию в виде  $W(z) = kT/(z-1)$ , где  $k$  — коэффициент передачи системы;  $T$  — период дискретности. Частотную передаточную функцию при

использовании круговой частоты определим после подстановки  $z = \exp(j\omega T)$ :

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega T}) &= \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{kT}{\cos \omega T - 1 + j \sin \omega T} = \\ &= -\frac{kT}{2} - j\frac{kT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}, \end{aligned}$$

а при использовании абсолютной псевдочастоты  $\lambda$  — после подстановки выражения (4.19) в исходную передаточную функцию  $W(z)$  и замены  $\omega = j(T/2)\lambda$ :

$$\begin{aligned} W^*(j\lambda) &= \frac{kT}{(1+w)/(1-w) - 1} = \frac{kT(1-w)}{2w} = \\ &= \frac{k[1 - j(T/2)\lambda]}{j\lambda}. \end{aligned}$$

Последняя формула совпадает с обычной формой выражений передаточных функций непрерывных САУ. Это позволяет легко построить логарифмические частотные характеристики: амплитудные (ЛАХ) и фазовые (ЛФХ) для передаточной функции  $W^*(j\lambda)$  в функции псевдочастоты. Обе эти характеристики представлены на рис. 4.6, где  $L^*$  и  $\varphi^*$  — ЛАХ и ЛФХ цифровой САУ соответственно.

## 4.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

Важнейшей характеристикой качества цифровой САУ является ее устойчивость. Известные из теории автоматического управления основные определения устойчивости непрерывных САУ применимы и к цифровым системам, но с учетом их особенностей.

Цифровая САУ устойчива, если ее собственные процессы с течением времени затухают. Оценку устойчивости цифровой САУ, как и непрерывной, обычно производят на основании исследования характеристического уравнения (4.9), которое можно получить, приравняв к нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы (4.16):

$$1 + W(z) = 1 + D(z) W_0 = 0.$$

Поскольку переменная  $z$  появилась от подстановки  $z = e^{pT}$ , то каждый корень  $z_i$  связан с корнями  $p_i$  на плоскости  $p$  зависимостью  $z_i = e^{p_i T}$ . Нетрудно заметить, что нулевому корню (например,  $p_1 = 0$ ) соответствует корень  $z_1 = 1$ , а отрицательным вещественным корням  $p_i$  соответствуют корни  $|z_i| < 1$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ), где  $m$  — порядок характеристического уравнения. Таким образом, цифровая САУ будет устойчива, если все корни характеристического уравнения лежат внутри окружности с единичным радиусом, построенной в начале координат комплексной плоскости  $z$  (рис. 4.7, а). При наличии корней  $|z_i| > 1$  система неустойчива.

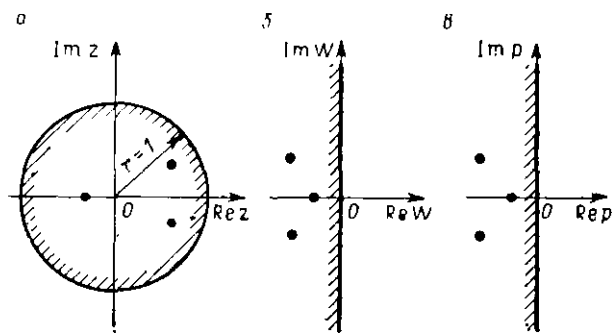


Рис. 4.7.

Для определения расположения корней характеристического уравнения относительно единичной окружности можно использовать алгебраический критерий устойчивости Рауса — Гурвица, накладывающий ограничения на коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы (4.9):

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Практически этот алгебраический критерий устойчивости применяют при  $m \leq 3$ , так как для уравнений более высокого порядка исследование устойчивости резко усложняется. В табл. 4.1 приведены условия устойчивости цифровых САУ для разных значений  $m$ . Для облегчения определения устойчивости цифровой САУ используется введенное ранее  $\omega$ -преобразование (4.20), с помощью которого единичная окружность (см. рис. 4.7, а) отображается на мнимую ось (рис. 4.7, б). Областью устойчивости в первом случае является внутренняя часть круга, а во втором — левая полуплоскость. Во втором случае область устойчивости аналогична области устойчивости в плоскости величины  $p = c + j\omega$  (рис. 4.7, в), где границей устойчивости является ось мнимых значений. Поэтому для передаточных функций с  $\omega$ -преобразованием могут использоваться обычные критерии устойчивости исследования непрерывных САУ.

Таблица 4.1

| $m$ | Условия устойчивости                                                                                                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $a_0 + a_1 > 0, a_0 - a_1 < 0$                                                                                                 |
| 2   | $a_0 + a_1 + a_2 > 0, a_0 - a_2 < 0, a_0 - a_1 + a_2 > 0$                                                                      |
| 3   | $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, a_0 - a_1 + a_2 - a_3 < 0,$<br>$3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0, a_0(a_1 - a_2) + a_3(a_1 - a_2) < 0$ |

Следует отметить, что об устойчивости цифровых САУ предлагаемым способом можно судить лишь в дискретные моменты  $t = nT$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), т. е. в моменты замыкания импульсного элемента. В большинстве случаев при исследовании цифровых САУ этого бывает достаточно. Тогда же, когда на выходе цифровой системы могут возникнуть скрытые колебания между моментами замыкания импульсного элемента, можно воспользоваться методами, предлагаемыми в литературе. Возможность возникновения таких скрытых колебаний в цифровой САУ обусловлена, например, наличием в системе колебательных и консервативных звеньев с частотами свободных колебаний, кратными  $\pi/T$  или  $\pi/(T\sqrt{1-\gamma^2})$  ( $\gamma$  — коэффициент затухания колебательного звена).

Основные показатели качества процессов цифровых САУ аналогичны показателям непрерывных САУ — показателям качества переходного процесса (время переходного процесса  $t_n$ , перерегулирование  $\sigma$ , число перерегулирований  $n$  или показатель колебательности  $M$ ) и точности работы системы в установившихся режимах. Переходный процесс в цифровых САУ может быть определен с помощью обратного  $z$ -преобразования или частотных методов. Оценку показателей качества переходного процесса производят по импульсной переходной функции

САУ  $y[nT]$ , являющейся реакцией на единичную ступенчатую дискретную функцию  $X[nT] = 1[nT]$ .

Изображение выходной величины САУ относительно  $z$ -преобразования определяется с учетом (4.7):

$$Y(z) = \Phi(z) X(z).$$

Поскольку изображение единичной решетчатой функции  $X(z) = Z\{1[nT]\} = z/(z-1)$ , то изображение дискретной переходной функции системы будет иметь следующий вид:  $Y(z) = Z\{y[nT]\} = \Phi(z)z/(z-1)$ . В общем случае это изображение можно представить как отношение двух полиномов. Затем по этому изображению определяют оригинал  $y[nT]$ , т. е. осуществляют операцию обратного  $z$ -преобразования. Для этого используют разложение в ряд по степеням  $z^{-1}$  изображения выходного сигнала (делением полинома числителя на полином знаменателя):

$$Y(z) = Y_0 + Y_1 z^{-1} + Y_2 z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k z^{-k}.$$

Коэффициенты полученного степенного ряда равны дискретным значениям импульсной переходной функции в моменты  $t = nT$ . Если периоды дискретности малы, что имеет место в САУ, то степенной ряд сходится медленно и объем вычислительной работы весьма велик.

Наиболее рациональным методом расчета переходного процесса в цифровой САУ является частотный графоаналитический метод, который позволяет определить переходный процесс по логарифмическим частотным характеристикам, заданным графически, и аналогичен методу, применяемому в непрерывных САУ. Сначала по вещественной частотной характеристике находится импульсная переходная функция замкнутой цифровой САУ:

$$h[nT] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega} n d\bar{\omega}, \quad (4.22)$$

где  $\bar{\omega} = \omega T$ . Затем, используя метод трапецидальных характеристик, график вещественной частотной характеристики можно представить в виде суммы элементарных трапеций:

$$P(\bar{\omega}) = \sum_{i=1}^m P_i(\bar{\omega}). \quad (4.23)$$

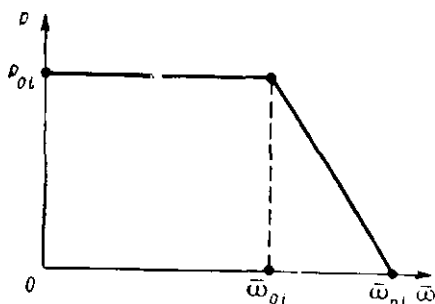
Типовая трапецидальная характеристика и ее параметры приведены на рис. 4.8. Подставив в формулу (4.22) выражение (4.23), после преобразований получим

$$h[nT] = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^m A_i \frac{\sin \gamma_i n}{\gamma_i n} \frac{\sin a_i \gamma_i n}{a_i \gamma_i n}, \quad (4.24)$$

$$A_i = P_{0i} \bar{\omega}_{cp i}; \quad a_i = \bar{\omega}_{pi} \bar{\omega}_{cp i}; \quad \gamma_i = \bar{\omega}_{cp i}.$$

Здесь  $\bar{\omega}_{cp i} = (\bar{\omega}_{pi} + \bar{\omega}_{0i})/2$ ;  $\bar{\omega}_{pi} = (\bar{\omega}_{pi} - \bar{\omega}_{0i})/2$ . Коэффициент  $a_i$  изменяется в пределах от 0 до 1.

Пользуясь данными табл. 4.2, в которой приведены значения



функции  $\sin \gamma/\gamma$ , или но-мограммой, представленной на рис. 4.9, и формулой (4.24), рассчитывают импульсную переходную функцию САУ, с помощью которой можно построить кривую переходного процесса при любом воздействии. Для единичного управляющего ступенчатого воздействия переходный процесс находится в результате суммирования импульсной характеристики:

функции  $\sin \gamma/\gamma$ , или но-мограммой, представленной на рис. 4.9, и формулой (4.24), рассчитывают импульсную переходную функцию САУ, с помощью которой можно построить кривую переходного процесса при любом воздействии. Для единичного управляющего ступенчатого воздействия переходный процесс находится в результате суммирования импульсной характеристики:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^m h[kT]. \quad (4.25)$$

Вещественная частотная характеристика цифровой САУ  $P(\lambda)$  может быть определена по ЛЧХ разомкнутой системы (ЛАХ  $L(\lambda)$  и ЛФХ  $\varphi(\lambda)$ ) с помощью номограммы  $P=F(L, \varphi)$ , приведенной на рис. 2.31, где  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  соответствуют  $L(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$ . Там же построены линии равных значений  $P(\lambda) = \text{const}$ . Определив по ЛЧХ значения  $L(\lambda_i)$  и  $\varphi(\lambda_i)$  для псевдо-частоты  $\lambda_i$ , можно найти по номограмме 2.31 соответствующее значение  $P(\lambda_i)$  и построить вещественную частотную характеристику  $P(\lambda)$ . Характеристика  $P(\bar{\omega})$  определяется по характеристике  $P(\lambda)$  с учетом формулы (4.21) путем замены псевдо-частоты  $\lambda$  на  $\bar{\omega} = 2 \arctg(\lambda T/2)$ .

Рассмотрим пример построения переходного процесса в цифровой САУ, имеющей ЛЧХ  $L(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$ , изображенные на рис. 4.10. Вещественная частотная характеристика  $P(\bar{\omega})$  получена с помощью номограммы 4.9 и построена в функции частоты  $\bar{\omega} = 2 \arctg(\lambda T/2)$  (рис. 4.11, а). Затем вещественную частотную характеристику  $P(\bar{\omega})$  исследуемой системы аппроксимируют трапециевидными частотными характеристиками, чтобы при сложении всех трапеций получилась исходная характеристика. Данные сведены в табл. 4.3.

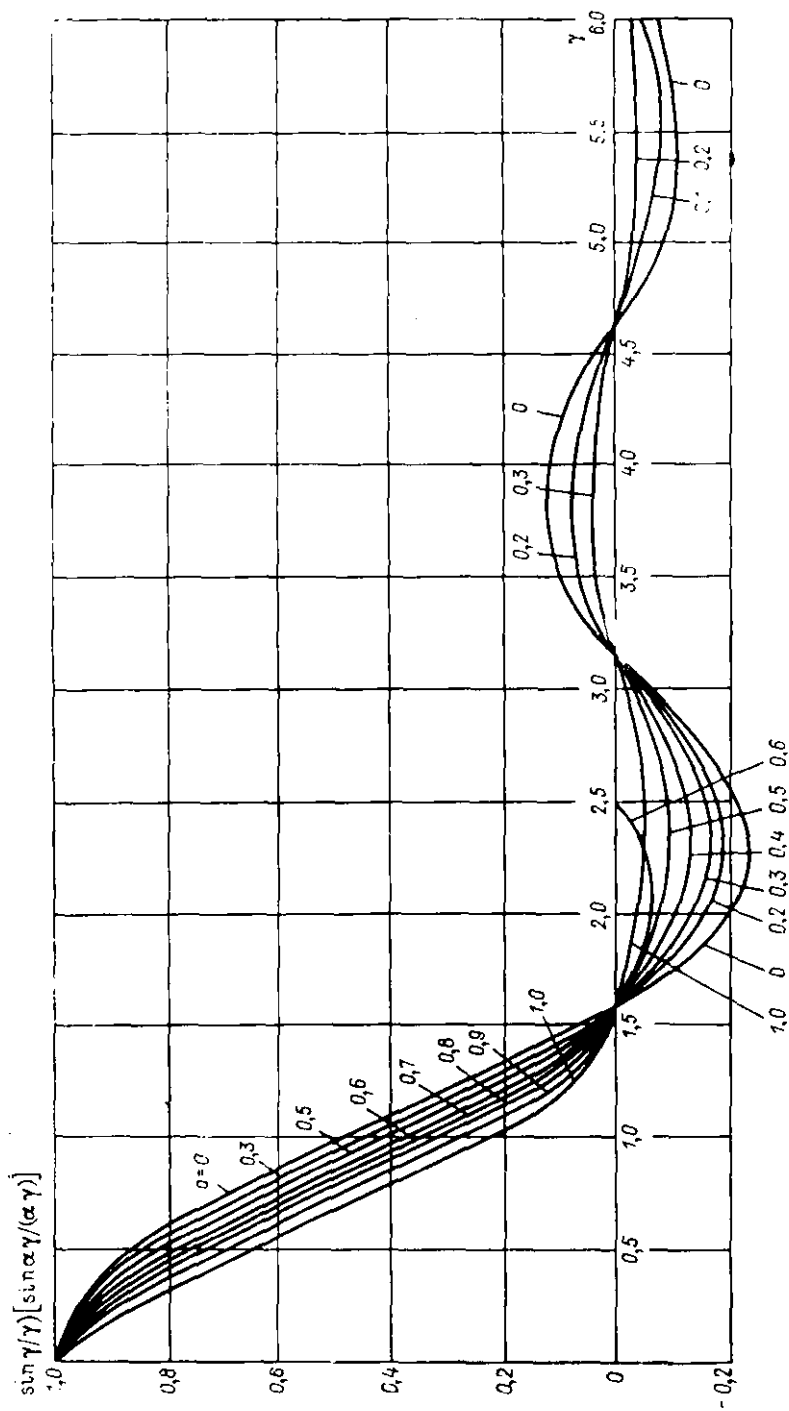


Рис. 4.9.

Таблица 4.2

| λ    | λ       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|      | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 11      |
| 0    | 1,000   | 0,99998 | 0,99993 | 0,99985 | 0,99973 | 0,99958 | 0,99940 | 0,99918 | 0,99893 | 0,99865 | 0,99833 |
| 0,10 | 0,99833 | 0,99798 | 0,99760 | 0,99718 | 0,99673 | 0,99625 | 0,99573 | 0,99519 | 0,99460 | 0,99399 | 0,99336 |
| 0,20 | 0,99334 | 0,99266 | 0,99195 | 0,99120 | 0,99042 | 0,98961 | 0,98877 | 0,98789 | 0,98698 | 0,98604 | 0,98509 |
| 0,30 | 0,98506 | 0,98406 | 0,98302 | 0,98194 | 0,98084 | 0,97970 | 0,97853 | 0,97733 | 0,97610 | 0,97484 | 0,97354 |
| 0,40 | 0,97354 | 0,97221 | 0,97085 | 0,96946 | 0,96804 | 0,96659 | 0,96510 | 0,96358 | 0,96203 | 0,96046 | 0,95885 |
| 0,50 | 0,95885 | 0,95721 | 0,95553 | 0,95383 | 0,95210 | 0,95034 | 0,94854 | 0,94672 | 0,94486 | 0,94298 | 0,94107 |
| 0,60 | 0,94107 | 0,93912 | 0,93713 | 0,93515 | 0,93311 | 0,93105 | 0,92897 | 0,92684 | 0,92469 | 0,92251 | 0,92034 |
| 0,70 | 0,92034 | 0,91807 | 0,91581 | 0,91352 | 0,91119 | 0,90885 | 0,90647 | 0,90407 | 0,90164 | 0,89918 | 0,89669 |
| 0,80 | 0,89669 | 0,89418 | 0,89164 | 0,88907 | 0,88647 | 0,88385 | 0,88121 | 0,87853 | 0,87583 | 0,87311 | 0,87036 |
| 0,90 | 0,87036 | 0,86758 | 0,86478 | 0,86195 | 0,85910 | 0,85622 | 0,85332 | 0,85039 | 0,84744 | 0,84447 | 0,84147 |
| 1,00 | 0,84147 | 0,83844 | 0,83540 | 0,83232 | 0,82923 | 0,82611 | 0,82297 | 0,81981 | 0,81662 | 0,81341 | 0,81018 |
| 1,10 | 0,81018 | 0,80693 | 0,80366 | 0,80036 | 0,79704 | 0,79370 | 0,79034 | 0,78696 | 0,78356 | 0,78014 | 0,77671 |
| 1,20 | 0,77671 | 0,77323 | 0,76975 | 0,76625 | 0,76272 | 0,75918 | 0,75562 | 0,75204 | 0,74844 | 0,74483 | 0,74120 |
| 1,30 | 0,74120 | 0,73754 | 0,73387 | 0,73018 | 0,72648 | 0,72275 | 0,71901 | 0,71526 | 0,71148 | 0,70769 | 0,70389 |
| 1,40 | 0,70389 | 0,70007 | 0,69623 | 0,69238 | 0,68851 | 0,68462 | 0,68073 | 0,67681 | 0,67289 | 0,66895 | 0,66499 |
| 1,50 | 0,66499 | 0,66102 | 0,65704 | 0,65305 | 0,64904 | 0,64502 | 0,64098 | 0,63694 | 0,63288 | 0,62881 | 0,62473 |
| 1,60 | 0,62473 | 0,62064 | 0,61653 | 0,61242 | 0,60829 | 0,60416 | 0,60001 | 0,59585 | 0,59169 | 0,58751 | 0,58333 |
| 1,70 | 0,58333 | 0,57913 | 0,57493 | 0,57072 | 0,56650 | 0,56227 | 0,55804 | 0,55379 | 0,54954 | 0,54529 | 0,54102 |
| 1,80 | 0,54102 | 0,53675 | 0,53247 | 0,52819 | 0,52390 | 0,51960 | 0,51530 | 0,51100 | 0,50668 | 0,50237 | 0,49805 |
| 1,90 | 0,49805 | 0,49372 | 0,48939 | 0,48506 | 0,48072 | 0,47638 | 0,47204 | 0,46770 | 0,46335 | 0,45900 | 0,45464 |
| 2,00 | 0,45464 | 0,45029 | 0,44593 | 0,44157 | 0,43721 | 0,43285 | 0,42849 | 0,42413 | 0,41977 | 0,41541 | 0,41105 |
| 2,10 | 0,41105 | 0,40669 | 0,40233 | 0,39797 | 0,39361 | 0,38925 | 0,38489 | 0,38054 | 0,37619 | 0,37184 | 0,36749 |
| 2,20 | 0,36749 | 0,36315 | 0,35881 | 0,35447 | 0,35014 | 0,34581 | 0,34148 | 0,33716 | 0,33284 | 0,32852 | 0,32421 |
| 2,30 | 0,32421 | 0,31991 | 0,31561 | 0,31132 | 0,30703 | 0,30275 | 0,29847 | 0,29421 | 0,28994 | 0,28569 | 0,28144 |
| 2,40 | 0,28144 | 0,27720 | 0,27296 | 0,26874 | 0,26452 | 0,26031 | 0,25611 | 0,25191 | 0,24773 | 0,24355 | 0,23938 |
| 2,50 | 0,23938 | 0,23523 | 0,23108 | 0,22695 | 0,22282 | 0,21870 | 0,21459 | 0,21049 | 0,20645 | 0,20233 | 0,19829 |
| 2,60 | 0,19829 | 0,19421 | 0,19017 | 0,18614 | 0,18212 | 0,17812 | 0,17413 | 0,17015 | 0,16618 | 0,16223 | 0,15829 |
| 2,70 | 0,15829 | 0,15436 | 0,15045 | 0,14655 | 0,14266 | 0,13879 | 0,13493 | 0,13108 | 0,12725 | 0,12344 | 0,11964 |
| 2,80 | 0,11964 | 0,11585 | 0,11208 | 0,10833 | 0,10459 | 0,10086 | 0,09716 | 0,09347 | 0,08980 | 0,08614 | 0,08250 |
| 2,90 | 0,08250 | 0,07887 | 0,07527 | 0,07168 | 0,06811 | 0,06455 | 0,06101 | 0,05749 | 0,05399 | 0,05051 | 0,04704 |

| 1    | 2         | 3         | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 11      |
|------|-----------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3,00 | 0,04704   | 0,04359   | 0,04016 | 0,03675 | 0,03336 | 0,02998 | 0,02663 | 0,02330 | 0,01998 | 0,01668 |
| 3,10 | 0,04341   | 0,04015   | 0,03692 | 0,03370 | 0,03051 | 0,02736 | 0,02421 | 0,02116 | 0,01811 | 0,01516 |
| 3,20 | 0,041824  | 0,03829   | 0,03482 | 0,03132 | 0,02782 | 0,02432 | 0,02082 | 0,01732 | 0,01382 | 0,01032 |
| 3,30 | 0,041780  | 0,03863   | 0,03535 | 0,03204 | 0,02873 | 0,02542 | 0,02211 | 0,01880 | 0,01549 | 0,01218 |
| 3,40 | 0,041515  | 0,03777   | 0,03435 | 0,03092 | 0,02749 | 0,02406 | 0,02063 | 0,01720 | 0,01377 | 0,01034 |
| 3,50 | 0,040022  | 0,03600   | 0,03255 | 0,02910 | 0,02565 | 0,02220 | 0,01875 | 0,01530 | 0,01185 | 0,00840 |
| 3,60 | 0,042292  | 0,03805   | 0,03465 | 0,03125 | 0,02785 | 0,02445 | 0,02105 | 0,01765 | 0,01425 | 0,01085 |
| 3,70 | 0,041319  | 0,03759   | 0,03415 | 0,03075 | 0,02735 | 0,02395 | 0,02055 | 0,01715 | 0,01375 | 0,01035 |
| 3,80 | 0,041711  | 0,03766   | 0,03428 | 0,03087 | 0,02747 | 0,02407 | 0,02067 | 0,01727 | 0,01387 | 0,01047 |
| 3,90 | 0,041635  | 0,03774   | 0,03431 | 0,03091 | 0,02751 | 0,02411 | 0,02071 | 0,01731 | 0,01391 | 0,01051 |
| 4,00 | 0,041920  | 0,03804   | 0,03461 | 0,03117 | 0,02773 | 0,02429 | 0,02085 | 0,01741 | 0,01397 | 0,01053 |
| 4,10 | 0,041958  | 0,03818   | 0,03475 | 0,03131 | 0,02787 | 0,02443 | 0,02099 | 0,01755 | 0,01411 | 0,01067 |
| 4,20 | 0,042052  | 0,03848   | 0,03505 | 0,03161 | 0,02817 | 0,02473 | 0,02129 | 0,01785 | 0,01441 | 0,01097 |
| 4,30 | 0,042306  | 0,03891   | 0,03548 | 0,03204 | 0,02860 | 0,02516 | 0,02172 | 0,01828 | 0,01484 | 0,01140 |
| 4,40 | 0,042627  | 0,03940   | 0,03597 | 0,03253 | 0,02909 | 0,02565 | 0,02221 | 0,01877 | 0,01533 | 0,01189 |
| 4,50 | 0,042722  | 0,03970   | 0,03627 | 0,03283 | 0,02939 | 0,02595 | 0,02251 | 0,01907 | 0,01563 | 0,01219 |
| 4,60 | 0,042601  | 0,03958   | 0,03615 | 0,03271 | 0,02927 | 0,02583 | 0,02239 | 0,01895 | 0,01551 | 0,01207 |
| 4,70 | 0,04274   | 0,03981   | 0,03638 | 0,03294 | 0,02950 | 0,02606 | 0,02262 | 0,01918 | 0,01574 | 0,01230 |
| 4,80 | 0,042053  | 0,03909   | 0,03566 | 0,03222 | 0,02878 | 0,02534 | 0,02190 | 0,01846 | 0,01502 | 0,01158 |
| 4,90 | 0,0424050 | 0,03937   | 0,03594 | 0,03250 | 0,02906 | 0,02562 | 0,02218 | 0,01874 | 0,01530 | 0,01186 |
| 5,00 | 0,041978  | 0,039082  | 0,03565 | 0,03222 | 0,02878 | 0,02534 | 0,02190 | 0,01846 | 0,01502 | 0,01158 |
| 5,10 | 0,0418153 | 0,038842  | 0,03541 | 0,03198 | 0,02855 | 0,02512 | 0,02169 | 0,01826 | 0,01483 | 0,01140 |
| 5,20 | 0,0416989 | 0,038666  | 0,03523 | 0,03180 | 0,02837 | 0,02494 | 0,02151 | 0,01808 | 0,01465 | 0,01122 |
| 5,30 | 0,0415703 | 0,038568  | 0,03513 | 0,03169 | 0,02826 | 0,02483 | 0,02140 | 0,01797 | 0,01454 | 0,01111 |
| 5,40 | 0,041310  | 0,0384165 | 0,03498 | 0,03155 | 0,02812 | 0,02469 | 0,02126 | 0,01783 | 0,01440 | 0,01097 |
| 5,50 | 0,0412828 | 0,038368  | 0,03493 | 0,03150 | 0,02807 | 0,02464 | 0,02121 | 0,01778 | 0,01435 | 0,01092 |
| 5,60 | 0,041273  | 0,03834   | 0,03491 | 0,03148 | 0,02805 | 0,02462 | 0,02119 | 0,01775 | 0,01432 | 0,01089 |
| 5,70 | 0,0409661 | 0,038098  | 0,03466 | 0,03123 | 0,02780 | 0,02437 | 0,02094 | 0,01751 | 0,01408 | 0,01065 |
| 5,80 | 0,0408010 | 0,037844  | 0,03441 | 0,03100 | 0,02757 | 0,02414 | 0,02071 | 0,01728 | 0,01385 | 0,01042 |
| 5,90 | 0,0406337 | 0,0376169 | 0,03418 | 0,03077 | 0,02734 | 0,02391 | 0,02048 | 0,01705 | 0,01362 | 0,01019 |

По ним на основании выражения (4.24) вычисляем импульсную переходную функцию  $h[nT]$  САУ (рис. 4.11, б), по которой с помощью формулы (4.25) находим переходную характеристику  $y[nT]$  (рис. 4.11, в).

В цифровых САУ, как и в непрерывных, можно использо-

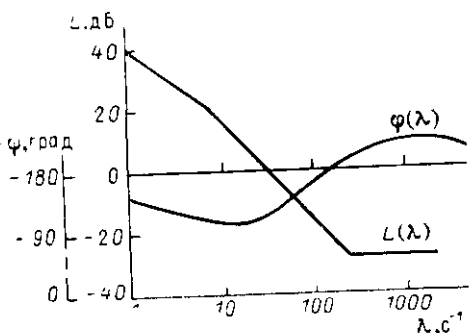


Рис. 4.10.

вать косвенные методы оценок процесса управления, т. е. можно ввести понятия запаса устойчивости и степени колебательности или воспользоваться аналогами интегральных оценок переходного процесса. Так, например, показатель колебательности цифровых САУ, определяющий склонность системы к колебаниям, представляет

собой высоту максимального пика амплитудной частотной ха-

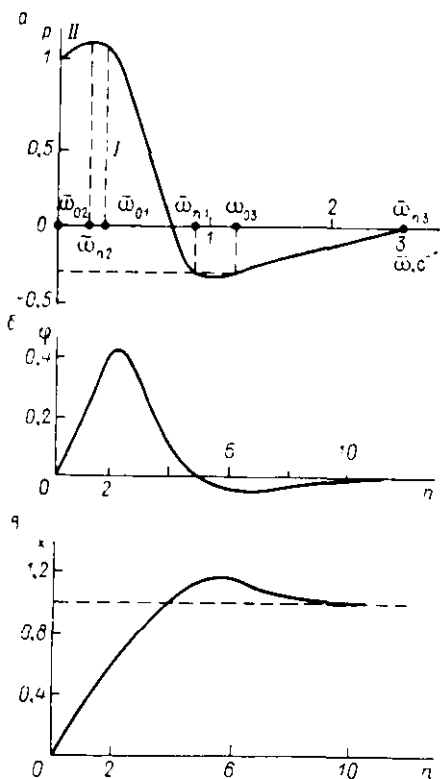


Рис. 4.11.

| Номер трапеции | $\bar{\omega}_0$ | $\bar{\omega}_n$ | $\bar{\omega}_{cp}$ | $p$  | $p_0$ | $A$  |
|----------------|------------------|------------------|---------------------|------|-------|------|
| I              | 0,20             | 0,95             | 0,58                | 0,38 | 1,50  | 0,86 |
| II             | 0,03             | 0,15             | 0,09                | 0,06 | -0,15 | 0,01 |
| III            | 1,45             | 2,75             | 2,10                | 0,65 | -0,35 | 0,74 |

характеристики замкнутой системы, отнесенного к его начальной ординате, т. е.  $M = A_{max}/A_0$  (рис. 4.12, а). Как и для непрерывных САУ, при получении заданной величины  $M$  амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы должна находиться вне запретной области, окружающей точку  $(-1, 0)$  (рис. 4.12, б).

Для оценки установившейся точности цифровой САУ используют установившуюся ошибку при разных типовых воздействиях. Изображение ошибки цифровой САУ (рис. 4.13, где  $f$  — возмущающее воздействие) в дискретные моменты  $t$

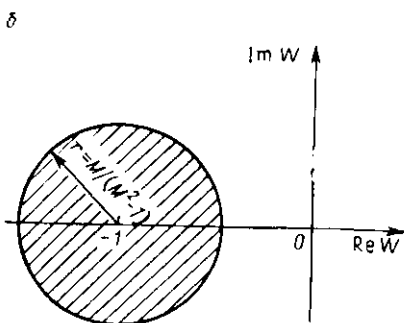
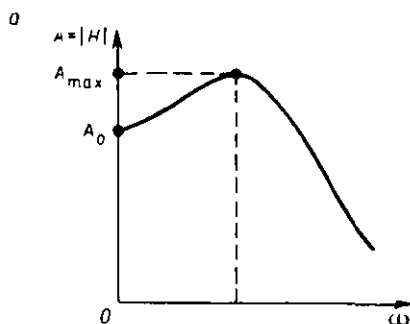


Рис. 4.12.

$= nT$  описывается выражением

$$E(z) = \frac{X(z)}{1+W(z)} + \frac{F(z)W_2(z)}{1+W(z)} = E_x(z) + E_f(z), \quad (4.26)$$

где  $W(z) = D(z)W_1(z)W_2(z)$ .

Формула (4.26) содержит две составляющие ошибки в виде  $z$ -изображения. Первая из них обусловлена управляющим воздействием  $x$ , а вторая — возмущающим воздействием  $f$ . Используя теорему о конечном значении дискретной функции, значение установившейся ошибки можно записать в виде

$$e[nT] = \lim_{n \rightarrow \infty} [(z-1)X(z)[z(1+W(z))]] +$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ n \rightarrow \infty}} \{(z-1) F(z) W_2(z) / [z(1+W(z))]\} = e_x[nT] + e_f[nT].$$

Если  $\dot{f}(t) = 0$ , то установившаяся ошибка описывается выражением

$$e[nT] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 1}} \{(z-1) X(z) [z(1+W(z))]\}. \quad (4.27)$$

При подаче на вход САУ ступенчатой функции  $x(t) = A_0/t$ ,  $z$ -изображение которой  $X(z) = A_0 z / (z-1)$ , установившаяся ошибка, называемая *ошибкой САУ по положению*, в соответствии с формулой (4.27) выражается как

$$e[nT] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 1}} \{A_0 / [1+W(z)]\}.$$

Если входное воздействие изменяется с постоянной скоростью  $x(t) = A_1 t$  и имеет  $z$ -изображение  $X(z) = A_1 T z / (z-1)^2$ , то установившаяся ошибка, называемая *ошибкой САУ по скорости*, с учетом выражения (4.27) находится по формуле

$$e_s[nT] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 1}} \{A_1 T [(z-1) W(z)]\}.$$

При изменении входного воздействия с постоянным ускорением  $x(t) = A_2 t^2 / 2!$  и  $z$ -изображением  $X(z) = A_2 T^2 z(z+1) / 2(z-1)^2$  установившаяся ошибка, называемая *ошибкой САУ по*

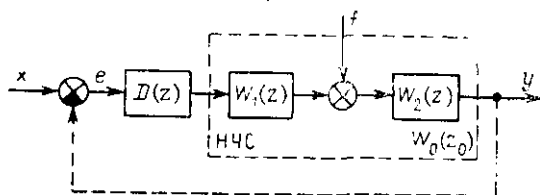


Рис. 4.13.

ускорению, согласно выражению (4.27) рассчитывается по формуле

$$e_s[nT] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 1}} \{A_2 T^2 [(z-1)^2 W(z)]\}.$$

В общем виде, если входное воздействие можно представить в виде степенной функции времени  $x(t) = A_k t^k / k!$ , то его  $z$ -изображение

$$X(z) = A_k T^k z N_k(z) / (z-1)^{k+1}, \quad (4.28)$$

$$\text{где } N_k(z) = (a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + \dots + a_{k-1} z + a_k) / k!,$$

является полиномом входного воздействия.

Если передаточная функция разомкнутой цифровой САУ

$$W(z) = W_0(z) (z-1)^v, \quad (4.29)$$

где  $W_0(z)$  не имеет полюсов при  $z=1$ , то при  $\nu=0$  цифровая система будет с астатизмом нулевого порядка (т. е. статической); при  $\nu=1$  — с астатизмом первого порядка; при  $\nu=2$  — с астатизмом второго порядка и т. д.

При подстановке выражений (4.28) и (4.29) в (4.26) установившаяся ошибка может принять следующие значения:

$$\begin{aligned} e[nT] &= 0 \text{ при } k < \nu; \\ e[nT] &= A_k T^k / W_0(z) \text{ при } k = \nu; \\ e[nT] &= \infty \text{ при } k > \nu. \end{aligned}$$

Следовательно, для реализации в цифровых САУ нулевой установившейся ошибки по управляющему воздействию необходимо было  $k < \nu$ , т. е. порядок астатизма САУ должен превышать степень полинома входного воздействия. В общем случае, если входное воздействие  $x(t)$  имеет произвольную форму, то аналогично непрерывным САУ, начиная с некоторого момента времени, установившаяся ошибка цифровой САУ может быть представлена в виде функции управляющего воздействия и ее производных, получающейся при разложении передаточной функции САУ по ошибке  $H_e(z)$  (4.17) в ряд Маклорена по степеням

$$\begin{aligned} e[nT] &= C_0 x[nT] + C_1 \dot{x}[nT] + \frac{1}{2!} C_2 \ddot{x}[nT] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} C_n x^{(n)}[nT], \end{aligned}$$

где  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  — коэффициенты ошибок, определяемые при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. при  $p \rightarrow 0$ , выражением  $C_n = |d^n H_e(e^{pT}) / dp^n|_{p \rightarrow 0}$ . Значения коэффициентов зависят от схемы САУ и ее параметров. Коэффициент  $C_0 \neq 0$  может быть только в статических системах; в астатических системах  $C_0 = 0$ .

Для повышения качественных показателей работы цифровых САУ можно пользоваться методами как непрерывной, так и импульсной коррекции. Два вида коррекции реализуются с помощью введения в непрерывную часть цифровой САУ дополнительных корректирующих устройств. Кроме того, импульсная коррекция может быть реализована с помощью введения дополнительных импульсных цепей (импульсных фильтров), преобразующих входные дискретные сигналы в соответствии с требуемым законом преобразования.

#### 4.3. РАСЧЕТ НЕПРЕРЫВНОЙ КОРРЕКЦИИ МЕТОДОМ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Построение ЛЧХ цифровой САУ осуществляется по частотным передаточным функциям разомкнутой системы в зависи-

мости от псевдочастоты, определяемой из выражения (4.21). Для упрощения это построение делается отдельно для областей низких ( $\omega < 1/T$ ) и высоких ( $\omega > 1/T$ ) частот. Передаточная функция разомкнутой цифровой САУ может быть представлена в виде  $W(z) = D(z) W_0(z)$ .

В области низких частот передаточную функцию непрерывной части системы  $W_0(z)$ , включающей в себя экстраполятор любого порядка, можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_0(z) \big|_{z=e^{pT}} = W_0(e^{pT}) &= k_1 z \left\{ \left| \frac{z-1}{z} \right|^{l+1} \times \right. \\ &\times \left( \frac{1}{p} + \frac{a_1}{p^2 T} + \frac{a_2}{p^3 T^2} + \dots + \frac{1}{p^{l+1} T^l} \right) W_n(p) e^{-p\tau} \Big\} \simeq \\ &\simeq k_1 Z \left\{ \frac{(pT)^{l+1}}{p^{l+1} T^l} \right\} W_n(p) e^{-p\tau} = k_1 T Z \{ W_n(p) e^{-p\tau} \} = \\ &= k_1 T \sum_{n=0}^{\infty} w_n [nT - \tau] z^{-n} = k_1 \int_0^{\infty} w_n(t - \tau) e^{-pt} dt = k_1 W_n(p) e^{-p\tau}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь  $k_1$  — коэффициент передачи дискретного сигнала, равный отношению цен младших разрядов выходного и входного преобразователей (см. рис. 4.2),  $k_1 = \delta/\delta_1$ ;  $l$  — порядок экстраполятора;  $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$  — постоянные коэффициенты;  $T$  — период повторения;  $W_n(p)$  — передаточная функция непрерывной части системы (см. рис. 4.2);  $\tau$  — постоянная времени запаздывания;  $w_n(t - \tau)$  — весовая функция непрерывной части системы с учетом суммарного запаздывания. Из выражения (4.30) следует, что в области низких частот передаточные функции

$$W_0(e^{pT}) \big|_{p=j\omega} = W_0(e^{j\omega T}), \quad W_n(p) e^{-p\tau} \big|_{p=j\omega} = W_n(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

совпадают друг с другом. Кроме того, поскольку в этой области псевдочастота практически совпадает с реальной частотой, то ЛЧХ можно строить в функции от  $\omega$  либо от  $\lambda$ .

Таким образом, для области низких частот ( $\omega < 1/T$ ) построение ЛЧХ сводится к построению ЛАХ и ЛФХ исходной непрерывной части САУ с добавлением множителя  $k_1$ :

$$L_0^*(\lambda) \simeq L_n(\omega) = 20 \lg |W_n(j\omega)|; \quad (4.31)$$

$$\varphi_0^*(\lambda) \simeq \varphi_n(\omega) - \omega\tau = \arg W_n(j\omega) - \omega\tau. \quad (4.32)$$

Выражения (4.31) и (4.32) показывают, что при синтезе цифровых САУ можно деформировать низкочастотную часть ЛАХ методами, используемыми для непрерывных САУ.

Для построения ЛЧХ в области высоких частот ( $\omega > 1/T$ ) вводятся следующие ограничения: во-первых, передаточная функция непрерывной части САУ совместно с экстраполятором должна быть представлена в виде

$$W(p) = k \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j p) \left/ \left[ p^\nu \prod_{i=1}^n (1 + T_i p) \right] \right., \quad (4.33)$$

где  $k$  — общий коэффициент усиления;  $\nu$  — степень астатизма; во-вторых, постоянные времени числителя передаточной функции (4.33) должны удовлетворять условию  $\tau_i < \omega_{\text{ср}}^{-1}$ , а сама частота среза должна быть  $< 2/T$ ; в-третьих, ЛАХ в области  $\omega_{\text{ср}}$  должна иметь наклон  $-20$  дБ/дек, а при пересечении вертикальной прямой  $\omega = 2/T$  — либо наклон  $-20$  дБ/дек, либо наклон  $-40$  дБ/дек. Тогда в области высоких частот при отсутствии временного запаздывания передаточная функция  $W_n(j\lambda)$  имеет вид

$$W_n(j\lambda) = \omega_{\text{ср}} \left( 1 - \frac{j\lambda T}{2} \right) \frac{1 + j\lambda (T/2 - T_\Sigma)}{j\lambda (1 + j\lambda T/2)},$$

где  $T_\Sigma$  — сумма малых постоянных времени, частоты сопряжения которых больше частоты  $\omega = 2/T$ ,  $T_\Sigma = \sum_{i=q+1}^n T_i$ . Это выражение можно использовать для построения ЛАХ:

$$L_n^*(\lambda) = 20 \lg [\omega_{\text{ср}} \sqrt{1 + k^2 (T/2 - T_\Sigma)^2}] \lambda.$$

На частоте  $\lambda = 2/T$  происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной частей ЛАХ.

В общем случае результирующее выражение передаточной функции при объединении выражений для низких и высоких частот имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_0(j\lambda) &= W_n(p) |_{p=j\lambda} W_n(j\lambda) = W_n(j\lambda) W_b(j\lambda) = \\ &= \frac{k(1+j\lambda\tau_1) \dots (1+j\lambda\tau_m)}{(j\lambda)^\nu (1+j\lambda T_1) \dots (1+j\lambda T_q)} \frac{(1-j\lambda T/2) [1+j\lambda (T/2 - T_\Sigma)]}{1+j\lambda T/2}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где постоянные времени  $T_1, \dots, T_q$  имеют сопряженные частоты меньше частоты  $\omega = 2/T$ . Результирующая ЛФК в этом случае описывается выражением

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(\lambda) &= -\nu \cdot 90^\circ + \sum_{k=1}^m \operatorname{arctg} \lambda \tau_k - \sum_{i=1}^q \operatorname{arctg} \lambda T_i - \\ &- 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda T}{2} + \operatorname{arctg} \left[ \lambda \left( \frac{T}{2} - T_\Sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

При наличии временного запаздывания в системе  $\tau = kT + \varepsilon T$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $\varepsilon$  — постоянное число в интервале  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) передаточную функцию (4.34) можно представить как

$$\begin{aligned} W_0(j\lambda) &= \frac{k(1+j\lambda\tau_1) \dots (1+j\lambda\tau_m)}{(j\lambda)^\nu (1+j\lambda T_1) \dots (1+j\lambda T_q)} \frac{(1-j\lambda T/2)^{k+1}}{(1+j\lambda T/2)^{k+\varepsilon}} \left[ 1 + \right. \\ &+ \left. j\lambda \left( \frac{T}{2} - T_\Sigma \right) \right] \left[ 1 + j\lambda \frac{T}{2} (1 - 2\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Иногда на практике для большей простоты влияние малых постоянных времени заменяют эквивалентным запаздыванием  $\tau_{\text{экв}} = T_{\Sigma}$ . В этом случае приближенное выражение для частотной передаточной функции (4.35) с учетом того, что

$$\tau_{\Sigma} = \tau - \tau_{\text{экв}} = \tau + \sum_{i=q+1}^n T_i + \sum_{k=1}^m \tau_k = T(k_1 + \varepsilon_1),$$

примет вид

$$W_0(j\lambda) = \frac{k(1+j\lambda\tau_1)\dots(1+j\lambda\tau_m)}{(j\lambda)^v(1+j\lambda T_1)\dots(1+j\lambda T_q)} \left( \frac{1-j\lambda T_2}{1+j\lambda T_2} \right)^{k_1+1} \left[ 1 + j\lambda \frac{T}{2}(1-2\varepsilon_1) \right]. \quad (4.36)$$

Выражения (4.34)–(4.36) представляют собой произведение передаточных функций элементарных типовых динамических звеньев САУ, поэтому с их помощью можно построить ЛЧХ системы. При расчете коррекции цифровой САУ методом ЛЧХ

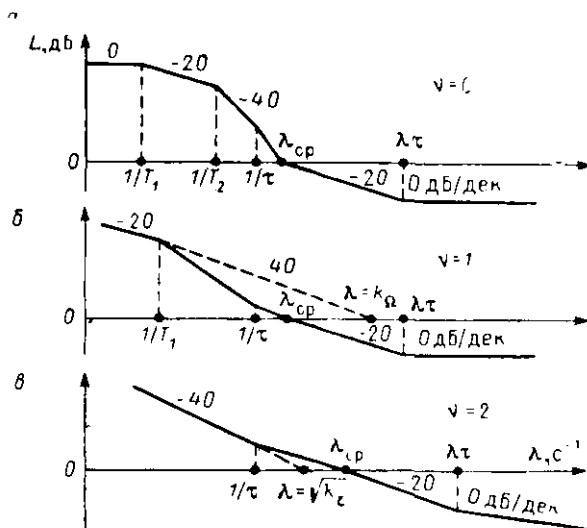


Рис. 4.14.

прежде всего необходимо определить желаемую ЛАХ, удовлетворяющую заданным показателям качества. Расчет корректирующих устройств значительно упрощается при использовании типовых желаемых ЛЧХ. При этом САУ считается скорректированной, если ЛЧХ совпадает с желаемой логарифмической характеристикой в существенном диапазоне рабочих частот. На рис. 4.14 изображены основные типовые желаемые ЛАХ

Таблица 4.4

| Степень астатизма | Передаточная функция непрерывной части                  | Дискретная частотная передаточная функция                                                                                                            |
|-------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Нулевая           | $\frac{K(1+\tau p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)\dots(1+T_n p)}$  | $\frac{K(1+j\lambda\tau)}{(1+j\lambda T_1)(1+j\lambda T_2)\dots(1+j\lambda T_n)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$    |
| Первого порядка   | $\frac{K_\Sigma(1+\tau p)}{p(1+T_1 p)\dots(1+T_n p)}$   | $\frac{K_\Sigma(1+j\lambda\tau)}{j\lambda(1+j\lambda T_1)\dots(1+j\lambda T_n)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$     |
| Второго порядка   | $\frac{K_\Sigma(1+\tau p)}{p^2(1+T_1 p)\dots(1+T_n p)}$ | $\frac{K_\Sigma(1+j\lambda\tau)}{(j\lambda)^2(1+j\lambda T_1)\dots(1+j\lambda T_n)} \times \left[1+j\lambda\left(\frac{T}{2}-T_\Sigma\right)\right]$ |

цифровых САУ с астатизмом нулевого, первого и второго порядков соответственно, а в табл. 4.4 приведены типовые желаемые передаточные функции цифровых САУ с экстраполятором нулевого порядка. При использовании экстраполятора первого

порядка в дискретных частотных передаточных функциях у последнего множителя в скобке  $(T/2 - T_\Sigma)$  первый член  $T/2$  следует заменить на  $T$ . В области низких частот, где  $\lambda < \lambda_{\text{ср}}$  и  $\lambda \approx \omega$ , желаемые ЛЧХ цифровых САУ совпадают с характеристиками непрерывной части. Параметры желаемой ЛАХ в этом случае выбираются с учетом требований, предъявляемых к точности работы системы в установившемся режиме, как и для непрерывных

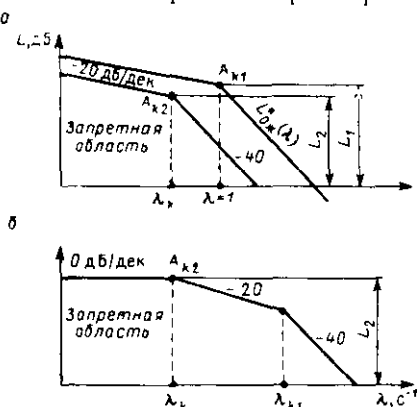


Рис. 4.15.

САУ. Положение желаемой ЛАХ  $L_{0ж}^*$  на логарифмической плоскости фиксируется контрольными точками  $A_{k1}$  и  $A_{k2}$  (рис. 4.15, а). Первую контрольную точку  $A_{k1}$  находят с учетом допустимых статической или скоростной ошибок. Ее ордината  $L_1 = 20 \lg K$ , где  $K$  — передаточный коэффициент

разомкнутой системы. Абсциссу точки откладывают на частоте  $\lambda=1$ , так как ордината первой (низкочастотной) асимптоты ЛАХ разомкнутой САУ любого порядка астатизма на частоте  $\lambda=1$  равна передаточному коэффициенту разомкнутой системы. Вторую контрольную точку  $A_{k2}$  строят с учетом требований динамической точности. Для ее построения можно воспользоваться формулами

$$\lambda_k = \epsilon_{\max} \Omega_{\max}; \quad (4.37)$$

$$L_2(\lambda_k) = 20 \lg |W^*(j\lambda)| = 20 \lg(x_{\max}/e_{\max}), \quad (4.38)$$

где  $\epsilon_{\max}$ ,  $\Omega_{\max}$  — максимальные значения ускорения и скорости воздействия  $x(t)$  (см. рис. 4.12);  $W^*(j\lambda)$  — частотная передаточная функция разомкнутой САУ при псевдо частоте  $\lambda = \lambda_k$ ;  $x_{\max}$  — амплитуда гармонического входного воздействия, изменяющегося по зависимости  $x(t) = x_{\max}(\sin \lambda_k t + \varphi_k)$ , в которой  $\varphi_k$  — начальная фаза;  $e_{\max}$  — максимальное значение ошибки САУ.

Область, находящаяся ниже контрольной точки  $A_{k2}$  и двух прямых с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек, является запретной областью для ЛАХ астатических цифровых САУ (см. рис. 4.15, а). Если система работает со скоростью и ускорением не более  $\Omega_{\max}$  и  $\epsilon_{\max}$  соответственно, то ошибка системы будет не больше  $\epsilon_{\max}$ . При этом вся запретная область должна находиться левее псевдо частоты  $\lambda = 1/T$ .

После нанесения на логарифмическую плоскость контрольных точек  $A_{k1}$  и  $A_{k2}$  строят желаемые амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой САУ. Первая (низкочастотная) асимптота желаемой ЛАХ должна проходить не ниже первой контрольной точки; в то же время вторая контрольная точка не должна быть выше амплитудной характеристики.

Для статических цифровых САУ запретная область также находится ниже контрольной точки  $A_{k2}$ , но ограничивается тремя отрезками прямых линий (см. рис. 4.15, б): слева от точки  $A_{k2}$  прямой с наклоном  $0$  дБ/дек, справа от точки  $A_{k2}$  отрезком прямой с наклоном  $-20$  дБ/дек, которая, в свою очередь, ограничивается при частоте  $A_{k1}$  отрезком прямой с наклоном  $-40$  дБ/дек. В этом случае координаты точки  $A_{k2}$  рассчитываются на основе выражений  $\lambda_k = \Omega_{\max}/x_{\max}$ ;  $L_2(\lambda_k) = 20 \lg(x_{\max}/e_{\max})$ , а значение частоты  $\lambda_{k1} = \epsilon_{\max}/\Omega_{\max}$ .

В области средних частот все типовые ЛАХ имеют одинаковый наклон:  $-20$  дБ/дек. Для желаемой ЛАХ в этой области частот протяженность участка характеристики с наклоном  $-20$  дБ/дек и значение частоты среза  $\lambda_{cp} \approx \omega_{cp}$  выбираются с учетом требований к устойчивости и быстродействию САУ.

Для цифровых САУ, которые имеют типовые передаточные функции (см. далее табл. 4.5), показатель колебательности не превышает заданного значения  $M$ , если при формировании желаемой ЛАХ выполняются следующие условия:

1) для частот, меньших, чем частота среза  $\lambda_{cp} \approx \omega_{cp}$ ,

$$\sum_{k=1}^m 1/\tau_k - \sum_{i=1}^q 1/T_i \leq \lambda_{cp} (M-1) M; \quad (4.39)$$

2) для частот, больших, чем частота среза  $\lambda_{cp} \approx \omega_{cp}$ ,

$$T/2 + \tau \leq M(M+1)\lambda_{cp}. \quad (4.40)$$

Условие (4.39) полностью совпадает с аналогичными условиями для непрерывных САУ. Это объясняется тем, что в области низких частот ЛЧХ дискретных и непрерывных систем одинаковы, в то время как в области высоких частот ЛЧХ существенно различаются. Следовательно, условие (4.40) пригодно только лишь при расчете дискретных САУ.

В области высоких частот типовые ЛАХ имеют наклон 0 дБ/дек. При этом значение псевдочастоты, при которой происходит сопряжение среднечастотной ЛАХ с высокочастотной частью (см. рис. 4.13), определяется выражением

$$\lambda_{\tau} = 1/(T/2 - \tau), \quad (4.41)$$

где  $T$  — период повторения;  $\tau$  — суммарное время запаздывания. Из выражения (4.41) следует, что значение псевдочастоты  $\lambda_{\tau}$  зависит от значений  $T$  и  $T_{\Sigma}$ , которые, в свою очередь, определяются допустимыми значениями показателя колебательности  $M$  и частоты среза  $\lambda_{cp}$  из условия (4.40). Рекомендуемый показатель колебательности находится в диапазоне  $1,3 \leq M \leq 1,7$ . В тех случаях, когда САУ должна быть хорошо задемпфирована, принимают диапазон  $1,1 \leq M \leq 1,3$ . Иногда принимают  $M=1$ . При  $M > 1,7$  резко возрастает склонность САУ к колебаниям. Слишком низкие значения  $M$  приводят к трудностям при синтезе корректирующих устройств.

При использовании непрерывной коррекции для придания цифровой САУ требуемых динамических характеристик с помощью корректирующих устройств изменяют характеристики непрерывной части системы. Основные способы включения непрерывных корректирующих устройств в системы были рассмотрены ранее (см. с. 60—68 и рис. 2.34).

Тип корректирующего устройства в основном определяется удобством его технического осуществления в САУ. В некоторых цифровых системах приходится использовать одновременно несколько типов корректирующих устройств. При включении в схему цифровой САУ корректирующего устройства любого типа следует обеспечить правильное сопряжение их с остальными элементами системы, так как в противном случае действие коррекции может быть сведено на нет.

Схемы наиболее распространенных корректирующих устройств, их ЛАХ и передаточные функции были приведены в табл. 2.3.

При расчете непрерывных корректирующих устройств следует иметь в виду, что ЛЧХ цифровых САУ, построенные в функции абсолютной псевдочастоты  $\lambda$ , для частот  $\lambda > 2/T$  практически сливаются с ЛЧХ непрерывной части системы. При построении желаемых ЛЧХ непрерывной части для частот  $\lambda > 2/T$  целесообразно выбирать малые постоянные времени так, чтобы сопрягающие частоты нескорректированной и желаемой ЛЧХ непрерывной части совпадали. В этом случае корректирующее устройство получается наиболее простым. При этом необходимо, чтобы суммарное запаздывание ( $\tau_{\Sigma}$ ) в желаемой непрерывной части системы не превосходило максимально допустимой величины, определяемой выражением (4.40). В противном случае потребуется уменьшить период повторения  $T$  или ввести дополнительные корректирующие устройства в области высоких частот для компенсации малых постоянных времени. В области низких частот  $\lambda < 2/T$  методы коррекции, применяемые для непрерывных САУ, практически являются точными и для определения непрерывных корректирующих устройств цифровых САУ.

#### 4.4. РАСЧЕТ ДИСКРЕТНОЙ КОРРЕКЦИИ МЕТОДОМ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Дискретные корректирующие устройства могут быть реализованы либо на ЦВМ, включенной в контур управления системы, либо на дискретных фильтрах, построенных на различных ячейках памяти. Способы включения дискретных корректирующих устройств в цифровую САУ показаны на рис. 4.16. Они аналогичны способам включения непрерывных корректирующих устройств.

Определим выражения для передаточных функций разомкнутой цифровой САУ: 1) с последовательным дискретным корректирующим устройством, имеющим передаточную функцию  $D_{п.к}(z)$  (рис. 4.16, а):

$$W(z) = Z \{ W_1(p) W_2(p) | D_{п.к}(z) \}; \quad (4.42)$$

2) с параллельным дискретным корректирующим устройством, имеющим передаточную функцию  $D_{п}(z)$  (рис. 4.16, б):

$$W(z) = Z \{ W_1(p) W_2(p) | + D_{п}(z) Z \{ W_2(p) \} \}; \quad (4.43)$$

3) с дискретным корректирующим устройством, имеющим передаточную функцию  $D_{о.с}(z)$  и включенным в цепь обратной связи  $D_{п.к}(z)$  (рис. 4.16, в):

$$W(z) = Z \{ W_1(p) W_2(p) | / [1 + D_{о.с}(z) Z \{ W_2(p) \}] \}. \quad (4.44)$$

Любое корректирующее устройство одного типа может быть замещено эквивалентными устройствами другого типа. Форму-

лы перехода получают аналогично выражениям (4.42) и (4.43) из выражений (4.42) — (4.44).

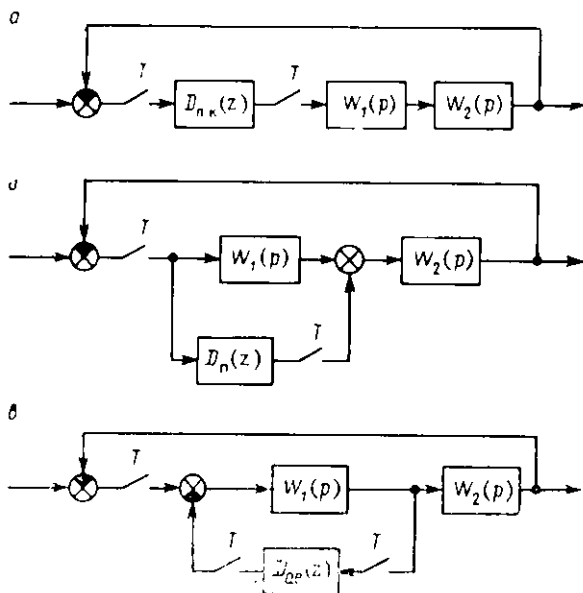


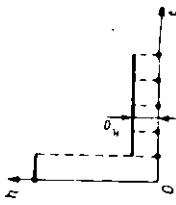
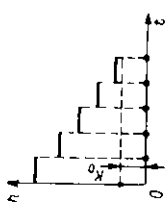
Рис. 4.16.

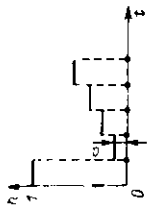
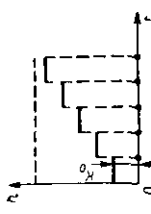
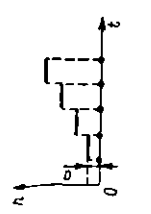
Расчет дискретных корректирующих устройств цифровых САУ методом ЛЧХ совпадает с методикой расчета последовательного корректирующего устройства непрерывных САУ. Определение ЛАХ дискретного корректирующего устройства осуществляется как разность между желаемой ЛАХ  $L_{ж}^*(\lambda)$  и ЛАХ нескорректированной системы  $L_0^*(\lambda)$ , т. е.

$$L_{п.к}^*(\lambda) = L_{ж}^*(\lambda) - L_0^*(\lambda).$$

По характеристике дискретного последовательного корректирующего устройства определяют его частотную передаточную функцию  $W_{п.к}^*(j\lambda)$ . После подстановки  $j\lambda = 2\omega/T$  получают передаточную функцию  $W_{п.к}^*(2\omega/T)$ , а после замены  $\omega = (z-1)/(z+1)$  по формуле (4.20) — передаточную функцию  $W_{п.к}(z) = D_{п.к}(z)$ . При этом следует учитывать присущие цифровым САУ особенности, которые накладывают некоторые ограничения на вид желаемой передаточной функции замкнутой системы  $H_{ж}(z)$ , а именно: необходимо, чтобы эта передаточная функция содержала в качестве своих нулей все нули передаточной функции  $W_0(z) = Z\{W_1(p)W_2(p)\}$ , модуль которых равен или больше единицы. Кроме того, необходимо, чтобы желаемая передаточ-

Таблица 4.5

| Тип звена                                      | Передаточная функция<br>непрерывного аналога     | Дискретная передаточная<br>функция                                              |  | Частотная передаточная функция                                                                                                              | Переходная характери-<br>стика                                                   |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                |                                                  | 3                                                                               |  | 4                                                                                                                                           | 5                                                                                |
| Дифференци-<br>рующее                          | $W(p) = 1 + T_1 p$                               | $W(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z-a}{z},$<br>$0 \leq a \leq 1$                      |  | $W(j\lambda) = K_0 \frac{1+j\lambda\tau}{1+j\lambda T/2},$<br>$K_0 = 1;$<br>$\tau = (1+a)(T/2)/(1-a)$                                       |  |
|                                                |                                                  |                                                                                 |  |                                                                                                                                             |                                                                                  |
| Аналог<br>пассивного<br>дифференци-<br>рующего | $W(p) = \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p},$<br>$T_1 > T_2$ | $W(z) = \frac{1-b}{1-a} \frac{z-a}{z-b},$<br>$0 < a < 1; 0 < b < 1;$<br>$a > b$ |  | $W(j\lambda) = K_0 \frac{1+j\lambda\tau_1}{1+j\lambda\tau_2},$<br>$K_0 = 1;$<br>$\tau_1 = (1+a)(T/2)/(1-a);$<br>$\tau_2 = (1+b)(T/2)/(1-b)$ |  |
|                                                |                                                  |                                                                                 |  |                                                                                                                                             |                                                                                  |

| 1                                | 2                                               | 3                                                                 | 4                                                                                                                        | 5                                                                                |
|----------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Интегрирующее                    | $W(p) \quad Kp = 1 \quad Tp$                    | $W(z) = \frac{a}{z-1}$                                            | $W(j\lambda) = \frac{a}{T} \frac{1-j\lambda T/2}{j\lambda}$                                                              |  |
| Аналог пассивного интегрирующего | $W(p) = \frac{1+T_2p}{1+T_1p}, \quad T_1 > T_2$ | $W(z) = \frac{(1+a)z+1-a}{(1+b)z+1-b}, \quad a > 1; b > 1; a < b$ | $W(j\lambda) = K_0 \frac{1+j\lambda\tau_2}{1+j\lambda\tau_1},$<br>$\tau_1 = bT/2; \tau_2 = aT/2;$<br>$K_0 = (1+a)/(1+b)$ |  |
| Интерполирующе-интегрирующего    | $W(p) = 1 + 1/T_1 p + T_2 p$                    | $W(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{z-1}{z}, \quad a < 1$               | $W(j\lambda) = \frac{a + (1-a/4)T^2(j\lambda)^2}{j\lambda T(1+j\lambda T/2)}$                                            |  |

ная функция ошибки замкнутой системы  $H_{\text{ек}}(z)$  содержала в качестве нулей все полюсы передаточной функции  $W_0(z)$ , модуль которых равен единице или больше единицы. Невыполнение этих условий делает цифровую САУ «негрубой» и вызывает ее неустойчивость.

В табл. 4.5 представлены некоторые виды дискретных корректирующих устройств, которые можно реализовать на ЦВМ или с помощью дискретных фильтров. Более полные сведения о дискретных корректирующих устройствах содержатся в литературе.

В общем случае передаточную функцию корректирующего устройства можно представить в виде

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}}, \quad (4.45)$$

а соответствующее этой передаточной функции разностное уравнение

$$\begin{aligned} & b_0 e[nT] + b_1 e[nT - T] + \dots + b_k e[nT - kT] = \\ & = g[nT] + a_1 g[nT - T] + \dots + a_k g[nT - kT], \end{aligned} \quad (4.46)$$

где  $e[nT]$ ,  $g[nT]$  — решетчатые функции входного и выходного сигналов звена цифровой САУ соответственно, описываемого передаточной функцией  $D(z)$ . Для практической реализации дробно-рациональной передаточной функции  $D(z)$  необходимо, чтобы степень знаменателя была выше степени числителя.

## Глава 5

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Синтез любой САУ выполняется на основе задачи управления, которая определяет основную цель при разработке системы управления. Математическая формулировка цели управления (заданная точность, быстродействие и т. д.) и называется *задачей управления*. Часто полученная САУ не выполняет поставленную задачу с наилучшим результатом. Система, которая обеспечивает наилучшие показатели качества при заданных реальных условиях работы и ограничениях, называется *оптимальной*. Например, система может максимально точно выполнять возложенную на нее задачу управления конкретным технологическим оборудованием; может осуществлять наиболее быстрые переходы из одного заданного состояния в другое или вообще из любого начального состояния в требуемое при ограниченной мощности; может потреблять минимальное количество энергии для выполнения задачи управления при заданных внешних условиях и т. д.

**Критерии оптимальности.** При оптимизации САУ в каждом отдельном случае должен быть правильно выбран критерий оптимальности, выраженный в математической форме. Обычно для определения его требуется интегрировать во времени какую-либо функцию, которая зависит от текущего состояния объекта, т. е. *критерий оптимальности является функционалом*, значение которого определяется заданием функции. Функционал, как правило, составляется так, чтобы условием оптимальности системы как в случае минимума, так и в случае максимума требуемого показателя качества системы был именно минимум этого функционала, а не его максимум.

В общем случае функционал зависит от координат выходного сигнала  $x_i(t)$ , управления  $u_i(t)$  и возмущающих воздействий  $f_i(t)$  и может быть представлен в виде интеграла

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; f_1, f_2, \dots, f_k) dt$$

или в векторной форме

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(X, U, E) dt,$$

где  $X, U, F$  — векторы координат выходного сигнала, управления и возмущений соответственно;  $[t_1, t_2]$  — интервал времени.

Критерий оптимальности часто задается в виде интегрального квадратичного функционала от нескольких функций:

$$J = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n c_i^2 x_i^2(t) dt \quad \text{или} \quad J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n c_i^2 x_i^2(t) dt,$$

где  $c_i$  и  $x_i$  — весовые коэффициенты функций;  $t$  — время (или любая другая физическая независимая переменная).

Функционал, минимум которого необходимо найти, может представлять собой любую желаемую комбинацию различных качеств проектируемой САУ. Выбор критерия оптимальности является творческой инженерной задачей, которая может быть решена на основе всестороннего изучения управляемого технологического оборудования. Трудности выбора критерия оптимальности объясняются тем, что требования, предъявляемые к работе САУ, часто оказываются противоречивыми. Например, высокоточные САУ имеют ограниченное быстродействие, а быстродействующие — ограниченную точность. Кроме того, сложность решения задачи зависит от сложности принятого критерия. Если показатель качества соответствует большому количеству требований к САУ, то синтез ее возможен лишь численными методами для какой-либо частной задачи. Для нахождения решения в явной форме должны быть использованы простые показатели качества, которые не отразят многих требований.

Рассмотрим некоторые типы критерия оптимальности в зависимости от их принадлежности к переходному или установившемуся режимам работы одномерных и многомерных САУ. Для достижения *максимальной точности* работы САУ в постоянном режиме можно пользоваться критерием минимальной ошибки, который определяется интегралом

$$J = \int_0^T x^2(t) dt, \quad (5.1)$$

где  $x(t)$  — отклонения управляемого параметра от заданного значения;  $[0, T]$  — рассматриваемый интервал времени. Минимизация функционала физически означает ограничение суммар-

ной ошибки отклонения выходной координаты САУ и длительности ее существования. Для обеспечения максимальной точности работы САУ при случайных воздействиях критерием оптимальности может служить среднеквадратичная ошибка системы:

$$\overline{J} = \overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt = \min,$$

где  $\varepsilon(t)$  — реализация стационарного случайного процесса, которая используется при нахождении оптимальной передаточной функции САУ и ее параметров с учетом условия минимума среднеквадратичной ошибки. Для обеспечения максимальной точности работы в динамическом режиме при влиянии конкретных возмущений  $f(t)$  критерий оптимальности может выражаться интегралом

$$J = \int_0^T g(t) f(t - \lambda) dt, \quad (5.2)$$

где  $g(t)$  — импульсная переходная функция. Если функционал (5.2) равен нулю, то обеспечивается инвариантность САУ к возмущающим воздействиям.

Для достижения *максимального быстродействия* САУ можно воспользоваться критерием минимальности времени переходного процесса при заданных ограничениях для координат:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1 = \min.$$

Теория оптимальных по быстродействию систем в настоящее время разработана наиболее полно. Результаты ее можно распространить и на другие критерии оптимальности.

Создание оптимальной САУ по условиям инвариантности координаты  $x_i(t)$  к функции внешнего воздействия  $f_k(t)$  можно осуществить, минимизируя функционал, называемый критерием инвариантности, в виде

$$J = \int_0^T x_i^2(t + \tau) f_k^2(t) dt. \quad (5.3)$$

При наличии многомерного объекта для обеспечения независимости координат  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  друг от друга используется критерий автономности, который характеризует соответствующие взаимные корреляционные функции:

$$J = \int_0^T x_i^2(t + \tau) x_j^2(t) dt. \quad (5.4)$$

Последние две оптимальные системы реализуются при равенстве нулю функционалов (5.3) и (5.4). При оптимизации САУ по какому-либо параметру качества необходимо учитывать реальные ограничения других свойств системы в виде заданной мощности исполнительных элементов, заданных пределов изменения параметров технологического оборудования и т. д. Ограничения рассматриваются совместно с уравнениями динамики САУ.

Оптимизацию САУ можно выполнить двумя способами. В первом случае известна структура системы, на основании которой находятся оптимальные значения ее параметров, обеспечивающих экстремальное значение заданного показателя качества. Во втором случае структура САУ неизвестна и ее требуется найти, а также и параметры, чтобы система была оптимальна для принятого критерия качества. В большин-

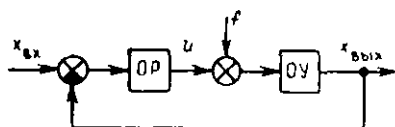


Рис. 5.1.

стве случаев на практике задан объект управления (ОУ). Задача синтеза сводится к определению структуры и параметров оптимального регулятора (ОР) (рис. 5.1, где  $x_{вх}$  и  $x_{вых}$  — координаты входного и выходного сигналов соответственно;  $U$  — сигнал управления;  $f$  — возмущающее воздействие).

**Основные положения оптимального синтеза.** Стремление проектировщиков при синтезе САУ удовлетворить многие требования выдвинуло проблему оптимального синтеза, при котором все необходимые требования могут быть выполнены простейшим образом. В качестве критерия простоты обычно выбирается функционал в частотной области:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^{2\nu} |W(j\omega)|^2 d\omega, \quad (5.5)$$

где  $\nu$  — степень астатизма системы;  $W(j\omega)$  — частотная передаточная функция разомкнутого канала управления. Этот функционал определяет полосу пропускания рабочих частот САУ. Минимизация значения полосы пропускания при выполнении качественных требований по точности, быстродействию, запасу устойчивости по фазе и амплитуде упрощает реализацию САУ. Функционал (5.5) является критерием оптимальности синтеза САУ по заданным качественным показателям.

Если необходимо обеспечить наилучшую работу САУ в наименее благоприятных условиях, то используются критерии оптимальности, называемые *минимаксными*, например получение минимального значения максимального отклонения (перерегулирования) управляемой переменной от заданной функции во времени.

При синтезе оптимальных САУ обычно приходится принимать и учитывать разнообразные ограничения. Координаты движения системы всегда ограничены по модулю: естественно и условно. *Естественные* ограничения координат  $|x_i| \leq X_{i\max}$  обусловлены принципом работы объекта. Например, частота вращения выходного вала исполнительного электродвигателя в двигательном режиме не может быть больше частоты вращения холостого хода; выходные сигналы усилительных устройств также ограничены из-за явления насыщения. *Условные ограничения координат* вводятся преднамеренно: ограничение сигнала управления обуславливается ограничением всех координат системы. Примером может служить ограниченное мощности источника питания.

Кроме изложенных, на практике могут встретиться и другие случаи. В зависимости от оптимизации режима работы объекта управления рассматриваются уравнения статики и динамики объекта, которые являются его математической моделью. В статических режимах работы объекта управления все координаты, характеризующие этот режим, будут постоянными во времени. Простейшие объекты с одним входом и выходом описываются уравнением статики

$$X_{\text{вых}} = f(X_{\text{вх}}). \quad (5.6)$$

Для линейных статических характеристик уравнение (5.6) имеет вид  $X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}$  ( $k$  — коэффициент пропорциональности). Если же однозначная статическая характеристика нелинейна и ее можно выразить аналитически, то уравнение статики может иметь, например, одну из следующих форм:

$$X_{\text{вых}} = k_0 + k_1 X_{\text{вх}} + k_2 X_{\text{вх}}^2; \quad X_{\text{вых}} = k \cos X_{\text{вх}}; \quad X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}^\alpha,$$

где  $k, k_0, k_1, k_2$  — некоторые постоянные коэффициенты;  $\alpha$  — постоянная величина. Для объектов управления с несколькими входами и одним выходом уравнение статики может быть линейным:

$$X_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^n k_i X_{\text{вх}i}$$

либо нелинейным:

$$X_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^n k_i X_{\text{вх}i} + \sum_{i,j=1}^n k_{ij} X_{\text{вх}i} X_{\text{вх}j} \quad (5.7)$$

( $k_i, k_{ij}$  — некоторые постоянные коэффициенты).

Для объектов управления нелинейных, многомерных, а также систем с несколькими входами и выходами уравнение статики при наличии линейных и квадратических зависимостей будет иметь следующий вид: в скалярной форме

$$X_{\text{вых } i} = \sum_{j=1}^n k_{ij} X_{\text{вх } j} + k_{ii} X_{\text{вх } i}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

в векторной форме

$$X_{\text{вых}} = K X_{\text{вх}} + L_{X \text{ вх}} K_{\Pi} X_{\text{вх}},$$

где  $k_{ij}$  и  $k_{ii}$  — коэффициенты пропорциональности, характеризующие линейные зависимости  $i$ -го выхода,  $j$ -го входа и нелинейные зависимости  $i$ -го выхода,  $i$ -го входа соответственно;

$$X_{\text{вых}} = \begin{bmatrix} X_{\text{вых } 1} \\ X_{\text{вых } 2} \\ \dots \\ X_{\text{вых } n} \end{bmatrix}; \quad X_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} X_{\text{вх } 1} \\ X_{\text{вх } 2} \\ \dots \\ X_{\text{вх } n} \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix};$$

$$K_{\Pi} = \begin{bmatrix} k_{\Pi 11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{\Pi 22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{\Pi nn} \end{bmatrix}; \quad L_{X \text{ вх}} = \begin{bmatrix} x_{\text{вх } 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{\text{вх } 2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{\text{вх } n} \end{bmatrix}.$$

Если  $k_{\Pi} = 0$ , то получим уравнение статики многомерного линейного объекта управления: в скалярной форме

$$X_{\text{вых } i} = \sum_{j=1}^n k_{ij} X_{\text{вх } j} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

в векторной форме

$$X_{\text{вых}} = K X_{\text{вх}}.$$

При  $k_{\Pi} = 0$  уравнение статики нелинейного объекта будет характеризоваться только квадратическими зависимостями выходных и входных сигналов: в скалярной форме

$$X_{\text{вых } i} = k_{\Pi ij} X_{\text{вх } i}^2;$$

в векторной форме

$$X_{\text{вых}} = L_{X \text{ вх}} k_{\Pi} X_{\text{вх}}.$$

Рассмотрим уравнения динамики объектов управления. В простейшем случае, когда объект управления имеет один вход и один выход, его динамика характеризуется дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка:

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}; u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(m)}) = 0, \quad (5.8)$$

где  $x, u$  — сигналы выхода и входа соответственно;  $m \leq n$ .

При поступлении на вход объекта управления за время  $[t_0, t_1]$  сигнала  $u(t) = u[t_0, t_1]$  на выходе его будет наблюдаться сигнал  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Выходной сигнал будет зависеть не только от входного, но и от начальных условий. Начальное

значение вектора выходной координаты соответствует начальному состоянию объекта управления  $X(t_0)$  в момент  $t_0$ .

Обозначим через  $X(t_1)$  состояние детерминированного объекта управления в момент  $t_1$ . Множество состояний этого объекта назовем *пространством состояний*. Величина  $X(t)$  будет отражать состояние объекта управления при выполнении следующих условий: во-первых, выходной сигнал  $x(t)$  будет однозначной функцией входного сигнала  $u(t)$  и начального состояния объекта управления  $X(t_0)$ , во-вторых, любым значениям  $u(t_i)$  и  $x(t_i)$  в момент  $t_i$  будет соответствовать некоторое состояние  $X(t_i)$ , которое принадлежит пространству состояния объекта управления, в-третьих, некоторому состоянию  $X(t_i)$  будут соответствовать значения  $u[t_i, t]$  и  $x[t_i, t]$ . Тогда уравнение (5.8) динамики объекта, представляющее математическую модель общего вида, можно выразить эквивалентной системой уравнений первого порядка, определяющей математическую модель в виде системы нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u); \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u); \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u).\end{aligned}\tag{5.9}$$

Если уравнения линейные и имеют постоянные коэффициенты, то

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t); \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t).\end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно представить в виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + b_iu(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)\tag{5.10}$$

или в векторной форме

$$\dot{X} = AX + Bu(t),\tag{5.11}$$

$$\text{где } \dot{X} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}; \quad X = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix};$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix};$$

$u(t)$  — скалярная величина для объекта управления с одним регулирующим органом.

Если объект управления имеет несколько регулирующих органов, то уравнение динамики в векторной форме

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (5.12)$$

где  $B$  — матрица размерностью  $(n \times r)$ ;  $u$  — вектор, состоящий из  $r$  уравнений,  $u(t) = \|u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\|^T$  ( $T$  — знак транспонирования, т. е. перестановки элементов матрицы в столбец).

На практике не всегда удобно использовать уравнения динамики (5.10) — (5.12), поскольку коэффициенты  $a_{ij}$  имеют в большинстве случаев сложные зависимости от коэффициентов исходного уравнения (5.8). Кроме того, при скачкообразных функциях  $u_i(t)$  производные координаты  $x(t)$  претерпевают разрыв и изображающая точка будет совершать скачки в фазовом пространстве. Поэтому математически более рационально представить модель объекта управления либо в виде нормализованных уравнений состояния, выраженных через фазовые координаты и коэффициенты  $a_i$ , либо в канонической форме уравнений, либо иначе. Независимо от принятой формы записи математической модели объекта управления она должна наилучшим образом отражать статические и динамические свойства объекта, а также быть удобной для решения задачи оптимального синтеза САУ.

Если для реальных объектов управления уравнения неизвестны или же их составление чрезвычайно сложно, то для определения математической модели используют методы идентификации, которые основаны на анализе характеристик объектов управления, полученных в результате эксперимента. При решении задачи идентификации объекта управления определяют степень и форму взаимодействия между входными и выходными переменными; качественно оценивают степень идентичности модели объекту-оригиналу и нелинейность получения линеаризованной модели с достаточной точностью, а также стационарность и эргодичность исследуемых случайных процессов. Для простейших одномерных объектов ответ на некоторые из этих вопросов может быть получен на основе физического, технологического или другого анализа.

Наиболее совершенным средством математического описания объекта управления являются экспериментально-статистические методы, которые основаны на разработке экспериментального материала, полученного непосредственно на действующем объекте. При этом существуют два способа накопления исходного статистического материала: пассивный и активный эксперименты. *Пассивный* эксперимент основан на регистрации контролируемых параметров процесса в режиме нормальной работы объекта без внесения каких-либо преднамеренных воз-

мушений. *Активный* эксперимент основан на использовании искусственных возмущений, которые вводятся в объект управления по заранее спланированной программе.

Для обработки экспериментальных данных используют аппарат математической статистики (регрессионный и дисперсионный анализы), позволяющий получить простой вид математических описаний. Применение статистических методов требует большого объема вычислений, но зато позволяет решить задачу идентификации даже в тех случаях, когда обычные детерминистические методы непригодны. Рассмотрим два основных метода идентификации статических характеристик одномерных и многомерных объектов управления в результате пассивного эксперимента.

**Определение статических характеристик объекта по плотности вероятности.** Этот метод может быть использован при исследовании безынерционных одномерных объектов. При пассивном эксперименте одновременно наблюдают и регистрируют ряд значений входной  $x(t_i)$  и выходной  $y(t_i)$  переменных объекта. В процессе нормальной эксплуатации объекта эти переменные изменяются случайным образом. Поэтому мгновенные значения их можно рассматривать как реализации случайных величин  $X$  и  $Y$ . Связь между реализациями  $x$  и  $y$  также имеет случайный характер. Из пассивного эксперимента удобнее определять не  $y=f(x)$ , а оператор, характеризующий математическую зависимость между двумя функциями, в данном случае — преобразующий характеристику  $x(t_i)$  случайной величины  $X$  в соответствующую характеристику  $y(t_i)$  случайной величины  $Y$ . Тогда, используя найденный оператор, можно по заданной характеристике входной переменной определить характеристику выходной.

Одной из достаточно полных вероятностных статических характеристик объекта является кривая условной плотности вероятности  $P(y/x)$ . Для оценки условной вероятности  $y(p(x/y))$  появления  $y$  при данном  $x$  и  $p(y/x)$ , а также появления  $x$  при данном  $y$  можно воспользоваться следующими формулами:

$$p(x/y) = p(y, x) p(y); \quad p(y/x) = p(y, x) p(x).$$

Поскольку плотность вероятности  $p(x_1)$  есть вероятность того, что данная величина  $x$  находится в интервале  $x_1+dx$ , то принимаем найденные значения  $p(x/y)$  и  $p(y/x)$  за оценки плотности вероятностей  $P(x/y)$  и  $P(y/x)$  для значений  $x$  и  $y$ , которые соответствуют середине рассматриваемого интервала. Обычно условные плотности вероятности  $P(y/x)$  принимают за полные статические характеристики объекта управления. Эти характеристики изображают в пространстве координат  $[x, y, P(y/x)]$  (рис. 5.2). Они позволяют определить вероятностную статическую характеристику объекта управления по максимальным значе-

ниям условной плотности вероятности (например, на рис. 5.2 для точки  $A$  определим  $X_A$  и  $Y_A$ ). В результате найдем наиболее вероятные значения  $y$  при заданных значениях  $x$ , которые соответствуют вероятностной статической характеристике объекта  $y=f(x)$ .

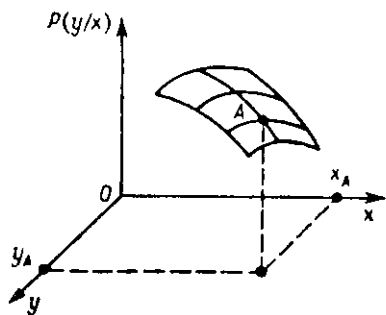


Рис. 5.2.

При исследовании сложных многомерных объектов графическая интерпретация статистических характеристик становится затруднительной из-за повышения размерности пространства переменных. В этом случае используют наиболее удобный и наглядный математический аппарат корреляционного и регрессионного анализов.

**Определение статических характеристик объекта методом корреляционного анализа.** На практике требуется задание начального условия математического ожидания случайной выходной переменной  $Y$  относительно случайной входной переменной  $X$ :

$$M[Y/X] = \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — некоторая функция, связывающая среднее значение величины  $Y$  относительно случайной величины  $X$  с каждым данным значением  $x$ .

Для одномерного объекта наиболее распространенным видом функции  $\varphi(x)$  является линейная регрессия

$$M[Y, X] = a_0 + a_1 x,$$

где  $a_0, a_1$  — коэффициенты регрессии, рассчитываемые через математические ожидания  $M(Y)$ ,  $M[X]$ , среднеквадратичные отклонения  $\sigma_y, \sigma_x$  и коэффициент корреляции  $\rho_{yx}$  величин  $y$  и  $x$  как

$$a_0 = M[Y] - a_1 M[X]; \quad a_1 = \rho_{yx} \sigma_y / \sigma_x.$$

Уравнение и коэффициенты регрессии можно получить в результате обработки данных пассивного эксперимента. Предположим, что в результате эксперимента получено поле корреляции (рис. 5.3, а). Разбив весь диапазон изменения входной переменной  $x$  на ряд равных интервалов, отнесем к середине каждого интервала  $x_i$  все точки, находящиеся в нем. Получим трансформированное поле корреляции (рис. 5.3, б). Затем подсчитаем полученные экспериментально частные средние арифметические  $y_i$  для каждого значения  $x_i$  по формуле

$$\bar{y}_{\text{эксп } i} = \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik} / n_i,$$

где  $n_i$  — число точек, оказавшихся в интервале. При этом суммарное число точек на всех интервалах равно числу измерений, т. е.  $\sum n_i = N$ . Последовательно соединяя линией точки, определяемые величинами

$\bar{y}_{\text{эксп } i}$ , получим эмпирическую линию регрессии  $y$  по  $\bar{y}_{\text{эксп } i} = f(x)$  (рис. 5.3, а). Эта линия показывает изменение  $y$  в функции от  $x$ . Чем большее число измерений, тем точнее отражается закономерность полученной эмпирической линии регрессии. Предельное положение, к которому эта линия стремится при  $N \rightarrow \infty$ , называется *предельной теоретической линией регрессии*.

Задачами корреляционного анализа являются определение линии регрессии при конечном числе измерений и расчет коэффициентов регрессии  $a_0$  и  $a_1$ , например способом наименьших квадратов. При нормальном законе распределения выходного сигнала более точные значения коэффициентов уравнения линейной регрессии можно получить при выполнении условия

$$\Delta = \sum_{i=1}^N [\bar{y}_{\text{эксп } i} - \bar{y}_{\text{теор } i}]^2 =$$

$= \min,$

т. е. сумма квадратов отклонений экспериментальных значений ( $\bar{y}_{\text{эксп } i}$ ) и теоретических

( $\bar{y}_{\text{теор } i}$ ) должна быть наименьшей. Из графика вероятностной статической характеристики объекта управления (см. рис. 5.3, в), которая получена методом корреляционного анализа:  $y_{\text{теор}} = a_0 + a_1 x$ , видно, что  $a_0 = y_{\text{теор}}(0)$  и  $a_1 = \tan \alpha$ .

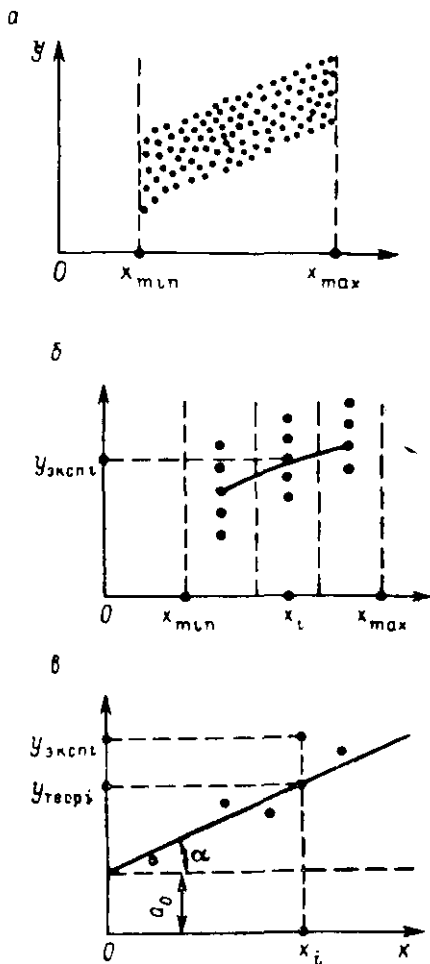


Рис. 5.3.

Рассмотренный метод справедлив и для многомерных объектов управления, у которых уравнение линейной регрессии

$$\bar{y}_{\text{теор}} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (5.13)$$

где  $x_i$  — независимые входные переменные объекта управления.

Для множественной корреляции рассматривают обычно не линию регрессии, а плотность или гиперплотность регрессии. Коэффициенты уравнения (5.13) можно определить как

$$a_i = \beta_j \sigma_y / \sigma_{x_j}, \quad a_0 = M[Y] - \sum_{j=1}^n a_j M[\bar{x}_j],$$

где  $\beta_j$  — коэффициенты стандартизированного уравнения регрессии;  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{x_i}$  — среднеквадратичные значения отклонений переменных;  $M[Y]$ ,  $M[\bar{x}_j]$  — математические ожидания средних значений переменных  $Y$  и  $\bar{x}_j$ .

Для оценки достоверности связи переменных на входе и выходе устройства вводится коэффициент множественной корреляции ( $R$ ), значение которого изменяется от единицы до нуля. Если  $R=1$ , то связь между переменными  $y$  и  $x$  функциональна и определяет вероятностную статическую характеристику многомерного объекта. Если  $R=0$ , то корреляционная зависимость между переменными отсутствует. Следовательно, чем выше значение  $R$ , тем точнее по значениям  $x_{ij}$  можно рассчитать  $y$ . Указанное изменение  $R$  можно объяснить либо тем, что выбранная форма уравнения регрессии (5.13) не учитывает всех реальных факторов и всех входных переменных, либо действительная зависимость является нелинейной и существенно отличается от выбранной линейной регрессии (5.13). В последнем случае следует использовать уравнение нелинейной регрессии, например, вида

$$\bar{y}_{\text{теор}} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Достоверность полученной вероятностной статической математической модели объекта управления зависит от организации и методики проведения эксперимента.

В настоящее время существует большое количество методов экспериментального определения динамических характеристик объектов управления. В качестве динамических характеристик линейных объектов с постоянными параметрами можно рассматривать частотные характеристики, импульсные переходные функции  $g(t)$ , передаточные функции и т. д.

Метод экспериментального определения частотных характеристик может быть использован для обработки данных активного и пассивного экспериментов. В первом случае на вход

объекта управления подается дополнительное воздействие в виде гармонического сигнала

$$x(t) = X_0 \sin \omega t,$$

при котором выходной сигнал линейного объекта также будет гармоническим:

$$y(t) = X_0 A(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)], \quad (5.14)$$

где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — амплитудная и фазовая частотные характеристики объекта управления. Из уравнения (5.14) после известных математических преобразований можно получить выражения, определяющие вещественную  $P(\omega)$  и мнимую  $Q(\omega)$  частотные характеристики объекта:

$$P(\omega) = \frac{2A(\omega)}{T} \cos \varphi(\omega) \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt;$$

$$Q(\omega) = \frac{2A(\omega)}{T} \sin \varphi(\omega) \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt.$$

В настоящее время существуют методы экспериментального определения частотных характеристик с помощью специальных приборов. По виду полученных частотных характеристик можно определить выражения частотных функций объекта управления.

**Методы идентификации.** Активный эксперимент может быть невозможен в реальных условиях функционирования объекта, так как подаваемые на вход гармонические сигналы влияют на режим его работы. Поэтому частотные характеристики можно рассчитать по сигналам, которые обусловлены в системе случайными помехами. Это приведет к обработке результатов уже пассивного эксперимента. Например, на входе объекта имеется помеха в виде стационарного случайного процесса  $x(t)$ , математическое ожидание которого равно нулю. Тогда на выходе объекта будет также случайный процесс  $y(t)$ . Если эти случайные процессы — стационарные, то для расчета частотной функции объекта можно использовать уравнение Винера — Хопфа:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \lambda) g(\lambda) d\lambda, \quad (5.15)$$

где  $R_{xy}$  — взаимная корреляционная функция между входным и выходным сигналами;  $R_x(\tau)$  — корреляционная функция входного сигнала;  $g(\lambda)$  — импульсная функция. Используя преобразование Фурье, получим

$$S_{xy}(\omega) = W_0(j\omega) S_x(\omega), \quad (5.16)$$

где  $S_{xy}(\omega)$  — взаимная спектральная плотность между выходным и входным сигналами;  $W_0(j\omega)$  — частотная функция объекта управления;  $S_x(\omega)$  — спектральная плотность входного сигнала. Из уравнения (5.16) следует, что

$$W_0(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = S_{xy}(\omega) / S_x(\omega). \quad (5.17)$$

В данном случае основной задачей идентификации объекта управления является экспериментальное определение спектральных плотностей и аппроксимации полученной частотной функции объекта по формуле (5.17).

Другой метод экспериментального определения импульсной переходной функции основан на том, что *при подаче на вход объекта импульса с малой длительностью, близкого к дельта-функции, получим выходной сигнал в виде  $g(t)$* :

$$y(t) \int_0^t \delta(t - \tau) g(\tau) d\tau = g(t).$$

Продолжительность импульса не должна превышать  $1/4$  от наименьших постоянных времени объекта управления. Поскольку применение дополнительных воздействий в виде импульса не всегда желательно, то на практике применяют методы определения импульсных переходных функций при произвольном входном сигнале, а также и по случайным сигналам помех, используя уравнение (5.15), но в этом случае возникает трудность предварительного определения  $R_x(\tau)$  и  $R_{xy}(\tau)$ , а также интегрирования (5.15). Поэтому для решения таких задач широко используются вычислительные машины.

Еще один метод определения передаточных функций  $W_0(p)$  при идентификации объекта управления основан на *использовании частотной функции* (5.17). Приняв  $p = j\omega$  или из выражения импульсной функции  $g(t)$ , к которому следует применять преобразование Лапласа, получим

$$W_0(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt.$$

В результате активного эксперимента при скачкообразном воздействии  $X_0(t)$  на входе объекта может быть получена переходная характеристика  $y(t)$  на его выходе, по которой можно приближенно определить выражение передаточной функции  $W_0(p)$ . Если переходную характеристику объекта привести к нормированному виду, то, сравнивая ее со стандартными нормированными характеристиками, можно определить стандартную  $W_0(p)$  и рассчитать ее коэффициенты.

Таким образом, используя методы идентификации, можно

получить математическую модель объекта управления в виде уравнений пространства состояний как в статике, так и в динамике.

При синтезе оптимальных САУ объект будет полностью управляемым, если из любого начального состояния  $X(t_0)$  его можно перевести в любое конечное состояние  $X(t)$  при помощи некоторого входного сигнала  $u(t)$  в течение конечного интервала времени  $t_0 \leq t \leq T$ . С управляемостью объекта связана задача наблюдаемости его. Объект управления будет *наблюдаемым полностью*, если возможно определение состояния  $X(0)$  по выходному сигналу  $X(t)$ , заданному на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$  при  $u(t) = 0$ . Задача наблюдения связана с определением настоящего состояния  $X(\tau)$  по данным выходных сигналов в прошлом:  $X(t)$  при  $t \leq \tau$ .

Следует отметить, что, во-первых, решать задачу синтеза оптимальной САУ по тем координатам управления  $u_i(t)$ , относительно которых модель объекта неуправляема, нецелесообразно; во-вторых, реально наблюдаемыми будут только те переменные, которые можно непосредственно измерить. Если какая-либо переменная есть функция физически наблюдаемых переменных или времени, то для ее расчета необходимы сложные вычислительные устройства, то такую переменную не считают практически наблюдаемой.

## 5.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Классификацию оптимальных САУ можно производить по разным признакам. Это обусловлено назначением САУ, сложностью их структуры, разной физической сущностью и т. д. В зависимости от выбранного критерия оптимальности САУ разделяют на следующие основные классы:

*оптимальные по точности* (критерий минимума регулируемой ошибки);

*оптимальные по быстродействию* (критерий минимума времени переходного процесса);

*оптимальные по условиям инвариантности* (критерий независимости выходных координат системы от внешних воздействий или других ее координат);

*оптимальные экстремальные* (критерий минимума отклонения показателя качества от экстремума в установившихся режимах);

*оптимальные по расходу энергии* (критерий минимума расхода энергии на выполнение управляемого процесса).

Кроме того, можно различать оптимальные САУ по характеристикам управляемых объектов, требованиям, предъявляемым к объектам, характеру информации об объекте, которая поступает в управляющее устройство.

По характеристикам управляемых объектов оптимальные си-

системы могут быть разделены на линейные и нелинейные, а также непрерывные, дискретно-непрерывные и дискретные. Входные и выходные координаты в непрерывных системах не квантованы ни по времени, ни по уровню, в дискретно-непрерывных системах квантованы по времени, но не квантованы по уровню, наконец, в дискретных системах квантованы и по времени, и по уровню. К характеристикам объекта можно отнести также характеристики возмущающего воздействия, действующего на объект из внешней среды. Возмущающие воздействия называют *аддитивными*, если они складываются с другими воздействиями, поступающими на вход объекта, и не изменяют характеристик объекта. Если же эти возмущения вызывают изменение коэффициентов уравнений объекта или их параметров, то такие возмущающие воздействия называются *параметрическими*. Возмущающие воздействия могут быть также случайными величинами или случайными процессами. В первом случае возмущения могут считаться постоянными в течение одного процесса, протекающего в САУ. Во втором случае возмущающее воздействие является случайными функциями времени, изменением которых за время одного процесса в САУ нельзя пренебречь.

По требованиям, предъявляемым к объектам, определяется конечная цель управления. В зависимости от типа критерия оптимальности системы подразделяются на несколько видов: *равномерно-оптимальные* (когда каждый отдельный процесс является оптимальным); *статистически-оптимальные* (когда невозможно реализовать наилучшие режимы работы системы в каждом отдельном процессе, а критерий оптимальности имеет статистический характер из-за наличия случайных воздействий; обычно такие системы в среднем являются наилучшими); *минимаксно-оптимальные* (когда какой-либо наилучший результат все же лучше, чем подобный результат в любой другой системе).

По характеру информации об объекте, поступающей в управляющее устройство, оптимальные САУ подразделяются на системы с *полной* и *неполной информацией*. Информация об объекте является сводной информацией о состоянии объекта, зависимости между его входными и выходными переменными, задающем и возмущающем воздействиях, цели управления (функционале, определяющем критерий оптимальности). Поскольку в реальных САУ информацию об объекте нельзя считать полной, то в ряде случаев при синтезе оптимальных систем необходимо применять *статистические методы*. Неполнота информации об объекте требует изучения его во время процесса управления для обеспечения принятого критерия оптимальности. При неполной информации САУ должна обладать свойством самонастройки (адаптивности) и учитывать изменения информации об объекте.

### 5.3. МЕТОДЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

В статическом режиме работы объекта при постоянстве внешних возмущающих воздействий ( $f_i(t) = \text{const}$ ) переменные состояния не меняются во времени ( $x_i(t) = \text{const}$ ), поэтому вектор состояния объекта неизменен во времени, т. е.  $X = \text{const}$ . Конечной целью задачи синтеза оптимальных САУ является определение сигналов управления  $u_i(t)$ , которые обеспечивают экстремальное значение критерия качества, характеризующего оптимальный режим работы объекта. При разработке САУ в статических режимах при известном аналитическом выражении статической характеристики объекта управления для определения экстремума этой характеристики используют методы дифференциального исчисления. Значение входной переменной, соответствующей экстремуму на статической характеристике объекта, является искомым оптимальным управлением.

Рассмотрим методы определения оптимальных значений входных переменных объекта, которые соответствуют экстремальным значениям функций, характеризующих оптимальный статический режим объекта.

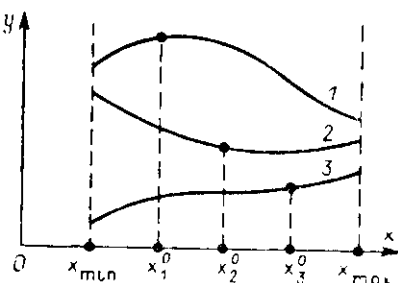


Рис. 5.4.

**Метод определения оптимального управления, соответствующего экстремуму статической характеристики объекта.** Пусть статическая характеристика объекта  $y_i = \varphi(x)$  непрерывна в интервале от  $x_{min}$  по  $x_{max}$  (рис. 5.4). Необходимым условием существования экстремума функции одной переменной является наличие производной этой функции в некоторой точке, в которой она будет равна нулю:

$$dy/dx = d\varphi(x)/dx = \dot{\varphi}_x(t) = 0. \quad (5.18)$$

Решая уравнение (5.18), находим значение входной переменной  $x^0$ , которая является оптимальным сигналом управления  $u^0 = x^0$  в статическом режиме работы САУ. На рис. 5.4 представлены три функции в виде кривых, которые удовлетворяют условию (5.18) при значениях аргумента  $x_1^0$  (для кривой 1 — точки максимума),  $x_2^0$  (для кривой 2 — точка минимума) и  $x_3^0$  (для кривой 3 — точка перегиба). Для последнего случая помимо выполнения условия (5.18) следует произвести дополнительную проверку по второй производной функции  $\varphi_x(x)$ .

При максимуме  $\ddot{\varphi}_x(x) < 0$ , а при минимуме  $\ddot{\varphi}_x(x) > 0$ . Значения функций в точках, в которых производится  $\varphi_x(x) = 0$ , в зависимости от наличия в них экстремума называются *стационарными*. Функция нескольких независимых переменных  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(\mathbf{X})$  имеет стационарное значение в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \mathbf{X}$ , где частные производные этой функции равны нулю ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\partial \varphi / \partial x_i = 0. \quad (5.19)$$

Решение системы уравнений (5.19) определяет составляющие векторы оптимального управления  $u_i^0 = x_i^0$  при наличии экстремального значения функции  $\varphi(\mathbf{X})$ . Дополнительная проверка полученного оптимального управления производится по вторым производным функции  $\varphi(\mathbf{X})$ . При большом значении  $n$  — это весьма сложная задача.

Следует обратить внимание на принципиальное различие между стационарным и экстремальными значениями функции. Для стационарного значения требуется лишь обращение в нуль первой производной, а для экстремальных значений помимо этого требуется выполнение дополнительных условий для вторых производных. При нахождении экстремума функции многих переменных вместо решения уравнений (5.19) можно воспользоваться *методом градиента*, который дает возможность выполнить расчет на ЭВМ. Суть этого метода состоит в том, что градиент функции является вектором, направленным в сторону наибольшего возрастания функции, а длина его пропорциональна скорости наибольшего возрастания функции в данной точке.

Предположим, что  $\varphi(\mathbf{X})$  непрерывна и дифференцируема по всем переменным  $x_i$ . Тогда

$$\text{grad } \varphi_0 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_0 \mathbf{i}_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_0 \mathbf{i}_2 + \dots + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)_0 \mathbf{i}_n,$$

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_n$  — орты осей в пространстве переменных;  $(\partial \varphi / \partial x_i)_0$  — частные производные функции  $\varphi(\mathbf{X})$ , вычисленные в точке, соответствующей начальным значениям переменных  $x_i^0$ .

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $x_i^0$  и имеющей направление градиента, имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \varepsilon \text{grad } \varphi_0, \quad (5.20)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки;  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точки с координатами  $x_i^0$ ;  $\varepsilon$  — параметр смещения по градиенту. Значению  $\varepsilon = 0$  соответствует начальная точка. Значениям  $\varepsilon > 0$  соответствуют точки прямой, смещенные от точки с координатами  $x_i^0$  в сторону возрастания функции  $\varphi(\mathbf{X})$ , а значениям  $\varepsilon < 0$  — в сторону убывания функции  $\varphi(\mathbf{X})$ .

Если требуется определить максимум функции, то  $\epsilon > 0$ , и новое значение радиус-вектора будет равно

$$r_1 = r_0 + \epsilon_0 \operatorname{grad} \varphi_0.$$

Значениям  $r_0$  и  $r_1$  соответствуют значения функции  $\varphi(r_0) < \varphi(r_1)$ . Производя расчеты по указанной методике, получим возрастающую последовательность

$$\varphi(r_0) < \varphi(r_1) < \varphi(r_2) < \dots < \varphi(r_n) < \dots, \quad (5.21)$$

которой отвечают последовательности  $r_0, r_1, \dots, r_n$  и  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \dots$ . Последовательность (5.21) является монотонно возрастающей и ограничена сверху пределом  $\varphi^*$ , поэтому для сколь угодно малого значения  $\epsilon$  наблюдается такое малое вещественное число  $\delta$ , что  $|\varphi(r_{n+1}) - \varphi(r_n)| < \delta$ . Из этого неравенства при достаточно большом  $n$  следует, что  $|r_{n+1} - r_n|$  будет также мало. На основании выражения (5.20) запишем

$$|r_{n+1} - r_n| = \epsilon_n |\operatorname{grad} \varphi_n| \leq \epsilon_0 |\operatorname{grad} \varphi_n|,$$

откуда, переходя к пределу при  $\varphi_n \geq 0$ , получим

$$\operatorname{grad} \varphi^* = 0. \quad (5.22)$$

Равенство (5.22) показывает, что в предельной точке получено экстремально-максимальное значение функции  $\varphi^*$ . Аналогично можно определить и минимальное значение функции. Для определения экстремального значения функции многих переменных методом градиента не требуется производить дополнительных проверок по вторым производным. Однако при этом необходимы расчеты при разных начальных значениях  $x_i^0$ , поскольку функция может иметь несколько экстремумов.

**Методы определения оптимального управления на основе множителей Лагранжа и линейного (нелинейного) программирования.** Другая группа методов определения оптимальных управлений, соответствующих экстремальному значению критерия качества статических режимов, основана на использовании методов множителей Лагранжа и линейного и нелинейного программирования. Эти методы позволяют найти экстремальное значение не только линейных функций, но и нелинейных:

$$J = F(X, u). \quad (5.23)$$

Нахождение экстремального значения связано с дополнительными условиями, определяемыми уравнениями статики объекта:

$$|\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_n)| = \Phi(X, u) = 0, \quad (5.24)$$

где  $\Phi(X, u) = \|\varphi_i(X, u)\|$  — матрица-столбец размерностью  $(n \times 1)$ .

Для определения экстремума нелинейной функции (5.23) при условиях (5.24) методом множителей Лагранжа составляет-

ся функция Лагранжа

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{u}, \lambda) = F(\mathbf{X}, \mathbf{u}) + \lambda^T \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{u}), \quad (5.25)$$

где  $\lambda^T = \|\lambda_i\|$  — вектор-строка  $(1 \times n)$ -множителей Лагранжа. Затем определяется экстремум функции (5.25), условием существования которого является равенство нулю частных производных этой функции по всем независимым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n); \\ \frac{\partial L}{\partial u_k} &= \frac{\partial F}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m); \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= \varphi_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Решение системы уравнений (5.26) позволяет найти оптимальное уравнение  $\mathbf{u}$ .

Для решения задачи оптимального управления с помощью метода программирования рассмотрим два случая. В первом задаче решается с помощью линейного программирования.

Пусть имеются система линейных уравнений статики объекта:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (5.27)$$

и линейная функция, характеризующая статический режим работы объекта, т. е. критерий качества:

$$J = \mathbf{C}\mathbf{X}. \quad (5.28)$$

Здесь  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$  — матрица условий размерностью  $m \times n$  при  $m < n$ ;  $\mathbf{X} = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^T$  — вектор размерностью  $n \times 1$ ;  $\mathbf{B} = \|b_1, b_2, \dots, b_m\|^T$  — матрица размерностью  $m \times 1$ ;  $\mathbf{C} = \|c_1, c_2, \dots, c_n\|$  — матрица размерностью  $1 \times n$ . Экстремум критерия качества (5.28) обусловлен решением системы уравнений (5.27) в виде так называемой программы оптимальных уравнений объекта в статике:  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ ; ...;  $x_n \geq 0$ . Каждому статическому режиму объекта соответствуют определенные значения матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , поэтому программа оптимальных уравнений, состоящая из набора чисел  $x_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ , которые удовлетворяют условиям (5.27) и критерию качества (5.28), будет непостоянна.

Для нахождения программы оптимального управления применяют метод последовательных улучшений этой программы, который из-за большого объема вычислений, как правило, выполняется на ЭВМ. Встречаются ситуации, когда задача линейного программирования не имеет решения, т. е. экстремальное значение критерия качества определить невозможно.

Задача определения оптимального управления может решаться с помощью нелинейного программирования, которое используется, если критерий качества  $J(\mathbf{X})$  или некоторые уравнения объекта  $f_i(\mathbf{X})$  являются нелинейными функциями координат.

Решение задач нелинейного программирования осуществляют разнообразными методами. При использовании распространенного на практике метода последовательных улучшений программы предусматривается замена полученной задачи нелинейного программирования последовательностью задач квадратического программирования.

Задачи нелинейного программирования в зависимости от типа нелинейных функций  $F(\mathbf{X})$  и  $J(\mathbf{X})$  могут иметь разную сложность. Если нелинейной функцией является критерий качества  $J(\mathbf{X})$ , а условия задачи  $F(\mathbf{X})$  линейны, то для решения задачи можно использовать *метод линейной аппроксимации*. При этом нелинейная функция  $J(\mathbf{X})$  заменяется линейной относительно новой переменной  $\mathbf{Y}$  для допустимой фиксированной точки  $\mathbf{X}_1^0 \geq 0$ , т. е.

$$J_\Delta(\mathbf{Y}) = J(\mathbf{X}_1^0) + \text{grad } J(\mathbf{X}_1^0)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1^0).$$

В результате этого нахождение экстремума нелинейной функции  $J(\mathbf{X})$  при заданных линейных ограничениях  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  и  $\mathbf{X} \geq 0$  заменяется нахождением экстремума линейной функции:

$$J_\Delta^*(\mathbf{Y}) = \text{grad } J(\mathbf{X}_1^0)^T \mathbf{Y}$$

при линейных ограничениях  $\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}$  и  $\mathbf{Y} \geq 0$ . Определяется первое приближение оптимального решения  $\mathbf{Y} \geq 0$  для принятого  $\mathbf{X}_1^0 \geq 0$ . Затем производится проверка выполнения неравенства

$$\text{grad } J(\mathbf{X}_1^0)^T (\mathbf{Y}_1^0 - \mathbf{X}_1^0) \leq 0, \quad (5.29)$$

при удовлетворении которого условие  $\mathbf{X}_1^0 \geq 0$  является оптимальным решением нелинейной задачи  $\mathbf{X}^0 \geq 0$ . В выражении (5.29) знак больше берется при минимизации функции  $J(\mathbf{X})$ , а знак меньше — при максимизации функции  $J(\mathbf{X})$ . При невыполнении неравенства (5.29) с учетом полученной разности  $\mathbf{Y}^0 - \mathbf{X}_1^0$  принимается новое приближение допустимой фиксированной точки:

$$\mathbf{X}_2^0 = \mathbf{X}_1^0 + \varepsilon(\mathbf{Y}_1^0 - \mathbf{X}_1^0),$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое число. Далее решение задачи повторяется при новом фиксированном значении  $\mathbf{X}_2^0$ , и после определения  $\mathbf{Y}_2^0$  проверяется условие (5.29).

Если нельзя применить линейную аппроксимацию, для решения задачи используют другие методы нелинейного программирования.

#### 5.4. МЕТОДЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

В динамическом режиме работы объекта переменные состояния изменяются во времени. Этот режим характеризуется начальным значением вектора состояния (до приложения внешних воздействий  $X(t_0) = \|x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}\|^T$ ), текущим значением вектора состояния  $X(t)$  и интервалом времени  $[t_0, t_1]$ , где  $t_1$  — конечный момент времени. Кроме того, динамика объекта характеризуется координатами управления  $u_i$  и координатами выхода объекта  $x_i$  или  $y_i$ . Координаты управления — это внешние воздействия, которые прикладываются к объекту реализации процесса управления и могут изменяться произвольным образом. В отличие от них выходные координаты  $x_i(t)$  изменяются с ограниченной скоростью, поскольку они всегда представляют собой выходные сигналы реальных динамических элементов. На практике все координаты управления и выхода ограничены (во многих случаях при оптимальном управлении предельные значения принимают лишь координаты управления, а выходные координаты ограничений не достигают).

Для изучения переходных процессов в САУ можно воспользоваться функционалом, выражаемым некоторым определенным интегралом:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (5.30)$$

где  $x = x(t)$  — траектория движения;  $\dot{x} = \dot{x}(t)$  — скорость движения;  $t_1, t_2$  — начальный и конечный моменты времени.

Задача оптимизации динамики САУ сводится к математическому определению экстремума. Для этого следует дать приращение аргументу функционала и выяснить, как изменится его значение. Приращение (или вариация)  $\delta x$  аргумента  $x(t)$  изменяющегося произвольно функционала  $J[x(t)]$  есть разность между двумя близкими функциями:  $\delta x = x_2(t) - x_1(t)$ .

Не следует смешивать понятие вариации  $\delta x$  с понятием дифференциала  $dx$ . Оба понятия содержат бесконечно малые изменения функции  $x$ . Различие их в том, что  $dx$  порождается бесконечно малым изменением  $dt$  независимой переменной  $t$ , а  $\delta x$  своим возникновением обязан новой функции  $x_2(t) = x_1(t) + \delta x$ . При этом варьируется лишь функция  $x(t_i)$  при постоянстве  $t_i$ , т. е.  $\delta t = 0$ . Варьирование функции есть переход ее от первоначальной функции  $x_1(t)$  к близкой, мало отличающейся от нее функции  $x_2(t)$  и сравнение их значений при определенных значениях независимой переменной  $t$ .

Нахождение экстремумов функционалов производится методами вариационного исчисления. Рассмотрим некоторые из них.

**Классический метод вариационного исчисления.** Определим условие существования экстремума функционала (5.30). Для этого проварируем подынтегральную функцию  $x(t)$  и ее производную  $\dot{x}(t)$ , т. е. образуем функции  $x + \delta x$  и  $\dot{x} + \delta \dot{x}$ . Приращение интеграла (5.30) можно определить разложением его в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_1}^{t_2} F(x + \delta x; \dot{x} + \delta \dot{x}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 F(x, \dot{x}, t)}{\partial x^2} \frac{(\delta x)^2}{2} dt + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

Отбрасывая в правой части выражения (5.31) из-за малости величин  $\delta x$  и  $\delta \dot{x}$  все члены, кроме первых двух линейных, получим так называемую *первую вариацию для функционала* (5.30):

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt. \quad (5.32)$$

Необходимым условием существования экстремального значения интеграла (5.30) является равенство нулю его первой вариации:  $\delta J = 0$ . Для нахождения экстремума функционала (5.30) при заданных граничных условиях  $x_1(t) = 0$  и  $x_2(t) = 0$  приравняем к нулю выражение (5.32):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt = 0. \quad (5.33)$$

Это равенство должно выполняться для любой вариации, которая удовлетворяет граничным условиям  $\delta x(t_1) = 0$  и  $\delta x(t_2) = 0$ . Учитывая их и интегрируя по частям второе слагаемое, представим равенство (5.33) в виде

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x dt + \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

Так как  $\delta x$  выбирается произвольно и может быть не равно нулю, равенство (5.34) возможно лишь при условии

$$\frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (5.35)$$

Уравнение (5.35) называют *дифференциальным уравнением Эйлера*. Постоянные интегрирования этого уравнения определяются из граничных условий. Решение уравнения Эйлера является необходимым и достаточным условием экстремума интеграла (5.30) при заданных граничных условиях. Если граничные условия не фиксированы и представлены в виде кривых, то для решения уравнения (5.35) используются условия трансверсальности. Для определения соответствия экстремума функционала минимуму или максимуму можно ограничиться численной проверкой значения функционала около найденной экстремали или проверить знак второй производной вдоль экстремали (условие Лежандра): при  $\partial^2 F / \partial x^2 \geq 0$  будет минимум, а при  $\partial^2 F / \partial x^2 \leq 0$  — максимум функционала.

Использование классического метода вариационного исчисления предполагает, что искомые функции оптимальных процессов являются непрерывными и на координаты выхода и управлений не накладываются ограничения. Поскольку на практике обычно обратное — различные ограничения накладываются не только на объект управления, но и на САУ, то возможности использования рассмотренного метода ограничены.

**Метод динамического программирования.** В основу этого метода, предложенного американским ученым Р. Беллманом, положен принцип оптимальности, согласно которому *оптимальное управление системы не зависит от предыстории самой системы*. Метод динамического программирования даст возможность найти оптимальные управления  $u^0(t)$  и траектории  $X(t)$  из условия минимума функционала

$$J = \int_{t_0}^T F(X, u, t) dt = \min \quad (5.36)$$

для заданных уравнений объекта

$$\dot{X} = AX + Bu = \Phi(X, u), \quad (5.37)$$

начальных и конечных значений  $X(t_0)$  и  $X(t)$  и интервала времени  $t_0 \leq t \leq T$  при наличии ограничений вида  $X(t) \in M$  и  $u(t) \in U$  ( $M, U$  — заданные допустимые области для координат выхода и управления). Если необходимо обеспечить условия максимума функционала (5.36), следует принять минус перед интегралом.

Для решения задач оптимизации объектов используется вспомогательная функция Беллмана:

$$S(t, X) = \min_{u \in U} \left[ \int_{t_0}^T F(X, u, t) dt \right]. \quad (5.38)$$

Поскольку минимум функционала (5.36) зависит от момента  $t_0 + \Delta t$ , значения  $X_{\Delta t}$  и конечного момента  $T$ , то функция Беллмана преобразуется в выражение

$$S(t_0 + \Delta t, T, X_{\Delta t}) = \min_{u \in U} \left[ \int_{t_0 + \Delta t}^T F(X, u, t) dt \right], \quad (5.39)$$

где  $t_0 + \Delta t$  — момент времени в интервале  $t_0 \leq t \leq T$ ;  $X_{\Delta t} = X(t_0) + \Delta X$  — вектор координат выхода в момент  $t_0 + \Delta t$ .

Если  $t_0$  — фиксированный момент времени, а  $\Delta t$  — малое положительное число, то можно преобразовать функцию (5.38) к виду

$$S(t, X) = \min_{u \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(X, u, t) dt + \int_{t_0 + \Delta t}^T F(X, u, t) dt \right]$$

или с учетом выражения (5.39)

$$S(t, X) = \min_{u \in U} \left[ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(X, u, t) dt + S(t_0 + \Delta t, T, X_{\Delta t}) \right]. \quad (5.40)$$

На основании функции (5.40) выводится нелинейное дифференциальное уравнение Беллмана в частных производных относительно функции  $S(t, X)$ :

$$\min_{u \in U} \left\{ F(X, u, t) + \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \varphi_i(X, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right\} = 0 \quad (5.41)$$

при следующих условиях:

$$\dot{x}_i(t) = \varphi_i(X, u, t); \quad X(t) \in M; \quad u(t) \in U; \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Из решения уравнения (5.41) находим оптимальное уравнение  $u^0(t)$ . Соответственно полученной величине  $u^0(t)$  по уравнению (5.37) определяем оптимальную траекторию вектора выхода  $X^0(t)$ . Если уравнение (5.41) невозможно решить аналитически, то применяют численное решение в виде многошагового процесса. Это решение приближенно и выполняется обычно с использованием ЭВМ. Для этого заменяют исходные уравнения объекта (5.37) конечно-разностными уравнениями:

$$\Delta X_k = \Phi(X_{k-1}, u_k) \Delta t; \quad X_k = X_{k-1} + \Delta X_k; \quad X_0 = X(t);$$

$$X_N = X(T); \quad u_k = u_{k-1} + \Delta u_k; \quad \Delta t = (T - t_0) / N;$$

функционал (5.36) преобразуют к виду

$$J = \sum_{k=1}^N F_k(X_{k-1}, u_k) \Delta t,$$

где  $k=1, 2, \dots, N$  ( $N$  — число принятых расчетных шагов (интервалов)).

Оптимальный процесс определяют после нахождения значений оптимальных управлений на каждом шаге  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0$  (при условиях  $u_k \in U$  и  $X_0 = X(t_0)$ ) и после обеспечения минимума функционала (5.36) и выполнения условий  $X_0 = X(t_0)$ ,  $X_N = X(T)$ . При решении задачи оптимизации участники процесса рассматривают в обратной последовательности, т. е. от конца процесса к его началу.

Метод динамического программирования весьма успешно применяют для оптимизации дискретных САУ. В таких задачах уравнения динамики представлены в виде конечных разностей. Это позволяет сочетать принцип оптимальности и возможности ЭВМ. При оптимизации объектов с направленными процессами возникает необходимость дифференцируемости вспомогательной функции Беллмана (5.38) во всех точках фазового пространства. Это требование не всегда выполнимо даже в простых задачах. Трудность решения задачи оптимизации методом динамического программирования обусловлена также тем, что функция (5.38) заранее неизвестна, а уравнение Беллмана (5.41) содержит частные производные. В настоящее время не существует общего способа определения вспомогательной функции Беллмана (5.38) в явной аналитической форме.

**Метод принципа максимума** разработан советским ученым Л. С. Понтрягиным и является расширением классического вариационного исчисления на случай, когда управляющие воздействия ограничены и описываются кусочно-непрерывными функциями. Задачей оптимизации тогда является определение оптимальных управлений  $u^0(t)$  и траектории  $X^0(t)$  из условия нахождения экстремума функционала (5.36) для заданных уравнений объекта (5.37) при начальных и конечных значениях  $X(t_0)$  и  $X(t)$ , а также заданном интервале времени  $t_0 \leq t \leq T$  с учетом ограничений  $X(t) \in M$  и  $u(t) \in U$ .

Доказательство принципа максимума основано на понятии *игольчатой вариации*, которая представляет собой приращение варьируемой функции оптимального управления  $u^0(t)$  на бесконечно малом отрезке времени  $\varepsilon$  (в предельном случае — в точке). Приращение функционала при игольчатой вариации управления будет бесконечно малым. Оно обращается в нуль, если вариация берется относительно оптимального управления  $u^0(t)$ . Из этого условия в конечном счете и следует принцип максимума. Сущность принципа максимума состоит в следующем. Пусть математическая модель объекта оптимизации задана в виде уравнений состояния:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.42)$$

или в векторной форме:

$$\dot{X} = f(X, u),$$

где  $r$  — количество координат управления. Сигналы управления могут иметь ограничения для всех  $r$  координат  $|u_i| \leq U_i$ . При оптимизации объекта требуется определить вектор управляющего воздействия  $u(t)$  с учетом ограничений из условия минимума функционала

$$J = \int_{t_0}^T f_0(X, u) dt. \quad (5.43)$$

В общем случае правые части уравнения (5.42) и подынтегральная функция (5.43) могут зависеть от времени. При рассмотрении задачи оптимизации вводится вектор вариации траектории:

$$\delta X = X(t) - X^0(t).$$

Закон изменения вариации, являющейся бесконечно малой величиной, выводится из уравнения в вариациях

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^n \delta x_j \frac{\partial x_i(X, u)}{\partial x_j}. \quad (5.44)$$

Вектор вариации  $\delta x$  характеризует изменение критерия оптимальности  $\delta J$ , который при  $t=T$  описывается скалярным произведением вектора вариации  $\delta X(T)$  и вспомогательного вектора  $\varphi(T)$ , т. е.  $\delta J = -\delta X(T) \varphi(T)$ . С помощью функции Гамильтона для неклассических вариационных задач

$$H^* = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(X, u) = \psi^T(t) f(X, u), \quad (5.45)$$

$$\text{где } \psi^T(t) = \|\psi_0(t) \psi_1(t) \dots \psi_n(t)\|^T, \quad (5.46)$$

системы (5.42) и (5.44) могут быть записаны в виде системы канонических уравнений Гамильтона для неклассических вариационных задач, которые справедливы и для классических:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.47)$$

Необходимые условия оптимальности управления формулируются следующим образом: чтобы управление  $u(t)$  и соответствующая ему траектория  $X(t)$  были оптимальны, необходимо существование ненулевой вектор-функции  $\psi(t)$ , составляющие которой (см. выражение (5.46)) удовлетворяли бы системе уравнений (5.47), чтобы при  $t_0 \leq t \leq T$  функция  $H^*$  из (5.45) достигла максимума при  $u^0(t)$ , т. е.

$$H^*[\psi^0(t), X^0(t), u^0(t)] = \max,$$

а в конечный момент  $t=T$  выполнялись бы также соотношения

$$\psi_0(T) \leq 0; \quad \max_{u^0(t) \in U} \{H^*[\psi(T), X(T)]\} = 0 \quad (5.48)$$

(при этом принимают  $\psi_0 = -1$ ).

Следовательно, при решении задач по принципу максимума составляют функцию типа (5.45), записывают уравнения (5.47), из которых находят оптимальные управления  $u^0(t)$  или  $u^0(X)$ . При этом решение задачи оптимизации сводится к решению дифференциальных уравнений в многомерном пространстве. Расчет максимальной функции Гамильтона  $H^*(u)$  и определил название метода. Этот метод находит широкое применение при синтезе максимально быстродействующих САУ.

## 5.5. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ТОЧНОСТИ СИСТЕМ

Оптимальные по точности САУ должны обеспечивать в требуемых режимах работы заданную точность. Режимы работы этих систем могут рассматриваться либо при детерминированных, либо при случайных сигналах. В первом случае САУ имеют минимальную суммарную (интегральную) ошибку за время переходного процесса. При этом обеспечивается минимальное отклонение координат объекта от заданных значений с учетом ограничений сигнала управления. Во втором случае оптимальные по точности САУ при случайных сигналах имеют минимальную среднеквадратичную ошибку при заданном входном случайном сигнале.

Перед синтезом оптимальной по точности САУ ставится задача нахождения закона оптимального управления, который связывает векторы координат состояния и управления из условия минимума функционала, характеризующего основной режим работы объекта. Минимизируемый функционал, т. е. критерий качества, с одной стороны, должен соответствовать наилучшей работе объекта, а с другой — быть таким, чтобы вариационная задача решалась аналитически. При синтезе оптимальных по точности систем широко применяют квадратичные интегральные критерии качества, содержащие координаты объекта и управления. На практике возможны разные задачи оптимизации объектов по точности. Рассмотрим некоторые из них в случае действия на САУ детерминированных сигналов.

**Оптимальная стабилизация режимов объекта.** Пусть математическая модель объекта записывается как

$$\dot{x} = AX + Bu = f(X, u), \quad (5.49)$$

где  $A$  — матрица размерностью  $(n \times n)$ ;  $B$  — матрица размерностью  $n \times r$  при  $r$  координатах управления, а минимизируемый функционал имеет вид

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^m r_j u_j^2 \right) dt$$

или в векторной форме

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt, \quad (5.50)$$

где  $Q, R$  — диагональные матрицы весовых коэффициентов для  $q_i > 0$  и  $r_i > 0$  соответственно;  $T$  — знак транспонирования векторов. От весовых коэффициентов зависят ограничения соответствующих координат. Если какой-либо коэффициент равен нулю, то соответствующая координата никаких ограничений не имеет.

При решении поставленной задачи принципом максимума находят закон управления, обеспечивающий малые отклонения вектора от заданного значения при малой затрате энергии на управление:

$$u^0(X) = -R^{-1} B^T K X(t). \quad (5.51)$$

Здесь  $K$  — матрица коэффициентов размерностью  $n \times n$ , состоящая из постоянных коэффициентов  $k_{ij} > 0$ . Выражение (5.51) минимизирует квадратичный функционал (5.50). Оптимальное управление является линейным, если нет ограничений координат управления. При наличии ограничений типа  $u(t) \in U$  получим нелинейный закон управления:

$$u^0(t) = \begin{cases} +u_{\max} & \text{при } k_{o.c} x(t) \geq u_{\max}, \\ -u_{\max} & \text{при } k_{o.c} x(t) \leq -u_{\max}, \\ k_{o.c} x(t) & \text{при } |k_{o.c} x(t)| \leq u_{\max} \end{cases}$$

( $k_{o.c}$  — коэффициент обратной связи САУ).

**Оптимальная стабилизация выхода объекта.** В этом случае уравнения объекта рассматриваются с учетом вектора координат выхода:

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad Y = CX, \quad (5.52)$$

а минимизируемый функционал имеет вид

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} (Y^T Q Y + u^T R u) dt$$

или, с учетом уравнения (5.52),

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} (X^T Q^T Q C X + u^T R u) dt.$$

При полностью наблюдаемом объекте функционал вырождается в функционал (5.50). Задача стабилизации в этом случае сводится к рассмотренной ранее стабилизации режима работы. Закон управления  $u^0(X)$  (5.51) обеспечивает малые отклонения вектора выходных переменных  $Y$ . Поскольку он выражен

через вектор состояния  $X$ , то решение задачи стабилизации режима работы объекта является более общим.

**Оптимальное управление объектом по произвольному закону.** Пусть объект описывается уравнениями (5.52). На выходе САУ требуется обеспечить значение вектора  $Y_{\text{тр}}$  с минимальной затратой энергии на управление. Тогда минимизируемый функционал относительно вектора ошибки, равного  $\Delta Y(t) = Y_{\text{тр}}(t) - Y(t)$ , будет иметь вид

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} [\Delta Y(t)^T Q \Delta Y(t) + u^T R u] dt,$$

или, учитывая уравнения (5.52), получим

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} [(Y_{\text{тр}} - CX)^T Q (Y_{\text{тр}} - CX) + u^T R u] dt.$$

Поскольку данный функционал содержит вектор  $Y_{\text{тр}}(t)$  требуемого процесса на выходе, то решение приводит к тому, что текущее значение оптимального управления зависит от будущих значений требуемого выходного сигнала. Реализацию такого оптимального управления можно осуществить лишь при знании требуемого процесса  $Y_{\text{тр}}(t)$ .

На практике эту задачу иногда можно свести к задаче оптимальной стабилизации выхода объекта. Так, например, задача оптимального управления одномерным объектом по требуемому закону  $x_{\text{вх}}(t)$ , дифференцированному  $n$  раз и удовлетворяющему условию

$$x_{\text{вх}}^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i} x_{\text{вх}}^{(n-i)}(t) = 0, \quad (5.53)$$

состоит в оптимальном управлении выходным сигналом объекта  $y(t)$ . При этом закон управления  $U^0(X)$  выражается зависимость (5.51) и обеспечивает оптимальное управление объектом только при таких требуемых сигналах, которые удовлетворяют уравнению (5.53).

Для аналитического синтеза оптимальных по точности работы САУ можно использовать методы классического вариационного исчисления, динамического программирования и принципа максимума. Однако в реальных условиях на объект оптимизации по точности действуют разные случайные возмущения: начальные значения фазовых координат неизвестны, текущие значения координат не всегда могут быть измерены, параметры объекта изменяются случайным образом, поэтому теория детерминированного управления в таких случаях не применима. При оптимизации этих объектов необходимо использовать статистические методы теории оптимальных САУ.

При синтезе САУ со случайными входными сигналами в

первую очередь рассматривается точность управления. Высоко-точная система может быть создана с использованием статистического критерия оптимальности. Устранить полностью ошибки в САУ, возникающие от случайных входных сигналов (помех), практически невозможно. Поэтому и ставится задача синтеза оптимальной по точности САУ, находящейся под воздействием случайных сигналов.

Синтез таких САУ можно осуществить различными способами. Один из них заключается в определении оптимальной передаточной функции САУ из условия минимума либо среднеквадратичной ошибки, либо статистического критерия, другой — в определении оптимальных значений параметров САУ с заданной структурой по минимуму среднеквадратичной ошибки.

Рассмотрим часто применяемый на практике способ определения оптимальной передаточной функции из условия минимума среднеквадратичной ошибки. При случайных воздействиях ошибка САУ также является случайной функцией и определяется разностью фактического  $x_{\text{вых}}(t)$  и заданного  $x(t)$  значений выходного сигнала.

Если входной сигнал САУ, состоящий из полезного сигнала  $x_0(t)$  и помехи  $f_0(t)$ , т. е.  $\varphi(t) = x_0(t) + f_0(t)$ , является стационарным случайным процессом, а ошибка САУ  $\varepsilon(t) = x(t) - x_{\text{вых}}(t)$ , то среднеквадратичная ошибка выражается как

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - x_{\text{вых}}(t)]^2 dt. \quad (5.54)$$

Так как выходная переменная САУ записывается как

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) \dot{x}_{\text{вых}}(\tau) d\tau,$$

то выражение ошибки (5.56) можно привести к виду

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) \dot{x}_{\text{вых}}(\tau) d\tau \right]^2 dt.$$

После математических преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 = & R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} \dot{x}_{\text{вых}}(\tau) R_{x\varphi}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{\infty} \dot{x}_{\text{вых}}(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_{\text{вых}}(\lambda) R_{\varphi}(\tau_1) d\lambda, \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\text{где } R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt;$$

$$R_{x\varphi}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \varphi(t - \tau) d\tau;$$

$$R_{\varphi}(\tau_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t - \tau) \varphi(t - \lambda_1) d\tau_1;$$

$$\tau_1 = \tau - \lambda_1.$$

Синтез оптимальной по точности САУ заключается в определении частной передаточной функции  $W(j\omega)$  замкнутой системы, которая обеспечивает минимум значения  $\varepsilon^{-2}$ . Минимальным значением среднеквадратичной ошибки, рассчитываемой по (5.55), будет в том случае, если при  $\tau \geq 0$  выполняется условие

$$R_{x\varphi}(\tau) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau_1) \dot{x}_{\text{вых}}(\lambda_1) d\lambda_1 = 0, \quad (5.56)$$

которое называется *уравнением Винера — Хопфа*. Решение этого уравнения определяет значение  $\dot{x}_{\text{вых}}(t)$ , которое связано с частотной передаточной функцией  $W(j\omega)$  известным соотношением

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} \dot{x}_{\text{вых}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

На основании уравнений (5.54) с учетом условия физической осуществимости, т. е. при  $t < 0$   $x_{\text{вых}}(t) = 0$ , было получено выражение для оптимальной частотной передаточной функции замкнутой САУ:

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{x\varphi}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega,$$

где  $\psi(j\omega)$  — частотная функция фиктивного фильтра;  $S_{x\varphi}$  — взаимная спектральная плотность для  $R_{x\varphi}(\tau)$ ;  $\psi^*(j\omega)$  — сопряженная частотная функция для  $\psi(j\omega)$ . При этом  $\psi(j\omega)\psi^*(j\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = S_{\varphi}(\omega)$ , где  $\psi(j\omega)$  — спектральная плотность сигнала  $\varphi(t)$ .

При подстановке в частотную функцию  $W_{\text{опт}}(j\omega)$   $p = j\omega$  получим оптимальную передаточную функцию  $W_{\text{опт}}(p)$  системы в операторной форме, которая также обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки при наличии на входе системы полезного сигнала и помехи в виде случайных функций.

Синтез оптимальных САУ рассмотренным методом применяется в тех случаях, когда выполняются следующие условия: точки входа в САУ полезного сигнала и помехи, являющихся

функциями стационарных случайных процессов, совпадают, так как системы одномерны и выполняется единственное условие осуществимости: при  $t < 0$ ,  $x_{\text{вых}}(t) = 0$  статистические характеристики случайных сигналов внешних воздействий известны. Практически реализовать полученное выражение передаточной функции  $W_{\text{опт}}(p)$  невозможно, поэтому для упрощения принимают приближенное значение  $W(p)$ .

В общем случае для нахождения передаточной функции САУ по критерию минимума среднеквадратичной ошибки можно воспользоваться уравнением

$$M \{ [x_{\text{опт}}(t) - x(t)] x_1(t) \} = 0. \quad (5.57)$$

Здесь  $x_{\text{опт}}(t)$  и  $x(t)$  — выходные переменные оптимальной САУ, имеющей  $W_{\text{опт}}(p)$  при действии полезного сигнала совместно с помехой и только одного полезного сигнала соответственно;  $x_1(t)$  — выходная переменная реальной САУ, передаточная функция которой будет оптимальной при выполнении условия (5.57).

Если в реальной САУ  $x_1(t) \simeq x_{\text{опт}}(t)$ , то с учетом уравнения (5.57)

$$\bar{\sigma}_{\text{min}}^2 = M [x_{\text{опт}}^2(t)] - M [x(t) x_{\text{опт}}(t)].$$

Полученное уравнение минимизирует среднеквадратичную ошибку для любого момента времени. Определив передаточную функцию САУ, переходят к реализации ее звеньев. На практике большая часть элементов САУ задана и не может быть измерена. Поэтому для реализации динамических характеристик, близких к оптимальным, в систему вводят корректирующие устройства, определяемые передаточными функциями заданной части САУ и оптимальной  $W_{\text{опт}}(p)$ . Решение этой части задачи можно осуществить разными известными методами, в том числе и частотно-логарифмическим.

**Построение оптимальных по точности работы САУ при случайных сигналах.** Обобщенная структура проектируемой оптимальной САУ представлена на рис. 5.5. Здесь ОУ — оптимизируемый объект управления, описываемый на интервале времени  $[0, T]$  векторным уравнением вида  $\dot{X} = \Phi(X, u, f, t)$ ; УУ — устройство управления; ДСС — датчик обратной связи;  $X(0, t)$  — случайный вектор начальных фазовых координат с заданной плотностью вероятностей;  $u$  — вектор управлений, ограниченный по значению ( $u \in U$ );  $X$  — вектор состояния;  $Y$  — вектор обратной связи, определяемый функцией  $Y = \Phi_1(X, u, \eta, t)$ ;

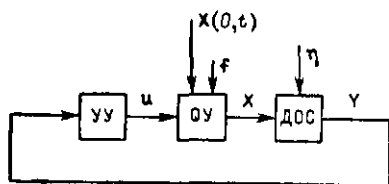


Рис. 5.5.

$\eta$  — случайный векторный процесс, зависящий от ошибок измерений вектора  $Y$  (при  $\eta=0$   $Y=X$ );  $f$  — вектор случайного процесса возмущений.

Синтез в данном случае сводится к определению вектора оптимального управления  $U^0$ , при котором существует минимальное математическое ожидание интегрального функционала

$$M[J] = M \left[ \int_0^T F(X, u, t) dt \right], \quad (5.58)$$

где  $F$  — положительная функция. При вычислении величины  $M[J]$  осреднение функционала  $J$  производится по множествам случайных начальных значений  $X(0, t)$  векторов обратной связи и возмущений.

Определение оптимального управления  $U^0(X, t)$  для любого момента времени  $0 \leq t \leq T$  из условия минимума статистического функционала (5.58) при заданном уравнении объекта и случайных сигналах можно осуществить с помощью метода динамического программирования. В этом случае обобщенное уравнение Беллмана примет вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u \left\{ F(X, u, t) + \sum_{i=1}^n \left[ (m_i \delta_{ij} + \varphi_i) \frac{\partial S}{\partial x_i} + 0,5 \sigma_f^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} \right] \right\},$$

где  $m_i$  и  $\sigma_f^2$  — среднее значение и дисперсия случайного процесса возмущений  $f$  соответственно;  $\delta_{ij}$  — коэффициент, равный единице при  $i=j$  и равный нулю при  $i \neq j$  ( $i \leq j \leq n$ ).

Рассмотренные вариационные методы синтеза дают лишь общую характеристику оптимальной САУ в целом. Для получения оптимальных характеристик корректирующих устройств в замкнутой системе необходимо делать пересчеты с помощью методов теории автоматического управления. Эти пересчеты несложны лишь для простых линейных стационарных САУ. Для систем высокого порядка и для неизвестных заранее процессов  $x_{вх}(t)$  указанные пути решения задачи синтеза становятся практически невыполнимыми. Оптимизация объекта в таких случаях делается методом накопления информации и последующего ее применения в управлении объектом. Некоторые сложные САУ рассматриваются в литературе, но и там чаще всего построение оптимальных систем выполнено с помощью ЭВМ.

## 5.6. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ

### ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

Оптимальные по быстродействию САУ должны обеспечить отработку заданного перемещения, переход с одной скорости изменения параметра на другую, выполнение заданной работы

за минимальное время при соблюдении заданных ограничений. Время переходного процесса в любой реальной САУ не должно быть меньше определенной минимальной величины из-за ограничений, накладываемых на координаты управления и выхода. Оптимальные по быстродействию САУ являются частным случаем оптимальных систем.

В оптимальных по быстродействию системах выполняются условия минимизации функционала:

$$J = \int_{t_0}^T dt = T - t_0 = \min$$

( $t_0$  — начальный момент управления объекта;  $T$  — конечный момент, при котором выходные координаты объекта принимают требуемые значения). Под длительностью переходного процесса понимают интервал времени  $T - t_0$ , в течение которого ошибка САУ и ее производные уменьшаются до заданного значения.

Оптимальные по быстродействию САУ используют при обработке больших ошибок. Это, как правило, нелинейные системы из-за наличия в них нелинейности типа насыщения. Кроме того, следует принимать во внимание ограничения, которые накладываются на координаты управления с учетом технологических, экономических и других факторов. Если в течение процесса управления все сигналы в системе удовлетворяют наложенным ограничениям, то такое управление называется *допустимым*.

Для синтеза оптимальных по быстродействию САУ используют методы вариационного вычисления. Если множество допустимых управлений является открытым, т. е. сигналы в системе не могут принимать граничных значений, то лучше всего применять метод классического вариационного исчисления. Если же множество допустимых управлений является замкнутым, т. е. сигналы в системе могут принимать граничные значения, то, поскольку применение классического вариационного исчисления вызывает большие математические трудности, следует использовать для нахождения оптимального управления принцип максимума. В реальных САУ сигналы всегда имеют граничные значения, поэтому множество допустимых управлений является замкнутым. Синтез системы в этом случае сводится к составлению функции Гамильтона (5.54), которая при оптимизации объекта управления из условия максимального быстродействия с учетом  $f_0(X, u) \equiv 1$  в функционале (5.43) и  $\psi_0 = -1$  примет вид

$$H^* = -1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(X, u) = -1 + H(\psi, X, u),$$

$$\text{где } H(\psi, X, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(X, u). \quad (5.59)$$

Если математическая модель объекта управления задана в виде уравнений состояния типа (5.49), функцию Гамильтона (5.59) можно привести к виду

$$H(\psi, X, u) = \psi^T(t) f(X, u) = \psi^T(t) AX + \\ + \psi^T(t) Bu = \psi^T(t) AX + B^T \psi(t) u.$$

Уравнение вектора вспомогательных переменных в этом случае будет следующим:

$$\dot{\psi}(t) = -\partial H / \partial X = -\psi^T(t) \partial f(X, u) / \partial X, \quad (5.60)$$

а условие максимума функции Гамильтона (5.48) —

$$\max_{u^0(t) \in U} \{H[\psi(T), X(T)]\} = 1, \quad \psi_0(T) = -1. \quad (5.61)$$

Затем находят оптимальное управление с учетом ограничения координат  $|u(t)| \leq U_{\max}$  из условия максимума функции (5.59):

$$u^0(t) = U_{\max} \operatorname{sgn}(\dot{H}_u)$$

или при  $U_{j\max} = 1$ :

$$u^0(t) = 1 \cdot \operatorname{sgn}(\dot{H}_u), \quad (5.62)$$

где  $\dot{H}_u = \partial H(\psi, X, u) / \partial u = B^T \psi(t)$ ;  $1$  — единичная диагональная матрица

$$1 = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

Уравнения (5.49), (5.60) и (5.62) составляют систему уравнений вариационной задачи синтеза оптимальных по быстродействию уравнений с  $2n+r$  неизвестными, которые находят при известных начальных условиях  $x_i(t_0)$  и  $\psi_i(t_0)$ . Обычно известны только начальные значения координат состояния объекта и неизвестны начальные значения.

В настоящее время нет аналитических способов для нахождения  $\psi_i(t_0)$  в явном виде, поэтому для их определения используют *итерационный метод*. Он основан на последовательном приближении от некоторого исходного начального набора значений  $\psi_i^0(t_0)$  к окончательной совокупности  $\psi_i(t_0)$ , которая соответствует решению оптимальной задачи. Один из возможных способов такого решения заключается в том, что, взяв произвольное значение  $\psi_i^0(t_0)$ , находят соответствующие им управления  $u_j^0(t_0)$  и траектории  $x_i^0(t_0)$ . Если полученные  $x_i^0(t)$  совпадают с заданными конечными значениями при  $t=T$ , т. е. если вектор состояния  $X^0(T)$  равен заданному вектору конечного состояния  $X(T)$ , то выбор начальных значений  $\psi^0(t_0)$  сде-

лан правильно. Если же траектории  $x_i^0(t)$  не проходят через заданные конечные значения  $x_i(T)$ , то необходимо выбрать другие значения  $\psi_i^0(t_0)$  и повторить решение задачи.

На практике при синтезе оптимальных САУ в ряде случаев не требуется определять полностью вспомогательные функции  $\psi_i(t)$ , а достаточно лишь знать моменты  $(t_v)$  изменения знака величины  $H_u$ . В этом случае закон управления является релейным:

$$u_j^0(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_j(t) > 0, \\ -1 & \text{при } \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_j(t) < 0. \end{cases}$$

Если объект управления описывается линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и корни его характеристического уравнения действительные, то для оптимального по быстрдействию управления необходимо и достаточно  $n$  интервалов максимального значения управления  $u_{\max}$  с чередованием знаков на этих интервалах  $(n-1)$  раз. Знание числа переключений дает возможность сократить объем вычислений по определению оптимальных управлений. Расчет моментов переключения  $(t_v)$ , который в общем случае является весьма сложной задачей, возможен разными методами. Наиболее просто эти вычисления производятся при воздействии на объект лишь одного управляющего сигнала.

Например, если линейный объект с характеристиками, изменяющимися во времени, при отсутствии ограничений на координаты вектора состояний объекта и возмущающих воздействий содержит только последовательно соединенные инерционные и интегрирующие звенья и описывается дифференциальным уравнением

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i} x^{(n-i)}(t) = b_0 u(t),$$

то в случае, когда это уравнение имеет  $n$  нулевых корней, моменты переключения рассчитываются по формуле

$$t_v = 4 \sqrt{\frac{(n-1)!}{4} \left| \frac{x(T) - x(0)}{b_0 u_{\max}} \right|} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}. \quad (5.63)$$

Это выражение показывает, что моменты переключений зависят от начальных и конечных значений координаты выхода объекта, а также от величины  $U_{\max}$ . Большую роль при расчете моментов переключения реле играет правильный выбор знака сигнала управления на первом интервале  $U_1^0$ . При установившемся начальном и конечном состояниях объекта знак сигнала на первом интервале можно выбрать по формуле

$$u_1^0 = U_{\max} \operatorname{sgn} [x(T) - x(0)]. \quad (5.64)$$

В общем случае выражение для  $U_1^0$  будет значительно сложнее, чем (5.64). Если же линейный объект содержит только параллельно соединенные звенья и звенья с обратными связями и описывается дифференциальным уравнением

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i} x^{(n-i)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t), \quad m < n,$$

которое для простоты расчета моментов переключения  $t_i$  представляется канонической формулой

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) + m_i u(t), \quad x(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t),$$

то моменты переключения последовательно можно найти из уравнения

$$\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t_v} [z_i(t_v) - z_i(t_{v-1})] = (-1)^v 2U_{\max} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t_v} - 1),$$

где  $\lambda_i = p_i$  — корни характеристического уравнения;  $z_i(t)$  — канонические переменные. Знак сигнала управления на первом интервале можно выбирать по формуле (5.64).

В рассмотренных примерах оптимальное управление определялось без непосредственного использования координат вектора состояния. Это обуславливает реализацию законов управления по принципу разомкнутой системы и предполагает, что вектор состояния  $\mathbf{X}(t)$  в конце процесса управления точно соответствует заданному  $\mathbf{X}(T)$ . Поскольку в реальных условиях на САУ воздействуют различные внешние возмущения, характеристики объекта не постоянны, а сигнал управления не всегда равен  $\pm U_{\max}$ , то после окончания процесса управления при  $t \geq T$  вектор состояния  $\mathbf{X}(t)$  будет отличаться от заданного значения  $\mathbf{X}(T)$ . Поэтому, если величина вектора ошибки  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{X}_{\text{вх}}(t) - \mathbf{X}(t)$  ( $\mathbf{X}_{\text{вх}}(t)$  — вектор задающего воздействия) допустима или если невозможно получить информацию о векторе состояния объекта в процессе управления, то используют управление по принципу разомкнутой системы. Для ликвидации ошибки в управлении из-за внешних возмущений можно выполнить дополнительные расчеты по уточнению моментов переключения реле ( $t_v$ ) в зависимости от внешних возмущений. Если внешние возмущения невозможно измерить, то получают информацию о величине вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$ . Далее, вычислив отклонение от заданного  $\mathbf{X}_{\text{вх}}(t)$ , можно произвести коррекцию моментов для получения заданного состояния  $\mathbf{X}(T)$ . Это реализуется в разомкнутых системах только с использованием ЭВМ.

Для увеличения точности работы САУ применяют принцип управления по отклонению. Закон оптимального управления в этом случае формируется не в функции времени (см. выражение (5.62)), а в функции координат вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$

или вектора ошибки  $E(t)$ . Синтез таких оптимальных по быстродействию САУ, имеющих замкнутый контур регулирования, осуществляют обычно *методом фазового пространства*. Он наиболее хорошо разработан для задающих воздействий  $x_{вх}(t) = X_{вх} \cdot 1(t)$ , т. е. для автоматической стабилизации выходной координаты объекта:  $x_{вых}(t) = \text{const}$ . При этом закон оптимального управления в соответствии с принципом максимума формируется в виде нелинейной зависимости координаты управления от координат вектора состояния:

$$u^0 [X(t)] = -\text{sgn} [S(X)]. \quad (5.65)$$

Знак сигнала управления на первом интервале переключения определяется выражением

$$u_1^0 = -\text{sgn} \{S[X(0), X(T)]\},$$

где  $X(0)$  и  $X(T)$  — начальное и заданное значения вектора состояния соответственно.

Структура оптимальной по быстродействию САУ описывается аналитическим выражением функции  $S(X)$ , которая называется *функцией переключения*, и релейным законом управления (5.65). Для систем программного управления и следящих, имеющих задающие воздействия в виде любого типового сигнала (линейного, гармонического и т. д.), структура, описываемая выражением (5.65), не всегда обеспечивает оптимальное по быстродействию управление. Поэтому для систем, у которых входной сигнал  $x_{вх}(t) = \text{vario}$ , закон оптимального управления описывается нелинейной зависимостью

$$u^0 [E(t)] = \text{sgn} [S(E)].$$

При этом в большинстве практических случаев синтез оптимального управления, выполненный методом фазового пространства, сводят к определению фазовых траекторий в пространстве или линий переключения нефазовой плоскости.

Следует отметить, что разработанная для определенного типа задающего воздействия  $x_{вх}(t)$  оптимальная по быстродействию САУ может не быть оптимальной при других задающих воздействиях. Поэтому синтез оптимальной САУ должен выполняться с учетом типа и параметров задающего воздействия.

## Глава 6

### ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 6.1. ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЕЕ ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория инвариантности — один из основных разделов общей теории автоматического управления, который обосновывает синтез структуры и выбор параметров САУ, находящихся под воздействием возмущений и помех. При выполнении условий инвариантности достигается или независимость (инвариантность) регулируемой величины от внешнего возмущающего воздействия и изменения параметров системы, или точное воспроизведение управляющего воздействия. Первый случай имеет значение для систем стабилизации, второй — для следящих систем.

Решая задачи инвариантности, различают САУ, созданные на основе следующих принципов: а) регулирования по отклонениям; б) регулирования по возмущениям; в) комбинированного. Если САУ со многими регулируемыми параметрами создана на основе принципа регулирования по отклонениям, то вся система в целом будет описываться совокупностью дифференциальных уравнений с переменными

$$\begin{aligned} a_{11}(q)x_1 + a_{12}(q)x_2 + \dots + a_{1j}(q)x_j + \dots + a_{1n}(q)x_n &= f_1(t), \\ a_{21}(q)x_1 + a_{22}(q)x_2 + \dots + a_{2j}(q)x_j + \dots + a_{2n}(q)x_n &= f_2(t), \\ &\dots \dots \dots (6.1) \\ a_{i1}(q)x_1 + a_{i2}(q)x_2 + \dots + a_{ij}(q)x_j + \dots + a_{in}(q)x_n &= f_i(t), \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n1}(q)x_1 + a_{n2}(q)x_2 + \dots + a_{nj}(q)x_j + \dots + a_{nn}(q)x_n &= f(t), \end{aligned}$$

где полиномы имеют, например, вид

$$a_{ij}(q) = l_{ij}q^2 + m_{ij}q + r_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Определим условия инвариантности какой-либо  $j$ -й координаты  $x_i(t)$  от внешнего возмущения  $f_i(t)$  произвольного вида. Для решения задач инвариантности рационально воспользо-

ваться операционным исчислением, а именно методом преобразования Лапласа, позволяющим легко выявить роль начальных условий в достижении полной инвариантности, а также простым путем перейти от исходной системы дифференциальных уравнений к соответствующей им структурной схеме исследуемой САУ. Кроме того, с помощью операционного исчисления удастся легко обнаружить физический смысл самого критерия инвариантности.

Применив преобразования Лапласа к уравнениям (6.1), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_{11}(p) X_1 + a_{12}(p) X_2 + \dots + a_{1n}(p) X_n &= F_1(p) + \Sigma R_1(p), \\ a_{21}(p) X_1 + a_{22}(p) X_2 + \dots + a_{2n}(p) X_n &= F_2(p) + \Sigma R_2(p), \\ &\dots \dots \dots (6.2) \\ a_{n1}(p) X_1 + a_{n2}(p) X_2 + \dots + a_{nn}(p) X_n &= F_n(p) + \Sigma R_n(p). \end{aligned}$$

Здесь вторые члены правой части каждого из уравнений отображают начальные условия. Так, например, для первого уравнения этот член имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma R_1(p) &= l_{11} [x_1(0) p + \dot{x}_1(0)] + m_{11} x_1(0) + \\ &+ l_{12} [x_2(0) p + \dot{x}_2(0)] + m_{12} x_2(0) + \dots + l_{1n} [x_n(0) p + \\ &+ \dot{x}_n(0)] + m_{1n} x_n(0). \end{aligned}$$

Аналогично вводятся начальные условия и в другие уравнения.

Для определения условий инвариантности  $X_j(p)$  от  $F_i(p)$  решим алгебраически систему уравнений (6.2) относительно изображения переменной:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \dots & a_{1j}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \dots & a_{2j}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & a_{n2}(p) & \dots & a_{nj}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{vmatrix} X_j(p) = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(p) & \dots & a_{1,j-1}(p) \\ a_{21}(p) & \dots & a_{2,j-1}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(p) & \dots & a_{n,j-1}(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1(p) + \Sigma R_1(p) \\ F_2(p) + \Sigma R_2(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_n(p) + \Sigma R_n(p) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} a_{1,j+1}(p) & \dots & a_{1n}(p) \\ a_{2,j+1}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,j+1}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Раскрыв главный определитель системы и определитель правой части выражения (6.3) по элементам  $j$ -го столбца и опустив для краткости записей буквы  $p$ , получим

$$DX_j(p) = [a_{1j} M_{1j} + a_{2j} M_{2j} + \dots + a_{ij} M_{ij} + \dots \\ \dots + a_{nj} M_{nj}] X_j(p) = M_{1j}(F_1 + \sum R_1) + M_{2j}(F_2 + \\ + \sum R_2) + \dots + M_{ij}(F_i + \sum R_i) + \dots + M_{nj}(F_n + \sum R_n), \quad (6.4)$$

где  $M_{1j}, M_{2j}, \dots, M_{ij}$  — алгебраические дополнения, соответствующие элементам  $a_{1j} \dots a_{nj}$  главного определителя системы:

$$D(p) = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1}a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

Из выражения (6.4) следует, что для достижения инвариантности  $x_i(t)$  относительно  $f_i(t)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (6.6)$$

Этот критерий инвариантности дает возможность синтезировать инвариантные САУ в классе систем регулирования по отклонениям.

Аналогично решаются задачи определения условий инвариантности нескольких координат относительно одного или нескольких возмущающих воздействий. Однако по мере роста числа переменных и усложнения постановки задачи инвариантности результаты становятся трудно обозримыми. Для получения простых правил, с помощью которых можно было бы легко получать соответствующие условия инвариантности, в этом случае используется операционное исчисление и обычные представления теории автоматического регулирования и управления.

Если из выражения (6.4) определить  $X_i(p)$ , то при нулевых начальных условиях

$$X_j(p) = [M_{1j}(p) F_1(p) + \dots + M_{lj}(p) F_l(p) + \dots + M_{nj}(p) F_n(p)]/D(p).$$

Считая все возмущения, кроме  $f_i(t)$ , равными нулю, запишем выражение для передаточной функции  $W(p)$  между точкой приложения внешнего воздействия  $f_i(t)$  и точкой измерения координаты  $X_i(t)$  как

$$W(p) = X_i(p)/F_i(p) = M_{ii}(p)/D(p). \quad (6.7)$$

При выполнении условия абсолютной инвариантности (6.6) из выражения (6.7) получаем, что  $W(p) \equiv 0$  при  $D(p) \neq 0$ .

Таким образом, для достижения абсолютной инвариантности некоторой координаты  $X_i(t)$  относительно внешнего воздействия  $f_i(t)$  необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция  $W(p)$  между внешним воздействием  $f_i(t)$  и входным сигналом измерительного устройства  $x_i(t)$  была бы тождественно равна нулю. При этом остальные воздействия отсутствуют, а начальные значения всех координат нулевые.

Для САУ, созданных на основе принципа регулирования по отклонениям, практически нельзя добиться абсолютной инвариантности регулируемого параметра  $x(t)$  относительно внешнего возмущения  $f(t)$ , действующего на сам объект регулирования, поскольку при этом возникает затруднение принципиального характера: для удовлетворения условия абсолютной инвариантности необходимо иметь физические устройства, выполняющие операции идеального дифференцирования. Это практически недостижимо. Следует отметить, что выполнение дифференцирования, весьма близкого к идеальному, не обеспечивает условия абсолютной инвариантности. Даже малое отклонение от идеальности приводит к такому же, хотя и малому, но существенному отклонению от условий абсолютной инвариантности (6.6), а при перекompенсации, даже если она очень мала, САУ может стать «негрубой», по определению А. А. Андропова. Это означает, что в соответствующих характеристических уравнениях САУ могут появиться малые отрицательные члены, порождающие неустойчивость системы.

Таким образом, при отказе от идеализации дифференциаторов в САУ, созданных на основании принципа регулирования по отклонениям, появляются неустранимые противоречия между требованиями устойчивости и инвариантности. Поэтому и возникает необходимость отбора САУ, которые при выполнении условий абсолютной инвариантности не превращаются из «грубых» в «негрубые». Динамический смысл условия абсолютной инвариантности, т. е. полной компенсации возмущений, заключается в том, что САУ создает воздействие на объект управления, в точности равное внешнему воздействию на него, но противоположно направленное, т. е.  $W(p) = -F(p)$ .

При постановке задач инвариантности возможны случаи, когда учитываются действия внешних возмущений не только на объект управления, но и на элементы САУ. При этом уравнения, описывающие динамические свойства САУ, имеют прежний вид (см. (6.1)).

Можно стремиться к достижению инвариантности одной из координат относительно всех внешних возмущений или к достижению инвариантности всех координат относительно одного какого-либо из возмущений. Такие задачи называются *задачами полиинвариантности*.

В рассмотренных случаях предполагалось, что внешнее возмущение, действующее на объект управления, или помеха, действующая на какой-либо из элементов САУ, являются неизвестными и произвольно изменяющимися функциями времени. Если же возмущающее воздействие есть известная функция времени, то достигнуть инвариантности той или другой координаты относительно этого возмущения значительно проще. В самом общем виде проблема инвариантности при функционально заданных возмущениях рассмотрена в литературе.

$$\begin{cases} a_{11}(q)x_1 + a_{12}(q)x_2 + \dots + a_{1j}(q)x_j + \dots + a_{1n}(q)x_n = f_1(t) \\ a_{21}(q)x_1 + a_{22}(q)x_2 + \dots + a_{2j}(q)x_j + \dots + a_{2n}(q)x_n = f_2(t) \\ \vdots \\ a_{i1}(q)x_1 + a_{i2}(q)x_2 + \dots + a_{ij}(q)x_j + \dots + a_{in}(q)x_n = f_i(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(q)x_1 + a_{n2}(q)x_2 + \dots + a_{nj}(q)x_j + \dots + a_{nn}(q)x_n = f_n(t) \end{cases}, \quad (6.8)$$

где коэффициенты  $a_{ij}(q)$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) являются полиномами, соответствующими системе уравнений (6.1), совпадало бы с решением  $x_1, x_2, \dots$  для этой САУ в разомкнутом ее состоянии, но при учете условий абсолютной инвариантности, отсутствии других внешних возмущений и нулевых начальных значениях всех координат.

Достижение абсолютной инвариантности — это нахождение после решения системы уравнений (6.8) вынужденной составляющей, возникающей в результате действия соответствующего возмущения. Переходная составляющая, которая обуславливается начальными значениями координат, может и не быть равной нулю. Например, если в системе (6.8) только первое уравнение описывает динамические свойства объекта управления, а все остальные уравнения отражают динамические свойства

САУ, то при размыкании всех связей на выходе САУ и объекта первые члены во всех уравнениях (6.8), кроме первого, становятся равными нулю. Тогда система дифференциальных уравнений (6.8) принимает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(q)x_1 + a_{12}(q)x_2 + \dots + a_{1j}(q)x_j + \dots + a_{1n}(q)x_n & = f_1(t) \\ 0 & + a_{22}(q)x_2 + \dots + a_{2j}(q)x_j + \dots + a_{2n}(q)x_n & - f_2(t) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & + a_{i2}(q)x_2 + \dots + a_{ij}(q)x_j + \dots + a_{in}(q)x_n & - f_i(t) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & + a_{n2}(q)x_2 + \dots + a_{nj}(q)x_j + \dots + a_{nn}(q)x_n & = f_n(t) \end{vmatrix}$$

Если на систему действует только одно возмущение  $f_i(t)$ , то выражение изображения по Лапласу координаты  $x_i$  при нулевых начальных условиях для замкнутой САУ имеет вид

$$X_1(p) = [M_{j_1}(p) D_0(p)] F_1(p), \quad (6.9)$$

где  $D_0(p)$  — главный определитель системы уравнений (6.8), который записывается в виде выражения (6.5);  $M_{i1}$  — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $a_{i1}(p)$ . Условием абсолютной инвариантности координаты  $x_1(t)$  относительно возмущения  $f_1(t)$  является

$$M_{ij}(p) = 0, \quad (6.10)$$

Для разомкнутой САУ выражение изображения по Лапласу координаты  $x_1$  при перечисленных условиях будет иметь вид

$$X_{ip}(p) \stackrel{\text{by assumption}}{=} [M_{ilp}(p), \mathcal{D}_p(p)] F_l(p). \quad (6.11)$$

Поскольку всегда  $M_{ilp}(p) \equiv M_{il}(p)$ , условие инвариантности (6.10) является достаточным и для САУ в разомкнутом состоянии.

Выражения (6.9) и (6.11) будут одинаковыми при выполнении условий

$$D_0(p) \neq 0, \quad D_n(p) = 0. \quad (6.12)$$

Первое из них в реальных САУ выполняется фактически всегда. Исходя из этого, можно сформулировать критерий физической неосуществимости абсолютно инвариантной САУ следующим образом: *абсолютно инвариантная САУ не может быть физически реализована, если матрица системы дифференциальных уравнений, которая описывает поведение исследуемой САУ в разомкнутом состоянии, после учета условий абсолютной инвариантности становится тождественно равной нулю, т. е.  $D_p(p) \equiv 0$* . Использование этого критерия весьма удобно при практическом отборе неосуществимых абсолютно инвариантных САУ.

Определение условий инвариантности сводится к тому, чтобы при  $D_p(p) \neq 0$  в системе управления можно было реализовать

корректирующее устройство, вводимое в нее для достижения условия абсолютной инвариантности (6.10). Если передаточная функция такого корректирующего устройства может быть представлена в виде рациональной дроби

$$X(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}, \quad (6.13)$$

то названное определение условий инвариантности сводится к проверке условия

$$m \leq n, \quad (6.14)$$

где  $m$  и  $n$  — показатели степени полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции (6.13). Условие (6.14) определяет возможность создания на практике идеально дифференцирующих звеньев.

Таким образом, условия реализуемости абсолютно инвариантных САУ сводятся к проверке требований (6.12) и (6.14) для передаточной функции корректирующего устройства, с помощью которого обеспечивается выполнение условий абсолютной инвариантности. Так как исходная САУ состояла только из физически реализуемых корректирующих устройств, то и вся САУ физически реализуется при выполнении условий абсолютной инвариантности.

Уже отмечалось, что для достижения инвариантности САУ необходимо, чтобы передаточная функция (6.7) между внешним воздействием и входным сигналом измерительного устройства была бы равна нулю. Реализовать это условие можно, если передаточную функцию (6.7) представить в виде разности не менее двух передаточных функций  $W(p) = W_1(p) - W_2(p)$ . Тогда критерий реализуемости абсолютно инвариантных САУ можно сформулировать следующим образом: для физической реализуемости абсолютно инвариантной САУ необходимо наличие в схеме не менее двух каналов передачи возмущающего воздействия между точкой его приложения и той точкой, относительно которой достигается инвариантность. Следует заметить, что использование принципа двухканальности — необходимое, но недостаточное условие физической реализуемости абсолютной инвариантности САУ.

На основании принципа двухканальности при построении инвариантных систем используют метод комбинированного управления. Суть его в том, что при построении замкнутых САУ наряду с регулированием по отклонению или ошибке используется регулирование по задающему или возмущающему воздействию. Следовательно, в системах комбинированного управления осуществляется регулирование по замкнутому и разомкнутому циклам. Комбинированные системы по сравнению с системами управления по отклонению являются «грубыми», и при малых отклонениях от условий абсолютной инвариант-

ности не возникает противоречий между условиями инвариантности и устойчивости.

При проектировании комбинированных САУ кроме точных средств измерения возмущений необходимо разработать также способы их дифференцирования. Реализовать высокий порядок дифференцирования практически трудно, поэтому требования, которые предъявляются к невозмущаемой инвариантной САУ, могут быть выполнены приближенно, с точностью до некоторого значения  $\varepsilon$ . Исследование условий инвариантности этого значения  $\varepsilon$  следует объединить с оценкой свойств и особенностей процессов  $x_{\text{инв}}(t)$ , которые зависят от степени близости к абсолютной инвариантности. Инвариантность до принятого значения  $\varepsilon$  в САУ может быть связана косвенными и прямыми оценками  $x_{\text{инв}}(t)$  на конечном или бесконечном интервале времени. Косвенные оценки инвариантности определяются выражениями точности работы комбинированной САУ в установившемся состоянии. Прямые оценки инвариантности характеризуются величиной отклонений комбинированной САУ в зависимости от отклонений исходной САУ, работающей по принципу отклонений. Косвенные оценки инвариантности САУ в основном соответствуют инвариантности до принятого значения  $\varepsilon$  при  $t \rightarrow \infty$ , а прямые оценки — конечному интервалу времени от нуля до  $t$ . Для комбинированной САУ при нулевых начальных условиях  $x_{\text{инв}}(t)$  можно записать как

$$L[x_{\text{инв}}(t)] = \frac{N_1(p) - N_2(p)}{D_0(p)} L[f(t)], \quad (6.15)$$

где  $D_0(p)$  — главный определитель системы дифференциальных уравнений;  $N_1(p)$ ,  $N_2(p)$  — соответствующие алгебраические дополнения. Преобразуем выражение (6.15) к виду

$$L[x_{\text{инв}}(t)] = \left[ \frac{N_1(p)}{D_0(p)} F(p) \right] \left[ 1 - \frac{N_2(p)}{N_1(p)} \right], \quad (6.16)$$

$$L[f(t)] = F(p).$$

Значение  $\varepsilon$  в случае приближенного выполнения условий инвариантности принимаем равным  $\varepsilon = N_1(p) - N_2(p)$ . Тогда в случае абсолютной инвариантности при  $\varepsilon = 0$  и  $N_1(p) = N_2(p)$  получим  $x_{\text{инв}}(t) = 0$ . Для приближенного выполнения условий инвариантности в САУ  $\varepsilon \neq 0$  и  $N_1(p) - N_2(p) \neq 0$ , следовательно  $x_{\text{инв}}(t) \neq 0$ .

Используя теорему свертки и представляя  $x_{\text{инв}}(t)$  в виде функции от значений процесса  $x(t)$  системы и ее производных, из выражения (6.16) находим

$$x_{\text{инв}}(t) = C_0 x(t) + C_1 \dot{x}(t) + \frac{1}{2!} C_2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{1}{n!} C_n x^{(n)}(t), \quad (6.17)$$

где  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  — так называемые коэффициенты инва-

*риантности системы.* Коэффициент  $C_0$  соответствует инвариантности  $x_{инв}(t)$  системы (6.15) относительно внешнего воздействия  $f(t) = \text{const}$  и характеризует связь между статическими отклонениями комбинированной САУ и системы, работающей по принципу отклонения. В случае абсолютной статической инвариантности САУ коэффициент  $C_0 = 0$ . Коэффициент  $C_1$  соответствует инвариантности САУ относительно внешнего воздействия  $f(t) = mt$  и характеризует связь между установившейся скоростью отклонения комбинированной САУ и системы, работающей по принципу отклонения. В случае абсолютной статической и кинематической инвариантностей САУ коэффициенты  $C_0 = C_1 = 0$ . Коэффициенты  $C_2, C_3, C_4, \dots, C_n$  характеризуют соответствующие связи между установившимися значениями ускорения, третьей, четвертой и другими высшими производными функций в комбинированной и некомбинированной системах.

Таким образом, реализация условий инвариантности до некоторого значения  $\varepsilon$  в комбинированных САУ осуществляется до величины, определяемой техническими требованиями, предъявляемыми к системе управления.

## 6.2. КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

При разработке комбинированных САУ основные трудности связаны с необходимостью вводить в нее дополнительные устройства, с помощью которых реализуется требуемое число производных от управляющего (или возмущающего) воздействия. Введение осуществляется с помощью устройств, представляющих собой дифференциаторы высокого порядка, техническая реализация которых в большинстве случаев затруднительна. При практической реализации комбинированных САУ во многих случаях достаточно для резкого повышения точности воспроизведения управляющего воздействия вводить в систему устройства, обеспечивающие лишь первую и вторую производные от этого воздействия.

В комбинированных системах шире возможность воздействия условий инвариантности на уменьшение ошибки системы в переходном процессе путем влияния начальных условий на изменение коэффициентов связи по возмущению. Комбинированная САУ не является просто суммой разомкнутой и замкнутой систем, а имеет свои характерные свойства, которые не присущи исходным системам. К таким свойствам можно отнести следующие:

1. Главная часть ошибки, вызываемой основными возмущениями, ликвидируется разомкнутой частью системы, так как при проектировании разомкнутой части комбинированной САУ в нее вложена вся априорная информация об объекте. Вследствие этого в комбинированной САУ резко снижаются началь-

ные отклонения системы от равновесного состояния на оптимальной характеристике. Это, в свою очередь, уменьшает время переходных процессов. В инвариантных САУ начальные отклонения равны нулю (т. е. отсутствуют).

2. В замкнутой части комбинированной САУ можно значительно уменьшить коэффициент усиления, поскольку основная часть ошибки ликвидируется разомкнутой частью. Это приводит к сокращению времени переходных процессов и повышению устойчивости.

3. Мощность исполнительных элементов замкнутой части системы уменьшается в пять-десять раз, так как основная мощность управления поступает от разомкнутой части. Это, в свою очередь, уменьшает постоянные времени и повышает частоту собственных колебаний замкнутых контуров комбинированных САУ, что также приводит к повышению устойчивости и быстроты действия всей системы в целом.

4. Введение в систему управления САУ сигнала, пропорционального производной внешнего воздействия (управляющего или возмущающего), не влияет на ее устойчивость. При этом преобразующее устройство, через которое вводятся внешние воздействия, должно быть устойчивым.

5. Перерегулирование в комбинированной САУ несколько увеличивается.

6. Комбинированная САУ может отрабатывать некоторые виды входных сигналов с нулевой установившейся ошибкой, т. е. она становится не зависящей от внешнего воздействия.

7. Комбинированная САУ, в которой выполнены условия полной инвариантности, имеет полосу пропускания по частоте без амплитудных и фазовых искажений, равную бесконечности. Линейная комбинированная САУ, в которой выполнены условия полной инвариантности по управляющему воздействию  $g$ , имеет структурную схему, изображенную на рис. 6.1. Выбор структуры и параметров элемента  $W_1(p)$  следует производить с учетом реальных требований к точности строботки входного сигнала. Поскольку создать реальную САУ с таким свойством невозможно, то речь может идти лишь о частичном выполнении условий инвариантности. При этом полоса пропускания системы будет ограниченной, и могут возникнуть, особенно при высокочастотных входных сигналах, амплитудные и фазовые искажения. В таких случаях целесообразно стремиться не к полному устранению ошибки, а к ее уменьшению.

Преимущества комбинированных САУ, как правило, увеличиваются с повышением требований к точности системы. Только в очень простой системе с большой допустимой ошибкой и вялыми переходными процессами комбинированный принцип управления может оказаться нерациональным. В САУ комбинированное управление целесообразно применять, когда тре-

буется получить высокую точность управления при больших значениях скоростей и ускорений входного воздействия.

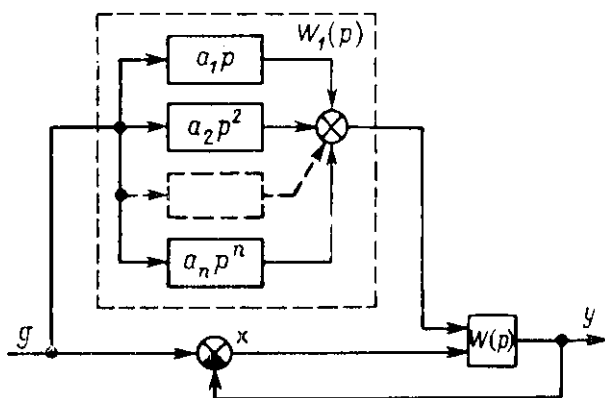


Рис. 6.1.

Введем понятие *эквивалентной передаточной функции комбинированной САУ*. Рассмотрим структурную схему системы с комбинированным управлением (рис. 6.2), где  $g$  — управляющее воздействие;  $y$  — воспроизводимый сигнал;  $x$  — сигнал ошибки;  $W(p)$  и  $W_1(p)$  — соответственно передаточные функции разомкнутой части и связи по управляющему воздействию.

При отсутствии регулирования по управляющему воздействию, т. е. при  $W_1(p) = 0$ , управляемый сигнал  $y$  связан с управляющим воздействием  $g$  через передаточную функцию замкнутой части системы соотношением

$$y = \Phi(p) g = [W(p) / (1 + W(p))] g. \quad (6.18)$$

При введении регулирования по управляющему воздействию воспроизводимый сигнал  $y$  описывается выражением

$$y = [W(p) / (1 + W(p))] [1 + W_1(p)] g = \Phi_{\text{эв}}(p) g, \quad (6.19)$$

$$\text{где } \Phi_{\text{эв}}(p) = W(p) [1 + W_1(p)] / [1 + W(p)]$$

— эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом регулирования по управляющему воздействию.

Из сравнения выражений (6.18) и (6.19) следует, что введение регулирования по управляющему воздействию не изменяет характеристического уравнения САУ, поскольку знаменатель в этих выражениях одинаков:  $[1 + W(p)]$ . Следовательно, при введении дополнительного регулирования по управляющему воздействию условия устойчивости САУ не нарушаются; кроме того, сохраняются оценки качества переходного про-

цесса в системе, основанные на использовании корней характеристического уравнения.

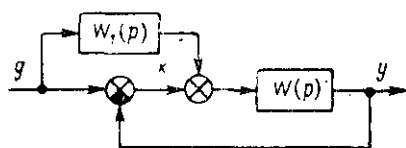


Рис. 6.2.

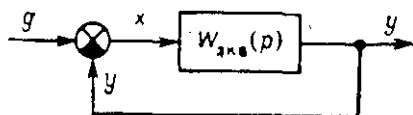


Рис. 6.3.

Эквивалентная передаточная функция замкнутой комбинированной САУ по ошибке будет иметь вид

$$\Phi_{x \text{ экв}}(p) = 1 - \Phi_{\text{экв}}(p) = [1 - W_1(p)W(p)]/[1 + W(p)], \quad (6.20)$$

а для разомкнутой комбинированной САУ

$$W_{\text{экв}}(p) = \Phi_{\text{экв}}(p)/[1 - \Phi_{\text{экв}}(p)] = W(p)[1 + W_1(p)]/[1 - W_1(p)W(p)]. \quad (6.21)$$

Переход к эквивалентной передаточной функции (6.21) позволяет заменить структурную схему комбинированной САУ, изображенную на рис. 6.2, эквивалентной ей обычной схемой САУ, которая работает по отклонению (рис. 6.3).

Из выражения (6.20) определяем условие абсолютной инвариантности САУ, приравняв  $\Phi_{x \text{ экв}}(p)$  к нулю. Оно будет иметь следующий вид:

$$W_1(p) = 1/W(p). \quad (6.22)$$

Если выражение (6.22) разложить в ряд по возрастающим степеням оператора, то получим необходимый вид функции, которая определяет вводимый в систему сигнал от управляющего воздействия:

$$W_1(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n. \quad (6.23)$$

При реализации всех производных от управляющего воздействия в САУ, которая будет иметь структурную схему, показанную на рис. 6.1, будет осуществлена абсолютная инвариантность. В большинстве реальных случаев можно точно ввести в САУ первую производную, а все последующие производные получить приближенно. Поэтому практически может быть получена инвариантность до некоторого значения  $\varepsilon$ . Это будет соответствовать введению ограниченного числа первых членов разложения (6.23).

Иногда сигнал по управляющему воздействию может подаваться не на вход САУ, как это показано на рис. 6.2, а в не-

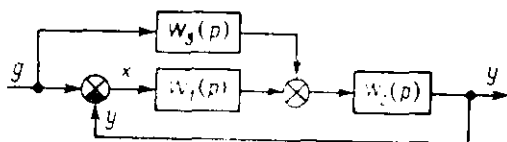


Рис. 6.4.

которую точку внутри канала регулирования (рис. 6.4). Тогда эквивалентная передаточная функция замкнутой комбинированной САУ будет иметь вид

$$\Phi_{\text{экр}}(p) = W_2(p) [W_1(p) + W_3(p)] [1 + W_1(p)],$$

а для разомкнутой комбинированной САУ —

$$W_{\text{экр}}(p) = W_2(p) [W_1(p) + W_3(p)] [1 - W_2(p) W_3(p)]. \quad (6.24)$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой комбинированной САУ по ошибке описывается выражением

$$\Phi_{\text{х экр}}(p) = [1 - W_2(p) W_3(p)] [1 + W_1(p) W_2(p)], \quad (6.25)$$

откуда условие абсолютной инвариантности записывается как

$$W_3(p) = 1/W_2(p).$$

Структурная схема эквивалентной САУ, соответствующей передаточной функции (6.24), примет такой вид, как показано

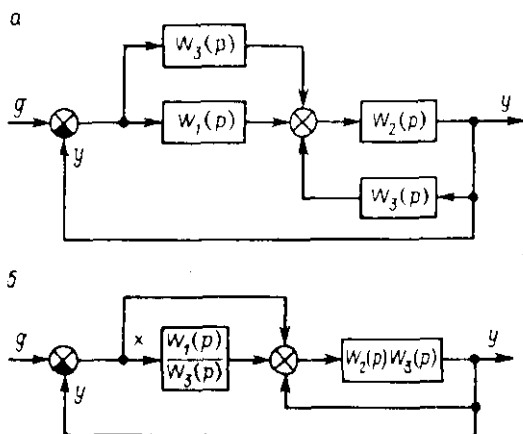


Рис. 6.5.

на рис. 6.5, а. Передаточную функцию (6.24) можно записать следующим образом:

$$W'_{\text{экв}}(p) = \frac{W_2(p) W_1(p)}{1 - W_2(p) W_3(p)} \left[ 1 + \frac{W_1(p)}{W_3(p)} \right]. \quad (6.26)$$

Это соответствует представлению эквивалентной САУ в виде последовательного соединения элемента с передаточной функцией  $W_1(p)/W_3(p)$ , замкнутого положительной единичной прямой связью, и элемента с передаточной функцией  $W_2(p)W_3(p)$ , замкнутого положительной единичной обратной связью. Структурная схема эквивалентной САУ с  $W'_{\text{экв}}(p)$  (6.26) изображена на рис. 6.5, б.

Таким образом, динамические свойства комбинированной САУ (см. рис. 6.4) можно исследовать по эквивалентной структурной схеме САУ с управлением только по ошибке (см. рис. 6.5).

Одной из основных задач реализации комбинированных САУ является измерение возмущений, действующих на систему управления, и создание канала управления по возмущению. Существует *непосредственное* и *косвенное измерение возмущений*. Непосредственное измерение возмущений осуществляется с помощью разных датчиков возмущений. Необходимость косвенного измерения возникает либо в связи с физической невозможностью непосредственного измерения, либо в связи с техническими трудностями при изготовлении соответствующего устройства непосредственного измерения возмущений. Системы с управлением по возмущению, измеренному косвенным путем, имеют свои отличительные особенности. В зависимости от способа реализации канала управления по косвенно измеренному возмущению система управления может иметь свойства, аналогичные свойствам систем с положительной обратной связью, но может иметь и свойства, близкие к свойствам комбинированных САУ. На рис. 6.6 представлена структурная схема косвенного измерения возмущений, где  $F$  — измеряемое возмущение,  $f$  — сигнал системы косвенного измерения;  $x$ ,  $y$  — сравниваемые координаты системы;  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  — передаточные функции элементов системы, в которой производится измерение возмущения;  $W_{x1}(p)$ ,  $W_{x2}(p)$  — передаточные функции элементов системы косвенного измерения возмущения.

Выражение для сигнала системы косвенного измерения имеет вид

$$f = W_{x1}(p) y - W_{x2}(p) x = W_{x1}(p) y - W_{x2}(p) [W_2(p) F + W_2(p) W_1(p) y] = [W_{x1}(p) - W_1(p) W_2(p) W_{x2}(p)] y - W_{x1}(p) W_2(p) F.$$

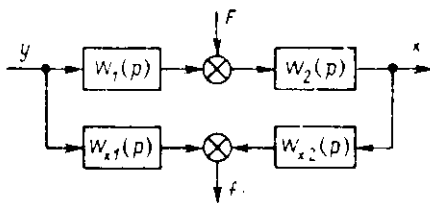


Рис. 6.6.

При соблюдении условий инвариантности сигнала  $f$  к координате  $y$  получаем

$$W_{x1}(p) = W_{x2}(p) W_1(p) W_2(p). \quad (6.27)$$

Тогда сигнал  $f$  будет зависеть только от возмущения  $F$ , т. е.  $f = -W_{x2}(p) W_2(p) F$ . Если выполним условие  $W_{x2}(p) = 1/W_2(p)$ , то получим  $f = -F$ .

Таким образом, с помощью системы косвенного измерения возмущения можно получить сигнал, равный возмущению, не прибегая к созданию и использованию специальных устройств непосредственного измерения возмущающих воздействий.

В общем виде передаточную функцию элемента  $W_2(p)$  можно записать как

$$W_2(p) = N_2/P_2, \quad (6.28)$$

где  $N_2$  — полином числителя;  $P_2$  — полином знаменателя, причем известно, что степень полинома числителя в реальных устройствах всегда меньше степени полинома знаменателя. Однако при выполнении условия (6.28) получаем физически нереализуемое звено:

$$W_{x2}(p) = N_{x2} P_{x2} = P_2/N_2.$$

Если  $W_2(p) = K_2$  является безынерционным звеном, то передаточная функция элемента  $W_{x2}(p) = 1/K_2$ , и его можно физически реализовать. Следовательно, чтобы произвести косвенное измерение возмущения, необходимо взять разность двух координат системы ( $x, y$ ), между которыми находится точка приложения возмущения, и подстройкой соответствующих элементов ( $W_{x1}(p), W_{x2}(p)$ ) измерительной системы добиться, чтобы сигнал системы измерения был функцией одного только возмущения.

При реализации управления по косвенно измеренному возмущению сигнал измерительной системы вводится в элемент, который может быть расположен до точки приложения возмущения (рис. 6.7, а) или после нее (рис. 6.7, б). На рисунке  $g$  — управляющее воздействие;  $W_1(p), W_2(p), W_4(p), W_5(p), W_6(p)$  — передаточные функции элементов системы управления;  $W_3(p)$  — передаточная функция элемента, через который сигнал  $f$  вводится в систему управления (канал управления по косвенно измеренному возмущению).

Системы с введением сигнала возмущения, измеренного косвенным путем, и элемент, расположенный до точки приложения возмущающего воздействия, характеризуются следующими свойствами: во-первых, понижением порядка характеристического уравнения при выполнении условий инвариантности (6.34); во-вторых, наличием положительной обратной связи ( $W_{x1}(p) W_3(p)$ ); в-третьих, критичностью к настройке элемента

$W_{x1}(p)$  измерительной системы при выполнении условия инвариантности (6.34). Перекомпенсация, возможная при настройке  $W_{x1}(p)$ , приводит к появлению отрицательных коэффициентов при высших степенях  $p$  характеристического уравнения. Такие системы являются «негрубыми», и чтобы приблизить их динамические свойства к динамическим свойствам «грубых» систем, необходимо ввести дифференцирующие устройства в элемент  $W_{x2}(p)$ , в соответствии с (6.37) и (6.38). Динамические свойства рассматриваемой системы не зависят от параметров измерительной системы ( $W_{x1}(p)$ ,  $W_{x2}(p)$ ), а также от параметров канала управления по косвенно измеренному возмущению ( $W_3(p)$ ).

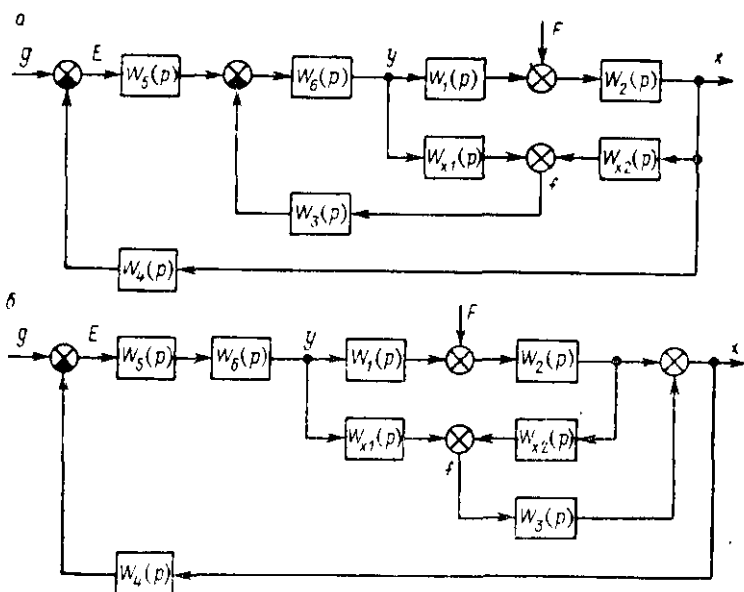


Рис. 6.7.

Чтобы ввести управление по возмущению, измеренному косвенным путем, необходима специальная система управления со своим двигателем, которая связана с первой системой и нагрузкой через дифференциал. Системы такого рода называют *комбинированными двухдвигательными*. Система, управляемая по возмущению, называется *силовой*, а система, управляемая по отклонению, — *корректирующей*. В двухдвигательных комбинированных САУ с управлением по возмущению, измеренному косвенным путем, измерение возмущения производится в корректирующей системе, и сигнал системы косвенного измерения

является управляющим сигналом для силовой системы. В передаточной функции силовой системы  $W_3(p)$  порядок полинома знаменателя всегда больше порядка полинома числителя. Поэтому создать элемент с передаточной функцией практически не представляется возможным, а значит, не представляется возможным и реализовать условия полной инвариантности. Однако условия частичной инвариантности вполне реализуемы. Рассматриваемые системы по своим динамическим свойствам аналогичны системам комбинированного управления.

### 6.3. СИНТЕЗ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТИПОВЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Динамический синтез комбинированных САУ состоит в выборе структурной схемы, параметров, характеристик и способов их технической реализации. При этом динамические и эксплуатационные свойства всей системы в целом должны обеспечиваться использованием в ней наиболее простых и надежных технических средств. В процессе синтеза можно выделить следующие основные этапы:

- анализ свойств объекта управления и определение его статических и динамических характеристик;

- выбор структурной схемы комбинированной САУ и технических средств ее реализации;

- выбор эквивалентных передаточных функций комбинированной САУ и определение их параметров;

- определение условий инвариантности комбинированной САУ к выбранным воздействиям;

- определение корректирующих устройств, обеспечивающих желаемые динамические свойства всей САУ в целом;

- выбор схемы, способа технического осуществления и параметров корректирующих устройств;

- анализ полученной схемы САУ с целью подтверждения расчетным или экспериментальным путем удовлетворения требованиям, предъявляемым к комбинированной САУ.

В качестве примера рассмотрим следующую систему с комбинированным управлением по управляющему воздействию, электрохимическая и структурная схемы которой изображены на рис. 6.8. Следящая система состоит из чувствительного элемента (ЧЭ), включающего в себя датчик (Д) и приемник (Пр), усилителя (У), исполнительного двигателя (ИД), конструктивно связанного через редуктор (Р) с нагрузкой (Н). Введение в систему регулирования по первой производной от угла поворота командной оси осуществляется при помощи тахогенератора (Тг). В соответствии с общим случаем (см. рис. 6.4) будем иметь

$$W_1(p) = K_{\text{ч.э.}};$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{p(1 + T_{\text{н.д.}}p)(1 + T_{\text{г.р.}}p)K_{\text{ч.э.}}}; \quad W_3(p) = K_{\text{тг.р.}}p,$$

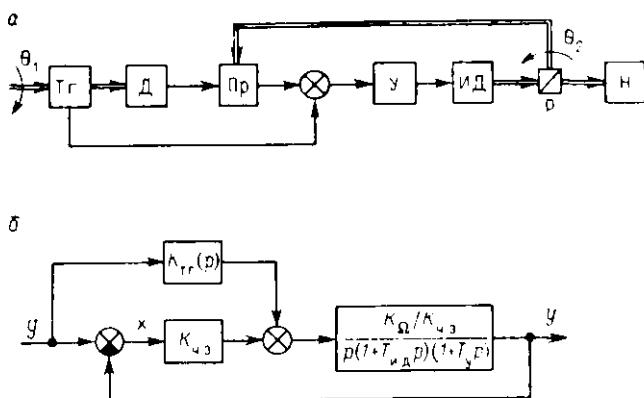


Рис. 6.8.

где  $K_{\text{з.з.}}$ ,  $K_{\text{т.г.}}$  — коэффициенты усиления чувствительного элемента и тахогенератора соответственно;  $K_{\text{з.}}$  — добротность следящей системы по скорости;  $T_{\text{и.д.}}$ ,  $T_{\text{у}}$  — постоянные времени исполнительного двигателя и усилителя соответственно. Тогда эквивалентная передаточная функция замкнутой следящей системы будет иметь вид

$$\Phi_{\text{э.кв.}}(p) = \frac{K_{\text{з.}}(1 + T_1 p)}{T_{\text{и.д.}} T_{\text{у}} p^3 + (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}}) p^2 + p + K_{\text{з.}}}$$

Здесь  $T_1 = K_{\text{т.г.}}/K_{\text{з.з.}}$  — постоянная времени цепи первой производной от угла поворота командной оси следящей системы.

Определим эквивалентную передаточную функцию комбинированной следящей системы по ошибке, используя формулу (6.25):

$$\Phi_{\text{о.кв.}}(p) = \frac{T_{\text{и.д.}} T_{\text{у}} p^3 + (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}}) p^2 + (1 - T_1 K_{\text{з.}})}{T_{\text{и.д.}} T_{\text{у}} p^3 + (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}}) p^2 + p + K_{\text{з.}}}$$

Ошибка следящей системы по скорости будет равна нулю, если в числителе последнего выражения будет равен нулю коэффициент при операторе  $p$  в первой степени, т. е.  $1 - T_1 K_{\text{з.}} = 0$ . Отсюда условие частичной инвариантности, обеспечивающей ликвидацию ошибки по скорости в системе

$$T_1 = 1/K_{\text{з.}} \quad (6.29)$$

Эквивалентную передаточную функцию разомкнутой комбинированной следящей системы можно найти из выражения (6.29):

$$W_{\text{э.кв.}}(p) = \frac{K_{\text{з.}}(1 + T_1 p)}{T_{\text{и.д.}} T_{\text{у}} p^3 + (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}}) p^2 + (1 - T_1 K_{\text{з.}})}$$

При выполнении условия инвариантности (6.29) эквивалентная передаточная функция разомкнутой комбинированной следящей системы будет соответствовать астатизму второго порядка:

$$W_{\text{э.кв.}}(p) = \frac{K_{\text{з.}}(1 + T_1 p)}{T_{\text{и.д.}} T_{\text{у}} p^3 + (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}}) p^2} = \frac{K_{\text{э.}}(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)},$$

где  $K_{\text{э.}} = K_{\text{з.}} / (T_{\text{и.д.}} + T_{\text{у}})$  — добротность комбинированной следящей системы

по ускорению;  $T_2 = T_{и.д} T_y / (T_{и.д} + T_y)$  — эквивалентная постоянная времени комбинированной следящей системы.

Следует отметить, что на практике возможно использование комбинированных САУ с введением регулирования по нескольким возмущающим воздействиям и получением абсолютной или частичной инвариантности по каждому из них. Однако это приводит к усложнению схемы САУ.

В настоящее время при автоматизации различного технологического оборудования широкое применение находят САУ, работающие в режиме низких скоростей. Основным для этих систем является обеспечение плавного движения их выходной оси. Неплавность работы САУ может быть вызвана появлением на выходной оси релаксационных или гармонических автоколебаний. Они возникают на низких скоростях даже в том случае, если задающее воздействие изменяется равномерно,

с постоянной скоростью. Возникновение автоколебаний связано с нелинейным характером изменения момента трения.

Для увеличения диапазона плавной работы САУ необходимо устранить или уменьшить до допустимой величины автоколебания, возникающие от наличия в системе момента трения. Существуют *механические и электрические способы воздействия* на появление колебаний на выходной оси САУ. Устранение автоколебаний механическими способами — задача сложная и трудоемкая, связанная с большими конструктивными изменениями. Использование электрических способов демпфирования (коррекции) САУ исключает автоколебания в системе и делает ее инвариантной к изменению момента трения ( $M_{тр}$ ) в зависимости от скорости выходной оси ( $\Omega$ ), т. е.  $M_{тр} = f(\Omega)$  (рис. 6.9, а, где  $M_0$  — момент трения покоя). Кривая  $M_{тр} = f(\Omega)$  в зоне низких скоростей имеет

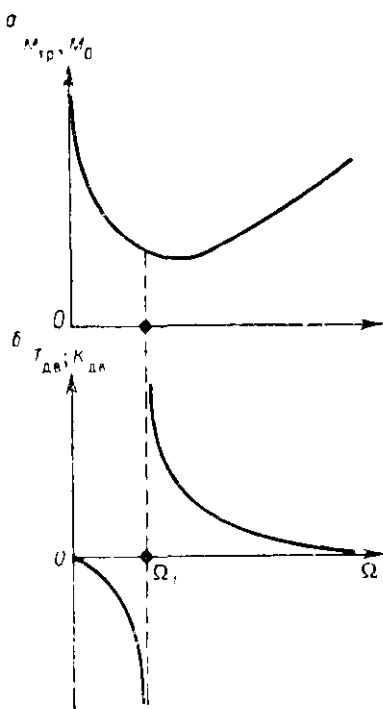


Рис. 6.9.

участок с отрицательным наклоном.

Исключение скачкообразного режима работы, т. е. релакса-

ционных колебаний, в САУ возможно при определенных соотношениях параметров (постоянных времени и коэффициентов передачи). Эти соотношения для САУ с астатизмом нулевого, первого и второго порядков определяются условиями, представленными в табл. 6.1—6.3. Условие бескачкообразности выведено из условия монотонности переходных процессов в замкнутой системе. Оно свидетельствует, что скачкообразное движение выходной оси САУ невозможно, если скорость выходной оси будет все время больше нуля. Последнее означает, что скорость изменения ошибки САУ после начала движения выходной оси должна быть отрицательной.

Если в системе не выполняется бескачкообразный режим, то в нее вводят электрические корректирующие устройства. Выбор их определяется возможностью реализации. Наиболее рационально применять жесткие и гибкие обратные связи, а также их комбинации. В табл. 6.1 и 6.2 мы представили условия бескачкообразной работы САУ с использованием жесткой, гибкой и комбинированной обратных связей с астатизмом нулевого, первого (см. табл. 6.1) и второго (см. табл. 6.2) порядков ( $W(p) = K_e(1+T_2p)[p^2(1+T_1p)]^{-1}$ ). Для САУ с астатизмом первого порядка, имеющих характеристическое уравнение третьего порядка, при определении вида корректирующего устройства в табл. 6.1 рассматривается реализация только первого условия бескачкообразности. Второе же условие проверяется с помощью номограммы, представленной на рис. 6.10. Практика использования этих корректирующих устройств позволяет дать следующие рекомендации:

- наиболее рациональным является охват жесткой отрицательной обратной связью апериодических звеньев системы;

- аналогичное воздействие оказывает на САУ введение в основную цепь системы дифференцирующих звеньев;

- охват жесткой отрицательной обратной связью дифференцирующих звеньев не рационален, поскольку в этом случае глубина обратной связи уменьшается;

- малая постоянная времени электродвигателя усложняет демпфирование системы, ее увеличение достигается охватом электродвигателя гибкой обратной связью;

- охват гибкой отрицательной обратной связью одного или нескольких апериодических звеньев одинаково влияет на скачкообразный режим работы САУ;

- глубина конкретного вида обратной связи определима, что облегчает синтез САУ по заданным параметрам (постоянным времени, добротности).

Бескачкообразный режим работы САУ, определяемый условиями, которые представлены в табл. 6.1, возможен при постоянстве параметров системы. Если же учесть, что при некоторой низкой скорости ( $\Omega_1$ ) параметры передаточной функции исполнительного двигателя ( $T_{дв}$  и  $K_{дв}$ ) могут несогласованно возра-

| $\frac{W(p)}{C_{AV}}$ разомкнутой САУ            | Замкнутая нескорректированная САУ                                                                                                                                                          | САУ с                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                  |                                                                                                                                                                                            | жесткой ( $K_{o.c.p}$ ), охватывающей одно апериодическое звено (1-4) и интегрирующее дифференцирующее, апериодическое звенья (5-8) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 1                                                | 2                                                                                                                                                                                          | 3                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $\frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$                   | $K < \frac{0,25 (T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} - 1$                                                                                                                                               | 1)                                                                                                                                  | $K < \frac{0,25 (T_1 + T_2 + K_{o.c})^2}{T_1 T_2 + K_{o.c} T_2} - 1$                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)}$          | $K < 0,074 \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \times$<br>$\times \left[ 4,5 (T_1 + T_2 + T_3) - \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)^2}{T_1 T_2 T_3} \right] - 1$ | 2)                                                                                                                                  | $K < 0,074 \left[ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{K_{o.c}}{T_1 (T_2 + T_3)} \right] \left( 1 + \frac{K_{o.c}}{T_1} \right)^{-1} \times$<br>$\times \left\{ 4,5 (T_1 + T_2 + T_3 + K_{o.c}) - \frac{[T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + K_{o.c} (T_2 + T_3)]^2}{T_1 T_2 T_3 + K_{o.c} T_2 T_3} \right\} - 1$ |
| $\frac{K(1+T_2 p)}{(1+T_1 p)(1+T_3 p)}$          | $T_2 > \frac{1}{K} [2 \sqrt{T_1 T_3 (1+K)} - (T_1 + T_3)]$                                                                                                                                 | 3)                                                                                                                                  | $T_2 > \frac{1}{K} [2 \sqrt{(T_1 T_3 + K_{o.c} T_3) (1+K)} - (T_1 + T_3 + K_{o.c})]$                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\frac{K(1+T_2 p)}{(1+T_1 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$ | $T_2 > \frac{1}{K} \left[ \frac{3(1+K)}{1/T_1 + 1/T_3 + 1/T_4} + 0,222 \frac{(T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_3 T_4)^2}{T_1 T_3 T_4} - (T_1 + T_3 + T_4) \right]$                                    | 4)                                                                                                                                  | $T_2 > \frac{1}{K} \left\{ \frac{3(1+K)(1+K_{o.c}/T_1)}{1/T_1 + 1/T_3 + 1/T_4 + K_{o.c}/[T_1 (T_3 + T_4)]} + 0,222 \left( \frac{T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_3 T_4 + K_{o.c}}{T_1 (T_3 + T_4)} \right)^2 \times \right.$                                                                                                            |

обратной связью

| гибкой ( $n_{0.c}T_1p^2$ ) без охвата дифференцирующего звена                                                                                                                                                           | комбинированной: жесткой, ( $K_{0.c}p$ ) охватывающей одно аperiodическое звено (1, 2), гибкой ( $n_{0.c}T_1p^2$ ) без охвата дифференцирующего звена (3, 4, 7, 8) и жесткой ( $K_{0.c}p$ ), охватывающей всю систему (5, 6)                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4                                                                                                                                                                                                                       | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $K < \frac{0,25 (T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2 + n_{0.c} T_3} - 1$                                                                                                                                                              | 1)<br>$K < \frac{0,25 (T_1 + T_2 + K_{0.c})^2}{T_1 T_2 + T_3 K_{0.c} + n_{0.c} T_3} - 1$                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $K < 0,074 \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{n_{0.c} T_4}{T_1 T_2 T_3} \right) \left[ 4,5 (T_1 + T_2 + T_3) - \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + n_{0.c} T_4)^2}{T_1 T_2 T_3} \right] - 1$ | 2)<br>$K < 0,074 \left[ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{K_{0.c}}{T_1 (T_2 + T_3)} + \frac{n_{0.c} T_4}{T_1 T_2 T_3} \right] \times \left( 1 + \frac{K_{0.c}}{T_1} \right)^{-1} \left\{ 4,5 (T_1 + T_2 + T_3 + K_{0.c}) - \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + K_{0.c} (T_2 + T_3) + n_{0.c} T_4)^2}{T_1 T_2 T_3 + K_{0.c} T_2 T_3} \right\} - 1$ |
| $T_2 > \frac{1}{K} \left[ 2 \sqrt{(T_1 T_3 + n_{0.c} T_4) (1 + K)} - (T_1 + T_3) \right]$                                                                                                                               | 3)<br>$T_2 > \frac{1}{K} \left[ 2 \sqrt{(T_1 T_3 + K_{0.c} T_3 + n_{0.c} T_4) (1 + K)} - (T_1 + T_3 + K_{0.c}) \right]$                                                                                                                                                                                                                                                |
| $T_2 > \frac{1}{K} \left[ \frac{3 (1 + K)}{1/T_1 + 1/T_3 + 1/T_4 + \frac{n_{0.c} T_5}{(T_1 T_3 T_4)}} + \frac{(T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_3 T_4 + n_{0.c} T_5)^2}{T_1 T_3 T_4 - (T_1 + T_3 + T_4)} \right] + 0,222$          | 4)<br>$T_2 > \frac{1}{K} \left\{ \frac{3 (1 + K) (1 + \frac{K_{0.c}}{T_1})}{1/T_1 + 1/T_3 + 1/T_4 + \frac{K_{0.c}}{T_1 (T_3 + T_4)}} + \frac{n_{0.c} T_5}{(T_1 T_3 T_4)} + \right.$                                                                                                                                                                                    |

| 1                                            | 2                                                                                                                                                          | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{K(1+T_2p)}{(1+T_1p)(1+T_3p)(1+T_4p)}$ | 1                                                                                                                                                          | $\times [(T_1T_3T_4 + K_{o.c}T_3T_4) - (T_1 + T_3 + T_4 + K_{o.c})]^{-1}$                                                                                                                                                                                                              |
| $\frac{K_Q}{p(1+T_1p)}$                      | $T_1 < \frac{0,25}{K_Q}$                                                                                                                                   | 5)<br>$T_1 < \frac{0,25}{K_Q} (1 + K_{o.c}).$<br>$K_{o.c} > 4K_QT_1 - 1$                                                                                                                                                                                                               |
| $\frac{K_Q(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}$              | $T_1 < \frac{0,25}{K_Q} (1 + K_QT_2)^2$                                                                                                                    | 6)<br>$T_1 < \frac{0,25}{K_Q} (1 + K_QT_2)^2 \times$<br>$\times \left[ 1 + K_{o.c} \frac{(1 - K_QT_2)^2}{(1 + K_QT_2)^2} \right],$<br>$K_{o.c} > \frac{4K_QT_1 - (1 + K_QT_2)^2}{(1 - K_QT_2)^2}$<br>$= \frac{T_1 - T_2^*}{T_2^* - T_2},$<br>$T_2^* = \frac{0,25}{K_Q} (1 + K_QT_2)^2$ |
| $\frac{K_Q}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$              | $T_1 + T_2 < 0,375/K_Q^0,$<br>$K_Q^0 = 2,53K_Q;$<br>$\{ 0,166(T_1 + T_2)(1 -$<br>$- \sqrt{1 - 2,66K_Q(T_1 + T_2)})K_Q <$<br>$< T_1T_2 < 0,25(T_1 + T_2)^2$ | 7)<br>$T_1 + T_2 < \frac{0,375}{K_Q^0} (1 + K_{o.c}).$<br>$K_{o.c} > 2,66K_Q^0(T_1 + T_2) - 1$                                                                                                                                                                                         |

| 4                                                                                                                          | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                            | $+ 0,222 \left[ \frac{T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_3 T_4 +}{(T_1 T_3 T_4 + K_{o.c} T_3 T_4)} - \right.$ $\left. + K_{o.c} / [T_1 (T_3 + T_4)] + n_{o.c} T_5^2 \right] -$ $\frac{(T_1 + T_3 + T_4 - K_{o.c})}{(T_1 + T_3 + T_4 - K_{o.c})}$                                                                                                            |
| $T_1^* < \frac{0,25}{K_{\Sigma}}, T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_2;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_2}$                          | <p>5)</p> $T_1^* < \frac{0,25}{K_{\Sigma}} (1 + K_{o.c}),$ $K_{o.c} > 4K_{\Sigma} T_1^* - 1; T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_2;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_2}$                                                                                                                                                                                   |
| $T_1^* < \frac{0,25}{K_{\Sigma}} (1 + K_{\Sigma} T_2)^2,$ $T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_3;$ $n_{o.c} = \frac{T_2^* - T_1}{T_3}$ | <p>6)</p> $T_1^* < \frac{0,25}{K_{\Sigma}} (1 + K_{\Sigma} T_2)^2 \times$ $\times \left[ 1 + K_{o.c} \frac{(1 - K_{\Sigma} T_2)^2}{(1 + K_{\Sigma} T_2)^2} \right],$ $K_{o.c} < \frac{T_1^* - T_2^*}{T_2^* - T_2};$ $T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_3;$ $T_2^* = \frac{0,25}{K_{\Sigma}} (1 + K_{\Sigma} T_2)^2;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_3}$ |
| $T_1^* + T_2 < \frac{0,375}{K_{\Sigma}^0},$ $T_1 = T_1 + n_{o.c} T_3;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_3}$                 | <p>7)</p> $T_1^* + T_2 = \frac{0,375}{K_{\Sigma}^0} (1 + K_{o.c}),$ $K_{o.c} > 2,66 K_{\Sigma} (T_1^* + T_2) - 1;$ $T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_3; n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_3}$                                                                                                                                                              |

| 1                                       | 2                                                                                                                                                                                                                                                                | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{K_2(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)}$ | $T_1 + T_3 < 0,375 \frac{(1 + K_2 T_2)^2}{K_2^0},$ $K_2^0 = 2,53 K_2;$ $\left\{ 0,166 (T_1 + T_3) (1 + K_2 T_2) \times \right.$ $\left. \times \left( 1 - \sqrt{1 - 2,66 \frac{T_1 + T_3}{(1 - K_2 T_2)^2}} \right) \right\} <$ $< T_1 T_3 < 0,25 (T_1 + T_3)^2$ | $8)$ $(T_1 + T_3) < \frac{0,375}{K_2^0} (1 + K_2 T_2)^2 \times$ $\times \left[ 1 + K_{0.c} \frac{(1 - K_2 T_2)^2}{(1 + K_2 T_2)^2} \right] +$ $+ 0,5 K_{0.c} T_2, K_{0.c} > \frac{2,66 K_2^0 (T_1 +$ $+ T_3) - (1 + K_2 T_2)^2}{1,33 K_2 T_2 +$ $+ (1 - K_2 T_2)^2} =$ $= \frac{T_1 + T_3 - T_2^*}{T_2^* - T_2};$ $T_2^* = \frac{0,375}{K_2^0} (1 + K_2 T_2)^2$ |

стать, а затем при дальнейшем уменьшении скорости неограниченно понижаться (рис. 6.9, б), то для устранения скачкообразного режима работы необходимо соблюсти условия, определяющие в этом случае параметры системы (табл. 6.3). При одновременном подчинении параметров условиям, указанным в табл. 6.1 — 6.3, движение выходной оси системы будет бескачкообразным во всем диапазоне низких скоростей.

Однако реализация бескачкообразного режима работы во всем диапазоне скоростей возможна лишь при соблюдении также и условия

$$n \geq \nu, \quad (6.30)$$

где  $n$  — количество дифференцирующих звеньев в основной цепи системы;  $\nu$  — порядок астатизма системы. Если последнее условие не выполняется, то необходимое количество дифференцирующих звеньев можно получить, применяя в основной цепи САУ последовательные корректирующие устройства. Полученные результаты можно распространить и на САУ с иными передаточными функциями, не представленными в указанных таблицах.

Для увеличения плавного диапазона низких скоростей САУ вследствие уменьшения или ликвидации гармонических автоколебаний (возникающих при работе системы на участке с отрицательным наклоном в зависимости момента трения от скорости даже в том случае, когда релаксационные колебания в системе полностью устранены) можно использовать электриче-

| 4                                                                                                                     | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_1^* + T_3 < \frac{0,375}{K_2^0} (1 + K_2 T_2)^2;$ $T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_4;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_4}$ | <p>8)</p> $T_1^* + T_3 < \frac{0,375}{K_2^0} (1 + K_2 T_2)^2 \times$ $\times \left[ 1 + K_{o.c} \frac{(1 - K_2 T_2)^2}{(1 + K_2 T_2)^2} \right] + 0,5 K_{o.c} T_2,$ $K_{o.c} > \frac{T_1^* + T_3 - T_2^*}{T_2^* - T_2};$ $T_1^* = T_1 + n_{o.c} T_4;$ $T_2^* = \frac{0,375}{K_2^0} (1 + K_2 T_2)^2;$ $n_{o.c} = \frac{T_1^* - T_1}{T_4}$ |

ские способы коррекции, аналогичные тем, которые применяются для устранения релаксационных колебаний. Условия обеспечения работы САУ на положительном участке зависимости  $M_{тр} = f(\Omega)$  во всем рабочем диапазоне низких скоростей совпадают с условиями устойчивости системы в этом же диапазоне скоростей. Поэтому условия отсутствия гармонических автоколебаний отождествляют с условиями обеспечения работы системы на положительном участке указанной зависимости. В дальнейшем они называются *условиями устойчивости САУ, работающих в режиме низких скоростей*.

При принятой форме кривой зависимости  $M_{тр} = f(\Omega)$  (см. рис. 6.9, а) необходимо обеспечить устойчивость системы, учитывая переход ее на низких скоростях из минимально-фазовой в неминимально-фазовую систему, а также изменение в зависимости от скорости параметров передаточной функции исполнительного двигателя САУ ( $T_{дв}$  и  $K_{дв}$ ) в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Наличие в замкнутой системе этих факторов при некоторой низкой скорости нарушает условие устойчивости, и в ней возникнут гармонические автоколебания даже в том случае, когда скачкообразное движение выходной оси САУ при этой скорости можно уменьшить или вообще устранить.

Методы определения устойчивости низкоскоростных САУ не всегда бывают пригодны для количественной оценки работы системы. Такая оценка требует знания зависимости  $M_{тр} = f(\Omega)$ , что на практике вызывает ряд трудностей. Поэтому далее сформулированы требования (без количественного знания характери-

| Вид коррекции, используемой в САУ                                                                                                              | Условия исключения скачкообразного режима работы замкнутой САУ                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Без коррекции                                                                                                                                  | $T_2 > 3T_1 + \frac{0,222}{K_{\varepsilon} T_1}$                                                                                                                                   |
| Жесткая обратная связь ( $K_{o.c.P}$ )<br>без охвата дифференцирующего звена<br>с охватом апериодического и одного интегрирующего звеньев      | $T_2 > 3T_1 + \frac{0,222}{K_{\varepsilon} T_1} - \frac{K_{o.c}}{K_{\varepsilon}}$                                                                                                 |
| Гибкая обратная связь ( $n_{o.c} T_3 P^2$ )<br>без охвата дифференцирующего звена<br>с охватом апериодического и одного интегрирующего звеньев | $T_2 > \frac{3T_1}{1 + K_{o.c}} + \frac{0,222(1 + K_{o.c})^2}{K_{\varepsilon} T_1}$<br>$T_2 > \frac{3T_1}{1 + n_{o.c} T_3} + \frac{0,222(1 + n_{o.c} T_3)^2}{K_{\varepsilon} T_1}$ |
| Комбинирующая обратная связь:<br>жесткая ( $K_{o.c.P}$ ) и гибкая ( $n_{o.c} T_3 P^2$ ), обе без охвата дифференцирующего звена                | $T_2 > 3(T_1 + n_{o.c} T_3) + \frac{0,222}{K_{\varepsilon}(T_1 + n_{o.c} T_3)}$                                                                                                    |
| жесткая с охватом апериодического и одного интегрирующего звеньев и гибкая без охвата дифференцирующего звена                                  | $T_2 > \frac{3T_1}{1 + n_{o.c} T_3} + \frac{0,222(1 + n_{o.c} T_3)^2}{K_{\varepsilon} T_1} - \frac{K_{o.c}}{K_{\varepsilon}}$                                                      |
| жесткая с охватом апериодического и одного интегрирующего звеньев и гибкая без охвата дифференцирующего звена                                  | $T_2 > \frac{3T_1}{1 + K_{o.c} + n_{o.c} T_3} + \frac{0,222(1 + K_{o.c} + n_{o.c} T_3)^2}{K_{\varepsilon} T_1}$                                                                    |

| W(p) разомкнутой САУ                             | Замкнутая нескорректированная САУ                                                                                 |                                                                                                                   | САУ с жесткой обратной связью |  |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|--|
|                                                  | $T_{дв} \rightarrow \infty, K_{дв} \rightarrow \infty$                                                            |                                                                                                                   |                               |  |
| 1                                                | 2                                                                                                                 | 3                                                                                                                 |                               |  |
| $\frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$                   | $K^* < 0,25 T_2$                                                                                                  | $K^* < 0,25 (1 + K_{0.c}) T_2$<br>$K_{0.c} > 4K^* T_2 - 1$                                                        |                               |  |
| $\frac{K}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)}$          | $K^* < 0,074 \left( \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \times$<br>$\times \frac{4,5 - (T_2 + T_3)^2}{T_2 T_3}$ | $K^* < 0,074 \left( \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) \frac{(1 + K_{0.c}) [4,5 - (T_2 + T_3)^2]}{T_2 T_3}$    |                               |  |
| $\frac{K(1+T_2 p)}{(1+T_1 p)(1+T_3 p)}$          | $T_2 > \frac{2\sqrt{K^* T_3} - 1}{K^*}$                                                                           | $T_2 > [2\sqrt{K^* T_3(1 + K_{0.c})} - (1 + K_{0.c})]$                                                            |                               |  |
| $\frac{K(1+T_2 p)}{(1+T_1 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)}$ | $T_2 > \left( \frac{3K^*}{1/T_3 + 1/T_4} + \frac{0,222(T_3 + T_4)^2}{T_3 T_4} - 1 \right)$                        | $T_2 > \left\{ \frac{3K^*}{1/T_3 + 1/T_4} + \frac{0,222(T_3 + T_4)^2}{T_3 T_4} - 1 \right\}$<br>$+ (1 + K_{0.c})$ |                               |  |

Продолжение табл. 6.3

| 1                                       | 2                                  | 3                                                                      |
|-----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{K_Q(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}$         | $T_2 > \frac{2}{\sqrt{K_Q^*}}$     | $T_2 > 2/\sqrt{K_Q^*(1+K_{0,c})}, K_{0,c} > 4/(K_Q^*T_2^2) - 1$        |
| $\frac{K_Q(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)}$ | $T_2 > \frac{2,6}{\sqrt{K_Q^*}}$   | $T_2 > 2,6/\sqrt{K_Q^*(1+K_{0,c})}, K_{0,c} > 6,76/(K_Q^*T_2^2) - 1$   |
| $\frac{K_Q(1+T_2p)^2}{p^2(1+T_1p)}$     | $T_2 > \frac{1,145}{\sqrt{K_Q^*}}$ | $T_2 > 1,145/\sqrt{K_Q^*(1+K_{0,c})}, K_{0,c} > 1,25/(K_Q^*T_2^3) - 1$ |

Примечания:  $K^* = K_{\text{ч.з}} K_{\text{у}} K_{\text{р}} K_{\text{о}}$ ;  $K_Q^* = K_{\text{ч.з}} K_{\text{у}} K_{\text{р}} K_{\text{о}} J$ ;  $K_{\text{е}}^* = 2K_{\text{ч.з}} K_{\text{у}} K_{\text{р}} K_{\text{о}} c J^2$ ;  $c = dM_{\text{лб}}/d\varphi$ ;  $K_{\text{ч.з}}$ ,  $K_{\text{у}}$ ,  $K_{\text{р}}$ ,  $K_{\text{о}}$  — коэффициенты передачи соответственно чувствительного элемента, усилителя, редуктора и двигателя (при холостом ходе);  $J$  — приведенный момент инерции двигателя;  $M_{\text{лб}}$  — момент вращения двигателя;  $\varphi$  — скорость движения исполнительской оси САУ; жесткая обратная связь в статической системе автоматического управления охватывает одно (первое) апериодическое звено, а в астатической — одно интегрирующее и одно (первое) апериодическое звено.

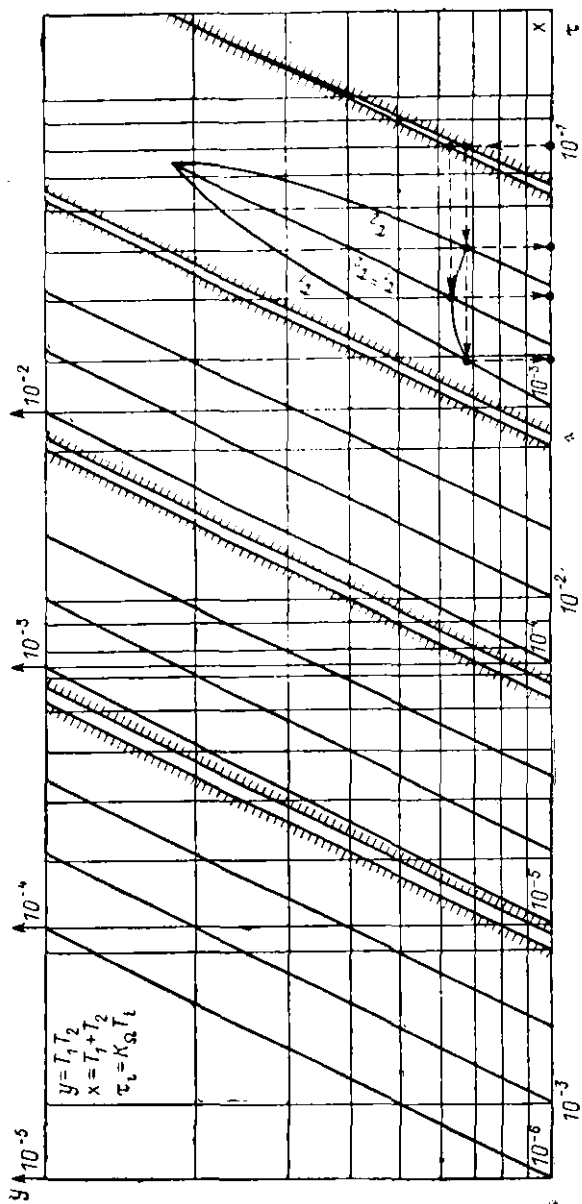


Рис. 6,10.

стики  $M_{тр} = f(\Omega)$  к структуре САУ низких скоростей, которая будет устойчива при переходе системы из минимально-фазовой в неминимально-фазовую, и наоборот, а также при неограниченном изменении (как возрастании, так и убывании) параметров передаточной функции исполнительного двигателя ( $T_{дв}$  и  $K_{дв}$ ). Отношение  $T_{дв}$  к  $K_{дв}$  при этом остается постоянным.

Теоретический анализ и экспериментальная проверка САУ с астатизмом разного порядка позволили сделать следующие выводы:

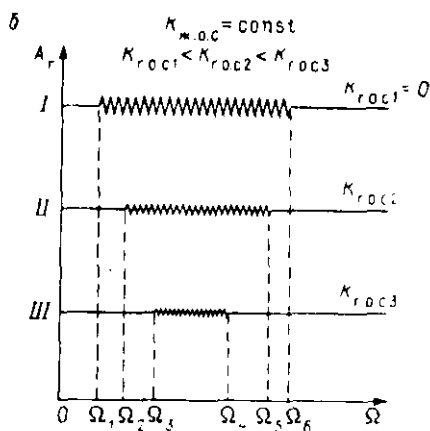
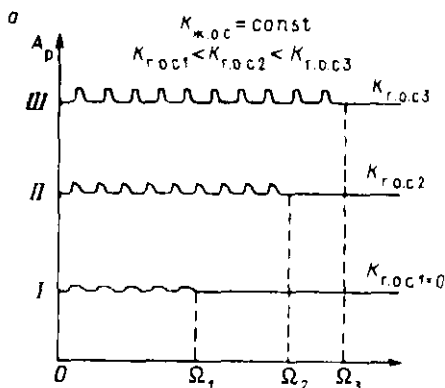
1. Устойчивость САУ низких скоростей при неограниченном изменении параметров исполнительного двигателя ( $T_{дв}$  и  $K_{дв}$ ) обеспечивается наличием в структуре системы дифференцирующих звеньев,

последовательно включенных в ее основную цепь. При этом количество дифференцирующих звеньев ( $n$ ) определяется степенью астатизма ( $v$ ).

2. Устойчивость неминимально-фазовых САУ, работающих на низких скоростях, обеспечивается применением в структуре системы жесткой отрицательной обратной связи, глубина которой должна способствовать выполнению условия  $K_{о.с.} > 1$ .

3. Для реализации устойчивости САУ во всем диапазоне низких скоростей необходимо выполнение двух предыдущих условий.

Предлагаемые электрические корректирующие устройства одновременно влияют на релаксационные автоколебания, вызывающие скачкообразное движение исполнительной оси САУ, и на гармонические автоколебания, появляющиеся в системе при потере устойчивости. При этом следует иметь



сг

Рис. 6.11.

в виду, что увеличение глубины жесткой обратной связи одновременно уменьшает амплитуды релаксационных ( $A_p$ ) и гармонических ( $A_r$ ) автоколебаний, а рост глубины гибкой обратной связи ( $K_{г.о.с.1} < K_{г.о.с.2} < K_{г.о.с.3}$ ) увеличивает амплитуду  $A_p$  (рис.

6.11, а) и одновременно уменьшает амплитуду  $A_r$  (рис. 6.11, б). Рабочие диапазоны САУ, плавно работающих на низких скоростях, определяются соответствующими величинами скоростей  $\Omega_1 - \Omega_6$ . Воздействие комбинированной обратной связи на релаксационные и гармонические автоколебания зависит от преобладания влияния соответствующих корректирующих устройств. Частота релаксационных и гармонических автоколебаний изменяется обратно пропорционально их амплитуде.

Следует отметить случай, когда заданными могут быть либо структурная схема, либо передаточная функция неизменяемой части САУ. Тогда при неудовлетворении условий плавности динамический синтез системы достигается аналогично. В связи с тем, что изменение динамических свойств САУ может быть осуществлено разными способами, синтез корректирующих устройств многозначен.

После определения корректирующих устройств и их параметров следует оценить, в какой степени рассчитанная следящая САУ удовлетворяет поставленным требованиям.

Таким образом, с помощью метода динамического синтеза можно рассчитать САУ с астатизмом нулевого, первого и второго порядков, которые будут плавно и устойчиво работать в любом рабочем диапазоне низких скоростей. Этот метод синтеза можно распространить также и на системы с астатизмом более высокого порядка. При синтезе САУ этим методом не требуется знания количественной зависимости  $M_{гр} = f(\Omega)$ , а достаточно лишь информации о характере ее изменения в области низких скоростей. Это является одним из главных и основных достоинств рассмотренного метода динамического синтеза САУ, поскольку в настоящее время практические определение зависимости  $M_{гр} = f(\Omega)$  весьма сложно, а теоретическое — просто невозможно. С помощью предлагаемого метода можно также провести анализ САУ, определить в них наличие плавного режима работы и (в случае его отсутствия) необходимые виды коррекции как с качественной, так и с количественной стороны.

Практика расчета САУ показала, что системы, содержащие только функционально необходимые элементы (чувствительный, элемент сравнения, усилительный, исполнительный и др.), обычно не обладают плавным режимом работы на низких скоростях. Для реализации этого режима в САУ используют корректирующие устройства в виде жестких, гибких и комбинированных обратных связей.

#### **6.4. СИНТЕЗ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

Расчет комбинированных САУ наиболее просто производить методом логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ). При этом необходимо знать передаточную функцию разомкну-

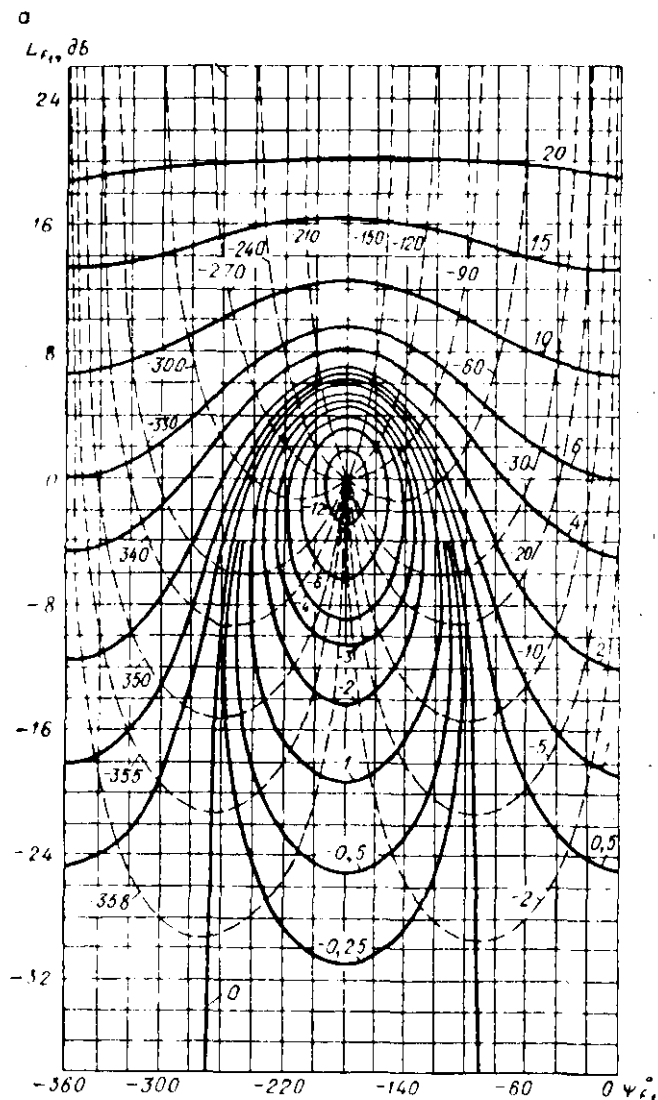
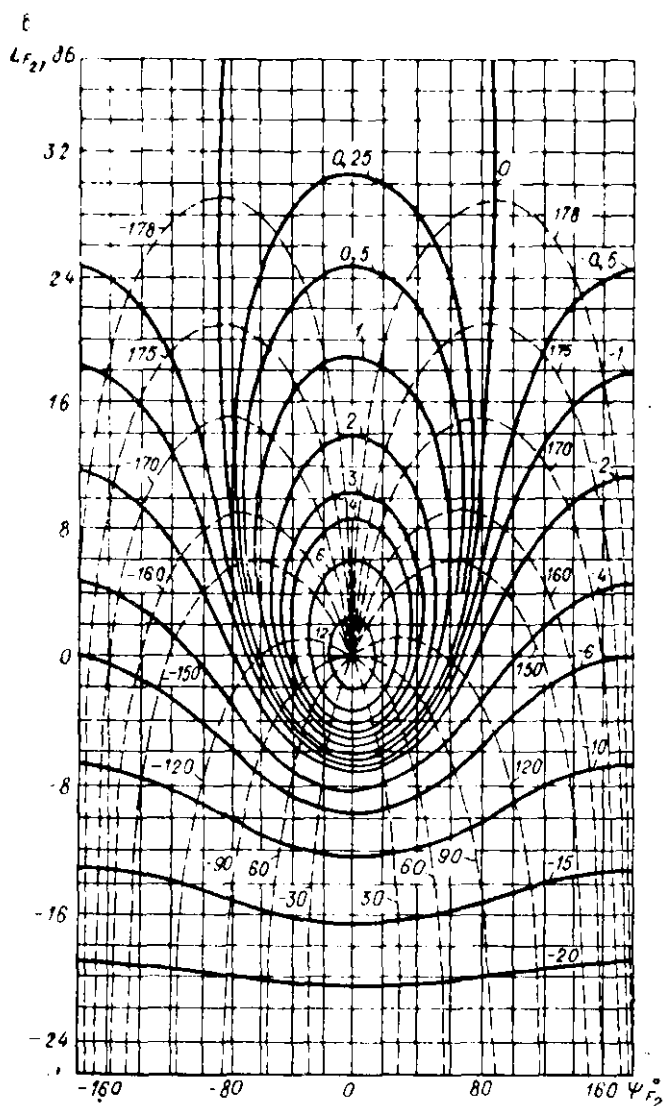


Рис. 6.12.

той системы. Поскольку передаточную функцию комбинированной САУ составить непосредственно по структурной схеме невозможно, следует системы с комбинированным управлением заменить эквивалентной системой с управлением только по отклонению.

Пусть передаточная функция эквивалентной САУ в разомк-



нутом виде представлена выражениями (6.24) или (6.26), по которым можно построить ЛЧХ эквивалентной САУ (см. рис. 6.5, б), соответствующей комбинированной системе (см. рис. 6.4). Для этого выражение (6.26) следует представить в виде

$$W_{\text{экв}}(p) = F_1(p) = F_2(p),$$

$$\text{где } F_1(p) = 1 + \frac{W_1(p)}{W_3(p)}; \quad F_2(p) = \frac{W_2(p) W_3(p)}{1 - W_2(p) W_3(p)}.$$

Построив ЛЧХ для  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  и просуммировав их, получим ЛЧХ эквивалентной САУ.

Дальнейший анализ динамики и выбор корректирующих устройств эквивалентной САУ производят обычным способом логарифмических характеристик. Как правило, сначала в САУ приходится вводить промежуточную, а затем выполнять окончательную коррекцию. Вид промежуточной и окончательной коррекций зависит от реальной конкретной схемы САУ и возможности ее технической реализации.

Для построения ЛЧХ эквивалентной САУ с передаточной функцией  $F_1(p)$  можно использовать номограмму, приведенную на рис. 6.12, а, где по оси ординат отложены значения амплитуды  $L_{F_1}$ , а по оси абсцисс — значения фазы  $\psi_{F_1}$  элементов с передаточной функцией  $F_1(p)$ . В этой же системе координат построены линии равных значений амплитуды (сплошные кривые) и фазы (пунктирные) элементов с передаточной функцией  $W_1(p)/W_3(p)$ . Определив по этой передаточной функции значения амплитуды и фазы, для частоты  $\omega_i$  можно установить по номограмме соответствующие значения амплитуды и фазы и построить таким образом логарифмические амплитудную (ЛАХ) и фазовую (ЛФХ) характеристики элементов.

Для построения ЛЧХ элементов эквивалентной САУ с передаточной функцией  $F_2(p)$  аналогично можно использовать номограмму, приведенную на рис. 6.12, б, которая позволяет по значениям амплитудной и фазовой характеристик элементов с передаточной функцией  $W_2(p)W_3(p)$  получить значения ЛАХ и ЛФХ элементов.

Следует отметить, что номограммы на рис. 6.12 могут быть использованы не только для рассматриваемого случая построения ЛЧХ комбинированной САУ, но и во всех других случаях, где могут встретиться подобного вида структурные схемы.

Для построения САУ на основе типовых ЛЧХ, плавно работающих в режиме низких скоростей, необходимо учитывать ряд дополнительных условий, накладываемых на ЛАХ. Логарифмические фазовые частотные характеристики в этом случае строятся обычным способом. Данный метод динамического синтеза можно применять к любым САУ непрерывного действия. Но наиболее рационально использовать его для расчета САУ с астатизмом первого и второго порядков, так как для расчета статических САУ применение данного метода сопряжено с некоторыми трудностями. При синтезе САУ на основе типовых ЛЧХ исходят из условий бескачкообразного режима их работы (см. табл. 6.1). Анализ этих условий показывает, что для статических САУ они зависят от нескольких переменных параметров, например,  $K = f(T_1, T_2)$ ;  $K = f(T_1, T_2, T_3)$ ;  $T_2 =$

$=f(K, T_1, T_3)$ ;  $T_2=f(K, T_3, T_4)$  и т. д. При этом каждый из параметров может меняться в широких пределах. Количество переменных параметров определяется как количеством звеньев САУ, так и порядком дифференциального уравнения, описывающего эту систему, что приводит к многозначности условий плавности и зависимости от параметров системы. Это, в свою очередь, требует изображения ЛЧХ не в плоскости, а в многомерном пространстве.

Рассмотрим уже названный метод динамического синтеза применительно к САУ с астатизмом первого и второго порядков.

В простейшем случае передаточная функция разомкнутой системы с астатизмом первого порядка при наличии безынерционного усилителя выражается как

$$W(p) = K_0/p(1 + T_1 p). \quad (6.31)$$

Здесь  $K_0$  — добротность системы по скорости;  $T_1$  — единственная постоянная времени системы, равная постоянной времени исполнительного электродвигателя. Асимптотическая ЛАХ подобной системы имеет одну частоту сопряжения:

$$\omega_1 = 1/T_1. \quad (6.32)$$

Плавность работы такой САУ определяется условием (см. табл. 6.1)

$$T_1 < 0,25/K_0. \quad (6.33)$$

При подстановке этого выражения в формулу (6.32) частота сопряжения определяется неравенством

$$\omega_1 > 4K_0, \quad (6.34)$$

а граничная величина этой частоты — уравнением прямой линии:

$$\omega_1 = 4K_0, \quad (6.35)$$

которая является *граничной характеристикой* соотношения параметров системы.

В плоскости со стандартной сеткой для построения ЛАХ этой граничной характеристики соответствует прямая 1 (рис. 6.13) с наклоном +20 дБ/дек. Она пересекает ось частот при  $\omega_1=4$ , что вытекает из уравнения (6.35) при  $K_0=1$ . Неравенство (6.34) выполняется всегда в области, расположенной с правой (незаштрихованной на рис. 6.13) стороны граничной характеристики.

Охватим САУ с передаточной функцией (6.31) жесткой, обратной связью. Условие плавной работы системы примет вид (см. табл. 6.1)

$$T_1 < 0,25(1 + K_{0.c})K_0. \quad (6.36)$$

Частота сопряжения в этом случае определится неравенством

$$\omega_1 > 4K_\Omega / (1 + K_{o.c.}), \quad (6.37)$$

которое получается при подстановке условия плавной работы (6.37) в формулу (6.32), а граничная величина  $\omega_1$  — уравнением

$$\omega_1 = 4K_\Omega / (1 + K_{o.c.}). \quad (6.38)$$

Из анализа изменения граничной характеристики разных значений  $K_{o.c.}$  видно, что чем больше величина коэффициента  $K_{o.c.}$ , тем больше диапазон изменения частоты  $\omega_1$  при постоянстве добротности по скорости системы  $K_\Omega$ .

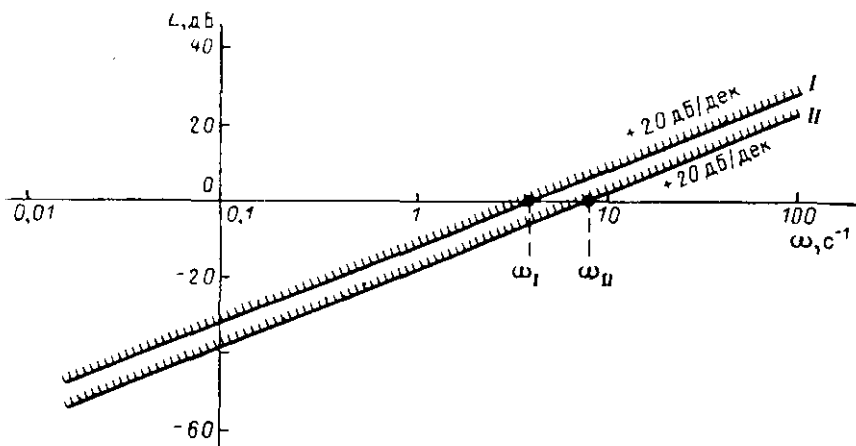


Рис. 6.13.

Положим, что асимптотическая ЛАХ  $L_1(\omega)$  системы (рис. 6.14) представлена в виде двух прямых с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек. Добротность системы по скорости  $K_\Omega$  определяется при  $\omega=1$  контрольной точкой  $A_k$ . Строим граничную характеристику при  $K_{o.c.}=0$ . Перенесем точку  $A_k$  в точку  $B$  и опустив ее на ось частот, получим допустимое значение частоты сопряжения  $\omega_2$  для заданной величины  $K_\Omega$ . Именно в этом случае исполнительная ось САУ работает плавно, без скачков. Логарифмическая амплитудная характеристика на рис. 6.14 примет вид  $L_2(\omega)$ .

Для сохранения (при необходимости) частоты сопряжения неизменной и равной  $\omega_1$  уменьшим значение  $K_\Omega$  до величины, определяемой точкой  $A_k$ . В этом случае на граничной характеристике получим точку  $B'$ , которой соответствует частота  $\omega$ . Амплитудная характеристика примет вид  $L_3(\omega)$ .

И, наконец, для сохранения (при необходимости) ЛАХ охватим систему жесткой отрицательной обратной связью, глубина которой обеспечит выполнение условия (6.37). В последнем случае постоянство заданных величин  $K_\Omega$  и  $\omega_1$  обусловли-

васт величину коэффициента обратной связи  $K_{oc}=10$ . Вспомогательная точка  $B''$  — точка допустимого соотношения между параметрами системы — находится на граничной характеристике.

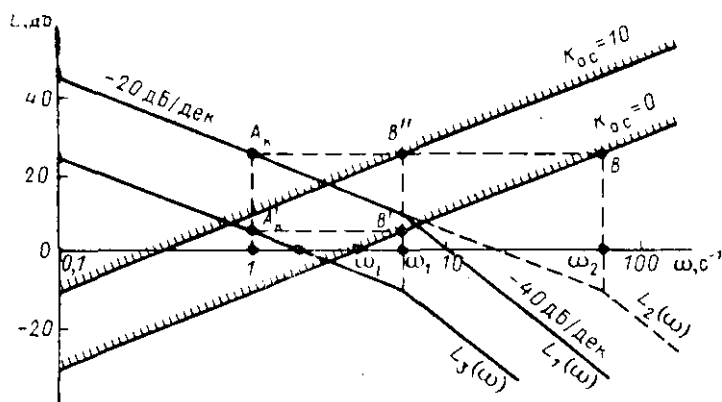


Рис. 6.14.

Если передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид

$$W(p) = K_2 [p (1 + T_1 p) (1 + T_2 p)], \quad (6.39)$$

то асимптотическая ЛАХ имеет две частоты сопряжения:  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые находятся аналогично по формуле (6.32). Плавность работы такой системы определяется условиями (см. табл. 6.1)

$$T_1 + T_2 < 0,375/K_2^0; \quad K_2^0 = 2,53K_2;$$

$$0,166 (T_1 + T_2) [1 - \sqrt{1 - 2,66 K_2 (T_1 + T_2)}] / K_2 < T_1 T_2 < 0,25 (T_1 + T_2)^2.$$

Сначала пытаются реализовать первое условие бескачкообразности, которое в реальных САУ, как правило, не выполняется. Поэтому в систему вводятся корректирующие устройства. Затем, зная сумму постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ , по номограмме, представленной на рис. 6.10, находят значения этих постоянных, которые бы удовлетворяли второму условию бескачкообразности.

Выводы, сделанные для ЛАХ системы с передаточной функцией (6.31), справедливы для САУ с передаточной функцией (6.39). Разница лишь в том, что в последнем случае учитывается количественное соотношение между обеими постоянными времени САУ.

Использование граничной характеристики для определения желаемой ЛАХ системы с передаточной функцией (6.39) аналогично использованию, рассмотренному для САУ с переда-

точной функцией (6.31). Если передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид

$$W(p) = K_2(1 + T_2 p) / p(1 + T_1 p), \quad (6.40)$$

то условие плавной работы системы определяется неравенством (см. табл. 6.1)

$$T_1 < 0,25(1 + K_2 T_2)^2 / K_2. \quad (6.41)$$

Подставляя выражение (6.41) в формулу (6.32), определим частоту сопряжения:

$$\omega_1 > 4K_2 / (1 + K_2 / \omega_2)^2. \quad (6.42)$$

Граничное значение  $\omega_1$  находится из уравнения

$$\omega_1 = 4K_2 / (1 + K_2 / \omega_2)^2. \quad (6.43)$$

Положим  $T_2 = 1$ , тогда в логарифмической плоскости ( $L$ ;  $\omega$ ) уравнению (6.43) будет соответствовать кривая III (рис. 6.15), принадлежащая семейству гипербол. Асимптоты гиперболы

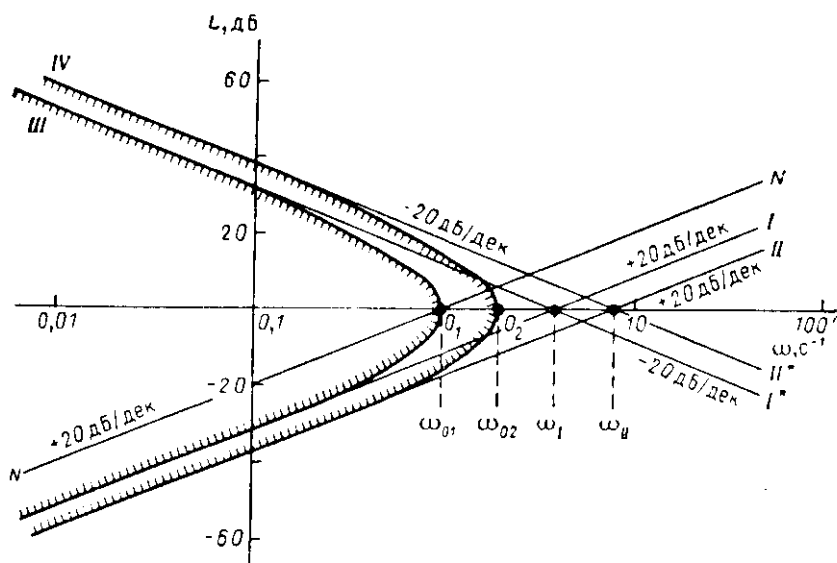


Рис. 6.15.

(прямые I и I\*) проходят через ее центр  $\omega_1$  и описываются выражением (6.35) с соответствующим знаком: одна с наклоном  $+20$  дБ/дек, а другая с наклоном  $-20$  дБ/дек. Центр гиперболы (кривая III) находится из формулы (6.35) при  $K_2 = 1$  и  $T_2 = 1$  и лежит на оси частот в точке  $\omega_1 = 4$ . Вершина гиперболы  $O_1$  рассчитывается по формуле (6.43) при тех же начальных

условиях и лежит также на оси частот в точке  $\omega_{01}=1$ . Неравенство (6.42) выполняется в области, расположенной с незаштрихованной стороны граничной характеристики (кривая III).

При изменении постоянной времени дифференцирующего звена  $T_2$  вершина гиперболы  $O_1$  будет перемещаться по прямой  $NN$ , которая проходит через точку  $\omega_{01}=1$  с наклоном  $+20$  дБ/дек. Положение вершины  $O_1$  на прямой  $NN$  рассчитывается по формуле

$$\omega_{01}=1/T_2=\omega_2. \quad (6.44)$$

Рис. 6.15 и формула (6.44) показывают, что большим постоянным временем  $T_2$  соответствуют большие диапазоны изменения при постоянном значении  $K_\Omega$ .

Наконец, если разомкнутая САУ имеет передаточную функцию (6.45)

$$W(p)=\frac{K_2(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_3p)}, \quad (6.45)$$

то условия плавной работы системы имеют вид (см. табл. 6.1)

$$\begin{aligned} T_1+T_3 < 0,375(1+K_2T_2)^2/K_2^0, \quad K_2^0=2,53K_2; \\ \{0,166(T_1+T_3)(1+K_2T_2)[1 - \\ - \sqrt{1-2,66(T_1+T_3)/(1-K_2T_2)^2}] \} < T_1T_3 < 0,25(T_1+T_3)^2. \end{aligned}$$

Эти два условия реализуются в системе так же, как и для САУ с передаточной функцией (6.39).

Использование граничной характеристики для построения ЛАХ систем с передаточными функциями (6.45) и (6.40) подобно ее использованию с этими же целями, рассмотренному в ранее приведенном примере для САУ с передаточной функцией (6.3).

На рис. 6.16 показано, что для САУ, имеющей в основной цепи управления дифференцирующее звено, выполнения требуемых условий бескачкообразного режима работы (без использования обратных связей) можно добиться с помощью изменения постоянной времени этого звена. В данном примере для ЛАХ  $L(\omega)$  постоянная времени дифференцирующего звена должна быть  $T_2 \geq 0,05$  с. Эта постоянная удовлетворяет двум значениям  $K_\Omega$  (на рис. 6.16 точки  $B'$  и  $B''$ ), при которых выполняются условия бескачкообразности при заданной постоянной времени апериодического звена  $T_1$ .

Рассмотрим САУ с астатизмом второго порядка, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W(p)=K_*(1+T_2p)/p^2(1+T_1p), \quad (6.46)$$

где  $K_*$  — добротность системы по ускорению. Кстати, наличие в данном случае дифференцирующего звена с постоянной времени  $T_2$  в основной цепи системы необходимо, ибо без него

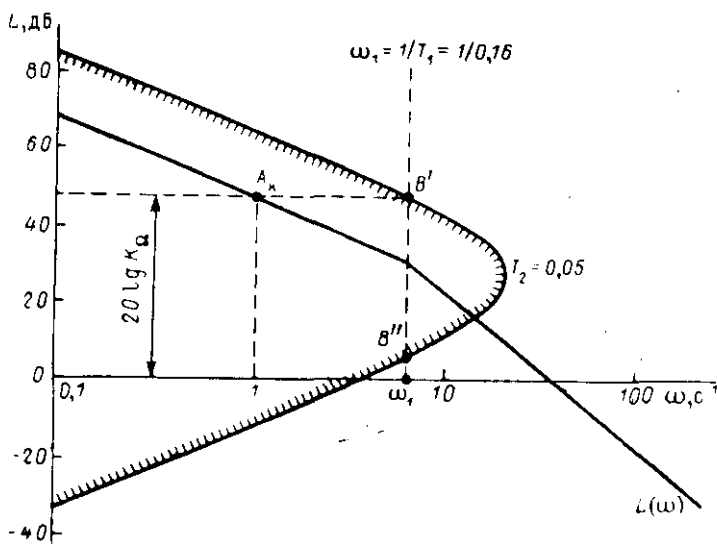


Рис. 6.16.

САУ структурно неустойчива. Асимптотическая ЛАХ подобной системы имеет две частоты сопряжения:  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые рассчитываются по формуле (6.32). Бесскачкообразный режим работы такой системы определяется условием (см. табл. 6.2)

$$T_2 > 3T_1 + 0,222/(K_* T_1),$$

которое при учете формулы (6.32) можно представить в виде

$$\omega_2 < \omega_1 / (3 + 0,222 \omega_1^2 / K_*). \quad (6.47)$$

Тогда граничная характеристика описывается уравнением

$$\omega_2 = \omega_1 / (3 + 0,222 \omega_1^2 / K_*). \quad (6.48)$$

Если положить  $T_2=1$ , то в логарифмической плоскости ( $L$ ;  $\omega$ ) уравнению (6.48) будет соответствовать кривая, принадлежащая семейству гипербол (рис. 6.17). Асимптоты этой гиперболы (прямые  $I$  и  $II$ ), проходящие через ее центр  $O$ , пересекают ось частот. Первая асимптота — прямая  $I$ , перпендикулярная к оси частот, пересекает последнюю при  $\omega_1=3$ . Вторая — прямая  $II$  с наклоном  $+20$  дБ/дек — пересекает ось частот при  $\omega_{11}=5,5$ . Координаты вершин гиперболы  $O$  при  $T_2=1$  находятся по формуле (6.48):  $L_0=8,5$  дБ;  $\omega_0=4,77$  с $^{-1}$ . Неравенство (6.47) выполняется в области, расположенной со стороны граничной характеристики, не заштрихованной на рис. 6.17. При изменении постоянной времени дифференцирующего звена  $T_2$  вершина гиперболы  $O$  будет перемещаться по прямой  $NN$  (см. рис. 6.17), которая проходит через точку

$\omega_N = 2,52$  с наклоном  $+40$  дБ/дек. Положение вершины  $O$  на прямой  $NN$ , учитывая полученные значения координат гиперболы  $L_0$  и  $\omega_0$ , рассчитывают по формуле  $\omega_0 = 4,77/T_2 = 4,77 \omega^2$ .

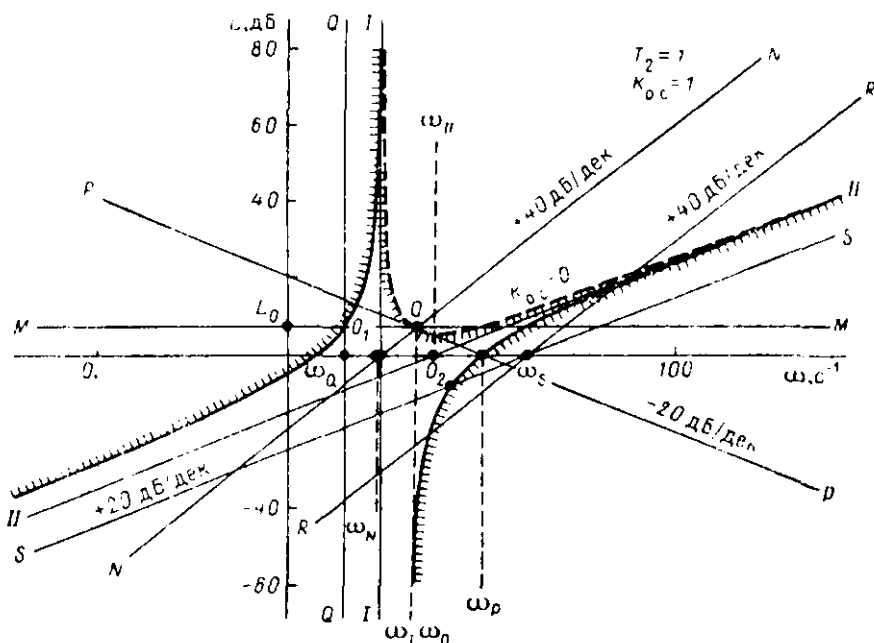


Рис. 6.17.

Рис. 6.17 и формула (6.48) показывают, что большим постоянным времени  $T_2$  соответствуют большие диапазоны изменения  $\omega$  при постоянном значении  $K_{\Sigma}$ .

При использовании в системе жесткой обратной связи, охватывающей апериодическое и одно интегрирующее звенья, вершина гиперболы  $O$  будет перемещаться по прямой  $PP$  (см. рис. 6.17), которая проходит через точку  $\omega = 12$  с наклоном  $-20$  дБ/дек. Положение вершины  $O$  на прямой  $PP$  с учетом значений координат гиперболы  $L_0$  и  $\omega_0$  рассчитывается по формуле

$$\omega_0 = 4,77 \omega_2 / (1 + K_{0.c}). \quad (6.49)$$

При изменении величины  $K_{0.c}$  вершина гиперболы  $O$  перемещается по прямой  $MM$  (рис. 6.17), которая параллельна оси частот и определяется координатой  $L_M = L_0 = 8,5$  дБ. Положение вершины  $O$  на прямой  $MM$  находится по формуле (6.49).

Анализ граничных характеристик при разных значениях ко-

эффицентов обратной связи  $K_{o.c}$  и неизменности постоянной времени  $T_2=1$  показывает, что рост значений  $K_{o.c}$  соответствует увеличению диапазона изменения частоты  $\omega_1$  при  $K_e=\text{const}$ . При этом, если в первом случае изменяются обе координаты вершины гиперболы ( $L_0$  и  $\omega_0$ ), то во втором — лишь одна координата  $\omega_0$ . Использование обоих случаев позволяет очень существенно изменять бескачкообразный диапазон работы САУ.

И, наконец, если использовать в системе жесткую обратную связь, охватывающую аperiodическое и два интегрирующих звена, то при  $K_{o.c}>0$  граничные характеристики будут определяться гиперболами, которые сопряжены с гиперболой (6.49) и имеют те же асимптоты  $I$  и  $II$ .

На рис. 6.17 представлены граничные характеристики, соответствующие сопряженным гиперболам с вершинами  $O_1$  и  $O_2$  при  $K_{o.c}=1$ . Изменение  $K_{o.c}$  соответственно изменяет координаты вершин сопряженных гипербол. Вершина гиперболы  $O_1$  будет перемещаться по прямой  $QQ$ , перпендикулярной к оси частот и проходящей через точку  $\omega_Q=2\omega_2$ , а вершина гиперболы  $O_2$  — по прямой  $SS$ , которая проходит через точку  $\omega_S=18,5$  с наклоном  $+20$  дБ/дек. При изменении  $T_2$  точка  $\omega_S$  перемещается по прямой  $RR$  с наклоном  $+40$  дБ/дек, которая также проходит через точку  $\omega_S$ . Положение самой точки на этой прямой определяется как  $\omega_S=18,5\omega_2$ . Положение вершины  $O_1$  на прямой  $QQ$  описывается выражениями

$$L_{O_1}=20 \lg K_{O_1}; \quad K_{O_1}=2,5 K_{o.c}, \quad (6.50)$$

а положение вершины  $O_2$  на прямой  $SS$  — выражением

$$\omega_{O_2}=6.66 K_{o.c}. \quad (6.51)$$

Условие бескачкообразности выполняется в области, расположенной с незаштрихованной стороны граничной характеристики.

Если в системе применяется комбинированная обратная связь, то необходимо учитывать влияние каждой обратной связи, из которых состоит эта общая связь. Например, если она состоит из жесткой обратной связи, охватывающей одно интегрирующее звено, и гибкой обратной связи, охватывающей аperiodическое и два интегрирующих звена, то граничная характеристика определится гиперболой (см. рис. 6.17), вершина  $O$  которой соответственно глубине жесткой и гибкой обратных связей перемещается по прямой  $MM$ , а затем по прямой  $PP$ , проходящей уже через новое значение вершины  $O$  на прямой  $MM$ .

Использование граничных характеристик для построения ЛАХ систем с астатизмом второго порядка аналогично их использованию с этими же целями для САУ с астатизмом первого порядка.

При неограниченном возрастании параметров электродвига-

теля (постоянной времени  $T_{дв}$  и коэффициента передачи  $K_{дв}$ ) из-за нелинейного характера изменения момента трения накладываются ограничения на параметры дифференцирующих звеньев САУ, соотношения которых определяются также граничными характеристиками (последние рассчитываются по формулам, приведенным в табл. 6.3).

Если передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид (6.40), то условие бескачкообразной работы системы при  $T_{дв} \rightarrow \infty$  и  $K_{дв} \rightarrow \infty$  определяется условием (см. табл. 6.3)  $T_2 > 2/\sqrt{K_2^*}$  или, учитывая выражение (6.32), условием

$$\omega_2 < 0,5 \sqrt{K_2^*}, \quad (6.52)$$

где  $K_2^*$  — добротность по скорости САУ при неограниченном возрастании параметров двигателя (см. примечания к табл. 6.3). Тогда уравнение граничной характеристики будет иметь вид

$$\omega_2 = 0,5 \sqrt{K_2^*}, \quad (6.53)$$

ему в системе координат  $(L; \omega)$  соответствует прямая (прямая АА на рис. 6.18) с наклоном  $+40$  дБ/дек. Она пересекает

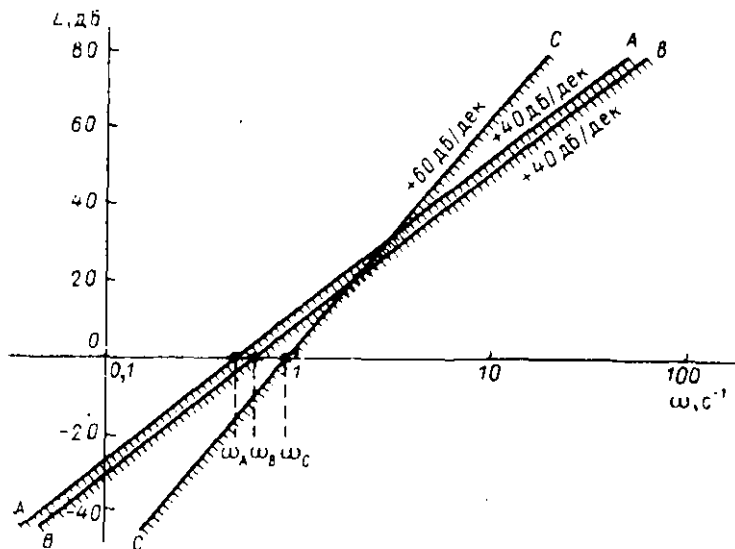


Рис. 6.18.

ось частот при  $\omega_A = 0,5$ , что вытекает из уравнения (6.53) при  $K_2^* = 1$ . Неравенство (6.52) выполняется всегда в области, расположенной с левой (не заштрихованной на рис. 6.18) стороны граничной характеристики.

При использовании в системе жесткой обратной связи, охва-

тывающей интегрирующее и апериодическое звенья, граничная характеристика описывается уравнением

$$\omega_2 = 0,5 \sqrt{K_2^* (1 + K_{o.c})}. \quad (6.54)$$

Изменение коэффициента обратной связи будет перемещать граничную характеристику. Пересечение ее с осью частот вычисляется по формуле  $\omega_A = 0,5 \sqrt{1 + K_{o.c}}$ . Совершенно очевидно, что чем больше коэффициент  $K_{o.c}$ , тем больше диапазон изменения частоты  $\omega_2$  при постоянстве добротности по скорости системы  $K_2^*$ . Если же передаточная функция разомкнутой САУ описывается выражением (6.45), то условие бесскачкообразной работы системы при  $T_{дв} \rightarrow \infty$  и  $K_{дв} \rightarrow \infty$  определяется условием (см. табл. 6.3)  $T_2 > 2,6 / \sqrt{K_2^*}$  или, принимая во внимание формулу (6.32):

$$\omega_2 < 0,385 \sqrt{K_2^*}. \quad (6.55)$$

В данном случае граничной характеристикой, описываемой уравнением

$$\omega_2 = 0,385 \sqrt{K_2^*}, \quad (6.55)$$

соответствует прямая (на рис. 6.18 прямая  $BB$ ) с наклоном  $+40$  дБ/дек, которая пересекает ось частот при  $\omega_B = 0,385$ , что следует из уравнения (6.56) при  $K_2^* = 1$ . Изменение значения  $K_{o.c}$  перемещает граничную характеристику, пересечение которой с осью частот определяется по формуле  $\omega_B = 0,385 \sqrt{1 + K_{o.c}}$  аналогично предыдущему случаю, соответствующему выражению (6.54).

Если САУ в разомкнутом виде имеет передаточную функцию (6.46), то при  $T_{дв} \rightarrow \infty$  и  $K_{дв} \rightarrow \infty$  система будет устойчиво работать лишь при вводе в основную цепь регулирования еще одного дифференцирующего звена (см. формулу (6.30)). Тогда, если положить постоянную времени каждого дифференцирующего звена равной  $T_2$  (что практически не вызывает затруднений), то передаточная функция разомкнутой САУ примет вид

$$W(p) = K_1 (1 + T_2 p)^2 / [p^2 (1 + T_1 p)].$$

В этом случае условие бесскачкообразной работы системы при  $T_{дв} \rightarrow \infty$  и  $K_{дв} \rightarrow \infty$  записывается как (см. табл. 6.3)

$$T_2 > 1,145 / \sqrt[3]{K_1^*}$$

или, учитывая формулу (6.32):

$$\omega_2 < 0,872 \sqrt[3]{K_1^*}, \quad (6.57)$$

где  $K_1^*$  — добротность по ускорению САУ при неограниченном возрастании параметров двигателя (см. примечания

к табл. 6.3). В этом случае уравнение граничной характеристики имеет вид

$$\omega_2 = 0,872 \sqrt{K_{\text{с}}^*}, \quad (6.58)$$

и ему в системе координат  $(L; \omega)$  соответствует (на рис. 6.18) прямая  $CC$  с наклоном  $+60$  дБ/дек. Она пересекает ось частот при  $\omega_c = 0,872$ , что вытекает из уравнения (6.58) при  $K_{\text{с}}^* = 1$ .

Если в системе используется жесткая обратная связь, то изменение  $K_{0,\text{с}}$  перемещает граничную характеристику, пересечение которой с осью частот находится по формуле  $\omega_c = 0,872\sqrt{1+K_{0,\text{с}}}$ .

Выполнение условия (6.57) осуществляется подобно условиям (6.52) и (6.54) всегда с левой (не заштрихованной на рис. 6.18) стороны соответствующей граничной характеристики. Влияние же жесткой обратной связи на ее изменения аналогично влиянию такой же связи на изменения граничных характеристик, описываемых выражениями (6.54) и (6.56).

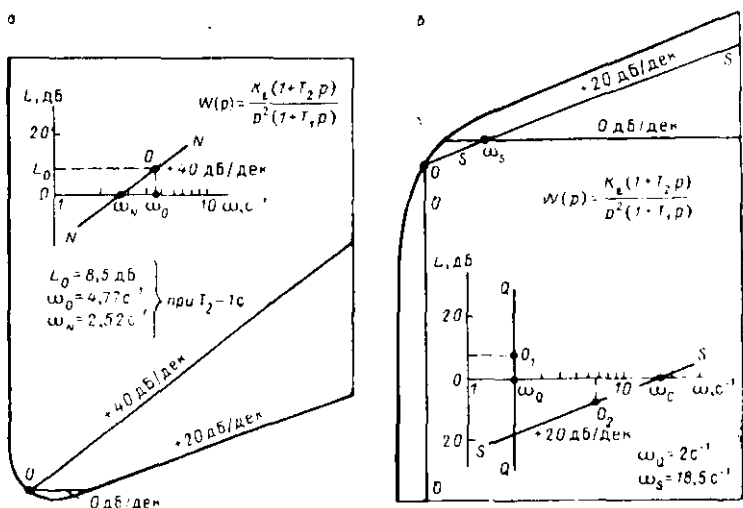


Рис. 6.19.

Таким образом, при построении желаемых логарифмических амплитудных характеристик САУ с бескачкообразным режимом работы на низких скоростях можно использовать граничные характеристики, с помощью которых легко определяются граничные значения параметров системы (постоянные времени, добротность). Для ряда систем эти характеристики находятся с помощью формул, выведенных на основе условий бескачко-

образной работы САУ. Они помогают установить необходимость ввода в САУ системы жесткой обратной связи, ее глубины, а также необходимость ввода в систему дифференцирующих звеньев, параметров этих звеньев.

Для целого ряда систем граничные характеристики можно представить в виде шаблонов (рис. 6.19), по которым легко определить наличие в САУ бескачкообразного режима работы, а в случае его отсутствия — необходимые виды коррекции как с качественной, так и с количественной стороны. На рис. 6.19 приведены примеры шаблонов граничных характеристик для системы с астатизмом второго порядка без коррекции (а) и при использовании жесткой обратной связи без охвата дифференцирующего звена (б).

Для устранения скачкообразного движения САУ с астатизмом первого и второго порядков при неограниченном возрастании параметров передаточной функции исполнительного двигателя следует воспользоваться граничными характеристиками, определяемыми уравнениями (6.53), (6.56), (6.58) и изображенными на рис. 6.18. При трудности реализации значительных по величине постоянных времени дифференцирующих звеньев следует использовать жесткую обратную связь без охвата этих дифференцирующих звеньев.

Если желаемая ЛАХ построена при одновременном использовании уравнений граничной характеристики (6.43), (6.48) и (6.53), (6.58), то САУ с передаточной функцией, соответствующей этим характеристикам, будет плавно работать во всем диапазоне низких скоростей.

Дальнейшие этапы синтеза САУ существенно не отличаются от рассмотренных ранее. Полученные результаты можно распространить и на системы с иными передаточными функциями. Предлагаемый метод динамического синтеза САУ достаточно нагляден и универсален.

## Глава 7

# САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Самонастраивающейся* называют такую автоматическую систему, которая наилучшим образом изменяет динамические и статические свойства в зависимости от произвольно меняющихся внешних и внутренних условий. При реализации таких систем необходимо использовать логические элементы, вычислительные машины и элементы поиска. Управляющее воздействие в них зависит не только от координат объекта управления, но и от качества его характеристик и сигналов внешних воздействий. Необходимую информацию для алгоритма работы самонастраивающиеся системы получают в процессе своего функционирования. Характер, объем и форма этой информации зависят от совершенства самонастройки.

Возникновение самонастраивающихся САУ явилось результатом нового подхода к оценке окружающей среды, изменение которой заранее полностью предусмотреть невозможно. Основными предпосылками появления этих систем явились следующие факторы: критический пересмотр требуемой точности и той, которая имеется в существующих системах и их элементах; глубокое проникновение в сущность физических процессов и возможность их анализа благодаря новым средствам вычислительной математики и техники; результаты изучения функциональной деятельности живых организмов и перенесение важнейших из них из сферы живой природы в технику в целях управления.

Причинами, которые вызывают самонастройку систем, являются либо отклонения параметров объекта управления или самой системы от их оптимальных значений, либо изменение различных воздействий на САУ. Для определения этих отклонений обычно организуют автоматические пробные движения САУ с последующим анализом исходной и вырабатываемой информации. Такое сочетание составляет автоматический поиск опти-

мального состояния. Именно он является наиболее характерным признаком самонастраивающихся САУ, которые следует рассматривать как дальнейшее развитие оптимальных систем, когда показатель оптимальности обеспечивается при различных внешних условиях в результате действия элементов самонастройки. Использование в САУ элементов самонастройки оправдывается лишь при достаточно быстрой окупаемости системы, обеспечении максимальной производительности технологического оборудования, повышении качества изготавливаемой продукции, снижении эксплуатационных расходов. При синтезе самонастраивающихся САУ выполнить все эти требования практически невозможно. Использование элементов самонастройки, как правило, усложняет САУ и снижает надежность ее работы. Поэтому за критерии оптимальности для самонастройки выбирают какое-либо одно наиболее важное требование, обеспечивающее основные заданные показатели качества.

Основной задачей самонастраивающихся САУ является стабилизация динамических свойств автоматизированного технологического оборудования, для которого переходные режимы работы считаются главными. Нарушение этих режимов возможно из-за влияния случайных факторов, а также изменения параметров самой системы. Стабилизацию переходных режимов осуществляют путем сравнения временных характеристик объектов управления с некоторыми эталонными с обеспечением последующей минимизации их расхождения. При этом ставят задачи получения либо оптимальной точности, либо оптимального быстрогодействия при изменяющихся внешних условиях и характеристиках объекта управления.

В общем случае в самонастраивающихся САУ можно выделить основной контур регулирования

(КР) и контур самонастройки (КС) (рис. 7.1, а). Структура контура регулирования, состоящая из регулятора (Р) и объекта управления (ОУ), определяется критерием первичной оптимиза-

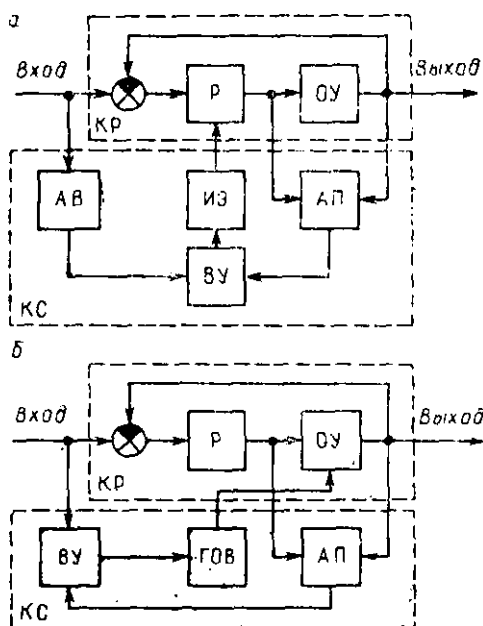


Рис. 7.1.

ции при синтезе оптимальной САУ без учета изменения параметров и характеристик объекта управления и внешних возмущений. Обычно регулятор содержит изменяемую часть системы, на которую воздействует контур самонастройки. В последнем можно выделить контролируемую часть, которая определяет текущую информацию об объекте и внешних условиях, и исполнительный элемент (ИЭ), форсирующий требуемое воздействие на изменяемую часть регулятора. Контролирующая часть состоит из анализатора воздействия (АВ), служащего для оценки внешних воздействий, анализатора процесса (АП), определяющего динамические свойства объекта управления, и вычислительного устройства (ВУ), которое вырабатывает необходимое управление. При решении сложных задач самонастройки в качестве такого устройства используется ЦВМ. Для повышения надежности работы САУ регулятор имеет также неизменяемую часть. В случае выхода из строя контура самонастройки характеристики системы могут отклониться от оптимальных, но система сохранит работоспособность. Возможен вариант передачи сигнала управления от вычислительного устройства через специальный генератор оптимальных воздействий (ГОВ) непосредственно на объект управления (рис. 7.1, б).

Перечисленные основные элементы самонастраивающейся САУ не строго обязательны. Количество их зависит от степени совершенства самонастройки и выбранного критерия вторичной оптимизации. Схемное решение самонастраивающейся САУ и надежность ее работы в большой степени зависят от правильного выбора составных элементов.

При синтезе самонастраивающихся САУ прежде всего требуется простота самонастройки. Идеальной самонастраивающейся была бы система, которая обеспечивает оптимальный режим работы технологического оборудования при любых возможных условиях. В действительности же самонастраивающейся считается САУ, сохраняющая оптимальный режим лишь в определенных пределах. Поэтому в каждом конкретном случае синтеза самонастраивающихся систем необходимо определить реальные граничные условия ее удовлетворительной работы относительно требуемых точности и показателей качества. Самонастраивающиеся САУ являются динамически устойчивыми системами, которые работают по принципу отклонения управляемой переменной или с использованием комбинированного принципа управления. Они обладают следующими особенностями:

- наличием не менее двух контуров: основного и самонастройки;

- наличием элементов с изменяемыми непрерывно или дискретно параметрами, характеристиками или структурой, а также переменного в процессе работы алгоритма, что делает самонастраивающуюся САУ нелинейной и нестационарной;

присутствием вычислительных устройств (в общем случае ЦВМ), что требует разработки аналитических методов, которые сочетают в себе методы теории автоматического управления и вычислительной техники;

повышенной чувствительностью к изменению параметров самой системы и объекта управления, а также к выходным сигналам, поскольку в большинстве случаев системы работают на границе устойчивости или вблизи нее (по основному контуру);

использованием случайных помех для реализации автоматического поиска оптимального режима работы системы.

## 7.2. КЛАССИФИКАЦИЯ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Классификацию самонастраивающихся САУ можно производить по нескольким признакам. Это связано с их сложной структурой, различной физической сущностью, назначением, областями применения и т. д. Рассмотрим основные из этих признаков.

1. *Исходные факторы самонастройки*, при ориентации на которые выделяются следующие основные виды САУ: самонастраивающиеся по сигналам внешних возмущений; самонастраивающиеся по динамическим характеристикам объектов управления; комбинированные САУ (т. е. самонастраивающиеся по сигналам как внешних воздействий, так и по динамическим характеристикам объектов управления).

2. *Средства реализации условий самонастройки*, в качестве которых могут использоваться различные технические средства: применение ЦВМ и моделей, разных видов корректирующих устройств; изменение параметров и структуры регулятора, типа нелинейности регулятора и алгоритма (программы) управления. В зависимости от применения этих средств самонастраивающиеся САУ подразделяются на системы с автоматической настройкой параметров (*собственно самонастраивающиеся*) и структур (*самоорганизующиеся*), а также с автоматическим изменением алгоритма управления (*самообучающиеся*). Конкретный выбор средств достижения условий самонастройки зависит от типа системы и сложности самонастройки. Иногда на практике возникает необходимость одновременного использования нескольких видов перечисленных средств.

3. *Способы оценки динамических характеристик САУ или объекта управления*, которые могут быть полными и частичными. Основное требование к оценке характеристик заключается в том, чтобы время, затраченное на оценку, было меньше времени изменения параметров САУ. Кроме того, оценка должна допускать автоматизацию, иначе ее невозможно будет использовать в самонастраивающейся САУ. Существующие способы оценки основаны на использовании либо только рабочих

сигналов, которые имеются в системе, либо рабочих и специально подобранных пробных сигналов.

4. *Способы реализации регулирующего воздействия*, из которых можно выделить способ последовательных проб по изменению структуры, алгоритма, нелинейности и т. д.; упорядоченный способ действия по какому-либо определенному закону (например, по закону арифметической или геометрической прогрессии, по методу наискорейшего спуска); способ со случайным воздействием, в основе которого лежит не преднамеренное определенное апробирование программ, уставок и т. д., а вероятностное апробирование, значение которого выбирается до тех пор, пока САУ не получит нужную оценку; способ, основанный на применении элементов с самообучением, суть которого заключается в анализе предыдущих результатов с последующим самоулучшением.

5. *Степень совершенства самонастройки*, которая позволяет оценить взаимосвязь между обычными и разными видами самонастраивающихся САУ. С количественной стороны степень совершенства можно задавать какой-либо сравнительной характеристикой происходящих процессов в САУ с самонастройкой и без нее или косвенно — по количеству контуров самонастройки, вычислительных элементов и т. д.

Самонастраивающиеся системы разделяют также на разомкнутые и замкнутые относительно контура самонастройки и выхода системы, на *аналитические поисковые и комбинированные*. Более детальное развитие отдельных видов классификаций приводится в литературе.

### 7.3. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ, САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ ПО СИГНАЛАМ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Оптимальные по точности или быстродействию САУ обычно рассчитаны при определенных внешних условиях на какой-то один тип входного сигнала. Поэтому при изменении характеристик внешних воздействий требуемые показатели качества системы могут не обеспечиваться. Добиться минимального значения среднеквадратичной ошибки или максимального быстродействия в САУ при изменяющихся внешних условиях можно при использовании контуров самонастройки, которые изменяют параметры либо структуру регулятора или объекта управления.

На рис. 7.2 изображена структурная схема самонастраивающейся САУ, которая обеспечивает с помощью контура самонастройки (КС) оптимальное подавление помехи  $X_n(t)$ , поступающей на вход системы вместе с полезным сигналом  $X_0$ . Данная самонастраивающаяся САУ является замкнутой. Она может быть оптимальна как по точности, так и по быстродействию при разных входных воздействиях и помехах.

Если необходимо обеспечить инвариантность показателя качества САУ относительно возмущающих воздействий  $F(t)$ , то используют самонастраивающиеся системы, которые разомкнуты по контуру самонастройки (рис. 7.3). Этот контур обеспечивает в результате анализа возмущающего воздействия изменение либо параметров, либо структуры регулятора или объекта

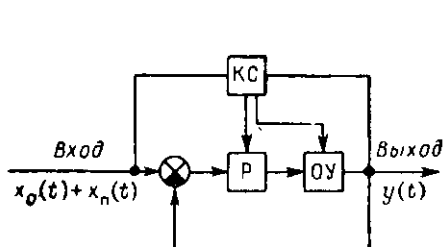


Рис. 7.2.

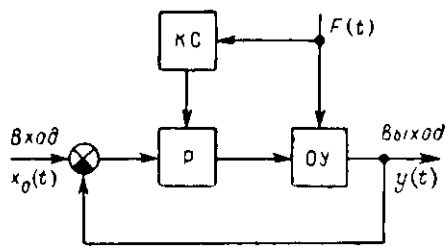


Рис. 7.3.

управления. Такая самонастраивающаяся САУ будет оптимальной при возмущающих воздействиях разных видов. На практике не всегда можно измерить сигналы внешних воздействий и произвести их анализ. В этом случае контуры самонастройки могут использовать сигналы выхода системы  $y(t)$  или ошибки  $\Delta$ . В результате анализа сигналов, которые изменяются под действием внешних воздействий, контур самонастройки обеспечивает постоянство некоторых показателей качества САУ.

На рис. 7.4, а изображена структурная схема самонастраивающейся САУ, которая обеспечивает минимальную ошибку на выходе САУ. Это достигается путем воздействия контура самонастройки, использующего сигнал ошибки  $\Delta$ , на параметры или на структуру регулятора ( $P$ ), объекта управления ( $OU$ ) и главной обратной связи ( $OC$ ). В случае использования контуром самонастройки выходного сигнала структурная схема самонастраивающейся САУ может иметь вид, представленный на рис. 7.4, б. Устройство самонастройки ( $УСН$ ) с помощью переключающих устройств ( $ПУ1$  и  $ПУ2$ ) производит переключение неединичной главной обратной связи по выходной переменной ( $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ) и ее скорости ( $\beta, \dots, \beta_n$ ) в функции ошибки  $\Delta$  и ее скорости  $d\Delta/dt$ , а также выходной переменной  $Y$  и ее скорости  $dY/dt$ . Дифференцирование соответствующих величин осуществляется дифференцирующими звеньями ( $ДЗ1—ДЗ3$ ). Переключение структуры регулятора на одну из заданных заранее схем, а также изменение параметров регулятора и обратных связей обычно производится дискретно, в зависимости от вида и параметров внешних воздействий. Данная схема самонастраивающейся САУ позволяет обеспечить по-

стоянство значений заданных показателей качества САУ с допустимой погрешностью.

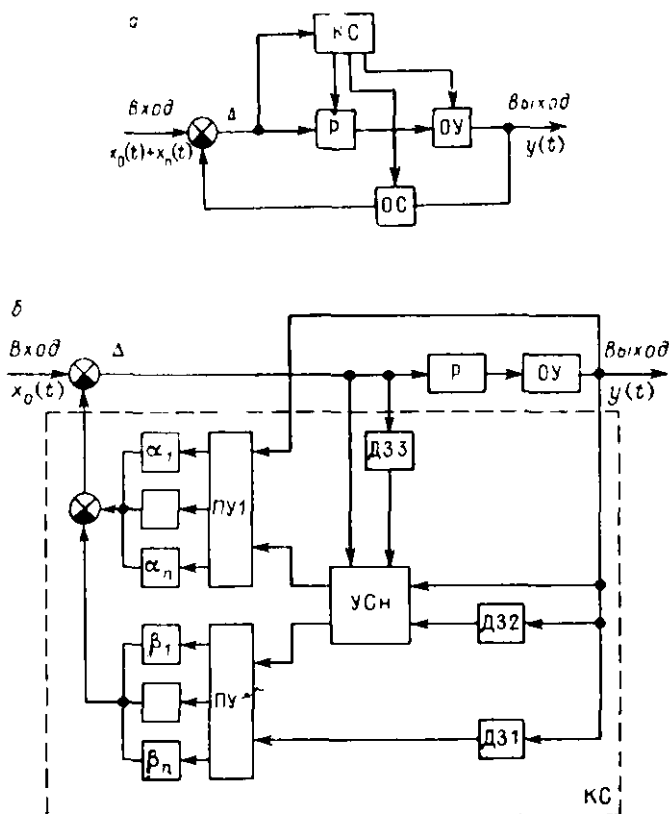


Рис. 7.4.

В настоящее время в более совершенных системах контур самонастройки может изменять параметры, структуру, закон управления и осуществлять самоприспосабливаемость САУ с запоминанием результатов самонастройки.

#### 7.4. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ, САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

На практике САУ, самонастраивающиеся по динамическим характеристикам объектов, используют в случаях непредвиденного изменения этих характеристик под действием внешних

условий при необходимости выполнения заданного критерия качества. Задачи самонастройки в таких системах могут быть самые разнообразные, например: наибольшее приближение процесса управления технологическим оборудованием к некоторому заданному в каждый момент времени, минимизация среднеквадратичной ошибки из условий наилучшей статистической фильтрации и времени управления, обеспечение неизменности определенной передаточной функции САУ и т. д. Для реализации самонастройки необходимо определять динамические свойства объекта управления.

Для сохранения постоянства динамических характеристик на выходе САУ при изменении характеристик объекта управления широкое распространение получили методы, основанные на использовании моделей. При этом настройка параметров производится по эталону, которым могут быть параметры или динамические характеристики модели. Рассмотрим основные способы построения самонастраивающихся САУ с моделями.

Использование вычислительного устройства для расчета параметров объекта управления. При построении самонастраивающихся САУ с последовательно включенными моделью и

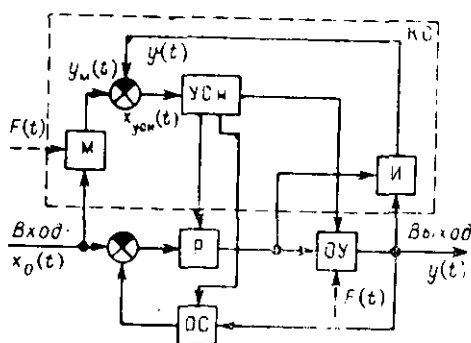


Рис. 7.5

указанных САУ положен принцип инвариантности. Эти системы имеют весьма сложные контуры самонастройки. При построении системы с параллельно включенными моделью и вычислительным устройством сигнал для контура самонастройки определяется в результате сравнения вычисленных параметров с параметрами модели, т. е. с эталоном. Основным недостатком таких САУ является необходимость вычисления текущих значений параметров объекта управления, что увеличивает время самонастройки. Эти системы также отличаются значительной сложностью контура самонастройки. Для определения текущих значений параметров САУ используются корреляционные методы, которые требуют осреднения

соответствующих функционалов времени входных и выходных процессов на интервалах времени, значительно больших времени переходных процессов системы. Поэтому самонастраивающиеся САУ с параллельным включением модели и вычислительного устройства для расчета параметров объекта управления используют в тех случаях, когда параметры системы изменяются медленно (по сравнению с длительностью переходных процессов).

**Применение эталонных моделей динамических характеристик объектов управления.** На рис. 7.5 изображена структурная схема самонастраивающейся САУ с эталонной моделью,

динамические характеристики которой сравниваются с характеристиками объекта управления. При изменении параметров динамические характеристики объекта управления (ОУ) отклоняются от оптимальных характеристик модели (М). Появляется сигнал  $x_{усн}(t) = y_m(t) - y(t)$ , действующий на устройство самонастройки (УСН), которое изменяет параметры либо структуру

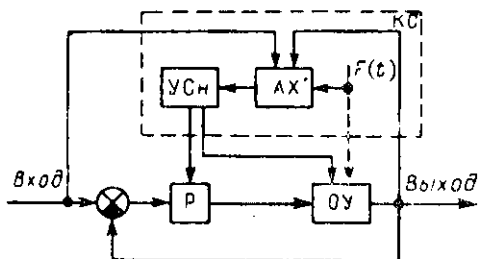


Рис. 7.6.

регулятора ( $P$ ), объекта управления или главной отрицательной обратной связи (ОС) системы. Если, например, изменяется коэффициент передачи объекта управления  $k_{о.у}$ , то контур самонастройки должен так изменить коэффициент передачи регулятора  $k_p$ , чтобы коэффициент передачи модели  $k_m$  оставался постоянным, т. е.  $k_{о.у}k_p = k_m = \text{const}$ . При выполнении этого условия выходной процесс САУ  $y(t)$  в установившемся режиме будет совпадать с выходным сигналом модели  $y_m(t)$ . В переходных режимах эти процессы также будут достаточно близки.

Для контроля вектора состояния  $y(t)$  используют идентификатор, выполняющий функции анализатора процесса (см. рис. 7.1). Если в самонастраивающейся САУ контролируется только одна выходная величина  $y(t)$ , то нет необходимости измерять вектор состояния и вычислять параметры объекта управления. В этом случае идентификатор в схеме не нужен.

Работа самонастраивающейся САУ в динамическом режиме характеризуется устойчивостью и временем продолжительности процесса, который заканчивается при  $x_c(t) = 0$ . Конечной задачей контура самонастройки САУ является ликвидация влияния изменений параметров объекта управления на выходной процесс  $y(t)$ .

**Использование анализаторов характеристик объекта управ-**

ления и системы. Изменение параметров объекта управления под воздействием внешних условий отражается на его характеристиках, поэтому для самонастройки САУ вместо модели можно использовать анализаторы характеристик. В таких самонастраивающихся САУ, которые основаны на контроле характеристик замкнутых систем, динамические характеристики их после определения сравниваются с заданными эталонными характеристиками. В качестве динамических характеристик САУ можно использовать передаточные и частотные функции, переходные характеристики, а для их контроля можно воспользоваться либо естественными, либо искусственно созданными колебаниями. На рис. 7.6 представлена структурная схема самонастраивающейся САУ, в основе которой — анализатор характеристик (АХ). Он производит идентификацию (методы идентификации объекта управления см. на с. 149) характеристик САУ. Структура анализатора характеристик определяется видом характеристик, которые используются для контроля, а также конкретным методом идентификации характеристики объекта управления и принятым критерием вторичной оптимизации. Сформированное анализатором характеристик воздействие поступает на устройство самонастройки (УСн), которое изменяет либо параметры, либо структуру регулятора или объекта управления.

Возможно построение комбинированных САУ, в которых объединяются принципы самонастройки как по внешним воздействиям, так и по динамическим характеристикам с целью реализации оптимальных динамических свойств в условиях изменения характеристик внешних воздействий и объектов управления в широких пределах. При данном способе построения систем эталонная модель (см. рис. 7.5) или анализатор характеристик (см. рис. 7.6) имеют дополнительную самонастройку по сигналам внешних возмущающих воздействий  $F(t)$ . В этом случае эталонные динамические характеристики не стабильны, а автоматически изменяются в функции сигналов внешних воздействий.

## 7.5. СИНТЕЗ КОНТУРА САМОНАСТРОЙКИ

Задача синтеза самонастраивающихся САУ решается приближенно в два этапа. На первом рассматривается оптимизация основного контура системы, а на втором — оптимизация контура самонастройки. Синтез основного контура САУ выполняется известными методами теории автоматического регулирования и управления. Решение задачи синтеза контура самонастройки известными методами невозможно из-за наличия в оптимальной САУ переменных параметров и характеристик объектов управления и действующих на нее внешних воздей-

ствий. Несмотря на это, при синтезе контура самонастройки можно выделить следующие стадии:

- 1) анализ факторов, обуславливающих использование самонастройки;
- 2) формулирование и обоснование критерия самонастройки и принципа построения контура самонастройки;
- 3) синтез алгоритма идентификации;
- 4) определение закона изменения настраиваемых параметров и техническая реализация контура самонастройки;
- 5) синтез модели или анализатора динамических характеристик объекта управления и системы.

На первой стадии делают анализ условий работы объекта управления и выясняют влияние факторов, которые вызывают отклонения от оптимального режима работы САУ, характеризующегося первичной оптимизацией. Затем определяется возможность организации самонастройки. Если использование самонастройки обусловлено изменением параметров объекта управления, то необходимо знать диапазон изменения этих параметров и иметь возможность определять оценку этих изменений по динамическим характеристикам САУ. Если же применение самонастройки обусловлено изменением характеристик внешних воздействий, то необходимо знать либо аналитическое выражение полезного сигнала на входе САУ  $x_0(t)$  при известных его параметрах и известных статистических характеристиках помех  $x_n(t)$  и возмущающих воздействий  $F(t)$ , либо иметь возможность непосредственно измерить полезный сигнал  $x_0(t)$  и знать статистические характеристики помех и воздействий.

Решение вопросов, рассматриваемых на второй стадии, в первую очередь определяется типом критерия первичной оптимизации. В качестве критерия самонастройки могут быть приняты различные показатели качества, которые определяются факторами, обуславливающими применение самонастройки. При первичной оптимизации рассчитывается минимальное среднее значение квадрата ошибки и находится оптимальная частотная передаточная функция САУ в условиях изменений характеристик входного случайного сигнала:  $x_0(t) = x_n(t)$ ,  $F(t) = 0$  (см. рис. 7.2). В качестве критерия вторичной оптимизации (т. е. критерия самонастройки) следует также принять минимальное среднее значение квадрата ошибки. В этом случае критерии первичной и вторичной оптимизаций совпадают. Структура контура самонастройки будет определяться расчетами как оптимальных частотных передаточных функций для разных заданных характеристик входного случайного сигнала, так и требуемых параметров и структуры регулятора или объекта. Если же целью первичной оптимизации является получение оптимального значения быстродействия или точности при детерминированном входном сигнале  $x_0(t)$ , то при изменении характеристик объекта управления и этого сигнала, а также при на-

личии помех и возмущающих воздействий следует обеспечить минимальное отклонение процесса на выходе от заданного оптимального. Для расчета этого отклонения можно использовать принцип построения самонастраивающейся САУ либо с эталонной моделью, либо с анализатором характеристик. В первом случае (см. рис. 7.5) качество самонастройки определяется ошибкой

$$X_c(t) = Y_n(t) - Y(t).$$

поэтому критерий самонастройки можно выразить в виде интегральной оценки:

$$J = \int_{t_i}^{t_i + \tau_i} [Y(t) - Y_m(t)]^2 dt. \quad (7.1)$$

Если контролируется только выходной сигнал, то в качестве критерия самонастройки можно взять минимальную квадратичную функцию ошибки:

$$J_{=0,5} \left[ \sum_{i=0}^n q_i X_c^{(i)}(t) \right]^2 \text{ и.и. } J_{=0,5} \sum_{i=0}^n q_i [X_c^{(i)}(t)]^2,$$

где  $X_c(t) = Y(t) - Y_m(t)$ ;  $q_i$  — постоянные коэффициенты. Критерий самонастройки можно выразить также через настраиваемые параметры регулятора  $\alpha_i$  при переменных параметрах объекта управления:

$$J = f(a_i).$$

При этом можно ставить задачу нахождения заданного оптимального значения  $J^0$  или минимального  $\alpha_i^0$  в результате оптимальной настройки параметров регулятора. В зависи-

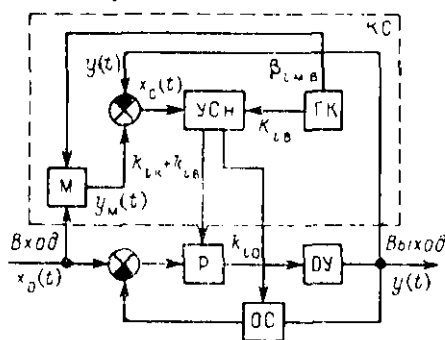


Рис. 7.7.

мости от выбранного критерия самонастройки и способа формирования сигнала самонастройки в функции изменяющихся параметров или характеристик объекта управления и регулятора реализуется структурная схема контура самонастройки с эталонной моделью.

Основными способами формирования сигнала самонастройки являются градиентный, основанный на теории чувствитель-

ности, и способ возмущения параметров. Примером построения контура самонастройки с эталонной моделью при градиентном способе формирования сигнала, который осуществляет настройку параметров регулятора, объекта управления или цепи главной обратной связи, является схема, изображенная на рис. 7.5. Принцип построения контура самонастройки при формировании сигнала по способу возмущения некоторого параметра  $k_i$  показан на рис. 7.7. Один из параметров ( $k_i$ ) регулятора или цепи главной отрицательной обратной связи находится как сумма основного ( $C_{i0}$ ), корректирующего ( $k_{ik}$ ) и возмущающего сигналов  $k_{ib} = k_0 \sin \omega t$ , создаваемого генератором колебаний (ГК):

$$k_i = k_{i0} + k_{ik} + k_{ib}.$$

В приведенной схеме самонастраивающейся САУ предполагается, что структуры модели и объекта управления идентичны. Это позволяет получить с помощью синусоидального возмущения параметра модели  $\beta_{im,b} = \beta_{i0} \sin \omega t$  синусоидальное изменение ошибки  $x_c(t)$ . Тогда сигнал самонастройки будет формировать корректирующий сигнал  $k_{ix}$ , способствующий уменьшению усредненной в малом промежутке времени функции ошибки  $[X_c(t)] = |X_c(t)|^k$  ( $k$  — любое положительное число).

При настройке нескольких параметров используют возмущающие сигналы с разными частотами для контуров самонастройки разных параметров. Заметим, что структура контура самонастройки также определяется принятыми алгоритмами идентификации и выбранным способом воздействия на изменяемую часть САУ.

Во втором случае при построении контура самонастройки с анализатором характеристик можно также использовать разные критерии самонастройки. Если в качестве такого критерия принять максимальное отклонение динамических характеристик САУ от эталонных, являющихся оптимальными, то структурная схема самонастраивающейся САУ будет соответствовать схеме, изображенной на рис. 7.6.

На рис. 7.8 показан принцип построения самонастраивающейся системы, основанный на контроле импульсной переходной функции  $g(t)$ , которая положена на основу критерия самонастройки. Для объектов управления, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, характеристика  $g(t)$  не будет стабильной и может отличаться от эталонной динамической характеристики  $g_s(t)$ . Для расчета действительного значения  $g(t)$  используется метод идентификации, основанный на анализе служебных процессов типа «белого шума»  $h(t)$ , который формируется генератором колебаний (ГК). В соответствии с выражением (5.15) при  $h(t)$  в виде белого шума импульсная переходная характеристика определяется значениями взаимных корреляционных функций. Контур самонастройки со-

стоит из генератора колебаний, взаимного коррелятора (ВК), состоящего из многоканального устройства временной задержки (УВЗ) ( $\tau_1, \dots, \tau_n$  — значения временных задержек) и многоканального вычислительного устройства (ВУ) ( $g(\tau), \dots, g(\tau_n)$  — импульсные переходные характеристики при соответствующих  $\tau$ ), выполняющего функции умножения и суммирования, анализатора характеристик и устройства самонастройки. В рассмотренной схеме самонастраивающейся САУ для идентификации динамических характеристик применяется активный эксперимент.

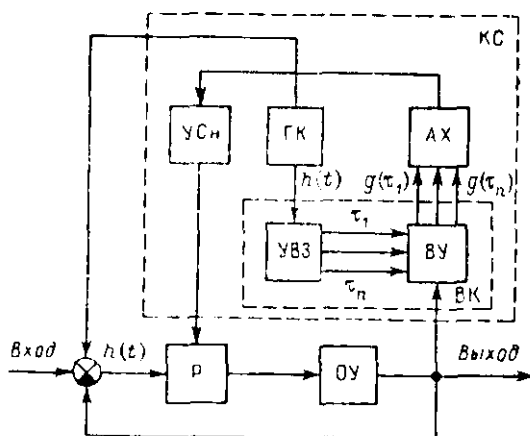


Рис. 7.8.

Аналогично можно рассмотреть принцип построения контура самонастройки при использовании в качестве эталонной динамической характеристики частотной передаточной функции (5.17).

На третьей стадии синтеза алгоритмов идентификации рассчитываются текущие динамические характеристики объектов управления и сигналов внешних воздействий. Так как реальные объекты технологического оборудования являются нестационарными, то алгоритмы идентификации должны давать возможность определять переменные параметры или динамические характеристики объекта управления. Иногда на практике требуется производить оценку параметров сигналов внешних воздействий. Кроме того, следует учитывать не только требование точности идентификации, но и время, необходимое для нее, а также удобство использования характеристик в алгоритме.

**Алгоритмы идентификации объектов управления.** Для осуществления самонастройки САУ при переменных динамических характеристиках объекта управления необходимо иметь урав-

нение динамики и его коэффициенты. В ряде случаев это уравнение объекта известно, и в процессе самонастройки требуется только определять его коэффициенты. Эту задачу можно решить несколькими способами. Рассмотрим некоторые из них.

*Определение коэффициентов уравнения динамики путем измерения координат выхода и входа объекта управления и их интегрирования.* Пусть объект управления описывается уравнением динамики с переменными коэффициентами

$$a_1(t) \dot{x}(t) + x(t) = b(t) u(t). \quad (7.2)$$

Считая параметры кусочно-постоянными, а объект управления квазистационарным на отдельных интервалах, в интервале времени  $[t_i, t_i + T_i]$  примем коэффициенты постоянными. Тогда уравнение (7.2) запишем в виде

$$a_{1i}(T_i) \dot{x}(t) + x(t) = b_i(T_i) u(t), \quad (7.3)$$

где  $b_i(T_i) = x(T_i)/u(T_i)$  — коэффициент, рассчитываемый по значениям координат входа и выхода объекта управления в квазистановившемся режиме. Пронтегрировав уравнение (7.3), получим

$$a_{1i}(T_i) [x(t_i + T_i) - x(t_i)] + \int_{t_i}^{t_i + T_i} x(t) dt = b_i(T_i) \int_{t_i}^{t_i + T_i} u(t) dt,$$

откуда найдем значение коэффициента уравнения динамики

$$a_{1i}(T_i) = \left[ b_i(T_i) \int_{t_i}^{t_i + T_i} u(t) dt - \int_{t_i}^{t_i + T_i} x(t) dt \right] / [x(t_i + T_i) - x(t_i)]. \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) является алгоритмом расчета параметра  $a_{1i}(T_i)$ .

Аналогично определяют коэффициенты уравнений более высокого порядка.

Недостатком этого способа нахождения коэффициентов является необходимость измерения координат выхода объекта управления и ее  $(n-1)$ -производных в моменты  $t_i$  и  $(t_i + T_i)$ .

Рассмотрим определение коэффициентов уравнения динамики с помощью дополнительных сигналов с заранее известными характеристиками  $v_i(t)$ . Пусть объект управления первого порядка описывается уравнением

$$a_1(t) \dot{x}(t) + a_0(t) x(t) = u(t). \quad (7.5)$$

Считая объект управления квазистационарным на отдельных интервалах времени  $[t_i, t_i + T_i]$ , представим уравнение (7.5) в виде

$$a_{1i}(T_i) \dot{x}(t) + a_{0i}(T_i) x(t) = u(t). \quad (7.6)$$

Поскольку в этом уравнении два переменных коэффициента, то применяем два источника модулирующих функций с известными характеристиками  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ . Умножив уравнение (7.6) на  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , получим

$$\begin{aligned} a_{11}(T_i) v_1(t) \dot{x}(t) + a_{01}(T_i) v_1(t) x(t) &= v_1(t) u(t); \\ a_{21}(T_i) v_2(t) \dot{x}(t) + a_{01}(T_i) v_2(t) x(t) &= v_2(t) u(t). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Если сигналы  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  принять равными нулю на границах интервалов  $t_i$  и  $(t_i + T_i)$ , то после интегрирования уравнений (7.7) в пределах от  $t_i$  до  $(t_i + T_i)$  получим

$$\begin{aligned} -c_{11}a_{11}(T_i) + c_{12}a_{01}(T_i) &= b_1; \\ -c_{21}a_{11}(T_i) + c_{22}a_{01}(T_i) &= b_2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\text{где } c_{11} = \int_{t_i}^{t_i+T_i} x(t) \dot{v}_1(t) dt; \quad c_{12} = \int_{t_i}^{t_i+T_i} x(t) v_1(t) dt;$$

$$b_1 = \int_{t_i}^{t_i+T_i} u(t) v_1(t) dt;$$

$$c_{21} = \int_{t_i}^{t_i+T_i} x(t) \dot{v}_2(t) dt; \quad c_{22} = \int_{t_i}^{t_i+T_i} x(t) v_2(t) dt;$$

$$b_2 = \int_{t_i}^{t_i+T_i} u(t) v_2(t) dt.$$

Уравнения (7.8) определяют алгоритм идентификации объекта управления первого порядка с переменными параметрами. Они дают возможность найти неизвестные коэффициенты на интервалах времени  $[t_i, t_i + T_i]$ . При наличии объектов управления более высокого порядка для расчета коэффициентов используют ЦВМ. В этом случае в контур самонастройки вводят соответствующее количество источников модулирующих функций  $v_i(t)$ .

Рассмотрим определение коэффициентов уравнения динамики методом квадратической аппроксимации. Пусть уравнение динамики объекта управления имеет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) x^{(k)}(t) = \sum_{r=1}^m b_r(t) u^{(r)}(t) + u(t), \quad (7.9)$$

где  $a_k(t)$  и  $b_r(t)$  — переменные коэффициенты. Положим  $b_0(t) = b_0 = 1 = \text{const}$ .

При аппроксимации объекта управления моделью с кусочно-постоянными параметрами получим уравнение квазистационарного объекта управления на интервале времени  $[t_i, t_i + T_i]$ :

$$\sum_{k=0}^n a_{ki} x_i^{(k)}(t) = \sum_{r=1}^m b_{ri} u_i^{(r)}(t) + u(t), \quad (7.10)$$

где  $a_{ki}$  и  $b_{ri}$  — постоянные коэффициенты, определяемые из условия минимальности усредненного квадрата разности правой и левой частей уравнения (7.10). На интервалах времени  $[t_i, t_i + T_i]$  при известных  $x_i^{(k)}(t)$  и  $u_i^{(r)}(t)$  получим

$$Q_i(T_i) = \sum_{t=t_i}^{T_i+T_i} \left[ \sum_{k=0}^n a_{ki} x_i^{(k)}(t) - \sum_{r=0}^m b_{ri} u_i^{(r)}(t) \right]^2 dt.$$

Для определения  $j$  ( $j = n + 1 + m$ ) неизвестных коэффициентов  $a_{ki}$  и  $b_{ri}$  ( $b_{0i} = 1 = \text{const}$ ) необходимо на каждом интервале времени  $j$  раз измерить в моменты  $t_i$  координаты  $x_{ij}^{(k)}(t_i)$  и  $u_{ij}^{(r)}(t_i)$ . Это дает возможность составить  $j$  алгебраических уравнений с  $j$  неизвестными:

$$\begin{aligned} \partial Q_{ij}(T_i) / \partial a_{ki} &= 0, \\ \partial Q_{ij}(T_i) / \partial b_{ri} &= 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Уравнения (7.11) определяют алгоритм идентификации квазистационарного объекта управления, описываемого уравнением (7.9) с переменными коэффициентами.

Аналогично можно определить алгоритм идентификации нестационарного объекта, если представить коэффициенты  $a_k(t)$  и  $b_r(t)$  в виде рядов типа  $x_0(\tau) \simeq \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq T < T_1$  — интервал времени, на котором производится вычисление  $c_i$ ;  $\psi_i(\tau)$  — линейно независимые заданные функции;  $T_1$  — интервал времени, на котором справедлива аппроксимация) через неизвестные коэффициенты  $a_{ki}$  и  $b_{ri}$ , постоянные в интервалах времени  $[t_i, t_i + T_i]$ . Решение алгоритма идентификации (7.11) является сложной задачей, которую можно решить только с помощью ЦВМ. При отсутствии аналитического уравнения динамики объекта управления можно представить алгоритм идентификации в виде нахождения импульсной переходной функции или передаточной функции нестационарного объекта управления.

**Алгоритмы оценки параметров сигналов.** Существует большое количество методов оценки параметров сигналов внешних воздействий. Рассмотрим некоторые из них.

**Прямой метод.** Пусть на вход САУ поступают полезный детерминированный сигнал  $x_0(t)$  и помеха  $x_n(t)$ . Если принять полезный сигнал в виде непрерывной ограниченной функции времени на интервале  $[0, 1]$

$$x_0(t) = at^n \quad (7.12)$$

с неизвестными  $a$  и  $n$ , изменяющимися в пределах  $-\infty \leq a \leq$

$\leq +\infty$  при  $a \neq 0$  и  $0 \leq n \leq \infty$ , то для расчета одного из неизвестных параметров в формуле (7.12) можно воспользоваться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} n &= t \dot{x}_0(t) / x_0(t); \\ n &= \left[ t x_0(t) / \int_0^t x_0(\tau) d\tau \right] - 1; \\ 2n &= \left[ t x_0^2(t) / \int_0^t x_0^2(\tau) d\tau \right] - 1. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Первая и вторая из этих формул получены в результате дифференцирования и интегрирования формулы (7.12) соответственно, третья — в результате возведения в квадрат формулы (7.12) и интегрирования. Выражения (7.13) используются для составления алгоритма оценки параметра  $n$ , с помощью которого осуществляется самонастройка оптимальной САУ по точности при переменных характеристиках сигнала внешних воздействий (см. рис. 7.2 и 7.3). При наличии на входе САУ помех для реализации алгоритмов (7.13) вместо сигнала  $x_0(t)$  следует использовать сигналы  $\varphi(\tau) = x_0(t) + x_n(t)$ . При этом вычисление параметра  $n$  будет осуществляться с ошибкой, которая будет тем меньше, чем меньше уровень помех.

*Метод линейной аппроксимации.* Для неизвестного аналитического выражения полезного сигнала  $x_0(t)$  можно использовать линейную аппроксимацию

$$x_0(\tau) \approx \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(\tau), \quad (7.14)$$

где  $0 \leq \tau \leq T \leq T_1$ ,  $T$  — интервал времени вычисления  $c_i$ ;  $T_i$  — интервал времени, на котором справедлива аппроксимация;  $\psi_i(\tau)$  — линейно независимые заданные функции. Параметры  $c_i$  находятся методом наименьших квадратов из условия минимальности функционала

$$Q(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(\tau) - x(\tau) \right]^2 d\tau,$$

где  $0 \leq \tau \leq t \leq T_1$ ;  $\tau$  — начало отсчета времени;  $t$  — время начала аппроксимации. Формулы для вычисления  $c_i$  определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \partial Q(t) / \partial c_i &= 2 \sum_{k=0}^n c_k \int_0^t \psi_i(\tau) \psi_k(\tau) d\tau - \int_0^t \psi_i(\tau) d\tau = 0 \\ (i &= 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (7.15)$$

При ортонормированных функциях  $\psi_i(\tau)$ , когда

$$\int_0^T \psi_i(\tau) \psi_k(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

для определения коэффициентов  $c_i$  в момент  $t = T$  можно воспользоваться вместо уравнений (7.15) формулой

$$c_i = \int_0^T \psi_i(\tau) x_0(\tau) d\tau \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (7.16)$$

На основании выражений (7.14) и (7.16) можно составить алгоритм оценки входного полезного сигнала  $x_0(t)$ . Этот алгоритм будет выражен через ортонормированные функции  $\psi_i(\tau)$ , в качестве которых могут быть приняты полиномы Чебышева, Лежандра и др.

Статистический метод используется тогда, когда сигналы внешних воздействий определяются случайными процессами. Оценка параметров производится путем осреднения во времени текущих реализаций сигналов. При этом принимается условие квазистационарности процесса:

$$R(t, t - \tau) \simeq R(t', t' - \tau),$$

где  $(t - T) < t' < (t + T)$ ;  $T > T_0$ ,  $T_0$  — время определения корреляционной функции. Сама же корреляционная функция входного полезного сигнала  $x_0(t)$  определяется для различных  $\tau_i$  выражением

$$R(t, t - \tau_i) = t^{-1} \int_0^t x_0(\eta) x(\eta - \tau_i) d\eta.$$

Затем эти корреляционные функции либо непосредственно применяются для самонастройки САУ, либо по ним находят показатели качества, которые удобно использовать в контурах самонастройки.

Четвертая стадия синтеза контура самонастройки связана прежде всего с определением закона изменения настраиваемых параметров, влияющего на выбор и построение структуры исполнительного устройства САУ. Пусть основной контур системы состоит из объекта управления и регулятора, содержащего корректирующее устройство в цепи главной обратной связи (см. рис. 7.4, а и рис. 7.5). Уравнение динамики объекта управления в векторном виде

$$\dot{X} = f_1 \{X, X_p, F_1 [b_{F1}(t)], \alpha(t)\}, \quad (7.17)$$

где  $\dot{X}$  и  $X$  — вектор состояния объекта управления и его производная соответственно;  $X_p$  — вектор состояния регулятора;  $F_1[b_{F1}(t)]$  — функция возмущающего воздействия с переменными параметрами  $b_F(t)$ ;  $\alpha(t)$  — матрица переменных параметров объекта управления.

Уравнение регулятора в векторном виде записывается как

$$\dot{X}_p = f_2 \{X, X_0 [b_x(t)], F_2 [b_{F_2}(t)], X_p, \beta(t)\}, \quad (7.18)$$

где  $X_0[b_x(t)]$  — вектор полезных входных сигналов регулятора с переменными параметрами  $b_x(t)$ ;  $F_2[b_{F_2}(t)]$  — функция возмущающего воздействия с переменными параметрами  $b_{F_2}(t)$ ;  $\beta(t)$  — матрица переменных параметров регулятора.

В общем случае параметры объекта управления, регулятора и внешних воздействий переменны во времени и случайны.

Определение закона изменения настраиваемых параметров заключается в составлении уравнения

$$\dot{\beta}(t) = f_3 \{X_0 [b_x(t)], F_1 [b_{F_1}(t)], F_2 [b_{F_2}(t)], X_p, \alpha(t), \beta(t)\}. \quad (7.19)$$

Оно находится из условия экстремума функционала (7.11). Уравнение регулятора (7.18) соответствует первичной оптимизации, а уравнение (7.19) — вторичной оптимизации объекта управления.

Таким образом, синтез исполнительного устройства САУ будет определяться уравнениями динамики объекта (7.17) и регулятора (7.18), выбранным критерием самонастройки и принятыми алгоритмами идентификации сигналов внешних воздействий или объекта управления. Эта задача решается различными методами в зависимости от принципа построения контура самонастройки. На практике широко используются два способа определения закона изменения настраиваемых параметров регулятора САУ. Во-первых, это делается по характеристикам полезного входного сигнала. Рассмотрим этот способ на примере самонастройки оптимального фильтра из условия минимальности среднего значения квадрата ошибки. Пусть на вход фильтра поступают полезный сигнал  $x_0(t)$  и помеха (рис. 7.9). Полезный сигнал является непрерывной ограниченной на интервале времени  $[0, t]$  функцией, а помеха — стационарным белым шумом с уровнем спектральной плотности  $N^2$ . Условиями идеальной фильтрации являются  $y(t) \simeq x_0(t)$ , а также минимальность среднего значения квадрата ошибки ( $\epsilon^{-2}(t) = \min$ ) и отсутствие динамической ошибки ( $\epsilon_{x_0}(t) = 0$ ). Структурную схему оптимального фильтра определяют с помощью критерия первичной оптимизации, в качестве которого приняты условия минимальности экстремума:

$$J = \bar{\epsilon}^2(t) = N^2 \int_0^t h(t, \tau) d\tau = \min,$$

где  $h(t, \tau)$  — импульсная переходная функция случайного процесса на выходе фильтра. При этом вводятся следующие ограничения:

$$\epsilon x_0(t) = x_0(t) - y(t) = 0; \quad y(t) = \int_0^t h(t, \tau) x_0(\tau) d\tau.$$

В результате решения этой задачи получаем выражение оптимальной импульсной переходной функции

$$h(t, \tau) = x_0(t) x_0(\tau) \int_0^t x_0^2(\tau) d\tau,$$

которое определяет структурную схему оптимального фильтра с учетом  $n(t, \tau) = p x(t, \tau)$ . Такая структурная схема будет оптимальна при любом полезном сигнале  $x_0(t)$ .

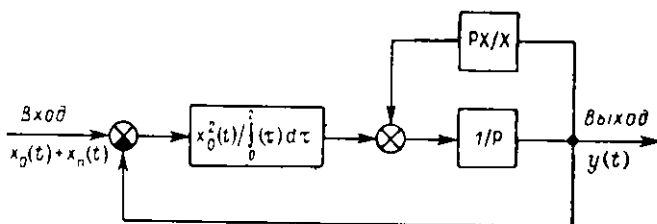


Рис. 7.9.

Во-вторых, определение закона изменения настраиваемых параметров регулятора производится по переменным параметрам объекта управления. Поскольку закон управления в оптимальных САУ зависит от структуры и параметров объекта управления, то при изменении параметров объекта, принятых, если реализована первичная оптимизация, режимы работы объекта будут отличаться от оптимальных. Это обуславливает необходимость использования самонастройки САУ. Нахождение закона изменения настраиваемых параметров регулятора осуществляется с учетом первичной и вторичной оптимизаций, а также алгоритма идентификации объекта управления. При этом используют функции чувствительности и метод стохастической аппроксимации.

Для определения функции чувствительности рассмотрим объект управления с переменными параметрами  $a_i(t)$ . При малых вариациях этих параметров ( $\delta a_i$ ) относительно начальных значений  $a_{i0}$  можно установить влияние переменных параметров на координаты объекта управления. Для этого запишем следующий ряд:

$$x(t, a_i) = x(t, a_{i0} + \delta a_i) = x(t, a_{i0}) + \frac{\partial x(t, a_{i0})}{\partial a_i} \delta a_i + \\ + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 x(t, a_{i0})}{\partial a_i^2} (\delta a_i)^2 + \dots$$

Коэффициент члена этого ряда, который содержит вариацию параметра  $\delta a_i$  в первой степени, называется функцией чувствительности:

$$\Theta_i(t) = \partial x(t, a_{i0}) \partial a_i.$$

Функцию чувствительности можно также определить из дифференциальных уравнений чувствительности, которые можно составить по исходным дифференциальным уравнениям объекта управления или с помощью преобразования Лапласа (например, для линейного объекта управления, описываемого операторным уравнением

$$Y(p, a_i) = W_0(p, a_i) X(p), \quad (7.20)$$

где  $Y(p, a_i)$  и  $X(p)$  — изображения выходной и входной переменных объекта управления соответственно;  $W_0(p, a_i)$  — передаточная функция объекта управления).

Применив обратное преобразование Лапласа к выражению (7.20), получим

$$y(t, a_i) = L^{-1} [W_0(p, a_i) X(p)]. \quad (7.21)$$

Продифференцировав выражение (7.21) по параметру  $a_i$ , получим функцию чувствительности

$$\Theta_i(t) = \frac{\partial x(t, a_{i0})}{\partial a_i} = \frac{\partial \{L^{-1} [W_0(p, a_i) X(p)]\}}{\partial a_i}. \quad (7.22)$$

На основании свойств преобразования Лапласа имеем

$$\Theta_i(t) = L^{-1} \{[\partial W_0(p, a_{i0}) / \partial a_i] X(p)\},$$

а в форме изображения Лапласа

$$\Theta(p) = [\partial W_0(p, a_{i0}) / \partial a_i] X(p). \quad (7.23)$$

Используя выражение (7.23), можно составить передаточную функцию, называемую *вспомогательным оператором*:

$$W_{\text{всп}}(p, a_{i0}) = \Theta(p) X(p) = \partial W_0(p, a_{i0}) \partial a_i.$$

Вспомогательный оператор также используют для определения функции чувствительности  $\Theta(t)$ .

Применение метода стохастической аппроксимации для решения рассматриваемых задач делит их на две группы. В задачах первой необходимо определить значения настраиваемых параметров  $\gamma_i^0$ , которые обеспечивают заданное значение показателя качества  $J_0$ . При этом после самонастройки в САУ установится квазистационарный режим, т. е.  $\gamma_i^0(T_i) = \text{const}$ , а критерий самонастройки  $J$ , являющийся функцией параметра  $\gamma_i$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} J &> J_0 \text{ при } \gamma_i(T_i) > \gamma_i^0(T_i); \\ J &\leq J_0 \text{ при } \gamma_i(T_i) < \gamma_i^0(T_i). \end{aligned}$$

На практике точное изменение  $J$  невозможно из-за действия помех на входе САУ  $x_n(t)$  или объекта управления  $F(t)$  (см. рис. 7.2 и 7.3).

Закон изменения настраиваемых параметров регулятора в этом случае записывается в виде алгоритма стохастической аппроксимации

$$d\gamma_i/dt = k(t) [J_0(t, \gamma_i^0) - J(t, \gamma_i) + n(t)],$$

где  $k(t)$  — некоторый переменный коэффициент;  $n(t)$  — погрешность в измерении из-за наличия помех. Параметр  $\gamma_i$  будет стремиться к значению  $\gamma_0$  с единичной вероятностью при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} k(t) > 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k^2(\tau) d\tau = \text{const}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(\tau) d\tau = \infty. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Эти условия удовлетворяют весьма широкий класс функций. Например,  $k(t) = 1$  при  $0 \leq t \leq 1$ ;  $k(t) = 1/t$  при  $1 \leq t$ .

В задачах второй группы необходимо определить для квазистационарного режима значения параметров  $\gamma_i^0(T_i) = \text{const}$ , при которых критерий самонастройки  $J$  имеет экстремум ( $J_0$ ).

Закон изменения настраиваемых параметров регулятора в этом случае записывается относительно частной производной показателя качества в виде

$$d\gamma_i/dt = \pm k(t) [\partial J(\gamma_i)/\partial \gamma_i + n_i(t)]. \quad (7.25)$$

Здесь плюс берется при максимальном значении  $J_0$ , а минус — при минимальном;  $n_i(t)$  — погрешности измерения из-за наличия в САУ помех. Для обеспечения стремления параметра  $\gamma_i$  к значению  $\gamma_i^0$  с единичной вероятностью необходимо, чтобы коэффициент  $k(t)$  соответствовал условиям, аналогичным (7.24).

Для простейших случаев при отсутствии помех (считая  $k = \text{const}$ ) уравнение (7.25) можно заменить приближенным:

$$d\gamma_i/dt \approx -k \partial J(t, \gamma_i)/\partial \gamma_i.$$

Вычисление частных производных  $\partial J(t, \gamma_i)/\partial \gamma_i$  делается либо с помощью функций чувствительности (7.22) или (7.23), если критерий самонастройки выражен через координаты САУ, либо с помощью ЦВМ, если критерий настройки выражен непосредственно через настраиваемые параметры.

Последняя стадия синтеза контура самонастройки — создание модели или анализатора динамических характеристик объекта управления и системы — может рассматриваться только применительно к конкретному технологическому оборудованию, являющемуся объектом управления.

## 7.6. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

При исследовании самонастраивающихся САУ оценивается качество процессов самонастройки, которое характеризуется точностью обеспечения заданного критерия самонастройки, устойчивостью и качеством переходных процессов. Для исследования самонастраивающихся САУ можно использовать соответствующие рассматриваемому случаю *инженерные методы теории автоматического управления* с учетом специфики самонастраивающихся систем.

Специфические особенности самонастраивающихся систем следующие — необходимость обеспечения времени процесса самонастройки значительно меньшего, чем время изменения параметров состояния объекта управления, необходимость учета значительного изменения параметров, которое вытекает из сущности работы самонастраивающихся систем; проведение исследования динамики системы для большого диапазона изменения ее параметров; замена при интегрировании бесконечных пределов конечными, значения которых определяются пределами рабочего интеграла; необходимость учета существенных нелинейностей в системе; потребность использования статистических методов расчета при учете ряда явлений, возникающих в самонастраивающихся САУ.

В зависимости от специфики работы самонастраивающейся САУ можно использовать следующие методы исследования: *гармонической линеаризации, фазовый, графоаналитический, логарифмических частотных характеристик, статический, математического моделирования* и др., в той или иной мере удовлетворяющие уже перечисленным требованиям.

В общем случае самонастраивающиеся САУ являются нестационарными и нелинейными системами. Нестационарность обусловлена изменяемостью их параметров во времени, корректировка которых и является целью самонастройки. Нелинейность обусловлена прежде всего наличием связи через контур самонастройки настраиваемых параметров регулятора с выходными сигналами системы.

На практике самонастраивающиеся САУ с переменными параметрами в большинстве случаев можно отнести к классу систем с медленно изменяющимися параметрами. Такие системы называются *квазистационарными*. Для исследования квазистационарных самонастраивающихся САУ часто применяют *метод замороженных коэффициентов*. При этом считают, что с момента  $t_i$  параметры САУ остаются неизменными на интервале времени  $[t_i, t_i + T_i]$ . В этом случае уравнения, описывающие динамику САУ, будут иметь постоянные коэффициенты, что позволяет для исследования системы использовать обычные методы теории автоматического управления. Оценив дина-

мику САУ для выбранного момента  $t_i$ , проводят аналогичные исследования для значений коэффициентов в другие моменты ( $t_i$ ) и определяют свойства системы при других значениях коэффициентов.

Основной задачей исследования самонастраивающихся САУ является определение переходного процесса на выходе системы для заданного входного воздействия.

Для исследования нестационарных САУ в общем случае удобнее всего воспользоваться *методом математического моделирования*. На математической модели набираются основной контур управления системой с учетом переменных коэффициентов звеньев и контур самонастройки системы. Это позволяет провести всестороннее исследование самонастраивающихся САУ.

Для исследования самонастраивающихся систем, имеющих случайные параметры, используют *статистические методы*, которые позволяют повысить быстродействие САУ посредством ввода в нее априорной информации об изменении характеристик объекта управления на основании вероятностных предположений. На практике при анализе самонастраивающихся систем часто применяют различные *численные методы* с решением возникающих задач на ЦВМ.

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев Р. А. Промышленные инвариантные системы автоматического управления. М., 1971.
2. Андронов А. А. и др. Теория колебаний. М., 1959.
3. Андриященко В. А. Автоматизированный электропривод систем управления. Изд. 2-е. Л., 1975.
4. Андриященко В. А. Автоматика и автоматизация производственных процессов. Л., 1975.
5. Андриященко В. А. Аппараты и устройства электроавтоматики. Л., 1975.
6. Андриященко В. А. Проектирование и расчет инвариантных систем автоматического управления. Л., 1979.
7. Андриященко В. А. Следящие системы автоматизированного сборочно-го оборудования. Л., 1979.
8. Андриященко В. А. Системы автоматического управления технологическим оборудованием. Л., 1983.
9. Андриященко В. А. Динамический синтез САУ гибких производственных систем. Л., 1986.
10. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., 1968.
11. Ахметжанов А. А. Системы передачи угла повышенной точности. М., 1966.
12. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М., 1976.
13. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Л. Ч. 1, 1965; Ч. 2, 1966; Ч. 3, 1970.
14. Гузенко А. И. Построение логарифмических частотных характеристик систем с комбинированным управлением // Автоматика и телемеханика. 1960. № 11.
15. Гусев В. Г. Методы исследования точности цифровых автоматических систем. М., 1973.
16. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования. М., 1967.
17. Задачник по теории автоматического управления / Под ред. А. С. Шаталова. М., 1971.
18. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. Киев, 1988.
19. Куропаткин П. В. Теория автоматического управления. М., 1973.
20. Куропаткин П. В. Оптимальные и адаптивные системы. М., 1980.
21. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления / Под ред. Ю. И. Толчеева. М., 1971.

22. Николаев Ю. А. и др. Динамика цифровых следящих систем. М., 1970.
23. Новоселов А. И. Автоматическое управление. Л., 1973.
24. Олейников В. А. и др. Основы оптимального и экстремального управления. М., 1969.
25. Проектирование следящих систем / Под ред. Л. В. Рабиновича. М., 1969.
26. Расчет автоматических систем / Под ред. А. В. Фатеева. М., 1973.
27. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. М., 1978.
28. Скворцов Г. В. Синтез корректирующих устройств судовых следящих систем. Л., 1968.
29. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. М., Кн. 1, 2, 1967; Кн. 3, 1969.
30. Теория автоматического управления / Под ред. А. В. Негушила. М., Ч. 1, 1968; Ч. 2, 1972.
31. Уланов Г. М. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М., 1971.
32. Федоров С. М., Литвинов А. П. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. М., 1965.
33. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963.
34. Шишков Б. А. Косвенное измерение возмущений и синтез систем управления // Электропривод и системы управления. М.; Л., 1966.
35. Яворский В. Н. и др. Проектирование инвариантных следящих приводов. М., 1963.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Предисловие</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>3</b>  |
| <b>ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b>                                                                                                                                                                                                            | <b>5</b>  |
| 1.1. Основные понятия и определения . . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | —         |
| 1.2. Классификация систем автоматического управления .                                                                                                                                                                                                                         | 7         |
| 1.3. Программы и законы управления . . . . .                                                                                                                                                                                                                                   | 8         |
| 1.4. Задачи теории автоматического управления . . .                                                                                                                                                                                                                            | 9         |
| <b>ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> . .                                                                                                                                                                                                                | <b>11</b> |
| 2.1. Уравнения типовых звеньев и систем . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | —         |
| <p>Типовые динамические звенья (11). Способы соединения звеньев системы (24). Методика составления структурных схем систем (26). Методика составления дифференциальных уравнений и передаточных функций систем (27).</p>                                                       |           |
| 2.2. Устойчивость линейных систем . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 33        |
| <p>Критерии устойчивости (37). Исследование устойчивости (37). Исследование устойчивости многоконтурных систем (44).</p>                                                                                                                                                       |           |
| 2.3. Исследование качества линейных систем . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 45        |
| <p>Показатели качества работы систем (45). Точность работы систем в установившихся режимах (45). Оценка качества работы систем в переходных режимах (49). Построение кривой переходного процесса (57).</p>                                                                     |           |
| 2.4. Методы улучшения качества работы линейных систем                                                                                                                                                                                                                          | 60        |
| <p>Принципы выбора схемы и расчета параметров корректирующего устройства методом логарифмических характеристик (68). Построение желаемых ЛАЧХ и ЛФЧХ (69). Построение ЛАХ корректирующего устройства (71). Определение схемы и параметров корректирующего устройства (74).</p> |           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>76</b>  |
| 3.1. Особенности нелинейных систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | —          |
| 3.2. Исследование динамики нелинейных систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 81         |
| Возможные состояния равновесия (81). Метод Ляпунова (82). Метод В. М. Попова (83). Фазовый метод (84). Метод гармонического баланса (90).                                                                                                                                                                                                       |            |
| 3.3. Коррекция нелинейных систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 98         |
| <b>ГЛАВА 4. ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>104</b> |
| 4.1. Основные характеристики цифровых систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | —          |
| 4.2. Исследование динамики цифровых систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 115        |
| 4.3. Расчет непрерывной коррекции методом логарифмических частотных характеристик                                                                                                                                                                                                                                                               | 125        |
| 4.4. Расчет дискретной коррекции методом логарифмических частотных характеристик                                                                                                                                                                                                                                                                | 132        |
| <b>ГЛАВА 5. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>137</b> |
| 5.1. Основные понятия об оптимальном управлении                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | —          |
| Критерии оптимальности (137). Основные положения оптимального синтеза (140). Определение статических характеристик объекта по плотности вероятности (145). Определение статических характеристик объекта методом корреляционного анализа (146). Метод экспериментального определения частотных характеристик (148). Методы идентификации (149). |            |
| 5.2. Классификация оптимальных систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 151        |
| 5.3. Методы синтеза оптимального управления в статическом режиме                                                                                                                                                                                                                                                                                | 153        |
| Метод определения оптимального управления, соответствующего экстремуму статической характеристики объекта (153). Методы определения оптимального управления на основе множителей Лагранжа и линейного (нелинейного) программирования (155).                                                                                                     |            |
| 5.4. Методы синтеза оптимального управления в динамическом режиме                                                                                                                                                                                                                                                                               | 158        |
| Классический метод вариационного исчисления (159). Метод динамического программирования (160). Метод принципа максимума (162).                                                                                                                                                                                                                  |            |
| 5.5. Принципы построения оптимальных по точности систем                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 163        |
| Оптимальная стабилизация режимов объекта (164). Оптимальная стабилизация выхода объекта (165). Оптимальное управление объектом по произвольному закону (165). Построение оптимальных по точности работы САУ при случайных сигналах (169).                                                                                                       |            |
| 5.6. Принципы построения оптимальных по быстродействию систем                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 170        |
| <b>ГЛАВА 6. ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>176</b> |

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1. Инвариантность и ее практическая реализация в системах автоматического управления . . . . . | —   |
| 6.2. Комбинированные системы . . . . .                                                           | 184 |
| 6.3. Синтез комбинированных систем на основе типовых передаточных функций . . . . .              | 192 |
| 6.4. Синтез комбинированных систем методом логарифмических частотных характеристик . . . . .     | 207 |

|                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ГЛАВА 7. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ . . . . .                                                                                                                                                                                 | 223 |
| 7.1. Основные понятия . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | —   |
| 7.2. Классификация самонастраивающихся систем . . . . .                                                                                                                                                                                                   | 226 |
| 7.3. Принципы построения систем, самонастраивающихся по сигналам внешних воздействий . . . . .                                                                                                                                                            | 227 |
| 7.4. Принципы построения систем, самонастраивающихся по динамическим характеристикам объектов управления . . . . .                                                                                                                                        | 229 |
| Использование вычислительного устройства для расчета параметров объекта управления (230). Применение эталонных моделей динамических характеристик объектов управления (231). Использование анализаторов характеристик объекта управления и системы (232). |     |
| 7.5. Синтез контура самонастройки . . . . .                                                                                                                                                                                                               | 232 |
| Алгоритмы идентификации объектов управления (236). Алгоритмы оценки параметров сигналов (239).                                                                                                                                                            |     |
| 7.6. Методы исследования самонастраивающихся систем                                                                                                                                                                                                       | 246 |
| Указатель литературы . . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 248 |

Учебное издание

*Андрющенко Владимир Ануфриевич*

**Теория систем  
автоматического управления**

Учебное пособие

Редактор *Т. В. Мызникова*

Художественный редактор *В. В. Пожидает*

Обложка художника *С. В. Алексеева*

Технический редактор *А. В. Борщева, Г. М. Матвеева*

Корректоры *Е. К. Терентьева, Т. Г. Павлова*

ИБ № 3258

---

Сдано в набор 11.12.89. Подписано в печать 13.08.90.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 2. Гарнитура  
литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16.  
Усл. кр.-отт. 16,25. Уч.-изд. л. 15,1. Тираж 6604 экз.

Заказ № 166. Цена 50 коп.

Издательство ЛГУ. 199034, Ленинград,  
Университетская наб., 7/9.

---

Типография Изд-ва ЛГУ. 199034, Ленинград,  
Университетская наб., 7/9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
в 1990 г. выпускает в свет следующие книги:

**Зайченко К. В. Чувствительные элементы со  
структурной избыточностью. 12 л. — 2 р. 40 к.**

Монография посвящена теории, принципам построения, методам и результатам анализа чувствительных элементов (ЧЭ), или дискриминаторов, устройств оценки параметров случайных процессов в различных системах. При высокой разрешающей способности системы показана целесообразность применения синтезированных многоканальных ЧЭ. Разработана методика анализа и рассмотрены чувствительные элементы со структурной избыточностью, и измерители параметров сигналов на их основе, в частности на базе различных типов фурье-процессоров

Для специалистов по теории и технике связи, радио- и гидролокации, системам управления и обработке информации.

**Структуры сложных систем и алгоритмов управления:** Межвуз. сб. / Под ред. Борцова Ю. А., Яковлева В. Б. — 12 л. — (Вопросы теории систем автоматического управления; Вып. 8). — 2 р. 40 к.

В сборнике (вып. 7 вышел в 1987 г.) излагаются вопросы теории систем и прикладные вопросы построения сложных систем управления. Большое внимание уделяется структурным аспектам теории управления, разработке алгоритмов идентификации, управления и адаптации. Приводятся материалы по применению теоретических методов к управлению сложными техническими системами.

Для специалистов в области управления техническими системами.

Заказы направлять по адресу:

191186, Ленинград, Невский пр., д. 28.

Магазин № 1 «Дом книги»

Отдел «Книга — почтой»